Fonctions à ensembles fonctionnels

Ewen Le Bihan

2020-12-29

Abstract

La notation $\mathcal{D}(A, B)$ désignant l'ensembles des fonctions dérivables sur A de type $A \to B$ est assez commune, et facilement définissable de manière formelle, ainsi que sa généralisation, $\mathcal{D}^n$, ou son homologue pour les fonctions continues, $\mathcal{C}$. Mais il y a bien un lien entre ces trois notations: ce sont des *fonctions à valeurs d'ensembles ne contenant que des fonctions du type correspondants aux deux arguments passés à la fonction*, ou, plus succintement, pour tous ensembles A et B, $\mathcal{D}(A, B) \in \mathcal{P}(\mathcal{F}(A, B))$.

Dans cet article est exploré cette "classe" d'objets particuliers. On défini pour tout le reste de l'article l'abbréviation **FEF**, signifiant "Fonctions à valeurs d'ensembles fonctionnels". On note dans la suite de tout l'article A et B deux ensembles quelconques, := l'égalité par définition et univers l'unique ensemble tel que pour tout ensemble A, $A \subset$ univers.

1 Définitions

1.1 Définition de l'ensemble des FEF

On définit dès lors un nouvel ensemble $\mathbb{Y}$

$$\mathbb{Y} := \mathcal{F}(A \times B,\ \mathcal{P}(\mathcal{F}(A, B))$$

Où:

- $\mathcal{F}$ désigne l'ensemble des fonctions de type $A \to B$. Pour la définition formelle de $\mathcal{F}$, cf. 1.3.
- $\mathcal{P}(A)$ désigne une partie de A

On a bien:

- $\mathcal{F} \in \mathbb{Y}$
- $\mathcal{C} \in \mathbb{Y}$
- $\mathcal{D} \in \mathbb{Y}$

1.2 Un conflit de notations: l'exposant

Cette perspective de $\mathcal{D}^n$ ou $\mathcal{C}^n$ comme de simples fonctions soulève un conflit assez désagréable de notation: si $\mathcal{D}$ est une fonction, on devrait avoir:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{D}^n = \bigcirc_{i=0}^{n} \mathcal{D}$$

Ce qui n'est évidemment pas le cas.

Dès lors, par souci de clarté, contrairement à la notation traditionnelle, $\mathcal{D}_n$ **désignera l'ensemble des fonctions** n **fois dérivables, et** $\mathcal{D}^n$ **la fonction** $\mathcal{D}$ n **fois composée avec elle-même**. On fera la même entorse aux notations classiques pour $\mathcal{C}$.

1.3 Définition formelle de $\mathcal{F}$

L'ensemble $\mathcal{F}$ est particulier: *il est nécéssaire que $\mathcal{F}$ soit définit pour définir $\mathbb{Y}$ même.*

De ce fait, la définition de $\mathcal{F}$ nécéssite une définition formelle des applications. On restera au stade d'une définition semi-formelle:

$$\mathcal{F} := (A, B) \mapsto \{f \in \text{univers},\ f : A \to B\}$$

1.4 Extension des opérateurs ensemblistes aux FEF

On a, pour tout élément $F \in \mathbb{Y}$:

1. F est d'arité 2 (i.e. F prend deux arguments)
2. F est à valeur d'ensembles

On en déduit de *tout élément de $\mathbb{Y}$ possède la même arité et renvoie des valeurs de nature ensembliste.*

Il est donc possible d'étendre canoniquement et sans ambiguïté les opérateurs ensemblistes aux FEF. On a donc:

$$\forall \Box \in \{\cup, \cap, \setminus, \Delta\},\ \forall (F, G) \in \mathbb{Y}^2,\ F \Box G := (A, B) \mapsto F(A, B) \Box G(A, B) \tag{1}$$

$$\forall F \in \mathbb{Y},\ {}^cF := (A, B) \mapsto {}^c(F(A, B)) \tag{2}$$

$$\forall F \in \mathbb{Y},\ F^* := F \setminus (A, B) \mapsto \{x \mapsto 0\} \tag{3}$$

On précise pour (2) que l'"univers" des FEF (c'est-à-dire tel que le complémentaire de l'univers est $\emptyset$) est $\mathcal{F}$: On a bien ${}^c\mathcal{F} = \emptyset$, l'ensemble des fonctions de A dans B qui ne sont pas des fonctions de A dans B est vide. De ce fait, on a:

$$\forall F \in \mathbb{Y},\ {}^cF := \mathcal{F} \setminus F$$

.

