Lois de probabilités continues : Séance 1

I. Lois de probabilité à densité

→ Regarder cette vidéo : Comprendre la différence entre discret et continu (5mn)

Jusqu'à présent nous avons rencontré des variables aléatoires dites **discrètes** : **elles ne peuvent prendre qu'un nombre fini de valeurs**. Par exemple une variable aléatoire qui suit la loi équirépartie lors du lancer d'un dé équilibré; ou encore qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$: la variable aléatoire prend alors ses valeurs dans un ensemble fini : $\{0,1,...,n\}$.

Définition 1.

Une variable aléatoire est dite **continue** lorsqu'elle peut prendre toutes les valeurs d'un intervalle I de \mathbb{R} .

Exemple

Choisir au hasard un nombre de l'intervalle [0;1000]. La variable aléatoire X qui correspond au nombre obtenu a pour valeurs possibles tous les réels de [0;1000]; la variable aléatoire X est continue.

1 Définitions

- → Regarder cette vidéo : Comprendre le passage du discret au continu et la notion de densité (11mn)
- → Regarder cette vidéo : Densité de probabilité (jusqu'à 1mn 45s).

Définition 2.

Une densité de probabilité sur I est une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb R$ vérifiant les conditions suivantes :

- f est continue et positive sur I.
- l'intégrale de f sur I est égale à 1.

Exemple

La fonction f définie sur [0;1] par $f(x)=3x^2$ est une densité de probabilité : En effet :

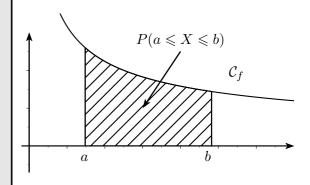
- . 2 → 3 ze est une fonction continue sur [6,1], car c'est un polynôme
- 2+32 $e^2 \in \mathbb{R} + \forall_2 \in [0,1]$
- $3x^2 dx = 3\int_{3}^{2} x^2 dx = 3\left[\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{4} = 3 \times \frac{1}{3} = 1$
- → Regarder cette vidéo : loi de probabilité continue densité comprendre la définition (10 mn) Il parle dans la vidéo d'intervalles non bornés, ce genre de situations arrivera quand on travaillera avec les lois exponentielles et normales.

Définition 3.

Soit X une variable aléatoire continue prenant ses valeurs dans un intervalle I de $\mathbb R$ et f une densité de probabilité sur I. On dit que la loi de X admet f comme densité de probabilité lorsque :

Pour tout intervalle [a,b] contenu dans I, la probabilité que X appartienne à [a;b] est égale à l'aire sous la courbe de f sur [a,b]. Autrement dit :

$$P(X \in [a, b]) = P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(t) dt$$



Remarque

 $P(X \in I) = 1$, en effet $\int_I f(t) dt = 1$, I est l'univers, il est constitué de toutes les valeurs possibles de la variable aléatoire X.

2 Propriétés

Proposition 1.

• P(X = a) = 0 pour tout $a \in I$

Pour tout a et b dans I avec a < b on a :

- $P(a < X < b) = P(a \le X < b) = P(a < X \le b) = P(a \le X \le b)$
- $P(X > a) = 1 P(X \le a) = 1 P(X < a)$
- P(a < X < b) = P(X < b) P(X < a)

Pour tout a, b, c et d dans I avec a < b et c < d on a $P_{c \leqslant X \leqslant d}(a \leqslant X \leqslant b) = \frac{P(X \in [a; b] \cap [c; d])}{P(X \in [c; d])}$

Remarque

Pour une variable aléatoire **continue** un évènement de probabilité nulle n'est pas forcément impossible. On peut par conséquent utiliser indifféremment les symbôles \langle et \leq , ou \rangle et \geq .

3 Espérance

Définition 4.

Soit X une variable aléatoire continue de fonction de densité f sur l'intervalle I bornée. L'espérance mathématique de X est le réel défini par :

$$E(X) = \int_{I} t f(t) dt$$

→ Pour les explications regarder cette vidéo :

Comment calculer l'espérance d'une variable aléatoire de densité f (9 mn). Il explique cela dans trois situations : La première lorsque I = [a, b] (I borné), la deuxième lorsque $I = [a, +\infty[$ ceci concernera essentiellement les lois exponentielles, la troisième lorsque $I = \mathbb{R}$ pour les lois normales.

