

Exercices: Équations différentielles

Ewen Le Bihan

2020-06-05

Abstract

Exercices provenant de `./sujet.pdf`

$$y' + a(x)y = 0 \iff y = x \mapsto C \exp -A(x)$$

1 Montrer que y est solution de l'équation

1.1

$y' - 2y = 0$ avec $y : x \mapsto e^{2x}$

$$\begin{aligned} y' - 2y &= 0 \\ \iff 2e^{2x} - 2e^{2x} &= 0 \end{aligned}$$

1.2

2 Résoudre une équation différentielle d'ordre 1 homogène

Dans chaque exercice, $C \in \mathbb{R}$

2.1 $y' + \frac{2}{x^2}y$

$$\begin{aligned} y = x \mapsto C \exp \left(2 \cdot \frac{1}{-1} x^{-1} \right) \\ = x \mapsto C \exp \left(-\frac{2}{x} \right) \end{aligned}$$

2.2

$$\begin{aligned} (x^2 + x + 1)y' + (2x + 1)y &= 0 \\ \iff y' + \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}y &= 0 \\ \iff y = x \mapsto C \exp(-\ln x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

2.3

$$\begin{aligned} y' + 2xe^{-x^2}y &= 0 \\ \iff y = x \mapsto C \exp(-(-x^2)) \\ &= x \mapsto C \exp x^2 \end{aligned}$$

2.4

$$\begin{aligned}(x^2 + 4x + 1)^5 y' - (x + 2)y &= 0 \\ \Leftrightarrow y' - \frac{x + 2}{(x^2 + 4x + 1)^5} y &= 0 \\ \Leftrightarrow y = x \mapsto C \exp \left(- \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4(x^2 + 4x + 1)^4} \right) \right) \\ \Leftrightarrow y = x \mapsto C \exp \left(\frac{1}{8(x^2 + 4x + 1)^4} \right)\end{aligned}$$

2.5

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 + 1} y' - xy &= 0 \\ \Leftrightarrow y' - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} &= 0 \\ \Leftrightarrow y = x \mapsto C \exp \left(- \left(-\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{x^2 + 1} \right) \right) \\ &= x \mapsto C \exp \sqrt{x^2 + 1}\end{aligned}$$

2.6

$$\begin{aligned}y' - \cos(3x + 1)y &= 0 \\ \Leftrightarrow y = x \mapsto C \exp \left(\frac{1}{3} \cdot \sin(3x + 1) \right)\end{aligned}$$

3 Résoudre une équation différentielle d'ordre 1 non-homogène

3.1

$$y' - 3y = 5$$

3.2

$$2y' - 4y = 1$$

3.3

$$10y' = 2y - 3$$