Lois normales : Séance 1

I. La loi normale centrée réduire $\mathcal{N}(0,1)$

1 Fonction de Laplace-Gauss

⇝ Regarder cette vidéo : Fonction de Laplace - Gauss : exercice (9mn)

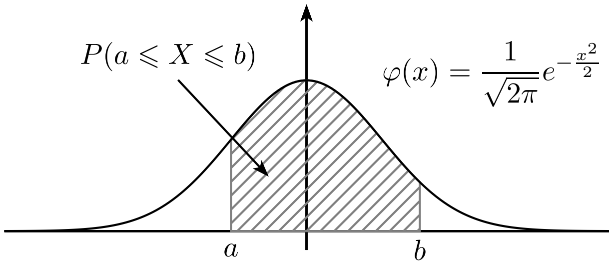
2 Définition

⇝ Regarder cette vidéo : Loi normale centrée réduite (9mn)

Définition 1.

La **loi normale centrée réduite**, notée $\mathcal{N}(0,1)$, est la loi continue dont la densité de probabilité est la fonction de Laplace-Gauss φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$. Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0,1)$.
Pour tous réels a et b tels que $a \leqslant b$:

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x$$



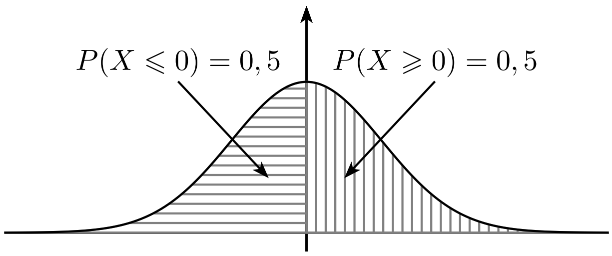
Proposition 1.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

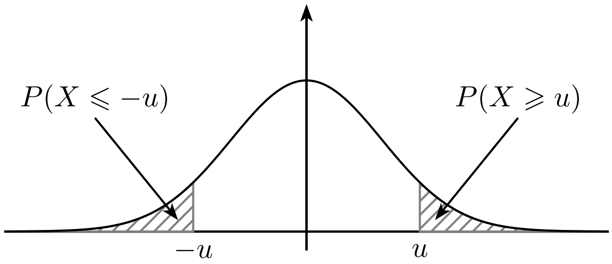
1. Pour tous réels a et b tels que $a \leqslant b$: $P(a \leqslant X \leqslant b) = P(X \leqslant b) - P(X \leqslant a)$.
2. $P(X \leqslant 0) = P(X \geqslant 0) = 0,5$.
3. Pour tout réel u positif on a : $P(X \leqslant -u) = P(X \geqslant u)$.
4. Pour tout réel u positif on a : $P(-u \leqslant X \leqslant u) = 2P(X \leqslant u) - 1$.

Démonstration

Pour le second point, cela provient de la parité de f qui implique la symétrie de la courbe par rapport à l'axe des ordonnées.



Pour le troisième cela provient encore de la symétrie de la courbe de f (figure ci-dessous) :



Et le quatrième point :

$$\begin{aligned}
2P(X \leqslant u) - 1 &= 2\left[P(X \leqslant -u) + P(-u \leqslant X \leqslant u)\right] - \left[P(X \leqslant -u) + P(-u \leqslant X \leqslant u) + P(X \geqslant u)\right] \\
&= P(X \leqslant -u) + P(-u \leqslant X \leqslant u) - P(X \geqslant u) \\
&= P(-u \leqslant X \leqslant u) \text{ car } P(X \leqslant -u) = P(X \geqslant u)
\end{aligned}$$

3 Usage de la calculatrice

Tutoriel 1 : Un tableau explicatif à télécharger

Exercice 1
Soit X une variable aléatoire qui suit $\mathcal{N}(0,1)$. Vérifier, à l'aide de la calculatrice que $P(-1 \leqslant X \leqslant 2) \approx 0,819$ à 0,001, $P(X \leqslant -1) \approx 0,159$, et déterminer le réel u tel que $P(X \leqslant u) = 0,6$.

