February 25, 2020

Condensé de la terminale
Mathématiques

Ewen Le Bihan
TS3

Notations non vues en cours

$:=$	Égal par définition
$\lceil x \rceil$	Arrondir x à l'entier supérieur. ($\lceil 5.1 \rceil = 6$)
1.5	Séparateur ,
$x \cdot y$	Multiplication $\times$
$\nearrow$	Croissant
$\searrow$	Décroissant
$a \gtreqless b$	Revient à écrire $a > b$, $a = b$ et $a > b$
$\wedge$	"et"
$\operatorname{Img} z$	Point d'affixe z
$\diamond$	Caractère utilisé pour représenter plusieurs opérations

Contents

0 Outils

0.1 Composition de fonction $f \circ g$

Soit f et g des fonctions respectivement définies sur I et J

$$(f \circ g)(x) \iff f(g(x))$$

Attention: il faut que x soit défini dans I et que $g(x)$ soit défini dans J

Plus généralement, soit Θ un ensemble de fonctions

$$\left(\bigcirc_{i=0}^{j} \Theta_i\right)(x) = \Theta_0(\Theta_1(\Theta_2(\Theta_3 \ldots (x \ldots)$$

0.2 Équations de cercle $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$

Soit R le rayon du cercle, et $O(x_0; y_0)$ le centre du cercle
Un cercle dans le plan peut être décrit par l'équation suivante:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

0.3 Opérations avec des puissances

$$\begin{aligned}
(x^a)^b &= x^{ab} \\
x^a x^b &= x^{a+b} \\
x^{-a} &= \frac{1}{x^a} \\
x^{\frac{1}{a}} &= \sqrt[a]{x} \\
x^0 &= 1
\end{aligned}$$

0.4 Diverses théorèmes

0.4.1 Application de fonctions aux inéquations

Soit I une intervalle, f une fonction définie et croissante sur I, x et y deux nombres dans I

$$\begin{aligned}
& x \gtreqless y \\
\iff & f(x) \gtreqless f(y)
\end{aligned}$$

1 Suites numériques

1.1 Définition fonctionnelle

Soit f une fonction:

$$u_n = f(n)$$

1.2 Définition par récurrence

Soit f une fonction

$$u_n = \begin{cases} u_0 = \text{cste} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1.3 Suite arithmétique

Avec r la raison de la suite

Définition fonctionnelle $u_n = u_0 + r \cdot n$

Définition par récurrence $u_n = \begin{cases} u_0 = \text{cste} \\ u_{n+1} = u_n + r \end{cases}$

Somme des termes de i à f $\displaystyle\sum_{i=i}^{j} u_i = (j - i + 1) \cdot \frac{u_j + u_i}{2}$

1.4 Suite géométrique

Avec q la raison de la suite

Définition fonctionnelle $u_n = u_0 \cdot q^n$

Définition par récurrence $u_n = \begin{cases} u_0 = \text{cste} \\ u_{n+1} = u_n \cdot q \end{cases}$

Somme des termes de i à f $\displaystyle\sum_{i=i}^{j} u_i = u_j \cdot \frac{1 - q^{j-i+1}}{1 - q}$

1.5 Limites

Suite convergeante vers L $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$

Suite divergeante $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \neq L$

<table>
<tr><th>$p \in \{0.5\} \cup \mathbb{N}$
$q \in \mathbb{R}$</th><th>$-\infty$</th><th>-1</th><th>0</th><th>1</th><th>$+\infty$</th></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{n \to +\infty} q^n$</td><td colspan="2">?</td><td>0</td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{n \to +\infty} n^p$</td><td colspan="2">0</td><td>1</td><td colspan="2">$+\infty$</td></tr>
</table>

Limites de type cste^n ou n^{cste}

1.6 Majoration et minoration

Soit (u_n) une suite définie sur les rangs dans I et L un réel

Suite majorée $\forall n \in I \;\; \exists M \quad u_n \leq M$

Suite minorée $\forall n \in I \;\; \exists m \quad u_n \geq m$

Suite bornée Suite majorée *et* minorée

$$\lim_{n \to +\infty} u_n \ldots$$

	Majorée (par L)		Minorée (par L)	
	Oui	Non	Oui	Non
$\nearrow$	$\leq L$	$= +\infty$		
$\searrow$			$\geq L$	$= -\infty$

