Exercices: Calculus

Ewen Le Bihan

2020-05-15

Tout les exercices ici proviennent du livre "Calculus" disponible sur amazon

1

Montrons par récurrence:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on note la propriété $\mathcal{P}_n$:

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Initialisation. Montrons que, pour $n = 1$, $\mathcal{P}_n$ est vraie:

$$\left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2 = 1 = 1^2$$

$\mathcal{P}_n$ est donc vraie.

Hérédité. Soit n dans $\mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}_n$ est vraie. On a donc:

$$\begin{aligned}
1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 \\
&= \frac{(n(n+1))^2 + 4(n+1)^3}{4} \\
&= \frac{n^2(n^2+2n+1) + 4(n^3+3n^2+3n+1)}{4} \\
&= \frac{n^4 + 2n^3 + n^2 + 4n^3 + 12n^2 + 12n + 4}{4} \\
&= \frac{n^4 + 6n^3 + 13n^2 + 12n + 4}{4}
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2 &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} \\
&= \frac{n^4 + 6n^3 + 3n^2 + 12n + 4}{4}
\end{aligned}$$

En fin de compte, on obtient $\mathcal{P}_{n+1}$:

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 &= \frac{n^4 + 6n^3 + 3n^2 + 12n + 4}{4} \\ &= \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

$\mathcal{P}_n$ est donc initialisée et héréditaire, donc $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ $\square$

2

Montrons par récurrence

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad |\sin(nx)| \leq n|\sin x|$$

Soit, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$ la propriété suivante:

$$|\sin(nx)| \leq n|\sin x|$$

Initialisation. Pour $n = 0$, montrons que $\mathcal{P}_n$ est vraie. On a, pour tout x dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} &|\sin(0x)| = 0 \wedge 0|\sin x| = 0 \\ \implies &|\sin(0x)| \leq 0|\sin x| \end{aligned}$$

$\mathcal{P}_0$ est donc vraie.

Hérédité. Prouvons que, pour tout entier naturel n et tout réel x, $\mathcal{P}_n$ est vraie.