Exercice 8

Énoncé

Soit $X \sim \mathcal{N}(\theta, \theta^2)$, c'est-à-dire une variable aléatoire suivant une loi normale de moyenne θ et de variance θ^2. On cherche à calculer l'information de Fisher :

$$\mathcal{I}(\theta) = -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log f(X;\theta)\right]$$

1. Densité de X

La densité de X est donnée par :

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta^2}} \exp\left(-\frac{(x-\theta)^2}{2\theta^2}\right)$$

2. Log-vraisemblance

On prend le logarithme de la densité :

$$\log f(x;\theta) = -\frac{1}{2}\log(2\pi\theta^2) - \frac{(x-\theta)^2}{2\theta^2}$$

3. Dérivée de la log-vraisemblance

On dérive cette expression par rapport à θ. Une dérivation (par la règle de dérivation de fonctions composées) donne après simplification :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \log f(x;\theta) = -\frac{1}{\theta} + \frac{(x-\theta)(x-3\theta)}{\theta^3} = -\frac{1}{\theta} + \frac{x^2 - 4x\theta + 3\theta^2}{\theta^3}$$

4. Dérivée seconde de la log-vraisemblance

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log f(x;\theta) = \frac{1}{\theta^2} + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{(x-\theta)(x-3\theta)}{\theta^3}\right)$$

Donc :

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log f(x;\theta) = \frac{1}{\theta^2} + \frac{8x\theta^3 - 3x^2\theta^2 - 3\theta^4}{\theta^6} = \frac{1}{\theta^2} + \frac{8x\theta - 3x^2 - 3\theta^2}{\theta^4}$$

5. Information de Fisher

L'information de Fisher est :

$$\mathcal{I}(\theta) = -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f(X;\theta)\right]$$

On a :

$$\mathcal{I}(\theta) = -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f(X;\theta)\right] = -\mathbb{E}\left[\frac{1}{\theta^2} + \frac{8x\theta - 3x^2 - 3\theta^2}{\theta^4}\right] = \frac{1}{\theta^2} + \frac{8}{\theta^3}\mathbb{E}[X] - \frac{3}{\theta^4}\mathbb{E}[X^2] - \frac{3}{\theta^2}$$

Or

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \theta \\
\mathbb{V}[X] &= \theta^2 \\
\mathbb{E}[X^2] &= \mathbb{V}[X] + (\mathbb{E}[X])^2 = \theta^2 + \theta^2 = 2\theta^2
\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\mathcal{I}(\theta) = \frac{3}{\theta^2}}$$