TD 1 Intégration

January 11, 2023

fkoudohode@laas.fr

1 Exercice 2

Dans cet exercice, on calcule la transformée de Fourier de $x(t) = e^{-at^2}$ $(a > 0\ )$ en résolvant une équation différentielle. Vérifier que X est solutionde l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}f}(f) = 2\frac{\pi^2}{a} f X(f)$$

En déduire que

$$X(f) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\pi^2 \frac{f^2}{a}}$$

On rappelle que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2} \mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$.

Correction Soit $X = \mathcal{F}(x)$

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-2i\pi f t} \mathrm{d}t \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(f,t) \mathrm{d}t \end{aligned}$$

$g \in \mathcal{C}^1$ et

- $\frac{\partial g}{\partial f}(f,t) = -2i\pi t e^{-at^2} e^{-2i\pi f t}$
- $\left| \frac{\partial g}{\partial f}(f,t) \right| \leq 2\pi |f| e^{-af^2}$

$\frac{\partial g}{\partial f}$ est absoluement intégrable donc intégrable. D'après le théorème de dérivation de fonction définie par intégration

$$
\begin{aligned}
X'(f) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial g}{\partial f}(f,t)\mathrm{d}t \\
&= -2i\pi \int_{\mathbb{R}} te^{-at^2}e^{-2i\pi ft}\mathrm{d}t \\
&= (-2i\pi) \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{e^{-at^2}}{-2a}\right)' e^{-2i\pi tf}\mathrm{d}t \\
&= (-2i\pi) \left(\underbrace{\left[\frac{e^{-at^2}}{-2a}e^{-2i\pi tf}\right]_{-\infty}^{+\infty}}_{0} - \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-at^2}}{-2a} 2i\pi f e^{-2i\pi ft}\mathrm{d}t \right) \\
&= \frac{(-2i\pi)^2}{2a} f \int_{\mathbb{R}} e^{-at^2}e^{-2i\pi ft}\mathrm{d}t \\
&= -\frac{4\pi^2}{2a} fX(f) \\
&= -2\frac{\pi^2}{a} fX(f)
\end{aligned}
$$

On pose $X(f) = Ke^{-\int 2\frac{\pi^2}{a}f\mathrm{d}f} = Ke^{-\frac{\pi^2}{a}f^2}$
Or $X(0) = K$ donc $K = \int_{\mathbb{R}} e^{-at^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$
D'où

$$
X(f) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\pi^2}{a}f^2}
$$

2 Exercice 4

On suppose f solution de

$$
f'' - 4\pi^2 \operatorname{id}^2 f = 4\pi f
$$

.

Montrons

$$
\widehat{f}'' - 4\pi^2 \operatorname{id}^2 \widehat{f} = 4\pi \widehat{f} \quad (*)
$$

Or on sait

$$
\widehat{f''} = (-2i\pi \operatorname{id})^2 \widehat{f} \quad \text{i.e.} \quad \widehat{f} = \frac{1}{-4\pi^2 \operatorname{id}^2}\widehat{f''}
$$

On remplace dans $(*)$ et ok.

3 Exercice 5

Calculons

$$\widehat{f} = \mathcal{F}\big[t \mapsto \mathbb{1}_{]-1,1[}(t)(1-t^2)\big]$$

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(t) &= \int_{-1}^{1} (1-x^2)e^{-2i\pi xt}\mathrm{d}x \\
&= \left[(1-x^2)\frac{e^{-2i\pi xt}}{-2i\pi t}\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} -2x\left(\frac{e^{-2i\pi tx}}{-2i\pi t}\right)\mathrm{d}x && \text{IPP} \\
&= \frac{2}{-2i\pi t}\int_{-1}^{1} xe^{-2i\pi tx}\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{-2i\pi t}\left(\left[x\frac{e^{-2i\pi tx}}{-2i\pi t}\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\frac{e^{-2i\pi tx}}{-2i\pi t}\mathrm{d}x\right) && \text{IPP} \\
&= \frac{2}{(-2i\pi t)^2}(e^{-2i\pi t} + e^{2i\pi t}) - \frac{2}{(-2i\pi t)^3}(e^{-2i\pi t} - e^{2i\pi t}) \\
&= \frac{4\cos(2\pi t)}{-4\pi^2 t^2} + \frac{4i\sin(2\pi t)}{8i\pi^3 t^3} && \text{Euler} \\
&= -\frac{\cos(2\pi t)}{\pi^2 t^2} + \frac{\sin(2\pi t)}{2\pi^3 t^3}
\end{aligned}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{u\cos u - \sin u}{u^3}\cos(ut)\mathrm{d}u$$

$$\begin{aligned}
f(t) &= \mathcal{F}^{-1}(\widehat{f})(t) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x)e^{2i\pi tx}\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\frac{-2\pi t\cos(2\pi t) + \sin(2\pi t)}{2\pi^3 x^3}}_{g(x)} e^{2i\pi tx}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

