Chapitre 2.2 : Séries absolument convergentes et critères de convergence

I Série absolument convergente (ACV)

A Critère de Cauchy pour les séries numériques

Ce qui a été fait dans le **Chapitre 1 - Suites de Cauchy** sur les suites réelles reste valable si on considère des suites complexes.

Définition : On dit que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ vérifie le **critère de Cauchy** si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall N \geq N_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}, |\sum_{k=N}^{N+p} u_k| < \varepsilon$$

Proposition : Convergence et critère de Cauchy

$\sum_{n\geq 0} u_n$ vérifie le critère de Cauchy $\Leftrightarrow \sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

Preuve: (par équivalence)
$\sum_{n\geq 0} u_n$ converge $\Leftrightarrow (S_N)$ converge $\Leftrightarrow (S_N)$ est une suite de Cauchy *(car l'espace est complet)* $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall N \geq N_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}, |S_{N+p} - S_N| < \varepsilon \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall N \geq N_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}, |\sum_{n=N}^{N+p} u_n| < \varepsilon$

Remarque : Autre preuve de la divergence de la série harmonique :
Soit $\varepsilon = 1/2$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on peut choisir $p = N$ et on a : $|\sum_{k=N}^{2N} \frac{1}{k}| \geq \sum_{k=N}^{2N} \frac{1}{2N} = \frac{1}{2}$.
Donc la série harmonique ne vérifie pas le critère de Cauchy, donc elle diverge.

B Définitions et propriétés

Définition : On dit que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est absolument convergente (ACV) si la série $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ converge.

Théorème : Série ACV et convergence

Série ACV $\Rightarrow$ série convergente et $|\sum_{n=0}^{\infty} u_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$.

Preuve:
Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série ACV.
Donc $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ converge.
Donc $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ vérifie le critère de Cauchy : $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall N \geq N_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}, |\sum_{k=N+1}^{N+p} |u_k|| < \varepsilon$
Donc $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall N \geq N_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}, |\sum_{k=N+1}^{N+p} u_k| \leq \sum_{k=N+1}^{N+p} |u_k| < \varepsilon$
Ainsi $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall N \geq N_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}, |\sum_{k=N}^{N+p} u_k| < \varepsilon$
Donc $\sum_{n\geq 0} u_n$ vérifie le critère de Cauchy.
Donc $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge et on a $|\sum_{n=0}^{N} u_n| \leq \sum_{n=0}^{N} |u_n| \implies |\sum_{n=0}^{\infty} u_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$.

✖ **Attention** ✖ La réciproque est fausse.

Exemple : La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente, mais elle n'est pas absolument convergente car $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

II Convergence absolue d'une série

Note de rédaction : Correspond à II. dans le plan de cours du prof.

A Séries à termes positifs

Théorème :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.
Alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ $(u_n \geq 0)$ converge $\Leftrightarrow$ la suite (S_N) des sommes partielles est bornée.

Preuve:
En effet, $S_{N+1} - S_N = u_{N+1} \geq 0$ donc (S_N) est croissante (à termes positifs).
Ainsi (S_N) converge $\Leftrightarrow$ (S_N) est bornée *(théorème de convergence monotone)*.
Or $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge $\Leftrightarrow$ (S_N) converge.
Donc $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge $\Leftrightarrow$ (S_N) est bornée.

Remarque : Si (S_N) n'est pas bornée, alors $S_N \xrightarrow[N\to\infty]{} +\infty$. On tolère la notation $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = +\infty$.

Application : Application du théorème.
Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries à termes positifs.
Montrons que la série $\sum_{n\geq 0} \sqrt{u_n v_n}$ converge.
En effet, utilisons l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
$\forall N \in \mathbb{N}, \sum_{n=0}^{N} \sqrt{u_n v_n} \leq \sqrt{\sum_{n=0}^{N} u_n}\sqrt{\sum_{n=0}^{N} v_n}$.
Or les deux termes de droite sont bornés, donc $\forall N \in \mathbb{N}, \sum_{n=0}^{N} \sqrt{u_n v_n}$ est bornée.
Donc $\sum_{n\geq 0} \sqrt{u_n v_n}$ converge.

