October 26, 2020

Condensé de la MPSI
Mathématiques

Ewen Le Bihan
MPSI – Daudet

Contents

1 Processus de démonstration

1.1 Processus élémentaires

1.1.1 Quantification universelle $\forall$

Soit $a \in E$

1.1.2 Quantification existentielle $\exists$

Posons $a = \ldots \in E$

1.1.3 Quantification existentielle unique $\exists!$

Existence *cf. 1.1.2*

Unicité Posons $b \in E$. *Démonstration de* $b = a$

1.1.4 Implication $P \implies Q$

Supposons $P(a)$. Montrons $Q(a)$

1.1.5 Équivalence $P \iff Q$

Procédons par double implication.
$\implies$: *Démonstration de* $P \implies Q$
$\impliedby$: *Démonstration de* $P \impliedby Q$

1.1.6 Inclusion $E \subset F$

Démontrer $\forall x \in \mathbb{E}, x \in E \implies x \in F$.

1.1.7 Égalité ensembliste

Procédons par double inclusion.
$\subset$: Démonstration de $E \subset F$
$\supset$: Démonstration de $E \supset F$

1.1.8 Égalité entre applications

Démontrer $\forall x \in E,\ f(x) = g(x)$

1.2 Processus de démonstration

On commence chaque démonstration utilisant un de ces processus par « Procédons par *nom du processus* »

1.2.1 Récurrence

Pour montrer une propriété vraie dans $E \subseteq \mathbb{N}$

Initialisation *Démontrer la propriété au premier rang*

Hérédité Démontrer $\forall n \in E, P(n) \implies P(n+1)$

Conclusion La propriété étant initialisée et héréditaire, elle est vraie pour tout $n \in E$.

1.2.2 Contraposée

Pour montrer $P \implies Q$ *quand l'implication directe est trop compliquée*
Démontrer $\neg Q \implies \neg P$

1.2.3 l'Absurde

Pour montrer P

Supposons $\neg P$

$\vdots$

On obtient une contradiction.

On a donc P

1.2.4 Disjonction des cas

1er cas: . . . . . .

2ème cas: . . . . . .

$\vdots$

n-ième cas: . . . . . .

Conclusion . . .

1.2.5 Analyse-Synthèse

Pour trouver les solutions d'une équation, inéquation, . . .

Analyse Soit $a \in E$. Supposons $P(a)$.

Réduire le nombre de candidats possibles pour a

Synthèse Testons nos candidats

Conclusion Les solutions sont . . .

2 Dérivation

Attention aux hypothèses!

2.1 Nombre dérivé en un point

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

2.2 Dérivée de f

$$f' = \begin{cases} I \to \mathbb{R} \\ a \mapsto f'(a) \end{cases}$$

2.3 Dérivée usuelles

- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad (\mathrm{id}^n)' = n\mathrm{id}^{n-1}$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sqrt[n]{}' = \frac{1}{n \sqrt[n]{}}$
- $\ln' = \frac{1}{\mathrm{id}}$
- $\exp' = \exp$
- $(a^{\mathrm{id}})' = x \mapsto \ln(a) a^x$
- $\sin' = \cos$
- $\cos' = -\sin$
- $\tan' = \frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2$
- $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$
- $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$
- $\mathrm{th}' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2} = 1 + \mathrm{th}^2$
- $\mathrm{acos}' = \frac{-1}{\sqrt{1 - \mathrm{id}^2}}$
- $\mathrm{asin}' = \frac{1}{\sqrt{1 - \mathrm{id}^2}}$
- $\mathrm{atan}' = \frac{1}{1 + \mathrm{id}^2}$

2.4 Dérivées de composées

- $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad (\lambda u + \mu v)' = \lambda u' + \mu v'$
- $(uv)' = u'v + v'u$
- $(\frac{1}{v})' = \frac{-v'}{v^2}$
- $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$
- $(u \circ v)' = v' \cdot (u' \circ v)$
- $(u^{-1})' = \frac{1}{u' \circ u^{-1}}$

3 Trigonométrie

3.1 Cercle trigonométrique ou unité $\mathcal{C}$

Cercle de centre (0; 0) et de rayon 1.

$$\mathcal{C} = \{(x;\ y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 = 1\} = \{(\cos x;\ \sin x),\ x \in \mathbb{R}\}$$

