Pertemua ke-4

Komposisi Fungsi

Fungsi Komposisi

Interpretasi Geometris

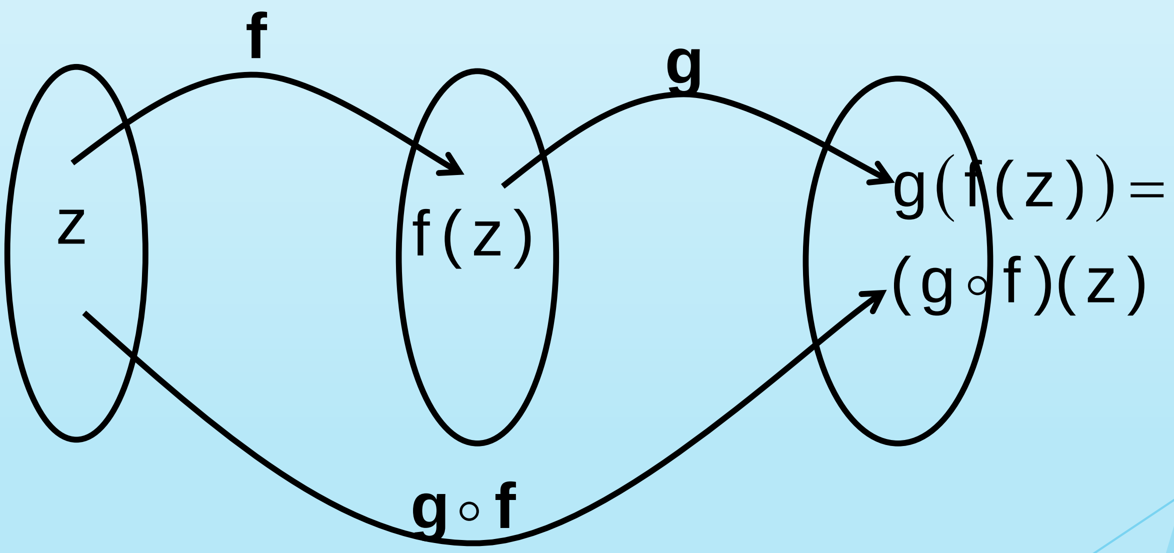
Limit dan Kekontinuan

Komposisi Fungsi

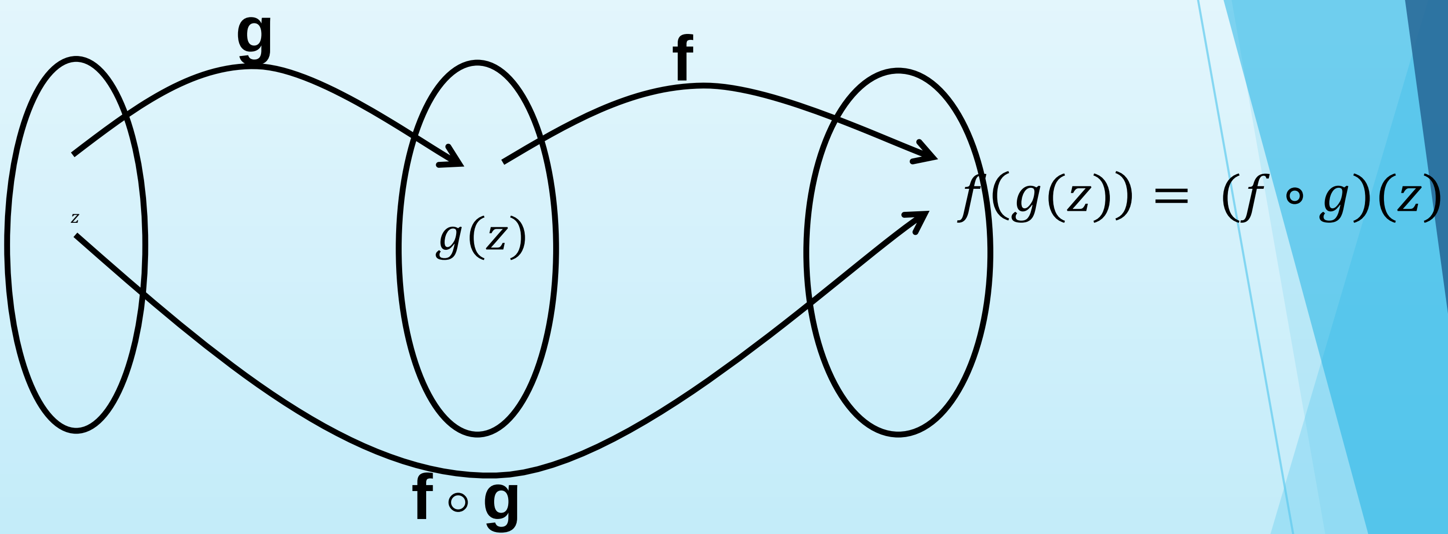
Diberikan fungsi $f(z)$ dengan domain D_f dan fungsi $g(z)$ dengan domain D_g.