On précise pour (3) que 0 représente l'élément neutre du groupe $(A, +)$.

Cette extension de notation permettra notamment de définir les FEF des bijections de manière très succinte.

1.5 Notation succinte pour définir des FEF

On note, pour tout $F \in \mathbb{Y}$ et pour toute proposition P convenanble définie:

$$\underset{f:A\to B}{\mathrm{FEF}} P(f, A, B) := (A, B) \mapsto \{f \in B^A,\ P(f, A, B)\}$$

Cette notation définit un opérateur similaire à lim qui est exprimable en tant que fonction, en effet, on a $\mathrm{FEF} \in \mathcal{F}(B^A \times A \times B \times \mathcal{F}(B^A, A, B), \mathbb{Y})$

Exemple: Définition de la FEF des paires

$$\Psi := \underset{f:A\to B}{\mathrm{FEF}} f \circ (-\mathrm{id}_A) = (A, B) \mapsto \{f \in B^A,\ f \circ (-\mathrm{id}) = f\}$$

1.6 Définition de quelques FEF

1.6.1 Dérivabilité, continuité

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\mathcal{D}_n := \underset{f:A\to B}{\mathrm{FEF}} \left(\forall a \in A,\ \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(a+\epsilon) - f(a)}{\epsilon} \in \mathbb{R} \right) \tag{4}$$

$$\mathcal{C}_n := \underset{f:A\to B}{\mathrm{FEF}} \left(\forall a \in A,\ \lim_{\epsilon \to a} f(\epsilon) = a \right) \tag{5}$$

Dans (1), la condition sur la limite implique également que la limite doit exister.

1.6.2 Monotonie

Sont définies ci-après les FEF des fonctions croissantes $\underline{\nearrow}$, des fonctions décroissantes $\underline{\searrow}$ et leurs homologues stricts $\underset{\neq}{\nearrow}$ et $\underset{\neq}{\searrow}$, en s'inspirant fortement des notations de la théorie des ensembles.

$$
\begin{aligned}
\underline{\nearrow} &:= \underset{f:A\to B}{\mathrm{FEF}} \left(\forall x, y \in A,\ x \geq y \implies f(x) \geq f(y)\right)\\
\underset{\neq}{\nearrow} &:= \underset{f:A\to B}{\mathrm{FEF}} \left(\forall x, y \in A,\ x > y \implies f(x) > f(y)\right)\\
\underline{\searrow} &:= \underset{f:A\to B}{\mathrm{FEF}} \left(\forall x, y \in A,\ x \geq y \implies f(x) \leq f(y)\right)\\
\underset{\neq}{\searrow} &:= \underset{f:A\to B}{\mathrm{FEF}} \left(\forall x, y \in A,\ x > y \implies f(x) < f(y)\right)
\end{aligned}
$$

1.6.3 Parité

Sont définies ci-après les FEF des fonctions paires Ψ et impaires $\not\Psi$. Leurs symboles proviennent du graphe d'une fonction $(\mathrm{id})^n$ avec n pair ou impair.

$$
\begin{aligned}
\Psi &:= \underset{f:A\to B}{\mathrm{FEF}} f \circ (-\mathrm{id}_A) = f\\
\not\Psi &:= \underset{f:A\to B}{\mathrm{FEF}} f \circ (-\mathrm{id}_A) = -f
\end{aligned}
$$

1.6.4 *jectivité

Sont définies ci-après les FEF des fonctions injectives $(\!\rightarrowtail\!)$, surjectives $(\!\twoheadrightarrow\!)$ et bijectives $(\!\leftrightarrow\!)$. Leurs symboles proviennent des diagrammes sagittaux.

$$
\begin{aligned}
(\!\rightarrowtail\!) &:= \underset{f:A\to B}{\mathrm{FEF}} \left(\forall (a_1, a_2) \in A^2,\ f(a_1) = f(a_2) \implies a_1 = a_2\right)\\
(\!\twoheadrightarrow\!) &:= \underset{f:A\to B}{\mathrm{FEF}} f \in B^A,\ \left(\forall b \in B,\ \exists a \in A,\ f(a) = b\right)
\end{aligned}
$$

La surcharge de la notation d'intersection permet de définir facilement $(\!\leftrightarrow\!)$ à partir de $(\!\rightarrowtail\!)$ et $(\!\twoheadrightarrow\!)$:

$$(\!\leftrightarrow\!) := (\!\rightarrowtail\!) \cap (\!\twoheadrightarrow\!)$$

C'est enfait la définition même du quantificateur $\exists!$ qui intervient dans cette facilité de définition.

Contents