1 Étude de chaînes de transmission en bande de base sur canal AWGN

1.1

Modulateur jusqu'à $\oplus$

Canal de propagation $\oplus$

Démodulateur le reste

1.2

1.2.1 Chaîne 1

- h, h_r: carrés de 0 à T_s
- g : triangle symmétrique de 0 à $2T_s$, pic à $g(T_s) = T_s$.

1. $\exists t_0 = T_s, g(t_0) \neq 0$ et $g(t_0 + pT_s) = 0 \ \forall \in \mathbb{Z}^*$ Donc la chaîne 1 respecte ta daronne.
2. En l'absence d'interférences entre symboles, l'échantillon $z(t_0 + mT_s)$ utilisé pour restimer le symbole a_m émis à mT_s est de la forme

$$z(t_0 + mT_s) = z_m = a_m g(t_0) + w_m$$

où

$$w_m = w(t_0 + mT_s)$$

$$\text{SNR} := \frac{E(|a_m g(t_0)|^2)}{\sigma_w^2} = \frac{(\sigma^2 a + |m_a|^2)|g(t_0)|^2}{\sigma_w^2} = \frac{2T_s}{N_0}$$

Avec σa variance des symboles
et

$$\begin{aligned}\sigma_w^2 = P_w &= \int |H_r(f)|^2 S_m(f) \\ &= \int |h(t)|^2 \mathrm{d}t \times \frac{2N_0}{2} = T_s \frac{N_0}{2}\end{aligned}$$

3. `Figure: deux gaussiennes avec des pics à` $\pm g(t_0)$`, se croisent en` $t = S = 0$

   On choisit le seuil de décision à $S = 0$ car pour $z_m < 0$, $p(z_m | a_m = -1) > p(z_m - a_m = 1)$ et, pour $z_m = 0$, $p(z_m | a_m = +1) > p(z_m | a_m = 1)$

4. $P_b = P(a_m = 1)\underbrace{P(\hat{a_m} = -1|a_m = 1]}_{A} + P(a_m = -1)\underbrace{P(\hat{a_m} = +1|a_m = -1)}_{B}$ Si les symboles sont iid alors $P(a_m = 1) = P(a_m = -1) = \frac{1}{2}$

$$
\begin{aligned}
A &= P(z_m < 0|a_m = 1) \\
&= P(g(t_0) + w_m < 0] \\
&= P(w_m < g(t_0)] \\
&= P(w_m > g(t_0)] \\
&= \int_{g(t_0)}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_w} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_w^2}} \mathrm{d}x \\
&= \int_{\frac{g(t_0)}{\sigma_w}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_w} e^{-\frac{u^2}{2}} \sigma_w \\
&= Q\left(\frac{g(t_0)}{\sigma_w}\right) \\
&= Q\left(\frac{T_s}{\sigma_w}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B &= P(z_m > 0|a_m = -1) \\
&= P(-g(t_0) + w_m > 0] \\
&= P(w_m > g(t_0)] \\
&= Q\left(\frac{T_s}{\sigma_w}\right)
\end{aligned}
$$

Donc

$$P_s = P_b = Q\left(\frac{T_s}{\sigma_w}\right)$$

5.

$$\sigma_w^2 = \frac{N_0 T_s}{2}$$

6.

$$E_s = P_x T_s$$

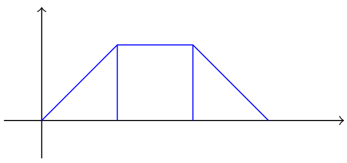
$$
\begin{aligned}
P_x &= \int S_x(f)\mathrm{d}f \\
&= \frac{\sigma_a^2}{T_s} \int |H(f)|^2 \mathrm{d}f \\
&= \sigma_a^2 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

$$E_s = T_s \quad \text{car } E_s = g(t_0)$$

7.

$$E_s = \log_2(M)E_b \quad M = 2,\ E_s = E_b = T_s \text{ et } P_b = Q\left(\frac{E_b}{\sqrt{N_0 E_b}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

1.2.2 Chaîne 2

- h: carré de 0 à T_s
- h_r : carré de 0 à $\frac{T_s}{2}$
- 
  g :