Autre preuve (sans Cauchy-Schwarz) :
$(a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow ab \leq \frac{a^2+b^2}{2} \forall a, b \in \mathbb{R}$.
Donc $\sum_{n=0}^{N} \sqrt{u_n v_n} \leq \frac{1}{2}(\sum_{n=0}^{N} u_n + \sum_{n=0}^{N} v_n)$.
Or les deux termes de droite sont bornés, donc $\forall N \in \mathbb{N}, \sum_{n=0}^{N} \sqrt{u_n v_n}$ est bornée.
Donc $\sum_{n\geq 0} \sqrt{u_n v_n}$ converge.

Note de rédaction : On a pas encore abordé Cauchy-Schwarz.

Proposition :

Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries convergentes *(pas forcément à termes positifs mais réels)*.
Si $u_n \leq v_n \forall n \in \mathbb{N}$, alors $\sum_{n=0}^{\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} v_n$.

Preuve:
On considère la série à termes positifs $\sum_{n\geq 0}(v_n - u_n)$. C'est une série convergente.
On a $\sum_{n=0}^{\infty}(v_n - u_n) \geq 0$.
Or $\sum_{n\geq 0} v_n$ et $\sum_{n\geq 0} u_n$ sont convergentes.
Donc on peut écrire : $\sum_{n=0}^{\infty} v_n - \sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty}(v_n - u_n) \geq 0$.
Donc $\sum_{n=0}^{\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} v_n$.

B Critère de comparaison

Tout cela est fait pour des séries à termes positifs.

Théorème : Critère de comparaison ("Hyper important")

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries à termes positifs.
Supposons que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq v_n$.
Alors :

- Si $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.
- Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge, alors $\sum_{n\geq 0} v_n$ diverge.

Preuve:

- On a $\forall N \in \mathbb{N}, 0 \leq \sum_{n=0}^{N} u_n \leq \sum_{n=0}^{N} v_n$.
  Or $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge, donc la suite des sommes partielles$(\sum_{n=0}^{N} v_n)$ est bornée.
  Donc la suite des sommes partielles $(\sum_{n=0}^{N} u_n)$ est bornée et donc $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.
- Comme $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge, la suite des sommes partielles $(\sum_{n=0}^{N} u_n)$ n'est pas bornée.
  Et comme $\forall N \in \mathbb{N}, 0 \leq \sum_{n=0}^{N} u_n \leq \sum_{n=0}^{N} v_n$, la suite des sommes partielles $(\sum_{n=0}^{N} v_n)$ n'est pas bornée.
  Et donc par le théorème de convergence des séries à termes positifs on a que $\sum_{n\geq 0} v_n$ diverge.

Corollaire :

Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries à termes positifs.
$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$.
Alors :

- Si $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.
- Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge, alors $\sum_{n\geq 0} v_n$ diverge.

Preuve:
Pour $n \geq n_0$,
$\frac{u_{n+1}}{u_n} \times \frac{u_n}{u_{n-1}} \times \dots \times \frac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n} \times \frac{v_n}{v_{n-1}} \times \dots \times \frac{v_{n_0+1}}{v_{n_0}}$
$\Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_{n_0}} \leq \frac{v_{n+1}}{v_{n_0}} \Rightarrow u_{n+1} \leq k v_{n+1}$ avec $k = \frac{u_{n_0}}{v_{n_0}} \in \mathbb{R}_+^*$

- On suppose que $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge.
  Donc $\sum_{n\geq 0} k v_n$ converge.
  Donc par le théorème précédent, comme $\forall n \geq n_0, 0 \leq u_n \leq k v_n$, on a que $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.
- *(non démontré en cours)*

Application : *applications aux séries absolument convergentes*

Proposition :

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à termes réels.
Définissons $u_n^+ = \max(u_n, 0) \geq 0$ et $u_n^- = \max(-u_n, 0) \geq 0$.

On a $\sum_{n\geq 0} u_n$ est ACV.
$\sum_{n\geq 0} |u_n|$ converge $\Leftrightarrow \sum_{n\geq 0} u_n^+$ et $\sum_{n\geq 0} u_n^-$ convergent.

