1 Factorisation LU

Quand on triangularise un système linéaire pour un pivot de Gauss, on fait des CLs des lignes et on peut donc écrire la matrice du système comme

$$A = LU$$

Avec A la matrice du système initial, U celle du système triangularisé et L^{-1} les opérations effectuées sur A pour obtenir U.

1.1 Construction de L

Définition: Matrice de transvection $T_{i,j}(\lambda)$

$$T_{i,j}(\lambda) = I + \lambda E_{ij} \qquad\qquad i \neq j$$

1.1.1 Propriétés de la transvection

Produit

$$\prod_{i>j} T_{i,j}(\lambda_{i,j}) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & | & & \\ & \lambda_{\cdot,j} & 1 & \\ & | & & 1 \end{pmatrix}$$

Inverse

$$T_{i,j}(\lambda)^{-1} = T_{i,j}(-\lambda) \qquad\qquad T_{i,j} \in GL_n(\mathbb{R}) \text{ car } \det T_{i,j}(\lambda) = 1$$

Produit de produits

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ | & 1 & & \\ \lambda_{\cdot,1} & & 1 & \\ | & & & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & | & 1 & \\ & \lambda_{\cdot,2} & & 1 \end{pmatrix} \times \cdots = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ | & 1 & & \\ \lambda_{\cdot,1} & | & 1 & \\ | & \lambda_{\cdot,2} & \ddots & 1 \end{pmatrix}$$

Attention *l'ordre est important*

1.2 Existance et unicité

Théorème

$$\exists L, U,\ A = LU \iff \forall k \in [\![1, n[\![, \det(A(1:k, 1:k)) \neq 0$$

$$\exists L, U, A = LU \implies (L, U) \text{ unique et } \ldots$$

...