*February 29, 2020*

# Condensé de la terminale
## Mathématiques

Ewen Le Bihan
TS3

## Notations non vues en cours

| | |
|---|---|
| $:=$ | Égal par définition |
| $\lceil x \rceil$ | Arrondir $x$ à l'entier supérieur. ($\lceil 5.1 \rceil = 6$) |
| $1.5$ | Séparateur , |
| $x \cdot y$ | Multiplication $\times$ |
| $\nearrow$ | Croissant |
| $\searrow$ | Décroissant |
| $a \gtreqless b$ | Revient à écrire $a > b$, $a = b$ et $a > b$ |
| $\wedge$ | "et" |
| $\operatorname{Img} z$ | Point d'affixe $z$ |
| $\diamond$ | Caractère utilisé pour représenter plusieurs opérations |

# Contents

# 0 Outils

## 0.1 Composition de fonction $f \circ g$

Soit $f$ et $g$ des fonctions respectivement définies sur $I$ et $J$

$$(f \circ g)(x) \iff f(g(x))$$

Attention: il faut que $x$ soit défini dans $I$ et que $g(x)$ soit défini dans $J$

Plus généralement, soit $\Theta$ un ensemble de fonctions

$$\left(\bigcirc_{i=0}^{j} \Theta_i\right)(x) = \Theta_0(\Theta_1(\Theta_2(\Theta_3 \ldots (x \ldots)$$

## 0.2 Équations de cercle $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$

Soit $R$ le rayon du cercle, et $O(x_0; y_0)$ le centre du cercle
Un cercle dans le plan peut être décrit par l'équation suivante:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

## 0.3 Opérations avec des puissances

$$\begin{aligned}
(x^a)^b &= x^{ab} \\
x^a x^b &= x^{a+b} \\
x^{-a} &= \frac{1}{x^a} \\
x^{\frac{1}{a}} &= \sqrt[a]{x} \\
x^0 &= 1
\end{aligned}$$

## 0.4 Diverses théorèmes

### 0.4.1 Application de fonctions aux inéquations

Soit $I$ une intervalle, $f$ une fonction définie et croissante sur $I$, $x$ et $y$ deux nombres dans $I$

$$\begin{aligned}
x &\gtreqless y \\
\iff f(x) &\gtreqless f(y)
\end{aligned}$$

# 1 Suites numériques

## 1.1 Définition fonctionnelle

Soit $f$ une fonction:

$$u_n = f(n)$$

## 1.2 Définition par récurrence

Soit $f$ une fonction

$$u_n = \begin{cases} u_0 = \text{cste} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

## 1.3 Suite arithmétique

Avec $r$ la raison de la suite

**Définition fonctionnelle** $u_n = u_0 + r \cdot n$

**Définition par récurrence** $u_n = \begin{cases} u_0 = \text{cste} \\ u_{n+1} = u_n + r \end{cases}$

**Somme des termes de $i$ à $f$** $\displaystyle\sum_{i=i}^{j} u_i = (j - i + 1) \cdot \frac{u_j + u_i}{2}$

## 1.4 Suite géométrique

Avec $q$ la raison de la suite

**Définition fonctionnelle** $u_n = u_0 \cdot q^n$

**Définition par récurrence** $u_n = \begin{cases} u_0 = \text{cste} \\ u_{n+1} = u_n \cdot q \end{cases}$

**Somme des termes de $i$ à $f$** $\displaystyle\sum_{i=i}^{j} u_i = u_j \cdot \frac{1 - q^{j-i+1}}{1 - q}$

## 1.5 Limites

**Suite convergeante vers $L$** $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$

**Suite divergeante** $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \neq L$

| $p \in \{0.5\} \cup \mathbb{N}$<br>$q \in \mathbb{R}$ | $-\infty$ | -1 | 0 | 1 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n$ | ? | | 0 | 1 | $+\infty$ |
| $\lim\limits_{n \to +\infty} n^p$ | 0 | | 1 | $+\infty$ | |