Exercices du livre Exercices 37,41,42 p 336

☆Travail en autonomie

Savoir-faire 1 page 325.

II. Loi uniforme sur l'intervalle [a, b]

→ Regarder cette vidéo en guise d'introduction :

Loi uniforme : comprendre d'où vient la définition et savoir l'utiliser dans les exercices (8mn)

Définition 5 (Loi uniforme).

La loi uniforme sur l'intervalle borné [a;b] est la loi de probabilité dont la densité est une fonction constante sur [a;b] et donc nécessairement égale à $\frac{1}{b-a}$.

${\mathscr F}{ m Exemples}$

Voici différentes situations modélisées par une loi uniforme.

- On choisit au hasard un nombre réel dans l'intervalle [2; 9], soit X la variable aléatoire égale au nombre choisi. X suit la loi uniforme sur [2; 9].
- Armand et Lise rentrent de l'école à pied. Leurs parents savent qu'ils doivent arriver entre 17h et 18h à la maison. Aucun horaire n'est privilégié. On peut modéliser leur heure d'arrivée par une variable aléatoire H suivant la loi uniforme sur [17; 18].

1 Propriétés

→ Regarder cette vidéo :

Savoir démontrer et comprendre la formule pour calculer la probabilité $P(c \leq X \leq d)$ (4mn)

Proposition 2.

Une variable aléatoire X suit une loi de probabilité uniforme sur l'intervalle [a,b] si, pour tout intervalle [c,d] contenu dans [a,b], on a :

$$P(X \in [c,d]) = P(c \leqslant X \leqslant d) = \frac{d-c}{b-a}$$

★Exercice 1

La concentration d'une substance varie entre 0 mg/L et 1 mg/L. Elle est mesurée par une machine déréglée qui donne au hasard un nombre compris entre 0 et 1. On note C la variable aléatoire qui donne la concentration de la substance en mg/L. C suit la loi uniforme sur [0;1]. Calculer la probabilité d'obtenir un résultat entre 0,5 et 0,75. Même question pour un résultat supérieur à 0,7.

∉Exercice 2

Pressé par une rendez-vous, je me suis garé à 10h30 en oubliant de mettre de l'argent dans le parcmètre. Les agents municipaux passent aléatoirement une fois par jour durant les heures de stationnement payant, de 9h à 19h. Mon stationnement dure 2 heures.

- 1. Quelle est la probabilité que je reçoive un PV?
- 2. Sachant qu'à 11h30 je n'avais pas de PV, quelle est la probabilité que je reçoive un PV?
- → Regarder cette vidéo :

Espérance de la loi uniforme (6mn)

Proposition 3 (Espérance).

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur [a,b], alors, l'espérance est :

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

Exemples

Pour les exemples suivant la définition 5, on a donc : $E(X) = \frac{2+9}{2} = 5.5$ et $E(H) = \frac{17+18}{1.2} = 12.5$ soit en heures/minutes : 17h30 .

☆Travail en autonomie

Savoir-faire 2 page 325, exercice 51 page 337.

Exercices du livre : Ex 47,49,53 p 336 et 337

Lois de probabilités continues : Séance 2

III. La loi exponentielle

 \rightarrow Regarder la vidéo suivante. Ici $I = [0, +\infty[$ (l'univers) donc on ne peut pas calculer directement l'intégrale sur I contrairement à la situation où l'intervalle est borné (par exemple si I = [a; b]). Ce point a déjà été évoqué dans la troisième vidéo (Densité de probabilité (7mn)).

Loi exponentielle : comprendre la définition (10 mn)

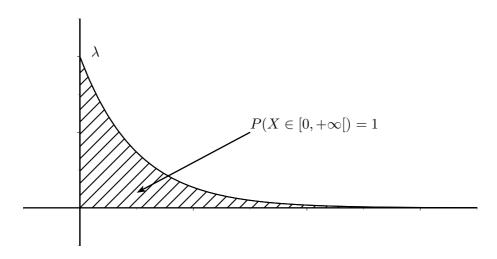
Proposition-Définition 6.

