

*June 6, 2020*

# Condensé de la terminale Mathématiques

Ewen Le Bihan  
TS3

## Notations non vues en cours

|                   |   |
|-------------------|---|
| $:=$              | Égal par définition   |
| $\lceil x \rceil$ | Arrondir $x$ à l'entier supérieur. ( $\lceil 5.1 \rceil = 6$ )                  |
| 1.5               | Séparateur ,  |
| $x \cdot y$       | Multiplication $\times$   |
| $\nearrow$        | Croissant   |
| $\searrow$        | Décroissant   |
| $a \gtrless b$    | Revient à écrire $a > b$ , $a = b$ et $a > b$                                   |
| $\wedge$          | "et"  |
| $\text{Im} z$     | Point d'affixe $z$  |
| $\diamond$        | Caractère utilisé pour représenter plusieurs opérations                         |
| $\text{sgn}(x)$   | $x \mapsto \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$ |

# Contents

|   |           |
|---|-----------|
| <b>0 Outils</b>   | <b>5</b>  |
| 0.1 Composition de fonction $f \circ g$                   | 5         |
| 0.2 Équations de cercle $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ | 5         |
| 0.3 Opérations avec des puissances                        | 5         |
| 0.4 Diverses théorèmes                                    | 5         |
| 0.4.1 Application de fonctions aux inéquations            | 5         |
| <b>1 Suites numériques</b>                                | <b>6</b>  |
| 1.1 Définition fonctionnelle                              | 6         |
| 1.2 Définition par récurrence                             | 6         |
| 1.3 Suite arithmétique                                    | 6         |
| 1.4 Suite géométrique                                     | 6         |
| 1.5 Limites   | 6         |
| 1.6 Majoration et minoration                              | 7         |
| 1.7 Opérations sur les limites                            | 7         |
| 1.8 Comparaisons et limites                               | 7         |
| <b>2 Probabilités</b>                                     | <b>8</b>  |
| 2.1 Probabilité conditionnelle $P(A B)$                   | 8         |
| 2.2 Probabilités d'intersections $P(A \cap B)$            | 8         |
| 2.3 Probabilités d'union $P(A \cup B)$                    | 8         |
| 2.4 Partitions  | 8         |
| 2.5 Formule des probabilités totales                      | 8         |
| 2.6 Indépendance d'événements                             | 8         |
| 2.7 Loi de Bernoulli $\mathcal{B}$                        | 8         |
| 2.8 Autre vocabulaire                                     | 9         |
| 2.9 Probabilités à densité                                | 9         |
| 2.10 Loi uniforme   | 9         |
| 2.11 Loi exponentielle                                    | 9         |
| 2.12 Loi sans vieillissement                              | 9         |
| 2.13 Lois normales  | 10        |
| 2.13.1 Loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$    | 10        |
| 2.13.2 Probabilité d'intervalle centrée en 0              | 10        |
| 2.13.3 Propriétés   | 10        |
| <b>3 Limites <math>\lim</math></b>                        | <b>11</b> |
| 3.1 Notation  | 11        |
| 3.2 Limites d'un quotient à la valeur indéfinie           | 11        |
| 3.3 Opérations sur les limites                            | 11        |
| 3.4 Asymptotes  | 12        |
| 3.5 Simplifications de limites                            | 12        |
| 3.5.1 Polynômes   | 12        |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| 3.6      | Fonctions composées . . . . .                                   | 12        |
| <b>4</b> | <b>Continuité des fonctions</b>                                 | <b>13</b> |
| 4.1      | Définition . . . . .  | 13        |
| 4.2      | Continuité de fonctions usuelles . . . . .                      | 13        |
| 4.3      | Théorèmes utilisant la continuité . . . . .                     | 13        |
| 4.3.1    | Valeurs intermédiaires . . . . .                                | 13        |
| 4.3.2    | Bijection . . . . .   | 13        |
| <b>5</b> | <b>Nombres complexes <math>\mathbb{C}</math></b>                | <b>14</b> |
| 5.1      | Définition . . . . .  | 14        |
| 5.2      | Partie imaginaire $\text{Im}$ et réelle $\text{Re}$ . . . . .   | 14        |
| 5.2.1    | Définition . . . . .  | 14        |
| 5.2.2    | Propriétés . . . . .  | 14        |
| 5.3      | Conjugué $\bar{z}$ . . . . .                                    | 14        |
| 5.3.1    | Définition . . . . .  | 14        |
| 5.3.2    | Identités . . . . .   | 14        |
| 5.4      | Affixe $\text{Aff}$ . . . . .                                   | 14        |
| 5.4.1    | Propriétés . . . . .  | 14        |
| 5.5      | Racines des polynômes de second degré $az^2 + bz + c$ . . . . . | 15        |
| 5.6      | Coordonnées polaires avec $z$ . . . . .                         | 15        |
| 5.6.1    | Module $ z $ . . . . .  | 15        |
| 5.6.2    | Argument $\arg$ . . . . .                                       | 15        |
| 5.7      | Formes . . . . .  | 16        |
| 5.7.1    | Propriétés de la forme exponentielle . . . . .                  | 16        |
| 5.8      | Inégalité triangulaire . . . . .                                | 16        |
| <b>6</b> | <b>Dérivées</b>   | <b>17</b> |
| 6.1      | Opération sur des fonctions . . . . .                           | 17        |
| <b>7</b> | <b>Fonction exponentielle <math>\exp</math></b>                 | <b>18</b> |
| 7.1      | Notation . . . . .  | 18        |
| 7.2      | Caractéristiques . . . . .                                      | 18        |
| 7.3      | Limites remarquables . . . . .                                  | 18        |
| 7.4      | Propriétés . . . . .  | 18        |
| <b>8</b> | <b>Géométrie dans l'espace</b>                                  | <b>19</b> |
| 8.1      | Intersections . . . . .   | 19        |
| 8.1.1    | Droite-droite, plan-plan . . . . .                              | 19        |
| 8.1.2    | Droite-plan . . . . .   | 19        |
| 8.2      | Section d'un cube . . . . .                                     | 19        |
| 8.3      | Orthogonalité $\perp$ . . . . .                                 | 19        |
| 8.4      | Plan $\perp$ droite . . . . .                                   | 19        |
| 8.5      | Plan médiateur . . . . .  | 19        |