Preuve:
$\Rightarrow$/ On a $\forall n \in \mathbb{N} 0 \leq u_n^+ \leq |u_n|$ et $0 \leq u_n^- \leq |u_n|$.
Donc par le théorème de comparaison, $\sum_{n\geq 0} u_n^+$ et $\sum_{n\geq 0} u_n^-$ convergent.
$\Leftarrow$/ On remarque que $|u_n| = u_n^+ + u_n^-$.
Si $\sum_{n\geq 0} u_n^+$ et $\sum_{n\geq 0} u_n^-$ convergent, alors $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ converge $\Rightarrow \sum_{n\geq 0} u_n$ est ACV.

Proposition :

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à termes complexes.
On a $\sum_{n\geq 0} u_n$ est ACV $\Leftrightarrow$ $\sum_{n\geq 0} Re(u_n)$ et $\sum_{n\geq 0} Im(u_n)$ sont ACV.

Application : Montrer la proposition précédente.

C Domination, convergence et équivalence

Rappel : Soient (u_n) et (v_n) deux suites.

- $u_n = O(v_n)$ ssi $\exists M > 0, |u_n| \leq M|v_n|$ au voisinage de l'infini (n assez grand) $\Leftrightarrow$ $|\frac{u_n}{v_n}|$ est bornée.
- $u_n = o(v_n)$ ssi $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. ($u_n$ est négligeable devant v_n)
- $u_n = o(v_n) \Rightarrow u_n = O(v_n)$
- $u_n \sim v_n$ ssi $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. ($u_n$ est équivalent à v_n)

Proposition : *(admis)*

Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries à termes positifs.
On suppose $u_n = O_{+\infty}(v_n)$.

- Si $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.
- Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge, alors $\sum_{n\geq 0} v_n$ diverge.

Indication pour la preuve:
Il suffit de remarquer que $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} Mv_n$ sont de même nature ; et M est tel que $u_n \leq Mv_n$

✕ Attention ✕ Si on sait que $\sum_{n\geq 0} v_n$ alors pour montrer que $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, il suffit de montrer que $u_n = o_{+\infty}(v_n)$.
(en réalité il faudrait montrer grand O, mais o $\Rightarrow$ O donc c'est plus fort et plus simple à montrer)

Corollaire : *(admis)*

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à terme général dans $\mathbb{C}$ et soit $\sum_{n\geq 0} v_n$ une série à terme général positif tel que $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge.
Si $u_n = O_{+\infty}(v_n)$, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge absolument (ACV).

Application : Montrer le corollaire précédent.

Théorème : "Hyper² important"

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à terme général dans $\mathbb{C}$ et soit $\sum_{n\geq 0} v_n$ une série à termes positifs.
On suppose $u_n \sim_{+\infty} v_n$.
(on pourrait mettre une constante)
On a :

- Si $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge absolument (ACV).
- Si $\sum_{n\geq 0} v_n$ diverge alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge.

Remarque : Si $u_n \geq 0$ alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ sont de même nature.

III Séries de références

A Série de Riemann

Théorème :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$, dite **série de Riemann**.
La série converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$.

Preuve:
On a vu que pour $\alpha = 1$, la série diverge (série harmonique).

- Si $\alpha \leq 1$, $\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n}$. Donc par le théorème de comparaison, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.
- $\Leftarrow$ / Supposons $\alpha > 1$.
  Considérons la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ de terme général $u_n = \frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$.
  Observation 1 : $\forall N \in \mathbb{N}^*, \sum_{n=1}^{N} u_n = 1 - \frac{1}{(N+1)^{\alpha-1}}$ donc $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge (car $\alpha - 1 > 0$). (téléscopage)
  Observation 2 : Déterminons un équivalent de u_n.
  $u_n = \frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} = \frac{1}{n^{\alpha-1}}(1 - (\frac{n}{n+1})^{\alpha-1})$.
  On a $(\frac{n}{n+1})^{\alpha-1} = (\frac{n+1-1}{n+1})^{\alpha-1} = (1 - \frac{1}{n+1})^{\alpha-1} = 1 - \frac{\alpha-1}{n} + o_{+\infty}(\frac{1}{n})$ (DL ordre 1).
  $\Rightarrow 1 - (\frac{n}{n+1})^{\alpha-1} = \frac{\alpha-1}{n} + o_{+\infty}(\frac{1}{n}) \sim_{+\infty} \frac{\alpha-1}{n}$.
  Donc $u_n \sim_{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha-1}} \times \frac{\alpha-1}{n} = \frac{\alpha-1}{n^\alpha} > 0$.
  On a deux séries à termes positifs $\sum_{n\geq 1} u_n$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{\alpha-1}{n^\alpha}$ qui sont de même nature car équivalentes ($u_n \sim_{+\infty} \frac{\alpha-1}{n^\alpha}$).
  On en déduit que $\sum_{n\geq 1} \frac{\alpha-1}{n^\alpha}$ converge pour $\alpha > 1$ par le théorème sur les équivalents.
  De plus la nature d'une série n'est pas modifiée quand le terme général est multiplié par un scalaire non nul.
  Donc $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est de même nature que $\sum_{n\geq 1} \frac{\alpha-1}{n^\alpha}$.
  Donc $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge.

