Calcul Scientifique

January 26, 2023

1 Localisation des valeurs propres

Théorème d'Hadamard-Gerchgörin Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On a

$$\mathrm{Sp}(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \left\{ z \in \mathbb{C},\ |z - a_{ii}| \leq \sum_{k=1,\ k\neq i}^{n} |a_{ij}| \right\}$$

On a donc en particulier

$$\rho(A) \leq \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

Avec ρ le *rayon spectral*, $\rho(A) = \max |\,\mathrm{Sp}(A)|$

Preuve *()* On a $Au = \lambda u$ avec $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ et $u \in E_\lambda(A)$.

On prend i tel que $\|u\|_\infty = |u_i|$

On pose $v_j = \dfrac{u_j}{u_i}$

Donc $v_i = 1$ et $|v_j| \leq 1$

On a

$$\begin{aligned} Av = \lambda v &\implies \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j = \lambda v_i = \lambda \\ &\implies \lambda - a_{ii} = \sum_{j\neq i} a_{ij} v_j \\ &\implies |\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{j\neq i} |a_{ij} v_j| \leq \sum_{j\neq i} |a_{ij}| \end{aligned}$$

Théorème Puissance itérée Soit A tel que $Sp(A) \subset \mathbb{R}^*$ et $\mathrm{card}\,|Sp(A)| = \mathrm{card}\,\mathrm{Sp}(A)$ [1] On note $(\lambda_i)_i = \mathrm{Sp}(A)$ par ordre de module croissant.

Le résultat de l'algorithme suivant est (λ_1, v_1) avec $v_1 \in E_{\lambda_1}(A)$.

[1] les valeurs propres sont distinctes en module

Preuve *()*

$$x^{(1)} = \frac{Ax^{(0)}}{\|Ax^{(0)}\|}$$

Décomposons $x^{(0)}$ dans la base des vecteurs propres de A (A diagonalisable).
On a

$$x^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i u_i$$

Avec $(u_i)_i$ les vecteurs propres.

$$\begin{aligned}
x^{(1)} &= \frac{Ax^{(0)}}{\|Ax^{(0)}\|} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i \lambda_i u_i}{\|Ax^{(0)}\|} && \text{car } u_i \in E_{\lambda_i}(A) \\
&=: \alpha_1 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i u_i \\
x^{(2)} &= \frac{Ax^{(1)}}{\|Ax^{(1)}\|} \\
&= \frac{\alpha_1}{\|Ax^{(1)}\|} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \xi_i u_i \\
x^{(p)} &= \alpha_p \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^p \xi_i u_i && \text{par récurrence immédiate} \\
&= \alpha_p \lambda_1^p \left(\xi_1 u_1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^p \xi_2 u_2 + \cdots + \xi_1 \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^p u_n \right) \\
&\underset{p\to\infty}{\sim} \alpha_p \lambda_1^p \xi_1 u_1 && \text{car } \left|\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right| \xrightarrow[p\to\infty]{} 0
\end{aligned}$$

Or $\forall p, \|x^{(p)}\| = 1$ donc $|\alpha_p \lambda_1^p \xi_1| \xrightarrow[p\to\infty]{} 1$.
Et ainsi

$$x^{(p)} \underset{p\to\infty}{\sim} \frac{\alpha_p \lambda_1^p \xi_1}{|\alpha_p \lambda_1^p \xi_1|} u_1$$

Critère de stabilité Si $p \in 2\mathbb{N}$ et $\lambda_1 \in \mathbb{R}$

Critère d'arrêt On regarde quand

$$\frac{\|Ax^{(p)} - \beta^{(p)} x^{(p)}\|}{|\beta^{(p)}|} < \varepsilon$$

1.0.1 Opération de déflation

Pour une matrice symétrique.

Principes Soi $B = A - \lambda_1 W_1 W_1^\top$

- $\operatorname{rg} B = n - 1$

À chaque postmultiplication par W_1, on passe une valeur propre à 0 (λ_1 puis λ_2, etc.).

