

1 Rappels d'algèbre linéaire

Matrice de permutation

$$P_\sigma := \left(\sum_{j=1}^n E_{\sigma(i),j} \right)_i$$

avec $E_{i,j}$ la matrice élémentaire (i, j) .

Théorème de Schur $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \exists U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \underbrace{U^* = U^{-1}}_{\text{unitaire}} \wedge U^* A U \in \mathcal{T}_{n,s}(\mathbb{C})$

1.1 Méthodes itératives

Principe On cherche une suite $x^{(p)}$ de \mathbb{R}^n convergeant vers la solution de $Ax = b$:

$$\forall x^{(0)} \quad x^{(p+1)} = H(x^{(p)})$$

Propriétés

- A n'est jamais modifiée
- Problème du suivi de la convergence et du choix du test d'arrêt
- Solution obtenue inexacte
- Matrice doit vérifier conditions de convergence
- Vitesse de convergence dépend de la matrice

2 Décomposition en valeurs singulières

Objectif Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), n \geq 1$.

On pose $A = U \Sigma V^\top$ avec $\begin{cases} U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \\ V \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \\ \Sigma \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \end{cases}$

On a

$$\Sigma = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \sigma_i & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_i & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{array} \right)$$

2.1 SVD d'une matrice

SVD Singular value decomposition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\text{rg} A \geq 1$

2.1.1 Propriétés

1. A est symétrique réelle semi-définie-positive i.e. $\forall x \in \mathbb{R}^n, x^\top (A^\top A)x \geq 0$
i.e. $\forall x \in \mathbb{R}^n, \|Ax\|^2 \geq 0$
2. $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$
3. $A^\top A$ est orthoDZ: $\begin{cases} \ker(A^\top A) &= \ker A \\ \text{im}(A^\top A) &= \text{im}(A^\top) \end{cases}$

Preuve (de 3.)

- $\ker A \subset \ker(A^\top A)$: TRIVIAL
- $\ker A \supset \ker(A^\top A)$ Soit $x \in \ker(A^\top A)$.
On a

$$\begin{aligned} A^\top Ax &= 0 \\ \implies x^\top (A^\top Ax) &= 0 \\ \implies \|Ax\|^2 &= 0 \\ \implies x &\in \ker A \end{aligned}$$

- $\text{im} A \subset \text{im}(A^\top A)$

$$\begin{aligned} \dim \ker(A^\top A) + \text{rg}(A^\top A) &= n \\ \implies \text{rg}(A^\top A) &= n - \dim \ker(A^\top A) \\ &= n - \dim \ker A && \text{car } \ker A = \ker(A^\top A) \\ &= \text{rg} A \\ &= \text{rg}(A^\top) \\ \implies \text{im}(A^\top A) &\subset \text{im} A \end{aligned}$$

- $\text{im} A \supset \text{im}(A^\top A)$: TRIVIAL

4. $A^\top A \in GL_n(\mathbb{R}) \iff \text{rg} A = n$

Preuve (de 4.)

$$\begin{aligned} A^\top A \in GL_n(\mathbb{R}) &\iff \ker(A^\top A) = \{0\} \\ &\iff \ker A = \{0\} \\ &\iff \text{rg} A = n && \text{par théorème du rang} \end{aligned}$$

2.2 Construction de la SVD de A

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ tel que $\text{rg } A \geq 1$. On note $r := \text{rg } A$.

- $\dim \ker(A^\top A) = n - r$ par théorème du rang.
Donc $0 \in \text{Sp}(A^\top A)$ et $\text{mult}_{A^\top A}(0) = n - r$
- On note $(\lambda_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} = \text{Sp}(A^\top A) \subset \mathbb{R}_+^*$, **telles que** $i < j \implies \lambda_i \leq \lambda_j$
On note $(v_i)_{i \in \llbracket 1, r \rrbracket}$ une bon de DZante de $A^\top A$ associée à $(\lambda_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$
Et on pose enfin

$$\mathcal{E} = \left(\underbrace{v_1, \dots, v_r}_{\text{bon de } (\ker A)^\top}, \underbrace{v_{r+1}, \dots, v_n}_{\text{bon de } \ker A} \right)$$

- On pose $V = (v_1, \dots, v_r) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ Et