Limites de type $\text{cste}^n$ ou $n^{\text{cste}}$

## 1.6 Majoration et minoration

Soit $(u_n)$ une suite définie sur les rangs dans $I$ et $L$ un réel

**Suite majorée** $\forall n \in I \ \ \exists M \quad u_n \leq M$

**Suite minorée** $\forall n \in I \ \ \exists m \quad u_n \geq m$

**Suite bornée** Suite majorée *et* minorée

$$\lim_{n \to +\infty} u_n \dots$$

| | Majorée (par $L$) | | Minorée (par $L$) | |
|---|---|---|---|---|
| | Oui | Non | Oui | Non |
| $\nearrow$ | $\leq L$ | $= +\infty$ | | |
| $\searrow$ | | | $\geq L$ | $= -\infty$ |

Soit $f$ la fonction associée à $u_n$

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = L \implies \lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = f(L)$$

## 1.7 Opérations sur les limites

*Voir en* 3.3

## 1.8 Comparaisons et limites

Soit $L \in \mathbb{R}$, $(u_n)$, $(v_n)$ et $(w_n)$ trois suites et $l_A$ la limite quand $n \to +\infty$ de la suite $A_n$

| Nom du théorème | Conditions | | Résultat | Explication graphique |
|---|---|---|---|---|
| Par comparaison | $u_n \leq v_n$ | $l_u = +\infty$ | $\implies l_v = +\infty$ | $(u_n)$ emporte $(v_n)$ vers $+\infty$ |
| | $u_n \geq v_n$ | $l_u = -\infty$ | $\implies l_v = -\infty$ | $(u_n)$ emporte $(v_n)$ vers $-\infty$ |
| Théorème des gendarmes | $w_n \geq v_n \geq u_n$ | $l_u = l_w = L$ | $\implies l_v = L$ | $(u_n)$ et $(w_n)$ forcent $(v_n)$ à tendre vers $L$ |

# 2 Probabilités

## 2.1 Probabilité conditionnelle $P(A|B)$

Probabilité que $A$ soit réalisé **sachant que** $B$ a déjà été réalisé.

$$P(A|B) \text{ ou } P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{si } P(B) \neq 0$$

## 2.2 Probabilités d'intersections $P(A \cap B)$

Probabilité que $A$ **et** $B$ soit réalisées.

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(B) \cdot P(A|B) \\ &= P(A) \cdot P(B|A) \end{aligned}$$

## 2.3 Probabilités d'union $P(A \cup B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

## 2.4 Partitions

Si on a deux évenements ou plus tel que...

- Aucun évenement n'est vide
  $\iff B_i \neq \emptyset \quad \forall i$
- Aucun évenement ne recouvre un autre
  $\iff B_i \cap B_j = \emptyset \quad \forall i, j$
- L'union de chaque partition couvre l'univers entier
  $\iff \bigcup_{i=1}^{j} B_i = \Omega$

## 2.5 Formule des probabilités totales

Soit $B_1$, $B_2$, ..., $B_n$ des évenements formant une partition de $\Omega$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i)$$

## 2.6 Indépendance d'évenements

$$\begin{aligned} A \text{ et } B \text{ sont indépendants} &\iff \overline{B} \text{ et } B \text{ forment une partition de } \Omega \\ &\iff \overline{A} \text{ et } A \text{ forment une partition de } \Omega \\ &\iff \overline{A} \text{ et } \overline{B}, A \text{ et } \overline{B} \text{ et } B \text{ et } \overline{A} \text{ sont indépendants} \end{aligned}$$

## 2.7 Loi de Bernouilli

**Épreuve de Bernouilli**

## 2.8 Autre vocabulaire

**Évenements incompatibles** $P(A \cap B) = 0$

# 3 Limites lim

## 3.1 Notation

Soit $x$, $C$ et $D$ des nombres et $\Psi$ un réel, $+\infty$ ou $-\infty$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to \Psi} C = D &\iff C \xrightarrow[x\,\to\,\Psi]{} D \\
&\iff \text{Limite de } C \text{ quand } x \text{ tends vers } \Psi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{x \to \Psi \\ >}} C = D &\iff C \xrightarrow[x\,\to\,\Psi^+]{} D \\
&\iff \text{Limite de } C \text{ en } \Psi \text{ par valeurs supérieures} \\
&\iff \text{Limite de } C \text{ à droite de } \Psi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{x \to \Psi \\ <}} C = D &\iff C \xrightarrow[x\,\to\,\Psi^-]{} D \\
&\iff \text{Limite de } C \text{ en } \Psi \text{ par valeurs inférieures} \\
&\iff \text{Limite de } C \text{ à gauche de } \Psi
\end{aligned}$$

