

August 30, 2020

Condensé de la terminale Mathématiques

Ewen Le Bihan
TS3

Notations non vues en cours

$:=$	Égal par définition
$\lceil x \rceil$	Arrondir x à l'entier supérieur. ($\lceil 5.1 \rceil = 6$)
1.5	Séparateur ,
$x \cdot y$	Multiplication \times
\nearrow	Croissant
\searrow	Décroissant
$a \gtrless b$	Revient à écrire $a > b$, $a = b$ et $a > b$
\wedge	"et"
\vee	"ou"
$\text{Im} z$	Point d'affixe z
\diamond	Caractère utilisé pour représenter plusieurs opérations
$\text{sgn}(x)$	$x \mapsto \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$
$\{A C\}$	L'ensemble de tout les A tel que C

Contents

0 Outils	5
0.1 Composition de fonction $f \circ g$	5
0.2 Équations de cercle $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$	5
0.3 Opérations avec des puissances	5
0.4 Diverses théorèmes	5
0.4.1 Application de fonctions aux inéquations	5
1 Suites numériques	6
1.1 Définition fonctionnelle	6
1.2 Définition par récurrence	6
1.3 Suite arithmétique	6
1.4 Suite géométrique	6
1.5 Limites	6
1.6 Majoration et minoration	7
1.7 Opérations sur les limites	7
1.8 Comparaisons et limites	7
2 Probabilités	8
2.1 Probabilité conditionnelle $P(A B)$	8
2.2 Probabilités d'intersections $P(A \cap B)$	8
2.3 Probabilités d'union $P(A \cup B)$	8
2.4 Partitions	8
2.5 Formule des probabilités totales	8
2.6 Indépendance d'événements	8
2.7 Autre vocabulaire	8
2.8 Probabilités à densité	9
2.9 Loi uniforme	9
2.10 Loi exponentielles	9
2.11 Espérance	9
2.12 Loi sans vieillissement	9
2.13 Lois normales	10
2.13.1 Loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$	10
2.13.2 Probabilité d'intervalle centrée en 0	10
2.13.3 Théorème de Moivre-Laplace	10
2.13.4 Lois normales $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	10
3 Limites \lim	11
3.1 Notation	11
3.2 Limites d'un quotient à la valeur indéfinie	11
3.3 Opérations sur les limites	11
3.4 Asymptotes	12
3.5 Simplifications de limites	12

3.5.1	Polynômes	12
3.6	Fonctions composées	12
4	Continuité des fonctions	13
4.1	Définition	13
4.2	Continuité de fonctions usuelles	13
4.3	Théorèmes utilisant la continuité	13
4.3.1	Valeurs intermédiaires	13
4.3.2	Bijection	13
5	Nombres complexes \mathbb{C}	14
5.1	Définition	14
5.2	Partie imaginaire Im et réelle Re	14
5.2.1	Définition	14
5.2.2	Propriétés	14
5.3	Conjugué \bar{z}	14
5.3.1	Définition	14
5.3.2	Identités	14
5.4	Affixe Aff	14
5.4.1	Propriétés	14
5.5	Racines des polynômes de second degré $az^2 + bz + c$	15
5.6	Coordonnées polaires avec z	15
5.6.1	Module $ z $	15
5.6.2	Argument \arg	15
5.7	Formes	16
5.7.1	Propriétés de la forme exponentielle	16
5.8	Inégalité triangulaire	16
6	Dérivées	17
6.1	Opération sur des fonctions	17
7	Fonction exponentielle \exp	18
7.1	Notation	18
7.2	Caractéristiques	18
7.3	Limites remarquables	18
7.4	Propriétés	18
8	Géométrie dans l'espace	19
8.1	Intersections	19
8.1.1	Droite-droite, plan-plan	19
8.1.2	Droite-plan	19
8.2	Section d'un cube	19
8.3	Orthogonalité \perp	19
8.4	Plan \perp droite	19

8.5	Plan médiateur	19
8.6	Propriétés	20
8.7	Coordonnées	20
8.8	Vecteurs dans l'espace	20
8.8.1	Propriétés identiques aux vecteurs bidimensionnels	20
8.8.2	Propriétés	20
8.8.3	Caractérisation vectorielle d'objets	20
8.9	Équations paramétriques	21
8.9.1	D'une droite	21
8.9.2	D'un plan	21
8.10	Produit scalaire	21
8.10.1	Propriétés	21
8.11	Équations cartésienne d'un plan	21
9	Le logarithme népérien \ln	22
9.1	Caractéristiques	22
9.2	Limites remarquables	22
9.3	Propriétés	22
10	Primitives F	23
10.1	Définition	23
10.2	Propriétés	23
10.3	Primitives remarquables	23
10.4	Opérations avec primitives	23
11	Intégrales \int	24
11.1	Notation	24
11.2	Unité d'aires ua	24
11.2.1	Définition	24
11.3	Calcul	24
11.4	Propriétés	24
11.5	Valeur moyenne de f sur $[a; b]$	24
11.6	Intégration par parties	24
12	Échantillonnage	25
12.1	Fréquence de caractère X_n	25
12.2	Fréquence de caractère dans échantillon F_n	25
12.3	Intervalle de fluctuation I_n	25
12.3.1	Interprétation	25
12.4	Trouver p avec f et n	25
13	Trigonométrie	26
13.1	Valeurs remarquables	26
13.2	Primitives et dérivées de $\pm \cos x$ et $\pm \sin x$	26