1. $\exists t_0 \in [\frac{T_s}{2}, T_s], g(t_0) \neq 0$ et $g(t_0 + pT_s) = 0\ \forall \in \mathbb{Z}^*$ Donc la chaîne 2 respecte ta daronne.
2. En l'absence d'interférences entre symboles, l'échantillon $z(t_0 + mT_s)$ utilisé pour restimer le symbole a_m émis à mT_s est de la forme

   $$z(t_0 + mT_s) = z_m = a_m g(t_0) + w_m$$

   où

   $$w_m = w(t_0 + mT_s)$$

   $$\text{SNR} := \frac{E(|a_m g(t_0)|^2)}{\sigma_w^2} = \frac{(\sigma^2 a + |m_a|^2)|g(t_0)|^2}{\sigma_w^2} = \frac{T_s}{N_0}$$

   Avec σa variance des symboles

   et

   $$\begin{aligned}\sigma_w^2 = P_w &= \int |H_r(f)|^2 S_m(f) \\ &= \int |h(t)|^2 \mathrm{d}t \times \frac{2N_0}{2} = T_s \frac{N_0}{4}\end{aligned}$$

3. `Figure: deux gaussiennes avec des pics à` $\pm g(t_0)$`, se croisent en` $t = S = 0$ On choisit le seuil de décision à $S = 0$ car pour $z_m < 0$, $p(z_m | a_m = -1) > p(z_m - a_m = 1)$ et, pour $z_m = 0$, $p(z_m | a_m = +1) > p(z_m | a_m = 1)$

4. $P_b = P(a_m = 1)\underbrace{P(\hat{a_m} = -1|a_m = 1]}_{A} + P(a_m = -1)\underbrace{P(\hat{a_m} = +1|a_m = -1)}_{B}$ Si les symboles sont iid alors $P(a_m = 1) = P(a_m = -1) = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
A &= P(z_m < 0|a_m = 1) \\
&= P(g(t_0) + w_m < 0] \\
&= P(w_m < g(t_0)] \\
&= P(w_m > g(t_0)] \\
&= \int_{g(t_0)}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_w} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_w^2}} \mathrm{d}x \\
&= \int_{\frac{g(t_0)}{\sigma_w}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_w} e^{-\frac{u^2}{2}} \sigma_w \\
&= Q\left(\frac{g(t_0)}{\sigma_w}\right) \\
&= Q\left(\frac{T_s}{2\sigma_w}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B &= P(z_m > 0|a_m = -1) \\
&= P(-g(t_0) + w_m > 0] \\
&= P(w_m > g(t_0)] \\
&= Q\left(\frac{T_s}{2\sigma_w}\right)
\end{aligned}$$

Donc

$$P_s = P_b = Q\left(\frac{T_s}{2\sigma_w}\right)$$

5.

$$\sigma_w^2 = \frac{N_0 T_s}{2}$$

6.

$$E_s = P_x T_s$$

$$\begin{aligned}
P_x &= \int S_x(f)\mathrm{d}f \\
&= \frac{\sigma_a^2}{T_s} \int |H(f)|^2 \mathrm{d}f \\
&= \sigma_a^2 \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$E_s = T_s \quad \text{car } E_s = g(t_0)$$

7.

$$E_s = \log_2(M)E_b \quad M = 2,\ E_s = E_b = T_s \text{ et } P_b = Q\left(\frac{E_b}{\sqrt{N_0 E_b}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

1.3

Le cas de la chaîne 1 correspond à l'utilisation d'un filtre adapté. Tout changement par rapport à ce cas est donc sous optimal en termes de probabilité d'erreur binaire.

2 Étude du mapping

2.1

Le mapping respecte le code de *GRAY*.
`Figure: 4 gaussiennes avec des pics en` $\{\pm 1, \pm 3\} g(t_0)$

$$\begin{aligned}
p(\hat{a_m} = -1 | a_m = -3) &= p(z_m < 0 | a_m = -3) \\
&= p(z(t_0 + mT_s) < 0 | a_m = -3) \\
&= p(a_m g(t_0) + w_m < 0 | a_m = -3) \qquad \text{avec } w_m \sim \mathcal{N}(0, \delta_w^2) \text{ et } \delta_w^2 = \frac{N_0}{2} \int |h_r(t)|^2 \mathrm{d}t \\
&= p(-2g(t_0) < -3g(t_0) + w_m < 0) \\
&= p(w_m \in [1, 3] g(t_0)) \\
&= Q\left(\frac{g(t_0)}{\delta_w}\right) - Q\left(\frac{3g(t_0)}{\delta_w}\right)
\end{aligned}$$