## 3.2 Limites d'un quotient à la valeur indéfinie

Soit $f : x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}$ et $r \in \mathbb{R}$ tq. $q(r) = 0$

1. Calculer $\lim\limits_{x \to r} p(x)$
2. **Par valeurs supérieures** Calculer $\lim\limits_{x \to r^+} q(x)$: $0^+$ ou $0^-$

   **Par valeurs inférieures** Calculer $\lim\limits_{x \to r^-} q(x)$: $0^+$ ou $0^-$
3. Conclure par quotient: $0^+ \to +$ et $0^- \to -$

## 3.3 Opérations sur les limites

Les opérations entre deux limites réelles sont comparables aux opérations sur des nombres

**FI** Forme Indéterminée

| $x,\ \ y$ | $x + y$ | $x \cdot y$ | $x/y$ |
|---|---|---|---|
| $\pm\infty$ | Signes $=$ $\pm\infty$<br>Signes $\neq$ FI | (règle des signes) | FI |
| $\mathbb{R}$ ou $\pm\infty$ | $\pm\infty$ | $x = 0$ FI<br>$x > 0$ $\pm\infty$<br>$x < 0$ $\mp\infty$ | $y = 0$ FI<br>$y = \pm\infty$ 0<br>$x = \pm\infty$ et $y \in \mathbb{R}^*$ $\pm\infty$ |

## 3.4 Asymptotes

Soit $L \in \mathbb{R}$, $f$ une fonction, $\Gamma$ la courbe d'équation $y = f(x)$ et $\Psi$ un nombre ou symbole

$$f(x) \xrightarrow[x \to \Psi]{} L \iff \Gamma \text{ admet en } \Psi \text{ une asymptote (horizontale) d'équation } y = L$$

$$\begin{cases} f(x) \xrightarrow[x \to L^+]{} \pm\infty \\ f(x) \xrightarrow[x \to L^-]{} \pm\infty \end{cases} \iff \Gamma \text{ admet en } L \text{ une asymptote (verticale) d'équation } x = L$$

## 3.5 Simplifications de limites

### 3.5.1 Polynômes

Pour les limites en $+\infty$ ou en $-\infty$, on peut simplifier la limite d'un polynôme à la limite du terme de plus haut degré:

$$\lim_{x \to +\infty} 2x^3 - 4x + 1 = \lim_{x \to +\infty} 2x^3$$

Ça marche aussi avec les fractions:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{4x^9 + x^3 - 2}{5x^3 - 8x^{18} + 420} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4x^9}{-8x^{18}}$$

## 3.6 Fonctions composées

Soit $a,\ b\ \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$, $f$ et $g$ des fonctions

$$\begin{cases} f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b \\ g(x) \xrightarrow[x \to b]{} c \end{cases} \implies (f \circ g)(x) \xrightarrow[x \to a]{} c$$

# 4 Continuité des fonctions

## 4.1 Définition

Une fonction est continue quand "on peut tracer sa courbe sans lever le stylo". Plus rigoureusement, la fonction $f$ est continue sur l'intervalle $I$ si, pour tout $a \in I$, $f(a) \xrightarrow[x \to a]{} f(a)$.

## 4.2 Continuité de fonctions usuelles

| | |
|---|---|
| Polynôme | $\mathbb{R}$ |
| $\sqrt{x}$ | $\mathbb{R}^+$ |
| Rationnelle | Ensemble de définition |

De plus, n'importe quelle fonction créée par $+$, $\times$, $\circ$ ou $\div$ à partir de fonctions continues sont continues

## 4.3 Théorèmes utilisant la continuité

### 4.3.1 Valeurs intermédiaires

Soit $a$ et $b$ des réels, $f$ une fonction continue sur $[a; b]$.

$$\forall k \in [f(a); f(b)], \quad f(x) = k \text{ admet au moins une solution dans } [a; b]$$

### 4.3.2 Bijection

Soit $I$ une intervalle, $a$ et $b$ des réels dans $I$ et $f$ une fonction définie sur $I$ ou plus grand

$$\begin{cases} f \text{ est continue sur } I \\ f \text{ est strictement monotone sur } I \quad (1) \\ k \in [f(a); f(b)] \quad (2) \end{cases}$$
$$\Longrightarrow f(x) = k \text{ admet une unique solution dans } [a; b]$$

(1) quand elle ne l'est pas, on étudie séparémment chaque intervalle où la fonction est strictement monotone
(2) si $a$ ou $b = \pm\infty$, on calcule la limite pour l'intervalle image:
*Montrer que $f(x) = k$ n'admet qu'une seule solution dans* $\mathbb{R}$

$$k \in \left] \lim_{x \to -\infty} f(x); \lim_{x \to +\infty} f(x) \right[$$

*Attention*: pour montrer que $f(x) = k$ n'a pas de solutions on n'utilise pas la bijection mais le tableau de variations

# 5 Nombres complexes $\mathbb{C}$

## 5.1 Définition

$$i^2 := -1, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad z \in \mathbb{C}$$
$$z = a + ib$$

Ensemble des imaginaires purs: $i\mathbb{R} := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

## 5.2 Partie imaginaire Im et réelle Re

### 5.2.1 Définition

- $\mathrm{Re}\,(a + ib) := a$
- $\mathrm{Im}\,(a + ib) := b$

### 5.2.2 Propriétés

- $\mathrm{Re}\, z = 0 \iff z \in \mathbb{R}$
- $\mathrm{Im}\, z = 0 \iff z \in i\mathbb{R}$

## 5.3 Conjugé $\overline{z}$

### 5.3.1 Définition

$$\overline{z} := \mathrm{Re}\, z - i\mathrm{Im}\, z$$

### 5.3.2 Identités

$\diamond$ représente les opérations $+$, $\times$ et $\div$

- $z \cdot \overline{z} = (\mathrm{Im}\ z)^2 + (\mathrm{Re}\ z)^2$
- $\overline{z \diamond w} = \overline{z} \diamond \overline{w}$
- $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$
- $\overline{\overline{z}} = z$
- $\overline{z} = z \iff z \in \mathbb{R}$

## 5.4 Affixe Aff

L'affixe est un nombre complexe représenté par un point ou un vecteur dans le plan:

$$\mathrm{Aff} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a + ib$$

Réciproquement, l'image de $a + ib$ est $(a; b)$

### 5.4.1 Propriétés

- $\mathrm{Aff}(\overrightarrow{AB}) = \mathrm{Aff}(B) - \mathrm{Aff}(A)$

## 5.5 Racines des polynômes de second degré $az^2 + bz + c$

$$az^2 + bz + c = 0 \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad \Delta := b^2 - 4ac$$

$$\begin{cases} \Delta < 0 & \implies \dfrac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a} \\ \Delta = 0 & \implies \dfrac{-b}{2a} \\ \Delta > 0 & \implies \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

## 5.6 Coordonnées polaires avec $z$

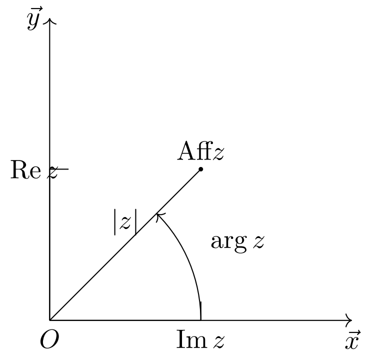


Figure 1: Représentation géométrique de l'affixe de $z$ et de ses propriétés

### 5.6.1 Module $|z|$

$$|z| = \sqrt{\operatorname{Re}^2 z + \operatorname{Im}^2 z}$$

Propriétés

$\diamond$ représente les opérations $\times$ et $\div$

$$|z^n| = |z|^n$$

$$|z \diamond z'| = |z| \diamond |z'|$$

### 5.6.2 Argument arg

$$\forall z \in \mathbb{C}^*$$

$$\begin{aligned} \arg z &:= \left(\vec{x};\ \overrightarrow{O\mathrm{Img}\, z}\right) \\ &= \begin{cases} \cos(\arg z) & = \dfrac{\operatorname{Re} z}{|z|} \\ \sin(\arg z) & = \dfrac{\operatorname{Im} z}{|z|} \end{cases} \end{aligned}$$

Propriétés

On note $z_\diamond$ l'affixe du point ou vecteur $\diamond$

- $(\vec{w}, \vec{w}') = \arg \dfrac{z_{w'}}{z_w}$

- $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg \frac{D-C}{B-A}$

*Propriétés de produit, puissance, quotient et inverse identiques à* ln*, voir 9.2*

## 5.7 Formes

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z &\quad \text{(algébrique)} \\ |z|\,(cos(\arg z) + i\sin(\arg z)) &\quad \text{(trigonométrique)} \\ |z|e^{i \arg z} &\quad \text{(exponentielle)} \end{aligned}$$

Notations usuelles: $r := |z|$, $\theta := \arg z$, $x := \operatorname{Re} z$, $y := \operatorname{Im} z$

### 5.7.1 Propriétés de la forme exponentielle

$$e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$$

*Les autres propriétés découlent de celles de l'exponentielle, voir 7.3*

## 5.8 Inégalité triangulaire

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|$$

# 6 Dérivées

## 6.1 Opération sur des fonctions

Soit $u$ et $v$ des fonctions.

$$\begin{aligned}
(uv)' &= u'v + v'u \\
\left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u'v - v'u}{v^2} \\
(u^n)' &= nu'u^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0.5; -1\} \\
(u \circ v)' &= u'(v' \circ u) \\
\sin' &= \cos \\
\cos' &= -\sin
\end{aligned}$$

# 7 Fonction exponentielle exp

## 7.1 Notation

$$e^x := \exp x$$

## 7.2 Caractéristiques

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $u$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$

| | |
|---|---|
| **Dérivée** | $(e^x)' = e^x$<br>$(e^u)' = u'e^u$ |
| **Réciproque** | $\ln(e^x) = x$ |
| **Signe** | $e^x > 0$ |
| **Variations** | strictement croissante sur $\mathbb{R}$ |
| **Limites** | $e^x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$<br>$e^x \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$ |

## 7.3 Limites remarquables

| lim | $x \to$ | $=$ |
|---|---|---|
| ${}^{e^x - 1}/_{x}$ | $0$ | $1$ |
| Par croissance comparée $\downarrow$ | | |
| $xe^x$ | $-\infty$ | $0$ |
| ${}^{e^x}/_{x}$ | $+\infty$ | $+\infty$ |

## 7.4 Propriétés

$$e^a \gtreqless e^b \iff a \gtreqless b$$

| $e^{a \diamond b}$ | $e^a \diamond e^b$ |
|---|---|
| $+$ | $\times$ |
| $-$ | $\div$ |
| $(e^a)^n$ | $e^{an}$ |

# 8 Géométrie dans l'espace

## 8.1 Intersections

### 8.1.1 Droite-droite, plan-plan

Soit $a$ et $b$ des droites et $P$ et $Q$ des plans

| | Coplanaires | | | Non-coplanaires |
|---|---|---|---|---|
| | Parallèles | | Sécantes | |
| | Strictement | Confondues | | |
| $a \cap b$ | $\emptyset$ | $a$ et $b$ | $\{$point$\}$ | $\emptyset$ |
| $P \cap Q$ | $\emptyset$ | $P$ et $Q$ | droite | $\emptyset$ |

### 8.1.2 Droite-plan

| | Parallèles | | Sécants |
|---|---|---|---|
| | Strictement | $a \subset P$ | |
| $a \cap P$ | $\emptyset$ | droite | $\{$point$\}$ |

## 8.2 Section d'un cube

*2 points dans la même face*
Relier directement

$[AB]$ *sur une face,* $C$ *sur face opposée*
Tracer la parallèle à $[AB]$ passant par $C$

$[AB]$ *sur une face* $E$*,* $C$ *sur face adjaçente*
Prolonger une arrête et $(AB)$ jusqu'à intersection en $D$
Tracer $(DC)$. La partie du segment qui est sur la face $E$ est la section.

