

# Analyse des résultats empiriques et théoriques

CHAU Sylvain

April 27, 2025

## 1 Tâche C.10

```
P_approx_2[0] = 0.065710
P_approx_2[1] = 0.267290
P_approx_2[2] = 0.267230
P_approx_2[3] = 0.065860
P_approx_2[4] = 0.264770
P_approx_2[5] = 0.068550
P_approx_2_alter[0] = 0.065985
P_approx_2_alter[1] = 0.265892
P_approx_2_alter[2] = 0.267229
P_approx_2_alter[3] = 0.066520
P_approx_2_alter[4] = 0.265906
P_approx_2_alter[5] = 0.066776
```

Figure 1: Comparaison des différentes méthodes

**Description :** Chaque indice correspond à un couple de cartes, vous trouverez ci-dessous ce que signifie chaque indice :

- 0  $\iff$  (1, 1)
- 1  $\iff$  (1, 2)
- 2  $\iff$  (1, 3)
- 3  $\iff$  (2, 2)
- 4  $\iff$  (2, 3)
- 5  $\iff$  (3, 3)

**Analyse :** On peut voir que les résultats des deux méthodes sont plutôt similaires pour un même  $n$ , ce qui signifie qu'on peut choisir la méthode que l'on veut.

## 2 Tâche C.11

### 2.1 Introduction

Dans cette étude, nous comparons des résultats empiriques issus de simulations avec les probabilités théoriques attendues. L'objectif est de vérifier la convergence des fréquences observées vers les probabilités théoriques et de visualiser cette convergence à l'aide d'un nuage de points.

### 2.2 Analyse de l'histogramme

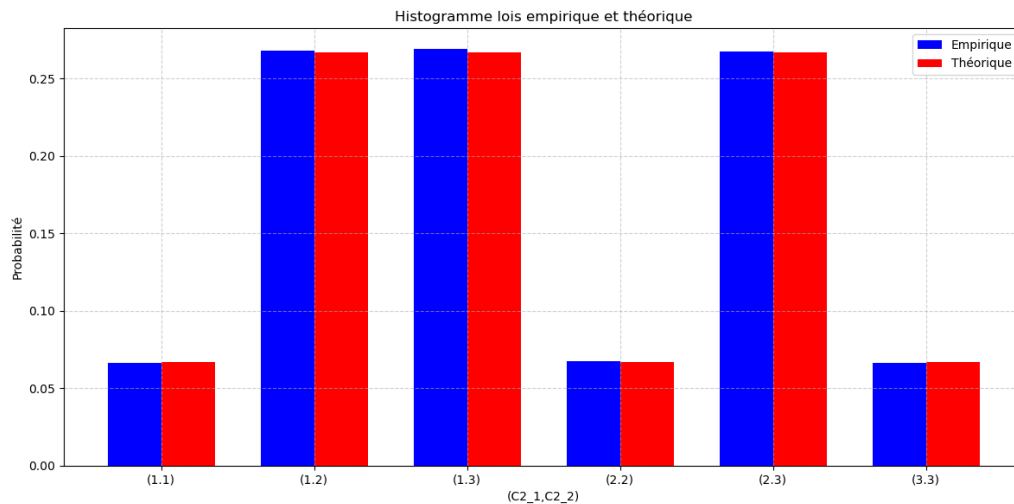


Figure 2: Histogramme comparant lois empirique et théorique

L'histogramme présente une comparaison entre les lois empirique et théorique:

- **Empirique** (en bleu) : basée sur des fréquences observées.
- **Théorique** (en rouge) : basée sur les probabilités attendues.

**Analyse:** Les barres bleues et rouges sont très proches pour chaque couple de valeurs, indiquant que la simulation est fidèle à la loi théorique. Les légères variations sont dues aux fluctuations aléatoires inhérentes aux simulations, mais elles restent faibles. La distribution semble respectée, notamment sur les couples ayant une probabilité élevée comme (1,2), (1,3) et (2,3).

## 2.3 Analyse du nuage de points

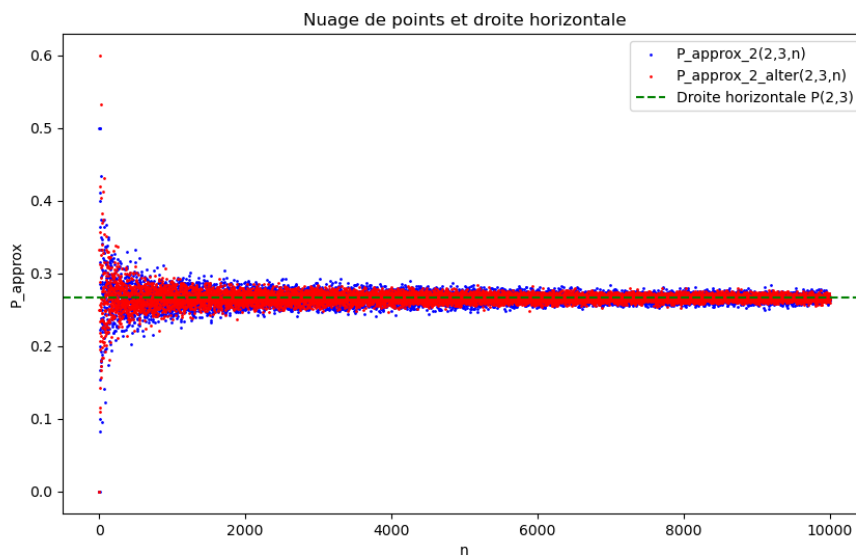


Figure 3: Nuage de points et droite horizontale de référence

Le nuage de points représente l'évolution de l'approximation de la probabilité  $P(2,3)$  en fonction du nombre d'observations  $n$ .

