September 2, 2020

Condensé de la terminale
Mathématiques

Ewen Le Bihan
TS3

Notations non vues en cours

$:=$	Égal par définition
$\lceil x \rceil$	Arrondir x à l'entier supérieur. ($\lceil 5.1 \rceil = 6$)
1.5	Séparateur ,
$x \cdot y$	Multiplication $\times$
$\nearrow$	Croissant
$\searrow$	Décroissant
$a \gtreqless b$	Revient à écrire $a > b$, $a = b$ et $a > b$
$\wedge$	"et"
$\vee$	"ou"
$\operatorname{Img} z$	Point d'affixe z
$\diamond$	Caractère utilisé pour représenter plusieurs opérations
$\operatorname{sgn}(x)$	$x \mapsto \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$
$\{A \| C\}$	L'ensemble de tout les A tel que C

Contents

0 Outils

0.1 Composition de fonction $f \circ g$

Soit f et g des fonctions respectivement définies sur I et J

$$(f \circ g)(x) \iff f(g(x))$$

Attention: il faut que x soit défini dans I et que $g(x)$ soit défini dans J

Plus généralement, soit Θ un ensemble de fonctions

$$\left(\bigcirc_{i=0}^{j} \Theta_i\right)(x) = \Theta_0(\Theta_1(\Theta_2(\Theta_3 \ldots (x \ldots)$$

0.2 Équations de cercle $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$

Soit R le rayon du cercle, et $O(x_0; y_0)$ le centre du cercle
Un cercle dans le plan peut être décrit par l'équation suivante:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

0.3 Opérations avec des puissances

$$\begin{aligned} (x^a)^b &= x^{ab} \\ x^a x^b &= x^{a+b} \\ x^{-a} &= \frac{1}{x^a} \\ x^{\frac{1}{a}} &= \sqrt[a]{x} \\ x^0 &= 1 \end{aligned}$$

0.4 Diverses théorèmes

0.4.1 Application de fonctions aux inéquations

Soit I une intervalle, f une fonction définie et croissante sur I, x et y deux nombres dans I

$$\begin{aligned} & x \gtreqless y \\ \iff & f(x) \gtreqless f(y) \end{aligned}$$

1 Suites numériques

1.1 Définition fonctionnelle

Soit f une fonction:

$$u_n = f(n)$$

1.2 Définition par récurrence

Soit f une fonction

$$u_n = \begin{cases} u_0 = \text{cste} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1.3 Suite arithmétique

Avec r la raison de la suite

Définition fonctionnelle $u_n = u_0 + r \cdot n$

Définition par récurrence $u_n = \begin{cases} u_0 = \text{cste} \\ u_{n+1} = u_n + r \end{cases}$

Somme des termes de i à f $\displaystyle\sum_{i=i}^{j} u_i = (j - i + 1) \cdot \frac{u_j + u_i}{2}$

1.4 Suite géométrique

Avec q la raison de la suite

Définition fonctionnelle $u_n = u_0 \cdot q^n$

Définition par récurrence $u_n = \begin{cases} u_0 = \text{cste} \\ u_{n+1} = u_n \cdot q \end{cases}$

Somme des termes de i à f $\displaystyle\sum_{i=i}^{j} u_i = u_j \cdot \frac{1 - q^{j-i+1}}{1 - q}$

1.5 Limites

Suite convergeante vers L $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$

Suite divergeante $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \neq L$

$p \in \{0.5\} \cup N$ $q \in R$	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$\lim\limits_{n \to +\infty} q^n$	?		0	1	$+\infty$
$\lim\limits_{n \to +\infty} n^p$	0		1	$+\infty$	

Limites de type cste^n ou n^{cste}

1.6 Majoration et minoration

Soit (u_n) une suite définie sur les rangs dans I et L un réel

Suite majorée $\forall n \in I \;\; \exists M \quad u_n \leq M$

Suite minorée $\forall n \in I \;\; \exists m \quad u_n \geq m$

Suite bornée Suite majorée *et* minorée

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \dots$$

	Majorée (par L)		Minorée (par L)	
	Oui	Non	Oui	Non
$\nearrow$	$\leq L$	$= +\infty$		
$\searrow$			$\geq L$	$= -\infty$

