Quantificateurs sur contraintes arbitraires

Ewen Le Bihan

2020-12-29

Abstract

Il est coutume largement répandue en mathématiques d'utiliser les quantificateurs $\forall$ et $\exists$ (ainsi que le "*pseudo-quantificateur*" $\exists!$) pour indiquer qu'une proposition logique est vraie sur une partie de l'ensemble dans lequel la variable est introduite. Cependant, par abus de notation, il est courant de quantifier une variable sur une condition autre qu'une appartenance à un certain ensemble: selon le contexte, $\forall n > 0$ peut être équivalent à $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in \mathbb{R}_+^*$, etc. Mais si cet abus de notation est si commun, c'est qu'il a bien une utilité. Il convient donc d'étendre la définition des quantificateurs à l'inégalité — et même à *n'importe quelle contrainte sur une variable*. Dans tout l'article, on note $\mathfrak{C}$ une proposition logique a $n \in \mathbb{N}$ arguments appelée *contrainte*.

1 La particularité des quantificateurs: un introduisant

Définir formellement un quantificateur peut s'avérer plus compliqué que ce que l'on pense au premiers abords. En effet, les quantificateurs ont la particularité unique d'agir sur une variable indéfinie, il servent justement à *définir* des variables.

On ne peut donc réduire le quantificateur à une simple fonction.

On a donc deux possibles approches à la définition formelle élargie des quantificateurs:

- Reposer sur la définition déjà étable des quantifications sur appartenances à un ensemble
- Redéfinir formellement les quantificateurs à partir de zéro

Les deux approches seront explorées dans cet article.

2 Extension du cas $\mathfrak{C} = \in$

$$\forall \mathfrak{C}(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n) := \forall (a_1,\ \ldots,\ a_n) \in \{a,\ \mathfrak{C}(a)\}^n$$