Exercices: Équations différentielles

Ewen Le Bihan

2020-06-05

Abstract

Exercices provenant de `./sujet.pdf`

Résumé du cours

Soit y, α des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $a, b, x, C \in \mathbb{R}$. Soit A la primitive de α.

$$y' + \alpha(x)y = 0 \implies y = x \mapsto Ce^{-A(x)}$$
$$y' + ay = b \implies y = x \mapsto Ce^{-ax} + \frac{b}{a}$$

1 Montrer que y est solution de l'équation

1.1

$y' - 2y = 0$ avec $y : x \mapsto e^{2x}$

$$\begin{aligned} & y' - 2y = 0 \\ \iff & 2e^{2x} - 2e^{2x} = 0 \end{aligned}$$

1.2

2 Résoudre une équation différentielle d'ordre 1 homogène

Dans chaque exercice, $C \in \mathbb{R}$

2.1 $y' + \frac{2}{x^2}y$

$$\begin{aligned} y &= x \mapsto C \exp\left(2 \cdot \frac{1}{-1} x^{-1}\right) \\ &= x \mapsto C \exp\left(-\frac{2}{x}\right) \end{aligned}$$

2.2

$$\begin{aligned} & (x^2 + x + 1)y' + (2x + 1)y = 0 \\ \iff & y' + \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} y = 0 \\ \iff & y = x \mapsto C \exp(-\ln x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

2.3

$$\begin{aligned} & y' + 2xe^{-x^2} y = 0 \\ \iff & y = x \mapsto C\exp(-(-x^2)) \\ & = x \mapsto C \exp x^2 \end{aligned}$$

2.4

$$\begin{aligned} & (x^2+4x+1)^5 y' - (x+2)y = 0 \\ \iff & y' - \frac{x+2}{(x^2+4x+1)^5} y = 0 \\ \iff & y = x \mapsto C\exp\left(-\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4(x^2+4x+1)^4}\right)\right) \\ \iff & y = x \mapsto C\exp\left(\frac{1}{8(x^2+4x+1)^4}\right) \end{aligned}$$

2.5

$$\begin{aligned} & \sqrt{x^2+1}y' - xy = 0 \\ \iff & y' - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = 0 \\ \iff & y = x \mapsto C\exp(-(-\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{x^2+1})) \\ & = x \mapsto C\exp\sqrt{x^2+1} \end{aligned}$$

2.6

$$\begin{aligned} & y' - \cos(3x+1)y = 0 \\ \iff & y = x \mapsto C\exp\left(\frac{1}{3}\cdot\sin(3x+1)\right) \end{aligned}$$

3 Résoudre une équation différentielle d'ordre 1 non-homogène

3.1

$$y' - 3y = 5$$

Résolution de l'équation homogène Commençons par résoudre l'équation homogène

$$y' - 3y = 0$$

$$\begin{aligned} & y' - 3y = 0 \\ \iff & y = x \mapsto Ce^{3x} \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Donc

$$y_0 : x \mapsto Ce^{3x} \quad C \in \mathbb{R}$$

Cherchons une solution particulière y_1 à l'équation

$$y' - 3y = 5$$

On remarque que cette équation est de la forme $y' + ay = b$, avec $a = -3$ et $b = 5$. On a donc:

$$\begin{aligned} & y' - 3y = 5 \\ \iff & y = x \mapsto y_0(x) + \frac{-3}{5} \\ & = x \mapsto Ce^{3x} - \frac{3}{5} \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

3.2

$$\begin{aligned} 2y' - 4y = 1 \\ \iff y' - 2y = \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{1}$$

Soit $y_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution à l'équation (1) homogénéisée

$$\begin{aligned} & 2y' - 4y = 0 \\ \iff & y' - 2y = 0 \\ & \iff y = x \mapsto Ce^{2x} \quad C \in \mathbb{R} \\ & y_0 = y \end{aligned}$$

On remarque que (1) est de la forme

$$y' + ay = b$$

Avec $a = -4$ et $b = 1$. On a donc:

$$\begin{aligned} y &= x \mapsto Ce^{2x} + \frac{\frac{1}{2}}{-2} \quad C \in \mathbb{R} \\ &= x \mapsto Ce^{2x} - \frac{1}{4} \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

3.3

$$\begin{aligned} 10y' &= 2y - 3 \\ 10y' - 2y &= -3 \\ y' - \frac{2}{10}y &= -\frac{3}{10} \end{aligned} \tag{2}$$

Soit $y_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution à l'équation (2) homogénéisée

$$\begin{aligned} & y' - \frac{2}{10}y = 0 \\ \iff & y = x \mapsto C \exp\left(\frac{2}{10}x\right) \quad C \in \mathbb{R} \\ & y_0 = y \end{aligned}$$

On remarque que (2) est de la forme

$$y' + ay = b$$

Avec $a = -\frac{2}{10}$ et $b = -3$. On a donc:

$$
\begin{aligned}
&y' - \frac{2}{10}y = 0 \\
\iff &y = x \mapsto C\exp\left(\frac{2}{10}x\right) + \frac{-\frac{2}{10}}{-\frac{3}{10}} \quad C \in \mathbb{R} \\
& = x \mapsto C\exp\left(\frac{1}{5}x\right) + \frac{3}{2} \quad C \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$