Soit f la fonction associée à u_n

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = L \implies \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = f(L)$$

1.7 Opérations sur les limites

Voir en 3.3

1.8 Comparaisons et limites

Soit $L \in R$, (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites et l_A la limite quand $n \to +\infty$ de la suite A_n

Nom du théorème	Conditions		Résultat	Explication graphique
Par comparaison	$u_n \leq v_n$	$l_u = +\infty$	$\implies l_v = +\infty$	(u_n) emporte (v_n) vers $+\infty$
	$u_n \geq v_n$	$l_u = -\infty$	$\implies l_v = -\infty$	(u_n) emporte (v_n) vers $-\infty$
Théorème des gendarmes	$w_n \geq v_n \geq u_n$	$l_u = l_w = L$	$\implies l_v = L$	(u_n) et (w_n) forcent (v_n) à tendre vers L

2 Probabilités

2.1 Probabilité conditionnelle $P(A|B)$

Probabilité que A soit réalisé **sachant que** B a déjà été réalisé.

$$P(A|B) \text{ ou } P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{si } P(B) \neq 0$$

2.2 Probabilités d'intersections $P(A \cap B)$

Probabilité que A **et** B soit réalisées.

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(B) \cdot P(A|B) \\ &= P(A) \cdot P(B|A) \end{aligned}$$

2.3 Probabilités d'union $P(A \cup B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

2.4 Partitions

Si on a deux évenements ou plus tel que...

- Aucun évenement n'est vide
  $\iff B_i \neq \emptyset \quad \forall i$
- Aucun évenement ne recouvre un autre
  $\iff B_i \cap B_j = \emptyset \quad \forall i, j$
- L'union de chaque partition couvre l'univers entier
  $\iff \bigcup_{i=1}^{j} B_i = \Omega$

2.5 Formule des probabilités totales

Soit B_1, B_2, ..., B_n des évenements formant une partition de Ω

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i)$$

2.6 Indépendance d'évenements

$$\begin{aligned} A \text{ et } B \text{ sont indépendants} &\iff \overline{B} \text{ et } B \text{ forment une partition de } \Omega \\ &\iff \overline{A} \text{ et } A \text{ forment une partition de } \Omega \\ &\iff \overline{A} \text{ et } \overline{B}, A \text{ et } \overline{B} \text{ et } B \text{ et } \overline{A} \text{ sont indépendants} \end{aligned}$$

2.7 Autre vocabulaire

Évenements incompatibles $P(A \cap B) = 0$

Variable aléatoire continue La variable aléatoire peut prendre n'importe quel valeur dans $I := I \subset R$

À partir d'ici, la connaissance des intégrales est requise (voir 11)

2.8 Probabilités à densité

f est une densité de probabilité si:

- $D_f \subset R_+$
- f est continue
- $\displaystyle\int_{D_f} f(x)dx = 1$

$$\begin{aligned}
\text{La loi de } X \text{ admet } f \text{ comme densité de probabilité} \iff\ & P(X \in [a,b]) = \int_a^b f(t)dt \\
\wedge \quad & [a,b] \subseteq D_f \subset R_+ \\
\implies\ & \forall n \in D_f \quad P(X = n) = 0 \\
\implies\ & \text{Dans les conditions } P(\ldots), \quad \geq \iff > \text{ et } \leq \iff < \\
\implies\ & P(X > k) = 1 - P(X < k) \\
\implies\ & P(X \in [a,b]) = P(X < b) - P(X < a) \\
\implies\ & P(X \in [a,b] \mid X \in [c,d]) = \frac{P(X \in [a,b] \cap [c,d])}{P(X \in [c,d])} \\
\implies\ & E(X) = \int_{D_f} tf(t)dt
\end{aligned}$$