|           |   |           |
|-----------|---|-----------|
| 8.6       | Propriétés . . . . .                                    | 20        |
| 8.7       | Coordonnées . . . . .                                   | 20        |
| 8.8       | Équations paramétriques . . . . .                       | 20        |
| 8.8.1     | D'une droite . . . . .                                  | 20        |
| 8.8.2     | D'un plan . . . . .                                     | 20        |
| <b>9</b>  | <b>Le logarithme népérien <math>\ln</math></b>          | <b>22</b> |
| 9.1       | Caractéristiques . . . . .                              | 22        |
| 9.2       | Limites remarquables . . . . .                          | 22        |
| 9.3       | Propriétés . . . . .                                    | 22        |
| <b>10</b> | <b>Primitives <math>F</math></b>                        | <b>23</b> |
| 10.1      | Définition . . . . .                                    | 23        |
| 10.2      | Propriétés . . . . .                                    | 23        |
| 10.3      | Primitives remarquables . . . . .                       | 23        |
| <b>11</b> | <b>Intégrales <math>\int</math></b>                     | <b>24</b> |
| 11.1      | Notation . . . . .                                      | 24        |
| 11.2      | Unité d'aires $ua$ . . . . .                            | 24        |
| 11.2.1    | Définition . . . . .                                    | 24        |
| 11.3      | Calcul . . . . .  | 24        |
| 11.4      | Propriétés . . . . .                                    | 24        |
| 11.5      | Valeur moyenne de $f$ sur $[a; b]$ . . . . .            | 24        |
| <b>12</b> | <b>Échantillonnage</b>                                  | <b>25</b> |
| 12.1      | Fréquence de caractère $X_n$ . . . . .                  | 25        |
| 12.2      | Fréquence de caractère dans échantillon $F_n$ . . . . . | 25        |
| 12.3      | Intervalle de fluctuation $I_n$ . . . . .               | 25        |
| 12.3.1    | Interprétation . . . . .                                | 25        |
| 12.4      | Trouver $p$ avec $f$ et $n$ . . . . .                   | 25        |

## 0 Outils

### 0.1 Composition de fonction $f \circ g$

Soit  $f$  et  $g$  des fonctions respectivement définies sur  $I$  et  $J$

$$(f \circ g)(x) \iff f(g(x))$$

Attention: il faut que  $x$  soit défini dans  $I$  et que  $g(x)$  soit défini dans  $J$

Plus généralement, soit  $\Theta$  un ensemble de fonctions

$$\left(\bigcirc_{i=0}^j \Theta_i\right)(x) = \Theta_0(\Theta_1(\Theta_2(\Theta_3 \dots (x \dots)))$$

### 0.2 Équations de cercle $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$

Soit  $R$  le rayon du cercle, et  $O(x_0; y_0)$  le centre du cercle

Un cercle dans le plan peut être décrit par l'équation suivante:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

### 0.3 Opérations avec des puissances

$$(x^a)^b = x^{ab}$$

$$x^a x^b = x^{a+b}$$

$$x^{-a} = \frac{1}{x^a}$$

$$x^{\frac{1}{a}} = \sqrt[a]{x}$$

$$x^0 = 1$$

### 0.4 Diverses théorèmes

#### 0.4.1 Application de fonctions aux inéquations

Soit  $I$  une intervalle,  $f$  une fonction définie et croissante sur  $I$ ,  $x$  et  $y$  deux nombres dans  $I$

$$\begin{aligned} x &\begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} y \\ \iff f(x) &\begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} f(y) \end{aligned}$$

