

Chapitre 3 : Espaces vectoriels

I Corps

Définition : Un **corps** est un ensemble K muni de deux lois de composition interne notées $+$ et \times telles que :

- $(K, +)$ est un groupe abélien
- $(K \setminus \{0\}, \times)$ est un groupe abélien
- La loi \times est distributive par rapport à la loi $+$

Si de plus la loi \times est commutative, on dit que K est un **corps commutatif**.

Rappel : Distributivité : $\forall a, b, c \in K, a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

Exemple : $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, p$ premier sont des corps.

II Espaces vectoriels

Définition : Soient K un corps et E un groupe abélien.

Soit une loi $: \begin{matrix} K \times E \rightarrow E \\ (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v \end{matrix}$ (*multiplication externe*).

On dit que $(E, +, \cdot)$ est un **K -espace vectoriel** si on a $\forall \lambda, \mu \in K, \forall v \in E$:

- $\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \times \mu) \cdot v$
- $1 \cdot v = v$
- $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$ (*on a deux + différents*)
- $\lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w$

Vocabulaire : Les éléments de E sont appelés **vecteurs**. Les éléments de K sont appelés **scalaires**.

Exemple : \mathbb{R}^n est un \mathbb{R} -espace vectoriel. De même pour $\{0\}, \mathbb{R}[X], M_n(\mathbb{R})$.
On peut voir \mathbb{C} comme un \mathbb{R} -espace vectoriel.

Définition : Soit E un K -ev, et soit $(v_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E .

Soit $(\lambda_i)_{i \in I}$ une famille de scalaires de K .

On dit que $(\lambda_i)_{i \in I}$ est presque nulle si : $\{i \in I, \lambda_i \neq 0\}$ est fini.

Alors on considère $\sum_{i \in I, \lambda_i \neq 0} \lambda_i v_i$ noté $\sum_{i \in I} \lambda_i v_i$. C'est une **combinaison linéaire** des v_i .

Définition : Soit $X \subset E$. Une combinaison linéaire de vecteurs de X est de la forme $\sum_{v \in X} \lambda_v v$ avec $(\lambda_v)_{v \in X}$ presque nulle.

Vocabulaire : Les $(\lambda_v)_{v \in X}$ sont appelés les **coefficients** de la combinaison linéaire.

III Sous-espaces vectoriels

Définition : Soit E un K -ev. Soit $F \subset E$.

On dit que F est un **sous-espace vectoriel** (sous-ev) de E si :

- $F \neq \emptyset$
- $\forall u, v \in F, \lambda, \mu \in K, \lambda u + \mu v \in F$

Proposition : Caractérisation des sous-ev

Tout sous-espace vectoriel est un espace vectoriel pour les lois induites par E .


Preuve:

Montrons $(F, +)$ est un sous-groupe de $(E, +)$:

- $F \neq \emptyset$ donc $\exists u \in F$.
- $\lambda = \mu = 1 \implies u + v \in F, \forall u, v \in F$ donc F est stable par $+$
- $u + (-1)u = u(1 + (-1)) = 0_E \in F$. On a donc $-u \in F, \forall u \in F$.

Donc on a bien un sous-groupe.

Les autres propriétés sont vérifiables et immédiates, on a bien un espace vectoriel

 **Exemple :** Soit E un \mathbb{K} -ev.

- $\{0_E\}$ et E sont des sous-ev de E .
- $\{(x, y) \mid ax + by = 0\} \subset \mathbb{R}^2$ est un sous-ev de \mathbb{R}^2 .

Proposition : Intersection de sev

Soit E un K -ev. Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sev de E .

Alors $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un sev de E .

Preuve:

Montrons que $\bigcap_{i \in I} F_i$ est stable par combinaison linéaire.

Soient $x, y \in \bigcap_{i \in I} F_i$ et $\lambda, \mu \in K$.

On a $x, y \in F_i$ pour tout $i \in I$, donc $\lambda x + \mu y \in F_i$ pour tout $i \in I$.

Donc $\lambda x + \mu y \in \bigcap_{i \in I} F_i$. \square

 **Remarque :** L'union de sev n'est pas forcément un sev.


Proposition : Sous-ev engendré

Soit E un K -ev. Soit $X \subset E$.

Alors il existe un plus petit sev de E contenant X , noté $\text{Vect}(X)$ et appelé le **sev engendré** par X .

