Exercices: Trigonométrie

Ewen Le Bihan

2020-08-02

Abstract

Chaque section est un exercice, le nom de la section représente a le format suivant: `@<page> <exercice>`, avec `<exercice>` le numéro de l'exercice et `<page>` le numéro de la page.

Par défaut, les exercices du livre le plus courant sont assumés, mais l'on peut préciser le livre avec la syntaxe suivante:

`<livre>@<page> <exercice>`. Exemple:

`Sésamath@218 24` représente l'exercice numéro *24* du livre *Sésamath* à la page *218*

1 Calculus@50 65

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) &= \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} \\
&= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{4} \\
&= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}\sqrt{2}}{4} \\
&= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) &= \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} \\
&= \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4} \\
&= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}
\end{aligned}$$

2 Calculus@50 66

3 Calculus@50 67

sin a pour maximum 1. Or, d'après la formule de duplication pour sin, $\sin(2x) = \mathbf{2}\cos x\sin x$. Donc $\cos x \sin x$ a pour maximum dans $\mathbb{R}$ $\frac{1}{2}$.

4 Calculus@50 68

5 Calculus@50 69

On pose $y = 2x$

$$\begin{aligned}\cos(3x) &= \cos(x+y)\\ &= \cos x \cos y - \sin x \sin y\\ &= \cos x \cos(2x) - \sin x \sin(2x)\\ &= \cos x 2\cos^2 x - 1 - \sin x 2 \sin x \cos x\end{aligned}.$$

Or $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$$\begin{aligned}\cos(3x) &= \cos x 2\cos^2 x - 1 - \sin x 2 \sin x \cos x\\ &= \cos x 2\cos^2 x - 1 - \cos(\frac{\pi}{2} - x) 2 \cos(\frac{\pi}{2} - x) \cos x\\ &= \cos x 2\cos^2 x - 1 - 3\left(\cos\frac{\pi}{2}\cos x + \sin\frac{\pi}{2}\sin x\right)\cos x\\ &= \cos x 2\cos^2 x - 1 - 3\left(0\cos x + 1\sin x\right)\cos x\\ &= \cos x 2\cos^2 x - 1 - 3\sin x \cos x\\ &= \cos x 2\cos^2 x - 1 - 3\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos x\\ &= \text{fuck this shit}\end{aligned}.$$

6 Calculus@51 70

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'assertion P_n: $u_n = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$.

Initialisation Pour $n = 1$

$$\begin{aligned}2\cos\left(\frac{\pi}{2^2}\right) &= 2\cos\frac{\pi}{4}\\ &= 2\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= \sqrt{2}\end{aligned}.$$

$$\begin{aligned}u_1 &= \prod_{k=1}^{1} u_1\\ &= u_1\\ &= \sqrt{2}\end{aligned}.$$

P_1 est donc vraie.

Hérédité Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est vraie. Montrons qu'alors P_{n+1} est également vraie.

$$\begin{aligned}u_{n+1} &= \sqrt{2 + u_n}\\ &= \sqrt{2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}\\ &= \sqrt{2 + \text{fuck this shit}}\end{aligned}.$$

7 Calculus@51 71

7.1

8 Calculus@52 72

8.1

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{1}{2} \\ &= \cos\frac{\pi}{3} \\ \iff x &\equiv \pm\frac{\pi}{3} \quad [2\pi] \end{aligned}$$
.

8.2

$$\begin{aligned} \sin(2x) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \sin\frac{\pi}{4} \\ \iff 2x &\equiv \frac{\pi}{4} \quad [2\pi] \quad \text{ou} \quad \frac{\pi}{4} + \pi \quad [2\pi] \\ \iff x &\equiv \frac{\pi}{8} \quad [2\pi] \quad \text{ou} \quad \frac{\pi}{8} + \pi \quad [2\pi]. \end{aligned}$$

9 Calculus@52 73

$$\left[\frac{\pi}{4}, 0\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right].$$

10 Calculus@52 74

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \cos x \in [0,1] &\implies \cos x \geq 0 \\ &\implies (\cos^2 x \geq 0 \\ &\wedge 4\cos x \geq 0) \\ &\implies \cos^2 x + 4\cos x \geq 0 \\ &\implies \cos^2 x + 4\cos x + 1 \geq 0 \end{aligned}$$

Or:

$$\begin{aligned} 2\cos^2 x + 4\cos x + 1 &= 2\cos^2 x - 2 + 3 + 4\cos x \\ &= 2(\cos^2 x - 1) + 4\cos x + 3 \\ &= 2\cos(2x) + 4\cos x + 3 \end{aligned}$$
.

Donc

$$2\cos(2x) + 4\cos x + 3 \geq 0.$$

11 Calculus@52 75

$$\begin{aligned}a\cos x + b\sin x &= \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\phi)\\ &= ((\text{WIP}))\end{aligned}$$

.