# 1 Suites numériques

## 1.1 Définition fonctionnelle

Soit  $f$  une fonction:

$$u_n = f(n)$$

## 1.2 Définition par récurrence

Soit  $f$  une fonction

$$u_n = \begin{cases} u_0 = \text{cste} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

## 1.3 Suite arithmétique

Avec  $r$  la raison de la suite

**Définition fonctionnelle**  $u_n = u_0 + r \cdot n$

**Définition par récurrence**  $u_n = \begin{cases} u_0 = \text{cste} \\ u_{n+1} = u_n + r \end{cases}$

**Somme des termes de  $i$  à  $j$**   $\sum_{i=i}^j u_i = (j - i + 1) \cdot \frac{u_j + u_i}{2}$

## 1.4 Suite géométrique

Avec  $q$  la raison de la suite

**Définition fonctionnelle**  $u_n = u_0 \cdot q^n$

**Définition par récurrence**  $u_n = \begin{cases} u_0 = \text{cste} \\ u_{n+1} = u_n \cdot q \end{cases}$

**Somme des termes de  $i$  à  $j$**   $\sum_{i=i}^j u_i = u_j \cdot \frac{1 - q^{j-i+1}}{1 - q}$

## 1.5 Limites

**Suite convergente vers  $L$**   $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$

**Suite divergente**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \neq L$

|                                    |           |    |   |   |           |
|------------------------------------|-----------|----|---|---|-----------|
| $p \in \{0.5\} \cup \mathbb{N}$    | $-\infty$ | -1 | 0 | 1 | $+\infty$ |
| $q \in \mathbb{R}$                 |           |    |   |   |           |
| $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n$ | ?         |    | 0 | 1 | $+\infty$ |
| $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^p$ |           | 0  | 1 |   | $+\infty$ |

Limites de type  $\text{cste}^n$  ou  $n^{\text{cste}}$

## 1.6 Majoration et minoration

Soit  $(u_n)$  une suite définie sur les rangs dans  $I$  et  $L$  un réel

**Suite majorée**  $\forall n \in I \quad \exists M \quad u_n \leq M$

**Suite minorée**  $\forall n \in I \quad \exists m \quad u_n \geq m$

**Suite bornée** Suite majorée *et* minorée

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \dots$$

|            | Majorée (par $L$ ) |             | Minorée (par $L$ ) |             |
|------------|--------------------|-------------|--------------------|-------------|
|            | Oui                | Non         | Oui                | Non         |
| $\nearrow$ | $\leq L$           | $= +\infty$ |                    |             |
| $\searrow$ |                    |             | $\geq L$           | $= -\infty$ |

Soit  $f$  la fonction associée à  $u_n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = f(L)$$

## 1.7 Opérations sur les limites

Voir en 3.3

## 1.8 Comparaisons et limites

Soit  $L \in \mathbb{R}$ ,  $(u_n)$ ,  $(v_n)$  et  $(w_n)$  trois suites et  $l_A$  la limite quand  $n \rightarrow +\infty$  de la suite  $A_n$

| Nom du théorème        | Conditions              |                 | Résultat                 | Explication graphique                                |
|------------------------|-------------------------|-----------------|--------------------------|--|
| Par comparaison        | $u_n \leq v_n$          | $l_u = +\infty$ | $\implies l_v = +\infty$ | $(u_n)$ emporte $(v_n)$ vers $+\infty$               |
|                        | $u_n \geq v_n$          | $l_u = -\infty$ | $\implies l_v = -\infty$ | $(u_n)$ emporte $(v_n)$ vers $-\infty$               |
| Théorème des gendarmes | $w_n \geq v_n \geq u_n$ | $l_u = l_w = L$ | $\implies l_v = L$       | $(u_n)$ et $(w_n)$ forcent $(v_n)$ à tendre vers $L$ |



## 2 Probabilités

### 2.1 Probabilité conditionnelle $P(A|B)$

Probabilité que  $A$  soit réalisé sachant que  $B$  a déjà été réalisé.

$$P(A|B) \text{ ou } P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{si } P(B) \neq 0$$

### 2.2 Probabilités d'intersections $P(A \cap B)$

Probabilité que  $A$  et  $B$  soit réalisées.

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(B) \cdot P(A|B) \\ &= P(A) \cdot P(B|A) \end{aligned}$$

### 2.3 Probabilités d'union $P(A \cup B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

### 2.4 Partitions

Si on a deux événements ou plus tel que...