On a $\text{Vect}(X) = \left\{ \sum_{x \in X} \lambda_x x \mid (\lambda_x)_{x \in X} \text{ est presque nulle, } \lambda_x \in K \right\} = \bigcap_{\substack{F \text{ sev de } E \\ X \subset F}} F$.

Intuitivement, c'est l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de X .

 **Rappel :** "Presque nulle" signifie que tous les coefficients sont nuls sauf un nombre fini d'entre eux.

Preuve:

Montrons que $\text{Vect}(X)$ est un sev de E .

Soient $u, v \in \text{Vect}(X)$ et $\lambda, \mu \in K$.

On a $u = \sum_{x \in X} \lambda_x x$ et $v = \sum_{x \in X} \mu_x x$ avec $(\lambda_x)_{x \in X}$ et $(\mu_x)_{x \in X}$ presque nulles.

Donc $\lambda u + \mu v = \sum_{x \in X} (\lambda \lambda_x + \mu \mu_x) x$ est une combinaison linéaire d'éléments de X avec des coefficients presque

nuls.

Donc $\lambda u + \mu v \in \text{Vect}(X)$. C'est bien un sev.

On a $X \subset \{CLdeX\}$ car $x = 1 \cdot x + 0 \cdot y, \forall x \in X, y \in E$.

Donc $\text{Vect}(X) \subset \{CLdeX\}$.

Réciproquement, $\text{Vect}(X)$ est stable par combinaison linéaire et contient X , donc $\{CLdeX\} \subset \text{Vect}(X)$. Donc $\text{Vect}(X) = \{CLdeX\}$. \square .

Remarque : La démonstration est générée par IA, elle diffère de celle du cours.

Proposition : Addition de sev

Soit E un K -ev. Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sev de E .

On peut considérer $\text{Vect}(\bigcup_{i \in I} F_i)$, noté $\sum_{i \in I} F_i$ et appelé la **somme** de la famille $(F_i)_{i \in I}$.

Remarque : On note $F_1 + F_2 + \dots + F_n$ au lieu de $\sum_{i=1}^n F_i$.

Proposition : Caractérisation de la somme

Soit E un K -ev. Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sev de E .

Alors $\sum_{i \in I} F_i = \{\sum_{i \in I} x_i \mid x_i \in F_i, \text{ presque tous nuls}\}$.

Preuve:

Note de rédaction : cf. Laurent

Exemple : Soient F et G deux sev de E .

Alors $F + G = \{x + y \mid x \in F, y \in G\}$.

Proposition : Application

On a une application $\varphi : \begin{matrix} F_1 \times F_2 \times \dots \times F_n \rightarrow F_1 + F_2 + \dots + F_n \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto x_1 + x_2 + \dots + x_n \end{matrix}$.

Elle est surjective.

Vocabulaire : Si de plus l'application φ est injective, alors on dit que la somme $F_1 + F_2 + \dots + F_n$ est **directe** et on note $F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_n$.

Proposition : Caractérisation de la somme directe

Soient F_1, F_2, \dots, F_n des sev de E . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- $F_1 + F_2 + \dots + F_n$ est une somme directe.
- $\forall (u_1, u_2, \dots, u_n) \in F_1 \times F_2 \times \dots \times F_n, u_1 + u_2 + \dots + u_n = 0_E \implies u_1 = u_2 = \dots = u_n = 0_E$
- $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, F_i \cap (F_1 + \dots + F_{i-1}) = \{0_E\}$

Preuve:

Note de rédaction : cf. Laurent

Attention : On a F_1 somme directe avec F_2 ssi $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$. Mais pour avoir $F_1 \oplus F_2$ et $F_1 \oplus F_3$, et $F_2 \oplus F_3 = \{0_E\}$, mais pas forcément $F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$.

Exemple : On prend 3 droites dans le plan passant par l'origine, deux par deux distinctes.

Alors elles sont en somme, mais pas en somme directe.

💬 **Vocabulaire :** Si $F \oplus G = E$, on dit que F et G sont des **supplémentaires**.

✗ **Attention** ✗ Le supplémentaire n'est pas unique.

IV Familles

Définition : Soit E un K -ev. Soit I un ensemble.
Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de E .

Soit $J \subset I$. On dit que $(x_i)_{i \in J}$ est une **sous-famille** de $(x_i)_{i \in I}$.