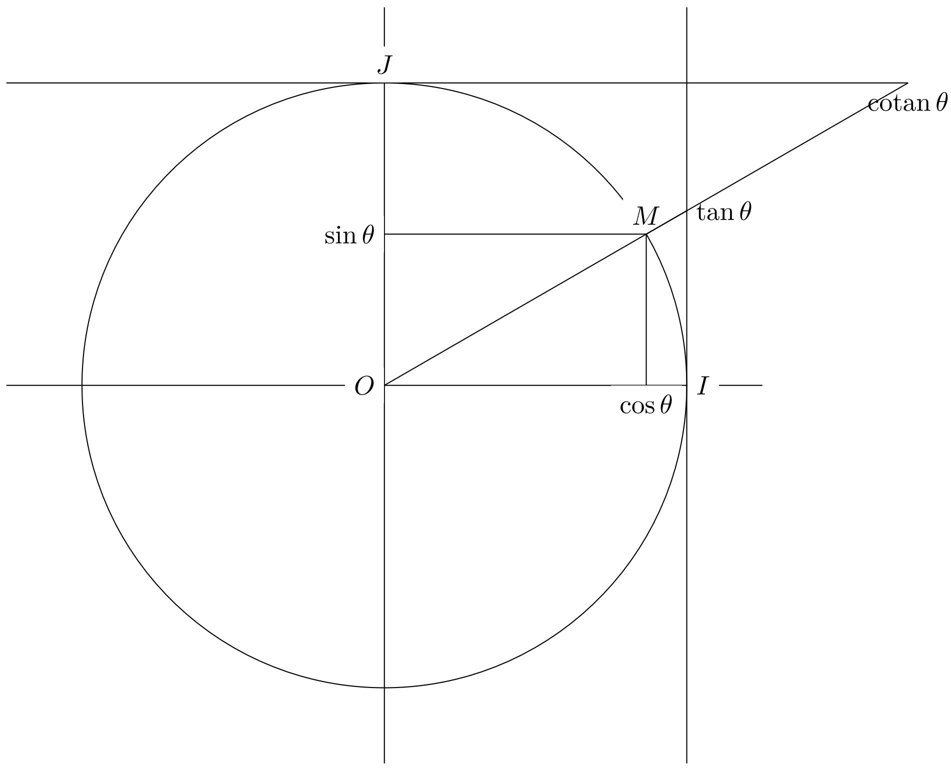
3.2 Congruence $\cdot \equiv \cdot[\cdot]$

$$a \equiv b\ [t] \overset{\text{def}}{\iff} \exists k \in \mathbb{Z},\ a = b + kt$$

3.2.1 Propriétés

- $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R},\ \begin{cases} a \equiv b\ [t] \\ c \equiv d\ [t] \end{cases} \implies a + c \equiv c + d\ [t]$
- $\forall a, b, \lambda \in \mathbb{R},\ a \equiv b\ [t] \implies \lambda a \equiv \lambda b\ [\lambda t]$ et $\begin{cases} \lambda a \equiv \lambda b\ [t] \\ \lambda \in \mathbb{Z} \end{cases}$
- $\cdot \equiv \cdot\ [\cdot]$ est une relation d'équivalence

3.3 cos, sin, tan, cotan



3.3.1 Théorème de Pythagore

$$\cos^2 + \sin^2 = 1$$

3.3.2 Théorème de Thalès

$$\tan = \frac{\sin}{\cos} \qquad \operatorname{cotan} = \frac{\cos}{\sin}$$

Ce qui permet de trouver $\mathcal{D}_{\tan}$ et $\mathcal{D}_{\text{cotan}}$

3.3.3 Propriétés

	périodicité	positif sur [1]	parité	domaine de définition
cos	2π	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	paire	$\mathbb{R}$
sin	2π	$[0, \pi]$	impaire	$\mathbb{R}$
tan	π	$[0, \frac{\pi}{2}[$	impaire	$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi[$
cotan	π	$]0, \frac{\pi}{2}] \cup [-\frac{\pi}{2}, \pi[$	impaire	$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]k\pi, \pi+k\pi[$

Table 1: Propriétés des quatres fonctions trigonométriques

3.3.4 Limite de $\frac{\sin}{\text{id}}$ en 0

$$\frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$$

3.4 acos, asin, atan

$$\begin{cases} \forall x \in [-1,1], & \exists! y \in [0,\pi],\ \cos y = x \\ \forall x \in [-1,1], & \exists! y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],\ \sin y = x \\ \forall x \in \mathbb{R}, & \exists! y \in \,]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[,\ \tan y = x \end{cases}$$

3.5 Équations trigonométriques

$$\begin{cases} \cos x = a & \iff \begin{cases} a \in \{\operatorname{acos} a + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\} \cup \{\operatorname{acos} a + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\} & \text{si } a \in [-1,1] \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases} \\ \sin x = a & \iff \begin{cases} a \in \{\operatorname{asin} a + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \operatorname{asin} a + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\} & \text{si } a \in [-1,1] \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases} \\ \tan x = a & \iff a \in \{\operatorname{atan} a + k\pi, k\in\mathbb{Z}\} \end{cases}$$