0 Outils

0.1 Composition de fonction $f \circ g$

Soit f et g des fonctions respectivement définies sur I et J

$$(f \circ g)(x) \iff f(g(x))$$

Attention: il faut que x soit défini dans I et que $g(x)$ soit défini dans J

Plus généralement, soit Θ un ensemble de fonctions

$$\left(\bigcirc_{i=0}^j \Theta_i\right)(x) = \Theta_0(\Theta_1(\Theta_2(\Theta_3 \dots (x \dots)))$$

0.2 Équations de cercle $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$

Soit R le rayon du cercle, et $O(x_0; y_0)$ le centre du cercle

Un cercle dans le plan peut être décrit par l'équation suivante:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

0.3 Opérations avec des puissances

$$(x^a)^b = x^{ab}$$

$$x^a x^b = x^{a+b}$$

$$x^{-a} = \frac{1}{x^a}$$

$$x^{\frac{1}{a}} = \sqrt[a]{x}$$

$$x^0 = 1$$

0.4 Diverses théorèmes

0.4.1 Application de fonctions aux inéquations

Soit I une intervalle, f une fonction définie et croissante sur I , x et y deux nombres dans I

$$\begin{aligned} x &\begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} y \\ \iff f(x) &\begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} f(y) \end{aligned}$$

1 Suites numériques

1.1 Définition fonctionnelle

Soit f une fonction:

$$u_n = f(n)$$

1.2 Définition par récurrence

Soit f une fonction

$$u_n = \begin{cases} u_0 = \text{cste} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1.3 Suite arithmétique

Avec r la raison de la suite

Définition fonctionnelle $u_n = u_0 + r \cdot n$

Définition par récurrence $u_n = \begin{cases} u_0 = \text{cste} \\ u_{n+1} = u_n + r \end{cases}$

Somme des termes de i à j $\sum_{i=i}^j u_i = (j - i + 1) \cdot \frac{u_j + u_i}{2}$

1.4 Suite géométrique

Avec q la raison de la suite

Définition fonctionnelle $u_n = u_0 \cdot q^n$

Définition par récurrence $u_n = \begin{cases} u_0 = \text{cste} \\ u_{n+1} = u_n \cdot q \end{cases}$

Somme des termes de i à j $\sum_{i=i}^j u_i = u_j \cdot \frac{1 - q^{j-i+1}}{1 - q}$

1.5 Limites

Suite convergente vers L $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$

Suite divergente $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \neq L$

$p \in \{0.5\} \cup \mathbb{N}$	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$q \in \mathbb{R}$					
$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n$?		0	1	$+\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^p$		0	1		$+\infty$

Limites de type cste^n ou n^{cste}

1.6 Majoration et minoration

Soit (u_n) une suite définie sur les rangs dans I et L un réel

Suite majorée $\forall n \in I \quad \exists M \quad u_n \leq M$

Suite minorée $\forall n \in I \quad \exists m \quad u_n \geq m$

Suite bornée Suite majorée *et* minorée

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \dots$$

	Majorée (par L)		Minorée (par L)	
	Oui	Non	Oui	Non
\nearrow	$\leq L$	$= +\infty$		
\searrow			$\geq L$	$= -\infty$

Soit f la fonction associée à u_n

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = f(L)$$

1.7 Opérations sur les limites

Voir en 3.3

1.8 Comparaisons et limites

Soit $L \in \mathbb{R}$, (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites et l_A la limite quand $n \rightarrow +\infty$ de la suite A_n

Nom du théorème	Conditions		Résultat	Explication graphique
Par comparaison	$u_n \leq v_n$	$l_u = +\infty$	$\implies l_v = +\infty$	(u_n) emporte (v_n) vers $+\infty$
	$u_n \geq v_n$	$l_u = -\infty$	$\implies l_v = -\infty$	(u_n) emporte (v_n) vers $-\infty$
Théorème des gendarmes	$w_n \geq v_n \geq u_n$	$l_u = l_w = L$	$\implies l_v = L$	(u_n) et (w_n) forcent (v_n) à tendre vers L

2 Probabilités

2.1 Probabilité conditionnelle $P(A|B)$

Probabilité que A soit réalisé **sachant que** B a déjà été réalisé.

$$P(A|B) \text{ ou } P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{si } P(B) \neq 0$$

2.2 Probabilités d'intersections $P(A \cap B)$

Probabilité que A **et** B soit réalisées.