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket u_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} A v_i \in \mathbb{R}^n$$

$$\begin{aligned} \forall (i, j) \in \llbracket 1, r \rrbracket^2 \quad \langle U_i, U_j \rangle &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}} \langle A v_i, A v_j \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}} \left\langle \underbrace{A^\top A v_i}_{\lambda_i v_i}, A^\top A v_j \right\rangle \\ &= \sqrt{\frac{\lambda_i}{\lambda_j}} \underbrace{\langle v_i, v_j \rangle}_{\delta_{ij}} && \text{car } (v_i)_i \text{ orthonormée} \\ &= \delta_{ij} && \text{car si } i = j, \text{ ça fait } 1, \text{ sinon ça fait } 0 \end{aligned}$$

Donc $(U_i)_i$ est une famille orthonormée de \mathbb{R}^m

Donc $\text{rg}(U_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} = r$

Or $(u_i)_i \subset \text{im } A$

D'où $(u_i)_i \subset \text{im } A$ et $(\text{rg } u_i)_i = \text{rg } A$

Donc $(U_i)_i = \text{im } A$

et $(U_i)_i$ bon de $\text{im } A$.

D'où $0 \in \text{Sp}(A^\top A)$ avec $\text{im } A$

On la complète en $(U_i)_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}$ bon de \mathbb{R}^m

$$\mathcal{F} = \left(\underbrace{u_1, \dots, u_r}_{\text{bon de im } A}, \underbrace{u_{r+1}, \dots, u_m}_{\text{bon de } (\text{im } A)^\top} \right)$$

Posons $U = (U_1, \dots, U_m) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

Remarque $\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket$

$$Bu_i = \mu_i u_i$$

Avec B, μ_i à déterminer.

$$\begin{aligned} AA^\top U_i &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \underbrace{AA^\top Av_i}_{=\lambda_i v_i \quad \text{par def de } v_i} \\ &= \sqrt{\lambda_i} Av_i \\ &= \lambda_i \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} Av_i \right)}_{U_i} \\ &= \lambda_i U_i \end{aligned}$$

D'où U_i vecteur propre de AA^\top associé à λ_i

- On pose

$$\begin{aligned} \Sigma &= U^\top AV \\ &= U^\top \left(\underbrace{Av_1, \dots, Av_r}_{\sqrt{\lambda_i} u_i}, \underbrace{Av_{r+1}, \dots, Av_n}_{0 \text{ car } v_i \in \ker A} \right) \\ &= \begin{pmatrix} u_1^\top \\ \vdots \\ u_m^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_j} \langle u_i, u_j \rangle & | & (0) \\ \sqrt{\lambda_j} \langle u_i, u_j \rangle & | & (0) \end{pmatrix} \\ &= \left(\begin{array}{ccc|c} \sqrt{\lambda_1} & & (0) & \\ & \ddots & & \\ (0) & & \sqrt{\lambda_r} & \\ \hline & (0) & & (0) \end{array} \right) \\ \Rightarrow A &= U \Sigma V^\top \end{aligned}$$

Définition: SVD de A Décomposition de la forme

$$A = U\Sigma V^\top$$

Avec U, Σ, V comme définies précédemment

On appelle valeurs singulières notées $(\sigma_i)_i$ les valeurs propres racines carrées

Il manque un passage, j'étais en retard de 7 minutes au cours :/

2.3 Matrice pseudo-inverse

Ou pseudo-inverse généralisée

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ telle que $\text{rg } A = r \geq 1$

Définition: Matrice pseudo-inverse Soit $A = U\Sigma U^\top$ la SVD de A

On définit la pseudo-inverse

$$A^+ = V\Sigma^+ U^\top$$

avec $\Sigma^+ = \left(\begin{array}{c|c} \Sigma_r^{-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$ avec le bloc non-nul de taille $r \times r$.

Proposition

$$1. AA^+ = \Pi_{\text{Im } A}$$

$$2. A^+A = \Pi_{\text{ker } A^\top}$$

Avec Π_A la projection orthogonale sur A

Soit $Q \in \mathcal{O}_{n,r}(\mathbb{R})$.

Alors QQ^\top est une projection orthogonale sur le sous-espace engendré par les colonnes de Q .