Exercice 2
Déterminer u tel que $P(-u \leqslant X \leqslant u) = 0,97$ à 0,01 près.

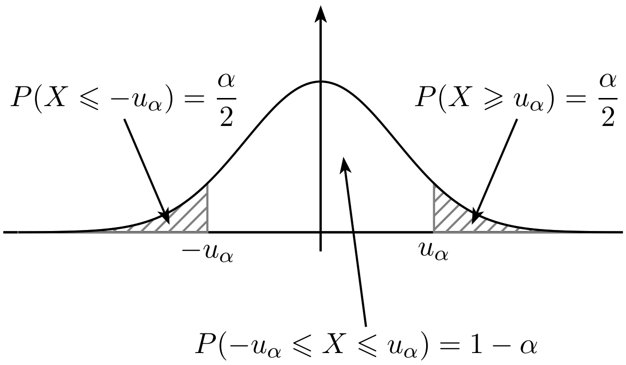
4 Probabilité d'intervalle centré en 0

⇝ Regarder cette vidéo : Loi normale : démonstration importante du cours sur u_α(14mn)

Théorème 1.

Si X est une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite, alors pour tout réel α de $]0,1[$, il existe un unique réel u_α strictement positif tel que :

$$P(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha) = 1-\alpha$$



Remarque

En pratique la valeur de α est petite. Voyons deux valeurs importantes à connaître dans la proposition suivante.

Proposition 2.

- Une valeur approchée de $u_{0,05}$ est 1,96.
- Une valeur approchée de $u_{0,01}$ est 2,58.

Remarque

Ceci signifie que si X est une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite alors :

$$P(-1,96 \leqslant X \leqslant 1,96) \approx 0,95 \text{ et } P(-2,58 \leqslant X \leqslant 2,58) \approx 0,99$$

Ce qui peut se reformuler ainsi : X fluctue à 95% dans l'intervalle $[-1,96;1,96]$ et à 99% dans $[-2,58;2,58]$.

Exercice 3

A l'aide de la calculatrice, vérifier que $u_{0,05} \approx 1,96$ et que $u_{0,01} \approx 2,58$

5 Espérance-Ecart type

Proposition 3.

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite est égale à 0, c'est pourquoi on dit « centrée », et son écart-type est égal à 1, c'est pourquoi on dit « réduite ». Sa variance est donc égale à 1.

Démonstration

$E(X) = \lim\limits_{x \to +\infty} \int_{-A}^{A} x\varphi(x)\mathrm{d}x$.

La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ est impaire.

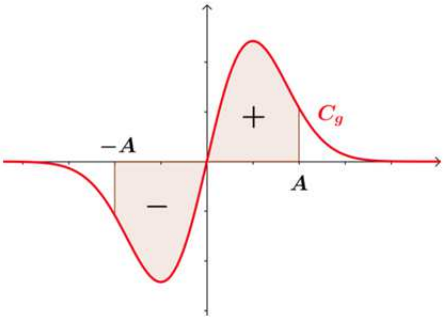
En effet pour tout x réel :

$g(-x) = -x \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(-x)^2}{2}} = -x \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} = -g(x)$

Ainsi : $\displaystyle\int_{-A}^{0} g(x)\mathrm{d}x = -\int_{0}^{A} g(x)\mathrm{d}x$ et donc

$\displaystyle\int_{-A}^{A} g(x)\mathrm{d}x = \int_{-A}^{0} g(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{A} g(x)\mathrm{d}x = 0.$

Finalement $E(X) = \lim\limits_{x \to +\infty} \displaystyle\int_{-A}^{A} x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x = 0.$



Exercices du livre : Ex 73,74,76 p 339

Lois normales : Séance 2

II. Les lois normales $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

1 Définition et propriétés

⇝ Regarder cette vidéo :
Loi normale $N(\mu;\sigma^2)$: Comprendre la définiton - Espérance - écart-type (8 mn)

Définition 2.

