Fonctions à ensembles fonctionnels

Ewen Le Bihan

2020-12-29

Abstract

La notation $\mathcal{D}(A, B)$ désignant l'ensembles des fonctions dérivables sur A de type $A \to B$ est assez commune, et facilement définissable de manière formelle, ainsi que sa généralisation, $\mathcal{D}^n$, ou son homologue pour les fonctions continues, $\mathcal{C}$. Mais il y a bien un lien entre ces trois notations: ce sont des *fonctions à valeurs d'ensembles ne contenant que des fonctions du type correspondants aux deux arguments passés à la fonction*, ou, plus succintement, pour tous ensembles A et B, $\mathcal{D}(A, B) \in \mathcal{P}(\mathcal{F}(A, B))$.

Dans cet article est exploré cette "classe" d'objets particuliers. On défini pour tout le reste de l'article l'abbréviation **FEF**, signifiant "Fonctions à valeurs d'ensembles fonctionnels". On note dans la suite de tout l'article A et B deux ensembles quelconques, := l'égalité par définition et univers l'unique ensemble tel que pour tout ensemble A, $A \subset$ univers.

1 Définitions

1.1 Définition de l'ensemble des FEF

On définit dès lors un nouvel ensemble $\mathbb{Y}$

$$\mathbb{Y} := \mathcal{F}(A \times B,\ \mathcal{P}(\mathcal{F}(A, B))$$

Où:

- $\mathcal{F}$ désigne l'ensemble des fonctions de type $A \to B$. Pour la définition formelle de $\mathcal{F}$, cf. 1.3.
- $\mathcal{P}(A)$ désigne une partie de A

On a bien:

- $\mathcal{F} \in \mathbb{Y}$
- $\mathcal{C} \in \mathbb{Y}$
- $\mathcal{D} \in \mathbb{Y}$

1.2 Un conflit de notations: l'exposant

Cette perspective de $\mathcal{D}^n$ ou $\mathcal{C}^n$ comme de simples fonctions soulève un conflit assez désagréable de notation: si $\mathcal{D}$ est une fonction, on devrait avoir:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{D}^n = \bigcirc_{i=0}^{n} \mathcal{D}$$

Ce qui n'est évidemment pas le cas.

Dès lors, par souci de clarté, contrairement à la notation traditionnelle, $\mathcal{D}_n$ **désignera l'ensemble des fonctions** n **fois dérivables, et** $\mathcal{D}^n$ **la fonction** $\mathcal{D}$ n **fois composée avec elle-même**. On fera la même entorse aux notations classiques pour $\mathcal{C}$.

1.3 Définition formelle de $\mathcal{F}$

L'ensemble $\mathcal{F}$ est particulier: *il est nécéssaire que $\mathcal{F}$ soit définit pour définir $\mathbb{Y}$ même.*

De ce fait, la définition de $\mathcal{F}$ nécéssite une définition formelle des applications. On restera au stade d'une définition semi-formelle:

$$\mathcal{F} := (A, B) \mapsto \{f \in \text{univers},\ f : A \to B\}$$

1.4 Extension des opérateurs ensemblistes aux FEF

On a, pour tout élément $F \in \mathbb{Y}$:

1. F est d'arité 2 (i.e. F prend deux arguments)
2. F est à valeur d'ensembles

On en déduit de *tout élément de $\mathbb{Y}$ possède la même arité et renvoie des valeurs de nature ensembliste.*

Il est donc possible d'étendre canoniquement et sans ambiguïté les opérateurs ensemblistes aux FEF. On a donc:

$$\forall \square \in \{\cup, \cap, \setminus, \Delta\},\ \forall (F, G) \in \mathbb{Y}^2,\ F \square G := (A, B) \mapsto F(A, B) \square G(A, B) \tag{1}$$

$$\forall F \in \mathbb{Y},\ {}^c F := (A, B) \mapsto {}^c(F(A, B)) \tag{2}$$

$$\forall F \in \mathbb{Y},\ F^* := F \setminus (A, B) \mapsto \{x \mapsto 0\} \tag{3}$$

On précise pour (2) que l'"univers" des FEF (c'est-à-dire tel que le complémentaire de l'univers est $\emptyset$) est $\mathcal{F}$: On a bien ${}^c\mathcal{F} = \emptyset$, l'ensemble des fonctions de A dans B qui ne sont pas des fonctions de A dans B est vide. De ce fait, on a:

$$\forall F \in \mathbb{Y},\ {}^c F := \mathcal{F} \setminus F$$

.

On précise pour (3) que 0 représente l'élément neutre du groupe $(A, +)$.

Cette extension de notation permettra notamment de définir les FEF des bijections de manière très succinte.

1.5 Notation succinte pour définir des FEF

On note, pour tout $F \in \mathbb{Y}$ et pour toute proposition P convenanble définie:

$$\underset{f : A \to B}{\{P(f, A, B)\}} := (A, B) \mapsto \{f \in B^A,\ P(f, A, B)\}$$

Exemple: Définition des fonctions paires

$$\Psi := \underset{f : A \to B}{\{f \circ (-\operatorname{id}) = f\}} = (A, B) \mapsto \{f \in B^A,\ f \circ (-\operatorname{id}) = f\}$$

1.6 Définition de quelques FEF

1.6.1 Dérivabilité, continuité

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\mathcal{D}_n := (A, B) \mapsto \left\{ f \in B^A,\ \left(\forall a \in A,\ \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(a + \epsilon) - f(a)}{\epsilon} \in \mathbb{R} \right) \right\} \tag{4}$$

$$\mathcal{C}_n := (A, B) \mapsto \{f \in B^A, \Big(\forall a \in A,\ \lim_{\epsilon \to a} f(\epsilon) = a\Big)\} \tag{5}$$

Dans (1), la condition sur la limite implique également que la limite doit exister.

