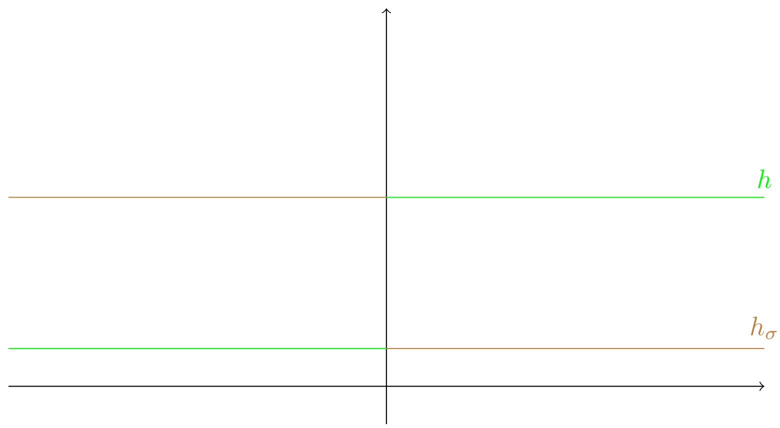
TD 2 Intégration

January 16, 2023

1 Exercice 2

On pose $h = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}$ et $h_\sigma = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^-}$ son symmétrisé



1.

$$\begin{aligned}
\forall \phi, \langle T_h', \phi\rangle &= -\langle T_h, \phi'\rangle \\
&= -\int_{\mathbb{R}} h \cdot \phi' \\
&= -\int_{\mathbb{R}^+} \phi' \\
&= -(0 - \phi(0)) \qquad \phi(+\infty) = 0 \text{ car } \phi \text{ est à support compact} \\
&= \phi(0) \\
&= \langle \delta, \phi\rangle
\end{aligned}$$

Donc $T_h' = \delta$ (par abus de notation: $h' = \delta$).

$$
\begin{aligned}
\forall \phi, \left\langle T'_{h_\sigma}, \phi \right\rangle &= - \left\langle T_{h_\sigma}, \phi' \right\rangle \\
&= - \int_{\mathbb{R}} h_\sigma \cdot \phi' \\
&= - \int_{\mathbb{R}^-} \phi' \\
&= -(\phi(0) - 0) \qquad \phi(-\infty) = 0 \text{ car } \phi \text{ est à support compact} \\
&= -\phi(0) \\
&= \langle -\delta, \phi \rangle
\end{aligned}
$$

Donc $T'_h = -\delta$ (par abus de notation: $h' = -\delta$).

$$
\begin{aligned}
\forall \phi, \left\langle T'_{|\cdot|}, \phi \right\rangle &= - \left\langle T_{|\cdot|}, \phi' \right\rangle \\
&= - \int_{\mathbb{R}} |x| \phi'(x) \mathrm{d}x \\
&= - \int_{-\infty}^{0} -x\phi'(x)\mathrm{d}x - \int_{0}^{+\infty} x\phi'(x)\mathrm{d}x \\
&= + \left(\cancel{[x\phi(x)]_{x=-\infty}^{0}} - \int_{\infty}^{0} \phi \right) - \left(\cancel{[x\phi(x)]_{x=0}^{+\infty}} - \int_{0}^{+\infty} \phi \right) \\
&= \int_{-\infty}^{0} -\phi + \int_{0}^{+\infty} \phi \\
&= \int_{\mathbb{R}} \underbrace{(h - h_\sigma)}_{\text{sgn}} \cdot \phi
\end{aligned}
$$

Donc $|\cdot|' = h - h_\sigma$

On aurait pu le dire direct car $|\cdot|$ est $\mathcal{C}^1$ par morceaux, donc les dérivées des distributions et des fonctions correspondent.

Pareil pour $|\cdot|''$: c'est $\mathcal{C}^1$ par morceaux donc

$$
\begin{aligned}
|\cdot|'' &= h' - h'_\sigma \\
&= \delta - (-\delta) \\
&= 2\delta
\end{aligned}
$$

2. *Si $f \in \mathcal{C}^\infty$ et T un distribution, montrer que l'on a*

$$(fT)' = f' \cdot T + f \cdot T'$$

On peut pas faire d'intégrale car T n'est pas forcément régulière

$$\begin{aligned}
\forall \phi, \langle (fT)', \phi \rangle &= - \langle fT, \phi' \rangle \\
&= - \langle T, f\phi' \rangle \\
&= - \langle T, (f\phi)' - f'\phi \rangle \\
&= - \langle T, (f\phi)' \rangle + \langle T, f'\phi \rangle \\
&= - \langle T, (f\phi)' - f'\phi \rangle \\
&= - \langle T, (f\phi)' \rangle + \langle T, f'\phi \rangle \\
&= \langle fT', \phi \rangle - \langle f'T, \phi \rangle \\
&= \langle fT' + f'T, \phi \rangle
\end{aligned}$$

D'où $(fT)' = fT' + f'T$

3.

$$\begin{aligned}
T' &= |\cdot|' \sin + |\cdot| \sin' \\
&= (h - h_\sigma) \sin + |\cdot| \cos \\
T'' &= (h - h_\sigma)' \sin + (h - h_\sigma) \sin' + |\cdot|' \cos + |\cdot| \cos' \\
&= 2 \underbrace{\underbrace{\delta \sin}_{\sin(0)\delta}}_{0} + 2(h - h_\sigma) \cos + |\cdot| \sin \\
&= 2(h - h_\sigma) \cos - |\cdot| \sin
\end{aligned}$$

2 Exercice 3

Démontrer la formule

$$x^m \delta^{(n)} = (-1)^m \frac{n!}{(n-m)!} \delta^{(n-m)} \quad m \leq n$$

$$
\begin{aligned}
\forall \phi, \langle \mathrm{id}^m \delta, \phi \rangle &= \left\langle \delta^{(n)}, \mathrm{id}^m \phi \right\rangle \\
&= (-1)^n \left\langle \delta, (\mathrm{id}^m \phi)^{(n)} \right\rangle \\
&= (-1)^n (x^m \phi)^{(n)}(0) \\
&= (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\mathrm{id}^m)^{(k)}(0) \phi^{(n-k)}(0) \\
&= (-1)^n n! \binom{n}{n} \phi^{(n-m)}(0) && \text{car } (\mathrm{id}^m)^{(k)}(0) = 0 \text{ pour } k \neq 0 \\
&= (-1)^n \frac{n!}{(n-m)!} \left\langle \delta, \phi^{(n-m)} \right\rangle \\
&= (-1)^n \frac{n!}{(n-m)!} (-1)^{n-m} \left\langle \delta^{(n-m)}, \phi \right\rangle
\end{aligned}
$$

$\implies$ *CQFD.*

Qu'obtient-on pour $m = n$? On a

$$x^n \delta^{(n)} = (-1)^n n! \delta$$

Pour $n = 1$: $\mathrm{id}\, \delta' = -\delta$

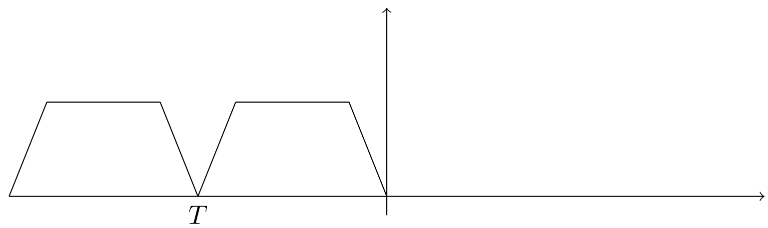
En déduire que la distibution $T = c_0 \delta + \cdots + c_{n-1} \delta^{(n-1)}$ pour $(c_i)_i \in \mathbb{R}$ est solution de l'équation $x^n T = 0$

$$
\begin{aligned}
\forall \phi, \left\langle x^n \delta^{(k)}, \phi \right\rangle &= \left\langle \delta^{(k)}, x^n \phi \right\rangle \\
&= (-1)^k \left\langle \delta, (x^n \phi)^{(k)} \right\rangle \\
&= (-1)^k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (x^n)^{(j)}(0) \phi^{(k-j)}(0) \\
&= 0 \quad \forall k < n
\end{aligned}
$$

Or la somme définissant T s'arrête à $k = n - 1 < n$, donc $x^n T = 0$.

3 Exercice 3

Une fonction périodique



$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} n(t-kT) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (n * \delta_{kT})(t) \end{aligned}$$