Preuve () cf. CTD factorisation Q_r

1.

$$\begin{aligned} AA^+ &= U\Sigma \underbrace{V^\top V}_{\text{Im}} \Sigma^+ U^\top \\ &= \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^\top \\ u_2^\top \end{pmatrix} \\ &= u_1 u_1^\top \end{aligned}$$

Avec $U_1 = (u_1 \ \dots \ u_r) \in \mathcal{M}_{m,r}$ telle que $u_1^\top u_2 = I_r$.
Donc

$$\begin{aligned} AA^+ &= \underbrace{\Pi_{(u_1, \dots, u_r)}}_{\text{Im } A} \\ &= \Pi_{\text{Im } A} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} AA^+ &= V_1 V_1^\top \\ &= \underbrace{\Pi_{(v_1, \dots, v_r)}}_{\text{ker } A^\top} \\ &= \Pi_{\text{ker } A^\top} \end{aligned}$$

Théorème Caractérisation de Moore-Penrose A^+ est l'unique solution du système

$$(MP) \begin{cases} AXA &= A \\ XAX &= X \\ (AX)^\top &= AX \\ (XA)^\top &= XA \end{cases}$$

Avec $X \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$

Preuve (*Etude de (MP)*)

Existence de solution

1.

$$\begin{aligned} AA^+A &= U \Sigma \underbrace{\text{Im}}_{V^\top V} \Sigma^+ \underbrace{U^\top U}_{\text{Im}} \Sigma V^\top \\ &= U \Sigma \Sigma^+ \Sigma V^\top \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
\Sigma\Sigma^+\Sigma &= \begin{pmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma_r^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \Sigma
\end{aligned}$$

Donc

$$AA^+A = U\Sigma V^\top = A$$

$$\begin{aligned}
A^+AA^+ &= V \underbrace{\Sigma^+\Sigma\Sigma^+}_{\Sigma^+} U^\top \\
&= V\Sigma^+U^\top \\
&= A^+
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(AA^+)^\top &= (U_1U_1^\top)^\top && \text{cf. prop. sur } AA^\top \text{ et } A^+A \\
&= U_1U_1^\top \\
&= AA^+
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(A^+A)^\top &= (V_1V_1^\top)^\top \\
&= V_1V_1^\top \\
&= A^+A
\end{aligned}$$

d(où A^+ solution de (MP) associée à A)

Unicité de la solution Soient X_1, X_2 deux solutions de (MP) associées à A .

- Montrons $AX_1 = AX_2$

$$\begin{aligned}
AX_1 &= (AX_1)^\top && \text{par 3. appliquée à } X_1 \\
&= X_1^\top A^\top \\
&= X_1^\top (AX_2 A)^\top \\
&= X_1^\top A^\top X_2^\top A^\top \\
&= (AX_1)^\top (AX_2)^\top \\
&= (AX_1)(AX_2) && \text{par 3.} \\
&= \underbrace{AX_1 A}_{= A} X_2 && \text{par 1. appliquée à } X_1 \\
&= AX_2
\end{aligned}$$

- On montre de même: $X_1 A = X_2 A$.
- Montrons $X_1 A X_2 = A$

$$\begin{aligned}
X_1 A X_2 &= X_2 A X_2 \\
&= X_2 && \text{par 2. appliquée à } X_2 \\
&= X_2 && \text{car } AX_1 = AX_2 \\
\text{i.e. } X_1 &= X_2 && \text{par 2. appliquée à } X_1
\end{aligned}$$

Donc on peut permuter \cdot^\top et \cdot^+ .

Théorème ${}^\top = +$

$$A^{\top+} = A^{+\top}$$

Preuve () On vérifie que $(A^+)^\top$ est solution de (MP) associée à A .

1.

$$\begin{aligned}
A^\top (A^+)^\top A^\top &= (A A^+ A)^\top \\
&= A^\top && \text{par 1. appliquée à } A^+
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}(A^+)^{\top} A^{\top} (A^+)^{\top} &= \underbrace{(A^+ A A^+)^{\top}}_{A^+} && \text{par 2 appliquée à } A^+ \\ &= (A^+)^{\top}\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}(A^{\top} (A^+)^{\top})^{\top} &= \underbrace{((A^+ A)^{\top})^{\top}}_{A^+ A} && \text{par 4. appliquée à } A^+ \\ &= (A^+ A)^{\top} \\ &= A^{\top} (A^+)^{\top}\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}((A^+)^{\top} A^{\top})^{\top} &= \underbrace{[(A A^+)^{\top}]^{\top}}_{A A^+} && \text{par 3. appliquée à } A^+ \\ &= (A^+)^{\top} A^{\top}\end{aligned}$$

d'où $A^{+\top}$ solution de (MP) associée à A^{\top} .