- Jika $R_f \cap Dg \neq \phi$, maka ada fungsi komposisi

  $(g \circ f)(z) = g(f(z))$, dengan domain D_f.



- Jika $R_g \cap D_f \neq \phi$, maka ada fungsi komposisi $(f \circ g)(z) = f(g(z))$, dengan domain D_g.



:: Tidak berlaku hukum komutatif pada

$(g \circ f)(z)$ dan $(f \circ g)(z)$.

Contoh :

Misal: $f(z) = 3z - i$ dan $g(z) = z^2 + z - 1 + i$

- Jika $R_f \cap D_g \neq \phi$,

  maka $(gf)(z) = g(f(z))$

  $= g(3z - i)$

  $= (3z - i)^2 + (3z - i) - 1 + i$

  $= 9z^2 - 6iz - 1 + 3z - i - 1 + i$

  $= 9z^2 + 3z - 2 - 6iz$

- Jika $R_g \cap D_f \neq \phi$,

  maka $(f \circ g)(z) = f(g(z))$

  $= f(z^2 + z - 1 + i)$

  $= 3z^2 + 3z - 3 + 3i - i$

  Karena $9z^2 - 3z - 2 - 6iz \neq 3z^2 + 3z - 3 + 3i - i$

  Jadi $(g \circ f)(z) \neq (f \circ g)(z)$ atau

  $(g \circ f) \neq (f \circ g)$, (tidak komutatif)

Interpretasi Geometris dari Fungsi

Untuk setiap variabel bebas $z = x + iy$ anggota domain ada satu dan hanya satu variabel tak bebas $w = u + iv$ yang terletak pada suatu bidang kompleks.

Masing-masing variabel terletak pada suatu bidang kompleks, z pada bidang Z dan w pada bidang W.

Interpretasi Geometris

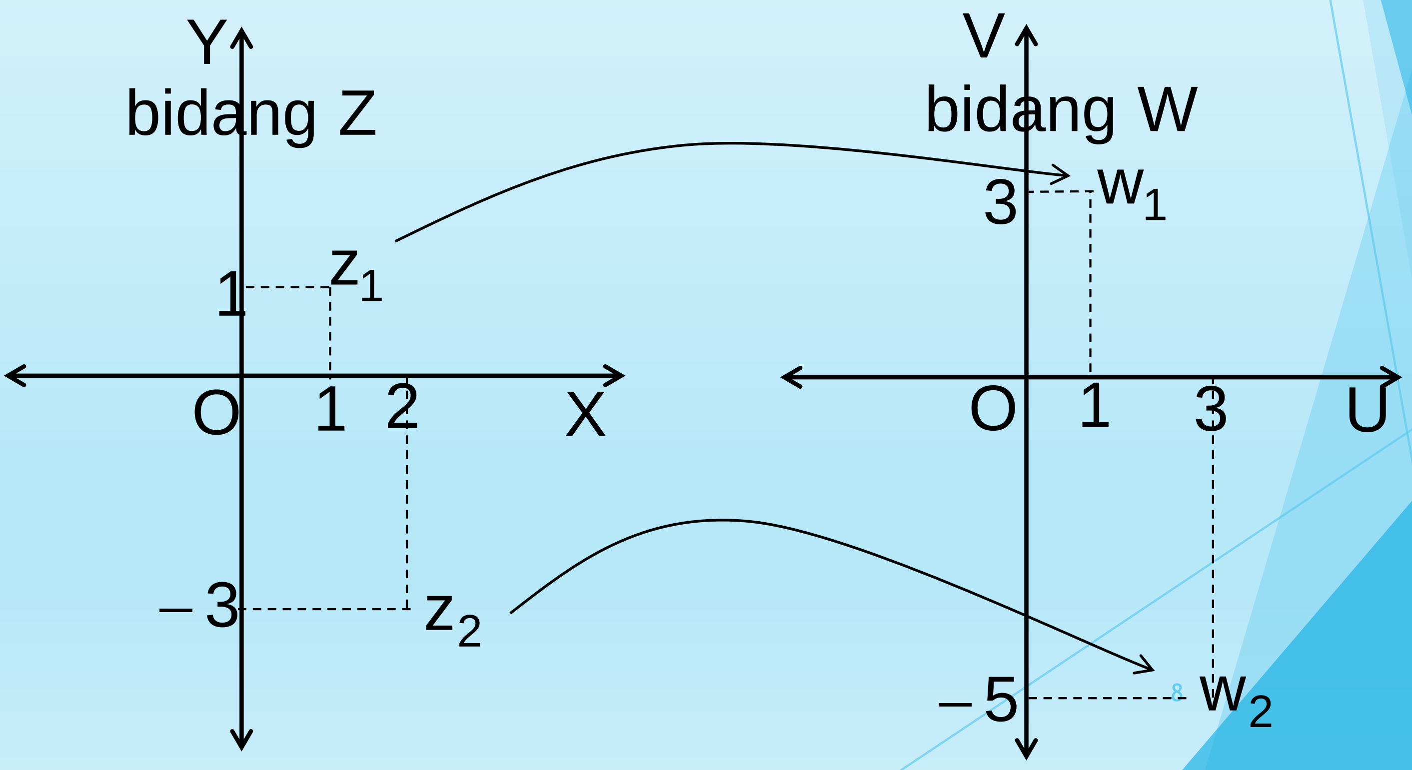
Oleh Karena pasangan (z,w) mengandung 4 dimensi, maka kita tidak dapat menggambarkannya pada satu sistem.