💬 **Vocabulaire :** À l'inverse, $(x_i)_{i \in I}$ est une **sur-famille** de $(x_i)_{i \in J}$.

📌 **Remarque :** Dans la pratique, on prend souvent $I = \{1, 2, \dots, n\}$.

📌 **Remarque :** Soit $X \subset E$. On a une famille $(x)_{x \in X}$ indexée par X .
Donc une combinaison linéaire de X est une combinaison linéaire de la famille $(x)_{x \in X}$. (la réciproque n'est pas vraie, car il peut y avoir des répétitions dans la famille: $x+x$ n'est pas une combinaison linéaire de X)

Définition : Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E .
On dit que $(x_i)_{i \in I}$ est **libre** si :
 $\forall (\lambda_i)_{i \in I}$ presque nulle, $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0_E \implies \forall i \in I, \lambda_i = 0$.
On dit que $(x_i)_{i \in I}$ est **liée** sinon.

Pour $X \subset E$, on dit que X est une partie libre (resp. liée) si la famille $(x)_{x \in X}$ est libre (resp. liée).

💡 **Exemple :** Dans \mathbb{R}^3 , les vecteurs $(1, 0, 0)$ et $(0, 1, 0)$ sont libres.
Les vecteurs $(1, 0, 0)$ et $(2, 0, 0)$ sont liés.

Définition : Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E .
On dit que c'est une **famille génératrice** de E si $\text{Vect}(\{x_i \mid i \in I\}) = E$.

Alors tout élément de E s'écrit comme une combinaison linéaire des x_i .
Pour $X \subset E$, on dit que X est une partie génératrice de E si la famille $(x)_{x \in X}$ est génératrice de E .

Proposition : Sous-familles

Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E .
Alors toute sous-famille $(x_j)_{j \in J}$ de $(x_i)_{i \in I}$ est libre (resp. liée) si $(x_i)_{i \in I}$ est libre (resp. liée).
Et toute sur-famille $(x_k)_{k \in K}$ de $(x_i)_{i \in I}$ est génératrice (resp. non génératrice) si $(x_i)_{i \in I}$ est génératrice (resp. non génératrice).

(de même pour un sous-ensemble et un sur-ensemble d'une partie de E)

V Bases

Définition : Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E .

On dit que $(x_i)_{i \in I}$ est une **base** de E si c'est une famille libre et génératrice de E .

Pour $X \subset E$, on dit que X est une partie basique de E si c'est une partie libre et génératrice de E . Alors la famille $(x)_{x \in X}$ est une base de E .

💬 **Vocabulaire :** Une partie basique appelée une **base** par abus de langage.

Théorème : Coordonnées

Soit $(b_i)_{i \in I}$ une base de E , et soit $u \in E$.

Alors il existe une unique famille $(\lambda_i)_{i \in I}$ presque nulle telle que $u = \sum_{i \in I} \lambda_i b_i$.

💬 **Vocabulaire :** On dit que λ_i est la **i-ème coordonnée** de u dans la base B .

Preuve:

Montrons l'existence.

Comme B est une base, c'est une famille génératrice, donc u s'écrit comme une combinaison linéaire de vecteurs de B .

Montrons l'unicité.

Supposons qu'il existe $(\lambda_i)_{i \in I}$ et $(\mu_i)_{i \in I}$ presque nulles telles que $u = \sum_{i \in I} \lambda_i b_i = \sum_{i \in I} \mu_i b_i$.

On a donc $\sum_{i \in I} (\lambda_i - \mu_i) b_i = 0_E$. Comme B est libre, on a $\forall i \in I, \lambda_i - \mu_i = 0$, donc $\lambda_i = \mu_i$. \square

💡 **Exemple :** $E = \{0\}$, la seule base est la base vide.

Dans \mathbb{R}^2 , la famille $((1, 0), (0, 1))$ est une base : c'est la base canonique.

💬 **Vocabulaire :** Si E est engendré par une partie finie, on dit que E est de **dimension finie**.

📌 **Remarque :** K^n est de dimension finie, K^X avec X infini est de dimension infinie.

Proposition :

Soit $L \subset E$ avec une partie libre. Soit $u \in E$.

Alors $L \cup \{u\}$ est libre ssi $u \notin \text{Vect}(L)$.

