

1 Produit d'une distribution et d'une fonction

$$\begin{aligned}
 \langle T_{f'}, \phi \rangle &= \int_{\mathbb{R}} f'(x) \phi(x) dx \\
 &= \cancel{[f(x)\phi(x)]_{-\infty}^{\infty}} - \int_{\mathbb{R}} f(x) \phi'(x) dx \\
 &= - \left\langle T_f, \underbrace{\phi'}_{\in \mathcal{D}(\mathbb{R})} \right\rangle
 \end{aligned}$$

On a $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
 \langle T', \phi \rangle &= - \langle T, \phi' \rangle \\
 \text{donc } \langle T'', \phi \rangle &= \langle T, \phi'' \rangle \\
 \text{par récurrence ok}
 \end{aligned}$$

Donc *une distribution est toujours ∞ -ment dérivable*

1.1 Exemples

Distribution constante On prend $f = x \mapsto c$ avec $c \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
 \forall \phi, \langle T'_f, \phi \rangle &= - \langle T_f, \phi' \rangle \\
 &= -c \int_{\mathbb{R}} \phi' \\
 &= -c[\phi]_{-\infty}^{\infty} \\
 &= 0 \\
 \text{donc } T'_f &= 0
 \end{aligned}$$

Heavyside On prend $h = \mathcal{H}_{\mathbb{R}^+}$

$$\begin{aligned}
\langle T'_h, \phi \rangle &= -\langle T_f, \phi' \rangle \\
&= -\int_{\mathbb{R}} h \cdot \phi' \\
&= -\int_0^{\infty} \phi' \\
&= -[\phi]_0^{\infty} \\
&= -(-\phi(0)) \\
&= \langle \delta, \phi \rangle \forall \phi \\
\implies T'_h &= \delta
\end{aligned}$$

2 Lien distribution de la dérivée et dérivée de la distribution

Avec $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, on a

$$T'_f = T_{f'}$$

Avec $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ telle que

- $\exists (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}, f \in \mathcal{C}^1([a_n, a_{n+1}[) \forall n \in \mathbb{N}$
- $\forall n \in \mathbb{N}, f(a_n^+) - f(a_n^-) < \infty$ (discontinuités d'amplitude finie)

Alors

$$T'_f = F_{f'} + \sum_{n \in \mathbb{N}} (f(a_n^+) - f(a_n^-)) \delta_{a_n}$$

$$\begin{aligned}
\langle T'_f, \phi \rangle &= -\langle T_f, \phi' \rangle \\
&= -\int_{\mathbb{R}} f \cdot \phi' \\
&= -\int_{-\infty}^a f \phi' - \int_a^{+\infty} f \phi' \\
&= -[f\phi]_{-\infty}^a + \int_{-\infty}^a f' \phi - [f\phi]_a^{+\infty} + \int_a^{+\infty} f' \phi \\
&= -f(a^-)\phi(a) - (-f(a^+)\phi(a)) + \int_{\mathbb{R}} f' \phi \\
&= T_{f'} + (\underbrace{f(a^-) - f(a^+)}_{\text{amplitude de la discontinuité en } a: \sigma_a}) \delta_a
\end{aligned}$$

[Convergence dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$]

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \langle T_n, \phi \rangle \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \langle T, \phi \rangle$$

2.1 Exemples

$f_n(x) = n\chi_{[-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}]}(x)$ On prend $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} |\langle T_{f_n}, \phi \rangle - \langle \delta, \phi \rangle| &= \left| \int_{\mathbb{R}} f_n \cdot \phi - \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} f \right)}_1 \phi(0) \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}} f_n(x)(\phi(x) - \phi(0)) dx \right| \\ &\leq n \int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} |\phi(x) - \phi(0)| dx \end{aligned}$$

Or

$$\left| \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x - 0} \right| \leq M \quad \text{pour } |x| \leq \varepsilon$$

Donc

$$\begin{aligned} n \int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} |\phi(x) - \phi(0)| dx &\leq n \int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} M|x| dx \\ &\leq \frac{M}{4n} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Enfin:

$$T_{f_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}'} \delta$$

Somme de diracs Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ tel que $\int_{\mathbb{R}} f = 1$

Soit $f_n(x) = nf(nx)$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f_n &= \int_{\mathbb{R}} n f(nx) \phi(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \underbrace{f(y) \phi\left(\frac{y}{n}\right)}_{g_n(y)} dy\end{aligned}$$

On fait une convergence dominée:

- $g_n(y) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(y) \phi(0)$
- $|g_n(y)| < \underbrace{\|\phi\|_{\infty} |f(y)|}_{\in L'(\mathbb{R})}$

$$\begin{aligned}\langle T_{f_n}, \phi \rangle &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f(y) \phi(0) dy \\ &= \phi(0) \\ &= \langle \delta, \phi \rangle\end{aligned}$$

Donc

$$T_{f_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}'} \delta$$

$$\begin{aligned}\langle T_{f_n}, \phi \rangle &= \int_{\mathbb{R}} \sin(2\pi x) \phi(x) dx \\ &= -\operatorname{Im} \hat{\phi}(x) \\ &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}'} 0\end{aligned}$$

[Convergence dans $L^p(\mathbb{R})$ et dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$] Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions qui converge vers f dans $L^p(\mathbb{R})$.

Alors

$$T_{f_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}'(\mathbb{R})} T_f$$

Pour $p = 2$

$$\begin{aligned}|\langle T_{f_n}, \phi \rangle - \langle T_f, \phi \rangle| &= \left| \int_{\mathbb{R}} f_n(x) \phi(x) dx - \int_{\mathbb{R}} f(x) \phi(x) dx \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| |\phi(x)| dx \\ &\leq \|f_n - f\|_{L^2} \|\phi\|_{L^2} \quad \text{Cauchy-Schwarz} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0\end{aligned}$$

Pour p quelconque

Soit p tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

On a la majoration par

$$\underbrace{\|f_n - f\|_{L^p}}_{n \rightarrow \infty} \|\phi\|_{L^q} \rightarrow 0$$

[Convergence ponctuelle et dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$] Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions qui converge simplement vers f , i.e. $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$ p.p.

Si

$$\exists g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}), \forall n, |f_n(x)| \leq g(x) \text{ p.p.}$$

Alors

$$T_{f_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}'(\mathbb{R})} T_f$$

On a

$$\langle T_{f_n}, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{f_n(x)\phi(x)}_{g_n(x)} dx$$

Avec

- $g_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)\phi(x)$
- $|g_n(x)| \leq g(x)|\phi(x)| \in L^1$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} g(x)|\phi(x)| dx &= \int_{\mathbb{R}} g(x)|\phi(x)| dx \\ &\leq \|\phi\|_{\infty} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} g}_{< \infty} \end{aligned}$$

3 Convergence des dérivées

On a

$$T_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}'(\mathbb{R})} T \implies \forall k \in \mathbb{N}, T_n^{(k)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}'(\mathbb{R})} T^{(k)}$$