2.9 Loi uniforme

$$X \text{ suit la loi uniforme sur } [a,b] \iff \text{La loi de } X \text{ admet } x \mapsto \frac{1}{b-a} \text{ comme densité de probabilité}$$

$$[c,d] \subseteq [a,b] \iff P(X \in [c,d]) = \frac{d-c}{b-a}$$

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

2.10 Loi exponentielles

X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda \iff$ La loi de X admet $x \mapsto \lambda e^{-\lambda x}$ comme densité de probabilité

2.11 Espérance

Si la loi de X admet f comme densité de probabilité et que, pour tout λ dans R^+, $f = x \mapsto \lambda e^{-\lambda x}$

$$E(X) = \lim_{n \to +\infty} \int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$$

2.12 Loi sans vieillissement

$$P(X \geq t + h | X \geq t) = P(X \geq h)$$

2.13 Lois normales

2.13.1 Loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$

$$X \text{ suit la loi } \mathcal{N}(0,1) \iff P(X \in [a,b]) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp -\frac{x^2}{2} dx$$

Propriétés

$$\begin{aligned} E(X) = 0 &\iff \text{centrée} \\ \sigma = 1 &\iff \text{réduite} \\ \iff V = 1 & \end{aligned}$$
.

2.13.2 Probabilité d'intervalle centrée en 0

$$X \sim \mathcal{N}(0,1) \iff \forall \alpha \in]0,1[\quad \exists_{=1} u_\alpha \in R_+^* \quad P(X \in [-u_\alpha, u_\alpha]) = 1 - u_\alpha$$

Deux valeurs remarquables

$$\begin{aligned} u_{0.05} &= 1.96 \\ u_{0.01} &= 2.58 \end{aligned}$$
.

2.13.3 Théorème de Moivre-Laplace

$$\begin{aligned} X_n &\sim \mathcal{B}(n,p) \\ \wedge \quad p &\in [0,1] \\ \wedge \quad Z_n &= \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \\ \implies \lim_{n\to\infty} Z_n &= \mathcal{N}(0,1) \end{aligned}$$

2.13.4 Lois normales $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$$\mu \in R, \quad \sigma \in R_+, \quad Y := \frac{X - \mu}{\sigma}$$

$$\begin{aligned} Y \sim \mathcal{N}(0,1) &\implies X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \\ &\implies E(X) = \mu \\ &\implies V = \sigma^2 \\ &\implies \sigma \text{ (écart type)} = \sigma \end{aligned}$$

3 Limites $\lim$

3.1 Notation

Soit x, C et D des nombres et Ψ un réel, $+\infty$ ou $-\infty$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\Psi} C = D &\iff C \xrightarrow[x \to \Psi]{} D\\ &\iff \text{Limite de } C \text{ quand } x \text{ tends vers } \Psi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{x\to\Psi\\ >}} C = D &\iff C \xrightarrow[x \to \Psi^+]{} D\\ &\iff \text{Limite de } C \text{ en } \Psi \text{ par valeurs supérieures}\\ &\iff \text{Limite de } C \text{ à droite de } \Psi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{x\to\Psi\\ <}} C = D &\iff C \xrightarrow[x \to \Psi^-]{} D\\ &\iff \text{Limite de } C \text{ en } \Psi \text{ par valeurs inférieures}\\ &\iff \text{Limite de } C \text{ à gauche de } \Psi\end{aligned}$$

3.2 Limites d'un quotient à la valeur indéfinie

Soit $f : x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}$ et $r \in R$ tq. $q(r) = 0$

1. Calculer $\lim_{x\to r} p(x)$
2. **Par valeurs supérieures** Calculer $\lim_{x\to r^+} q(x)$: 0^+ ou 0^-

   Par valeurs inférieures Calculer $\lim_{x\to r^-} q(x)$: 0^+ ou 0^-
3. Conclure par quotient: $0^+ \to +$ et $0^- \to -$

3.3 Opérations sur les limites

Les opérations entre deux limites réelles sont comparables aux opérations sur des nombres

FI Forme Indéterminée

$x, \ y$	$x+y$	$x \cdot y$	x/y
$\pm\infty$	Signes $=$ $\pm\infty$ Signes $\neq$ FI	(règle des signes)	FI
R ou $\pm\infty$	$\pm\infty$	$x=0$ FI $x>0$ $\pm\infty$ $x<0$ $\mp\infty$	$y=0$ FI $y=\pm\infty$ 0 $x=\pm\infty$ et $y \in R^*$ $\pm\infty$

