

Fonctions à ensembles fonctionnels

Ewen Le Bihan

2020-12-29

Abstract

La notation $\mathcal{D}(A, B)$ désignant l'ensemble des fonctions dérivables sur A de type $A \rightarrow B$ est assez commune, et facilement définissable de manière formelle, ainsi que sa généralisation, \mathcal{D}^n , ou son homologue pour les fonctions continues, \mathcal{C} . Mais il y a bien un lien entre ces trois notations: ce sont des *fonctions à valeurs d'ensembles ne contenant que des fonctions du type correspondants aux deux arguments passés à la fonction*, ou, plus succinctement, pour tous ensembles A et B , $\mathcal{D}(A, B) \in \mathcal{P}(\mathcal{F}(A, B))$.

Dans cet article est exploré cette “classe” d'objets particuliers. On définit pour tout le reste de l'article l'abréviation **FEF**, signifiant “Fonctions à valeurs d'ensembles fonctionnels”. On note dans la suite de tout l'article A et B deux ensembles quelconques, $:=$ l'égalité par définition et univers l'unique ensemble tel que pour tout ensemble A , $A \neq \text{univers} \implies A \subset \text{univers}$.

1 Définitions

1.1 Définition de l'ensemble des FEF

On définit dès lors un nouvel ensemble \mathbb{Y}

$$\mathbb{Y} := \mathcal{F}(A \times B, \mathcal{P}(\mathcal{F}(A, B)))$$

Où:

- \mathcal{F} désigne l'ensemble des fonctions de type $A \rightarrow B$. Pour la définition formelle de \mathcal{F} , cf. 1.3.
- $\mathcal{P}(A)$ désigne l'ensemble des parties de A

On a bien:

- $\mathcal{F} \in \mathbb{Y}$
- $\mathcal{C} \in \mathbb{Y}$
- $\mathcal{D} \in \mathbb{Y}$

1.2 Un conflit de notations: l'exposant

Cette perspective de \mathcal{D}^n ou \mathcal{C}^n comme de simples fonctions soulève un conflit assez désagréable de notation: si \mathcal{D} est une fonction, on devrait avoir:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{D}^n = \bigcirc_{i=0}^n \mathcal{D}$$

Ce qui n'est évidemment pas le cas.

Dès lors, par souci de clarté, contrairement à la notation traditionnelle, \mathcal{D}_n désignera l'ensemble des fonctions n fois dérivables, et \mathcal{D}^n la fonction \mathcal{D} n fois composée avec elle-même. On fera la même entorse aux notations classiques pour \mathcal{C} .

1.3 Définition formelle de \mathcal{F}

L'ensemble \mathcal{F} est particulier: *il est nécessaire que \mathcal{F} soit définie pour définir \mathbb{Y} même.*

De ce fait, la définition de \mathcal{F} nécessite une définition formelle des applications. On restera au stade d'une définition semi-formelle:

$$\mathcal{F} := (A, B) \mapsto \{f \in \text{univers}, f : A \rightarrow B\}$$

1.4 Extension des opérateurs ensemblistes aux FEF

On a, pour tout élément $F \in \mathbb{Y}$:

1. F est d'arité 2 (i.e. F prend deux arguments)
2. F est à valeur d'ensembles

On en déduit que *tout élément de \mathbb{Y} possède la même arité et renvoie des valeurs de nature ensembliste.*

Il est donc possible d'étendre canoniquement et sans ambiguïté les opérateurs ensemblistes aux FEF. Soient $F, G \in \mathbb{Y}$. On a:

$$\forall \square \in \{\cup, \cap, \setminus, \Delta, \subseteq, \subsetneq, \supseteq, \supsetneq\}, F \square G := (A, B) \mapsto F(A, B) \square G(A, B) \quad (1)$$

$${}^c F := (A, B) \mapsto {}^c(F(A, B)) \quad (2)$$

$$F^* := F \setminus (A, B) \mapsto \{x \mapsto 0_A\} \quad (3)$$

On précise pour (2) que l'“univers” des FEF (c'est-à-dire tel que le complémentaire de l'univers est \emptyset) est \mathcal{F} : On a bien ${}^c \mathcal{F} = \emptyset$, l'ensemble des fonctions de A dans B qui ne sont pas des fonctions de A dans B est vide. De ce fait, on a:

$$\forall F \in \mathbb{Y}, {}^c F := \mathcal{F} \setminus F$$

.