On a g paire donc la partie imaginaire de l'intégrande est impaire, donc $\int_{\mathbb{R}} g(x)i\sin(2\pi tx)\mathrm{d}x = 0$ (car l'intervalle $\mathbb{R}$ est symmétrique)

Ainsi:

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \Re \int_{\mathbb{R}} g(x)\cos(2\pi t x)\mathrm{d}x \\
&= 2\int_{\mathbb{R}^+} g(x)\cos(2\pi t x)\mathrm{d}x \\
&= 2\int_{\mathbb{R}^+} \dots \mathrm{d}x \\
&= -2\int_{\mathbb{R}^+} \frac{u\cos u - \sin u}{u^3/4}\cos(ut)\frac{\mathrm{d}u}{2\pi} && u = 2\pi x \\
&= -\frac{8}{2\pi}\int_0^\infty \frac{u\cos u - \sin u}{u^3}\cos(ut)\mathrm{d}u
\end{aligned}
$$

Donc

$$\int_0^\infty \frac{u\cos u - \sin u}{u^3}\cos(ut)\mathrm{d}u = -\frac{\pi}{4}f(t)$$

4 Exercice 6

Montrons

$$\int_{\mathbb{R}} \operatorname{sinc}^3(t) = \frac{3\pi}{4}$$

On pose $f = \mathbb{1}_{[-a,a]}$.
On a

$$
\begin{aligned}
\widehat{f}(x) &= \int_{-a}^{a} f(x)e^{-2i\pi x t}\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{e^{-2i\pi t x}}{-2i\pi x}\right]_{-a}^{a} \\
&= \quad \dots \\
&= \frac{\sin(2\pi a x)}{\pi x} && a = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \\
\iff \pi\widehat{f}(x) &= \operatorname{sinc}(x) \in L^1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g(x) &= (1 - \frac{2}{A}|x|)\mathbb{1}_{[-\frac{A}{2},\frac{A}{2}]} \\
\widehat{g}(x) &= \frac{\sin^2(\pi t \frac{A}{2})}{A\pi^2 t^2} & A = \frac{2}{\pi} \\
&= \frac{\sin^2 t}{\pi t^2}
\end{aligned}
$$

$$
\iff \widehat{\pi g}(x) = \frac{\sin^2 t}{t^2} \in L^2
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \operatorname{sinc}^3 &= \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sinc}(t) \operatorname{sinc}^2(t) \mathrm{d}t \\
&= \int_{\mathbb{R}} (\pi \widehat{\mathbb{1}_{[-\frac{1}{2\pi},\frac{1}{2\pi}]}}) \Big(\pi \widehat{(1 - \pi|x|)\mathbb{1}_{[-\frac{1}{\pi},\frac{1}{\pi}]}}\Big)(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\frac{1}{2\pi}}^{\frac{1}{2\pi}} \pi^2(1 - \pi|x|)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\frac{1}{2\pi}}^{\frac{1}{2\pi}} \pi^2 \mathrm{d}x - 2\pi^3 \int_0^{\frac{1}{2\pi}} x\mathrm{d}x \\
&= \pi^2 \frac{1}{\pi} - 2\pi^3 \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{2\pi}} \\
&= \pi - 2\pi^3 \left(\frac{\frac{1}{(2\pi)^2}}{2}\right) \\
&= \pi - \pi^3 \frac{1}{4\pi^2} \\
&= \pi - \frac{\pi}{4} \\
&= \frac{3\pi}{4}
\end{aligned}
$$

5 Exercice 9

$$
h(t) = e^{-\lambda t}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t) \quad \lambda > 0
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{h}(x) &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} e^{-2i\pi t x} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-t(\lambda + 2i\pi x)} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-t(\lambda + 2i\pi x)} \mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{e^{-t(\lambda + 2i\pi x)}}{-(\lambda + 2\pi i x)} \right]_0^{\infty} \\
&= \frac{1}{\lambda + 2\pi i x}
\end{aligned}
$$