3.4 Asymptotes

Soit $L \in R$, f une fonction, Γ la courbe d'équation $y = f(x)$ et Ψ un nombre ou symbole

$$f(x) \xrightarrow[x \to \Psi]{} L \iff \Gamma \text{ admet en } \Psi \text{ une asymptote (horizontale) d'équation } y = L$$

$$\begin{cases} f(x) \xrightarrow[x \to L^+]{} \pm\infty \\ f(x) \xrightarrow[x \to L^-]{} \pm\infty \end{cases} \iff \Gamma \text{ admet en } L \text{ une asymptote (verticale) d'équation } x = L$$

3.5 Simplifications de limites

3.5.1 Polynômes

Pour les limites en $+\infty$ ou en $-\infty$, on peut simplifier la limite d'un polynôme à la limite du terme de plus haut degré:

$$\lim_{x \to +\infty} 2x^3 - 4x + 1 = \lim_{x \to +\infty} 2x^3$$

Ça marche aussi avec les fractions:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{4x^9 + x^3 - 2}{5x^3 - 8x^{18} + 420} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4x^9}{-8x^{18}}$$

3.6 Fonctions composées

Soit a, b et c $\in R \cup \{-\infty; +\infty\}$, f et g des fonctions

$$\begin{cases} f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b \\ g(x) \xrightarrow[x \to b]{} c \end{cases} \implies (f \circ g)(x) \xrightarrow[x \to a]{} c$$

4 Continuité des fonctions

4.1 Définition

Une fonction est continue quand "on peut tracer sa courbe sans lever le stylo". Plus rigoureusement, la fonction f est continue sur l'intervalle I si, pour tout $a \in I$, $f(a) \xrightarrow[x \to a]{} f(a)$.

4.2 Continuité de fonctions usuelles

Polynôme	R
$\sqrt{x}$	R^+
Rationnelle	Ensemble de définition

De plus, n'importe quelle fonction créée par $+$, $\times$, $\circ$ ou $\div$ à partir de fonctions continues sont continues

4.3 Théorèmes utilisant la continuité

4.3.1 Valeurs intermédiaires

Soit a et b des réels, f une fonction continue sur $[a; b]$.

$$\forall k \in [f(a); f(b)], \quad f(x) = k \text{ admet au moins une solution dans } [a; b]$$

4.3.2 Bijection

Soit I une intervalle, a et b des réels dans I et f une fonction définie sur I ou plus grand

$$\begin{cases} f \text{ est continue sur } I \\ f \text{ est strictement monotone sur } I \quad (1) \\ k \in [f(a); f(b)] \quad (2) \end{cases}$$
$$\implies f(x) = k \text{ admet une unique solution dans } [a; b]$$

(1) quand elle ne l'est pas, on étudie séparémment chaque intervalle où la fonction est strictement monotone
(2) si a ou $b = \pm\infty$, on calcule la limite pour l'intervalle image:
Montrer que $f(x) = k$ n'admet qu'une seule solution dans R

$$k \in \left] \lim_{x \to -\infty} f(x); \lim_{x \to +\infty} f(x) \right[$$

Attention: pour montrer que $f(x) = k$ n'a pas de solutions on n'utilise pas la bijection mais le tableau de variations

5 Nombres complexes C

5.1 Définition

$$i^2 := -1, \quad a, b \in R, \quad z \in C$$
$$z = a + ib$$

Ensemble des imaginaires purs: $iR := C \setminus R$

5.2 Partie imaginaire Im et réelle Re

5.2.1 Définition

- $\mathrm{Re}\,(a + ib) := a$
- $\mathrm{Im}\,(a + ib) := b$

5.2.2 Propriétés

- $\mathrm{Re}\,z = 0 \iff z \in R$
- $\mathrm{Im}\,z = 0 \iff z \in iR$

5.3 Conjugé $\overline{z}$

5.3.1 Définition

$$\overline{z} := \mathrm{Re}\,z - i\mathrm{Im}\,z$$

5.3.2 Identités

$\diamond$ représente les opérations $+$, $\times$ et $\div$

- $z \cdot \overline{z} = |z|^2 = (\mathrm{Im}\ z)^2 + (\mathrm{Re}\ z)^2$
- $\overline{z \diamond w} = \overline{z} \diamond \overline{w}$
- $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$
- $\overline{\overline{z}} = z$
- $\overline{z} = z \iff z \in R$