Soit μ un nombre réel et σ un nombre réel strictement positif. On dit que la variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ si la variable aléatoire $Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite.
Autrement dit : X suit la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \iff \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi $\mathcal{N}(0;1)$.

Proposition 4.

Si une variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors X a pour espérance μ, pour variance σ^2et pour écart type σ.

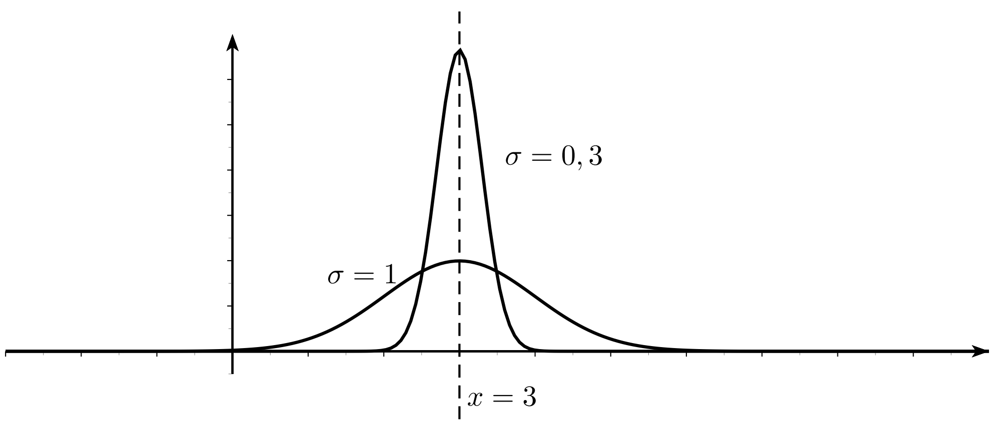
Démonstration Nous savons que si X est une variable aléatoire et a et b des réels on $E(aX+b) = aE(X)+b$ et $\sigma(aX+b) = |a|\sigma(X)$. Appliquons ces formules avec $a = \dfrac{1}{\sigma}$, $b = \dfrac{-\mu}{\sigma}$.

D'après la définition 2, $\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi $N(0;1)$ donc :

$E\left(\dfrac{X-\mu}{\sigma}\right) = 0 \iff \dfrac{E(X)-\mu}{\sigma} = 0 \iff E(X) = \mu.$

$\sigma\left(\dfrac{X-\mu}{\sigma}\right) = 1 \iff \dfrac{\sigma(X)}{|\sigma|} = 1 \iff \sigma(X) = |\sigma| = \sigma = 1.$ (σ positif).

Remarque
La courbe de la fonction densité associée à la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ est une courbe en cloche, symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \mu$. L'écart-type σ agit sur l'aplatissement de la courbe c'est à dire que plus σ est petit, plus la courbe est resserrée autour de l'axe de symétrie. Ci-dessous on a représenté les fonctions de densité associées aux lois normales $\mathcal{N}(3, 1^2)$ et $\mathcal{N}(3; 0, 3^2)$.



2 Usage de la calculatrice

Tutoriel 2 : Un tableau explicatif à télécharger.

⇝ Regarder cette vidéo : Loi normale sur Casio (3 mn)

⇝ Regarder cette vidéo : Loi normale sur TI 83 Premium CE (3mn)

Exercice 4

1. Une variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(120, 7^2)$. Vérifier à l'aide de la calculatrice qu'en arrondissant à 10^{-4} : $P(110 \leqslant X \leqslant 160) \approx 0,9234$, $P(X \leqslant 130) \approx 0,9234$ et $P(X \geqslant 125) \approx 0,2375$.