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(B) \cdot P(A|B) \\ &= P(A) \cdot P(B|A) \end{aligned}$$

2.3 Probabilités d'union $P(A \cup B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

2.4 Partitions

Si on a deux événements ou plus tel que...

- Aucun événement n'est vide
 $\iff B_i \neq \emptyset \quad \forall i$
- Aucun événement ne recouvre un autre
 $\iff B_i \cap B_j = \emptyset \quad \forall i, j$
- L'union de chaque partition couvre l'univers entier
 $\iff \bigcup_{i=1}^j B_i = \Omega$

2.5 Formule des probabilités totales

Soit B_1, B_2, \dots, B_n des événements formant une partition de Ω

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A \cap B_i)$$

2.6 Indépendance d'événements

$$\begin{aligned} A \text{ et } B \text{ sont indépendants} &\iff \overline{B} \text{ et } B \text{ forment une partition de } \Omega \\ &\iff \overline{A} \text{ et } A \text{ forment une partition de } \Omega \\ &\iff \overline{A} \text{ et } \overline{B}, A \text{ et } \overline{B} \text{ et } B \text{ et } \overline{A} \text{ sont indépendants} \end{aligned}$$

2.7 Autre vocabulaire

Événements incompatibles $P(A \cap B) = 0$

Variable aléatoire continue La variable aléatoire peut prendre n'importe quel valeur dans $I := I \subset \mathbb{R}$

À partir d'ici, la connaissance des intégrales est requise (voir 11)

2.8 Probabilités à densité

f est une densité de probabilité si:

- $D_f \subset \mathbb{R}_+$
- f est continue
- $\int_{D_f} f(x)dx = 1$

La loi de X admet f comme densité de probabilité $\iff P(X \in [a, b]) = \int_a^b f(t)dt$

$$\wedge [a, b] \subseteq D_f \subset \mathbb{R}_+$$

$$\implies \forall n \in D_f \quad P(X = n) = 0$$

$$\implies \text{Dans les conditions } P(\dots), \quad \geq \iff > \text{ et } \leq \iff <$$

$$\implies P(X > k) = 1 - P(X < k)$$

$$\implies P(X \in [a, b]) = P(X < b) - P(X < a)$$

$$\implies P(X \in [a, b] \mid X \in [c, d]) = \frac{P(X \in [a, b] \cap [c, d])}{P(X \in [c, d])}$$

$$\implies E(X) = \int_{D_f} tf(t)dt$$

2.9 Loi uniforme

X suit la loi uniforme sur $[a, b]$ \iff La loi de X admet $x \mapsto \frac{1}{b-a}$ comme densité de probabilité

$$[c, d] \subseteq [a, b] \iff P(X \in [c, d]) = \frac{d-c}{b-a}$$

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

2.10 Loi exponentielles

X suit la loi exponentielle de paramètre λ \iff La loi de X admet $x \mapsto \lambda e^{-\lambda x}$ comme densité de probabilité

2.11 Espérance

Si la loi de X admet f comme densité de probabilité et que, pour tout λ dans \mathbb{R}^+ , $f = x \mapsto \lambda e^{-\lambda x}$

$$E(X) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n tf(t)dt$$

2.12 Loi sans vieillissement

$$P(X \geq t+h \mid X \geq t) = P(X \geq h)$$

2.13 Lois normales

2.13.1 Loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$

$$X \text{ suit la loi } \mathcal{N}(0, 1) \iff P(X \in [a, b]) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp -\frac{x^2}{2} dx$$

Propriétés

$$\begin{aligned} E(X) = 0 & \iff \text{centrée} \\ \sigma = 1 & \iff \text{réduite} \\ \iff V = 1 & \end{aligned}$$

.

2.13.2 Probabilité d'intervalle centrée en 0

$$X \sim \mathcal{N}(0, 1) \iff \forall \alpha \in]0, 1[\quad \exists_{=1} u_\alpha \in \mathbb{R}_+^* \quad P(X \in [-u_\alpha, u_\alpha]) = 1 - u_\alpha$$

Deux valeurs remarquables

$$u_{0.05} = 1.96$$

$$u_{0.01} = 2.58$$

.