5.4 Affixe Aff

L'affixe est un nombre complexe représenté par un point ou un vecteur dans le plan:

$$\mathrm{Aff}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a + ib$$

Réciproquement, l'image de $a + ib$ est $(a; b)$

5.4.1 Propriétés

- $\mathrm{Aff}(\overrightarrow{AB}) = \mathrm{Aff}(B) - \mathrm{Aff}(A)$

5.5 Racines des polynômes de second degré $az^2 + bz + c$

$$az^2 + bz + c = 0 \quad a, b, c \in R, \quad \Delta := b^2 - 4ac$$

$$\begin{cases} \Delta < 0 & \Longrightarrow \dfrac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a} \\ \Delta = 0 & \Longrightarrow \dfrac{-b}{2a} \\ \Delta > 0 & \Longrightarrow \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

5.6 Coordonnées polaires avec z

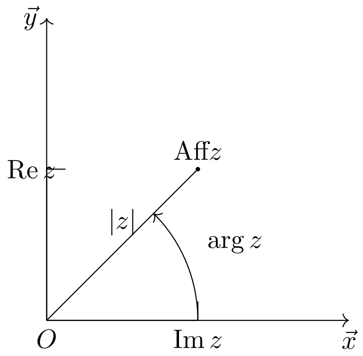

Figure 1: Représentation géométrique de l'affixe de z et de ses propriétés

5.6.1 Module $|z|$

$$|z| = \sqrt{\operatorname{Re}^2 z + \operatorname{Im}^2 z}$$

Propriétés

$\diamond$ représente les opérations $\times$ et $\div$

$$|z^n| = |z|^n$$

$$|z \diamond z'| = |z| \diamond |z'|$$

5.6.2 Argument arg

$$\forall z \in C^*$$

$$\begin{aligned} \arg z &:= \left(\vec{x};\ \overrightarrow{O\mathrm{Img}\, z}\right) \\ &= \begin{cases} \cos(\arg z) & = \dfrac{\operatorname{Re} z}{|z|} \\ \sin(\arg z) & = \dfrac{\operatorname{Im} z}{|z|} \end{cases} \end{aligned}$$

Propriétés

On note $z_\diamond$ l'affixe du point ou vecteur $\diamond$

- $(\vec{w}, \vec{w}') = \arg \dfrac{z_{w'}}{z_w}$

- $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg \frac{D-C}{B-A}$

Propriétés de produit, puissance, quotient et inverse identiques à ln*, voir 9.2*

5.7 Formes

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z & \quad \text{(algébrique)} \\ |z| \, (cos(\arg z) + i \sin(\arg z)) & \quad \text{(trigonométrique)} \\ |z| e^{i \arg z} & \quad \text{(exponentielle)} \end{aligned}$$

Notations usuelles: $r := |z|$, $\theta := \arg z$, $x := \operatorname{Re} z$, $y := \operatorname{Im} z$

5.7.1 Propriétés de la forme exponentielle

$$e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$$

Les autres propriétés découlent de celles de l'exponentielle, voir 7.3

5.8 Inégalité triangulaire

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|$$

6 Dérivées

6.1 Opération sur des fonctions

Soit u et v des fonctions.

$$
\begin{aligned}
(uv)' &= u'v + v'u \\
\left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u'v - v'u}{v^2} \\
(u^n)' &= nu'u^{n-1} \quad \forall n \in N \cup \{0.5; -1\} \\
(u \circ v)' &= u'(v' \circ u) \\
\sin' &= \cos \\
\cos' &= -\sin
\end{aligned}
$$