Par caractérisation de Moore-Penrose:

$$A^{\top+} = A^{+\top}$$

Théorème Caractérisation de A^+ par l'image d'un vecteur de \mathbb{R}^n Soit $b \in \mathbb{R}^n$.

Alors $A^+ b$ est la solution de norme $\|\cdot\|_2$ minimale de

$$(\mathcal{P}) \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2$$

Preuve ()

•

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \begin{cases} \nabla f(x) &= A^\top (Ax - b) \\ \nabla^2 f(x) &= A^\top A \text{ semi-def pos.} \end{cases}$$

Donc f convexe sur \mathbb{R}^n et les points critiques ont des minima globaux.

•

$$\begin{aligned} \nabla f &= A^\top (AA^+b - b) \\ &= V_1 \Sigma_1 U_1^\top (U_1 \Sigma_r \underbrace{V_1^\top V_1}_{I_2} \Sigma_r^{-1} U_1^\top b - b) \\ &= V_1 \Sigma_r \underbrace{(U_1^\top U_1 U_1^\top - U_1^\top)}_{\underbrace{I_2}_0} b \\ &= 0 \end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned} A &= U \Sigma V^\top = U_1 \Sigma_r V_1^\top \\ A^+ &= V \Sigma^+ U^\top = V_1 \Sigma_r^{-1} U_1^\top \end{aligned}$$

et A^+b est solution de (\mathcal{P})

- Montrons $\forall v \in \mathbb{R}^n, v$ solution de $(\mathcal{P}), \exists x_0 \in \ker A, x = x_0 + A^+b$

Soit $x \in \mathbb{R}^n$ solution de (\mathcal{P}) .

Or $\mathbb{R}^n = \ker A \oplus \ker A^\perp$.

D'où $\exists!(x_0, x_\perp) \in \ker A \times \ker A^\perp, x = x_0 + x_\perp$.

Or x solution de (\mathcal{P}) donc $\nabla f(x) = 0$.

D'où

$$\begin{aligned} &A^\top Ax = A^\top b \\ \iff &A^\top A(x_0 + x_\perp) = A^\top b \\ \iff &A^\top \underbrace{Ax_0}_0 + A^\top Ax_\perp = A^\top b \\ &\quad \text{0 car } x_0 \in \ker A \\ \iff &A^\top Ax_\perp = A^\top b \end{aligned}$$

Or $A^\top A(A^+b) = A^\top b$ car $A^\top b$ solution de (\mathcal{P})
D'où $A^\top Ax_\perp = A^\top A(A^+b)$ i.e. $A^\top A(x_\perp - A^+b) = 0$.
D'où $x_\perp - A^+b \in \ker(A^\top A) = \ker A$ (cf. prop. de $A^\top A$)

$$\begin{aligned} A^+b &= X_1 \Sigma_r^{-1} U_1^\top b \\ &\in \text{Im } V_1 \\ \text{or } V_1 &= (v_1 \ \dots \ v_r) \quad \text{avec les } (u_i)_i \text{ b.o.n. de } \ker A^\top \end{aligned}$$

D'où $A^+b \in \ker A^\perp$
Or $x_\perp \in \ker A^\perp$ donc $x_\perp - A^+b \in \ker A^\perp$
D'où $x_\perp - A^+b \in \ker A \cap \ker A^\perp = \{0\}$ car $\ker A \oplus \ker A^\perp = \mathbb{R}^n$
et $x_\perp = A^+b$
D'où $\exists x_0 \in \ker A, x = x_0 + A^+b$

• **Bilan**

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \text{solution de } (\mathcal{P}) \implies \|x\|_2 \geq \|A^+b\|_2$$

Corollaire Equation normale $\forall b \in \mathbb{R}^m, (A^\top A)A^+b = A^\top b,$

Proposition Cas particuliers

1. A inversible: $\text{rg } A = m = n$

$$A^+ = A^{-1}$$

2. $\text{rg } A = m$ ($m \geq n$)

$$A^+ = (A^\top A)^{-1} A^\top$$

3. $\text{rg } A = m$ ($n \geq m$)

$$A^+ = A^\top (AA^\top)^{-1}$$

Preuve ()

1. A^{-1} vérifie (MP)

2. $\text{rg } A = n$ donc $A^\top A$ inversible. (cf. prop. de $A^\top A$).