- Aucun événement n'est vide  
 $\iff B_i \neq \emptyset \quad \forall i$
- Aucun événement ne recouvre un autre  
 $\iff B_i \cap B_j = \emptyset \quad \forall i, j$
- L'union de chaque partition couvre l'univers entier  
 $\iff \bigcup_{i=1}^j B_i = \Omega$

### 2.5 Formule des probabilités totales

Soit  $B_1, B_2, \dots, B_n$  des événements formant une partition de  $\Omega$

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A \cap B_i)$$

### 2.6 Indépendance d'événements

$$\begin{aligned} A \text{ et } B \text{ sont indépendants} &\iff \overline{B} \text{ et } B \text{ forment une partition de } \Omega \\ &\iff \overline{A} \text{ et } A \text{ forment une partition de } \Omega \\ &\iff \overline{A} \text{ et } \overline{B}, A \text{ et } \overline{B} \text{ et } B \text{ et } \overline{A} \text{ sont indépendants} \end{aligned}$$

### 2.7 Loi de Bernoulli $\mathcal{B}$

Épreuve de Bernoulli

## 2.8 Autre vocabulaire

**Événements incompatibles**  $P(A \cap B) = 0$

**Variable aléatoire continue** La variable aléatoire peut prendre n'importe quel valeur dans  $I := I \subset \mathbb{R}$

*À partir d'ici, la connaissance des intégrales est requise (voir 10.3)*

## 2.9 Probabilités à densité

$f$  est une densité de probabilité si:

- $D_f \subset \mathbb{R}_+$
- $f$  est continue
- $\int_{D_f} f(x)dx = 1$

La loi de  $X$  admet  $f$  comme densité de probabilité  $\iff P(X \in [a, b]) = \int_a^b f(t)dt$   
 $\wedge [a, b] \subseteq D_f \subset \mathbb{R}$   
 $\implies \forall n \in D_f \quad P(X = n) = 0$   
 $\implies$  Dans les conditions,  $\geq \iff > \wedge \leq \iff <$   
 $\implies P(X > k) = 1 - P(X < k)$   
 $\implies P(X \in [a, b]) = P(X < b) - P(X < a)$   
 $\implies P(X \in [a, b] \mid X \in [c, d]) = \frac{P(X \in [a, b] \cap [c, d])}{P(X \in [c, d])}$   
 $\implies E(X) = \int_{D_f} tf(t)dt$

## 2.10 Loi uniforme

$X$  suit la loi uniforme sur  $[a, b]$   $\iff$  La loi de  $X$  admet  $x \mapsto \frac{1}{b-a}$  comme densité de probabilité

$$[c, d] \subseteq [a, b] \iff P(X \in [c, d]) = \frac{d-c}{b-a}$$

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

## 2.11 Loi exponentielle

$X$  suit la loi exponentielle de paramètre  $\lambda$   $\iff$  La loi de  $X$  admet  $x \mapsto \lambda e^{-\lambda x}$  comme densité de probabilité

## 2.12 Loi sans vieillissement

$$P(X \geq t+h \mid X \geq t) = P(X \geq h)$$

## 2.13 Lois normales

### 2.13.1 Loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$

$$X \text{ suit la loi } \mathcal{N}(0, 1) \iff P(X \in [a, b]) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp -\frac{x^2}{2} dx$$

### 2.13.2 Probabilité d'intervalle centrée en 0

$$X \sim \mathcal{N}(0, 1) \iff \forall \alpha \in ]0, 1[ \quad \exists_{=1} u_\alpha \in \mathbb{R}_+^* \quad P(X \in [-u_\alpha, u_\alpha]) = 1 - u_\alpha$$

Deux valeurs remarquables

$$u_{0.05} = 1.96$$

$$u_{0.01} = 2.58$$

.

### 2.13.3 Propriétés

$$E(X) = 0 \iff \text{centrée}$$

$$\sigma = 1 \iff \text{réduite}$$

$$\iff V = 1$$

.

### 3 Limites lim

#### 3.1 Notation

Soit  $x$ ,  $C$  et  $D$  des nombres et  $\Psi$  un réel,  $+\infty$  ou  $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow \Psi} C = D \iff C \xrightarrow{x \rightarrow \Psi} D$$

$\iff$  Limite de  $C$  quand  $x$  tends vers  $\Psi$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \Psi \\ >}} C = D \iff C \xrightarrow{x \rightarrow \Psi^+} D$$

$\iff$  Limite de  $C$  en  $\Psi$  par valeurs supérieures  
 $\iff$  Limite de  $C$  à droite de  $\Psi$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \Psi \\ <}} C = D \iff C \xrightarrow{x \rightarrow \Psi^-} D$$

$\iff$  Limite de  $C$  en  $\Psi$  par valeurs inférieures  
 $\iff$  Limite de  $C$  à gauche de  $\Psi$

#### 3.2 Limites d'un quotient à la valeur indéfinie

Soit  $f : x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}$  et  $r \in \mathbb{R}$  tq.  $q(r) = 0$

1. Calculer  $\lim_{x \rightarrow r} p(x)$
2. **Par valeurs supérieures** Calculer  $\lim_{x \rightarrow r^+} q(x)$ :  $0^+$  ou  $0^-$   
**Par valeurs inférieures** Calculer  $\lim_{x \rightarrow r^-} q(x)$ :  $0^+$  ou  $0^-$
3. Conclure par quotient:  $0^+ \rightarrow +$  et  $0^- \rightarrow -$

#### 3.3 Opérations sur les limites

Les opérations entre deux limites réelles sont comparables aux opérations sur des nombres

