/TRP1¡¡/ca 1/CA 1¿¿

1 Produit d'une distribution et d'une fonction

$$\begin{aligned}
\langle T_{f'}, \phi \rangle &= \int_{\mathbb{R}} f'(x)\phi(x)\mathrm{d}x \\
&= \cancel{[f(x)\phi(x)]_{-\infty}^{\infty}} - \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi'(x)\mathrm{d}x \\
&= -\left\langle T_f, \underbrace{\phi'}_{\in\mathcal{D}(\mathbb{R})} \right\rangle
\end{aligned}$$

On a $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
\langle T', \phi \rangle &= -\langle T, \phi' \rangle \\
\text{donc} \quad \langle T'', \phi \rangle &= \langle T, \phi'' \rangle \\
\text{par récurrence ok}
\end{aligned}$$

Donc *une distribution est toujours ∞-ment dérivable*

1.1 Exemples

Distribution constante On prend $f = x \mapsto c$ avec $c \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\forall \phi, \left\langle T_f', \phi \right\rangle &= -\langle T_f, \phi' \rangle \\
&= -c\int_{\mathbb{R}} \phi' \\
&= -c[\phi]_{-\infty}^{\infty} \\
&= 0 \\
\text{donc } T_f' &= 0
\end{aligned}$$

Heavyside On prend $h = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}$

$$\begin{aligned}
\langle T_h', \phi\rangle &= -\langle T_f, \phi'\rangle \\
&= -\int_{\mathbb{R}} h \cdot \phi' \\
&= -\int_0^{\infty} \phi' \\
&= -[\phi]_0^{\infty} \\
&= -(-\phi(0)) \\
&= \langle \delta, \phi\rangle \; \forall \phi \\
\implies T_h' &= \delta
\end{aligned}$$

2 Lien distribution de la dérivée et dérivée de la distribution

Théorème Avec $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, on a

$$T_f' = T_{f'}$$

Avec $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ telle que

- $\exists (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}, f \in \mathcal{C}^1(]a_n, a_{n+1}[) \forall n \in \mathbb{Z}$
- $\forall n \in \mathbb{Z}, f(a_n^+) - f(a_n^-) < \infty$ (discontinuités d'amplitude finie)

Alors

$$T_f' = F_{f'} + \sum_{n\in\mathbb{Z}} (f(a_n^+) - f(a_n^-))\delta_{a_n}$$

Preuve *()*

$$\begin{aligned}
\langle T_f', \phi \rangle &= - \langle T_f, \phi \rangle \\
&= - \int_{\mathbb{R}} f \cdot \phi' \\
&= - \int_{-\infty}^{a} f\phi' - \int_{a}^{+\infty} f\phi' \\
&= -[f\phi]_{-\infty}^{a} + \int_{-\infty}^{a} f'\phi - [f\phi]_{a}^{+\infty} + \int_{a}^{+\infty} f'\phi \\
&= -f(a^-)\phi(a) - (-f(a^+)\phi(a)) + \int_{\mathbb{R}} f'\phi \\
&= T_{f'} + (\underbrace{f(a^-) - f(a^+)}_{\text{amplitude de la discontinuité en } a\text{: } \sigma_a})\delta_a
\end{aligned}$$

Définition: Convergence dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \langle T_n, \phi \rangle \xrightarrow[n \to +\infty]{} \langle T, \phi \rangle$$

2.1 Exemples

$f_n(x) = n\mathbb{1}_{[-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}]}(a)$ On prend $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
|\langle T_{f_n}, \phi \rangle - \langle \delta, \phi \rangle| &= \left| \int_{\mathbb{R}} f_n \cdot \phi - \left(\underbrace{\int_{\mathbb{R}} f}_{1} \right) \phi(0) \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}} f_n(x)(\phi(x) - \phi(0))\mathrm{d}x \right| \\
&\leq n \int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} |\phi(x) - \phi(0)|\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Or

$$\left| \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x - 0} \right| \leq M \quad \text{pour } |x| \leq \varepsilon$$

Donc

$$
\begin{aligned}
n\int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} |\phi(x)-\phi(0)|\mathrm{d}x &\leq n\int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} M|x|\mathrm{d}x \\
&\leq \frac{M}{4n} \\
&\xrightarrow[n\to\infty]{} 0
\end{aligned}
$$

Enfin:

$$T_{f_n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}'} \delta$$

Somme de diracs Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ tel que $\int_{\mathbb{R}} f = 1$

Soit $f_n(x) = nf(nx)$

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f_n &= \int_{\mathbb{R}} nf(nx)\phi(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}} \underbrace{f(y)\phi(\frac{y}{n})}_{g_n(y)} \mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

On fait une convergence dominée:

- $g_n(y) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(y)\phi(0)$
- $|g_n(y)| < \underbrace{\|\phi\|_\infty |f(y)|}_{\in L'(\mathbb{R})}$

$$
\begin{aligned}
\langle T_{f_n}, \phi\rangle &\xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{\mathbb{R}} f(y)\phi(0)\mathrm{d}y \\
&= \phi(0) \\
&= \langle \delta, \phi\rangle
\end{aligned}
$$

Donc

$$T_{f_n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}'} \delta$$

$$
\begin{aligned}
\langle T_{f_n}, \phi \rangle &= \int_{\mathbb{R}} \sin(2\pi x)\phi(x)\mathrm{d}x \\
&= -\operatorname{Im}\hat{\phi}(x) \\
&\xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}'} 0
\end{aligned}
$$

Théorème Convergence dans $L^p(\mathbb{R})$ et dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions qui converge vers f dans $L^p(\mathbb{R})$.

Alors

$$
T_{f_n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}'(\mathbb{R})} T_f
$$

Preuve *()* Pour $p = 2$

$$
\begin{aligned}
|\langle T_{f_n}, \phi\rangle - \langle T_f, \phi\rangle| &= \left| \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\phi(x)\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(x)\mathrm{d}x \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)||\phi(x)|\mathrm{d}x \\
&\leq \|f_n - f\|_{L^2}\|\phi\|_{L^2} && \text{Cauchy-Schwarz} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0
\end{aligned}
$$

Pour p quelconque

Soit p tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

On a la majoration par

$$
\underbrace{\|f_n - f\|_{L^p}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0} \|\phi\|_{L^q}
$$

Théorème Convergence ponctuelle et dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions qui converge simplement vers f, i.e. $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$p.p.

Si

$$
\exists g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}), \forall n, |f_n(x)| \leq g(x)\text{p.p.}
$$

Alors

$$
T_{f_n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}'(\mathbb{R})} T_f
$$

Preuve *()* On a

$$\langle T_{f_n}, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{f_n(x)\phi(x)}_{g_n(x)} \,\mathrm{d}x$$

Avec

- $g_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)\phi(x)$
- $|g_n(x)| \leq g(x)|\phi(x)| \in L'$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} g(x)|\phi(x)|\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}} g(x)|\phi(x)|\mathrm{d}x \\ &\leq \|\phi\|_\infty \underbrace{\int_{\mathbb{R}} g}_{<\infty}\end{aligned}$$

3 Convergence des dérivées

Théorème On a

$$T_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}'(\mathbb{R})} T \implies \forall k \in N, T_n^{(k)} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}'(\mathbb{R})} T^{(k)}$$

convergence