Exercices: Calculus

Ewen Le Bihan

2020-05-15

Tout les exercices ici proviennent du livre "Calculus" disponible sur amazon

1

Montrons par récurrence:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on note la propriété $\mathcal{P}_n$:

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Initialisation. Montrons que, pour $n = 1$, $\mathcal{P}_n$ est vraie:

$$\left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2 = 1 = 1^2$$

$\mathcal{P}_n$ est donc vraie.

Hérédité. Soit n dans $\mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}_n$ est vraie. On a donc:

$$\begin{aligned}
1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 \\
&= \frac{(n(n+1))^2 + 4(n+1)^3}{4} \\
&= \frac{n^2(n^2+2n+1) + 4(n^3+3n^2+3n+1)}{4} \\
&= \frac{n^4 + 2n^3 + n^2 + 4n^3 + 12n^2 + 12n + 4}{4} \\
&= \frac{n^4 + 6n^3 + 13n^2 + 12n + 4}{4}
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2 &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} \\
&= \frac{n^4 + 6n^3 + 3n^2 + 12n + 4}{4}
\end{aligned}$$

En fin de compte, on obtient $\mathcal{P}_{n+1}$:

$$\begin{aligned}1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 &= \frac{n^4 + 6n^3 + 3n^2 + 12n + 4}{4} \\ &= \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2\end{aligned}$$

$\mathcal{P}_n$ est donc initialisée et héréditaire, donc $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ $\square$

2

Montrons par récurrence

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad |\sin(nx)| \leqslant n|\sin x|$$

Soit, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$ la propriété suivante:

$$|\sin(nx)| \leqslant n|\sin x|$$

Initialisation. Pour $n = 0$, montrons que $\mathcal{P}_n$ est vraie. On a, pour tout x dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}&|\sin(0x)| = 0 \wedge 0|\sin x| = 0 \\ \Longrightarrow\ &|\sin(0x)| \leqslant 0|\sin x|\end{aligned}$$

$\mathcal{P}_0$ est donc vraie.

Hérédité. Prouvons que, pour tout entier naturel n et tout réel x, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

$$\begin{aligned}\sin((n+1)x) &= \sin(nx + x) \\ &= \sin(nx)\cos x + \cos(nx)\sin x \\ \Longleftrightarrow\ |\sin((n+1)x)| &= |\sin(nx)\cos x + \cos(nx)\sin x| \\ &\leqslant |\sin(nx)||\cos x| + |\cos(nx)||\sin x|\end{aligned}$$

Remarquons que $\cos x \leqslant 1 \implies |\cos x| \in [0, 1]$

$$\begin{aligned}|\sin((n+1)x)| &\leqslant |\sin(nx)| + |\sin x| \\ &\leqslant n|\sin x| + |\sin x| \\ &\leqslant (n+1)|\sin x|\end{aligned}$$

3

$$\begin{aligned}u_1 &= u_0^2 = u_0^2 \\ u_2 &= (u_0^2)^2 = u_0^4 \\ u_3 &= ((u_0^2)^2)^2 = u_0^8 \\ u_4 &= (((u_0^2)^2)^2)^2 = u_0^{16}\end{aligned}$$

On conjecture que $u_n = u_0^{2^n}$. Soit, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$ la propriété $u_n = u_0^{2^n}$.

Initialisation. Avec $n = 0$:

$$u_0^{2^0} = u_0^1 = u_0$$

$\mathcal{P}_0$ est donc validée.

Hérédité. Admettons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$ est vraie. On cherche à montrer que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est également.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= (u_0^{2^n})^2 \\ &= u_0^{2^n \cdot 2} \\ &= u_0^{2^{n+1}} \end{aligned}$$

$\mathcal{P}_{n+1}$ est donc validée, $\mathcal{P}_n$ est initialisée et héréditaire donc vraie, ce qui valide également la conjecture, autrement dit: $u_n = u_n^{2^{n+1}}$ $\square$

4

5

6

À chaque transmission, la probabilité que le message soit correct est p. Autrement dit, pour le premier opérateur, il y a une transmission, pour le deuxième deux transmissions, et pour le n-ième n transmissions.

Soit $(u_n)_{n>0}$ une suite telle que u_n représente la probabilité que le message soit reçu correctement par le n-ième opérateur. L'objectif est de trouver la définition de cette suite.

Deux erreurs de transmissions font subir au bit deux inversions, ce qui est équivalent au fait de n'avoir eu aucune erreur ($1 \to 0 \to 1 \iff 1 \to 1 \to 1$). On peut facilement généraliser: il faut que le nombre d'erreurs de transmissions subies soit *pair*.