Soit f la fonction associée à u_n

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = L \implies \lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = f(L)$$

1.7 Opérations sur les limites

Voir en 3.3

1.8 Comparaisons et limites

Soit $L \in \mathbb{R}$, (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites et l_A la limite quand $n \to +\infty$ de la suite A_n

Nom du théorème	Conditions		Résultat	Explication graphique
Par comparaison	$u_n \leq v_n$	$l_u = +\infty$	$\implies l_v = +\infty$	(u_n) emporte (v_n) vers $+\infty$
	$u_n \geq v_n$	$l_u = -\infty$	$\implies l_v = -\infty$	(u_n) emporte (v_n) vers $-\infty$
Théorème des gendarmes	$w_n \geq v_n \geq u_n$	$l_u = l_w = L$	$\implies l_v = L$	(u_n) et (w_n) forcent (v_n) à tendre vers L

2 Probabilités

2.1 Probabilité conditionnelle $P(A|B)$

Probabilité que A soit réalisé **sachant que** B a déjà été réalisé.

$$P(A|B) \text{ ou } P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{si } P(B) \neq 0$$

2.2 Probabilités d'intersections $P(A \cap B)$

Probabilité que A **et** B soit réalisées.

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(B) \cdot P(A|B) \\ &= P(A) \cdot P(B|A) \end{aligned}$$

2.3 Probabilités d'union $P(A \cup B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

2.4 Partitions

Si on a deux évenements ou plus tel que...

- Aucun évenement n'est vide
  $\iff B_i \neq \emptyset \quad \forall i$
- Aucun évenement ne recouvre un autre
  $\iff B_i \cap B_j = \emptyset \quad \forall i, j$
- L'union de chaque partition couvre l'univers entier
  $\iff \bigcup_{i=1}^{j} B_i = \Omega$

2.5 Formule des probabilités totales

Soit B_1, B_2, ..., B_n des évenements formant une partition de Ω

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i)$$

2.6 Indépendance d'évenements

$$\begin{aligned} A \text{ et } B \text{ sont indépendants} &\iff \overline{B} \text{ et } B \text{ forment une partition de } \Omega \\ &\iff \overline{A} \text{ et } A \text{ forment une partition de } \Omega \\ &\iff \overline{A} \text{ et } \overline{B}, A \text{ et } \overline{B} \text{ et } B \text{ et } \overline{A} \text{ sont indépendants} \end{aligned}$$

2.7 Loi de Bernouilli

Épreuve de Bernouilli

2.8 Autre vocabulaire

Évenements incompatibles $P(A \cap B) = 0$

3 Limites lim

3.1 Notation

Soit x, C et D des nombres et Ψ un réel, $+\infty$ ou $-\infty$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\Psi} C = D &\iff C \xrightarrow[x\,\to\,\Psi]{} D \\ &\iff \text{Limite de } C \text{ quand } x \text{ tends vers } \Psi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{x\to\Psi\\>}} C = D &\iff C \xrightarrow[x\,\to\,\Psi^+]{} D \\ &\iff \text{Limite de } C \text{ en } \Psi \text{ par valeurs supérieures} \\ &\iff \text{Limite de } C \text{ à droite de } \Psi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{x\to\Psi\\<}} C = D &\iff C \xrightarrow[x\,\to\,\Psi^-]{} D \\ &\iff \text{Limite de } C \text{ en } \Psi \text{ par valeurs inférieures} \\ &\iff \text{Limite de } C \text{ à gauche de } \Psi\end{aligned}$$

3.2 Limites d'un quotient à la valeur indéfinie

Soit $f : x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}$ et $r \in \mathbb{R}$ tq. $q(r) = 0$

1. Calculer $\lim\limits_{x\to r} p(x)$
2. **Par valeurs supérieures** Calculer $\lim\limits_{x\to r^+} q(x)$: 0^+ ou 0^-

   Par valeurs inférieures Calculer $\lim\limits_{x\to r^-} q(x)$: 0^+ ou 0^-
3. Conclure par quotient: $0^+ \to +$ et $0^- \to -$

3.3 Opérations sur les limites

Les opérations entre deux limites réelles sont comparables aux opérations sur des nombres