3.6 Amplitude C & déphasage ϕ

$$\forall A, B \in \mathbb{R},\ \exists C, \phi \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ A\cos x + B\sin x = C\cos(x-\phi)$$

$$\begin{cases} C > 0 \implies & C \text{ est l'amplitude} \\ & \phi \text{ est le déphasage} \end{cases}$$

3.7 Identités remarquables

- $\forall x \in [-1,1],\ \operatorname{acos} x + \operatorname{asin} x = \frac{\pi}{2}$
- $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \operatorname{atan} x + \operatorname{atan}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$

4 Logique

4.1 Table de vérité

Variable 1	$\cdots$	Variable n	Formule
v	$\cdots$	v	$\ldots$
$\vdots$	(2^n lignes)		$\ldots$
f	$\cdots$	f	$\ldots$

Table 2: Table de vérité pour une formule à n variables

4.2 Connecteurs $\wedge$ $\vee$ $\neg$, relations $\implies$ $\iff$

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \implies Q$	$P \iff Q$
v	v	v	v	v	v
v	f	f	v	f	f
f	v	f	v	v	f
f	f	f	f	v	v

Table 3: Table de vérité pour $\wedge$, $\vee$, $\implies$ et $\iff$

P	$\neg P$
v	f
f	v

Table 4: Table de vérité pour $\neg$

4.3 Égalité sémantique

$(P = Q) \iff P$ a la même table de vérité que Q

4.4 Propriétés des connecteurs $\wedge$ $\vee$ $\neg$

Pour $\vee$ et $\wedge$

Idempotence $P \overset{\wedge}{\vee} P = P$

Commutativité $P \overset{\wedge}{\vee} Q = Q \overset{\wedge}{\vee} P$

Associativité $P \overset{\wedge}{\vee} (Q \overset{\wedge}{\vee} R) = (P \overset{\wedge}{\vee} Q) \overset{\wedge}{\vee} R$

Distributivités $P \overset{\vee}{\wedge} (Q \overset{\wedge}{\vee} R) = (P \overset{\wedge}{\vee} Q) \overset{\vee}{\wedge} (P \overset{\wedge}{\vee} R)$

Pour $\neg$

Involutivité $\neg\neg P = P$

4.5 Quantification existentielle unique $\exists!$

$$[\exists! x \in E,\ P(x)] = [\underbrace{\exists x \in E,\ P(x)}_{\text{existence}} \wedge \underbrace{\forall \gamma_1, \gamma_2 \in E,\ P(\gamma_1) \wedge P(\gamma_2) \implies \gamma_1 = \gamma_2}_{\text{unicité}}]$$

4.6 Négation ¬

4.6.1 Négation de quantificateurs ∃, ∀

$$\neg(\overset{\forall}{\exists}\, x \in E,\ P(x)) = \overset{\exists}{\forall}\, x \in E,\ \neg P(x)$$

4.6.2 Négation de connecteurs ou lois de De Morgan

$$\neg(P \overset{\vee}{\wedge} Q) = \neg P \overset{\wedge}{\vee} \neg Q$$

4.6.3 Identités

- $P \wedge \neg P = f$
- $P \vee \neg P = v$

4.7 Formules

- $P \implies Q = \neg P \vee Q$
- $[\forall x \in \emptyset, P(x)] = v$
- $[\exists x \in \emptyset, P(x)] = f$

5 Équations différentielles

5.1 Recherche de la solution particulière y_p

1. Identifier la forme du second membre
2. Exprimer y_p avec des constantes inconnues
3. Développer $y' + ay = \ldots$ avec $y = y_p$
4. Trouver les constantes inconnues
5. Exprimer y_p

5.1.1 Forme du second membre

- Combinaisaon linéaire $at + b$
- Constante k [2]
- Polynôme du second degré $at^2 + bt + c$
- Exponentielle $ke^{\gamma t}$
- "Trigonométrique" $\alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t)$

5.1.2 Second membre nul

Second membre $= 0 \implies \begin{cases} \text{équation dite homogène} \\ y_p = t \mapsto 0 \end{cases}$

5.2 Premier ordre $y' + ay$

$$\{t \mapsto ke^{-at} + y_p(t),\ k \in \mathbb{R}\}$$

5.3 Second ordre $ay'' + by' + cy$

Équation caractéristique $ar^2 + br + c$

$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$	$(At + B)e^{r_0 t}$	$e^{\mathrm{Re}\,(r_1)t}(A\cos(\mathrm{Im}\,(r_1)t) + B\sin(\mathrm{Im}\,(r_1)t))$