2.13.3 Théorème de Moivre-Laplace

$$\begin{aligned} X_n & \sim \mathcal{B}(n, p) \\ \wedge \quad p & \in [0, 1] \\ \wedge \quad Z_n & = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \\ \implies \lim_{n \rightarrow \infty} Z_n & = \mathcal{N}(0, 1) \end{aligned}$$

2.13.4 Lois normales $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$$\mu \in \mathbb{R}, \quad \sigma \in \mathbb{R}_+, \quad Y := \frac{X - \mu}{\sigma}$$

$$\begin{aligned} Y \sim \mathcal{N}(0, 1) & \implies X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \\ & \implies E(X) = \mu \\ & \implies V = \sigma^2 \\ & \implies \sigma \text{ (écart type)} = \sigma \end{aligned}$$

3 Limites lim

3.1 Notation

Soit x , C et D des nombres et Ψ un réel, $+\infty$ ou $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow \Psi} C = D \iff C \xrightarrow{x \rightarrow \Psi} D$$

$$\iff \text{Limite de } C \text{ quand } x \text{ tends vers } \Psi$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \Psi \\ >}} C = D \iff C \xrightarrow{x \rightarrow \Psi^+} D$$

$$\iff \text{Limite de } C \text{ en } \Psi \text{ par valeurs supérieures}$$

$$\iff \text{Limite de } C \text{ à droite de } \Psi$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \Psi \\ <}} C = D \iff C \xrightarrow{x \rightarrow \Psi^-} D$$

$$\iff \text{Limite de } C \text{ en } \Psi \text{ par valeurs inférieures}$$

$$\iff \text{Limite de } C \text{ à gauche de } \Psi$$

3.2 Limites d'un quotient à la valeur indéfinie

Soit $f : x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}$ et $r \in \mathbb{R}$ tq. $q(r) = 0$

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow r} p(x)$
2. **Par valeurs supérieures** Calculer $\lim_{x \rightarrow r^+} q(x)$: 0^+ ou 0^-
Par valeurs inférieures Calculer $\lim_{x \rightarrow r^-} q(x)$: 0^+ ou 0^-
3. Conclure par quotient: $0^+ \rightarrow +$ et $0^- \rightarrow -$

3.3 Opérations sur les limites

Les opérations entre deux limites réelles sont comparables aux opérations sur des nombres

FI Forme Indéterminée

x, y	$x + y$	$x \cdot y$	x/y
$\pm\infty$	Signes = $\pm\infty$ Signes \neq FI	(règle des signes)	FI
\mathbb{R} ou $\pm\infty$	$\pm\infty$	$x = 0$ FI $x > 0$ $\pm\infty$ $x < 0$ $\mp\infty$	$y = 0$ FI $y = \pm\infty$ 0 $x = \pm\infty$ et $y \in \mathbb{R}^*$ $\pm\infty$

3.4 Asymptotes

Soit $L \in \mathbb{R}$, f une fonction, Γ la courbe d'équation $y = f(x)$ et Ψ un nombre ou symbole

$$\begin{aligned} f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \Psi} L &\iff \Gamma \text{ admet en } \Psi \text{ une asymptote (horizontale) d'équation } y = L \\ \begin{cases} f(x) \xrightarrow{x \rightarrow L^+} \pm\infty \\ f(x) \xrightarrow{x \rightarrow L^-} \pm\infty \end{cases} &\iff \Gamma \text{ admet en } L \text{ une asymptote (verticale) d'équation } x = L \end{aligned}$$

3.5 Simplifications de limites

3.5.1 Polynômes

Pour les limites en $+\infty$ ou en $-\infty$, on peut simplifier la limite d'un polynôme à la limite du terme de plus haut degré:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 - 4x + 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3$$

Ça marche aussi avec les fractions:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^9 + x^3 - 2}{5x^3 - 8x^{18} + 420} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^9}{-8x^{18}}$$

3.6 Fonctions composées

Soit a , b et $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$, f et g des fonctions

$$\begin{cases} f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b \\ g(x) \xrightarrow{x \rightarrow b} c \end{cases} \implies (f \circ g)(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} c$$

4 Continuité des fonctions

4.1 Définition

Une fonction est continue quand "on peut tracer sa courbe sans lever le stylo". Plus rigoureusement, la fonction f est continue sur l'intervalle I si, pour tout $a \in I$, $f(a) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a)$.