D'après les équations normales,

$$\begin{aligned}\forall b \in \mathbb{R}^m, \quad (A^\top A)A^+b &= A^\top b \\ \text{donc } (A^\top A)A^+ &= A^\top \\ \text{donc } A^+ &= (A^\top A)^{-1}A^\top\end{aligned}$$

3. On pose $B = A^\top$. On a $B^\top B$ inversible.

$$\text{rg } B = m$$

d'où par 2.

$$\begin{aligned}B^+ &= (B^\top B)^{-1}B^\top \\ \text{i.e. } (A^\top)^+ &= (AA^\top)^{-1}A \\ \text{i.e. } (A^+)^+ &= (AA^\top)^{-1}A && \text{car } \cdot^+ \text{ et } \cdot^\top \text{ permutent} \\ \text{i.e. } A^+ &= A^\top(AA^\top)^{-1}\end{aligned}$$

... gros passage à rattraper ...

Définition: Précision machine ε_n Le nombre représentable en machine juste après 1.

Soit $x_1 \in \mathbb{R}_+^*$ représentable en machine.

$$x_1 = \underbrace{\left(a_1 + \frac{a_2}{b} + \cdots + \frac{a_p}{b^{p-1}}\right)}_m b^e$$

Soit x_2 le nombre représentable en machine juste "au dessus" de x_1 :

$$x_2 = \left(a_1 + \frac{a_2}{b} + \cdots + \frac{a_p}{b^{p-1}}\right) b^e$$

d'où

$$\begin{aligned}
\frac{|x_1 - x_2|}{|x_1|} &= \frac{b^e}{b^{p-1}} \frac{1}{mb^e} \\
&= \frac{1}{mb^{p-1}} \\
mb^{p-1} &= (a_1 + \frac{a_2}{b} + \dots + \frac{a_p}{b^{p-1}}) b^{p-1} \\
&= a_1 b^{p-1} + a_2 b^{p-2} + \dots + a_p
\end{aligned}$$

or $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, a_i \leq b - 1$

$$\begin{aligned}
mb^{p-1} &\leq (b-1) \underbrace{\sum_{k=0}^{p-1} b^k}_{\frac{1-b^p}{1-b}} \\
&\leq b^p - 1 \\
&\leq b^p
\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{|x_2 - x_1|}{|x_1|} > \frac{1}{b^p} = \frac{\varepsilon_n}{b}$$

Implication pour les critères d'arrêt

$$\frac{|x_{k+1} - x_k|}{|x_k|} \leq \varepsilon_{\text{tol}}$$

Avec ε_{tol} précision définie par l'utilisateur.
 ε_{tol} à choisir en fonction de ε_n ($\varepsilon_{\text{tol}} \geq \frac{\varepsilon_n}{b}$)

3 Sensibilité de la solution d'un système à des perturbations des données

Soit $(A, b) \in GL_n(\mathbb{K}) \times \mathbb{K}^n$

On cherche à résoudre $Ax = b$

En pratique, on résoud plutôt

$$(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b + \Delta b$$

donc

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}$$

3.1 Conditionnement d'une matrice

Définition: Conditionnement K Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible.

Soit $\|\cdot\|$ une norme sur \mathbb{K}^n

On note également $\|\cdot\|$ la norme induite sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

Le conditionnement de A , noté $K(A)$ est défini par $K(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$

Définition: Bon conditionnement Si $K(A)$ est petit

Proposition

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ alors $K(\alpha A) = K(A)$.
2. $K(A) \geq 1$.
3. Avec $\|\cdot\|_2$:

$$K_2(A) = \frac{\sigma_1}{\sigma_n}$$

Avec $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n > 0$ les valeurs singulières de A .

4. Avec $\|\cdot\|_2$

$$K_2(A) = 1 \iff \exists \alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}, \exists U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{K}), A = \alpha U$$

Définition: Distance relative à la non-inversibilité d_s Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ non-nulle.

$$d_s(A) := \min \left\{ \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}, \Delta A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), A + \Delta A \notin GL_n(\mathbb{K}) \right\} \in [0, 1]$$

Théorème Gastinel, Katram Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$.

$$d_s(A) = \frac{1}{K(A)} = \frac{1}{\|A\| \|A^{-1}\|}$$

Remarque Le conditionnement d'une matrice informe sur l'amplitude minimale des perturbations à ajouter à A pour la rendre non inversible.

Exemples

1. $K(A) \approx 10^6$

3.2 Sensibilité de la solution d'un système linéaire aux perturbations de A et/ou b

Proposition Soit $(A, b) \in GL_n(\mathbb{K}) \times \mathbb{K}^n$.