1.6.2 Monotonie

Sont définies ci-après les FEF des fonctions croissantes $\supseteq$, des fonctions décroissantes $\subseteq$ et leurs homologues stricts $\supsetneq$ et $\subsetneq$, en s'inspirant fortement des notations de la théorie des ensembles.

$$\begin{aligned}
\supseteq &:= (A, B) \mapsto \{f \in B^A,\ (\forall x, y \in A,\ x \geq y \implies f(x) \geq f(y))\}\\
\supsetneq &:= (A, B) \mapsto \{f \in B^A,\ (\forall x, y \in A,\ x > y \implies f(x) > f(y))\}\\
\subseteq &:= (A, B) \mapsto \{f \in B^A,\ (\forall x, y \in A,\ x \leq y \implies f(x) \leq f(y))\}\\
\subsetneq &:= (A, B) \mapsto \{f \in B^A,\ (\forall x, y \in A,\ x < y \implies f(x) < f(y))\}
\end{aligned}$$

1.6.3 Parité

Sont définies ci-après les FEF des fonctions paires Ψ et impaires $\not\Psi$. Leurs symboles proviennent du graphe d'une fonction $(\mathrm{id})^n$ avec n pair ou impair.

$$\begin{aligned}
\Psi &:= (A, B) \mapsto \{f \in B^A,\ f \circ (-\mathrm{id}) = f\}\\
\not\Psi &:= (A, B) \mapsto \{f \in B^A,\ f \circ (-\mathrm{id}) = -f\}
\end{aligned}$$

1.6.4 *jectivité

Sont définies ci-après les FEF des fonctions injectives $\rightarrowtail$, surjectives $\twoheadrightarrow$ et bijectives $\leftrightarrow$. Leurs symboles proviennent des diagrammes sagittaux.

$$\begin{aligned}
\rightarrowtail &:= (A, B) \mapsto \{f \in B^A,\ \big(\forall (a_1, a_2) \in A^2,\ f(a_1) = f(a_2) \implies a_1 = a_2\big)\}\\
\twoheadrightarrow &:= (A, B) \mapsto \{f \in B^A,\ (\forall b \in B,\ \exists a \in A,\ f(a) = b)\}
\end{aligned}$$

La surcharge de la notation d'intersubsection permet de définir facilement $\leftrightarrow$ à partir de $\rightarrowtail$ et $\twoheadrightarrow$:

$$\leftrightarrow := \rightarrowtail \cap \twoheadrightarrow$$

C'est enfait la définition même du quantificateur $\exists!$ qui intervient dans cette facilité de définition.

1.7 Les quasi-FEF

1.7.1 Un exemple motivateur: les fonctions primitivables

On souhaite étendre la définition de $\mathcal{D}_n$ à tout $n \in \mathbb{Z}$: quand $n < 0$, $\mathcal{D}_n$ représenterait la FEF des primitivables (i.e. $\mathcal{D}_n(A, B)$ représenterait l'ensemble des fonctions primitivables sur A de type $A \to B$).

Cependant, il n'y a pas de bijection entre une fonction et sa primitive[1]: $\mathrm{id} \cdot \mathrm{id} + 3$ et $\mathrm{id} \cdot \mathrm{id} + 5$ sont toutes les deux des primitives de $2\,\mathrm{id}$.

Afin de pouvoir définir $\mathcal{D}_n$ pour $n \in -\mathbb{N}$, il faut passer un troisième argument à $\mathcal{D}_n$, la constante ajoutée, le fameux "plus c" des anglophones. Donc, pour $n \in -\mathbb{N}$, $\mathcal{D}_n$ est d'arité 3: **On a, pour tout entier négatif non-nul n, $\mathcal{D}_n \notin \mathbb{Y}$.**

[1] Formellement, en mettant à profit les précédentes définitions: $\exists f \in B^A,\ f \mapsto \int f \notin \leftrightarrow(A, B)$

1.7.2 Définition

On dit qu'une fonction G est une quasi-FEF si et seulement si:

- G est d'arité strictement supérieure à 2
- $G(A, B, \ldots) \in \mathcal{P}(\mathcal{F}(A, B))$

On a, pour tout $n \in -\mathbb{N}^*$ et pour tout $c \in B$:

$$\mathcal{D}_n(A, B, c) :=$$

Contents

1 Définitions **1**
1.1 Définition de l'ensemble des FEF . . . 1
1.2 Un conflit de notations: l'exposant . . . 1
1.3 Définition formelle de $\mathcal{F}$ . . . 2
1.4 Extension des opérateurs ensemblistes aux FEF . . . 2
1.5 Notation succinte pour définir des FEF . . . 2
1.6 Définition de quelques FEF . . . 2
1.6.1 Dérivabilité, continuité . . . 2
1.6.2 Monotonie . . . 3
1.6.3 Parité . . . 3
1.6.4 *jectivité . . . 3
1.7 Les quasi-FEF . . . 3
1.7.1 Un exemple motivateur: les fonctions primitivables . . . 3
1.7.2 Définition . . . 4