4.2 Continuité de fonctions usuelles

Polynôme	\mathbb{R}
\sqrt{x}	\mathbb{R}^+
Rationnelle	Ensemble de définition

De plus, n'importe quelle fonction créée par $+$, \times , \circ ou \div à partir de fonctions continues sont continues

4.3 Théorèmes utilisant la continuité

4.3.1 Valeurs intermédiaires

Soit a et b des réels, f une fonction continue sur $[a; b]$.

$$\forall k \in [f(a); f(b)], \quad f(x) = k \text{ admet au moins une solution dans } [a; b]$$

4.3.2 Bijection

Soit I une intervalle, a et b des réels dans I et f une fonction définie sur I ou plus grand

$$\begin{cases} f \text{ est continue sur } I \\ f \text{ est strictement monotone sur } I \end{cases} \quad (1)$$
$$k \in [f(a); f(b)] \quad (2)$$

$$\implies f(x) = k \text{ admet une unique solution dans } [a; b]$$

(1) quand elle ne l'est pas, on étudie séparément chaque intervalle où la fonction est strictement monotone

(2) si a ou $b = \pm\infty$, on calcule la limite pour l'intervalle image:

Montrer que $f(x) = k$ n'admet qu'une seule solution dans \mathbb{R}

$$k \in \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$$

Attention: pour montrer que $f(x) = k$ n'a pas de solutions on n'utilise pas la bijection mais le tableau de variations

5 Nombres complexes \mathbb{C}

5.1 Définition

$$i^2 := -1, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad z \in \mathbb{C} \\ z = a + ib$$

Ensemble des imaginaires purs: $i\mathbb{R} := \set{\mathbb{R}}$

5.2 Partie imaginaire Im et réelle Re

5.2.1 Définition

- $\text{Re}(a + ib) := a$
- $\text{Im}(a + ib) := b$

5.2.2 Propriétés

- $\text{Re } z = 0 \iff z \in i\mathbb{R}$
- $\text{Im } z = 0 \iff z \in \mathbb{R}$

5.3 Conjugé \bar{z}

5.3.1 Définition

$$\bar{z} := \text{Re } z - i\text{Im } z$$

5.3.2 Identités

\diamond représente les opérations $+$, \times et \div

- $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = (\text{Im } z)^2 + (\text{Re } z)^2$
- $\overline{z \diamond w} = \bar{z} \diamond \bar{w}$
- $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$
- $\overline{\bar{z}} = z$
- $\bar{z} = z \iff z \in \mathbb{R}$

5.4 Affixe Aff

L'affixe est un nombre complexe représenté par un point ou un vecteur dans le plan:

$$\text{Aff} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a + ib$$

Réciproquement, l'image de $a + ib$ est $(a; b)$

5.4.1 Propriétés

- $\text{Aff}(\overrightarrow{AB}) = \text{Aff}(B) - \text{Aff}(A)$

5.5 Racines des polynômes de second degré $az^2 + bz + c$

$$az^2 + bz + c = 0 \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad \Delta := b^2 - 4ac$$

$$\begin{cases} \Delta < 0 & \Rightarrow \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a} \\ \Delta = 0 & \Rightarrow \frac{-b}{2a} \\ \Delta > 0 & \Rightarrow \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

5.6 Coordonnées polaires avec z

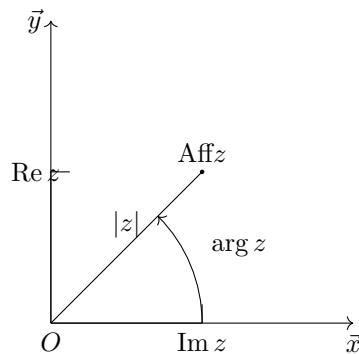


Figure 1: Représentation géométrique de l'affixe de z et de ses propriétés

5.6.1 Module $|z|$

$$|z| = \sqrt{\operatorname{Re}^2 z + \operatorname{Im}^2 z}$$

Propriétés

\diamond représente les opérations \times et \div

$$|z^n| = |z|^n$$

$$|z \diamond z'| = |z| \diamond |z'|$$

5.6.2 Argument \arg

$$\forall z \in \mathbb{C}^*$$

$$\begin{aligned} \arg z &:= \left(\vec{x}; \overrightarrow{O\operatorname{Im} z} \right) \\ &= \begin{cases} \cos(\arg z) &= \frac{\operatorname{Re} z}{|z|} \\ \sin(\arg z) &= \frac{\operatorname{Im} z}{|z|} \end{cases} \end{aligned}$$

Propriétés

On note z_\diamond l'affixe du point ou vecteur \diamond

- $(\vec{w}, \vec{w}') = \arg \frac{z_{w'}}{z_w}$

- $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg \frac{D-C}{B-A}$

Propriétés de produit, puissance, quotient et inverse identiques à \ln , voir 9.2

5.7 Formes

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z & \quad (\text{algébrique}) \\ |z| (\cos(\arg z) + i \sin(\arg z)) & \quad (\text{trigonométrique}) \\ |z| e^{i \arg z} & \quad (\text{exponentielle}) \end{aligned}$$