Tetapi kita dapat melihat gambaran dari $w = f(z)$. Caranya dengan memandang fungsi f tersebut sebagai pemetaan (transformasi) dari titik di bidang Z ke titik di bidang W dengan aturan f.

Untuk suatu titik z maka f(z) disebut peta dari z.

Contoh 1 :

Diketahui fungsi $w = 2z - 1 + i$. Untuk setiap variabel bebas $z = x + iy$ didapat nilai $w = (2x - 1) + (2y + 1)i$. Misalnya untuk $z_1 = 1 + i$, dan $z_2 = 2 - 3i$, berturut-turut diperoleh : $w_1 = 1 + 3i$, dan $w_2 = 3 - 5i$. Gambar dari z_1, z_2, w_1 , dan w_2 dapat dilihat di bawah ini



Contoh 2 :

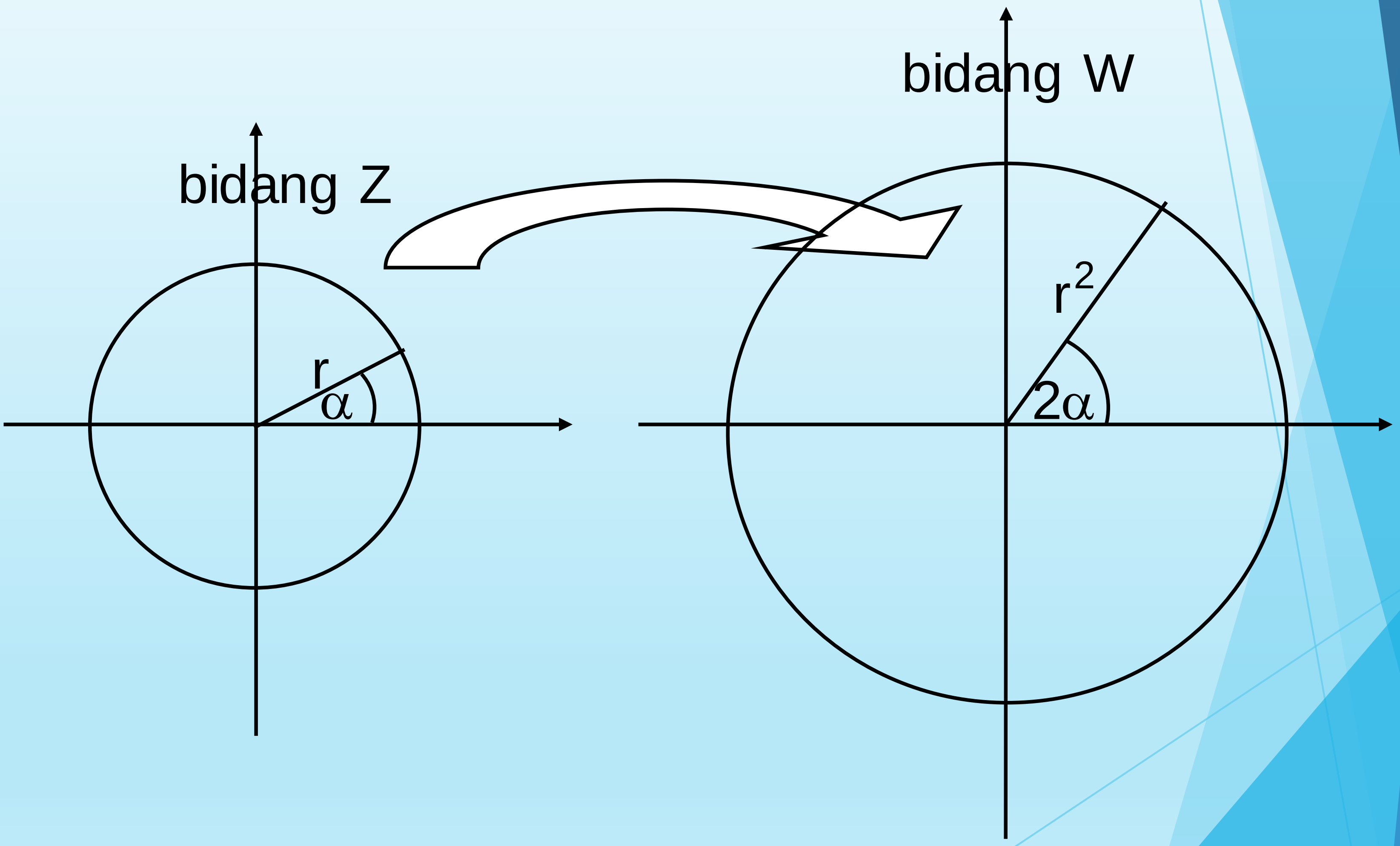
Diketahui fungsi $w = z^2$.