Soit $\|\cdot\|$ une norme sur \mathbb{K}^n , et on note $\|\cdot\|$ la norme qu'elle induit sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$;

On a

Perturbation de b Soit $y = x + \Delta x$ solution de $Ay = b + \Delta b$ avec $\Delta b \in \mathbb{K}^n$

Alors

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq K(A) \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}.$$

Perturbation de A Soit $y = x + \Delta x$ solution de $(A + \Delta A)x = b$.

On a

$$\begin{aligned} \frac{\|\Delta x\|}{\|x + \Delta x\|} &\leq \frac{K(A) \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}}{1 - K(A) \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}} \\ &= K(A) + \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + O\left(\frac{\|\Delta A\|^2}{\|A\|^2}\right) \end{aligned}$$

Remarque

•

$$\begin{aligned} K(A) \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} < 1 &\iff \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} < \frac{1}{K(A)} \\ &\iff \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} < d_s(A) \end{aligned}$$

- On suppose que $A + \Delta A$ reste inversible

Preuve ()

1.

$$A(x + \Delta x) = b + \Delta b \quad \text{avec } Ax = b$$

d'où

$$\begin{aligned} A\Delta x &= \Delta b \\ \iff \Delta x &= A^{-1}\Delta b \end{aligned}$$

Il vient

$$\begin{aligned} \|\Delta x\| &= \|A^{-1}\Delta b\| \\ &\leq \|A^{-1}\| \|\Delta b\| \frac{\|A\|}{\|A\|} \\ \|\Delta x\| &\leq K(A) \frac{\|\Delta b\|}{\|A\|} \\ \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} &\leq K(A) \frac{\|\Delta b\|}{\|A\|\|x\|} \end{aligned}$$

Or $Ax = b$ d'où $\|b\| \leq \|A\|\|x\|$

et $\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq K(A) \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$

2. $(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b$ avec $Ax = b$

Donc

$$\begin{aligned} A\Delta x &= -\Delta A(x + \Delta x) \\ \Delta x &= -A^{-1}\Delta A(x + \Delta x) \end{aligned}$$

D'où $\|\Delta x\| \leq \|A^{-1}\| \|\Delta A\| \|x + \Delta x\|$

et $\frac{\|\Delta x\|}{\|x + \Delta x\|} \leq \underbrace{\|A^{-1}\| \|A\|}_{K(A)} \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$

Si de plus $K(A) \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} < 1$

$$\begin{aligned}
\|\Delta x\| &\leq K(A) \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \underbrace{\|x + \Delta x\|}_{\|x\| + \|\Delta x\|} \\
\Rightarrow \overbrace{1 - K(A) \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \|\Delta x\|}^{>0} &\leq K(A) \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \|x\| \\
\Rightarrow \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} &\leq \frac{K(A) \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}}{1 - K(A) \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}}
\end{aligned}$$

4 Erreurs directe et inverse par la résolution de systèmes linéaires

Soit $(A, b) \in GL_n(\mathbb{K}) \times \mathbb{K}^n$.

On suppose disposer d'une application f , opérant en arithmétique exacte, et calculant $f(A, b) = x$ avec $x \in \mathbb{K}^n$ tel que $Ax = b$.

(f algorithme théorique)

On dispose d'un algorithme numérique g , opérant en arithmétique finie, instanciant f :

$$g(A, b) = \tilde{x} \in \mathbb{K}^n$$

4.1 Erreur inverse d'un algorithme

Définition: Soit g un algorithme numérique, opérant en arithmétique finie, et calculant la solution de $Ax = b$ par $A \in GL_n(\mathbb{K})$ et $b \in \mathbb{K}^n$.

Soit $\|\cdot\|$ une norme sur \mathbb{K}^n . On note $\|\cdot\|$ la norme induite à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On appelle "erreur inverse de g ", notée Ben.

$$\text{Ben} = \min\{\varepsilon > 0, \exists \Delta A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ tq } (A + \Delta A) \text{ et } \dots \text{à récupérer} \dots\}$$

...à récupérer ...

$$[-i] \ (--1, 0) - (10, 0) \text{ node } \ker A ; [-i] \ (0, -1) - (0, 10) \text{ node } \ker A^\top ; [-i] \ (1, 1) \\ \text{node } U|_{\ker A}^{\text{Im } A^\top} - (20, 1) \text{ node } A = [U];$$

Figure 1: