July 14, 2020

Condensé de la 1ère
Mathématiques

Ewen Le Bihan
1eS3

Notations non vues en cours

$:=$	Égal par définition
$\mathbb{A} \cap \mathbb{B}$	Appartient à la fois à $\mathbb{A}$ et à $\mathbb{B}$
$\lceil x \rceil$	Arrondir x à l'entier supérieur. ($\lceil 5.1 \rceil = 6$)
1.5	Séparateur ,
$x \cdot y$	Multiplication $\times$
$\vec{v} \perp \vec{u}$	$\vec{v}$ et $\vec{u}$ orthogonaux

Contents

1 Polynômes du second degré $ax^2 + bx + c$

1.1 Δ: Trouver les racines

$$\Delta := b^2 - 4ac$$

$$\begin{cases} \Delta > 0 & x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{4a} \\ \Delta = 0 & x_0 = \frac{b}{2a} \\ \Delta < 0 & \emptyset \end{cases}$$

1.2 Étudier le signe

Le signe du polynôme est celui de a, et, si $\Delta > 0$, est celui de $-a$ entre x_1 et x_2

1.3 α,β: Trouver l'extremum

1.3.1 Maximum ou minimum ?

$a > 0$	minimum
$a < 0$	maximum

1.3.2 Calcul

$$\alpha := \frac{b}{2a}$$
$$\beta := \frac{\Delta}{4a}$$
$$\text{Sommet} = (\alpha; \beta)$$

Le polynôme atteint un extremum en α de valeur β

1.4 Différentes formes

Canonique	$(x - \alpha)^2 + \beta$
Factorisée	$a(x - x_1)(x + x_2)$
	$a(x_0 - x)^2$
Développée	$ax^2 + bx + c$

2 Vecteurs $\vec{v}$, équations cartésiennes $ax + by + c = 0$

2.1 Colinéarité

$$\begin{aligned} \vec{v} \,\&\, \vec{u} \text{ colinéaires} &\iff x_u y_v - y_u x_v = 0 \\ &\iff (u) \parallel (v) \\ &\iff \vec{u} = \lambda \vec{v} \quad (\forall\, \lambda \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

2.2 Vecteur directeur

2.2.1 Équation réduite $y = mx + p$

$$\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$$

2.2.2 Équation cartésienne $ax + by + c = 0$

Vecteur directeur	$\vec{v}\binom{-b}{a}$
Coefficient directeur	$m = -\frac{a}{b}$

2.3 Décomposer un vecteur

$$(\forall\, \lambda, \lambda' \in \mathbb{R}) \quad \vec{w} = \lambda \vec{v} + \lambda' \vec{u}$$

2.4 Relation de Chasles

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

3 Statistiques

3.1 Caractéristiques

Nom	Type	Formule
Effectif total	/	$N := \sum_{i=0}^{p} n_i$
Moyenne	Centrale	$\bar{x} := \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{p} n_i x_i$
Médiane	Centrale	$Me := \begin{cases} N \text{ pair} & \frac{1}{2}\left(x_{\frac{N}{2}} + x_{\frac{N+1}{2}}\right) \\ N \text{ impair} & x_{\lceil \frac{N}{2} \rceil} \end{cases}$
Mode	Centrale	$Mo :=$ Valeur ou classe qui a l'effectif le plus grand
Premier Quartil	Non-centrale	$Q_1 := x_{\lceil \frac{N}{4} \rceil}$
Troisième Quartil	Non-centrale	$Q_3 := x_{\lceil \frac{3}{4} N \rceil}$
Étendue	Dispersion	$e := x_{max} - x_{min}$
Écart inter-quartil	Dispersion	$Q_3 - Q_1$
Variance	Dispersion	$V := \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{p} (n_i x_i^2) - \bar{x}$
Écart type	Dispersion	$\sigma := \sqrt{V}$

3.2 Transformation de valeurs selon $y = mx + p$

$$\bar{y} = m\bar{x} + p$$
$$V_y = m^2 V_x$$
$$\sigma_y = |m| \sigma_x$$

4 Probabilités

4.1 Notions

Nom	Symbole	Description
Univers	Ω	Ensemble des issues possibles
Variable aléatoire	X	Fonction qui renvoie un nombre aléatoire dans Ω

4.2 Loi de probabilité de X

Exemple:

- $\Omega = \{0; 1; 2\}$
- $p(X = 0) = p(X = 2) = \frac{1}{4}$
- $p(X = 1) = \frac{1}{2}$

k	0	1	2
$p(X = k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

4.3 Caractéristiques

Nom	Description	Formule
Espérance	Résultat moyen espéré	$E(X) := \quad \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$
Variance		$V(X) := \quad \sum_{i=1}^{n} (p_i x_i) - E(X)^2$
Écart type		$\sigma(X) := \quad \sqrt{V(X)}$

4.4 Issues, évennements

Exemple:

x_i	A	B
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Calcul de l'issue AB ($A \to B$):

$$p(AB) = p(A) \cdot p(B)$$

Calcul de l'évenement Θ « au moins une fois A »:

$$p(\Theta) = p(AB) + p(BA) + p(AA)$$

Calcul de l'évennement contraire $\bar{\Theta}$:

$$p(\bar{\Theta}) = 1 - p(\Theta)$$

4.5 Loi binomiale $\mathscr{B}$

4.5.1 Définitions

Épreuve de Bernoulli	
Évenement « succès »	S
Évenement « échec »	$\bar{S}$
Probabilité de succès	$p := p(S)$
Probabilité d'échec	$q := p(\bar{S})$
	$= 1 - p$

Schéma de Bernoulli	$\mathscr{B}(n;p)$
Nombre de répétitions	n
Nombre de succès	k
Univers	$\Omega = [0;n] \cap \mathbb{N}$

4.5.2 Loi de X

Si $X \sim \mathscr{B}(n;p)$

k	0	2	3	...	n
$p(X = k)$	$\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$				

4.5.3 Caractéristiques

$$\forall k \in [0;n] \cap \mathbb{N}$$

$$E(X) = np$$
$$V(X) = npq$$

5 Suites U_n

5.1 Types de suites

5.1.1 Fonctionnelle

$$U_n = 2n$$

5.1.2 Récursive

$$\begin{cases} U_{n+1} & = U_0 + U_n \\ U_0 & = 5 \end{cases}$$

5.2 Suites remarquables

5.2.1 Arithmétiques

$$\begin{cases} U_{n+1} & = U_n + r \\ U_0 & = k \end{cases}$$

$$U_n = U_0 + r \cdot n$$

5.2.2 Géométriques

$$\begin{cases} U_{n+1} & = U_n \cdot q \\ U_0 & = k \end{cases}$$

$$U_n = U_0 \cdot q^n$$

5.3 Sommes

5.3.1 Suites arithmétiques

$$\sum_{\mu=i}^{j} U_\mu = \frac{U_i + U_j}{2} \cdot (j - i + 1)$$

5.3.2 Suites géométriques

$$\sum_{\mu=i}^{j} U_\mu = U_i \cdot \frac{1 - q^{j-i+1}}{1 - q}$$

5.4 Variations

5.4.1 Fonction associée

$$(\forall n \in \mathbb{N}) f : n \mapsto U_n$$

$$\text{Si } f \nearrow / \searrow \implies U_n \nearrow / \searrow$$

5.4.2 Méthode 2

$$U_{n+1} - U_n \lesseqgtr 0 \iff U_n \searrow / \nearrow$$

5.4.3 Méthode 3

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} \lesseqgtr 1 \iff U_n \nearrow / \searrow$$

6 Produit Scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$

Note: pour éviter les confusions, la multiplication normale est notée $\times$ dans ce chapitre.

6.1 Calcul

$$\vec{\mu}, \vec{\kappa} \text{ projetés orthogonaux de } \vec{u} \text{ et } \vec{v}$$

$$\begin{aligned}
\vec{u} \cdot \vec{v} &\iff ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u}; \vec{v}) \\
&\iff x_u \times x_v + y_u \times y_v \ * \\
&\iff \vec{u} \perp \vec{v} \\
&\iff \vec{\mu} \cdot \vec{\kappa} \\
&\iff \frac{1}{2}\left(||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - ||\vec{v} - \vec{u}||^2\right) \ **
\end{aligned}$$

* Seulement dans un repère orthonormé
** Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont vecteurs directeurs des segments formant un triangle:

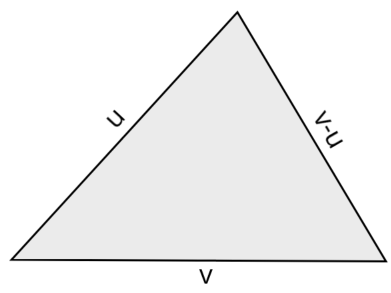

Figure 1

6.2 Multiplication de segments liés

Si A, H, B alignés dans cet ordre

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$$

Sinon, si H, A, B alignés dans cet ordre

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$$

6.3 Identités remarquables

$$||\vec{u} \pm \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 \pm 2\vec{v} \cdot \vec{u} + ||\vec{v}||^2$$
$$(\vec{u} - \vec{v})(\vec{u} + \vec{v}) = ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2$$

6.4 Angle aigu et obtu

$$\vec{u} \cdot \vec{v} > 0 \iff (\vec{u}; \vec{v}) \text{ aigu}$$

Et inversement

7 Étude de fonctions

7.1 Fonctions de bases

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	$\nearrow$	0	$\nearrow$
x^2	$\searrow$	0	$\nearrow$
$1/x$	$\searrow$	$\|\|$	$\searrow$
$\sqrt{x}$	$/////$	0	$\nearrow$
$\|x\|$	$\searrow$	0	$\nearrow$

7.2 Opérations sur fonctions

$\leftrightarrows$: Changement de variation
$\rightrightarrows$: Même variation

$$\forall\, k \in \mathbb{R},\ \ \forall\, \lambda_+ \in \mathbb{R}^+,\ \ \forall\, \lambda_- \in \mathbb{R}^-$$

u	$-\infty$	0	$+\infty$
$u+k$	$\rightrightarrows$	k	$\rightrightarrows$
$u \cdot \lambda_+$	$\rightrightarrows$	0	$\rightrightarrows$
$u \cdot \lambda_-$	$\leftrightarrows$	0	$\leftrightarrows$
$\sqrt{u}$	$/////$	0	$\nearrow$
$1/u$	$\searrow$	$\|\|$	$\searrow$

7.3 Dérivées

7.3.1 Nombre dérivé $f'(a)$

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

7.3.2 Tangeante T au point a

$$T : y = \underbrace{f'(a)}_{\text{coef dir}} (x - a) + f(a)$$

7.3.3 Dérivées remarquables

	$f(x)$	$f'(x)$
	constante	0
$\forall\, n \in \mathbb{N}$	x^n	nx^{n-1}
	$\sqrt{x}$	$1/2\sqrt{x}$
	$^1/_x$	$-1/x^2$

7.3.4 Opérations sur les dérivées

$(u + v)'$ et $(ku)'$ fonctionne normalement.

$$(uv)' = u'v + v'u$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = -\frac{v'u - u'v}{v^2}$$

7.3.5 Utilisations de $f'(x)$

Sens de variation de f

Si f dérivable sur $[I; J]$

x	I	J
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$

Extrema (*et pas «extremums» bordel de merde*)

Trouver le(s) x pour $f'(x) = 0$

8 Trigonométrie

8.1 Notions

Radians Mesure d'angle $\in [0; 2\pi]$ (principalement)

Cercle trigonométrique cercle de rayon 1 ($2\pi r \to 2\pi$)

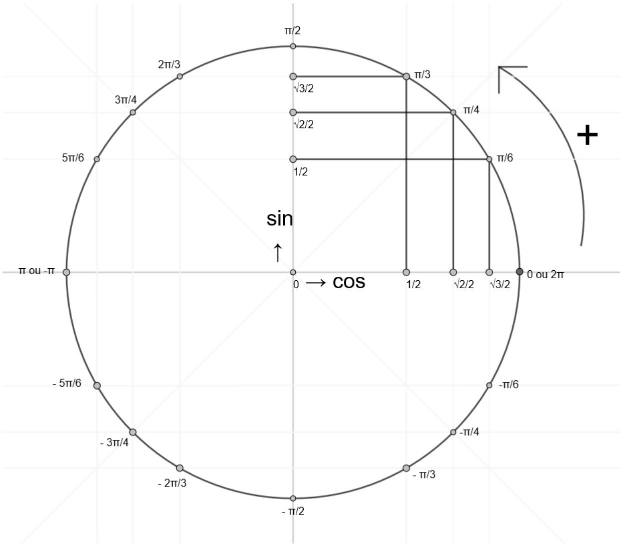

Figure 2

8.2 Valeurs remarquables

8.3 Formules de trigonométrie