2. Une variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(10, 4)$. Vérifier que : $P(9 \leqslant X \leqslant 11) \approx 0,3829$

Exercice 5

La température de l'eau du mois de juillet, autour du lac Léman, suivent la loi normale d'espérance $18,2°C$ et d'écart-type $3,6°C$. Une personne part camper en juillet sur le pourtour du lac Léman. On note T température de l'eau. Que peut-on lui indiquer comme probabilité de température de l'eau de la plage dans les cas suivants :

a) températures inférieures à $16°C$.

b) températures comprises entre $20°C$ et $24,5°C$.

c) températures supérieures à $21°C$.

3 Les intervalles « un, deux ou trois σ »

⇝ Regarder cette vidéo : Loi normale 1,2,3 σ (9 mn)

Proposition 5.

Si une variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors :

1. $P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) \approx 0,683$
2. $P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0,954$
3. $P(\mu - 3\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 3\sigma) \approx 0,997$

Notez que les trois intervalles sont **centrés en μ.**

Remarque

La proposition peut se reformuler un peu plus grossièrement dans le cas d'une population :

- $\dfrac{2}{3}$ de la population est dans $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$.
- 95% de la population est dans $[\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma]$.
- 99% de la population est dans $[\mu - 3\sigma; \mu + 3\sigma]$.

Exercice 6

Soit une variable aléatoire X suivant la loi normale $\mathcal{N}(2; 0,6^2)$. Déterminer les intervalles « un, deux ou trois σ ».

Exercice 7
Une machine remplit des bouteilles d'huile avec un volume moyen de 265 mL et un écart-type de 10 mL. On suppose que la variable aléatoire V qui donne le volume en mL d'huile d'une bouteille suit une loi normale.

1. Quelle proportion des bouteilles contient entre 245 et 285 mL ?
2. Un ingénieur dit qu'en modifiant légèrement la machine, il peut réduire l'écart-type. Quel devrait être cet écart-type pour que 95% des bouteilles aient un volume compris entre 250 mL et 280 mL ?

Travail en autonomie
savoir-faire 10 et 11 page 333 ; ex 96 (détermination de σ) et 99 page 341

Exercices du livres : 92 p 341, 95 et 97 p 342

Lois normales : Séance 3

4 Théorème de Moivre-Laplace

Approche :

Lemme 1.

Si X est une variable aléatoire d'espérance $E(X)$ et d'écart-type $\sigma(X) \neq 0$, alors la variable aléatoire $Y = \dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite (c'est-à-dire : $E(Y) = 0$ et $\sigma(Y) = 1$).

Preuve : il suffit d'appliquer $E(aX + b) = aE(X) + b$ et $\sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$.

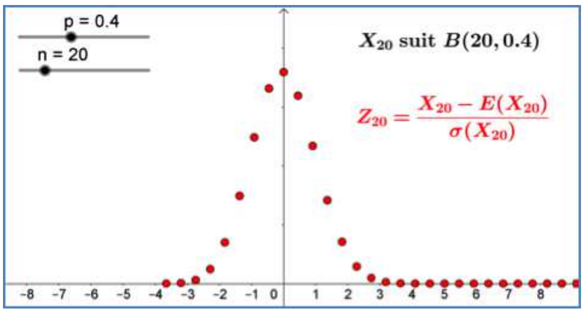
On réalise successivement, et de manière indépendante les unes des autres, une même épreuve de Bernoulli de probabilité de succès p, et à chaque nouvelle réalisation, on associe une variable aléatoire X_i qui compte le nombre de succès obtenus, de la façon suivante :

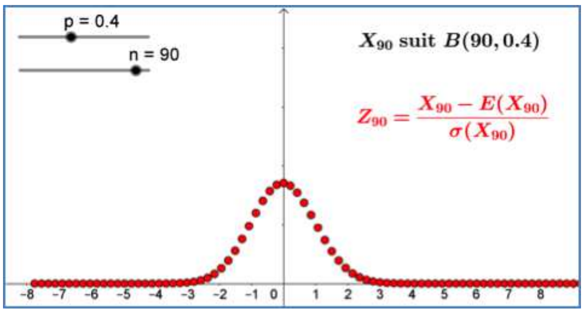
- X_1 compte le nombre de succès obtenus lors de la 1° réalisation.
- X_2 compte le nombre de succès obtenus lors des 2 premières réalisations.
- ...
- X_n compte le nombre de succès obtenus lors des n premières réalisations.

