

*October 20, 2020*

# **Condensé de la MPSI** **Mathématiques**

Ewen Le Bihan  
MPSI – Daudet

# Contents

<b>1</b>	<b>Processus de démonstration</b>	<b>2</b>
1.1	Processus élémentaires . . . . .	2
1.1.1	Quantification universelle $\forall$ . . . . .	2
1.1.2	Quantification existentielle $\exists$ . . . . .	2
1.1.3	Quantification existentielle unique $\exists!$ . . . . .	2
1.1.4	Implication $P \Rightarrow Q$ . . . . .	2
1.1.5	Équivalence $P \Leftrightarrow Q$ . . . . .	2
1.1.6	Inclusion $E \subset F$ . . . . .	2
1.1.7	Égalité ensembliste . . . . .	2
1.2	Processus de démonstration . . . . .	2
1.2.1	Récurrence . . . . .	2
1.2.2	Contraposée . . . . .	2
1.2.3	l'Absurde . . . . .	3
1.2.4	Disjonction des cas . . . . .	3
1.2.5	Analyse-Synthèse . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Dérivation</b>	<b>4</b>
2.1	Nombre dérivé en un point . . . . .	4
2.2	Dérivée de $f$ . . . . .	4
2.3	Dérivée usuelles . . . . .	4
2.4	Dérivées de composées . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Trigonométrie</b>	<b>5</b>
3.1	Cercle trigonométrique ou unité $\mathcal{C}$ . . . . .	5
3.2	Congruence $\cdot \equiv \cdot[\cdot]$ . . . . .	5
3.2.1	Propriétés . . . . .	5

# 1 Processus de démonstration

## 1.1 Processus élémentaires

### 1.1.1 Quantification universelle $\forall$

Soit  $a \in E$

### 1.1.2 Quantification existentielle $\exists$

Posons  $a = \dots \in E$

### 1.1.3 Quantification existentielle unique $\exists!$

**Existence** cf. 1.1.2

**Unicité** Posons  $b \in E$ . *Démonstration de  $b = a$*

### 1.1.4 Implication $P \implies Q$

Supposons  $P(a)$ . Montrons  $Q(a)$

### 1.1.5 Équivalence $P \iff Q$

Procédons par double implication.

$\implies$  : *Démonstration de  $P \implies Q$*

$\impliedby$  : *Démonstration de  $P \impliedby Q$*

### 1.1.6 Inclusion $E \subset F$

*Démontrer  $\forall x \in E, x \in F \implies x \in F$ .*

### 1.1.7 Égalité ensembliste

Procédons par double inclusion.

$\subset$  : *Démonstration de  $E \subset F$*

$\supset$  : *Démonstration de  $E \supset F$*

## 1.2 Processus de démonstration

On commence chaque démonstration utilisant un de ces processus par « Procédons par *nom du processus* »

### 1.2.1 Récurrence

*Pour montrer une propriété vraie dans  $E \subseteq \mathbb{N}$*

**Initialisation** *Démontrer la propriété au premier rang*

**Hérédité** *Démontrer  $\forall n \in E, P(n) \implies P(n+1)$*

**Conclusion** La propriété étant initialisée et héréditaire, elle est vraie pour tout  $n \in E$ .

### 1.2.2 Contraposée

*Pour montrer  $P \implies Q$  quand l'implication directe est trop compliquée*

*Démontrer  $\neg Q \implies \neg P$*

### 1.2.3 l’Absurde

*Pour montrer  $P$*

Supposons  $\neg P$

$\vdots$

On obtient une contradiction.

On a donc  $P$

### 1.2.4 Disjonction des cas

1er cas: ... ..

2ème cas: ... ..

$\vdots$

$n$ -ième cas: ... ..

Conclusion ...

### 1.2.5 Analyse-Synthèse

*Pour trouver les solutions d’une équation, inéquation, ...*

**Analyse** Soit  $a \in E$ . Supposons  $P(a)$ .

*Réduire le nombre de candidats possibles pour  $a$*

**Synthèse** Testons nos candidats

**Conclusion** Les solutions sont ...

## 2 Dérivation

*Attention aux hypothèses!*

### 2.1 Nombre dérivé en un point

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

### 2.2 Dérivée de $f$

$$f' = \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R} \\ a \mapsto f'(a) \end{cases}$$

### 2.3 Dérivée usuelles

- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad (\text{id}^n)' = n \text{id}^{n-1}$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sqrt[n]{\phantom{x}}' = \frac{1}{n \sqrt[n]{\phantom{x}}}$
- $\ln' = \frac{1}{\text{id}}$
- $\exp' = \exp$
- $(a^{\text{id}})' = x \mapsto \ln(a)a^x$
- $\sin' = \cos$
- $\cos' = -\sin$
- $\tan' = \frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2$
- $\text{sh}' = \text{ch}$
- $\text{ch}' = \text{sh}$
- $\text{th}' = \frac{1}{\text{ch}^2} = 1 + \text{th}^2$
- $\text{acos}' = \frac{-1}{\sqrt{1-\text{id}^2}}$
- $\text{asin}' = \frac{1}{\sqrt{1-\text{id}^2}}$
- $\text{atan}' = \frac{1}{1+\text{id}^2}$

### 2.4 Dérivées de composées

- $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad (\lambda u + \mu v)' = \lambda u' + \mu v'$
- $(uv)' = u'v + v'u$
- $(\frac{1}{v})' = \frac{-v'}{v^2}$
- $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$
- $(u \circ v)' = v' \cdot (u' \circ v)$
- $(u^{-1})' = \frac{1}{u' \circ u^{-1}}$

### 3 Trigonométrie

#### 3.1 Cercle trigonométrique ou unité $\mathcal{C}$

Cercle de centre  $(0; 0)$  et de rayon 1.

$$\mathcal{C} = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1\} = \{(\cos x; \sin x), x \in \mathbb{R}\}$$

#### 3.2 Congruence $\cdot \equiv \cdot [t]$

$$a \equiv b [t] \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists k \in \mathbb{Z}, a = b + kt$$

##### 3.2.1 Propriétés

- $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}, \begin{cases} a \equiv b [t] \\ c \equiv d [t] \end{cases} \implies a + c \equiv c + d [t]$
- $\forall a, b, \lambda \in \mathbb{R}, a \equiv b [t] \implies \lambda a \equiv \lambda b [\lambda t] \text{ et } \begin{cases} \lambda a \equiv \lambda b [t] \\ \lambda \in \mathbb{Z} \end{cases}$
- $\cdot \equiv \cdot [t]$  est un ~~RAT~~ une relation d'équivalence