Dengan menggunakan $z = r\,(\cos\theta + i\sin\theta)$, maka diperoleh $w = z^2 = r^2\,(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$.

Jika sebuah lingkaran pusat O berjari-jari r pada bidang Z, maka dapat dipetakan ke bidang W menjadi sebuah lingkaran pusat O berjari-jari r^2. Daerah $0 \le \arg z \le \alpha$ dipetakan menjadi daerah

$0 \le \arg w \le 2\alpha$.

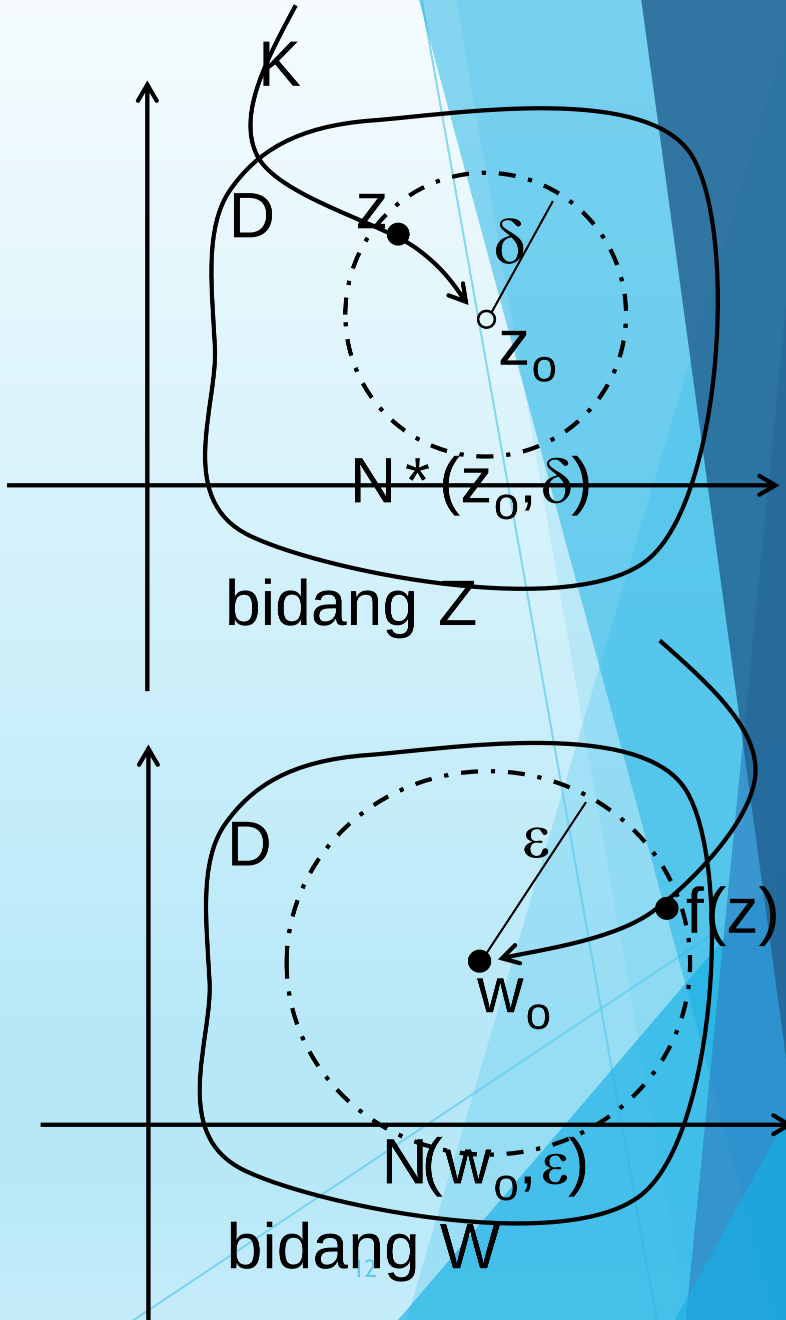
Gambar keduanya dapat dilihat di bawah ini.