On précise pour (3) que 0_A représente l'élément neutre du magma unitaire¹ $(A, +)$. Cette définition a donc un sens si et seulement si $(A, +)$ est un magma unitaire.

Cette extension de notation permettra notamment de définir la FEF des bijections de manière très succincte (cf 1.7.4)

1.5 Surcharge de \in

Il peut être souhaitable de vouloir exprimer la contrainte “cette fonction vérifie cette propriété”, sans avoir à contraindre la source ou le but de ladite fonction. On redéfinit donc \in avec une fonction à gauche et un FEF à droite de la manière suivante:

$$\forall \text{LHS, RHS}, \begin{cases} \text{LHS} & \in \mathcal{F}(A, B) \\ \text{RHS} & \in \mathbb{Y} \end{cases} \implies \left(\text{LHS} \in \text{RHS} \stackrel{\text{def}}{\iff} \text{LHS} \in \text{RHS}(A, B) \right)$$

1.6 Notation succincte pour définir des FEF

On note, pour tout $F \in \mathbb{Y}$ et pour toute proposition P convenablement définie:

$$\text{FEF}_{f:A \rightarrow B} P(f, A, B) := (A, B) \mapsto \{f \in B^A, P(f, A, B)\}$$

Cette notation définit un opérateur similaire à \lim qui est exprimable en tant que fonction, en effet, on a $\text{FEF} \in \mathcal{F}(B^A \times A \times B \times \mathcal{F}(B^A \times A \times B, \mathbb{B}), \mathbb{Y})$

¹i.e. A possède un élément neutre pour $+$

1.6.1 Exemple: Définition de la FEF des paires

$$\curlyvee := \text{FEF}_{f:A \rightarrow B} f \circ (-\text{id}_A) = (A, B) \mapsto \{f \in B^A, f \circ (-\text{id}) = f\}$$

1.7 Définition de quelques FEF

1.7.1 Dérivabilité, continuité

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $u \in -\mathbb{N}^*$.

$$\mathcal{D}_n := \text{FEF}_{f:A \rightarrow B} \left(\exists l \in \mathbb{R}, \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a} l \right) \quad (4)$$

$$\mathcal{D}_u := \text{FEF}_{f:A \rightarrow B} (\exists F \in B^A, F' = f) \quad (5)$$

$$\mathcal{C}_n := \text{FEF}_{f:A \rightarrow B} \left(\forall a \in A, f \in \mathcal{D}_n \wedge f^{(n)} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow a} f^{(n)}(a) \right) \quad (6)$$

1.7.2 Monotonie

Sont définies ci-après les FEF des fonctions croissantes $\underline{\lhd}$, des fonctions décroissantes $\underline{\rhd}$ et leurs homologues stricts \lhd et \rhd , en s'inspirant fortement des notations de la théorie des ensembles.

$$\underline{\lhd} := \text{FEF}_{f:A \rightarrow B} (\forall x, y \in A, x \geq y \implies f(x) \geq f(y))$$

$$\lhd := \text{FEF}_{f:A \rightarrow B} (\forall x, y \in A, x > y \implies f(x) > f(y))$$

$$\underline{\rhd} := \text{FEF}_{f:A \rightarrow B} (\forall x, y \in A, x \geq y \implies f(x) \leq f(y))$$

$$\rhd := \text{FEF}_{f:A \rightarrow B} (\forall x, y \in A, x > y \implies f(x) < f(y))$$

1.7.3 Parité

Sont définies ci-après les FEF des fonctions paires \curlyvee et impaires \curlywedge . Leurs symboles proviennent du graphe d'une fonction $(\text{id})^n$ avec n pair ou impair.