**FI** Forme Indéterminée

| $x, y$                      | $x + y$                                  | $x \cdot y$  | $x/y$  |
|-----------------------------|--|--|--|
| $\pm\infty$                 | Signes = $\pm\infty$<br>Signes $\neq$ FI | (règle des signes)                                       | FI   |
| $\mathbb{R}$ ou $\pm\infty$ | $\pm\infty$                              | $x = 0$ FI<br>$x > 0$ $\pm\infty$<br>$x < 0$ $\mp\infty$ | $y = 0$ FI<br>$y = \pm\infty$ 0<br>$x = \pm\infty$ et $y \in \mathbb{R}^*$ $\pm\infty$ |

### 3.4 Asymptotes

Soit  $L \in \mathbb{R}$ ,  $f$  une fonction,  $\Gamma$  la courbe d'équation  $y = f(x)$  et  $\Psi$  un nombre ou symbole

$$\begin{aligned} f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \Psi} L &\iff \Gamma \text{ admet en } \Psi \text{ une asymptote (horizontale) d'équation } y = L \\ \begin{cases} f(x) \xrightarrow{x \rightarrow L^+} \pm\infty \\ f(x) \xrightarrow{x \rightarrow L^-} \pm\infty \end{cases} &\iff \Gamma \text{ admet en } L \text{ une asymptote (verticale) d'équation } x = L \end{aligned}$$

### 3.5 Simplifications de limites

#### 3.5.1 Polynômes

Pour les limites en  $+\infty$  ou en  $-\infty$ , on peut simplifier la limite d'un polynôme à la limite du terme de plus haut degré:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 - 4x + 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3$$

Ça marche aussi avec les fractions:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^9 + x^3 - 2}{5x^3 - 8x^{18} + 420} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^9}{-8x^{18}}$$

### 3.6 Fonctions composées

Soit  $a, b$  et  $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$ ,  $f$  et  $g$  des fonctions

$$\begin{cases} f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b \\ g(x) \xrightarrow{x \rightarrow b} c \end{cases} \implies (f \circ g)(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} c$$

## 4 Continuité des fonctions

### 4.1 Définition

Une fonction est continue quand "on peut tracer sa courbe sans lever le stylo". Plus rigoureusement, la fonction  $f$  est continue sur l'intervalle  $I$  si, pour tout  $a \in I$ ,  $f(a) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a)$ .

### 4.2 Continuité de fonctions usuelles

|             |                        |
|-------------|------------------------|
| Polynôme    | $\mathbb{R}$           |
| $\sqrt{x}$  | $\mathbb{R}^+$         |
| Rationnelle | Ensemble de définition |

De plus, n'importe quelle fonction créée par  $+$ ,  $\times$ ,  $\circ$  ou  $\div$  à partir de fonctions continues sont continues

### 4.3 Théorèmes utilisant la continuité

#### 4.3.1 Valeurs intermédiaires

Soit  $a$  et  $b$  des réels,  $f$  une fonction continue sur  $[a; b]$ .

$$\forall k \in [f(a); f(b)], \quad f(x) = k \text{ admet au moins une solution dans } [a; b]$$

#### 4.3.2 Bijection

Soit  $I$  une intervalle,  $a$  et  $b$  des réels dans  $I$  et  $f$  une fonction définie sur  $I$  ou plus grand

$$\begin{cases} f \text{ est continue sur } I \\ f \text{ est strictement monotone sur } I \end{cases} \quad (1)$$
$$k \in [f(a); f(b)] \quad (2)$$

$$\implies f(x) = k \text{ admet une unique solution dans } [a; b]$$

(1) quand elle ne l'est pas, on étudie séparément chaque intervalle où la fonction est strictement monotone

(2) si  $a$  ou  $b = \pm\infty$ , on calcule la limite pour l'intervalle image:

Montrer que  $f(x) = k$  n'admet qu'une seule solution dans  $\mathbb{R}$

$$k \in \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$$

*Attention:* pour montrer que  $f(x) = k$  n'a pas de solutions on n'utilise pas la bijection mais le tableau de variations

## 5 Nombres complexes $\mathbb{C}$

### 5.1 Définition

$$i^2 := -1, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad z \in \mathbb{C} \\ z = a + ib$$

Ensemble des imaginaires purs:  $i\mathbb{R} := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

### 5.2 Partie imaginaire $\text{Im}$ et réelle $\text{Re}$

#### 5.2.1 Définition

- $\text{Re}(a + ib) := a$
- $\text{Im}(a + ib) := b$

#### 5.2.2 Propriétés

- $\text{Re } z = 0 \iff z \in i\mathbb{R}$
- $\text{Im } z = 0 \iff z \in \mathbb{R}$

### 5.3 Conjugé $\bar{z}$

#### 5.3.1 Définition

$$\bar{z} := \text{Re } z - i\text{Im } z$$

#### 5.3.2 Identités

$\diamond$  représente les opérations  $+$ ,  $\times$  et  $\div$

- $z \cdot \bar{z} = (\text{Im } z)^2 + (\text{Re } z)^2$
- $\overline{z \diamond w} = \bar{z} \diamond \bar{w}$
- $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$
- $\overline{\bar{z}} = z$
- $\bar{z} = z \iff z \in \mathbb{R}$

