Equations différentielles

Séance 1 :

Définition :

- Une **équation différentielle** est une égalité liant une fonction inconnue y de la variable x, ses dérivées successives y', y'', … et éventuellement d'autres fonctions (constantes, f …).
- On appelle **solution d'une équation différentielle** toute fonction dérivable vérifiant l'égalité. Résoudre une équation différentielle, c'est trouver toutes les fonctions solutions vérifiant l'égalité.

Exemple : La fonction $x \mapsto e^{-x}$ est solution de l'équation $y'' - y = 0$
En effet : pour $y(x) = e^{-x}$
$y'(x) = -e^{-x}$ et $y''(x) = e^{-x}$
Donc $y''(x) - y(x) = e^{-x} - e^{-x} = 0$

Exercice 1: Montrer que la fonction y est solution de l'équation proposée :

1) $y(x) = e^{2x}$ et équation : $y' - 2y = 0$
2) $y(x) = \cos(x)\sin(x)$ et équation : $y'' + 4y = 0$
3) $y(x) = \sqrt{x} + \ln(x)$ et équation : $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x}$
4) $y(x) = -\frac{1}{2}e^{1-x}$ et équation : $y' - 3y = 2e^{1-x}$
5) $y(x) = -\frac{1}{2}\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(x)$ et équation : $y' - y = \cos(x)$

Séance 2 :

(E_0): $y' + a(x)y = 0$ est appelée **équation homogène d'ordre 1** (y' et non y'').
Théorème : Les solutions de (E_0) sont toutes les fonctions de la forme $\boldsymbol{x \mapsto Ce^{-A(x)}}$ où C est une constante réelle et A une primitive de a

Exemples :

1) Résoudre l'équation différentielle : $y' + 2y = 0$
   Ici $a(x) = 2$ donc une primitive est $A(x) = 2x$
   Donc les solutions sont $y_0(x) = Ce^{-2x}$ avec C réel
2) Résoudre l'équation différentielle : $xy' + y = 0$
   donc $y' + \frac{1}{x}y = 0$
   Ici $a(x) = \frac{1}{x}$ donc une primitive est $A(x) = \ln(x)$
   Donc les solutions sont $y_0(x) = Ce^{-\ln(x)} = C \times \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{C}{x}$ avec C réel

Exercice 2:
Résoudre les équations différentielles du premier ordre suivantes :

1) $y' + \frac{2}{x^2}y = 0$
2) $(x^2 + x + 1)y' + (2x + 1)y = 0$
3) $y' + 2xe^{-x^2}y = 0$
4) $(x^2 + 4x + 1)^5 y' - (x + 2)y = 0$
5) $\sqrt{x^2 + 1}\,y' - xy = 0$
6) $y' - \cos(3x + 1)\,y = 0$

Séance 3 :

Résolution d'une équation différentielle du **premier ordre** avec second membre

Règle pratique : Pour résoudre l'équation avec second membre (EASM) $y' + a(x)y = b(x)$,

- On résout l'équation sans second membre (ESSM ou équation homogène) $y' + a(x)y = 0$ comme on l'a vu précédemment, on obtient : $y_0(x) = Ce^{-A(x)}$, C réel
- On cherche une solution particulière y_1 de l'EASM (équation avec second membre)
- La solution générale de l'équation est $y = y_0 + y_1$

1er cas : Si a et b sont des fonctions constantes, alors la fonction $y_1(x) = \frac{b}{a}$ est solution particulière

Exemple :

Résoudre $y' + 4y = 3$

L'ESSM est $y' + 4y = 0$

Les solutions de l'ESSM sont : $y_0(x) = Ce^{-4x}, C$ réel

Une solution particulière est : $y_1(x) = \frac{3}{4}$ donc les solutions de l'EASM sont : $y(x) = Ce^{-4x} + \frac{3}{4}, C$ réel

Exercice 3: Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $y' - 3y = 5$
2) $2y' - 4y = 1$
3) $10y' = 2y - 3$

2ème cas : La méthode de variation de la constante :

