*August 15, 2019*

# Condensé de la 1ère
## Mathématiques

Ewen Le Bihan
1eS3

# Notations non vues en cours

| | |
|---|---|
| $:=$ | Égal par définition |
| $\mathbb{A} \cap \mathbb{B}$ | Appartient à la fois à $\mathbb{A}$ et à $\mathbb{B}$ |
| $\lceil x \rceil$ | Arrondir $x$ à l'entier supérieur. ($\lceil 5.1 \rceil = 6$) |
| $1.5$ | Séparateur , |
| $x \cdot y$ | Multiplication $\times$ |
| $\vec{v} \perp \vec{u}$ | $\vec{v}$ et $\vec{u}$ orthogonaux |

# Contents

# 1 Polynômes du second degré $ax^2 + bx + c$

## 1.1 $\Delta$: Trouver les racines

$$\Delta := b^2 - 4ac$$

$$\begin{cases} \Delta > 0 & x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{4a} \\ \Delta = 0 & x_0 = \frac{b}{2a} \\ \Delta < 0 & \emptyset \end{cases}$$

## 1.2 $\alpha$,$\beta$: Trouver l'extremum

### 1.2.1 Maximum ou minimum ?

| | |
|---|---|
| $a > 0$ | minimum |
| $a < 0$ | maximum |

### 1.2.2 Calcul

$$\alpha := \frac{b}{2a}$$
$$\beta := \frac{\Delta}{4a}$$
$$\text{Sommet} = (\alpha; \beta)$$

Le polynôme atteint un extremum en $\alpha$ de valeur $\beta$

## 1.3 Différentes formes

| | |
|---|---|
| Canonique | $(x - \alpha)^2 + \beta$ |
| Factorisée | $a(x - x_1)(x + x_2)$ |
| | $a(x_0 - x)^2$ |
| Développée | $ax^2 + bx + c$ |

# 2 Vecteurs $\vec{v}$, équations cartésiennes $ax + by + c = 0$

## 2.1 Colinéarité

$$\begin{aligned}\vec{v}\ \&\ \vec{u}\ \text{colinéaires} &\iff x_u y_v - y_u x_v = 0 \\ &\iff (u) \parallel (v) \\ &\iff \vec{u} = \lambda \vec{v} \quad (\forall\, \lambda \in \mathbb{R})\end{aligned}$$

## 2.2 Vecteur directeur

### 2.2.1 Équation réduite $y = mx + p$

$$\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$$

### 2.2.2 Équation cartésienne $ax + by + c = 0$

$$\begin{array}{r|l} \text{Vecteur directeur} & \vec{v}\binom{-b}{a} \\ \text{Coefficient directeur} & m = -\frac{a}{b} \end{array}$$

## 2.3 Décomposer un vecteur

$$(\forall\, \lambda, \lambda' \in \mathbb{R}) \quad \vec{w} = \lambda \vec{v} + \lambda' \vec{u}$$

## 2.4 Relation de Chasles

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

# 3 Statistiques

## 3.1 Caractéristiques

| Nom | Type | Formule | |
|---|---|---|---|
| Effectif total | / | $N :=$ | $\sum_{i=0}^{p} n_i$ |
| Moyenne | Centrale | $\bar{x} :=$ | $\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{p} n_i x_i$ |
| Médiane | Centrale | $Me :=$ | $\begin{cases} N \text{ pair} & \frac{1}{2}\left(x_{\frac{N}{2}} + x_{\frac{N+1}{2}}\right) \\ N \text{ impair} & x_{\lceil \frac{N}{2} \rceil} \end{cases}$ |
| Mode | Centrale | $Mo :=$ | Valeur ou classe qui a l'effectif le plus grand |
| Premier Quartil | Non-centrale | $Q_1 :=$ | $x_{\lceil \frac{N}{4} \rceil}$ |
| Troisième Quartil | Non-centrale | $Q_3 :=$ | $x_{\lceil \frac{3}{4} N \rceil}$ |
| Étendue | Dispersion | $e :=$ | $x_{max} - x_{min}$ |
| Écart inter-quartil | Dispersion | | $Q_3 - Q_1$ |
| Variance | Dispersion | $V :=$ | $\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{p} (n_i x_i^2) - \bar{x}$ |
| Écart type | Dispersion | $\sigma :=$ | $\sqrt{V}$ |

## 3.2 Transformation de valeurs selon $y = mx + p$

$$\bar{y} = m\bar{x} + p$$
$$V_y = m^2 V_x$$
$$\sigma_y = |m| \sigma_x$$

# 4 Probabilités

## 4.1 Notions

| Nom | Symbole | Description |
|---|---|---|
| Univers | $\Omega$ | Ensemble des issues possibles |
| Variable aléatoire | $X$ | Fonction qui renvoie un nombre aléatoire dans $\Omega$ |

## 4.2 Loi de probabilité de $X$

Exemple:

