1 Fonction de répartition

Somme des coefs dans le bloc entre (0, 0) et le point

2 Lois marginales

2.1 Cas discret

2.1.1 Exemple

- $p_{00} = \frac{1}{2}$
- $p_{01} = \frac{1}{6}$
- $p_{10} = \frac{1}{6}$
- $p_{11} = \frac{1}{6}$

Loi de X

$$P(X = 0) = p_{00} + p_{01} = \frac{2}{3}$$
$$P(X = 1) = p_{10} + p_{11} = \frac{1}{3}$$

Loi de Y

$$P(Y = 0) = p_{00} + p_{01} = \frac{2}{3}$$
$$P(Y = 1) = p_{10} + p_{11} = \frac{1}{2}$$

2.2 Cas continu

Densité de X: $p(x, \cdot) = \int_{\mathbb{R}} p(x, y)\mathrm{d}y$

2.2.1 Exemple

$$p(x, y) = \begin{cases} \theta^2 e^{-\theta x} & \text{si } x > y > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Loi de X Si $x < 0$, $p(x, \cdot) = 0$
Sinon:

$$
\begin{aligned}
p(x,\cdot) &= \int_{\mathbb{R}} p(x,y)\mathrm{d}y \\
&= \underbrace{\int_{-\infty}^{0} p(x,y)\mathrm{d}y}_{y\leq 0} + \int_{0}^{x} p(x,y)\mathrm{d}y + \underbrace{\int_{x}^{+\infty}}_{y\geq x} \\
&= \int_{0}^{x} \theta^2 e^{-\theta x}\mathrm{d}y \\
&= \left[\theta^2 e^{-\theta x}\right]_0^x \\
&= \theta^2 e^{-\theta x}
\end{aligned}
$$

Or $\Gamma(\theta,\lambda) = \frac{\theta^\lambda}{\Gamma(\lambda)} e^{-\theta x} x^{\lambda-1}$
Donc $X \sim \Gamma(\theta, 2)$

$$
\begin{aligned}
p(\cdot,y) &= \int_{\mathbb{R}} p(x,y)\mathrm{d}x \\
&= \int_{y}^{+\infty} \theta^2 e^{-\theta x}\mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{\theta^2}{\theta} e^{-\theta x}\right]_0^{+\infty} \\
&= 0 - (-\theta e^{-\theta y}) \\
&= \theta e^{-\theta y}
\end{aligned}
$$

$$
Y \sim \Gamma(\theta, 1)
$$

Si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes et α et β sont des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors

2.3 Exemple

$$
p(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4}(1+xy) & \text{si} x \in]-1,1[\wedge y \in]-1,1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}
$$

Montrons que X et Y ne sont pas indépendants

$$
\begin{aligned}
p(x,\cdot) &= \int_{-1}^{1} p(x,y)\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}(1+xy)\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{4}\left[y+\frac{y^2}{2}x\right]_{-1}^{1} \\
&= \frac{1}{4}\left(\left(1+\frac{x}{2}\right)-\left(-1+\frac{x}{2}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

x et y jouent des rôles symmétriques donc $p(\cdot,y)=\frac{1}{2}$
Et donc

$$p(x,\cdot)p(y,\cdot)=\frac{1}{4}\neq p(x,y)$$

ainsi X et Y ne sont pas indépendantes.
On a

$$X^2\text{indép}Y^2 \iff \forall\Delta,\Delta', P(X^2\in\Delta, Y^2\in\Delta') = P(X^2\in\Delta)P(Y^2\in\Delta')$$

Soient $u,v\in[0,1[$

$$
\begin{aligned}
P(X^2 \in [0,u], Y^2 \in [0,v]) &= P(-\sqrt{u} \leq X \leq \sqrt{u}, -\sqrt{v} \leq Y \leq \sqrt{v}) \\
&= \int_{-\sqrt{v}}^{\sqrt{v}} \int_{-\sqrt{u}}^{\sqrt{u}} p(x,y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \\
&= \int_{-\sqrt{v}}^{\sqrt{v}} \int_{-\sqrt{u}}^{\sqrt{u}} \frac{1}{4}(1+xy) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{4} \int_{-\sqrt{v}}^{\sqrt{v}} \left[x + \frac{x^2}{2} y\right]_{-\sqrt{u}}^{\sqrt{u}} \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{4} \int_{-\sqrt{v}}^{\sqrt{v}} \left(\left(\sqrt{u} + \frac{u}{2} y\right) - \left(-\sqrt{u} + \frac{u}{2} y\right)\right) \\
&= \frac{1}{4} \int_{-\sqrt{v}}^{\sqrt{v}} 2\sqrt{u} \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{4} \left[2\sqrt{u} y\right]_{-\sqrt{u}}^{\sqrt{u}} \\
&= \frac{1}{4} \left(2\sqrt{u}\sqrt{v} - 2\sqrt{u}(-\sqrt{v})\right) \\
&= \sqrt{uv}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(X^2 \in [0,u]) &= P(-\sqrt{u} \leq X \leq \sqrt{u}) \\
&= \int_{-\sqrt{u}}^{\sqrt{u}} p(x,\cdot) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}(\sqrt{u} - (-\sqrt{u})) \\
&= \sqrt{u}
\end{aligned}
$$

$$
P(Y^2 \in [0,v]) = \sqrt{v}
$$

3 Moments centrés et non centrés

$$
\begin{aligned}
m_{ij} &= E(X^i Y^j) \\
\mu_{ij} &= E((X - E(X))^i (Y - E(Y))^j)
\end{aligned}
$$

4 Matrice de covariance

$$
\mathrm{CovMat}(X,Y) = \begin{pmatrix} V(X) & \mathrm{Cov}(X,Y) \\ \mathrm{Cov}(X,Y) & V(Y) \end{pmatrix} = E[VV^\top]
$$

Avec $V = \begin{pmatrix} X - E(X) \\ Y - E(Y) \end{pmatrix}$

5 Fonction caractéristique

$$\begin{aligned}
\phi_{X,Y}(u_1, u_2) &= E(\exp(iU^\top W)) \\
&= E(\exp(i\left(\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right))) \\
&= E(\exp(i(u_1 X + u_2 Y)))
\end{aligned}$$

6 Coefficient de corrélation

$$r(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

7 $E(XY)$ comme produit scalaire

$$\langle X, Y \rangle = E(XY)$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne