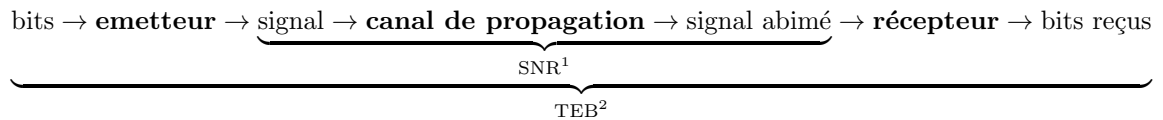


1 Communications numériques

Chaîne de base



1.1 Avantages & inconvénients

Qualité de transmission améliorée TEB = 0 possible même si SNR \neq 0.

Nouvelles fonctions c.f. Codage canal

Bande passante occupée la bande de fréquences est bien plus grande, c.f. codage source

1.2 Éléments de la chaîne de transmission

1.2.1 Codage source

Dans la couche software On affecte moins de bits aux symboles (e.g. lettres) les plus fréquentes:

Si on a les probabilités suivantes:

Lettre	Probabilité
A	0.6
B	0.2
C	0.1
D	0.1

On codera les lettres comme cela:

$$\left\{ \begin{array}{l} A \mapsto 0 \\ B \mapsto 10 \\ C \mapsto 110 \\ D \mapsto 111 \end{array} \right.$$

$$\dots \text{Au lieu d'utiliser un codage naïf} \left\{ \begin{array}{l} A \mapsto 00 \\ B \mapsto 01 \\ C \mapsto 10 \\ D \mapsto 11 \end{array} \right.$$

1.2.2 Codage canal

Dans la couche physique

On envoie chaque bit en triple pour faire une correction d'erreur par vote au décodage (ou tout autre principe de code correcteur):

$$0110 \rightarrow 000 \ 111 \ 111 \ 000 \rightarrow \text{canal de propagation} \rightarrow 001 \ 100 \ 111 \ 111 \rightarrow 0011$$

Donc

Rendement 1/3

Capacité de détection 2 erreurs

Capacité de correction 1 erreur

1.2.3 Modulation

Exemple: NRZ modulé

1.2.4 Synchronisation

On transmet avec une fréquence porteuse, mais il faut revenir à la fréquence du signal original (on appelle ça le *retour en bande de base*).

Mais les cos/sin qu'on utilise pour revenir sont pas exactement les mêmes (niveau fréquence et phase) que ceux utiliser pour aller sur la fréquence porteuse.

Il y a aussi des erreurs *sur l'horloge* (en temps): les erreurs de phase sur l'horloge corresponde au fait qu'on commence à transmettre avec un délai, et l'erreur de fréquence sur l'horloge c'est quand la longueur d'un bit (symbole) n'est pas celle attendue par le récepteur.

1.3 Modulation numérique en bande de base

1.3.1 Exemples

Codage élémentaire On a $T_s = T_b$ (où T_s est la durée d'un symbole, l'élément de donnée transmise et T_b la durée d'un bit, élément de donnée originale)

Codage bloc On a $T_s = nT_b, n \in \mathbb{N}^*$, par exemple 00 devient +3 V, 01 devient +1 V, 10 devient -1 V et 11 devient -3 V.

Codage par niveau Le niveau est constant sur chaque période T_s .

Codage par transition Un symbole est transmis comme un changement de niveau, le niveau change exactement une fois au milieu de chaque T_s .

1.3.2 Construction

Forme d'onde Signal élémentaire de durée T_s utilisé pour transmettre. On multiplie ensuite ce signal par quelque chose pour créer les différents symboles.

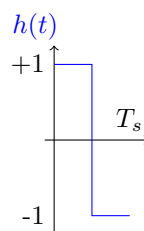


Figure 1: Exemple de la forme d'onde d'Ethernet³

Mapping table de correspondance entre le bit à transmettre et le symbole utilisé.

Table 1: Mapping NRZ⁴ élémentaire par niveau

Bit	Symbole
0	-1 V
1	+1 V

On a donc

$$\begin{aligned} \text{modulé}(t) &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \text{mapping}(\text{bits}_k) \cdot \text{forme d'onde}(t - kT_s) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \text{mapping}(\text{bits}_k) \delta(t - kT_s) * \text{forme d'onde}(t) \quad \text{on reconnaît un processus de filtrage!} \end{aligned}$$

forme d'onde est donc la réponse impulsionnelle d'un filtre appelé *filtre de mise en forme*.

$$\text{bits} \rightarrow \underbrace{\text{mapping} \rightarrow \text{symboles} \rightarrow \text{filtre de mise en forme}}_{\text{modulateur bande de base}} \rightarrow \text{signal}$$

1.3.3 Débit symbolique/binaire

Pour coder n bits par symbole, il faut $(\text{card}\{0, 1\})^n = 2^n =: M$ symboles

M-PAM (Pulse Amplitude Modulation) Ou *modulation par impulsion codée*.

On prend pour symboles $\{\pm V, \pm 3V, \dots, \pm(M-1)V\}$

$$\begin{aligned} T_s &= nT_b \\ \iff \frac{1}{T_s} &= \frac{1}{nT_b} \\ \iff R_s &= \frac{1}{n}R_b \\ &= \frac{R_b}{\log_2(M)} \end{aligned}$$

1.4 Densité spectrale de puissance

La densité spectrale de puissance vaut

$$S_x(f) = \frac{\sigma_a^2}{T_s} |H(f)|^2 + 2 \frac{\sigma_a^2}{T_s} |H(f)|^2 \sum_{k=1}^{\infty} (R_a(k) e^{j2\pi f k T_s}) + \frac{|m_a|^2}{T_s^2} \sum_k \left| H\left(\frac{k}{T_s}\right) \right|^2 \delta\left(f - \frac{k}{T_s}\right)$$

Où

σ_a^2 Variance des symboles

m_a Moyenne des symboles

$R_a(k)$ Intercorrélation centrée réduite du k -ième symbole.

$H(f)$ Transformée de fourier de la forme d'onde

Dans presque tout les cas en pratique, on a des symboles centrés indépendants, donc $m_a = R_a(k) = 0$ et l'expression ne garde que le premier terme de la somme.

Signal “bande de base” Signal dont les fréquences sont centrées autour de 0

1.5 Bande de fréquence occupée par le signal à transmettre B

On a 2 définitions

- Bande contenant $x\%$ de l'énergie du signal ($x \in [95, 99]$)

$$\frac{\int_0^B S_x}{\int_0^\infty S_x} = \frac{x}{100}$$

- Bande au delà de laquelle l'atténuation minimal est de x dB ($x \in [20, 30]$)

Dans les deux cas

$$B \propto R_s$$

1.6 Critères de performance

Efficacité en puissance SNR par bit nécessaire à l'entrée du récepteur pour atteindre un TEB souhaité

Efficacité spectrale η Bande nécessaire pour atteindre un débit binaire souhaité

$$\eta = \frac{R_b}{B} = \frac{\log_2(M)}{k}$$

1.7 Canal de propagation

Lien physique entre émetteur et récepteur. On conçoit les émetteurs et récepteurs *en fonction du canal de propagation*.

1.7.1 Exemples

- Air
- Fibre
- Câble

1.7.2 Distorsions et contraintes

Atténuation Réduction de l'amplitude

Transposition de fréquence Pour mettre le signal autour de la porteuse (fréquentiellement)

Multiplexage On peut diviser par

FDM fréquences

CDM DSP (code spécifique)

TDM temps (l'un après l'autre)

MF-TDM par fréquences et temps (ou d'autres mélanges)

Plusieurs trajets

1. Chaque trajet a sa propre atténuation α , son retard τ et un bruit $n(t)$

$$y(t) = \alpha x(t - \tau) = \alpha \delta(t - \tau) * x(t) + n(t)$$

2. On reçoit les différents trajets

$$y(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \delta(t - \tau_k) * x(t) + n(t)$$

Le canal de propagation est donc un filtre de réponse impulsionnelle $\sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \delta(t - \tau_k)$ auquel on a ajouté un bruit (supposé additif blanc⁵ et Gaussien) $n(t)$.

1.7.3 Cas d'un canal AWGN⁶

Cas d'un canal à un seul trajet en vue directe, le filtre est à module constant et déphasage linéaire en fréquence, donc c'est comme s'il n'y avait que du bruit blanc (d'où le nom)

1.7.4 Canal AWGN à bande passante limitée

Le module du filtre est constant sur la bande passante et nul en dehors, le déphasage est linéaire en fréquence sur la bande passante et nul en dehors.

1.7.5 Canal sélectif en fréquence

Quand le signal se propage sur plusieurs trajets.

1.8 Canal non-stationnaire

Les paramètres changent avec le temps.

⁵DSP constante

⁶Additive White Gaussian Noise

1.9 Rapport signal sur bruit

Avec le critère de Nyquist vérifié, on a

$$z(t_0 + mT_s) = \underbrace{a_m g(t_0)}_{\text{terme utile}} + \underbrace{w(t_0 + mT_s)}_{\text{bruit du canal}}$$

Le rapport SNR aux instants de décision est alors

$$\text{SNR} = \frac{P_{a_m g(t_0)}}{P_w} = \frac{\sigma_a^2 |\mathbf{g}(t_0)|^2}{\sigma_w^2}$$

Or $g = h * h_c * h_r$ donc *SNR dépend de tout les filtres*

$$\begin{aligned} P_x &= \int_{\mathbb{R}} S_x(f) df \\ &= R_x(0) \\ &= E(x(t)x^*(t - \tau))|_{\tau=0} && \text{car signal aléatoire} \\ &= E(|x(t)|^2) \end{aligned}$$

1.9.1 Maximisation

$$\begin{aligned} \text{Maximiser SNR} &\iff \text{Maximiser } \frac{|g(t_0)|}{\sigma_w} \\ &\iff H_r \propto H_e^* e^{-j2\pi f t_0} && \text{avec Cauchy-Schwarz sur } \begin{cases} a &= H_r \\ b^* &= H \cdot H_c e^{j2\pi f t_0} \end{cases} \\ &\iff h_r(t) \propto h_e^*(-t) * \delta(t - t_0) \\ &\iff h_r(t) \propto h_e^*(t_0 - t) \end{aligned}$$

En notant $h_e = h * h_c$ la *forme d'onde reçue*, c'est la forme d'onde associée à chaque symbole, à l'entrée du récepteur.

1.9.2 Exemple

On prend $h(t) = \mathcal{K}_{T_s}$, $h_c(t) = \delta(t)$ (juste un bruit additif) et $h_r(t) = \mathcal{K}_{T_s}$.

Critère de Nyquist En prenant $t_0 = T_s$, on a bien $\begin{cases} g(t_0) &\neq 0 \\ \forall \in \mathbb{Z}^*, g(t_0 + pT_s) &= 0 \end{cases}$.

Maximisation du SNR On a

$$\begin{cases} h_e(t) &= h(t) * h_c(t) = h(t) \\ h_r(t) &= \mathcal{K}_{T_s} = h_e(T_s - t) = h_e(t_0 - t) \end{cases}$$

On a donc maximisation avec un coefficient de proportionnalité de 1.

1.10 Taux d'erreur symbole TES

1.10.1 Cas binaire ($a_m \in \{\pm V\}$)

On pose $Q(x) = P(x \leq X)$ et D_{\min} la distance minimale en amplitude entre deux symboles

$$\begin{aligned} \text{TES} &= Q\left(\frac{Vg(t_0)}{\sigma_w}\right) \\ &= Q\left(\frac{D_{\min}}{2\sigma_w}\right) \end{aligned}$$

1.10.2 TES en fonction de $\frac{E_b}{N_0}$

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{P_{\text{signal reçu}} T_b}{N_0}$$

$$\begin{aligned} \sigma_w^2 &= \frac{N_0}{2} \int_{\mathbb{R}} |H_r(f)|^2 df \\ &= \frac{N_0}{2} \int_{\mathbb{R}} \lambda G(f) e^{j2\pi f t_0} df && \text{si filtrage adapté} \\ &= \lambda \frac{N_0}{2} g(t_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_b &= P_{\text{signal reçu}} N_b \\ &= \int_{\mathbb{R}} S_{\text{signal reçu}}(f) df \cdot T_b \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\sigma_a^2}{T_s} |H(f)|^2 df \cdot T_b && m_a = 0 \text{ et } R_a(k) = 0 \ \forall k \neq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{TES} &= Q\left(\frac{Vg(t_0)}{\sqrt{\lambda \frac{N_0}{2} g(t_0)}}\right) \\ &= Q\left(V \sqrt{\frac{2g(t_0)}{\lambda N_0}}\right) \\ &= Q\left(\mathcal{V} \sqrt{\frac{2\lambda E_b}{\sigma_a^2 N_0}}\right) && \text{car } \sigma_a^2 = V^2 \\ &= Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) && \text{si Nyquist + filtrage adapté} \end{aligned}$$

TES minimisé quand filtrage adapté et Nyquist respecté

1.11 TEB pour un mapping n -aire de GRAY

$$\text{TEB} \approx \frac{\text{TES}}{\log_2 M}$$

$\frac{E_b}{N_0}$ est lié à la puissance d'émission requise