

Fonctions à ensembles fonctionnels

Ewen Le Bihan

2020-12-29

Abstract

La notation $\mathcal{D}(A, B)$ désignant l'ensemble des fonctions dérivables sur A de type $A \rightarrow B$ est assez commune, et facilement définissable de manière formelle, ainsi que sa généralisation, \mathcal{D}^n , ou son homologue pour les fonctions continues, \mathcal{C} . Mais il y a bien un lien entre ces trois notations: ce sont des *fonctions à valeurs d'ensembles ne contenant que des fonctions du type correspondants aux deux arguments passés à la fonction*, ou, plus succinctement, pour tous ensembles A et B , $\mathcal{D}(A, B) \in \mathcal{P}(\mathcal{F}(A, B))$.

Dans cet article est exploré cette “classe” d'objets particuliers. On définit pour tout le reste de l'article l'abréviation **FEF**, signifiant “Fonctions à valeurs d'ensembles fonctionnels”. On note dans la suite de tout l'article A et B deux ensembles quelconques, $:=$ l'égalité par définition et univers l'unique ensemble tel que pour tout ensemble A , $A \subset \text{univers}$.

1 Définitions

1.1 Définition de l'ensemble des FEF

On définit dès lors un nouvel ensemble \mathbb{Y}

$$\mathbb{Y} := \mathcal{F}(A \times B, \mathcal{P}(\mathcal{F}(A, B)))$$

Où:

- \mathcal{F} désigne l'ensemble des fonctions de type $A \rightarrow B$. Pour la définition formelle de \mathcal{F} , cf. 1.3.
- $\mathcal{P}(A)$ désigne une partie de A

On a bien:

- $\mathcal{F} \in \mathbb{Y}$
- $\mathcal{C} \in \mathbb{Y}$
- $\mathcal{D} \in \mathbb{Y}$

1.2 Un conflit de notations: l'exposant

Cette perspective de \mathcal{D}^n ou \mathcal{C}^n comme de simples fonctions soulève un conflit assez désagréable de notation: si \mathcal{D} est une fonction, on devrait avoir:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{D}^n = \bigcirc_{i=0}^n \mathcal{D}$$

Ce qui n'est évidemment pas le cas.

Dès lors, par souci de clarté, contrairement à la notation traditionnelle, \mathcal{D}_n désignera l'ensemble des fonctions n fois dérivables, et \mathcal{D}^n la fonction \mathcal{D} n fois composée avec elle-même. On fera la même entorse aux notations classiques pour \mathcal{C} .

1.3 Définition formelle de \mathcal{F}

L'ensemble \mathcal{F} est particulier: *il est nécessaire que \mathcal{F} soit défini pour définir \mathbb{Y} même.*

De ce fait, la définition de \mathcal{F} nécessite une définition formelle des applications. On restera au stade d'une définition semi-formelle:

$$\mathcal{F} := (A, B) \mapsto \{f \in \text{univers}, f : A \rightarrow B\}$$

1.4 Extension des opérateurs ensemblistes aux FEF

On a, pour tout élément $F \in \mathbb{Y}$:

1. F est d'arité 2 (i.e. F prend deux arguments)
2. F est à valeur d'ensembles

On en déduit de *tout élément de \mathbb{Y} possède la même arité et renvoie des valeurs de nature ensembliste.*

Il est donc possible d'étendre canoniquement et sans ambiguïté les opérateurs ensemblistes aux FEF. On a donc:

$$\forall \square \in \{\cup, \cap, \setminus, \Delta\}, \forall (F, G) \in \mathbb{Y}^2, F \square G := (A, B) \mapsto F(A, B) \square G(A, B) \quad (1)$$

$$\forall F \in \mathbb{Y}, {}^c F := (A, B) \mapsto {}^c(F(A, B)) \quad (2)$$

$$\forall F \in \mathbb{Y}, F^* := F \setminus (A, B) \mapsto \{x \mapsto 0\} \quad (3)$$

On précise pour (2) que l'"univers" des FEF (c'est-à-dire tel que le complémentaire de l'univers est \emptyset) est \mathcal{F} : On a bien ${}^c \mathcal{F} = \emptyset$, l'ensemble des fonctions de A dans B qui ne sont pas des fonctions de A dans B est vide. De ce fait, on a:

$$\forall F \in \mathbb{Y}, {}^c F := \mathcal{F} \setminus F$$

On précise pour (3) que 0 représente l'élément neutre du groupe $(A, +)$.