✖ **Attention** ✖ Démonstration probablement en question de cours au partiel/CC :)

Règles de comparaisons avec les séries de Riemann :

Soient $\sum u_n$ une série de terme général dans $\mathbb{C}$.

1. Si $u_n \sim_{+\infty} k\frac{1}{n^\alpha}$ avec $k \in \mathbb{C}^*$.
   - Si $\alpha > 1$ alors $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge absolument (ACV).
   - Si $\alpha \leq 1$ alors $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge.
2. Si $\exists \alpha > 1, n^\alpha |u_n|$ bornée *(*i.e. $u_n = O(\frac{1}{n^\alpha})$), alors $\sum u_n$ converge absolument (ACV).
   il suffit de montrer que $u_n = o(\frac{1}{n^\alpha})$
3. On se restreint à $u_n \in \mathbb{R}$. Si $\exists \alpha \leq 1, n^\alpha u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$, alors $\sum u_n$ diverge.

Remarque : Penser u_n à terme réel positif et $k \in \mathbb{R}_+^*$ pour la compréhension. *(suffisant pour la compréhension et la plupart des exercices)*

Application : Montrer les règles de comparaison avec les séries de Riemann.

Application : Etudier la nature de la série de terme général $u_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt[3]{n^3+an^2+bn+c}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

B Série géométrique

Rappel : La série $\sum_{n\geq 0} q^n$ converge $\Leftrightarrow |q| < 1$ et dans ce cas $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

Preuve:
$\Leftarrow$ Si $|q| < 1$, alors $S_N = \sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{1-q^{N+1}}{1-q} \xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{1}{1-q}$.
$\Rightarrow$ Si $|q| \geq 1$, alors $q^n \nrightarrow 0$ donc la série diverge (grossièrement).

Règle de Cauchy :

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à terme général dans $\mathbb{C}$.
On suppose que $\lim_{n\to\infty} |u_n|^{\frac{1}{n}} = l$ (existe et égale à $l \in [0, +\infty]$, $+\infty$ autorisé).

1. Si $l < 1$, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge absolument (ACV).
2. Si $l > 1$, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge.
3. Si $l = 1$, on ne peut rien conclure.

Remarque : Comprendre la règle précédente dans le cas réel, terme positif.

Preuve:

1. Si $l < 1$, prenons $\varepsilon > 0$ tel que $l + \varepsilon < 1$.
   Or $|u_n|^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} l$, donc $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n|^{\frac{1}{n}} \leq l + \varepsilon$.
   Donc $|u_n| \leq (l+\varepsilon)^n$ pour $n \geq N$.
   Or la série de terme général $(l+\varepsilon)^n$ est une série géométrique de raison $l + \varepsilon < 1$, donc elle converge.
   Donc $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.
2. Laissée à la douce appréciation du lecteur.
3. Trouvons une série $\sum_{n\geq 0} u_n$ où $|u_n|^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ et où on ne peut rien conclure sur la nature de la série.

   Si on prend $u_n = \frac{1}{n^\alpha} = e^{-\alpha \ln(n)}$, on a bien $u_n^{\frac{1}{n}} = e^{-\alpha \frac{\ln(n)}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \forall \alpha$.
   Or on a convergence pour $\alpha > 1$ et divergence pour $\alpha \leq 1$, on ne peut rien conclure.