Notations usuelles: $r := |z|$, $\theta := \arg z$, $x := \operatorname{Re} z$, $y := \operatorname{Im} z$

5.7.1 Propriétés de la forme exponentielle

$$e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$$

Les autres propriétés découlent de celles de l'exponentielle, voir 7.3

5.8 Inégalité triangulaire

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|$$

6 Dérivées

6.1 Opération sur des fonctions

Soit u et v des fonctions.

$$(uv)' = u'v + v'u$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$(u^n)' = nu'u^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0.5; -1\}$$

$$(u \circ v)' = u'(v' \circ u)$$

$$\sin' = \cos$$

$$\cos' = -\sin$$

7 Fonction exponentielle \exp

7.1 Notation

$$e^x := \exp x$$

7.2 Caractéristiques

Soit $x \in \mathbb{R}$ et u une fonction définie sur \mathbb{R}

Dérivée $(e^x)' = e^x$
 $(e^u)' = u'e^u$

Réciproque $\ln(e^x) = x$

Signe $e^x > 0$

Variations strictement croissante sur \mathbb{R}

Limites $e^x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$
 $e^x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$

7.3 Limites remarquables

lim	$x \rightarrow$	=
$e^x - 1/x$	0	1
Par croissance comparée ↓		
xe^x	$-\infty$	0
e^x/x	$+\infty$	$+\infty$

7.4 Propriétés

$$e^a \gtrless e^b \iff a \gtrless b$$

$e^{a \diamond b}$	$e^a \diamond e^b$
+	\times
-	\div
$(e^a)^n$	e^{an}

8 Géométrie dans l'espace

8.1 Intersections

8.1.1 Droite-droite, plan-plan

Soit a et b des droites et P et Q des plans

	Coplanaires			Non-coplanaires
	Parallèles		Sécantes	
	Strictement	Confondues		
$a \cap b$	\emptyset	a et b	{point}	\emptyset
$P \cap Q$	\emptyset	P et Q	droite	\emptyset

8.1.2 Droite-plan

	Parallèles		Sécants
	Strictement	$a \subset P$	
$a \cap P$	\emptyset	droite	{point}

8.2 Section d'un cube

2 points dans la même face

Relier directement

[AB] sur une face, C sur face opposée

Tracer la parallèle à [AB] passant par C

[AB] sur une face E, C sur face adjacente

Prolonger une arête et (AB) jusqu'à intersection en D

Tracer (DC). La partie du segment qui est sur la face E est la section.

8.3 Orthogonalité \perp

$$d \underset{\text{orth.}}{\perp} d' \iff \gamma \underset{\text{perp.}}{\perp} \gamma' \quad \exists \gamma \parallel d, \gamma' \parallel d'$$

8.4 Plan \perp droite

$$\begin{aligned} d \perp P &\iff d \perp \gamma \wedge d \perp \gamma' \quad \forall \gamma \cap \gamma' = \text{point} \\ &\implies \gamma \perp d \quad \forall \gamma \subset P \end{aligned}$$

8.5 Plan médiateur

$$\begin{aligned} P \text{ med } [AB] &\iff P \perp (AB) \wedge I \in P \quad \forall I \text{ mil } [AB] \\ &\iff P = \{C \mid CA = CB\} \end{aligned}$$

8.6 Propriétés

Soit P, Γ, Q, P' des plans. Soit d, d', d_1 , droite, d'_1, γ, Δ des droites. Soit point un point.

$$\begin{aligned} d \parallel d' &\implies P \perp d \quad \forall P \perp d' \\ &\iff d \parallel \gamma \wedge d' \parallel \gamma \\ &\iff P \cap P' = d' \wedge d \parallel P \wedge d \parallel P' \quad (\text{doute}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P \parallel P' &\iff P \perp d \wedge P' \perp d \\ &\iff P \parallel \Delta \wedge P' \parallel \Delta \\ &\iff d_1 \parallel d'_1 \wedge d \parallel d' \quad \forall d \cap d' = \text{point}, d_1 \cap d'_1 = \text{point} \quad (\text{il faut que } P \text{ soit présent}) \\ &\implies \Gamma \cap P' = \gamma \wedge \Gamma \cap P = \gamma' \wedge \gamma \parallel \gamma' \quad \forall \Gamma \cap P = \text{droite} \end{aligned}$$

$$\Delta \parallel d \wedge \Delta \parallel d' \iff d \parallel d' \wedge d \subset P \wedge d' \subset P' \wedge P \cap P' = \Delta$$

$$\Delta \parallel P \iff \Delta \parallel d \quad \forall d \subset P$$

$$P \parallel Q \wedge \Gamma \cap P = \gamma \implies \Gamma \cap Q = \gamma' \wedge \gamma \parallel \gamma'$$

