# fiche de traitement du signal

## transformée de Fourrier

On prend $p \in \mathcal{L}^2$ (ou $p \in \mathcal{L}^1$, c'est *plus simple*) Formule directe

$$\mathcal{F}[p](f) := \int_{\mathbb{R}} e^{-j2\pi ft} p(t) \mathrm{d}t$$

[[transformée de Fourrier inverse|Formule inverse]]

$$\mathcal{F}^{-\infty}[P](t) := \int_{\mathbb{R}} e^{j2\pi ft} P(f) \mathrm{d}f$$

3b1b

### [[dérivée|Dérivation]]

$$\mathcal{F}[x^{(n)}](f) = (j2\pi f)^n \mathcal{F}[x](f)$$

### Propriétés

$\mathcal{F}$ est

- linéaire
- conserve la parité
- **transformation** $\mathcal{F}[x(t-t_0)](f) = e^{-2\pi jft_0} X(f)$
- **modulation** $\mathcal{F}[x(t)e^{j2\pi f_0 t}] = X(f - f_0)$
- **similitude** $\mathcal{F}[x(at)](f) = \frac{1}{|a|} X(\frac{f}{a})$

en gros translation en temps $\iff$ multiplication par $\exp(...)$ en fréquence

### Transformées usuelles

| Temporel | Fréquentiel |
|---|---|
| $x^*$ | $X^* \circ (-\operatorname{id})$ |
| $x \circ (a \operatorname{id} + b)$ | $\frac{1}{ |

## transformée de Fourrier inverse

#signal

Avec $X$ dans $L^1$ ou $L^2$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{j2\pi ft} X(f) \mathrm{d}f$$

## produit de convolution

#signal Opérateur défini par

$$f * g = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-\tau) f(\tau) \mathrm{d}\tau$$

#### Propriétés

- Avec la [[transformée de Fourrier]]:
  - $\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f] \cdot \mathcal{F}[g]$
  - $\mathcal{F}[f \cdot g] = \mathcal{F}[f] * \mathcal{F}[g]$
- $\mathcal{F}[\text{carré}] = \text{sinc}$
- [[égalité de Parseval]]

### Avec l'[[impulsion de Dirac]]

- **localisation** $x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$
- produit de convolution $x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0)$
- $x(t_0) = \int_{\mathbb{R}} x(t)\delta(t-t_0)\mathrm{d}t$

### Convolution par la [[réponse impulsionnelle]] d'un [[filtre]]

**Propriétés** Soit $h$ la réponse impulsionnelle d'un filtre. L'opération $T = x \mapsto x * h$ est:

- Linéaire
- Invariante dans le temps

$$\forall t_0, t \in \mathbb{R}, T[x](t) = T[x](t-t_0)$$

- Stable (BIBO) Si $x$ est borné alors $T[x]$ est borné, ou de manière équivalente (CNS)

$$\int_{\mathbb{R}} |h| < \infty$$

- Le spectre du signal est "limité"

## impulsion de Dirac

#signal

$\delta$ tel que

- $\int_{-\infty}^{0} \delta = 0$
- $\int_{0}^{+\infty} \delta = 1$

**[[transformée de Fourrier]]**

- $\mathcal{F}(\delta) = 1$
- $\mathcal{F}(1) = \delta$
- $\mathcal{F}(\delta(t - t_0)) = \exp(-j2\pi f t_0)$ (et pareil dans l'autre sens)

**Propriétés**

- [[série de Fourier]]:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{+j2\pi n f_0 t} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \delta(f - nf_0)$$

## signal déterministe à énergie finie

#signal

**Définition**

Un [[signal]] [[signal déterministe|déterministe]] à [[énergie d'un signal|énergie]] [[fini|finie]]

**Énergie**

$$E(x) = \int_{\mathbb{R}} |x|^2 = \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}[X]|^2$$

**Produit scalaire**

$$\langle x, y\rangle = \int_{\mathbb{R}} xy^*$$

**[[densité spectrale d'énergie]]**

$$s_x(f) = |\mathcal{F}[x](f)|^2$$

## signal déterministe périodique à puissance finie

**Définition**

Un [[signal]] [[signal déterministe]] [[périodique]] à [[énergie d'un signal|puissance]] [[fini|finie]].