Application : Etudier la nature de la série de terme général $u_n = \cosh(\frac{1}{n})^{-n^3}$.

Règle de d'Alembert :

Soit $\sum u_n$ une série à terme général dans $\mathbb{C}$.
On suppose que $\lim_{n\to\infty} |\frac{u_{n+1}}{u_n}| = l$ (existe et égale à $l \in [0, +\infty]$, $+\infty$ autorisé).

1. Si $l < 1$, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge absolument (ACV).
2. Si $l > 1$, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge.
3. Si $l = 1$, on ne peut rien conclure.

Preuve:

1. Si $l < 1$, prenons $\varepsilon > 0$ tel que $l + \varepsilon < 1$.
   Or $|\frac{u_{n+1}}{u_n}| \xrightarrow[n\to\infty]{} l$, donc $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |\frac{u_{n+1}}{u_n}| \leq l + \varepsilon$.
   Posons $q = l + \varepsilon < 1$.
   Ainsi, $|\frac{u_{n+1}}{u_n}| \leq \frac{q^{n+1}}{q^n}$ pour $n \geq N$.
   On a une comparaison du type $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$.
   On a vu que dans ce cas, $sumb_n$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge.
   Or $\sum q^n$ converge (série géométrique de raison $q < 1$) donc $\sum u_n$ converge (ACV).
2. Comme $\lim_{n\to\infty} |\frac{u_{n+1}}{u_n}| = l > 1, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |\frac{u_{n+1}}{u_n}| \geq 1 \Rightarrow |u_n|$ est minorée par n assez grand.
   Donc $\sum u_n$ diverge.
3. Prendre $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$. On a bien $\frac{(n+1)^\alpha}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ et la nature dépend de α.

Application : Etudier la nature de la série de terme général $u_n = \frac{n!}{n^n}$.

Note de rédaction : On a évoqué en cours la formule de Stirling pour la culture, mais elle est hors programme : $n! \sim \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$.

Proposition : Comparaison des règles de d'Alembert et de Cauchy

Soit $\sum u_n$ une série à terme général positif ou nul.
On suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} l \in [0, +\infty]$.

Alors $u_n^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} l$.

Preuve:
On suppose $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l, l > 0, l \neq +\infty$.
On a $\forall l_1, 0 < l_1 < l$, $\sum_{n\geq 0} \frac{l_1^n}{u_n}$ converge par la règle de d'Alembert.
En effet, $\frac{l_1^{n+1}}{u_{n+1}} \times \frac{u_n}{l_1^n} = l_1 \times \frac{u_n}{u_{n+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{l_1}{l} < 1$.
Par convergence de la série on a que $\frac{l_1^n}{u_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
À partir d'un certain rang, $\frac{l_1^n}{u_n} \leq 1 \Rightarrow l_1^n \leq u_n \Rightarrow l_1 \leq u_n^{\frac{1}{n}}$.

On a $\forall l_2, 0 < l < l_2$, $\sum_{n\geq 0} \frac{u_n}{l_2^n}$ converge par la règle de d'Alembert.
À partir d'un certain rang (même argument que pour l_1), $u_n \leq l_2^n \Rightarrow u_n^{\frac{1}{n}} \leq l_2$.

Donc $l_1 \leq u_n^{\frac{1}{n}} \leq l_2, \forall l_1 < l < l_2$ pour un n assez grand.
On fait tendre n vers ∞ puis l_1 et l_2 vers l et on en déduit que $u_n^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} l$.

✖ **Attention** ✖ La réciproque est fausse.

Exemple : Contre-exemple.
Soit $0 < a < b$. Posons :

$$u_n = \begin{cases} a^p b^p & \text{si n = 2p} \\ a^{p+1} b^p & \text{si n = 2p + 1} \end{cases}$$

On a $u_n^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} ab$ (peu importe la parité de n).
Mais $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ dépend de la parité de n.

Remarque : Donc on préfère la règle de d'Alembert à celle de Cauchy. Mais si la règle d'Alembert ne donne rien, la règle de Cauchy ne donnera rien non plus.