December 24, 2019

Condensé de la terminale
Mathématiques

Ewen Le Bihan
TS3

Notations non vues en cours

$:=$	Égal par définition
$\lceil x \rceil$	Arrondir x à l'entier supérieur. ($\lceil 5.1 \rceil = 6$)
1.5	Séparateur ,
$x \cdot y$	Multiplication $\times$
$\nearrow$	Croissant
$\searrow$	Décroissant
$a \gtreqless b$	Revient à écrire $a > b$, $a = b$ et $a > b$

Contents

0 Outils

0.1 Composition de fonction $f \circ g$

Soit f et g des fonctions respectivement définies sur I et J

$$(f \circ g)(x) \iff f(g(x))$$

Attention: il faut que x soit défini dans I et que $g(x)$ soit défini dans J

Plus généralement, soit Θ un ensemble de fonctions

$$\left(\bigcirc_{i=0}^{j} \Theta_i\right)(x) = \Theta_0(\Theta_1(\Theta_2(\Theta_3 \ldots (x \ldots)$$

0.2 Équations de cercle $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$

Soit a, b, R des réels, R étant le rayon du cercle.
Un cercle dans le plan peut être décrit par l'équation suivante:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

0.3 Opérations avec des puissances

$$\begin{aligned}
(x^a)^b &= x^{ab} \\
x^a x^b &= x^{a+b} \\
x^{-a} &= \frac{1}{x^a} \\
x^{\frac{1}{a}} &= \sqrt[a]{x} \\
x^0 &= 1
\end{aligned}$$

0.4 Diverses théorèmes

0.4.1 Application de fonctions aux inéquations

Soit I une intervalle, f une fonction définie et croissante sur I, x et y deux nombres dans I

$$\begin{aligned}
& x \gtreqless y \\
\iff & f(x) \gtreqless f(y)
\end{aligned}$$

1 Suites numériques

1.1 Définition fonctionnelle

Soit f une fonction:

$$u_n = f(n)$$

1.2 Définition par récurrence

Soit f une fonction

$$u_n = \begin{cases} u_0 = \text{cste} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1.3 Suite arithmétique

Avec r la raison de la suite

Définition fonctionnelle $u_n = u_0 + r \cdot n$

Définition par récurrence $u_n = \begin{cases} u_0 = \text{cste} \\ u_{n+1} = u_n + r \end{cases}$

Somme des termes de i à f $\displaystyle\sum_{i=i}^{j} u_i = (j - i + 1) \cdot \frac{u_j + u_i}{2}$

1.4 Suite géométrique

Avec q la raison de la suite

Définition fonctionnelle $u_n = u_0 \cdot q^n$

Définition par récurrence $u_n = \begin{cases} u_0 = \text{cste} \\ u_{n+1} = u_n \cdot q \end{cases}$

Somme des termes de i à f $\displaystyle\sum_{i=i}^{j} u_i = u_j \cdot \frac{1 - q^{j-i+1}}{1 - q}$

1.5 Limites

Suite convergeante vers L $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = L$

Suite divergeante $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n \neq L$

<table>
<tr><th>$p \in \{0.5\} \cup \mathbb{N}$
$q \in \mathbb{R}$</th><th>$-\infty$</th><th>-1</th><th>0</th><th>1</th><th>$+\infty$</th></tr>
<tr><td>$\lim_{n \to +\infty} q^n$</td><td>?</td><td colspan="3">0</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$\lim_{n \to +\infty} n^p$</td><td colspan="2">0</td><td>1</td><td colspan="2">$+\infty$</td></tr>
</table>

Limites de type cste^n ou n^{cste}

1.6 Majoration et minoration

Soit (u_n) une suite définie sur les rangs dans I et L un réel

Suite majorée $\forall n \in I \ \ \exists M \quad u_n \leq M$

Suite minorée $\forall n \in I \ \ \exists m \quad u_n \geq m$

Suite bornée Suite majorée *et* minorée

$$\lim_{n \to +\infty} u_n \ldots$$

	Majorée (par L)		Minorée (par L)	
	Oui	Non	Oui	Non
$\nearrow$	$\leq L$	$= +\infty$		
$\searrow$			$\geq L$	$= -\infty$

1.7 Opérations sur les limites

Voir en 3.2

1.8 Comparaisons et limites

Soit $L \in \mathbb{R}$, (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites et l_A la limite quand $n \to +\infty$ de la suite A_n

Nom du théorème	Conditions		Résultat	Explication graphique
Par comparaison	$u_n \leq v_n$	$l_u = +\infty$	$\Longrightarrow\ l_v = +\infty$	(u_n) emporte (v_n) vers $+\infty$
	$u_n \geq v_n$	$l_u = -\infty$	$\Longrightarrow\ l_v = -\infty$	(u_n) emporte (v_n) vers $-\infty$
Théorème des gendarmes	$w_n \geq v_n \geq u_n$	$l_u = l_w = 0$	$\Longrightarrow\ l_v = L$	(u_n) et (w_n) forcent (v_n) à tendre vers L

2 Probabilités

2.1 Probabilité conditionnelle $P(A|B)$

Probabilité que A soit réalisé **sachant que** B a déjà été réalisé.

$$P(A|B) \text{ ou } P_B(A) = \frac{P(P \cap Q)}{P(B)} \quad \text{si } P(B) \neq 0$$

2.2 Probabilités d'intersections $P(P \cap Q)$

Probabilité que A **et** B soit réalisées.

$$\begin{aligned} P(P \cap Q) &= P(B) \cdot P(A|B) \\ &= P(A) \cdot P(B|A) \end{aligned}$$

2.3 Probabilités d'union $P(A \cup B)$

L'union $\cup$ c'est un "ou exclusif":

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) + P(P \cup Q)$$

2.4 Partitions

Si on a deux évenements ou plus tel que...