bidang Z
r
α
bidang W
r^2
2α

Limit dan Kekontinuan

Limit

Diketahui daerah D pada bidang Z dan titik z_o terletak di dalam D atau pada batas D. Misalkan fungsi w = f(z) terdefinisi pada D, kecuali di z_o.



Apabila titik z bergerak mendekati titik z_o melalui setiap lengkungan sebarang K dan mengakibatkan nilai f(z) bergerak mendekati suatu nilai tertentu, yaitu w_o pada bidang W, maka dikatakan limit f(z) adalah w_o untuk z mendekati z_o, ditulis :

$$\lim_{z \to z_o} f(z) = w_o$$

Definisi :

Misalkan fungsi $w = f(z)$ terdefinisi pada daerah D, kecuali di z_o (titik z_o di dalam D atau pada batas D). limit $f(z)$ adalah w_o untuk z mendekati z_o, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga

$|f(z) - w_o| < \varepsilon$, apabila $0 < |z - z_o| < \delta$,

ditulis: $\lim\limits_{z \to z_o} f(z) = w_o$

Perlu diperhatikan bahwa :

1. Titik z_o adalah titik limit domain fungsi f.
2. Titik z menuju z_o melalui sebarang lengkungan K, artinya z menuju z_o dari segala arah.
3. Apabila z menuju z_o melalui dua lengkungan yang berbeda, mengakibatkan f(z) menuju dua nilai yang berbeda, maka limit fungsi f tersebut tidak ada untuk z mendekati z_o.

Contoh 1 :

Buktikan bahwa :

$$\lim_{z \to 2} \frac{2z^2 - 3z - 2}{z - 2} = 5$$

Contoh 1 :

Buktikan bahwa : $$\lim_{z\to 2}\frac{2z^2-3z-2}{z-2}=5$$

Bukti:

Misalkan diberikan bilangan $\varepsilon > 0$, kita akan mencari $\delta > 0$ sedemikian, sehingga:

$$0<|z-2|<\delta \Rightarrow \left|\frac{2z^2-3z-2}{z-2}-5\right|<\varepsilon$$, untuk $z \neq 2$

Lihat bagian sebelah kanan

Dari persamaan kanan diperoleh:

$$\left|\frac{2z^2-3z-2}{z-2}-5\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{(2z+1)(z-2)}{(z-2)}-5\right|<\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{(2z+1-5)(z-2)}{(z-2)}\right|<\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |2(z-2)|<\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |z-2|<\frac{\varepsilon}{2}$$

Hal ini menunjukkan bahwa $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$ telah diperoleh.

Bukti Formal :

Jika diberikan $\varepsilon > 0$, maka pilih $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, sehingga untuk $z \neq 2$, diperoleh

$$0 < |z-2| < \delta \Rightarrow \left| \frac{2z^2 - 3z - 2}{z-2} - 5 \right|$$

$$= \left| \frac{(2z+1)(z-2)}{(z-2)} - 5 \right|$$

$$= |2(z-2)| < 2\delta = \varepsilon$$

Jadi $\left| \frac{2z^2 - 3z - 2}{z-2} - 5 \right| < \varepsilon$ apabila $0 < |z-2| < \delta = \frac{\varepsilon}{2}$

Terbukti $\lim_{z \to 2} \frac{2z^2 - 3z - 2}{z-2} = 5$

Teorema Limit :

Teorema 1 :

Jika fungsi f mempunyai limit untuk z menuju z_o , maka nilai limitnya tunggal.

