1 Régression linéaire simple

2 Courbe étalon

3 U.S. Census

3.1

$$(P)\begin{cases}\min r(\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{10}\left\| \underbrace{y_{1900+10k}}_{\text{donnée expérimentale}} - \underbrace{y(1900+10k)}_{\text{modèle}} \right\|^2 \\ (\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3) \in \mathbb{R}^4\end{cases}$$

$$r : \begin{cases}\mathbb{R}^4 & \to \mathbb{R}^{11} \\ \beta & \mapsto \begin{pmatrix} r_1(\beta) \\ | \\ r_{11}(\beta)\end{pmatrix}\end{cases} \qquad \text{avec} \quad r_i(\beta) = y_i - (\beta_0 + \beta_1 t_i + \beta_2 t_i^2 + \beta_3 t_i^3)$$

3.2

$$(P)\begin{cases}\min f(\beta) & = \frac{1}{2}\|r(\beta)\|^2 = \frac{1}{2}\|y - X\beta\|^2 \\ \beta & \in \mathbb{R}^4\end{cases}$$

où

- β est le quadruplet des paramètres du modèle $(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$.
- $y = \begin{pmatrix} 75.995 \\ 91.972 \\ 105.711 \\ \vdots \\ 281.422 \end{pmatrix}$
- $X = \begin{pmatrix} 1 & 1900 & 1900^2 & 1900^3 \\ 1 & 1910 & 1910^2 & 1910^3 \\ 1 & 1920 & 1920^2 & 1920^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2000 & 2000^2 & 2000^3 \end{pmatrix}$

4 Maintenance d'un réseau de distribution

4.1

$$(P)\begin{cases}\min r(\beta) & = \min \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{25}\|y_k - y(x_{1k}, x_{2k})\|^2 \\ \beta & \in \mathbb{R}^3\end{cases}$$

$$r : \begin{cases}\mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^{25} \\ (x_1,x_2) & \mapsto \begin{pmatrix} r_1(x_1,x_2) \\ \vdots \\ r_{25}(x_1,x_2)\end{pmatrix}\end{cases} \qquad \text{avec} \quad r_i : (x_1,x_2) \mapsto y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_{1,i} + \beta_2 x_{2,i})$$

4.2

$$(P)\begin{cases}\min f(\beta) & = \frac{1}{2}\|r(\beta)\|^2 = \frac{1}{2}\|y - X\beta\|^2\\ \beta & \in \mathbb{R}^3\end{cases}$$

où

- β est le triplet des paramètres du modèle $(\beta_0, \beta_1, \beta_2)$.
- $y = \begin{pmatrix}16.68\\ 11.50\\ 12.03\\ \vdots\\ 10.75\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{25}$
- $X = \begin{pmatrix}1 & 7 & 560\\ 1 & 3 & 220\\ 1 & 3 & 340\\ 1 & 4 & 80\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & 4 & 150\end{pmatrix}$

5 Production d'une éolienne

5.1

$$y(x, \beta) = \begin{cases}\beta_1 & \text{si} \quad x \leq 5\\ \beta_2 & \text{si} \quad x \geq 15\\ \beta_3 + \beta_4 x & \text{sinon}\end{cases}$$

β est donc de dimension 4.

5.2

$$(P)\begin{cases}\min r(\beta) = \min \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{20} \|y_k - y(k, \beta)\|^2\\ \beta \in \mathbb{R}^4\end{cases}$$

Ce problème est linéaire:

$$(P)\begin{cases}\min f(\beta) & = \frac{1}{2}\|r(\beta)\|^2 = \frac{1}{2}\|y - X\beta\|^2\\ \beta & \in \mathbb{R}^4\end{cases}$$

où

- β est le triplet des paramètres du modèle $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$.
- $y = \begin{pmatrix}10.0\\ 10.0\\ 10.01\\ \vdots\\ 55.0\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{20}$

- $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

  On pourrait aussi avoir que deux paramètres

$$y(x,\beta) = \begin{cases} \beta_1 & \text{si } x \leq 5 \\ \beta_2 & \text{si } x \geq 15 \\ \frac{\beta_2-\beta_1}{10}(x-5)+\beta_1 & \text{sinon} \end{cases}$$

  ou encore mieux:

$$y(x,\beta) = \begin{cases} \beta_3 + 5\beta_4 & \text{si} x \leq 5 \\ \beta_3 + 15\beta_4 & \text{si } x \geq 15 \\ \beta_3 + \beta_4 x & \text{sinon} \end{cases}$$

6 Géoréférence d'une image satellite

6.1

Les paramètres $(\gamma_i)_{i\in[\![0,5]\!]}$ modélisent x, les données sont donc les $(x_i)_{i\in[\![1,23]\!]}$.