Cette extension de notation permettra notamment de définir les FEF des bijections de manière très succincte.

1.5 Notation succincte pour définir des FEF

On note, pour tout $F \in \mathbb{Y}$ et pour toute proposition P convenable définie:

$$\text{FEF}_{f:A \rightarrow B} P(f, A, B) := (A, B) \mapsto \{f \in B^A, P(f, A, B)\}$$

Cette notation définit un opérateur similaire à \lim qui est exprimable en tant que fonction, en effet, on a $\text{FEF} \in \mathcal{F}(B^A \times A \times B \times \mathcal{F}(B^A, A, B), \mathbb{Y})$

Exemple: Définition de la FEF des paires

$$\curlyvee := \text{FEF}_{f:A \rightarrow B} f \circ (-\text{id}_A) = (A, B) \mapsto \{f \in B^A, f \circ (-\text{id}) = f\}$$

1.6 Définition de quelques FEF

1.6.1 Dérivabilité, continuité

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\mathcal{D}_n := \text{FEF}_{f:A \rightarrow B} \left(\forall a \in A, \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(a + \epsilon) - f(a)}{\epsilon} \in \mathbb{R} \right) \quad (4)$$

$$\mathcal{C}_n := \text{FEF}_{f:A \rightarrow B} \left(\forall a \in A, \lim_{\epsilon \rightarrow a} f(\epsilon) = a \right) \quad (5)$$

Dans (1), la condition sur la limite implique également que la limite doit exister.

1.6.2 Monotonie

Sont définies ci-après les FEF des fonctions croissantes \supseteq , des fonctions décroissantes \supseteq et leurs homologues stricts \supsetneq et \supsetneq , en s'inspirant fortement des notations de la théorie des ensembles.

$$\begin{aligned}\supseteq &:= \text{FEF}_{f:A \rightarrow B} (\forall x, y \in A, x \geq y \implies f(x) \geq f(y)) \\ \supsetneq &:= \text{FEF}_{f:A \rightarrow B} (\forall x, y \in A, x > y \implies f(x) > f(y)) \\ \supseteq &:= \text{FEF}_{f:A \rightarrow B} (\forall x, y \in A, x \leq y \implies f(x) \leq f(y)) \\ \supsetneq &:= \text{FEF}_{f:A \rightarrow B} (\forall x, y \in A, x < y \implies f(x) < f(y))\end{aligned}$$

1.6.3 Parité

Sont définies ci-après les FEF des fonctions paires Ψ et impaires Ψ . Leurs symboles proviennent du graphe d'une fonction $(\text{id})^n$ avec n pair ou impair.

$$\begin{aligned}\Psi &:= \text{FEF}_{f:A \rightarrow B} f \circ (-\text{id}_A) = f \\ \Psi &:= \text{FEF}_{f:A \rightarrow B} f \circ (-\text{id}_A) = -f\end{aligned}$$

1.6.4 *jectivité

Sont définies ci-après les FEF des fonctions injectives \bigcirc , surjectives \bigcirc et bijectives \bigcirc . Leurs symboles proviennent des diagrammes sagittaux.

$$\begin{aligned}\bigcirc &:= \text{FEF}_{f:A \rightarrow B} (\forall (a_1, a_2) \in A^2, f(a_1) = f(a_2) \implies a_1 = a_2) \\ \bigcirc &:= \text{FEF}_{f:A \rightarrow B} f \in B^A, (\forall b \in B, \exists a \in A, f(a) = b)\end{aligned}$$

La surcharge de la notation d'intersection permet de définir facilement \bigcirc à partir de \bigcirc et \bigcirc :

$$\bigcirc := \bigcirc \cap \bigcirc$$

C'est en fait la définition même du quantificateur $\exists!$ qui intervient dans cette facilité de définition.

Contents

1	Définitions	1
1.1	Définition de l'ensemble des FEF	1
1.2	Un conflit de notations: l'exposant	1
1.3	Définition formelle de \mathcal{F}	2
1.4	Extension des opérateurs ensemblistes aux FEF	2
1.5	Notation succincte pour définir des FEF	2
1.6	Définition de quelques FEF	2
1.6.1	Dérivabilité, continuité	2
1.6.2	Monotonie	3
1.6.3	Parité	3
1.6.4	*jectivité	3