- $\Omega = \{0; 1; 2\}$
- $p(X = 0) = p(X = 2) = \frac{1}{4}$
- $p(X = 1) = \frac{1}{2}$

| k | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $p(X = k)$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ |

## 4.3 Caractéristiques

| Nom | Description | Formule | |
|---|---|---|---|
| Espérance | Résultat moyen espéré | $E(X) :=$ | $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$ |
| Variance | | $V(X) :=$ | $\sum_{i=1}^{n}(p_i x_i) - E(X)^2$ |
| Écart type | | $\sigma(X) :=$ | $\sqrt{V(X)}$ |

## 4.4 Issues, évennements

Exemple:

| $x_i$ | A | B |
|---|---|---|
| $p(X = x_i)$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}$ |

Calcul de l'issue $AB$ ($A \to B$):

$$p(AB) = p(A) \cdot p(B)$$

Calcul de l'évenement $\Theta$ « au moins une fois $A$ »:

$$p(\Theta) = p(AB) + p(BA) + p(AA)$$

Calcul de l'évennement contraire $\bar{\Theta}$:

$$p(\bar{\Theta}) = 1 - p(\Theta)$$

## 4.5 Loi binomiale $\mathscr{B}$

### 4.5.1 Définitions

| Épreuve de Bernoulli | |
|---|---|
| Évenement « succès » | $S$ |
| Évenement « échec » | $\bar{S}$ |
| Probabilité de succès | $p := p(S)$ |
| Probabilité d'échec | $q := p(\bar{S})$ |
| | $= 1 - p$ |

| Schéma de Bernoulli | $\mathscr{B}(n; p)$ |
|---|---|
| Nombre de répétitions | $n$ |
| Nombre de succès | $k$ |
| Univers | $\Omega = [0; n] \cap \mathbb{N}$ |

### 4.5.2 Loi de $X$

Si $X \sim \mathscr{B}(n; p)$

| $k$ | $0$ | $2$ | $3$ | ... | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $p(X = k)$ | $\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ | | | | |

### 4.5.3 Caractéristiques

$$\forall k \in [0; n] \cap \mathbb{N}$$

$$E(X) = np$$
$$V(X) = npq$$

# 5 Suites $U_n$

## 5.1 Types de suites

### 5.1.1 Fonctionnelle

$$U_n = 2n$$

### 5.1.2 Récursive

$$\begin{cases} U_{n+1} & = U_0 + U_n \\ U_0 & = 5 \end{cases}$$

## 5.2 Suites remarquables

### 5.2.1 Arithmétiques

$$\begin{cases} U_{n+1} & = U_n + r \\ U_0 & = k \end{cases}$$

$$U_n = U_0 + r \cdot n$$

### 5.2.2 Géométriques

$$\begin{cases} U_{n+1} & = U_n \cdot q \\ U_0 & = k \end{cases}$$

$$U_n = U_0 \cdot q^n$$

## 5.3 Sommes

### 5.3.1 Suites arithmétiques

$$\sum_{\mu=i}^{j} U_\mu = \frac{U_i + U_j}{2} \cdot (j - i + 1)$$

### 5.3.2 Suites géométriques

$$\sum_{\mu=i}^{j} U_\mu = U_i \cdot \frac{1 - q^{j-i+1}}{1 - q}$$

## 5.4 Variations

### 5.4.1 Fonction associée

$$(\forall n \in \mathbb{N}) f : n \mapsto U_n$$

$$\text{Si } f \nearrow / \searrow \implies U_n \nearrow / \searrow$$

### 5.4.2 Méthode 2

$$U_{n+1} - U_n \lesseqgtr 0 \iff U_n \searrow / \nearrow$$

### 5.4.3 Méthode 3

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} \gtreqless 1 \iff U_n \nearrow / \searrow$$

# 6 Produit Scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$

Note: pour éviter les confusions, la multiplication normale est notée $\times$ dans ce chapitre.

## 6.1 Calcul

$\vec{\mu}, \vec{\kappa}$ projetés orthogonaux de $\vec{u}$ et $\vec{v}$

$$\begin{aligned}
\vec{u} \cdot \vec{v} &\iff ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u}; \vec{v}) \\
&\iff x_u \times x_v + y_u \times y_v \; * \\
&\iff \vec{u} \perp \vec{v} \\
&\iff \vec{\mu} \cdot \vec{\kappa} \\
&\iff \frac{1}{2}\left(||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - ||\vec{v} - \vec{u}||^2\right) \; **
\end{aligned}$$

* Seulement dans un repère orthonormé
** Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont vecteurs directeurs des segments formant un triangle:

