1 Décompositions LU et Schur par blocs

1.1 Exercice 1

Soit A une matrice non singulière d'ordre n telle que il existe P une matrice de permutation telle que PA peut être factorisé sans pivotation. Considérons la forme en blocs

$$PA = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

On définit la *matrice de Schur* $S = A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$

1. Expliquez comment adapter l'algorithme de factorisation LU pour obtenir la décomposition de PA. On a $PA = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ 0 & S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix}$
2. Montrez que $\det A = \det P \det A_{11} \det S$
3. On suppose savoir comment calculer Y tel que $Y = S^{-1}Z$. Décrivez comment utiliser la factorisation par blocs incomplète précédente pour résoudre $AX = B$.

Correction

1. On exécute l'algorithme de LU usr PA et on l'arrête après q étapes, q étant la taille de A_{11}. On a

$$\begin{aligned} L^{(1)} \cdots L^{(q)} PA &= \left(\begin{array}{c|c} U_{11} & U_{12} \\ \hline 0 & C \end{array}\right) \qquad \text{avec } U_{11} \text{ triangulaire supérieure.} \\ \implies PA &= \underbrace{(L^{(1)})^{-1} \cdots (L^{(q)})^{-1}}_{\begin{pmatrix} \mathcal{T}_{n,s} & 0 \\ \mathcal{M}_n & I \end{pmatrix}} \\ &= \begin{pmatrix} L_{11} & \\ L_{12} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ & C \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   Vérifions que $C = S$.

   On a donc, par blocs:

   - $A_{11} = L_{11}U_{11}$
   - $A_{12} = L_{11}U_{12}$ i.e. $U_{12} = L_{11}^{-1}A_{12}$
   - $A_{21} = L_{21}U_{11}$ i.e. $L_{21} = A_{21}U_{11}^{-1}$
   - $A_{22} = L_{21}U_{12} + C = A_{21}\underbrace{U_{11}^{-1}L_{11}^{-1}}_{A_{11}^{-1}}A_{12} + C$ i.e. $C = A_{12} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$

2.

$$\det(PA) = \det A \det P$$

Or P est une permutation donc $P^\top = P^{-1}$. Ainsi

$$1 = \det I = \det(PP^{-1}) = \det P \det(P^\top) = (\det P)^2$$

$$\begin{aligned}
\det P \det A &= \det \begin{pmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & I \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ 0 & S \end{pmatrix} \\
&= \det L_{11} \det I \det U_{11} \det S \\
&= 1 \cdot 1 \cdot \det U_{11} \det S && \text{car } L_{11} \text{ n'a que des 1 sur la diagonale} \\
\iff \det A &= \det P \det A_{11} \det S && \times \det P \\
\iff \det A &= \pm \underbrace{\det U_{11}}_{\text{non nul car on a pu faire la LU}} \det S
\end{aligned}$$

Donc si A inversible ssi S inversible.

3. On pose $\tilde{\cdot} = P\cdot$

   On a à résoudre:

$$\begin{aligned}
& PAX = \tilde{B} \\
\iff & \begin{pmatrix} L_{11} & \\ L_{21} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \\ & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

   (a) Résolution de $\begin{pmatrix} L_{11} & \\ L_{12} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{pmatrix}$. On appelle ça la *phase de condensation* .

$$\begin{pmatrix} L_{11} & \\ L_{12} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{pmatrix}$$

   - $Z_1 = L_{11}^{-1} \tilde{B}_1$: facile (forward substitution[1])
   - $Z_2 = \tilde{B}_2 - L_{12} Z_1$: trivial

   (b) 2e phase

$$\begin{pmatrix} I & \\ & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} Y_1 & = Z_1 \\ Y_2 & = S^{-1} Z_2 \quad \text{méthode “ad-hoc”} \end{cases}$$

   (c) *Phase d'expansion*

$$\begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} U_{11} X_1 + U_{12} X_2 & = Y_1 \\ X_2 & = Y_2 \end{cases} \iff \begin{cases} X_1 & = U_{11}^{-1}(Y_1 - U_{12} Y_2) \\ X_2 & = Y_2 \quad \text{backward substitution} \end{cases}$$

[1] dernière étape de l'algo de Gauss

1.2 Exercice 2 : Exhibition d'un presque-noyau *(null space)*

cf transparent 19/38

On fait l'hypothèse que $x = 0$ et $\det U_{11} = \det A_{11} \neq 0$. On a $\ker(PA) = \ker A$ car A inversible.

$$\begin{aligned}
X \in \ker A &\iff PAX = 0 \\
&\iff \begin{pmatrix} L_{11} & \\ L_{21} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \iff \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff U_{11}X_1 + U_{12}X_2 = 0 \\
&\iff X_1 = -U_{11}^{-1}U_{12}X_2 \\
&\iff X = \begin{pmatrix} -U_{11}^{-1} & U_{12} \\ I_r & \end{pmatrix} X_2 \in \mathcal{M}_n
\end{aligned}$$

Vérification:

$$PA \begin{pmatrix} U_{11}^{-1}U_{12} \\ I_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} \\ L_{12}I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -U_{11}U_{11}^{-1}U_{12} + U_{12}I_r \\ 0 \end{pmatrix}$$

j'ai décroché là...