12 Calculus@52 76

$$\begin{aligned}\cos x + \sin x &= \sqrt{\frac{3}{2}}\\
\iff (\cos x + \sin x)^2 &= \frac{3}{2}\\
\iff \cos^2 x + 2\cos x \sin x + \sin^2 x &= \frac{3}{2}\\
\iff \cos^2 x + \sin(2x) + \sin^2 x &= \frac{3}{2}\\
\iff 2(\cos^2 x + \sin(2x) + \sin^2 x) &= 3\\
\iff 2\cos^2 x + 2\sin(2x) + 2\sin^2 x &= 3\\
\iff 2\cos^2 x - 1 + 1 + 2\sin(2x) + 2^2 x &= 3\\
\iff \cos(2x) + 1 + 2\sin(2x) + 2\sin^2 x &= 3\\
\iff \cos(2x) + 2\sin(2x) + 2\sin^2 x &= 2\\
\iff 2(\frac{1}{2}\cos(2x) + \sin(2x) + \sin^2 x) &= 2\\
\frac{1}{2}\cos(2x) + \sin(2x) + \sin^2 x &= 1\end{aligned}$$

ma vie est une blague lol.

13 Calculus@54 79

$$\begin{aligned}\tan x &= \frac{\sin x}{\cos x}\\
\cos(x+y) &= \cos x\cos y - \sin x \sin y\\
\sin(x+y) &= \sin x \cos y + \sin y \cos x\\
\tan(x+y) &= \frac{\sin x\cos y + \sin y \cos x}{\cos x \cos y - \sin x \sin y}\\
&= \frac{\cos y(\sin x + \frac{\sin y \cos x}{\cos y}}{\cos y(\cos x - \frac{\sin x \sin y}{\cos y}}\\
&= \frac{\sin x + \tan y \cos x}{\cos x + \sin x \tan y}\\
&= \frac{\cos x\left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\tan y \cos x}{\cos x}\right)}{\cos x\left(1 + \frac{\sin x \tan y}{\cos x}\right)}\\
&= \frac{\tan x + \tan y}{1 + \tan x \tan y}\end{aligned}$$

.

14 Calculus@54 80

$$\begin{aligned}\tan(2x) &= \tan(x+x)\\
&= \frac{\tan x + \tan x}{1 + \tan x \tan x}\\
&= \frac{2\tan x}{1 + \tan^2 x}\end{aligned}$$

.

On en déduis donc la valeur de $\tan\frac{\pi}{8}$:

$$\begin{align}
\tan\frac{\pi}{4} &= \frac{2\tan\frac{\pi}{8}}{1+\tan^2\frac{\pi}{8}} \tag{1}\\
\iff 1 &= \frac{2\tan\frac{\pi}{8}}{1+\tan^2\frac{\pi}{8}} \tag{2}\\
\iff 1+\tan^2\frac{\pi}{8} &= 2\tan\frac{\pi}{8} \tag{3}\\
\iff \tan^2\frac{\pi}{8} - 2\tan\frac{\pi}{8} + 1 &= 0. \tag{4}
\end{align}$$

On remarque que (4) est de la forme $x^2+2x+1=0$: On cherche donc la/les racines du polynôme du second degré x^2+2x+1.

$$\begin{aligned}
\Delta &= 4-4\\
&= 0\\
\implies x_0 &= \frac{-2}{2}\\
&= -1
\end{aligned}$$
.

On a donc:

$$\begin{aligned}
\tan^2\frac{\pi}{8} - 2\tan\frac{\pi}{8} + 1 = 0\\
\iff \tan\frac{\pi}{8} = -1
\end{aligned}$$
.

Sauf que c'est faux. Et je sais pas pourquoi.

15 Calculus@54 81

On sait que:

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x$$
.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos^2 x} &= 1+\tan^2 x\\
\iff \cos^2 x &= \frac{1}{1+\tan^2 x}\\
\iff \cos x &= \frac{\frac{1}{1+\tan^2 x}}{\cos x}\\
&= \frac{1}{1+\tan^2 x\cos x}\\
&= \frac{1}{1+\tan^2 x\cos x}\frac{1-\tan^2 x}{1-\tan^2 x}\\
&= \frac{1-\tan^2 x}{(1+\tan^2 x\cos x)(1-\tan^2 x)}\\
&= \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x\cos x-\tan^2 x-\tan^2 x(\tan^2 x\cos x)}\\
&= \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x\cos x-\tan^2 x-\tan^4 x-\tan^2 x}
\end{aligned}$$

fml.

$\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$

Nan mais ça sert plus à rien de continuer là jvais juste apprendre des formules par coeur même la correction je la compre