Soit λ un réel strictement positif et la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.

- \bullet f est une densité de probabilité.
- La loi de probabilité qui admet cette fonction pour densité de probabilité est appelée loi exponentielle de paramètre λ .
- → Regarder cette vidéo : Densité de probabilité (de 1mn 45s jusqu'à 4mn 10s).

8 Remarque

L'ensemble de définition de la fonction f n'est pas borné; le domaine correspondant à l'aire sous la courbe (limité par la courbe, l'axe des abscisses, la droite d'équation x=0) est non borné. La condition : « l'aire sous la courbe est égale à 1 » s'écrira $\lim_{t\to +\infty} \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} \mathrm{d}x = 1$.



→ Regarder cette vidéo :

Loi exponentielle : Comment calculer: $P(a \leq X \leq b)$ et $P(X \leq a)$ et $P(X \geq a)$ (8 mn)

Proposition 4.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ , et a et b des réels tels que $0 \le a \le b$. Alors :

•
$$P(a \leqslant X \leqslant b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$$

•
$$P(X \leqslant a) = 1 - e^{-\lambda a}$$

•
$$P(X \geqslant a) = e^{-\lambda a}$$

Exemple

Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0.1$

$$P(X \leq 20) = \begin{cases} -\frac{1}{20} & \frac{1}{20} & \frac{1}{$$

$$P(10 \leqslant X \leqslant 20) = \int_{0}^{\infty} \lambda e^{\lambda x} = \left[e^{-0/x} \right]_{0}^{10} = e^{-1} - e^{-2}$$

$$P(X \geqslant 15) = \int_{15}^{400} e^{0/2} = \lim_{k \to +\infty} \int_{0}^{k} e^{-0/2} = \lim_{k \to +\infty} \left[e^{-0/12e} \right]_{k}^{E} = \lim$$

Concernant la rédaction le mieux est d'écrire l'intégrale et de la calculer, mais si cela pose problème on peut simplement utiliser directement les formules de la proposition 4.

→ Regarder cette vidéo :

Loi sans vieillissement ou sans mémoire: qu'est-ce que c'est? Lien avec la loi exponentielle (9mn)

Proposition 5 (Loi sans vieillisement).

Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ , alors pour tous réels positifs t et h on a:

$$P_{X\geqslant t}(X\geqslant t+h)=P(X\geqslant h)$$

Remarque

Cette propriété traduit le fait que la loi exponentielle est une loi de durée de vie sans vieilli sement (ou sans mémoire): Quel que soit l'âge t d'un objet, la probabilité qu'il vive encore une durée h supplémentaire ne dépend que de h et non de l'âge t.

★Exercice 3

La durée de vie X, en heures, d'un composant électronique a été modélisée par la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,0006$.

- 1. Calculer la probabilité qu'un de ces composants, pris au hasard, soit encore en état de marche au bout de 500 heures.
- 2. En déduire la probabilité qu'un de ces composants pris au hasard et en état de marche au bout de 1000 heures, soit encore en état de marche au bout de 1500 heures.

Proposition 6 (Espérance).

Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ , ($\lambda > 0$), l'espérance de X est :

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

(Démonstration) → Un exercice en vidéo : Démo Espérance (13 mn)

☆Travail en autonomie

Savoir-faire 3, 4 et 5 page 327

≴Exercice 4 D'après Métropole Juin 2015

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ , où λ est un réel strictement positif donné.

1. (a) Soit c et d deux réels tels que $0 \le c < d$. Démontrer que la probabilité $P(c \le X \le d)$ vérifie

$$P(c \leqslant X \leqslant d) = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$$

- (b) Déterminer une valeur de λ à 10^{-3} près de telle sorte que la probabilité P(X > 20) soit égale à 0,05.
- (c) Donner l'espérance de la variable aléatoire X.
- 2. (a) Dans la suite de l'exercice on prend $\lambda = 0, 15$. Calculer $P(10 \le X \le 20)$.
 - (b) Calculer la probabilité de l'évènement (X > 18).

Exercices du livre : Ex 61,63,64,67 p 336 et 337

Démonstrations : Démontrer les propositions 4 et 5