### 5.4 Affixe $\text{Aff}$

L'affixe est un nombre complexe représenté par un point ou un vecteur dans le plan:

$$\text{Aff} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a + ib$$

Réciproquement, l'image de  $a + ib$  est  $(a; b)$

#### 5.4.1 Propriétés

- $\text{Aff}(\overrightarrow{AB}) = \text{Aff}(B) - \text{Aff}(A)$

## 5.5 Racines des polynômes de second degré $az^2 + bz + c$

$$az^2 + bz + c = 0 \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad \Delta := b^2 - 4ac$$

$$\begin{cases} \Delta < 0 & \Rightarrow \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a} \\ \Delta = 0 & \Rightarrow \frac{-b}{2a} \\ \Delta > 0 & \Rightarrow \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

## 5.6 Coordonnées polaires avec $z$

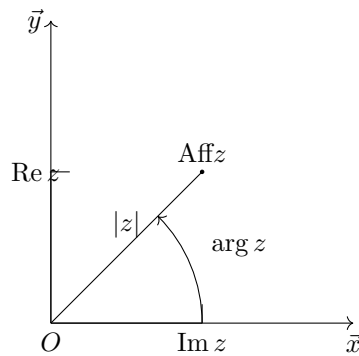


Figure 1: Représentation géométrique de l'affixe de  $z$  et de ses propriétés

### 5.6.1 Module $|z|$

$$|z| = \sqrt{\operatorname{Re}^2 z + \operatorname{Im}^2 z}$$

#### Propriétés

$\diamond$  représente les opérations  $\times$  et  $\div$

$$|z^n| = |z|^n$$

$$|z \diamond z'| = |z| \diamond |z'|$$

### 5.6.2 Argument $\arg$

$$\forall z \in \mathbb{C}^*$$

$$\begin{aligned} \arg z &:= \left( \vec{x}; \overrightarrow{O\operatorname{Im} z} \right) \\ &= \begin{cases} \cos(\arg z) &= \frac{\operatorname{Re} z}{|z|} \\ \sin(\arg z) &= \frac{\operatorname{Im} z}{|z|} \end{cases} \end{aligned}$$

#### Propriétés

On note  $z_\diamond$  l'affixe du point ou vecteur  $\diamond$

- $(\vec{w}, \vec{w}') = \arg \frac{z_{w'}}{z_w}$



- $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg \frac{D-C}{B-A}$

*Propriétés de produit, puissance, quotient et inverse identiques à  $\ln$ , voir 9.2*

## 5.7 Formes

$$\begin{array}{ll} \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z & \text{(algébrique)} \\ |z| (\cos(\arg z) + i \sin(\arg z)) & \text{(trigonométrique)} \\ |z| e^{i \arg z} & \text{(exponentielle)} \end{array}$$

Notations usuelles:  $r := |z|$ ,  $\theta := \arg z$ ,  $x := \operatorname{Re} z$ ,  $y := \operatorname{Im} z$

### 5.7.1 Propriétés de la forme exponentielle

$$e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$$

*Les autres propriétés découlent de celles de l'exponentielle, voir 7.3*

## 5.8 Inégalité triangulaire

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|$$

## 6 Dérivées

### 6.1 Opération sur des fonctions

Soit  $u$  et  $v$  des fonctions.

$$(uv)' = u'v + v'u$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$(u^n)' = nu'u^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0.5; -1\}$$

$$(u \circ v)' = u'(v' \circ u)$$

$$\sin' = \cos$$

$$\cos' = -\sin$$

## 7 Fonction exponentielle $\exp$

### 7.1 Notation

$$e^x := \exp x$$

### 7.2 Caractéristiques

Soit  $x \in \mathbb{R}$  et  $u$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$

**Dérivée**  $(e^x)' = e^x$   
 $(e^u)' = u'e^u$

**Réciproque**  $\ln(e^x) = x$

**Signe**  $e^x > 0$

**Variations** strictement croissante sur  $\mathbb{R}$

**Limites**  $e^x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$   
 $e^x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$

### 7.3 Limites remarquables

| lim                       | $x \rightarrow$ | =         |
|---------------------------|-----------------|-----------|
| $e^x - 1/x$               | 0               | 1         |
| Par croissance comparée ↓ |                 |           |
| $xe^x$                    | $-\infty$       | 0         |
| $e^x/x$                   | $+\infty$       | $+\infty$ |

### 7.4 Propriétés

$$e^a \gtrless e^b \iff a \gtrless b$$

|                    |                    |
|--------------------|--------------------|
| $e^{a \diamond b}$ | $e^a \diamond e^b$ |
| +                  | $\times$           |
| -                  | $\div$             |
| $(e^a)^n$          | $e^{an}$           |