8.7 Coordonnées

Un triplet $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

Les propriétés de la géométrie plane (milieu, colinéarité et vecteurs) se traduisent trivialement

8.8 Vecteurs dans l'espace

8.8.1 Propriétés identiques aux vecteurs bidimensionnels

- Relation de Chasles
- Colinéarité

8.8.2 Propriétés

- A, B, C non-alignés. $\forall D \quad \overrightarrow{AD}$ coplanaire \overrightarrow{AB} coplanaire $\overrightarrow{AC} \iff D \in (ABC)$
- $\exists x, y \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} \implies D \in (ABC)$
- \vec{u}, \vec{v} et \vec{w} coplanaires $\iff \exists a, b, c \in \mathbb{R}^* : a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$
- $\vec{u}, \vec{v} \in P$ non colinéaires, $\vec{n} \neq \vec{0}$. \vec{n} normal à $P \iff \vec{n} \perp \vec{v} \wedge \vec{n} \perp \vec{u}$

8.8.3 Caractérisation vectorielle d'objets

Droite A point, $\vec{u} \neq \vec{0}$, $x \in \mathbb{R}$, d la droite passant par A de vecteur directeur \vec{u}

$$M = \{B | \overrightarrow{AB} = x\vec{u}\} \implies M \text{ est la droite } d$$

Plan A point, \vec{u} colinéaire \vec{v} , M ensemble de points, $x, y \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{AB} := \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} := \vec{v}$

$$M = \{B | \overrightarrow{AB} = x\vec{u} + y\vec{v}\} \implies M \text{ est un plan } (ABC)$$

C'est l'ensemble de tout les points dans le repère (A, \vec{u}, \vec{v})

8.9 Équations paramétriques

8.9.1 D'une droite

Soit...

$$\begin{aligned}A &:= (x_A; y_A; z_A) \\ \vec{u} &:= (x_u; y_u; z_u) \\ M &:= (x; y; z) \\ D &:= \text{droite passant par } A \text{ de vecteur directeur } \vec{u}\end{aligned}$$

On a:

$$M \in D \iff \begin{cases} x = x_u t + x_A \\ y = y_u t + y_A \\ z = z_u t + z_A \end{cases}$$

8.9.2 D'un plan

Soit...

$$\begin{aligned}A &:= (x_A; y_A; z_A) \\ \vec{u} &:= (x_u; y_u; z_u) \\ \vec{w} &:= (x_w; y_w; z_w) \\ M &:= (x; y; z) \\ P &:= \text{plan passant par } A \text{ de vecteur directeurs } \vec{u} \text{ et } \vec{w}\end{aligned}$$

On a:

$$M \in P \iff \begin{cases} x = x_u t + x_w t' + x_A \\ y = y_u t + y_w t' + y_A \\ z = z_u t + z_w t' + z_A \end{cases}$$

8.10 Produit scalaire

8.10.1 Propriétés

- $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$
- $\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{v}$
- $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- $\vec{v} \perp \vec{u} \iff \vec{v} \cdot \vec{u} = 0$

8.11 Équations cartésienne d'un plan

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$, P un plan, $\vec{n} := (a, b, c)$ le vecteur normal à P et $A := (x, y, z)$

$$A \in P \iff ax + by + cz + d = 0$$

9 Le logarithme népérien \ln

Aussi appelé "logarithme naturel" ou "logarithme base e "

9.1 Caractéristiques

Notation	$\ln x$
Réciproque	\exp
Ensemble	$\mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$
Limites	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$
Dérivée d'une variable	$\frac{1}{x}$
Dérivée d'une fonction	$\frac{u'}{u}$
Variations	Croissante sur \mathbb{R}_+^*
Continuité	Continue sur \mathbb{R}_+^*
Valeurs remarquables	$\ln 1 = 0$

9.2 Limites remarquables

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$$

9.3 Propriétés

$\ln(a \diamond b)$	$\ln a \diamond \ln b$
\times	$+$
\div	$-$
a^n	$n \ln a$

10 Primitives F

10.1 Définition

$\forall x \in \mathbb{R}$

$$F'(x) = f(x)$$

10.2 Propriétés

- $\forall C \in \mathbb{U} \quad x \mapsto F(x) + C$ est une primitive de f
- $F + G$ primitive de $f + g$
- $\forall k \in \mathbb{R} \quad kF$ primitive de kf

10.3 Primitives remarquables

f	F	$\in I$ (\mathbb{R} par défaut)
k	kx	
x	$\frac{1}{2}x^2$	
$\forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\} \quad x^n$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbb{R} \setminus \{1\}$ (0 est aussi non-défini quand $n < 0$)
$1/\sqrt{x}$	$2\sqrt{x}$	\mathbb{R}_+^*

