Equations différentielles

exercice 1:

1) $y(x) = e^{2x}$ donc $y'(x) = 2e^{2x}$

$y'(x) - 2y(x) = 2e^{2x} - 2 \times e^{2x} = 0$ donc $x \mapsto e^{2x}$ est solution de l'équation différentielle $y' - 2y = 0$

2) $y(x) = \cos x \sin x$ donc

$y'(x) = -\sin x \times \sin x + \cos x \times \cos x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$y''(x) = 2(-\sin x) \times \cos x - 2 \times \cos x \times \sin x$

$= -4 \cos x \sin x$.

$y''(x) + 4y(x) = -4\cos x \sin x + 4 \cos x \sin x = 0$

donc $x \mapsto \cos x \sin x$ est solution de $y' + 4y = 0$

3) $y(x) = \sqrt{x} + \ln x$

$y'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x}$ donc $x \mapsto \sqrt{x} + \ln x$ est solution de l'équation différentielle $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x}$

4) $y(x) = -\frac{1}{2} e^{1-x}$ donc $y'(x) = -\frac{1}{2} \times (-1) \times e^{1-x}$

$y'(x) - 3y(x) = \frac{1}{2} e^{1-x} - 3 \times \left(-\frac{1}{2} e^{1-x}\right) = \frac{1}{2} e^{1-x} + \frac{3}{2} e^{1-x}$

$= 2e^{1-x}$

Donc $x \mapsto -\frac{1}{2} e^{1-x}$ est solution de $y' - 3y = 2e^{1-x}$

5) $y(x) = -\frac{1}{2}\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(x)$

$y'(x) = \frac{1}{2}\sin(x) + \frac{1}{2}\cos(x)$ Donc

$y'(x) - y(x) = \frac{1}{2}\sin(x) + \frac{1}{2}\cos(x) + \frac{1}{2}\cos(x) - \frac{1}{2}\sin(x) = \cos(x)$

Donc $x \mapsto -\frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x$ solution de $y' - y = \cos x$.

Primitive de $\frac{1}{x^n}$: $\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}$

exercice 2 :

1) $y' + \frac{2}{x^2} y = 0$

$a(x) = \frac{2}{x^2}$ donc $A(x) = \frac{-2}{x}$

Donc les solutions sont : $y_0(x) = Ce^{\frac{2}{x}}$, C réel

2) $(x^2 + x + 1)y' + (2x+1)y = 0$

$\Leftrightarrow y' + \frac{2x+1}{x^2+x+1} y = 0$

$a(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$ est de la forme $\frac{u'}{u}$

avec $u(x) = x^2 + x + 1$ $A = \ln u$

$u'(x) = 2x + 1$ donc $A(x) = \ln(x^2 + x + 1)$

donc les solutions sont : $y_0(x) = Ce^{-\ln(x^2+x+1)}$, C réel

$y_0(x) = C \times \frac{1}{e^{\ln(x^2+x+1)}} = \frac{c}{x^2+x+1}$, C réel

3) $y' + 2xe^{-x^2} y = 0$

$a(x) = 2xe^{-x^2}$ de la forme $-u'e^u$

avec $u(x) = -x^2$

$u'(x) = -2x$ donc $A = -e^u$

$A(x) = -e^{-x^2}$

donc $y_0(x) = Ce^{e^{-x^2}}$, C réel

4/ $(x^2+4x+1)^5 y' - (x+2)\,y = 0$

$$y' - \frac{(x+2)}{(x^2+4x+1)^5}\,y = 0$$

$$a(x) = \frac{-(x+2)}{(x^2+4x+1)^5}$$ de la forme $\frac{u'}{u^5}$ ou $u'u^{-5}$

avec $u(x) = x^2+4x+1$

$u'(x) = 2x+4$

$$A = \frac{-1}{4u^4} = -\frac{u^{-4}}{4}$$

donc $$a(x) = -\frac{1}{2}\,\frac{(2x+4)}{(x^2+4x+1)^5}$$

Donc $$A(x) = -\frac{1}{2} \times \frac{-1}{4(x^2+4x+1)^4} = \frac{1}{8(x^2+4x+1)^4}$$

Donc $y_0(x) = C\,e^{-\frac{1}{8(x^2+4x+1)^4}}$, c réel

5/ $\sqrt{x^2+1}\; y' - x\,y = 0$

$$y' - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,y = 0$$

$$a(x) = -\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$ de la forme $\frac{u'}{\sqrt{u}}$

avec $u(x) = x^2+1$

$u'(x) = 2x$

$$a(x) = -\frac{1}{2} \times \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$A = -\frac{1}{2} \times 2\sqrt{u}$$

$A(x) = -\sqrt{x^2+1}$

Donc $y_0(x) = C\,e^{\sqrt{x^2+1}}$, c réel

6/ $y' - \cos(3x+1)\, y = 0$

$a(x) = -\cos(3x+1)$ de la forme $u' \cos u$.

avec $u(x) = 3x + 1$

$u'(x) = 3$

$a(x) = \left(-\frac{1}{3} \times 3\cos(3x+1)\right) = \left(-\frac{1}{3} u' \cos u\right)$

$A = -\frac{1}{3} \times \sin u$

$A(x) = -\frac{1}{3} \sin(3x+1)$

Donc $y_0(x) = C e^{\frac{1}{3}\sin(3x+1)}$, C réel.