## 8 Géométrie dans l'espace

### 8.1 Intersections

#### 8.1.1 Droite-droite, plan-plan

Soit  $a$  et  $b$  des droites et  $P$  et  $Q$  des plans

|            | Coplanaires |            |          | Non-coplanaires |
|------------|-------------|------------|----------|-----------------|
|            | Parallèles  |            | Sécantes |                 |
|            | Strictement | Confondues |          |                 |
| $a \cap b$ | $\emptyset$ | $a$ et $b$ | {point}  | $\emptyset$     |
| $P \cap Q$ | $\emptyset$ | $P$ et $Q$ | droite   | $\emptyset$     |

#### 8.1.2 Droite-plan

|            | Parallèles  |               | Sécants |
|------------|-------------|---------------|---------|
|            | Strictement | $a \subset P$ |         |
| $a \cap P$ | $\emptyset$ | droite        | {point} |

### 8.2 Section d'un cube

*2 points dans la même face*

Relier directement

*$[AB]$  sur une face,  $C$  sur face opposée*

Tracer la parallèle à  $[AB]$  passant par  $C$

*$[AB]$  sur une face  $E$ ,  $C$  sur face adjacente*

Prolonger une arête et  $(AB)$  jusqu'à intersection en  $D$

Tracer  $(DC)$ . La partie du segment qui est sur la face  $E$  est la section.

### 8.3 Orthogonalité $\perp$

$$d \underset{\text{orth.}}{\perp} d' \iff \gamma \underset{\text{perp.}}{\perp} \gamma' \quad \exists \gamma \parallel d, \gamma' \parallel d'$$

### 8.4 Plan $\perp$ droite

$$\begin{aligned} d \perp P &\iff d \perp \gamma \wedge d \perp \gamma' \quad \forall \gamma \cap \gamma' = \text{point} \\ &\implies \gamma \perp d \quad \forall \gamma \subset P \end{aligned}$$

### 8.5 Plan médiateur

$$\begin{aligned} P \text{ med } [AB] &\iff P \perp (AB) \wedge I \in P \quad \forall I \text{ mil } [AB] \\ &\iff P = \{C \mid CA = CB\} \end{aligned}$$

## 8.6 Propriétés

$$\begin{aligned}
 d \parallel d' &\implies P \perp d \quad \forall P \perp d' \\
 &\iff d \parallel \gamma \wedge d' \parallel \gamma \\
 &\iff P \cap P' = d' \wedge d \parallel P \wedge d \parallel P'
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P \parallel P' &\iff P \perp d \wedge P' \perp d \\
 &\iff P \parallel \Delta \wedge P' \parallel \Delta \\
 &\iff d_1 \parallel d'_1 \wedge d \parallel d' \quad \forall d \cap d' = \text{point}, d_1 \cap d'_1 = \text{point} \\
 &\implies \Gamma \cap P' = \gamma \wedge \Gamma \cap P = \gamma' \wedge \gamma \parallel \gamma' \quad \forall \Gamma \cap P = \text{droite}
 \end{aligned}$$

$$\Delta \parallel d \wedge \Delta \parallel d' \iff d \parallel d' \wedge d \subset P \wedge d' \subset P' \wedge P \cap P' = \Delta$$

$$\Delta \parallel P \iff \Delta \parallel d \quad \forall d \subset P$$

$$P \parallel Q \wedge \Gamma \cap P = \gamma \implies \Gamma \cap Q = \gamma' \wedge \gamma \parallel \gamma'$$

## 8.7 Coordonnées

Un triplet  $(x; y; z)$ .

Les propriétés de la géométrie planaire (milieu, colinéarité et vecteurs) se traduisent trivialement

## 8.8 Équations paramétriques

### 8.8.1 D'une droite

Soit...

$$\begin{aligned}
 A &:= (x_A; y_A; z_A) \\
 \vec{u} &:= (x_u; y_u; z_u) \\
 M &:= (x; y; z) \\
 D &:= \text{droite passant par } A \text{ de vecteur directeur } \vec{u}
 \end{aligned}$$

On a:

$$M \in D \iff \begin{cases} x = x_u t + x_A \\ y = y_u t + y_A \\ z = z_u t + z_A \end{cases}$$

### 8.8.2 D'un plan

Soit...

$$\begin{aligned}
 A &:= (x_A; y_A; z_A) \\
 \vec{u} &:= (x_u; y_u; z_u) \\
 \vec{w} &:= (x_w; y_w; z_w) \\
 M &:= (x; y; z) \\
 P &:= \text{plan passant par } A \text{ de vecteur directeurs } \vec{u} \text{ et } \vec{w}
 \end{aligned}$$

On a:

$$M \in D \iff \begin{cases} x = x_u t + x_w t' + x_A \\ y = y_u t + y_w t' + y_A \\ z = z_u t + z_w t' + z_A \end{cases}$$

## 9 Le logarithme népérien $\ln$

Aussi appelé "logarithme naturel" ou "logarithme base  $e$ "