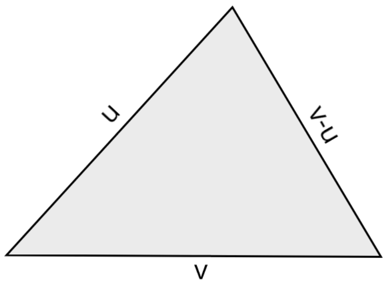


Figure 1

## 6.2 Multiplication de segments liés

Si $A, H, B$ alignés dans cet ordre

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$$

Sinon, si $H, A, B$ alignés dans cet ordre

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$$

## 6.3 Identités remarquables

$$||\vec{u} \pm \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 \pm 2\vec{v} \cdot \vec{u} + ||\vec{v}||^2$$
$$(\vec{u} - \vec{v})(\vec{u} + \vec{v}) = ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2$$

## 6.4 Angle aigu et obtu

$$\vec{u} \cdot \vec{v} > 0 \iff (\vec{u}; \vec{v}) \text{ aigu}$$

Et inversement

# 7 Étude de fonctions

## 7.1 Fonctions de bases

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $x$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ |
| $x^2$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ |
| $^1/_x$ | $\searrow$ | $\|\|$ | $\searrow$ |
| $\sqrt{x}$ | $/////$ | $0$ | $\nearrow$ |
| $\|x\|$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ |

## 7.2 Opérations sur fonctions

$\leftrightarrows$ : Changement de variation
$\rightrightarrows$ : Même variation

$$\forall\, k \in \mathbb{R},\ \ \forall\, \lambda_+ \in \mathbb{R}^+,\ \ \forall\, \lambda_- \in \mathbb{R}^-$$

| $u$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $u + k$ | $\rightrightarrows$ | $k$ | $\rightrightarrows$ |
| $u \cdot \lambda_+$ | $\rightrightarrows$ | $0$ | $\rightrightarrows$ |
| $u \cdot \lambda_-$ | $\leftrightarrows$ | $0$ | $\leftrightarrows$ |
| $\sqrt{u}$ | $/////$ | $0$ | $\nearrow$ |
| $^1/_u$ | $\searrow$ | $\|\|$ | $\searrow$ |

### 7.3 Dérivées

#### 7.3.1 Nombre dérivé $f'(a)$

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

#### 7.3.2 Tangeante $T$ au point $a$

$$T : y = \underbrace{f'(a)}_{\text{coef dir}} (x - a) + f(a)$$

#### 7.3.3 Tangeantes remarquables

| | $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|---|
| | constante | 0 |
| $\forall\, n \in \mathbb{N}$ | $x^n$ | $nx^{n-1}$ |
| | $\sqrt{x}$ | $1/2\sqrt{x}$ |
| | ${}^1/_x$ | $-1/x^2$ |

#### 7.3.4 Opérations sur les tangeantes

$(u + v)'$ et $(ku)'$ fonctionne normalement.

$$(uv)' = u'v + v'u$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = -\frac{v'u - u'v}{v^2}$$

#### 7.3.5 Utilisations de la tangeante

Sens de variation de $f$

Si $f$ dérivable sur $[I; J]$

| $x$ | $I$ | $J$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $-$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | $\searrow$ |

Extrema (*et pas «extremums» bordel de merde*)

Trouver le(s) $x$ pour $f'(x) = 0$

## 8 Trigonométrie

### 8.1 Notions

Radians: Mesure d'angle $\in [0; 2\pi]$ (principalement)
Cercle trigonométrique: cercle de rayon 1 ($2\pi r \to 2\pi$)

### 8.2 Valeurs remarquables

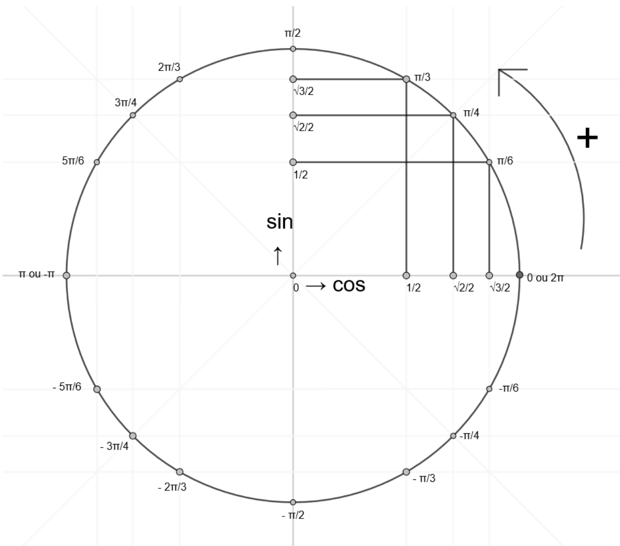
π/2
2π/3
π/3
3π/4
√3/2
π/4
√2/2
+
5π/6
π/6
1/2
sin
↑
π ou -π
0 → cos
1/2
√2/2
√3/2
0 ou 2π
- 5π/6
-π/6
- 3π/4
-π/4
- 2π/3
- π/3
- π/2

Figure 2