## 8.3 Orthogonalité $\perp$

$$d \underset{\text{orth.}}{\perp} d' \iff \gamma \underset{\text{perp.}}{\perp} \gamma' \quad \exists \gamma \parallel d, \gamma' \parallel d'$$

## 8.4 Plan $\perp$ droite

$$\begin{aligned} d \perp P &\iff d \perp \gamma \wedge d \perp \gamma' \quad \forall \gamma \cap \gamma' = \text{point} \\ &\implies \gamma \perp d \quad \forall \gamma \subset P \end{aligned}$$

## 8.5 Plan médiateur

$$\begin{aligned} P \,\text{med}\, [AB] &\iff P \perp (AB) \wedge I \in P \quad \forall I \,\text{mil}\, [AB] \\ &\iff P = \{C \mid CA = CB\} \end{aligned}$$

## 8.6 Propriétés

$$\begin{aligned} d \parallel d' &\implies P \perp d \quad \forall P \perp d' \\ &\impliedby d \parallel \gamma \wedge d' \parallel \gamma \\ &\impliedby P \cap P' = d' \wedge d \parallel P \wedge d \parallel P' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P \parallel P' &\iff P \perp d \wedge P' \perp d \\ &\iff P \parallel \Delta \wedge P' \parallel \Delta \\ &\iff d_1 \parallel d'_1 \wedge d \parallel d' \quad \forall d \cap d' = \text{point}, d_1 \cap d'_1 = \text{point} \\ &\implies \Gamma \cap P' = \gamma \wedge \Gamma \cap P = \gamma' \wedge \gamma \parallel \gamma' \quad \forall \Gamma \cap P = \text{droite} \end{aligned}$$

$$\Delta \parallel d \wedge \Delta \parallel d' \impliedby d \parallel d' \wedge d \subset P \wedge d' \subset P' \wedge P \cap P' = \Delta$$

$$\Delta \parallel P \iff \Delta \parallel d \quad \forall d \subset P$$

$$P \parallel Q \wedge \Gamma \cap P = \gamma \implies \Gamma \cap Q = \gamma' \wedge \gamma \parallel \gamma'$$

## 8.7 Coordonnées

Un triplet $(x; y; z)$.

Les propriétés de la géométrie planaire (milieu, colinéarité et vecteurs) se traduisent trivialement

## 8.8 Équations paramétriques

### 8.8.1 D'une droite

Soit...

$$\begin{aligned} A &:= (x_A; y_A; z_A) \\ \vec{u} &:= (x_u; y_u; z_u) \\ M &:= (x; y; z) \\ D &:= \text{droite passant par } A \text{ de vecteur directeur } \vec{u} \end{aligned}$$

On a:

$$M \in D \iff \begin{cases} x = x_u t + x_A \\ y = y_u t + y_A \\ z = z_u t + z_A \end{cases}$$

### 8.8.2 D'un plan

Soit...

$$\begin{aligned} A &:= (x_A; y_A; z_A) \\ \vec{u} &:= (x_u; y_u; z_u) \\ \vec{w} &:= (x_w; y_w; z_w) \\ M &:= (x; y; z) \\ P &:= \text{plan passant par } A \text{ de vecteur directeurs } \vec{u} \text{ et } \vec{w} \end{aligned}$$

On a:

$$M \in D \iff \begin{cases} x = x_u t + x_w t' + x_A \\ y = y_u t + y_w t' + y_A \\ z = z_u t + z_w t' + z_A \end{cases}$$

# 9 Le logarithme népérien $\ln$

Aussi appelé "logarithme naturel" ou "logarithme base $e$"

## 9.1 Caractéristiques

| | |
|---|---|
| **Notation** | $\ln x$ |
| **Réciproque** | exp |
| **Ensemble** | $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ |
| **Limites** | $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$<br>$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ |
| **Dérivée** | $\frac{1}{x}$ |
| **Variations** | Croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ |
| **Continuité** | Continue sur $\mathbb{R}_+^*$ |
| **Valeurs remarquables** | $\ln 1 = 0$ |

## 9.2 Limites remarquables

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$
$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$$

## 9.3 Propriétés

| $\ln(a \diamond b)$ | $\ln a \diamond \ln b$ |
|---|---|
| $\times$ | $+$ |
| $\div$ | $-$ |
| $a^n$ | $n \ln a$ |