Preuve:

Si $u \in \text{Vect}(L)$, alors $u = \sum_{v \in L} \lambda_v v$ avec $(\lambda_v)_{v \in L}$ presque nulle.

Donc $u - \sum_{v \in L} \lambda_v v = 0$ avec $1 \neq 0$, donc $L \cup \{u\}$ est liée.

Réciproquement, si $L \cup \{u\}$ est liée, alors il existe $(\lambda_v)_{v \in L}$ presque nulle et $\mu \neq 0$ tels que $\sum_{v \in L} \lambda_v v + \mu u = 0_E$.

Donc $u = -\frac{1}{\mu} \sum_{v \in L} \lambda_v v \in \text{Vect}(L)$. \square

✗ **Attention** ✗ Démonstration générée par IA, différente de celle du cours.

💬 **Note de rédaction :** cf. Laurent pour une autre preuve

Théorème : Base incomplète

Soit G une partie génératrice finie de E .

Soit $L \subset G$ une partie libre.

Alors il existe une partie basique B de E telle que $L \subset B \subset G$.

💬 **Note de rédaction** : cf. Laurent pour les preuve

Corollaire : Existence de base

Si E est un K -ev de dimension finie, alors E admet une base.

Preuve:

On applique le théorème de la base incomplète avec $L = \emptyset$. \square

Corollaire : Caractérisation des bases

Si L est une partie libre à p éléments de E et G une partie génératrice finie à q éléments de E .
On a $p \leq q$.

💬 **Note de rédaction** : cf. Laurent pour les preuve

Théorème : Bases finies

Si E est un K -ev de dimension finie, alors toutes les bases de E ont le même cardinal, appelé la **dimension** de E et noté $\dim(E)$.

Si E est de dimension finie n et (u_1, \dots, u_n) est une famille libre de E , il existe (u_{p+1}, \dots, u_n) tels que (u_1, \dots, u_n) est une base de E .

Théorème : Assertions équivalentes

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. E est un ev de dimension n .
2. Toute base de E a n vecteurs.
3. Toute base génératrice de E a au moins n vecteurs.
4. Toute partie génératrice de E a n vecteurs est libre.
5. Toute partie libre de E a au plus n vecteurs.
6. Toute partie libre E à n éléments est génératrice.

💬 **Note de rédaction** : cf. Laurent pour les preuves

Proposition :

Soit E un K -ev. Supposons E de dimension finie.

Soit F un sev de E . Alors F est de dimension finie et $\dim(F) \leq \dim(E)$.

Si de plus $\dim(F) = \dim(E)$, alors $F = E$.

💬 **Note de rédaction** : cf. Laurent pour la preuve

VI Applications linéaires

Définition : Soient E et F des K -ev.

Soit une application $f : E \rightarrow F$.

On dit que f est une **application linéaire** si $\forall x, y \in E, \forall \lambda, \mu \in K, f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$.

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F .

Vocabulaire : On appelle aussi les applications linéaires des **morphismes** d'espaces vectoriels.

Remarque : f est un morphisme de groupes de $(E, +)$ dans $(F, +)$.

Vocabulaire : On dit que f est un **endomorphisme** si $E = F$.

On dit que f est un **isomorphisme** si f est bijective.

On dit que f est un **automorphisme** si f est un endomorphisme et un isomorphisme.

Vocabulaire : Si $F = K$, on dit que f est une **forme linéaire**.

Exemple :

1. Soit $\alpha \in K$. L'application $\varphi_\alpha : \begin{smallmatrix} E \rightarrow E \\ x \mapsto \alpha x \end{smallmatrix}$ est linéaire. C'est l'**homotétie** de rapport α .

2. Soit B une base de E .

L'application $\varphi_B : \begin{smallmatrix} E \rightarrow \\ x \mapsto \text{ième coordonnée de } x \text{ dans la base } B \end{smallmatrix}$ est linéaire. C'est l'**application coordonnées** dans la base B .

Proposition :

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit B une base de E .

Alors f est déterminée par ses valeurs sur B . (i.e. si $g \in \mathcal{L}(E, F)$ vérifie $f(e_i) = g(e_i), \forall i$, alors $f = g$)

Remarque :

- B génératrice suffit.
- Si E est de dimension finie, f est déterminée par un nombre fini de valeurs.

Note de rédaction : cf. Laurent pour la preuve

Proposition :

$\mathcal{L}(E, F)$ est un K -ev.

