Test de Neyman-Pearson pour une moyenne normale avec variance connue

Sylvain CHAU et Ewen Expuesto

Énoncé

Soient $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma_0^2)$, où σ_0 est connue. On considère le test d'hypothèse simple suivant :

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu = \mu_1 \quad \text{avec } \mu_1 > \mu_0$$

On souhaite construire le test de Neyman-Pearson (NP) de niveau α, en contrôlant :

$$\alpha = \mathbb{P}_{H_0}(T(X) > k_\alpha), \quad \beta = \mathbb{P}_{H_1}(T(X) \leq k_\alpha)$$

Exercice 1 : Statistique de T(X)

La statistique de test du lemme de Neyman-Pearson est fondée sur le rapport de vraisemblance :

$$\Lambda(X) = \frac{L(\mu_0; X)}{L(\mu_1; X)} = \frac{\prod_{i=1}^n \exp\left(-\frac{(X_i-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2}\right)}{\prod_{i=1}^n \exp\left(-\frac{(X_i-\mu_1)^2}{2\sigma_0^2}\right)}$$

$$\Rightarrow \Lambda(X) = \exp -\frac{1}{2\sigma_0} \sum_{i=1}^n [(x_i - \mu_0)^2 - (x_i - \mu_1)^2]$$

$$\Rightarrow \log \Lambda(X) = \frac{1}{2\sigma_0^2} \sum_{i=1}^n \left[(X_i - \mu_1)^2 - (X_i - \mu_0)^2\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\log \Lambda(X) = \frac{1}{2\sigma_0^2}\left[n(\mu_0^2 - \mu_1^2) + 2(\mu_1 - \mu_0)\sum_{i=1}^n X_i\right]}$$

Le test revient donc à rejeter H_0 pour de grandes valeurs de $\sum X_i$:

$$\boxed{T(X) = \bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i}$$

Exercice 2 : k_α et β

0.1 Calcul de k_α

Sous $H_0 : \mu = \mu_0$, on a :

$$\bar{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu_0, \frac{\sigma_0^2}{n}\right)$$

On cherche k_α tel que :

$$\mathbb{P}_{H_0}(\bar{X} > k_\alpha) = \alpha$$

Par standardisation :

$$Z = \sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sigma_0} \sim \mathcal{N}(0,1) \quad \Rightarrow \quad \sqrt{n}\frac{k_\alpha - \mu_0}{\sigma_0} = u_{1-\alpha}$$

$$\Rightarrow \boxed{k_\alpha = \mu_0 + u_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}}$$

Application numérique : Si $\mu_0 = 0$, $\sigma_0 = 1$, $n = 50$, et $\alpha = 0{,}05$, alors :

$$u_{1-\alpha} \approx 1.645, \quad \sqrt{n} = \sqrt{50} \approx 7.071$$

$$\Rightarrow \boxed{k_\alpha \approx 0.2325}$$

0.2 Calcul de β

Sous $H_1 : \mu = \mu_1$, on a $\bar{X}_n \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_0^2/n)$. La puissance est :

$$1 - \beta = \mathbb{P}_{H_1}(\bar{X}_n > k_\alpha) = \mathbb{P}\left(Z > \sqrt{n}\frac{k_\alpha - \mu_1}{\sigma_0}\right) \quad \text{où } Z = \frac{\bar{X}_n - \mu_1}{\sigma_0/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$\Rightarrow \beta = 1 - \mathbb{P}\left(Z > \sqrt{n}\frac{k_\alpha - \mu_1}{\sigma_0}\right)$$

$$\boxed{\Rightarrow \beta = \mathbb{P}\left(Z \leq \sqrt{n}\frac{k_\alpha - \mu_1}{\sigma_0}\right) = \phi\left(\sqrt{n}\frac{k_\alpha - \mu_1}{\sigma_0}\right)}$$

Application numérique : On a $\mu_1 = 0{,}1$, $k_\alpha \approx 0.2325$, $\sigma_0 = 1$, $n = 50$.

On a alors :

$$\sqrt{n}\frac{k_\alpha - \mu_1}{\sigma_0} = \sqrt{50}(0.2325 - 0.1) \approx 0.937$$

Donc :

$$\beta = \Phi(0.937) \approx 0.825$$

$$\Rightarrow \boxed{1 - \beta \approx 17.5\%}$$

Interprétation. La puissance du test chute significativement : il n'y a qu'environ 17.5% de chance de détecter que $\mu = 0.1$ lorsque c'est vrai. Cela signifie que ce test est peu sensible à de faibles écarts entre μ_1 et μ_0.

0.3 Conclusion

Le test de Neyman-Pearson pour $H_0 : \mu = 0$ contre $H_1 : \mu = 0.1$, avec $\sigma = 1$, $n = 50$, et $\alpha = 0{,}05$:

- Rejette H_0 si $\bar{X}_n > 0.2325$
- A une puissance d'environ $\approx 17.5\%$ pour $\mu_1 = 0.1$

Remarque. Ce faible niveau de puissance montre que le test a peu de chance de détecter une différence aussi faible que $\mu_1 = 0.1$ avec seulement $n = 50$ observations. Une augmentation de n serait nécessaire pour améliorer la sensibilité du test dans ce cas.