Tacmaths: Dérivation

Ewen Le Bihan

2020-09-01

Dans tout le chapitre

- $f : I \to \mathbb{R}$
- I est un intervalle non-trivial[1]
- $a \in I$

1 Définition

1.1 Nombre dérivé en un point

Le nombre dérivé de f en a noté $f'(a)$ est la limite $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ si elle existe et est finie

1.2 Fonction dérivée

On dit que f est dérivable sur x pour tout $a \in I$, $f'(a)$ existe, auquel cas on a défini une fonction f' et:

$$f' \begin{cases} I & \to \mathbb{R} \\ a & \mapsto f'(a) \end{cases}.$$

appellée fonction dérivée de f.

2 Méthode de calcul

2.1 Dérivées usuelles

2.1.1

$$f \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^2 \end{cases}.$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée

$$f' \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 2x \end{cases}.$$

[1] Au moins deux éléments

2.1.2 Plus généralement

$$f \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^n \end{cases} .$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée

$$f' \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto nx^{n-1} \end{cases} .$$

2.1.3

$$f \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln x \end{cases} q.$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée

$$f' \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{X} \end{cases} .$$

2.2 Opérations sur les dérivées

Théorème Soient $u, v : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur I. Alors:

2.2.1

Soient λ et μ deux réels.

$\lambda + \mu$ est dérivable et $(\lambda u + \mu v)' = \lambda u' + \mu v'$

2.2.2

$u \cdot v$ est dérivable de dérivée $u'v + v'u$

2.2.3

Si v ne s'annule pas, ${}^u/_v$ est dérivable de dérivée

$$\frac{u'v - v'u}{v^2}.$$

2.3 Dérivation des fonctions

Notation Si $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})^2$, alors on peut noter:

$$\frac{d}{dx} f(x) = f'(x).$$

[2] $\mathcal{D}^n(I, O)$ est l'ensemble des fonctions n-dérivables définies dans O pour $x \in I$

Example

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x.$$

Théorème: Dérivation des fonctions composées Soient $u : I \to J$ et $v : J \to \mathbb{R}$ dérivable avec I, J des intervalles.

Alors $\begin{cases} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto v(u(x)) \end{cases}$ est dérivable et $\frac{d}{dx}(v(u(x))) = u'(x) \cdot v'(u(x))$.

Examples

- $(e^u)' = u'e^u$
- $(\ln u)' = u'\frac{1}{u} = \frac{u'}{u}$
- $\left(u^2\right)' = u'2u = 2u'u$

3 Utilisation

3.1 Théorème du signe de la dérivée (TSD)

On suppose que $f \in \mathcal{D}(I, J)$

3.2

Si on a $f' \geq 0$ (resp. $f' > 0$) sur I alors f est croissante (resp. strictement croissante) sur I.

3.3

Si on a $f' \leq 0$ (resp. $f' < 0$) sur I alors f est décroissante (resp. strictement décroissante) sur I.

3.4

Si $f' = 0$ sur I alors f croissante sur I.

Danger L'hypothèse "I intervalle" est importante: ($\mathbb{R}^*$ *n'est pas une intervalle*)

Example $\begin{cases} \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{x} \end{cases}$

f n'est pas décroissante **sur** $\mathbb{R}^*$.

3.5 Signe de la dérivée seconde

3.5.1

f est dite convexe (resp. concave) sur I lorsque C_f est au dessus (resp. en dessous) de toutes ses tangeantes.
f est convexe (resp. concave) quand, pour tout $x \in D_{f''}$, $f''(x) \leq 0$ (resp. $f''(x) \geq 0$).