Note de rédaction : cf. Laurent pour la preuve

Proposition : Composition d'applications linéaires

Soient E, F, G des K -ev. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.

Alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$.

Note de rédaction : cf. Laurent pour la preuve

Proposition :

Si on fixe $f \in \mathcal{L}(E, F)$ (respectivement $g \in \mathcal{L}(F, G)$), l'application $\varphi_f : \mathcal{L}(F, G) \rightarrow \mathcal{L}(E, G)$ ($g \mapsto g \circ f$) (resp. $\psi_g : \mathcal{L}(E, F) \rightarrow \mathcal{L}(E, G)$ ($f \mapsto g \circ f$)) est linéaire.

💬 **Note de rédaction :** cf. Laurent pour la preuve

Proposition :

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ bijective.
Alors $f^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$ et est un isomorphisme.

💬 **Note de rédaction :** cf. Laurent pour la preuve

Définition : Si $E = F$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On définit $f^0 = id_E$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f^n = f \circ f^{n-1}$.
Si f est un automorphisme, on définit pour $n \in \mathbb{N}$, $f^{-n} = (f^{-1})^n$.

Définition : On note $GL(E) = \{f \in \mathcal{L}(E) \mid f \text{ est bijective}\}$ est le groupe linéaire de E .

Proposition :

$GL(E)$ est un groupe pour la composition.

📌 **Remarque :** Si K est un corps fini, i.e. $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, p premier, et si E est de dimension finie n , alors $GL(E)$ est fini.

VII Noyau et image d'une application linéaire

💬 **Note de rédaction :** Un grand merci à Laurent qui a pris en note cette partie du cours. J'ai omis les démonstrations, voir le cours de l'année précédente pour les détails.

Définition : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On définit le **noyau** de f par : $\ker(f) = f^{-1}(0_F) = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}$.
On définit l'**image** de f par : $\text{Im}(f) = f(E) = \{f(x) \mid x \in E\}$.

💬 **Vocabulaire :** On appelle **rang** de f la dimension de $\text{Im}(f)$, notée $\text{rg}(f)$.

Proposition : (admis)

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors $\ker(f)$ est un sev de E et $\text{Im}(f)$ est un sev de F .

Proposition : Injectivité (admis)

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors f est injective si et seulement si $\ker(f) = \{0_E\}$.

Proposition : Surjectivité (admis)

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors f est surjective si et seulement si $\text{Im}(f) = F$.

Théorème du rang : (*admis*)

Supposons E de dimension finie. Alors $\ker(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont de dimension finie et on a :

$$\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(\operatorname{Im}(f))$$

Remarque : Le rang d'une famille de vecteurs (x_1, \dots, x_k) est la dimension de $\operatorname{Vect}(\{x_i\})$.

Corollaire : (*admis*)

On suppose E de dimension finie.

1. Si f est injective, alors $\dim(F) \geq \dim(E)$.
2. Si f est surjective, alors $\dim(F) \leq \dim(E)$.
3. Si f est bijective, alors $\dim(F) = \dim(E)$.
4. Si F est de dimension finie, et $\dim(E) = \dim(F)$, alors les assertions suivantes sont équivalentes :
 - f est bijective
 - f est injective
 - f est surjective

VIII Espaces vectoriels produits

Proposition : Construction (*admis*)

Soient E, F des K -ev. Alors $E \times F$ est un groupe produit pour $+$. On munit $E \times F$ de la multiplication externe donnée par $\cdot : K \times (E \times F) \rightarrow E \times F$

Alors $E \times F$ est un K -ev, appelé **espace-vectoriel produit** de E et F .

Remarque : Si $E_1 \dots E_n$ sont des K -ev, on définit de même le K -ev produit $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$. En particulier, $E^n = E \times E \times \dots \times E$.

Proposition : Base et dimension de l'espace-vectoriel produit (*admis*)

Soient $(b_i)_{i \in I}$ une base de E et $(c_j)_{j \in J}$ une base de F , et $I \cap J = \emptyset$.

Alors la famille $(d_k)_{k \in I \cup J}$ définie par $d_i = (b_i, 0_F)$ si $i \in I$ et $d_i = (0_E, c_i)$ si $i \in J$ est une base de $E \times F$.

En particulier, si E et F sont de dimension finies, $E \times F$ est de dimension finie et $\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F)$.