Table 5: Forme des solutions d'une équadiff homogène du second ordre selon le signe de Δ

Forme des solutions selon Δ

Ensemble des solutions

$$\{t \mapsto \text{forme des solutions},\ (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$$

5.4 Problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' + ay &= k \\ y'(b) &= c \end{cases} \quad \text{(premier ordre)} \qquad \begin{cases} ay'' + by' + cy &= k \\ y''(\alpha) &= \beta \\ y'(\gamma) &= \delta \end{cases} \quad \text{(second ordre)}$$

1. Résoudre l'équadiff
2. Résoudre l'équation ou le système en remplaçant y par la forme des solutions

[2] Ici l'expression de y_p devient évidente: $y_p = t \mapsto \frac{k}{a}$

6 Exponentielle imaginaire

6.1 Décomposition des fonctions à valeurs complexes $f = f_1 + if_2$

Soit $I \subseteq \mathbb{R}$

$$\forall f \in \mathbb{C}^I,\ \exists f_1, f_2 \in \mathbb{R}^I,\ f = f_1 + if_2$$

6.2 Relation fonctionnelle

- $\forall \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R},\ e^{i(\theta_1+\theta_2)} = e^{i\theta_1}e^{i\theta_2}$
- $\forall \theta \in \mathbb{R},\ e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$

6.3 Euler

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

6.4 De Moivre

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{Z},\ e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n$$

6.5 Linéarisation $\cos^n(\theta) = \sum \frac{?}{?}\cos(?\theta)$

On cherche à linéariser $\cos^3$

1. Euler
$= \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^3$
2. Binôme de newton
$= 1\left(\frac{e^{i}\theta}{2}\right)^0\left(\frac{e^{-i\theta}}{2}\right)^3 + 3\left(\frac{e^{i\theta}}{2}\right)^1\left(\frac{e^{-i\theta}}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{e^{i}\theta}{2}\right)^2\left(\frac{e^{-i\theta}}{2}\right)^1 + 1\left(\frac{e^{i\theta}}{2}\right)^3\left(\frac{e^{-i\theta}}{2}\right)^0$
3. Moivre
$= \dfrac{e^{-3i\theta}}{2^3} + 3\dfrac{e^{i\theta}}{2}\dfrac{e^{-2i\theta}}{2^2} + 3\dfrac{e^{2i\theta}}{2^2}\dfrac{e^{-i\theta}}{2} + \dfrac{e^{3i\theta}}{2^3}$
$= \dfrac{1}{2^2}\dfrac{e^{3i\theta}+e^{-3i\theta}}{2} + \dfrac{3}{2^2}\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$
4. Euler (réciproque)
$= \frac{1}{4}\cos(3\theta) + \frac{3}{4}\cos(\theta)$

6.6 Arc-moitié $e^{i\cdots} + e^{i\cdots} = e^{\cdots}(e^{\cdots} + e^{\cdots})$

$$\forall \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R},\ e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2} = e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}(e^{i\frac{\theta_1-\theta_2}{2}} + e^{i\frac{\theta_2-\theta_1}{2}})$$

6.7 Forme exponentielle $re^{i\theta}$

$$\forall z \in \mathbb{C}^*,\ z = |z|\exp(i\arg z)$$

6.7.1 Égalité

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*_+,\ z_1 = z_2 \iff \begin{cases} |z_1| & = |z_2| \\ \arg z_1 & \equiv \arg z_2\ [2\pi] \end{cases}$$

6.8 Propriétés de arg

Identiques à celle de ln*, mais avec* $[2\pi]$ *et* $\mathbb{C}^*$ *à la place de* $\mathbb{R}^*_+$

6.9 Racines n-ième de l'unité $\mathbb{U}_n$

$$\mathbb{U}_n = \{\omega \in \mathbb{C},\ \omega^n = 1\} = \{e^{\frac{2ik\pi}{n}},\ k \in [\![0, n-1]\!]\}$$

6.10 Résolution de $z^n = c$

$$\forall c \in \mathbb{C}_+^*,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \{z \in \mathbb{C},\ z^n = c\} = \left\{ \sqrt[n]{|c|} \exp\left(i\frac{\arg c + 2k\pi}{n}\right),\ k \in [\![0, n-1]\!] \right\}$$

6.11 Dérivée d'une exponentielle complexe

$$\forall \phi \in \mathbb{C}^I,\ (\exp \circ \phi)' = \phi' \cdot \exp \circ \phi$$