FI Forme Indéterminée

<table>
<tr><th>$x,\ \ y$</th><th>$x+y$</th><th>$x \cdot y$</th><th>x/y</th></tr>
<tr><td>$\pm\infty$</td><td>Signes $=$ $\pm\infty$
Signes $\neq$ FI</td><td>(règle des signes)</td><td>FI</td></tr>
<tr><td>$\mathbb{R}$ ou $\pm\infty$</td><td>$\pm\infty$</td><td>$x = 0$ FI
$x > 0$ $\pm\infty$
$x < 0$ $\mp\infty$</td><td>$y = 0$ FI
$y = \pm\infty$ 0
$x = \pm\infty$ et $y \in \mathbb{R}^*$ $\pm\infty$</td></tr>
</table>

3.4 Asymptotes

Soit $L \in \mathbb{R}$, f une fonction, Γ la courbe d'équation $y = f(x)$ et Ψ un nombre ou symbole

$$f(x) \xrightarrow[x \to \Psi]{} L \iff \Gamma \text{ admet en } \Psi \text{ une asymptote (horizontale) d'équation } y = L$$

$$\begin{cases} f(x) \xrightarrow[x \to L^+]{} \pm\infty \\ f(x) \xrightarrow[x \to L^-]{} \pm\infty \end{cases} \iff \Gamma \text{ admet en } L \text{ une asymptote (verticale) d'équation } x = L$$

3.5 Simplifications de limites

3.5.1 Polynômes

Pour les limites en $+\infty$ ou en $-\infty$, on peut simplifier la limite d'un polynôme à la limite du terme de plus haut degré:

$$\lim_{x \to +\infty} 2x^3 - 4x + 1 = \lim_{x \to +\infty} 2x^3$$

Ça marche aussi avec les fractions:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{4x^9 + x^3 - 2}{5x^3 - 8x^{18} + 420} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4x^9}{-8x^{18}}$$

3.6 Fonctions composées

Soit a, b $\in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$, f et g des fonctions

$$\begin{cases} f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b \\ g(x) \xrightarrow[x \to b]{} c \end{cases} \implies (f \circ g)(x) \xrightarrow[x \to a]{} c$$

4 Continuité des fonctions

4.1 Définition

Une fonction est continue quand "on peut tracer sa courbe sans lever le stylo". Plus rigoureusement, la fonction f est continue sur l'intervalle I si, pour tout $a \in I$, $f(a) \xrightarrow[x \to a]{} f(a)$.

4.2 Continuité de fonctions usuelles

Polynôme	$\mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+$
Rationnelle	Ensemble de définition

De plus, n'importe quelle fonction créée par $+$, $\times$, $\circ$ ou $\div$ à partir de fonctions continues sont continues

4.3 Théorèmes utilisant la continuité

4.3.1 Valeurs intermédiaires

Soit a et b des réels, f une fonction continue sur $[a;b]$.

$$\forall k \in [f(a);f(b)], \quad f(x) = k \text{ admet au moins une solution dans } [a;b]$$

4.3.2 Bijection

Soit I une intervalle, a et b des réels dans I et f une fonction définie sur I ou plus grand

$$\begin{cases} f \text{ est continue sur } I \\ f \text{ est strictement monotone sur } I \quad (1) \\ k \in [f(a);f(b)] \quad (2) \end{cases}$$
$$\Longrightarrow f(x) = k \text{ admet une unique solution dans } [a;b]$$

(1) quand elle ne l'est pas, on étudie séparémment chaque intervalle où la fonction est strictement monotone
(2) si a ou $b = \pm\infty$, on calcule la limite pour l'intervalle image:
Montrer que $f(x) = k$ n'admet qu'une seule solution dans $\mathbb{R}$

$$k \in \left] \lim_{x \to -\infty} f(x); \lim_{x \to +\infty} f(x) \right[$$

Attention: pour montrer que $f(x) = k$ n'a pas de solutions on n'utilise pas la bijection mais le tableau de variations

5 Nombres complexes $\mathbb{C}$

5.1 Définition

$$i^2 := -1, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad z \in \mathbb{C}$$
$$z = a + ib$$

Ensemble des imaginaires purs: $i\mathbb{R} := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

5.2 Partie imaginaire Im et réelle Re

5.2.1 Définition

- $\operatorname{Re}(a + ib) := a$
- $\operatorname{Im}(a + ib) := b$

5.2.2 Propriétés

- $\operatorname{Re} z = 0 \iff z \in \mathbb{R}$
- $\operatorname{Im} z = 0 \iff z \in i\mathbb{R}$