7 Fonction exponentielle exp

7.1 Notation

$$e^x := \exp x$$

7.2 Caractéristiques

Soit $x \in R$ et u une fonction définie sur R

Dérivée $(e^x)' = e^x$
$(e^u)' = u'e^u$

Réciproque $\ln(e^x) = x$

Signe $e^x > 0$

Variations strictement croissante sur R

Limites $e^x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$
$e^x \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$

7.3 Limites remarquables

lim	$x \to$	$=$
$\frac{e^x - 1}{x}$	0	1
Par croissance comparée ↓		
xe^x	$-\infty$	0
$\frac{e^x}{x}$	$+\infty$	$+\infty$

7.4 Propriétés

$$e^a \gtreqless e^b \iff a \gtreqless b$$

$e^{a \diamond b}$	$e^a \diamond e^b$
$+$	$\times$
$-$	$\div$
$(e^a)^n$	e^{an}

8 Géométrie dans l'espace

8.1 Intersections

8.1.1 Droite-droite, plan-plan

Soit a et b des droites et P et Q des plans

	Coplanaires			Non-coplanaires
	Parallèles		Sécantes	
	Strictement	Confondues		
$a \cap b$	$\emptyset$	a et b	$\{\text{point}\}$	$\emptyset$
$P \cap Q$	$\emptyset$	P et Q	droite	$\emptyset$

8.1.2 Droite-plan

	Parallèles		Sécants
	Strictement	$a \subset P$	
$a \cap P$	$\emptyset$	droite	$\{\text{point}\}$

8.2 Section d'un cube

2 points dans la même face
Relier directement

$[AB]$ sur une face, C sur face opposée
Tracer la parallèle à $[AB]$ passant par C

$[AB]$ sur une face E, C sur face adjaçente
Prolonger une arrête et (AB) jusqu'à intersection en D
Tracer (DC). La partie du segment qui est sur la face E est la section.

8.3 Orthogonalité $\perp$

$$d \underset{\text{orth.}}{\perp} d' \iff \gamma \underset{\text{perp.}}{\perp} \gamma' \quad \exists \gamma \parallel d, \gamma' \parallel d'$$

8.4 Plan $\perp$ droite

$$\begin{aligned} d \perp P &\iff d \perp \gamma \wedge d \perp \gamma' \quad \forall \gamma \cap \gamma' = \text{point} \\ &\implies \gamma \perp d \quad \forall \gamma \subset P \end{aligned}$$

8.5 Plan médiateur

$$\begin{aligned} P \,\text{med}\, [AB] &\iff P \perp (AB) \wedge I \in P \quad \forall I \,\text{mil}\, [AB] \\ &\iff P = \{C \mid CA = CB\} \end{aligned}$$

8.6 Propriétés

Soit P, Γ, Q, P' des plans. Soit d, d', d_1, droite, d'_1, γ, Δ des droites. Soit point un point.

$$\begin{aligned} d \parallel d' &\implies P \perp d \quad \forall P \perp d' \\ &\impliedby d \parallel \gamma \wedge d' \parallel \gamma \\ &\impliedby P \cap P' = d' \wedge d \parallel P \wedge d \parallel P' \quad \text{(doute)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P \parallel P' &\iff P \perp d \wedge P' \perp d \\ &\iff P \parallel \Delta \wedge P' \parallel \Delta \\ &\iff d_1 \parallel d'_1 \wedge d \parallel d' \quad \forall d \cap d' = \text{point}, d_1 \cap d'_1 = \text{point} \quad \text{(il faut que } P \text{ soit présent)} \\ &\implies \Gamma \cap P' = \gamma \wedge \Gamma \cap P = \gamma' \wedge \gamma \parallel \gamma' \quad \forall \Gamma \cap P = \text{droite} \end{aligned}$$

$$\Delta \parallel d \wedge \Delta \parallel d' \impliedby d \parallel d' \wedge d \subset P \wedge d' \subset P' \wedge P \cap P' = \Delta$$

$$\Delta \parallel P \iff \Delta \parallel d \quad \forall d \subset P$$

$$P \parallel Q \wedge \Gamma \cap P = \gamma \implies \Gamma \cap Q = \gamma' \wedge \gamma \parallel \gamma'$$

8.7 Coordonnées

Un triplet $(x, y, z) \in R^3$

Les propriétés de la géométrie planaire (milieu, colinéarité et vecteurs) se traduisent trivialement

8.8 Vecteurs dans l'espace

8.8.1 Propriétés identiques aux vecteurs bidimensionnels

- Relation de Chasles
- Colinéarité

8.8.2 Propriétés

- A, B, C non-alignés. $\forall D \quad \overrightarrow{AD}$ coplanaire $\overrightarrow{AB}$ coplanaire $\overrightarrow{AC} \iff D \in (ABC)$
- $\exists x, y \in R \quad \overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} \implies D \in (ABC)$
- $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ coplanaires $\iff \exists a, b, c \in R^* : a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$
- $\vec{u}, \vec{v} \in P$ non colinéaires, $\vec{n} \neq \vec{0}$. $\vec{n}$ normal à $P \iff \vec{n} \perp \vec{v} \wedge \vec{n} \perp \vec{u}$

8.8.3 Caractérisation vectorielle d'objets

Droite A point, $\vec{u} \neq \vec{0}$, $x \in R$, d la droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$

$$M = \{B | \overrightarrow{AB} = x\vec{u}\} \implies M \text{ est la droite } d$$

Plan A point, $\vec{u}$ ~~colinéaire~~ $\vec{v}$, M ensemble de points, $x, y \in R$, $\overrightarrow{AB} := \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} := \vec{v}$

$$M = \{B | \overrightarrow{AB} = x\vec{u} + y\vec{v}\} \implies M \text{ est un plan } (ABC)$$

C'est l'ensemble de tout les points dans le repère $(A, \vec{u}, \vec{v})$

8.9 Équations paramétriques

8.9.1 D'une droite

Soit...

$$\begin{aligned} A &:= (x_A; y_A; z_A) \\ \vec{u} &:= (x_u; y_u; z_u) \\ M &:= (x; y; z) \\ D &:= \text{droite passant par } A \text{ de vecteur directeur } \vec{u} \end{aligned}$$

On a:

$$M \in D \iff \begin{cases} x = x_u t + x_A \\ y = y_u t + y_A \\ z = z_u t + z_A \end{cases}$$

8.9.2 D'un plan

Soit...

$$\begin{aligned} A &:= (x_A; y_A; z_A) \\ \vec{u} &:= (x_u; y_u; z_u) \\ \vec{w} &:= (x_w; y_w; z_w) \\ M &:= (x; y; z) \\ P &:= \text{plan passant par } A \text{ de vecteur directeurs } \vec{u} \text{ et } \vec{w} \end{aligned}$$

On a:

$$M \in P \iff \begin{cases} x = x_u t + x_w t' + x_A \\ y = y_u t + y_w t' + y_A \\ z = z_u t + z_w t' + z_A \end{cases}$$

8.10 Produit scalaire

8.10.1 Propriétés

- $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$
- $\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{v}$
- $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- $\vec{v} \perp \vec{u} \iff \vec{v} \cdot \vec{u} = 0$

8.11 Équations cartésienne d'un plan

Soit $a, b, c \in R$, P un plan, $\vec{n} := (a, b, c)$ le vecteur normal à P et $A := (x, y, z)$

$$A \in P \iff ax + by + cz + d = 0$$

9 Le logarithme népérien ln

Aussi appelé "logarithme naturel" ou "logarithme base e"

9.1 Caractéristiques

Notation $\ln x$

Réciproque exp

Ensemble $R_+^* \to R$

Limites $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$
$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

Dérivée d'une variable $\frac{1}{x}$

Dérivée d'une fonction $u' \ln u$

Variations Croissante sur R_+^*

Continuité Continue sur R_+^*

Valeurs remarquables $\ln 1 = 0$

9.2 Limites remarquables

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$
$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$$