10.4 Opérations avec primitives

f	F	Conditions sur f et I
$\forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\} \quad f' f^n$	$\frac{1}{n+1} f^{n+1}$	
f'/f	$\ln f$	$\forall x \in I \quad f(x) \in \mathbb{R}_+^*$
f'/\sqrt{f}	$2\sqrt{f}$	
$f'e^f$	e^f	
$f' \cos f$	$\sin f$	
$f' \sin f$	$-\cos f$	

11 Intégrales \int

11.1 Notation

Soit $A_f \in \mathbb{R}$ l'aire sous la courbe de f de $x = a$ à $x = b$ par rapport à l'axe des abscisses

$$\int_a^b f(x)dx = A_f$$

$$\int_{\text{borne inf.}}^{\text{borne sup.}} \text{expression} \quad d\text{var. d'intégration}$$

11.2 Unité d'aires ua

$\forall x \in [a; b] \quad f(x) \geq 0 \wedge b \geq a \iff A_f \text{ est exprimée en } ua.$

11.2.1 Définition

$$1ua = ||\vec{i}|| \cdot ||\vec{j}||$$

11.3 Calcul

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= [F(x)]_a^b \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$

11.4 Propriétés

Pour alléger les notations: $\lrcorner = f(x)dx$, $\rceil = g(x)dx$ et $\int = \int_a^b$

- $\int_a^a \lrcorner = 0$
- $\int_a^b \lrcorner = - \int_b^a \lrcorner$
- $\int_a^c \lrcorner = \int_a^b \lrcorner + \int_b^c \lrcorner$ (Relation de Chasles)
- $\int k \lrcorner = k \int \lrcorner$
- $\int (f(x) + g(x))dx = \int \lrcorner + \int \rceil$
- $\int \lrcorner \geq 0 \implies f(x) \geq 0$
- $f(x) \geq g(x) \implies \int \lrcorner \geq \int \rceil$

11.5 Valeur moyenne de f sur $[a; b]$

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

11.6 Intégration par parties

$$\int_a^b v(x)u'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b v'(x)u(x)dx$$

12 Échantillonnage

12.1 Fréquence de caractère X_n

Soit le caractère \mathcal{C} dont la proportion de présence dans une population est p . X_n associe à la taille d'échantillon n le nombre de caractères présents dans l'échantillon.

$$X_n \sim \mathcal{B}(n, p)$$

12.2 Fréquence de caractère dans échantillon F_n

$$F_n = \frac{X_n}{n}$$

12.3 Intervalle de fluctuation I_n

Soit

Z la loi normale centrée réduite,

$\alpha \in]0, 1[$,

$u_\alpha \in \mathbb{R}$ tq. $P(Z \in [-u_\alpha, u_\alpha]) = 1 - \alpha$,

$q := 1 - p$

$$I_n = \left[p - u_\alpha \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}}, p + u_\alpha \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}} \right]$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(F_n \in I_n) = 1 - \alpha$$

12.3.1 Interprétation

Pour un n assez grand, $F_n \in I_n$ avec une probabilité d'approximativement $1 - \alpha$. On admet que

$$P(F_n \in I_n) \approx 1 - \alpha$$

Quand:

- $n \geq 30$
- $np \geq 5$
- $nq \geq 5$

Si au moins une des conditions n'est *pas* remplie, il faudra utiliser une intervalle de fluctuation

12.4 Trouver p avec f et n

$$\exists n_0 : n \geq n_0 \implies P\left(p \in \left[F_n - \frac{1}{\sqrt{n}}, F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]\right) \geq 0.95$$

13 Trigonométrie

13.1 Valeurs remarquables

Table 1: Valeurs remarquables de \sin , \cos , \tan et \cotan

x	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cotan x$
0	0	1	0	
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0		0

13.2 Primitives et dérivées de $\pm \cos x$ et $\pm \sin x$

Déplacement en sens trigonométrique: primitive. À l'inverse, dérivée. Exemple: la primitive de \sin est $-\cos$.

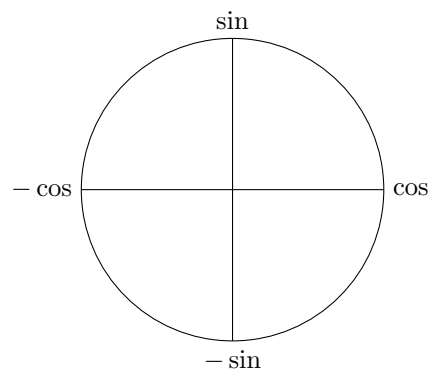


Figure 2: Cercle des primitives et dérivées de \sin et \cos