5.3 Conjugé $\overline{z}$

5.3.1 Définition

$$\overline{z} := \operatorname{Re} z - i \operatorname{Im} z$$

5.3.2 Identités

$\diamond$ représente les opérations $+$, $\times$ et $\div$

- $z \cdot \overline{z} = (\operatorname{Im}\ z)^2 + (\operatorname{Re}\ z)^2$
- $\overline{z \diamond w} = \overline{z} \diamond \overline{w}$
- $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$
- $\overline{\overline{z}} = z$
- $\overline{z} = z \iff z \in \mathbb{R}$

5.4 Affixe Aff

L'affixe est un nombre complexe représenté par un point ou un vecteur dans le plan:

$$\operatorname{Aff}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a + ib$$

Réciproquement, l'image de $a + ib$ est $(a; b)$

5.4.1 Propriétés

- $\operatorname{Aff}(\overrightarrow{AB}) = \operatorname{Aff}(B) - \operatorname{Aff}(A)$

5.5 Racines des polynômes de second degré $az^2 + bz + c$

$$az^2 + bz + c = 0 \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad \Delta := b^2 - 4ac$$

$$\begin{cases} \Delta < 0 & \implies \dfrac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a} \\ \Delta = 0 & \implies \dfrac{-b}{2a} \\ \Delta > 0 & \implies \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

5.6 Coordonnées polaires avec z

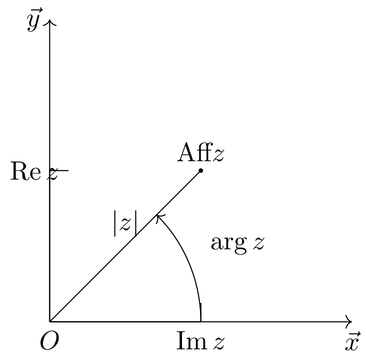

Figure 1: Représentation géométrique de l'affixe de z et de ses propriétés

5.6.1 Module $|z|$

$$|z| = \sqrt{\operatorname{Re}^2 z + \operatorname{Im}^2 z}$$

Propriétés

$\diamond$ représente les opérations $\times$ et $\div$

$$|z^n| = |z|^n$$
$$|z \diamond z'| = |z| \diamond |z'|$$

5.6.2 Argument arg

$$\forall z \in \mathbb{C}^*$$

$$\begin{aligned} \arg z &:= \left(\overrightarrow{O\mathrm{Img}\,(\operatorname{Re} z)};\ \overrightarrow{O\mathrm{Img}\, z}\right) \\ &= \begin{cases} \cos(\arg z) & = \dfrac{\operatorname{Re} z}{|z|} \\ \sin(\arg z) & = \dfrac{\operatorname{Im} z}{|z|} \end{cases} \end{aligned}$$

Propriétés

Similaire à ln, *voir 9.2*

5.7 Formes

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z & \quad \text{(algébrique)} \\ |z| \left(cos(\arg z) + i \sin(\arg z) \right) & \quad \text{(trigonométrique)} \\ |z| e^{i \arg z} & \quad \text{(exponentielle)} \end{aligned}$$

Notations usuelles: $r := |z|$, $\theta := \arg z$, $x := \operatorname{Re} z$, $y := \operatorname{Im} z$

5.7.1 Propriétés de la forme exponentielle

$$e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$$

Les autres propriétés découlent de celles de l'exponentielle, voir **??**

6 Dérivées

6.1 Opération sur des fonctions

Soit u et v des fonctions.

$$
\begin{aligned}
(uv)' &= u'v + v'u \\
\left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u'v - v'u}{v^2} \\
(u^n)' &= nu'u^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0.5; -1\} \\
(u \circ v)' &= u'(v' \circ u) \\
\sin' &= \cos \\
\cos' &= -\sin
\end{aligned}
$$

7 Fonction exponentielle $\exp$

7.1 Notation

$$e^x := \exp x$$

7.2 Caractéristiques

Soit $x \in \mathbb{R}$ et u une fonction définie sur $\mathbb{R}$

Dérivée $(e^x)' = e^x$
$(e^u)' = u'e^u$

Réciproque $\ln(e^x) = x$

Signe $e^x > 0$

Variations strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Limites $e^x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$
$e^x \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$