Teorema Limit :

Teorema 1 :

Jika fungsi f mempunyai limit untuk z menuju z_o , maka nilai limitnya tunggal.

Bukti:

Misal limitnya w_1 dan w_2, maka

$$|f(z) - w_1| = |w_1 - f(z)| = \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|f(z) - w_2| = \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|w_1 - f(z) + f(z) - w_2| \leq |w_1 - f(z)| + |f(z) - w_2| = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

sehingga $|w_1 - w_2| \leq \varepsilon$

jadi $w_1 = w_2$

Teorema 2 :

Misalkan $z = (x,y) = x+iy$ dan $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ dengan domain D. Titik $z_o = (x_o,y_o) = x_o+iy_o$ di dalam D atau batas D.

Maka $\lim\limits_{z \to z_o} f(z) = x_o + iy_o$ jika dan hanya jika

$\lim\limits_{z \to z_o} u(x,y) = x_o$ dan $\lim\limits_{z \to z_o} v(x,y) = y_o$

Limit

Misal $f(z) = U(x,y) + i\,V(x,y)$, $z_0 = x_0 + iy_0$ dan $w_0 = u_0 + iv_0$, maka

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} U(x,y) = u_0 \text{ dan } \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} V(x,y) = v_0$$

Fungsi $f(z)$ dikatakan kontinu di z_0 bila $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

Misal $f(z) = U(x,y) + i\,V(x,y)$, maka $f(z)$ kontinu di $z_0 = (x_0 ,y_0)$ bila dan hanya bila $U(x,y)$ dan $V(x,y)$ kontinu di (x_0 ,y_0)

Teorema 3 :

Misalkan fungsi f dan g limitnya ada.

lim f(z) = a dan lim g(z) = b, maka

1. lim (f(z) +g(z)) = a + b (untuk $z \to z_o$)
2. lim (f(z) . g(z)) = a . b (untuk $z \to z_o$)
3. lim (f(z) / g(z)) = a / b (untuk $z \to z_o$)

Tugas : Buktikan ketiga teorema limit tersebut !

Contoh 1 :

Hitunglah $\lim\limits_{z \to i} \dfrac{z^2 + 1}{z - i}$

Contoh 1 :

Hitunglah $\lim_{z \to i} \frac{z^2 + 1}{z - i}$

Jawab:

$$\lim_{z \to i} \frac{z^2 + 1}{z - i}$$

$$= \lim_{z \to i} \frac{(z + i)(z - i)}{z - i}$$

$$= \lim_{z \to i} (z + i)$$

$$= 2i$$

Contoh 2 :

Jika $f(z) = \frac{2xy}{x^2 + y^2} + \frac{x^2}{y+1} i$. Buktikan $\lim\limits_{z \to 0} f(z)$ tidak ada !

Contoh 2 :

Jika $f(z) = \frac{2xy}{x^2+y^2} + \frac{x^2}{y+1}i$ Buktikan $\lim_{z \to 0} f(z)$ tidak ada !

Bukti :

Kita tunjukkan bahwa untuk z menuju 0 di sepanjang garis y = 0, maka

$$\lim_{z \to 0} f(z) = \lim_{(x,0)\to(0,0)} f(z) = \lim_{x \to 0} x^2 i = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 1$$

Sedangkan di sepanjang garis y = x,

$$\lim_{z \to 0} f(z) = \lim_{(x,x)\to(0,0)} f(z) = \lim_{x \to 0}\left(1 + \frac{x^2}{x+1}i\right) = 1 \quad \cdots\cdots\cdots 2$$

Dari 1 dan 2, terbukti $\lim_{z \to 0} f(z)$ tidak ada

Kekontinuan Fungsi

Definisi :

Misalkan fungsi $f(z)$ terdefinisi di D pada bidang Z dan titik z_o terletak pada interior D, fungsi $f(z)$ dikatakan kontinu di z_o jika untuk z menuju z_o, maka $\lim f(z) = f(z_o)$.

Jadi, ada tiga syarat fungsi f(z) kontinu di z_o, yaitu :

1. $f(z_o)$ ada
2. $\lim_{z \to z_o} f(z)$ ada
3. $\lim_{z \to z_o} f(z) = f(z_o)$

Fungsi f(z) dikatakan kontinu pada suatu daerah R, jika f(z) kontinu pada setiap titik pada daerah R tersebut.