### 9.1 Caractéristiques

|                        |  |
|------------------------|--|
| Notation               | $\ln x$  |
| Réciproque             | $\exp$   |
| Ensemble               | $\mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  |
| Limites                | $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$<br>$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ |
| Dérivée d'une variable | $\frac{1}{x}$  |
| Dérivée d'une fonction | $u' \ln u$   |
| Variations             | Croissante sur $\mathbb{R}_+^*$  |
| Continuité             | Continue sur $\mathbb{R}_+^*$  |
| Valeurs remarquables   | $\ln 1 = 0$  |

### 9.2 Limites remarquables

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$$

### 9.3 Propriétés

|                     |                        |
|---------------------|------------------------|
| $\ln(a \diamond b)$ | $\ln a \diamond \ln b$ |
| $\times$            | $+$                    |
| $\div$              | $-$                    |
| $a^n$               | $n \ln a$              |

## 10 Primitives $F$

### 10.1 Définition

$\forall x \in \mathbb{R}$

$$F'(x) = f(x)$$

### 10.2 Propriétés

- $\forall C \in \mathbb{U} \quad x \mapsto F(x) + C$  est une primitive de  $f$
- $F + G$  primitive de  $f + g$
- $\forall k \in \mathbb{R} \quad kF$  primitive de  $kf$

### 10.3 Primitives remarquables

| $f$                  | $F$                                 | $\in I$ ( $\mathbb{R}$ par défaut) |
|----------------------|-------------------------------------|------------------------------------|
| $k$                  | $kx$                                |                                    |
| $x$                  | $\frac{1}{2}x^2$                    |                                    |
| $x^n$                | $\frac{1}{n+1}x^{n+1}$              | $\mathbb{R} - \{1\}$               |
| $\frac{u'(x)}{u(x)}$ | $\ln(\operatorname{sgn}(u(x))u(x))$ |                                    |



## 11 Intégrales $\int$

### 11.1 Notation

Soit  $A_f \in \mathbb{R}$  l'aire sous la courbe de  $f$  de  $x = a$  à  $x = b$  par rapport à l'axe des abscisses

$$\int_a^b f(x)dx = A_f$$

$$\int_{\text{borne inf.}}^{\text{borne sup.}} \text{expression} \quad d\text{var. d'intégration}$$

### 11.2 Unité d'aires $ua$

$\forall x \in [a; b] \ f(x) \geq 0 \wedge b \geq a \iff A_f$  est exprimée en  $ua$ .

#### 11.2.1 Définition

$$1ua = ||\vec{i}|| \cdot ||\vec{j}||$$

### 11.3 Calcul

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= [F(x)]_a^b \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$

### 11.4 Propriétés

Pour alléger les notations:  $\lrcorner = f(x)dx$ ,  $\oslash = g(x)dx$  et  $\int = \int_a^b$

- $\int_a^a \lrcorner = 0$
- $\int_a^b \lrcorner = - \int_b^a \lrcorner$
- $\int_a^c \lrcorner = \int_a^b \lrcorner + \int_b^c \lrcorner$  (Relation de Chasles)
- $\int k \lrcorner = k \int \lrcorner$
- $\int (f(x) + g(x))dx = \int \lrcorner + \int \oslash$
- $\int \lrcorner \geq 0 \implies f(x) \geq 0$
- $f(x) \geq g(x) \implies \int \lrcorner \geq \int \oslash$

### 11.5 Valeur moyenne de $f$ sur $[a; b]$

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

## 12 Échantillonnage

### 12.1 Fréquence de caractère $X_n$

Soit le caractère  $\mathcal{C}$  dont la proportion de présence dans une population est  $p$ .  $X_n$  associe à la taille d'échantillon  $n$  le nombre de caractères présents dans l'échantillon.

$$X_n \sim \mathcal{B}(n, p).$$

### 12.2 Fréquence de caractère dans échantillon $F_n$

$$F_n = \frac{X_n}{n}.$$

### 12.3 Intervalle de fluctuation $I_n$

Soit

$Z$  la loi normale centrée réduite,

$\alpha \in ]0, 1[$ ,

$u_\alpha \in \mathbb{R}$  tq.  $P(Z \in [-u_\alpha, u_\alpha]) = 1 - \alpha$ ,

$q := 1 - p$

$$I_n = \left[ p - u_\alpha \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}}, p + u_\alpha \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}} \right]$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(F_n \in I_n) = 1 - \alpha$$

#### 12.3.1 Interprétation

Pour un  $n$  assez grand,  $F_n \in I_n$  avec une probabilité d'approximativement  $1 - \alpha$ . On admet que

$$P(F_n \in I_n) \approx 1 - \alpha.$$

Quand:

- $n \geq 30$
- $np \geq 5$
- $nq \geq 5$

Si au moins une des conditions n'est *pas* remplie, il faudra utiliser une intervalle de fluctuation

### 12.4 Trouver $p$ avec $f$ et $n$

$$\exists n_0 : n \geq n_0 \implies P\left(p \in \left[F_n - \frac{1}{\sqrt{n}}, F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]\right) \geq 0.95$$