- Aucun évenement n'est vide
  $\iff B_i \neq \emptyset \quad \forall i$
- Aucun évenement ne recouvre un autre
  $\iff B_i \cap B_j = \emptyset \quad \forall i, j$
- L'union de chaque partition couvre l'univers entier
  $\iff \bigcap_{i=1}^{j} B_i = \Omega$

2.5 Formule des probabilités totales

Soit B_1, B_2, ..., B_n des évenements formant une partition de Ω

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(P \cap Q_i)$$

2.6 Indépendance d'évenements

$$\begin{aligned} A \text{ et } B \text{ sont indépendants} &\iff \overline{B} \text{ et } B \text{ forment une partition de } \Omega \\ &\iff \overline{A} \text{ et } A \text{ forment une partition de } \Omega \\ &\iff \overline{A} \text{ et } \overline{B}, A \text{ et } \overline{B} \text{ et } B \text{ et } \overline{A} \text{ sont indépendants} \end{aligned}$$

2.7 Loi de Bernouilli

Épreuve de Bernouilli

2.8 Autre vocabulaire

Évenements incompatibles $P(P \cap Q) = 0$

3 Limites lim

3.1 Notation

Soit x, C et D des nombres et Ψ un nombre ou symbole

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\Psi} C = D &\iff C \xrightarrow[x\,\to\,\Psi]{} D \\ &\iff C = D \text{ quand } x = \Psi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{x\to\Psi \\ >}} C = D &\iff C \xrightarrow[x\,\to\,\Psi^+]{} D \\ &\iff \text{Limite de } C \text{ en } \Psi \text{ par valeurs supérieures} \\ &\iff \text{Limite de } C \text{ à droite de } \Psi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{x\to\Psi \\ <}} C = D &\iff C \xrightarrow[x\,\to\,\Psi^-]{} D \\ &\iff \text{Limite de } C \text{ en } \Psi \text{ par valeurs inférieures} \\ &\iff \text{Limite de } C \text{ à gauche de } \Psi\end{aligned}$$

3.2 Opérations sur les limites

Les opérations entre deux limites réelles sont comparables aux opérations sur des nombres

FI Forme Indéterminée

x, y	$x+y$	$x \cdot y$	x/y
$\pm\infty$	Signes $=$ $\pm\infty$ Signes $\neq$ FI	(règle des signes)	FI
$\mathbb{R}$ ou $\pm\infty$	$\pm\infty$	$x=0$ FI $x>0$ $\pm\infty$ $x<0$ $\mp\infty$	$y=0$ FI $y=\pm\infty$ 0 $x=\pm\infty$ et $y\in\mathbb{R}^*$ $\pm\infty$

3.3 Asymptotes

Soit $L \in \mathbb{R}$, f une fonction, Γ la courbe d'équation $y = f(x)$ et Ψ un nombre ou symbole

$$f(x) \xrightarrow[x\,\to\,\Psi]{} L \iff \Gamma \text{ admet en } \Psi \text{ une asymptote (horizontale) d'équation } y = L$$

$$\begin{cases} f(x) \xrightarrow[x\,\to\,L^+]{} \pm\infty \\ f(x) \xrightarrow[x\,\to\,L^-]{} \pm\infty \end{cases} \iff \Gamma \text{ admet en } L \text{ une asymptote (verticale) d'équation } x = L$$

3.4 Simplifications de limites

3.4.1 Polynômes

Pour les limites en $+\infty$ ou en $-\infty$, on peut simplifier la limite d'un polynôme à la limite du terme de plus haut degré:

$$\lim_{x\to+\infty} 2x^3 - 4x + 1 = \lim_{x\to+\infty} 2x^3$$

Ça marche aussi avec les fractions:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{4x^9 + x^3 - 2}{5x^3 - 8x^{18} + 420} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^9}{-8x^{18}}$$

3.5 Fonctions composées

Soit $a,\ b\ \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$, f et g des fonctions

$$\begin{cases} f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b \\ g(x) \xrightarrow[x \to b]{} c \end{cases} \implies (f \circ g)(x) \xrightarrow[x \to a]{} c$$

4 Continuité des fonctions

4.1 Définition

Une fonction est continue quand "on peut tracer sa courbe sans lever le stylo". Plus rigoureusement, la fonction f est continue sur l'intervalle I si, pour tout $a \in I$, $f(a) \xrightarrow[x \to a]{} a$.