Kekontinuan

Limit dari f(z) di z= z_0 ($z \rightarrow z_0$) sama dengan w_0 , dituliskan :

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$$

Sifat-sifat limit :

$$(1).\ \lim_{z \to z_0} \left[f(z) \pm g(z) \right] = \lim_{z \to z_0} f(z) \pm \lim_{z \to z_0} g(z)$$

$$(2).\ \lim_{z \to z_0} \left[f(z) g(z) \right] = \lim_{z \to z_0} f(z) \lim_{z \to z_0} g(z)$$

$$(3).\ \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim_{z \to z_0} f(z)}{\lim_{z \to z_0} g(z)} \qquad \lim_{z \to z_0} g(z) \neq 0$$

Teorema 5 :

Andaikan f(z) dan g(z) kontinu di z_o, maka masing-masing fungsi :

1. $f(z) + g(z)$
2. $f(z) \cdot g(z)$
3. $f(z) / g(z)$, $g(z) \neq 0$
4. $f(g(z))$; f kontinu di $g(z_o)$,

kontinu di z_o.

Contoh 1 :

Fungsi f(z) = $\begin{cases} \dfrac{z^2+4}{z-2i}, \; z \neq 2i \\ \\ 3+4z, \; z = 2i \end{cases}$, apakah kontinu di 2i

Jawab :

f(2i) = 3 + 4(2i) = 3 + 4i,

sedangkan untuk z mendekati 2i, lim f(z) = z + 2i,

jadi f(z) diskontinu di z = 2i.

sehingga $\lim\limits_{z\to 2i} f(z) \neq f(2i)$

Turunan

Turunan dari f(z) di z_0 dinyatakan
:

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Atau

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

Perhitungan turunan f(z) dengan melihat kemungkinan notasi f(z)

1. f(z) dinyatakan secara eksplisit dalam peubah z.
2. f(z) dinyatakan sebagai
   $f(z) = U(x,y) + i\,V(x,y)$, dan
3. f(z) dinyatakan dalam sebagai
   $f(z) = U(r,\theta) + i\,V(r,\theta)$

Turunan

f(z) dinyatakan secara eksplisit dalam peubah z

Rumus turunan yang digunakan:

$$(1).\ \frac{d\left(z^{r}\right)}{dz} = r\,z^{r-1}$$

$$(2).\ \frac{d\left(f(z) + g(z)\right)}{dz} = f'(z) + g'(z)$$

$$(3).\ \frac{d\left(f(z)g(z)\right)}{dz} = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$$

$$(4).\ \frac{d\left(f(z) \big/ g(z)\right)}{dz} = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^{2}(z)}$$

Turunan

Contoh : Tentukan turunan pertama :

(1). $f(z) = \sqrt{z-i}\left(z^2+1\right)$

$$\frac{d\left(h(z)g(z)\right)}{dz} = h'(z)g(z) + h(z)g'(z)$$

$h(z) = \sqrt{z-i} \rightarrow h'(z) = \dfrac{1}{2\sqrt{z-i}}$

$g(z) = \left(z^2+1\right) \rightarrow g'(z) = 2z$

$$f'(z) = \frac{z^2+1}{2\sqrt{z-i}} + 2z\sqrt{z-i}$$

(2). $f(z) = \dfrac{z^2+1}{z^2-i}$

$$\frac{d\left(g(z)/h(z)\right)}{dz} = \frac{g'(z)h(z) - g(z)h'(z)}{h^2(z)}$$

$g(z) = z^2 + 1 \rightarrow g'(z) = 2z$

$h(z) = z^2 - i \rightarrow h'(z) = 2z$

$$f'(z) = \frac{2z\left(z^2-i\right) - 2z\left(z^2+1\right)}{\left(z^2-i\right)^2} = \frac{-2z(1+i)}{\left(z^2-i\right)^2}$$

Soal Latihan

1. Tentukan turunan pertama dari fungsi :
   a) $f(z) = (2iz^2 + 1)^3$
   b) $f(z) = (z + 2i) / (i - 2z)$
   c) $f(z) = (3 + iz)^2 (z^2 - 1)^3$
2. Carilah nilai turunan pertama di nilai yang diberikan
   a) $f(z) = i/(z + 2)^2$ di $z = 1 - 2i$
   b) $f(z) = (z^2 - 2i)^2$ di $z = 2i$
   c) $f(z) = (z - zi) / (z^2 + i)$ di $z = -i$