Le nombre de transmissions correctes n'a pas d'importance: une transmission correcte n'engendre pas de modification du signal ($1 \to 1 \to 1 \iff 1 \to 1$)

Explorons les expressions de u_n pour $n \in \{1, 2, 3, 4\}$

On pose $q = 1 - p$

$$\begin{aligned} &u_1 = p \\ &u_2 = p^2 + q^2 \\ &u_3 = p^3 + pqq + qqp + qpq = p^3 + 3q^2p \\ &u_4 = p^4 + qqpp + pqqp + ppqq + qpqp + pqpq + qppq + q^4 = p^4 + 6q^2p^2 + q^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i = x \mapsto &\begin{cases} 0 & \text{si} \quad \bmod(x, 2) \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \\ u_n = n \mapsto &\ p^n + (2^n - i(n))q^{\frac{2^n}{2}}p^{\frac{2^n}{2}} + i(n)q^n \end{aligned}$$

7

$$f \circ f = x \mapsto \frac{\frac{x}{\sqrt{1+cx^2}}}{\sqrt{1+c\frac{x}{\sqrt{1+cx^2}}}}$$

8

Initialisation Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit P_n l'assertion $u_n = 2^n + 3^n$.

$$\begin{aligned} u_0 &= 2 = 2^0 + 3^0 \implies P_0 \quad \text{est vraie} \\ u_1 &= 5 = 2^1 + 3^1 \implies P_1 \quad \text{est vraie} \end{aligned}$$

Hérédité On suppose que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, P_n et P_{n+1} sont vraies. Montrons qu'alors P_{n+2} est aussi vraie.

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 5u_{n+1} - 6u_n \\ &= 5(2^{n+1} + 3^{n+1}) - 6(2^n + 3^n) \\ &= (2+3)(2^{n+1} + 3^{n+1}) - 6(2^n + 3^n) \\ &= 2^{n+2} + 2 \cdot 3^{n+1} + 3 \cdot 2^{n+1} + 3^{n+2} - 6 \cdot 2^n - 6 \cdot 3^n \\ &= 2^{n+2} + \cancel{2 \cdot 3 \cdot 3^n} + \cancel{3 \cdot 2 \cdot 2^n} + 3^{n+2} - \cancel{3 \cdot 2 \cdot 2^n} - \cancel{2 \cdot 3 \cdot 3^n} \\ &= 2^{n+2} + 3^{n+2} \\ &\implies P_{n+2} \text{ est vraie} \end{aligned}$$

9

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{u_1^2}{u_0} = \frac{4}{1} = 4 \\ u_3 &= \frac{u_2^2}{u_1} = \frac{16}{2} = 8 \\ u_4 &= \frac{u_3^2}{u_2} = \frac{64}{4} = 16 \end{aligned}$$

Initialisation Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit P_n l'assertion $u_n = 2^n$.

$$\begin{aligned} u_0 &= 1 = 2^0 \\ u_1 &= 2 = 2^1 \end{aligned}$$

Hérédité On considère que, pout un certain $n \in \mathbb{N}$, P_n et P_{n+1} sont vraies. Montrons qu'alors P_{n+2} est aussi vraie.

$$\begin{aligned}
u_{n+2} &= \frac{u_{n+1}^2}{u_n} \\
&= \frac{(2^{n+1})^2}{2^n} \\
&= \frac{2 \cdot \cancel{2^n} \cdot 2 \cdot 2^n}{\cancel{2^n}} \\
&= 2 \cdot 2 \cdot 2^n \\
&= 2^{n+2} \\
&\implies P_{n+2} \quad \text{est vraie}
\end{aligned}$$

10

11

Soit, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\lambda_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}$.

Si la différence entre λ_n et F_n est inférieure à 0.5, il n'y a aucun entier plus proche de λ_n. On cherchera donc à prouver l'assertion P_n: Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n l'assertion $|\lambda_n - F_n| < 0.5$.

$$\begin{aligned}
|\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} - F_n| &= |\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} - \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} \\
&= \left| \cancel{\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} - \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}} - \frac{\beta^n}{\sqrt{5}} \right| \\
&= \frac{\beta^n}{\sqrt{5}} \\
&= \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \right)^n \frac{1}{\sqrt{5}}
\end{aligned}$$

Or, comme

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} &> \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \\
&> \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \right)^n \quad \text{car } n > 0
\end{aligned}$$

et

$$\frac{1}{\sqrt{5}} < \frac{1}{2}$$

alors

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n \frac{1}{\sqrt{5}} < \frac{1}{2}$$
$$\implies |\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} - F_n| < 0.5$$

.

donc, pour $n \in \mathbb{N}$, F_n est l'entier le plus proche de $\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}$

12

13

14

15

15.1

$$\begin{aligned}(x^2+y^2)(x'^2+y'^2) &= x^2x'^2 + x^2y'^2 + y^2x'^2 + y^2y'^2 \\ (xx'-yy')^2 + (xy'+yx')^2 &= x^2x'^2 \cancel{-2(x'xy'y)} + yy'^2 + x^2y'^2 \cancel{+2(x'xy'y)} + y'^2x^2 \\ &= x^2x'^2 + x^2y'^2 + y^2x'^2 + y^2y'^2\end{aligned}$$

Donc

$$(x^2+y^2)(x'^2+y'^2) = (xx'-yy')^2 + (xy'+yx')^2$$

15.2