$$\curlyvee := \text{FEF}_{f:A \rightarrow B} f \circ (-\text{id}_A) = f$$

$$\curlywedge := \text{FEF}_{f:A \rightarrow B} f \circ (-\text{id}_A) = -f$$

1.7.4 *jectivité

Sont définies ci-après les FEF des fonctions injectives \oslash , surjectives \oslash et bijectives \oslash . Leurs symboles proviennent des diagrammes sagittaux.

$$\oslash := \text{FEF}_{f:A \rightarrow B} (\forall (a_1, a_2) \in A^2, f(a_1) = f(a_2) \implies a_1 = a_2)$$

$$\oslash := \text{FEF}_{f:A \rightarrow B} f \in B^A, (\forall b \in B, \exists a \in A, f(a) = b)$$

La surcharge de la notation d'intersection permet de définir facilement \oslash à partir de \oslash et \oslash :

$$\oslash := \oslash \cap \oslash$$

C'est en fait la définition même du quantificateur $\exists!$ qui intervient dans cette facilité de définition.

1.7.5 Périodicité

Soit $T \in A$.

$$\circlearrowleft_T := \text{FEF}_{f:A \rightarrow B} \forall n \in \mathbb{Z}, f \circ (\text{id} + nT) = f.$$

1.8 Composition directe

Il est parfois utile d'exprimer l'ensemble de composées d'un FEF avec un autre.

On définit ainsi la composition directe:

$$\forall E, F \in \mathbb{Y}, E \odot F := \text{FEF}_{f:A \rightarrow B}$$

2 Applications

2.1 Définition formelle succincte de nombreux ensembles et énoncés

Notamment:

- L'ensemble des extractrices, $\not\subseteq (\mathbb{N}, \mathbb{N})$
- Toute fonction croissante a une dérivée positive, $d^{\rightarrow}(\not\subseteq(\mathbb{R}, \mathbb{R})) = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ Même si un énoncé plus simple serait "Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ croissante. Alors $f' > 0$ ", l'énoncé premier a deux avantages:
 - Il est totalement symbolique (et donc ne requiert pas de traduction, en plus d'être bien défini)
 - Permet un énoncé sans introduction de variables (liées ou libres).
- Plus généralement, la quantification d'une fonction et de propriété requises est combinée en une simple quantification: Au lieu d'avoir $\forall f \in \mathcal{F}(A, B), P(f) \implies Q(f)$, on peut condenser l'énoncé à $\forall f \in \text{FEF}_{f:A \rightarrow B} P(f)(A, B), Q(f)$, ce qui peut s'avérer plus naturel dans certains cas².
- La définition succincte de la relation "les ensembles A et B sont en bijection":

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(\text{univers}), A \approx B \stackrel{\text{def}}{\iff} (\text{Bij})(A, B) \neq \emptyset$$

- Les isomorphismes, $\mathcal{L} \cap (\text{Bij})$

2.2 Quelques résultats immédiats

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{C}_n \subsetneq \mathcal{D}_n \\ \not\subseteq \subsetneq \not\supseteq \\ \supsetneq \subsetneq \supseteq \end{aligned}$$

²Bien évidemment, l'énoncé est plus succinct si $\text{FEF}_{f:A \rightarrow B} P(f)$ est un FEF assigné à un symbole, comme $\not\subseteq$.

Contents

1	Définitions	1
1.1	Définition de l'ensemble des FEF	1
1.2	Un conflit de notations: l'exposant	1
1.3	Définition formelle de \mathcal{F}	2
1.4	Extension des opérateurs ensemblistes aux FEF	2
1.5	Surcharge de \in	2
1.6	Notation succincte pour définir des FEF	2
1.6.1	Exemple: Définition de la FEF des paires	3
1.7	Définition de quelques FEF	3
1.7.1	Dérivabilité, continuité	3
1.7.2	Monotonie	3
1.7.3	Parité	3
1.7.4	*jectivité	3
1.7.5	Périodicité	4
1.8	Composition directe	4
2	Applications	4
2.1	Définition formelle succincte de nombreux ensembles et énoncés	4
2.2	Quelques résultats immédiats	4