Turunan

f(z) dinyatakan sebagai f(z) = U(x,y) + i V(x,y)

f(z) = U(x,y) + i V(x,y) dapat diturunkan di $z_0 = x_0 + i\, y_0$ bila berlaku Persamaan Cauchy Riemann (PCR) :

$$U_x(x_0, y_0) = V_y(x_0, y_0)$$
$$U_y(x_0, y_0) = -V_x(x_0, y_0)$$

Turunan parsial

$$\Downarrow$$

$$f\,'(z_0) = U_x(x_0, y_0) + i\, V_x(x_0, y_0)$$

Contoh

Apakah f(z) dapat diturunkan di z = i ?

$$f(z) = e^{x} e^{iy} = e^{x}(\cos y + i \sin y)$$

$$U(x,y) = e^{x}\cos y \qquad V(x,y) = e^{x}\sin y$$

$$U_x = e^{x}\cos y \qquad V_x = e^{x}\sin y$$

$$U_y = -e^{x}\sin y \qquad V_y = e^{x}\cos y$$

di z = i (x = 0 dan y = 1)

z = x + iy

$u_x = \cos 1 \quad v_y = \cos 1$

$u_y = -\sin 1 \quad v_x = \sin 1$

$$f'(i) = \cos 1 + i \sin 1$$

Contoh

Apakah f(z) dapat diturunkan di z = i ?

$$f(z) = e^{-x} e^{iy} = e^{-x}(\cos y + i \sin y)$$

$$U(x,y) = e^{-x}\cos y \qquad V(x,y) = e^{-x}\sin y$$

$$U_x = -e^{-x}\cos y \qquad V_x = -e^{-x}\sin y$$

$$U_y = -e^{-x}\sin y \qquad V_y = e^{-x}\cos y$$

di z = i (x = 0 dan y =1)

$$U_x = -\cos 1 \quad U_y = -\sin 1$$

$$V_x = -\sin 1 \quad V_y = \cos 1$$

$$U_x \neq V_y$$

Tidak dapat diturunkan di z = i

Contoh

Carilah semua titik sehingga f(z) dapat diturunkan

$$f(z) = x^3 + i(y-1)^3$$

$$U(x,y) = x^3 \qquad V(x,y) = (y-1)^3$$

$$U_x = 3x^2 \qquad V_x = 0$$

$$U_y = 0 \qquad V_y = 3(y-1)^2$$

PCR → $U_x = V_y$ dan $U_y = -V_x$

$$3x^2 = 3(y-1)^2 \quad \text{dan} \quad 0 = 0$$

$0 = x^2 - (y - 1)^2$
$= [x - (y - 1)][x + (y - 1)]$
→ $x - y = -1$ atau $x + y = 1$

Turunan # 5

f(z) dinyatakan sebagai
$f(z) = U(r,\theta) + i\,V(r,\theta)$

PCR dalam koordinat polar :

$$U_r = \frac{1}{r} V_\theta \text{ dan } \frac{1}{r} U_\theta = -V_r$$

Turunan dari f(z) dinyatakan :

$$f'(z) = e^{-i\theta}\left(U_r + iV_r\right) \quad U_r = \cos\theta = 1$$

Contoh : f(z) diferensiabel di z = 1 ?

$$f(z) = 1 + re^{-i\theta} = 1 + r\cos\theta - i\,r\sin\theta$$

$U(r,\theta) = 1 + r\cos\theta$ $\quad$ $V(r,\theta) = -r\sin\theta$

$U_r = \cos\theta$ $\quad$ $V_r = -\sin\theta$

$U_\theta = -r\sin\theta$ $\quad$ $V_\theta = -r\cos\theta$

di z = 1 (r = 1 dan θ = 0)

$$V_\theta = -1$$

$$U_r \neq \frac{1}{r} V_\theta$$ → Tidak berlaku PCR

$\boxed{\text{Tidak diferensiabel di } z = 1}$

Soal Latihan

1. Apakah fungsi berikut diferensiabel di nilai yang diberikan ? Bila ya, tentukan nilai turunan di nilai tersebut
   a. $f(z) = (z^2 + i) / (z - i)$ di $z = i$
   b. $f(z) = x^2y + ixy^2$ di $z = 0$
   c. $f(z) = e^{-x} e^{-iy}$ di $z = i$
   $d.\ f(z) = iz - 2\bar{z}\ di\ z = 0$

2. Carilah titik yang menyebabkan fungsi berikut tidak diferensiabel
   1. $f(z) = (2z + i)/ (z^2 + i)$
   2. $f(z) = (x + 2y^2) + i(2y + x^2)$