- Chaque point bleu et rouge correspond à une estimation empirique de  $P(2,3)$  à un instant donné.
- La droite verte représente la probabilité théorique  $P(2,3)$ .

**Analyse :** Nous observons qu'au début (petits  $n$ ), les estimations sont très dispersées: les approximations varient fortement. À mesure que  $n$  augmente, la dispersion diminue et les points se concentrent autour de la droite théorique. Ce phénomène illustre **la loi des grands nombres** : la moyenne empirique converge vers l'espérance théorique quand  $n \rightarrow +\infty$ .

## 2.4 Conclusion

L'histogramme et le nuage de points montrent une excellente concordance entre les résultats empiriques et théoriques. Les fluctuations observées au début de l'expérience diminuent avec l'augmentation du nombre d'observations, ce qui confirme les propriétés statistiques attendues. L'expérience valide donc les hypothèses théoriques et illustre de manière convaincante la convergence des fréquences vers les probabilités.

## 3 Tâche C.12

### 3.1 Calcul de la jointe $((C_1^1, C_2^1), (C_1^2, C_2^2))$

La loi jointe  $((C_1^1, C_2^1), (C_1^2, C_2^2))$  est définie par la relation suivante:

$$\mathbb{P}((C_1^1, C_2^1) = (i, j) \cap (C_1^2, C_2^2) = (i', j')) = \mathbb{P}((i, j)) \mathbb{P}((i', j') | (i, j))$$

Ainsi, la conjointe  $((C_1^1, C_2^1), (C_1^2, C_2^2))$  est donnée par le tableau suivant:

$(C_1^1, C_2^1) \backslash (C_1^2, C_2^2)$	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(2, 2)	(2, 3)	(3, 3)	$\mathbb{P}(C_1^1, C_2^1) = (i, j)$
(1, 1)	0	0	0	$\frac{1}{90}$	$\frac{4}{90}$	$\frac{1}{90}$	$\frac{1}{15}$
(1, 2)	0	$\frac{4}{90}$	$\frac{8}{90}$	0	$\frac{8}{90}$	$\frac{4}{90}$	$\frac{4}{15}$
(1, 3)	0	$\frac{8}{90}$	$\frac{4}{90}$	$\frac{4}{90}$	$\frac{8}{90}$	0	$\frac{4}{15}$
(2, 2)	$\frac{1}{90}$	0	$\frac{4}{90}$	0	0	$\frac{1}{90}$	$\frac{1}{15}$
(2, 3)	$\frac{4}{90}$	$\frac{8}{90}$	$\frac{8}{90}$	0	$\frac{4}{90}$	0	$\frac{4}{15}$
(3, 3)	$\frac{1}{90}$	$\frac{4}{90}$	0	$\frac{1}{90}$	0	0	$\frac{1}{15}$
$\mathbb{P}(C_1^2, C_2^2) = (i', j')$	$\frac{1}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	1

Le tableau fourni représente la loi jointe des couples aléatoires  $(C_1^1, C_2^1)$  et  $(C_1^2, C_2^2)$ . Pour calculer  $\mathbb{P}(C_2^1 \geq C_2^2)$ , nous devons sommer toutes les probabilités jointes où cette inégalité est satisfaite.

### Disjonction de cas

Cas où  $C_2^1 = 1$  :

$$\mathbb{P}_1(C_2^1 \geq C_2^2) = \mathbb{P}((1, 1), (1, 1)) = 0$$

**Cas où  $C_2^1 = 2$  :**

- Condition  $2 \geq C_2^2 \Rightarrow C_2^2 \in \{1, 2\}$
- $\mathbb{P}(C_2^1 \geq C_2^2) = \mathbb{P}((1, 2), (1, 1)) + \mathbb{P}((1, 2), (1, 2)) + \mathbb{P}((1, 2), (2, 2)) + \mathbb{P}((2, 2), (1, 1)) + \mathbb{P}((2, 2), (1, 2)) + \mathbb{P}((2, 2), (2, 2))$

$$\boxed{\mathbb{P}_2(C_2^1 \geq C_2^2) = \frac{4}{90} + \frac{1}{90} = \frac{5}{90}}$$

**Cas où  $C_2^1 = 3$  :**

- Condition  $3 \geq C_2^2$  est toujours vraie  $\Rightarrow C_2^2 \in \{1, 2, 3\}$
- Ainsi :

$$\text{Pour } (C_1^1, C_2^1) = (1, 3) : 0 + \frac{8}{90} + \frac{4}{90} + \frac{4}{90} + \frac{8}{90} + 0 = \frac{24}{90}$$

$$\text{Pour } (C_1^1, C_2^1) = (2, 3) : \frac{4}{90} + \frac{8}{90} + \frac{8}{90} + 0 + \frac{4}{90} + 0 = \frac{24}{90}$$

$$\text{Pour } (C_1^1, C_2^1) = (3, 3) : \frac{1}{90} + \frac{4}{90} + 0 + \frac{1}{90} + 0 + 0 = \frac{6}{90}$$

$$\boxed{\mathbb{P}_3(C_2^1 \geq C_2^2) = \frac{24}{90} + \frac{24}{90} + \frac{6}{90} = \frac{54}{90}}$$

**On obtient donc :**

$$\boxed{\mathbb{P}(C_2^1 \geq C_2^2) = \mathbb{P}_1(C_2^1 \geq C_2^2) + \mathbb{P}_2(C_2^1 \geq C_2^2) + \mathbb{P}_3(C_2^1 \geq C_2^2) = 0 + \frac{5}{90} + \frac{54}{90} = \frac{59}{90}}$$