Exercices: Trigonométrie

Ewen Le Bihan

2020-08-02

Abstract

Chaque section est un exercice, le nom de la section représente a le format suivant: `@<page> <exercice>`, avec `<exercice>` le numéro de l'exercice et `<page>` le numéro de la page.

Par défaut, les exercices du livre le plus courant sont assumés, mais l'on peut préciser le livre avec la syntaxe suivante:

`<livre>@<page> <exercice>`. Exemple:

`Sésamath@218 24` représente l'exercice numéro *24* du livre *Sésamath* à la page *218*

1 Calculus@50 65

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) &= \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} \\
&= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{4} \\
&= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}\sqrt{2}}{4} \\
&= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) &= \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} \\
&= \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4} \\
&= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}
\end{aligned}$$

2 Calculus@50 66

3 Calculus@50 67

sin a pour maximum 1. Or, d'après la formule de duplication pour sin, $\sin(2x) = \mathbf{2}\cos x \sin x$. Donc $\cos x \sin x$ a pour maximum dans $\mathbb{R}$ $\frac{1}{2}$.

4 Calculus@50 68

5 Calculus@50 69

On pose $y = 2x$

$$\begin{aligned}\cos(3x) &= \cos(x+y)\\ &= \cos x \cos y - \sin x \sin y\\ &= \cos x \cos(2x) - \sin x \sin(2x)\\ &= \cos x 2\cos^2 x - 1 - \sin x 2 \sin x \cos x\end{aligned}.$$

Or $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$$\begin{aligned}\cos(3x) &= \cos x 2\cos^2 x - 1 - \sin x 2 \sin x \cos x\\ &= \cos x 2\cos^2 x - 1 - \cos(\frac{\pi}{2} - x) 2 \cos(\frac{\pi}{2} - x) \cos x\\ &= \cos x 2\cos^2 x - 1 - 3\left(\cos\frac{\pi}{2}\cos x + \sin\frac{\pi}{2}\sin x\right)\cos x\\ &= \cos x 2\cos^2 x - 1 - 3\left(0\cos x + 1\sin x\right)\cos x\\ &= \cos x 2\cos^2 x - 1 - 3\sin x\cos x\\ &= \cos x 2\cos^2 x - 1 - 3\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos x\\ &= \text{fuck this shit}\end{aligned}.$$

6 Calculus@51 70

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'assertion P_n: $u_n = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$.

Initialisation Pour $n = 1$

$$\begin{aligned}2\cos\left(\frac{\pi}{2^2}\right) &= 2\cos\frac{\pi}{4}\\ &= 2\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= \sqrt{2}\end{aligned}.$$

$$\begin{aligned}u_1 &= \prod_{k=1}^{1} u_1\\ &= u_1\\ &= \sqrt{2}\end{aligned}.$$

P_1 est donc vraie.

Hérédité Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est vraie. Montrons qu'alors P_{n+1} est également vraie.

$$\begin{aligned}u_{n+1} &= \sqrt{2 + u_n}\\ &= \sqrt{2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}\\ &= \sqrt{2 + \text{fuck this shit}}\end{aligned}.$$

7 Calculus@51 71

7.1

8 Calculus@52 72

8.1

$$\begin{aligned}
\cos x &= \frac{1}{2} \\
&= \cos\frac{\pi}{3} \\
\iff x &\equiv \pm\frac{\pi}{3} \quad [2\pi]
\end{aligned}$$

.

8.2

$$\begin{aligned}
\sin(2x) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\
&= \sin\frac{\pi}{4} \\
\iff 2x &\equiv \frac{\pi}{4} \quad [2\pi] \quad \text{ou} \quad \frac{\pi}{4} + \pi \quad [2\pi] \\
\iff x &\equiv \frac{\pi}{8} \quad [2\pi] \quad \text{ou} \quad \frac{\pi}{8} + \pi \quad [2\pi].
\end{aligned}$$

9 Calculus@52 73

$$\left[\frac{\pi}{4}, 0\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right].$$

10 Calculus@52 74

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\cos x \in [0,1] &\implies \cos x \geq 0 \\
&\implies (\cos^2 x \geq 0 \\
&\wedge 4\cos x \geq 0) \\
&\implies \cos^2 x + 4\cos x \geq 0 \\
&\implies \cos^2 x + 4\cos x + 1 \geq 0
\end{aligned}$$

Or:

$$\begin{aligned}
2\cos^2 x + 4\cos x + 1 &= 2\cos^2 x - 2 + 3 + 4\cos x \\
&= 2(\cos^2 x - 1) + 4\cos x + 3 \\
&= 2\cos(2x) + 4\cos x + 3
\end{aligned}$$

.

Donc

$$2\cos(2x) + 4\cos x + 3 \geq 0.$$

11 Calculus@52 75

$$
\begin{aligned}
a\cos x + b\sin x &= \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\phi) \\
&= ((\text{WIP}))
\end{aligned}
.
$$