On sait que, pour tout entier $n \geqslant 1$:

- la variable X_n suit la loi binomiale de paramètres n et p.
- $E(X_n) = np$ et $\sigma(X_n) \neq 0$.
- d'après le lemme ci-dessus, la variable $Z_n = \dfrac{X_n - E(X_n)}{\sigma(X_n)} = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ est centrée réduite.

Le Théorème de Moivre-Laplace s'intéresse à ce que devient la loi de probabilité suivie par Z_n quand n devient grand. Illustrons-le par un graphique pour $n = 20$ puis $n = 90$ ($p = 0,4$) :





Théorème 2 (Moivre-Laplace).

Avec les hypothèses et notations précédentes, pour tous réels a et b tels que $a < b$:

$$\lim_{n \to +\infty} P(a \leqslant Z_n \leqslant b) = P(a \leqslant Y \leqslant b)$$

où Y suit la loi $\mathcal{N}(0; 1)$.
Autrement dit : Lorsque n tend vers l'infini, la variable aléatoire discrète Z_n se comporte comme une variable aléatoire continue suivant la loi normale centrée réduite.

En pratique : Quand n devient grand, on pourra remplacer les longs calculs de probabilité liés à la loi binomiale par des calculs plus simples utilisant la loi normale centrée réduite. On pourra utiliser le critère d'application : $n \geqslant 30$ et $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$.

Exemple

On lance 12000 fois un dé cubique équilibré, quelle est la probabilité d'avoir obtenu entre 1950 et 2050 fois le « 6 » ?

La variable aléatoire X_n comptant les « 6 » suit la loi binomiale de paramètres $n = 12000$ et $p = \frac{1}{6}$.

De plus n est suffisamment grand pour appliquer le théorème de Moivre-Laplace.

Soit la variable aléatoire $Z_n = \dfrac{X_n - E(X_n)}{\sigma(X_n)}$ pour tout $n \geqslant 1$.

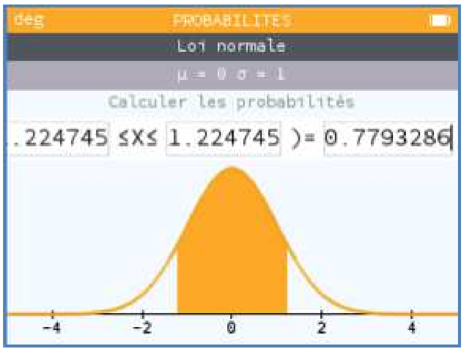
$$\begin{aligned} 1950 \leqslant X_n \leqslant 2050 &\iff 1950 - np \leqslant X_n - np \leqslant 2050 - np \\ &\iff \frac{1950-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant \frac{2050-np}{\sqrt{np(1-p)}} \\ &\iff \frac{1950-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant Z_n \leqslant \frac{2050-np}{\sqrt{np(1-p)}} \end{aligned}$$

Donc

$P(1950 \leqslant X_n \leqslant 2050) = P\left(\dfrac{1950-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant Z_n \leqslant \dfrac{2050-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$

La variable Z_n suit une loi qu'on peut donc approximer (on mettra toutefois le signe =) par la variable Y qui suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$ d'où :

$P(1950 \leqslant X_n \leqslant 2050) = P\left(\dfrac{-50}{\sqrt{\frac{10000}{6}}} \leqslant Y \leqslant \dfrac{50}{\sqrt{\frac{10000}{6}}}\right) \approx 78\%$



Exercice 8 *D'après Pondichéry Avril 2013*

Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe. Cette entreprise emploie 220 salariés. On admet que la probabilité pour qu'un salarié soit malade une semaine donnée durant cette période d'épidémie est égale à $p = 0,05$.
On suppose que l'état de santé d'un salarié ne dépend pas de l'état de santé de ses collègues.
On désigne par X la variable aléatoire qui donne le nombre de salariés malades une semaine donnée.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

   Calculer l'espérance mathématique μ et l'écart type σ de la variable aléatoire X.

2. On admet que l'on peut approcher la loi de la variable aléatoire $\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ par la loi normale centrée réduite c'est-à-dire de paramètres 0 et 1.

   On note Z une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

   Le tableau suivant donne les probabilités de l'évènement $Z < x$ pour quelques valeurs du nombre réel x.

x	$-1,55$	$-1,24$	$-0,93$	$-0,62$	$-0,31$	0,00	0,31	0,62	0,93	1,24	1,55
$P(Z < x)$	0,061	0,108	0,177	0,268	0,379	0,500	0,621	0,732	0,823	0,892	0,939

   Calculer, au moyen de l'approximation proposée en question 2, une valeur approchée à 10^{-2} près de la probabilité de l'évènement : « le nombre de salariés absents dans l'entreprise au cours d'une semaine donnée est supérieur ou égal à 7 et inférieur ou égal à 15 ».

Exercice 9 *D'après Liban Mai 2013*

L'entreprise *Fructidoux* fabrique des compotes qu'elle conditionne en petits pots de 50 grammes. Elle souhaite leur attribuer la dénomination « compote allégée ».
La législation impose alors que la teneur en sucre, c'est-à-dire la proportion de sucre dans la compote, soit comprise entre 0,16 et 0,18. On dit dans ce cas que le petit pot de compote est conforme.
L'entreprise possède deux chaînes de fabrication F_1 et F_2.

1. On note X la variable aléatoire qui, à un petit pot pris au hasard dans la production de la chaîne F_1, associe sa teneur en sucre.

   On suppose que X suit la loi normale d'espérance $m_1 = 0,17$ et d'écart-type $\sigma_1 = 0,006$.

   Dans la suite, on pourra utiliser le tableau ci-dessous.

α	β	$P(\alpha \leqslant X \leqslant \beta)$
0,13	0,15	0,000 4
0,14	0,16	0,047 8
0,15	0,17	0,499 6
0,16	0,18	0,904 4
0,17	0,19	0,499 6
0,18	0,20	0,047 8
0,19	0,21	0,000 4

   Donner une valeur approchée à 10^{-4} près de la probabilité qu'un petit pot prélevé au hasard dans la production de la chaîne F_1 soit conforme.

2. On note Y la variable aléatoire qui, à un petit pot pris au hasard dans la production de la chaîne F_2, associe sa teneur en sucre.

   On suppose que Y suit la loi normale d'espérance $m_2 = 0,17$ et d'écart-type σ_2.

   On suppose de plus que la probabilité qu'un petit pot prélevé au hasard dans la production de la chaîne F_2 soit conforme est égale à $0,99$.

   Soit Z la variable aléatoire définie par $Z = \dfrac{Y - m_2}{\sigma_2}$.

   (a) Quelle loi la variable aléatoire Z suit-elle ?

(b) Déterminer, en fonction de σ_2 l'intervalle auquel appartient Z lorsque Y appartient à l'intervalle [0,16 ; 0,18].

(c) En déduire une valeur approchée à 10^{-3} près de σ_2.

On pourra utiliser le tableau donné ci-dessous, dans lequel la variable aléatoire Z suit la loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 1.

β	$P(-\beta \leqslant Z \leqslant \beta)$
2,432 4	0,985
2,457 3	0,986
2,483 8	0,987
2,512 1	0,988
2,542 7	0,989
2,575 8	0,990
2,612 1	0,991
2,652 1	0,992
2,696 8	0,993