7.3 Limites remarquables

lim	$x \to$	$=$
$e^x - 1/x$	0	1
Par croissance comparée ↓		
xe^x	$-\infty$	0
e^x/x	$+\infty$	$+\infty$

7.4 Propriétés

$$e^a \gtreqless e^b \iff a \gtreqless b$$

$e^{a\diamond b}$	$e^a \diamond e^b$
$+$	$\times$
$-$	$\div$
$(e^a)^n$	e^{an}

8 Géométrie dans l'espace

8.1 Intersections

8.1.1 Droite-droite, plan-plan

Soit a et b des droites et P et Q des plans

	Coplanaires			Non-coplanaires
	Parallèles		Sécantes	
	Strictement	Confondues		
$a \cap b$	$\emptyset$	a et b	$\{\text{point}\}$	$\emptyset$
$P \cap Q$	$\emptyset$	P et Q	droite	$\emptyset$

8.1.2 Droite-plan

	Parallèles		Sécants
	Strictement	$a \subset P$	
$a \cap P$	$\emptyset$	droite	$\{\text{point}\}$

8.2 Section d'un cube

2 points dans la même face
Relier directement

$[AB]$ *sur une face,* C *sur face opposée*
Tracer la parallèle à $[AB]$ passant par C

$[AB]$ *sur une face* E*,* C *sur face adjaçente*
Prolonger une arrête et (AB) jusqu'à intersection en D
Tracer (DC). La partie du segment qui est sur la face E est la section.

8.3 Orthogonalité ⊥

$$d \underset{\text{orth.}}{\perp} d' \iff \gamma \underset{\text{perp.}}{\perp} \gamma' \quad \exists \gamma \parallel d, \gamma' \parallel d'$$

8.4 Plan ⊥ droite

$$\begin{aligned} d \perp P &\iff d \perp \gamma \wedge d \perp \gamma' \quad \forall \gamma \cap \gamma' = \text{point} \\ &\implies \gamma \perp d \quad \forall \gamma \subset P \end{aligned}$$

8.5 Plan médiateur

$$\begin{aligned} P \text{ med } [AB] &\iff P \perp (AB) \wedge I \in P \quad \forall I \text{ mil } [AB] \\ &\iff P = \{C \mid CA = CB\} \end{aligned}$$

8.6 Propriétés

$$
\begin{aligned}
d \parallel d' &\Longrightarrow P \perp d \quad \forall P \perp d' \\
&\Longleftarrow d \parallel \gamma \wedge d' \parallel \gamma \\
&\Longleftarrow P \cap P' = d' \wedge d \parallel P \wedge d \parallel P'
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P \parallel P' &\Longleftrightarrow P \perp d \wedge P' \perp d \\
&\Longleftrightarrow P \parallel \Delta \wedge P' \parallel \Delta \\
&\Longleftrightarrow d_1 \parallel d_1' \wedge d \parallel d' \quad \forall d \cap d' = \text{point}, d_1 \cap d_1' = \text{point} \\
&\Longrightarrow \Gamma \cap P' = \gamma \wedge \Gamma \cap P = \gamma' \wedge \gamma \parallel \gamma' \quad \forall \Gamma \cap P = \text{droite}
\end{aligned}
$$

$$
\Delta \parallel d \wedge \Delta \parallel d' \Longleftarrow d \parallel d' \wedge d \subset P \wedge d' \subset P' \wedge P \cap P' = \Delta
$$

$$
\Delta \parallel P \Longleftrightarrow \Delta \parallel d \quad \forall d \subset P
$$

$$
P \parallel Q \wedge \Gamma \cap P = \gamma \Longrightarrow \Gamma \cap Q = \gamma' \wedge \gamma \parallel \gamma'
$$

9 Le logarithme népérien $\ln$

Aussi appelé "logarithme naturel" ou "logarithme base e"

9.1 Caractéristiques

Notation	$\ln x$
Réciproque	exp
Ensemble	$\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$
Limites	$\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$
Dérivée	$\dfrac{1}{x}$
Variations	Croissante sur $\mathbb{R}_+^*$
Continuité	Continue sur $\mathbb{R}_+^*$
Valeurs remarquables	$\ln 1 = 0$

9.2 Limites remarquables

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$
$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$$

9.3 Propriétés

$\ln(a \diamond b)$	$\ln a \diamond \ln b$
$\times$	$+$
$\div$	$-$
a^n	$n \ln a$