On cherche une solution particulière y_1 de la forme : $y_1(x) = C(x)e^{-A(x)}$

(La constante trouvée dans l'équation homogène est remplacée par une fonction de x donc quand on dérive on a un produit u'v+uv')

Exemples :

1) $xln(x)y' - y = 3x^2(\ln(x))^2$ sur]1 ; 2[

   On divise par $xln(x)$: $y' - \frac{1}{xln(x)}y = 3xln(x)$

   On résout l'équation homogène : $y' - \frac{1}{xln(x)}y = 0$

   $a(x) = -\frac{1}{xln(x)} = -\frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}$ de la forme $-\frac{u'}{u}$ donc $A = -\ln(u)$ donc $A(x) = -\ln(\ln(x))$

   Donc $y_0(x) = Ce^{\ln(\ln(x))} = Cln(x), C$ réel

   On cherche une solution particulière de l'EASM $y_1(x) = C(x)\ln(x)$

   On dérive : $y_1'(x) = C'(x)\ln(x) + \frac{1}{x}C(x)$

   On remplace dans l'EASM : $y' - \frac{1}{xln(x)}y = 3x\,ln(x)$

   $\Leftrightarrow C'(x)\ln(x) + \frac{1}{x}C(x) - \frac{1}{xln(x)}C(x)\ln(x) = 3x\ln(x)$

   $\Leftrightarrow C'(x)\ln(x) = 3x\ln(x)$

   $\Leftrightarrow C'(x) = 3x$

   $\Leftrightarrow C(x) = \frac{3x^2}{2}$ donc $y_1(x) = \frac{3x^2}{2}\ln(x)$

   Donc l'ensemble des solutions est : $y(x) = Cln(x) + \frac{3x^2}{2}\ln(x)$, C réel

2) $y' + y = (x^2 - 2x + 2)e^{2x}$

   On commence par résoudre l'ESSM : $y' + y = 0$

   Les solutions de l'équation homogène sont : $y_0(x) = Ce^{-x}$ avec C réel

   On cherche une solution particulière de l'EASM $y_1(x) = C(x)e^{-x}$

   On dérive : $y_1'(x) = C'(x)e^{-x} + (-C(x)e^{-x})$

   On remplace dans l'EASM : $y_1'(x) + y_1(x) = (x^2 - 2x + 2)e^{2x}$

$\Leftrightarrow\ C'(x)e^{-x} - C(x)e^{-x} + C(x)e^{-x} = (x^2 - 2x + 2)e^{2x}$

$\Leftrightarrow C'(x)e^{-x} = (x^2 - 2x + 2)e^{2x}$

$\Leftrightarrow C'(x) = (x^2 - 2x + 2)e^{3x}$

Il faut donc trouver une primitive de $(x^2 - 2x + 2)e^{3x}$, on pourrait utiliser une double intégration par partie

Ou : On cherche une solution de la forme $C(x) = (ax^2 + bx + c)e^{3x}$

$C'(x) = (2ax + b)e^{3x} + 3(ax^2 + bx + c)e^{3x} = (ax^2 + (2a + 3b)x + b + 3c)e^{3x}$

Donc $3ax^2 + (2a + 3b)x + b + 3c = x^2 - 2x + 2$

Par identification : $\begin{cases} 3a = 1 \\ 2a + 3b = -2 \\ b + 3c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ 3b = -2 - \frac{2}{3} \\ 3c = 2 - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{8}{9} \\ 3c = 2 + \frac{8}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{8}{3} \\ c = \frac{26}{27} \end{cases}$

Donc $C(x) = \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{8}{9}\,x^2 + \frac{26}{27}\right)e^{3x}$

Donc $y_1(x) = \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{8}{9}\,x^2 + \frac{26}{27}\right)e^{2x}$

Donc l'ensemble des solutions est : $y(x) = Ce^{-x} + \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{8}{9}\,x^2 + \frac{26}{27}\right)e^{2x}, C$ réel

Exercice 4: Résoudre les équations différentielles suivantes :

1)