Exercice *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $\lambda \in \operatorname{Sp} A$ et $u \in E_\lambda(A)$. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \operatorname{Sp} A$. Montrer que $\mu = \frac{1}{\lambda - \alpha} \in \operatorname{Sp}(A - \alpha I)^{-1}$, et que $u \in E_\mu((A - \alpha I)^{-1})$.*

On a

$$(A - \alpha I)u = (\lambda - \alpha)u$$

On a

$$\begin{aligned} \alpha \notin \operatorname{Sp}(A) &\iff \ker(A - \alpha I) = \{0\} \\ &\iff A - \alpha I \in GL_n(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{1}{1 - \alpha} u = (A - \alpha I)^{-1} u$$

Soit $A \in S_n(\mathbb{R}) \cap GL_n(\mathbb{R})$ et $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_n|$ les valeurs propres de A. Quelles valeurs l'algorithme suivant permet-il d'obtenir ?

Méthode de la puissance itérée sur shift and inverse *On attrape le spectre par l'autre côté, c'est la méthode de la puissance itérée sur $(A - \alpha I)^{-1}$*

1. $i \leftarrow 0$
2. Jusqu'à convergence
   (a) Résolution du système $Ay_{i+1} = x_i$
   (b) $x_{i+1} = \dfrac{y_{i-1}}{\|y_{i-1}\|}$
   (c) $\beta_{i+1} = x_{i+1}^\top A x_{i+1}$
   (d) $i \leftarrow i + 1$

On obtient la valeur de propre de A la plus proche de α.

Théorème Algorithme de Jacobi pour une matrice symmétrique

Principes Procédé itératif jusqu'à convergence ($A_k \xrightarrow[k \to \infty]{} \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$)

$$\begin{cases} A_1 &= A \\ A_{k+1} &= \Theta_k^{-1} A_k \Theta_k \end{cases}$$

On prend $\Theta_k \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

Rotation de Givens Rotation d'un angle α sur deux coordonnées, les autres restent inchangées.

$$\Theta = \left(\begin{array}{cccccccccc}
1 & & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & & \\
 & & \cos\alpha & & & & -\sin\alpha & & & \\
 & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & \ddots & & & & & \\
 & & & & & 1 & & & & \\
 & & \sin\alpha & & & & \cos\alpha & & & \\
 & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & 1
\end{array}\right)\begin{array}{c}
\\
\\
i \\
\\
c \\
\\
j \\
\\
\\
\\
\end{array}$$

Exemple On prend Θ la rotation de Givens sur (i, j) et $\begin{cases} A & = A_0 \\ A_{k+1} & = \Theta_k^\top A_k \Theta_k \end{cases}$

Notons $E_k = e_i \sqcup e_j$. On a $\Theta_k E_k = E_k \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

On a $S_k = \|A_k\|_{\text{frob}}^2 - D_k$ avec D_k la partie diagonale et $\|\cdot\|_{\text{frob}} = \operatorname{tr}(\cdot^\top \cdot)$

$\Theta_k \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ donc $\|A_{k+1}\|_{\text{frob}}^2 = \|\Theta_k^\top A_k \Theta_k\|_{\text{frob}}^2 = \|A_k\|_{\text{frob}}^2$

$$\begin{aligned}
S_{k+1} &= \|A_{k+1}\|^2 - D_{k+1} \\
&= \|A_k\|^2 - D_{k+1} \\
S_k &= \|A_k\|^2 - D_k \\
\implies S_{k+1} - S_k &= D_k - D_{k+1} \\
&= (a_{ii}^{(k)2} + a_{jj}^{(k)2}) - (a_{ii}^{(k+1)2} + a_{jj}^{(k)2}) \\
&= (\text{c'est remplacé par des cosinus et des sinus, on simplifie\ldots})
\end{aligned}$$