**Puissance**

Soit $x$ un signal déterministe périodique à puissance finie de [[période]] $T$

$$P(x) = \frac{1}{T}\int_{T/2}^{-T/2} |x|^2$$

**[[produit scalaire|Produit scalaire]]**

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{T}\int_{T/2}^{-T/2} xy^*$$

**[[densité spectrale d'énergie|densité spectrale de puissance]]**

Soit $x(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \exp(j2\pi k f_0 t)$ Alors:

$$s_x(f) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 \delta(f - kf_0)$$

## signal déterministe non périodique à puissance finie

### Définition

Un [[signal]] [[signal déterministe|déterministe]] non-[[périodique]] à [[énergie d'un signal|puissance]] [[fini|finie]]

**Puissance**

$$P(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{T/2}^{-T/2} |x|^2$$

**[[produit scalaire|Produit scalaire]]**

$$\langle x, y\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{T/2}^{-T/2} xy^*$$

**[[densité spectrale d'énergie|densité spectrale de puissance]]**

$$s_x(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left|\int_{T/2}^{-T/2} x(t)e^{-j2\pi ft}\mathrm{d}t\right|^2$$

## signal aléatoire stationnaire

### Définition

Un [[signal]] non-[[signal déterministe|déterministe]] [[stationnarité|stationnaire]]. Il est défini par une [[variable aléatoire]] au lieu d'une fonction du temps.

- La [[espérance|moyenne]] ne dépend pas de $t$
- Le [[moment d'ordre 2]] $E(t \mapsto x(t)x^*(t-\tau))$ ne dépend pas de $t$

**[[produit scalaire]]**

$$\langle x, y\rangle = E(xy^*)$$

**[[énergie d'un signal|puissance]] moyenne**

$$P(x) = E(|x|^2)$$

**[[densité spectrale d'énergie|densité spectrale de puissance]]**

**Si** $X = \mathcal{F}[x]$ **existe**:

$$s_x(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} E\left(\left|\int_{T/2}^{-T/2} X(f)e^{-j2\pi ft}\mathrm{d}t\right|^2\right)$$

**Espérance d'un signal [[filtre|filtré]]**

$$E(H \cdot X) = H(0) \cdot E(X)$$

## densité spectrale d'énergie

Pour n'importe quel [[signal]], c'est la [[transformée de Fourrier]] de l'[[autocorrélation]]:

$$s_x = \mathcal{F}[R_x]$$

Il y a aussi une caractérisation qui diffère selon la [[classes de signaux|classe du signal]].

**Propriétés**

- **positive** $s_x \geq 0$
- **réelle** $s_x \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$
- **parité** si $x$ réel, $s_x$ [[parité d'une fonction|paire]]

**Lien avec l'[[énergie d'un signal]]**

$$\int_{\mathbb{R}} s_x = E(x)$$

**Du signal [[filtre|filtré]]**

Voir les [[relations de Wiener-Lee]]

**Lien avec les probabilités**

S'apparente à la [[densité de probabilité]]: c'est la répartition de l'énergie en fonction des fréquences

## intercorrélation

Pour deux [[signal|signaux]] $x$ et $y$ de même [[classes de signaux|classe]]

$$R_{xy}(\tau) = \langle x, y(\cdot - \tau)\rangle$$

Avec $\langle \cdot, \cdot\cdot \rangle$ dépendant de la classe des signaux

### Du signal [[filtre|filtré]]

Voir les [[relations de Wiener-Lee]]

## autocorrélation

Cas particulier de l'[[intercorrélation]]

$$R_x(\tau) = R_{xx}(\tau)$$

### Du signal [[filtre|filtré]]

Voir les [[relations de Wiener-Lee]]

### Symétrie Hermitienne

$$R_x^*(-\tau) = R_x(\tau)$$

### Valeur maximale

$$|R_x(\tau)| \leq R_x(0)$$

### Distance entre $x(t)$ et $x(t-\tau)$

$$d(x(t), x(t-\tau)) = \sqrt{2\Big[R_x(0) - R_x(\tau)\Big]}$$

### Décomposition de Lebesgue

On peut quasiment tout le temps décomposer l'autocorrélation en une somme d'une fonction $\xrightarrow[\tau\to\infty]{} 0$ et d'une somme de fonctions [[périodique|périodiques]]

## signal bruit

### Bruit blanc

[[signal aléatoire stationnaire]] tel que

$$\begin{cases} R_x & = \frac{N_0}{2}\delta \\ s_x & = \frac{N_0}{2} \end{cases}$$

#### Bruit gaussien

### réalisabilité d'un filtre

#### Définition

**Domaine temporel** Un filtre de [[réponse impulsionnelle]] $h$ est dit *réalisable* si et seulement si:

1. $h$ est réelle
2. $h \in L^1$ (stabilité)
3. $h$ est [[réponse impulsionnelle causale|causale]]

**Domaine fréquentiel**

1. $H$ vérifie la [[symétrie Hermitienne]]
2. ne peut se traduire
3. $H = -jH * \frac{1}{\pi \operatorname{id}}$

### relation de filtrage linéaire

#signal

**[[signal déterministe]]**

$$Y = X \cdot H$$

**[[signal aléatoire stationnaire]]: isométrie fondamentale** TODO diapo 36 c'est quoi $\overset{I}{\leftrightarrow}$ ?

### relations de Wiener-Lee

#signal

On pose $x$ un [[signal]] et $h$ la [[réponse impulsionnelle]] d'un [[filtre]].