4.2 Continuité de fonctions usuelles

Polynôme	$\mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+$
Rationnelle	Ensemble de définition

De plus, n'importe quelle fonction créée par $+$, $\times$, $\circ$ ou $\div$ à partir de fonctions continues sont continues

4.3 Théorèmes utilisant la continuité

4.3.1 Théorème des valeurs intermédiaires

Soit a et b des réels, f une fonction continue sur $[a;b]$.

$$\forall k \in [f(a); f(b)], \quad f(x) = k \text{ admet au moins une solution dans } [a;b]$$

4.3.2 Théorème de la bijection

Soit I une intervalle, a et b des réels dans I et f une fonction définie sur I ou plus grand

$$\begin{cases} f \text{ est continue sur } I \\ f \text{ est strictement monotone sur } I \\ k \in [f(a); f(b)] \quad (1) \end{cases}$$

$$\implies f(x) = k \text{ admet une unique solution dans } [a;b]$$

(1) si a ou $b = \pm\infty$, on calcule la limite pour l'intervalle image:
Montrer que $f(x) = k$ n'admet qu'une seule solution dans $\mathbb{R}$

$$k \in \left] \lim_{x \to -\infty} f(x); \lim_{x \to +\infty} f(x) \right[$$

Attention: pour dire que $f(x) = k$ on n'utilise pas la bijection mais le tableau de variations

5 Nombres complexes $\mathbb{C}$

5.1 Définition

$$i^2 := -1, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad z \in \mathbb{C}$$
$$z = a + ib$$

Ensemble des imaginaires purs: $i\mathbb{R} := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

5.2 Partie imaginaire Im et réelle Re

5.2.1 Définition

- $\text{Re}(a + ib) := a$
- $\text{Im}(a + ib) := b$

5.2.2 Propriétés

- $\text{Re}\, z = 0 \iff z \in \mathbb{R}$
- $\text{Im}\, z = 0 \iff z \in i\mathbb{R}$

5.3 Conjugé $\overline{z}$

5.3.1 Définition

$$\overline{a + ib} := a - ib$$

5.3.2 Identités

$\square$ représente les opérations $+$, $\times$ et $\div$

- $z \cdot \overline{z} = (\text{Im}\, z)^2 + (\text{Re}\, z)^2$
- $\overline{z \,\square\, w} = \overline{z} \,\square\, \overline{w}$
- $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$
- $\overline{\overline{z}} = z$
- $\overline{z} = z \iff z \in \mathbb{R}$

5.4 Affixe Aff

L'affixe est un point représentant un nombre complexe dans le plan:

$$\text{Aff}(a + ib) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

5.5 Racines des polynômes de second degré $az^2 + bz + c$

$$az^2 + bz + c = 0 \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad \Delta := b^2 - 4ac$$

$$S = \begin{cases} \Delta < 0 & \iff \left\{ \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} ; \overline{S_1} \right\} \\ \Delta = 0 & \iff \left\{ \frac{-b}{2a} \right\} \\ \Delta > 0 & \iff \left\{ \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} ; \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \right\} \end{cases}$$

6 Dérivées

6.1 Opération sur des fonctions

Soit u et v des fonctions dérivables

$$(u^n)' = nu'u^{n-1} \quad n \in \mathbb{Z} \cup \{0.5\}$$

7 Fonction exponentielle exp

7.1 Notation

$$e^x := \exp x$$

7.2 Caractéristiques

Soit $x \in \mathbb{R}$ et u une fonction définie sur $\mathbb{R}$

Dérivée $(e^x)' = e^x$
$(e^u)' = u'e^u$

Réciproque $\ln(e^x) = x$

Signe $e^x > 0$

Variations strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Limites $e^x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$
$e^x \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$

7.3 Propriétés

$$e^a \gtreqless e^b \iff a \gtreqless b$$

7.4 Limites remarquables

lim	$x \to$	$=$
${}^{e^x - 1}/_x$	0	1
Par croissance comparée $\downarrow$		
xe^x	$-\infty$	0 (1)
${}^{e^x}/_x$	$+\infty$	$+\infty$ (1)

(1) par croissance comparée

8 Géométrie dans l'espace

8.1 Intersections

8.1.1 Droite-droite, plan-plan

Soit a et b des droites et P et Q des plans

	Coplanaires			Non-coplanaires
	Parallèles		Sécantes	
	Strictement	Confondues		
$a \cap b$	$\emptyset$	a et b	{point}	$\emptyset$
$P \cap Q$	$\emptyset$	P et Q	droite	$\emptyset$

8.1.2 Droite-plan

	Parallèles		Sécants
	Strictement	$a \subset P$	
$a \cap P$	$\emptyset$	droite	{point}

8.2 Section d'un cube

2 points dans la même face
Relier directement

$[AB]$ *sur une face,* C *sur face opposée*
Tracer la parallèle à $[AB]$ passant par C

$[AB]$ *sur une face,* C *sur face adjaçente*
Prolonger une arrête et (AB) jusqu'à intersection en D
Tracer (DC)