Exercices: Calculus

Ewen Le Bihan

2020-05-15

Tout les exercices ici proviennent du livre "Calculus" disponible sur amazon

1

Montrons par récurrence:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on note la propriété $\mathcal{P}_n$:

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Initialisation. Montrons que, pour $n = 1$, $\mathcal{P}_n$ est vraie:

$$\left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2 = 1 = 1^2$$

$\mathcal{P}_n$ est donc vraie.

Hérédité. Soit n dans $\mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}_n$ est vraie. On a donc:

$$\begin{aligned}
1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 \\
&= \frac{(n(n+1))^2 + 4(n+1)^3}{4} \\
&= \frac{n^2(n^2+2n+1) + 4(n^3+3n^2+3n+1)}{4} \\
&= \frac{n^4 + 2n^3 + n^2 + 4n^3 + 12n^2 + 12n + 4}{4} \\
&= \frac{n^4 + 6n^3 + 13n^2 + 12n + 4}{4}
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2 &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} \\
&= \frac{n^4 + 6n^3 + 3n^2 + 12n + 4}{4}
\end{aligned}$$

En fin de compte, on obtient $\mathcal{P}_{n+1}$:

$$\begin{aligned}1^3+2^3+\cdots+n^3+(n+1)^3 &= \frac{n^4+6n^3+3n^2+12n+4}{4}\\ &= \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2\end{aligned}$$

$\mathcal{P}_n$ est donc initialisée et héréditaire, donc $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ $\square$

2 *

Montrons par récurrence

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad |\sin(nx)| \leqslant n|\sin x|$$

Soit, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$ la propriété suivante:

$$|\sin(nx)| \leqslant n|\sin x|$$

Initialisation. Pour $n=0$, montrons que $\mathcal{P}_n$ est vraie. On a, pour tout x dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}&|\sin(0x)| = 0 \wedge 0|\sin x| = 0\\ \implies &|\sin(0x)| \leqslant 0|\sin x|\end{aligned}$$

$\mathcal{P}_0$ est donc vraie.

Hérédité. Prouvons que, pour tout entier naturel n et tout réel x, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

$$\begin{aligned}\sin((n+1)x) &= \sin(nx+x)\\ &= \sin(nx)\cos x + \cos(nx)\sin x\\ \iff |\sin((n+1)x)| &= |\sin(nx)\cos x + \cos(nx)\sin x|\\ &\leqslant |\sin(nx)||\cos x| + |\cos(nx)||\sin x|\end{aligned}$$

Remarquons que $\cos x \leqslant 1 \implies |\cos x| \in [0,1]$

$$\begin{aligned}|\sin((n+1)x)| &\leqslant |\sin(nx)| + |\sin x|\\ &\leqslant n|\sin x| + |\sin x|\\ &\leqslant (n+1)|\sin x|\end{aligned}$$

3

$$\begin{aligned}u_1 &= u_0^2 = u_0^2\\ u_2 &= (u_0^2)^2 = u_0^4\\ u_3 &= ((u_0^2)^2)^2 = u_0^8\\ u_4 &= (((u_0^2)^2)^2)^2 = u_0^{16}\end{aligned}$$

On conjecture que $u_n = u_0^{2^n}$. Soit, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$ la propriété $u_n = u_0^{2^n}$.

Initialisation. Avec $n = 0$:

$$u_0^{2^0} = u_0^1 = u_0$$

$\mathcal{P}_0$ est donc validée.

Hérédité. Admettons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$ est vraie. On cherche à montrer que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est également.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= (u_0^{2^n})^2 \\ &= u_0^{2^n \cdot 2} \\ &= u_0^{2^{n+1}} \end{aligned}$$

$\mathcal{P}_{n+1}$ est donc validée, $\mathcal{P}_n$ est initialisée et héréditaire donc vraie, ce qui valide également la conjecture, autrement dit: $u_n = u_n^{2^{n+1}}$ $\square$