#### Sur la [[densité spectrale d'énergie]]

$$s_{x*h} = |H|^2 \cdot s_x$$

#### Sur l'[[intercorrélation]]

$$R_{x*h,\ x} = R_x * h$$

#### Sur l'[[autocorrélation]]

$$R_{x*h}(\tau) = R_x(\tau) * h(\tau) * h^*(-\tau)$$

## quantificateur de signal

Une [[transformation non-linéaire d'un signal]] avec

$$y(t) = i(t)\Delta q_{i(t)}$$

Avec:

- $i(t)$ l'indice de l'échantillon le plus proche temporellement de $t$
- $\Delta q_{i(t)}$ tel que
$$x(t) \in x_{i(t)} + \frac{1}{2}\left[-\Delta q_{i(t)}, +\Delta q_{i(t)}\right]$$

### Quantification uniforme

Quand $\Delta q_{i(t)}$ ne dépend pas de $t$ (donc ni de $i$):

$$\Delta q_{i(t)} = \Delta q = \frac{2\max x}{2^{\text{bits}}}$$

### Erreur de quantification

On suppose que l'erreur $\varepsilon$ suit $\mathcal{U}([-\Delta q, +\Delta q]/2)$.

### SNR

$$\begin{aligned}
\text{SNR}_{\text{dB}} &= 10\log\frac{\sigma_x^2}{\sigma_\varepsilon^2} \\
&= 10\log\frac{(\max x)^2/2}{(\Delta q)^2/12} \\
&= 10\log\left(\frac{(\max x)^2}{2}\cdot\frac{12\cdot 2^{2\text{bits}}}{4(\max x)^2}\right) \\
&= 10\log\left(\frac{12}{8}2^{2\text{bits}}\right) \\
&= 10\log\frac{8}{12} + 10\log 2^{2\text{bits}} \\
&\overset{\text{approx?}}{=} 1.76 + 6\text{bits}
\end{aligned}$$

## transformation non-linéaire d'un signal

Sorte de "filtre" mais sans [[relation de filtrage linéaire]], la sortie l'image d'une [[fonction]] quelconque de l'entrée:

$$y = g(x)$$

**Exemples**

- [[quadrateur]]
- [[quantificateur de signal]]

## théorème de Price

#signal

### Énoncé

Soit $(X_1, X_2) \sim \mathcal{N}_2(m, \sigma^2)$ avec $m \neq 0$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\frac{\partial E(g(X_1)g(X_2))}{\partial E(X_1 X_2)} = E\left(\frac{\partial g(X_1)}{\partial X_1} \cdot \frac{\partial g(X_2)}{X_2}\right)$$

### Application au [[quadrateur]]

On a $y = x^2$.

On veut une expression de $R_y$ en fonction de $R_x$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R_y}{\partial R_x}(\tau) &= \frac{\partial \langle y, y(\cdot - \tau)\rangle}{\partial \langle x, x(\cdot - \tau)\rangle} \\
&= \frac{\partial E(x^2(t)x^2(t-\tau))}{\partial E(x(t)x(t-\tau))} \\
&= \frac{\partial E(g(x_1(t))g(x_2(t)))}{\partial E(x_1(t)x_2(t))} \quad \text{avec } x_1 = x,\ x_2 = x(\cdot - \tau) \text{ et } g = \mathrm{id}^2 \\
&= E\left(\frac{\partial x^2}{\partial x} \cdot \frac{\partial x(\cdot - \tau)^2}{\partial x(\cdot - \tau)}\right) \quad \text{d'après le théorème de Price} \\
&= E(4x(t)x(t-\tau)) \\
&= 4E(x(t)x(t-\tau)) \\
&= 4\langle x, x(\cdot - \tau)\rangle \\
&= 4R_x(\tau)
\end{aligned}$$

On intègre:

$$R_y(\tau) = 2R_x(\tau)^2 + \text{const}$$

Pour trouver const, on évalue en $\tau = 0$:

$$
\begin{aligned}
R_y(0) &= \langle y, y\rangle \\
&= E(yy^*) \\
&= E(|y|^2) \\
&= E(|x^2|^2) \\
&= E(x^4) \\
&= (3\times 1)\sigma^4 \quad \text{moments d'une loi Gaussienne centrée} \\
&= 4\sigma^4 \\
\text{or} \quad R_y(0) &= 2R_x^2(0) + \text{const} \\
\text{donc} \quad \text{const} &= 4\sigma^4 - 2(R_x(0))^2 \\
&= 4\sigma^4 - 2E(|x|^2) \\
&= 4\sigma^4 - \sigma^2 \quad \text{si } |x| = x \text{ i.e. } x \geq 0
\end{aligned}
$$

On peut aussi s'en tenir à const $= R_x^2(0)$