9.3 Propriétés

$\ln(a \diamond b)$	$\ln a \diamond \ln b$
$\times$	$+$
$\div$	$-$
a^n	$n \ln a$

10 Primitives F

10.1 Définition

$\forall x \in R$

$$F'(x) = f(x)$$

10.2 Propriétés

- $\forall C \in U \quad x \mapsto F(x) + C$ est une primitive de f
- $F + G$ primitive de $f + g$
- $\forall k \in R \quad kF$ primitive de kf

10.3 Primitives remarquables

f	F	$\in I$ (R par défaut)
k	kx	
x	$\frac{1}{2}x^2$	
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$R - \{1\}$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln(\text{sgn}(u(x))u(x))$	

11 Intégrales $\int$

11.1 Notation

Soit $A_f \in R$ l'aire sous la courbe de f de $x = a$ à $x = b$ par rapport à l'axe des abcisses

$$\int_a^b f(x)dx = A_f$$

$$\int_{\text{borne inf.}}^{\text{borne sup.}} \text{expression} \quad d\text{var. d'intégration}$$

11.2 Unité d'aires ua

$\forall x \in [a;b]\ f(x) \geq 0 \land b \geq a \iff A_f$ est exprimée en ua.

11.2.1 Définition

$$1ua = ||\vec{i}|| \cdot ||\vec{j}||$$

11.3 Calcul

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= [F(x)]_a^b \\ &= F(b) - F(a)\end{aligned}$$

11.4 Propriétés

Pour alléger les notations: $\Finv = f(x)dx$, $\Game = g(x)dx$ et $\int = \int_a^b$

- $\int_a^a \Finv = 0$
- $\int_a^b \Finv = -\int_b^a \Finv$
- $\int_a^c \Finv = \int_a^b \Finv + \int_b^c \Finv$ (Relation de Chasles)
- $\int k\Finv = k \int \Finv$
- $\int (f(x) + g(x))dx = \int \Finv + \int \Game$
- $\int \Finv \geq 0 \implies f(x) \geq 0$
- $f(x) \gtreqless g(x) \implies \int \Finv \gtreqless \int \Game$

11.5 Valeur moyenne de f sur $[a;b]$

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

12 Échantillonage

12.1 Fréquence de caractère X_n

Soit le caractère $\mathcal{C}$ dont la proportion de présence dans une population est p. X_n associe à la taille d'échantillon n le nombre de caractères présents dans l'échantillon.

$$X_n \sim \mathcal{B}(n,p)$$

12.2 Fréquence de caractère dans échantillon F_n

$$F_n = \frac{X_n}{n}$$

12.3 Intervalle de fluctuation I_n

Soit
Z la loi normale centrée réduite,
$\alpha \in]0,1[$,
$u_\alpha \in R$ tq. $P(Z \in [-u_\alpha, u_\alpha]) = 1 - \alpha$,
$q := 1 - p$

$$I_n = \left[p - u_a \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}}, p + u_a \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}}\right]$$
$$\lim_{n\to\infty} P(F_n \in I_n) = 1 - \alpha$$

.

12.3.1 Interprétation

Pour un n assez grand, $F_n \in I_n$ avec une probabilité d'approximativement $1 - \alpha$. On admet que

$$P(F_n \in I_n) \approx 1 - \alpha$$

Quand:

- $n \geq 30$
- $np \geq 5$
- $nq \geq 5$

Si au moins une des conditions n'est *pas* remplie, il faudra utiliser une intervalle de fluctuation

12.4 Trouver p avec f et n

$$\exists n_0 : n \geq n_0 \implies P\left(p \in \left[F_n - \frac{1}{\sqrt{n}}, F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]\right) \geq 0.95$$

13 Trigonométrie

13.1 Valeurs remarquables

Table 1: Valeurs remarquables de $\sin, \cos, \tan$ et cotan

x	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\operatorname{cotan} x$
0	0	1	0	
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0		0

13.2 Identités

$$
\begin{aligned}
\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \\
\cos(a \pm b) &= \cos a \cos b \mp \sin a \sin b \\
\sin(a \pm b) &= \cos a \sin b \pm \cos b \sin a \\
.
\end{aligned}
$$