6.2

$$(P) \begin{cases} \min x(\gamma) & = \frac{1}{2}\|r(\beta)\|^2 = \frac{1}{2}\|x - X\gamma\|^2 \\ \gamma & \in \mathbb{R}^6 \end{cases}$$

où

- γ est le 6-uplet des paramètres du modèle $(\gamma_0, \dots, \gamma_5)$.
- $x = (x_i)_{i\in[\![1,23]\!]}$
- $$X = \begin{pmatrix} 1 & x'_1 & y'_1 & x'^2_1 & x'_1y'_1 & y'^2_1 \\ 1 & x'_2 & y'_2 & x'^2_2 & x'_2y'_2 & y'^2_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x'_{23} & y'_{23} & x'^2_{23} & x'_{23}y'_{23} & y'^2_{23} \end{pmatrix}$$

6.3

Les paramètres $(\delta_i)_{i\in[\![0,5]\!]}$ modélisent y, les données sont donc les $(y_i)_{i\in[\![1,23]\!]}$.

$$(P)\begin{cases}\min y(\delta) & = \frac{1}{2}\|r(\beta)\|^2 = \frac{1}{2}\|y - X\delta\|^2 \\ \delta & \in \mathbb{R}^6\end{cases}$$

où

- δ est le 6-uplet des paramètres du modèle $(\delta_0, \dots, \delta_5)$.
- $y = (y_i)_{i\in[\![1,23]\!]}$
- $$X = \begin{pmatrix} 1 & x'_1 & y'_1 & x'^2_1 & x'_1y'_1 & y'^2_1 \\ 1 & x'_2 & y'_2 & x'^2_2 & x'_2y'_2 & y'^2_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x'_{23} & y'_{23} & x'^2_{23} & x'_{23}y'_{23} & y'^2_{23}\end{pmatrix}$$

7 Réservoir cylindrique

7.1

$$(P)\begin{cases}\min_{\beta\in\mathbb{R}^2} & (-V(\beta)) \\ \beta & = (\underbrace{r}_{\text{rayon de la base}}, \underbrace{h}_{\text{hauteur}}) \\ 2\pi rh & < S_{\text{lat}} \\ 2\pi rh + 4\pi r & < S_{\text{tot}}\end{cases}$$

8 Octogone entre reufs

8.1

La position est $\vec{x_i}$ avec $i \in [\![1,p]\!]$. On pose $\xi = (x_i)_{i\in[\![1,p]\!]} \min_{(i,j)\in[\![1,p]\!]^2\setminus\{(a,a),a\in[\![1,p]\!]\}} \|x_i - x_j\|$

$$(P)\begin{cases}\max \xi & \text{ou} \min(-\xi) \\ \forall i \in [\![1,p]\!],\ \|x_i - a\| < \delta\end{cases}$$

9 Neurone

9.1

$$(P)\begin{cases}\min r(\beta) \\ \beta \in \mathbb{R}^{n+1}\end{cases}$$

Avec

$$r : \begin{cases}\mathbb{R}^{n+1} & \to \mathbb{R}^n \\ \beta & \mapsto (y_k - g(x_k \sqcup \beta))_{k\in[\![1,n]\!]}\end{cases}$$

9.2

$g = \sigma \circ l$ or σ n'est pas linéaire et l l'est (selon $(w_1, \dots, w_n, b)$), donc g n'est **pas** linéaire

9.3

Si $\sigma = \text{id}$, alors $g = \sum_{k=1}^{n} w_k x_k + b$, qui est linéaire selon $(w_1, \dots, w_n, b)$:

$$\begin{aligned} g(\lambda\beta + \gamma) &= \sum_{k=1}^{n} (\lambda w_{\beta,k} + w_{\gamma,k}) x_k + \lambda b_\beta + b_\gamma \\ &= \lambda \left(\sum_{k=1}^{n} w_{\beta,k} x_k + b_\beta \right) + \sum_{k=1}^{n} w_{\gamma,k} + b_\gamma \\ &= \lambda g(\beta) + g(\gamma) \end{aligned}$$

Donc $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n & 1 \end{pmatrix}$