Toussaint – Dérivée #2

$$\mathrm{id} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \to \mathbb{R}_+^* \\ x & \mapsto x \end{cases}$$

On a:

$$\begin{cases} \mathrm{id} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_+^*) \\ \mathrm{id} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}) \qquad \text{car } \mathbb{R}_+^* \subseteq \mathbb{R} \end{cases}$$

Donc, d'après la définition 9 du poly des fonctions usuelles:

$$\mathrm{id}^{\mathrm{id}} = \exp \circ (\mathrm{id} \cdot (\ln \circ \mathrm{id})) = \exp \circ (\ln \cdot \mathrm{id})$$

De plus,

$$\begin{cases} \exp & \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+^*) \\ \mathrm{id} \cdot \ln & \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}) \end{cases}$$

D'après le théorème de dérivation des fonctions composées:

$$\begin{cases} \exp \circ (\ln \cdot \mathrm{id}) & \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_+^*) \\ (\exp \circ (\ln \cdot \mathrm{id}))' & = (\ln \cdot \mathrm{id})' \cdot \exp' \circ (\ln \cdot \mathrm{id}) \end{cases}$$

Finalement:

$$\begin{aligned} (\mathrm{id}^{\mathrm{id}})' &= (\exp \circ (\ln \cdot \mathrm{id}))' \\ &= (\ln \cdot \mathrm{id})' \cdot \exp' \circ (\ln \cdot \mathrm{id}) \\ &= (\ln' \cdot \mathrm{id} + \mathrm{id}' \cdot \ln) \cdot \exp \circ (\ln \cdot \mathrm{id}) \\ &= \left(\frac{\mathrm{id}}{\mathrm{id}} + 1 \cdot \ln \right) \cdot \exp \circ (\ln \cdot \mathrm{id}) \\ &= (1 + \ln) \cdot \exp \circ (\ln \cdot \mathrm{id}) \end{aligned}$$

Pour ceux qui pensent que la notation avec $x \mapsto$ est mieux ~~ils ont tort~~:

$$(x \mapsto x^x)' = x \mapsto (1 + \ln x) e^{x \ln x}$$

Faites-moi des vues sur Spotify