

Chapitre 6.2 : Sous-espaces caractéristiques

Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie n .

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E .

Soit $\lambda \in K$ une valeur propre de u .

i Rappel : On appelle $m_a(\lambda)$ la multiplicité algébrique de λ , c'est-à-dire la multiplicité de λ comme racine du polynôme caractéristique de u .

i Rappel : On appelle $m_g(\lambda)$ la multiplicité géométrique de λ , c'est-à-dire la dimension du sous-espace propre $E_\lambda = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)$.

Définition : On pose $N_\lambda = \text{Ker}((u - \lambda \text{Id}_E)^{m_a(\lambda)})$.

Il s'agit du **sous-espace caractéristique** de u associé à la valeur propre λ .

Théorème : (admis)

On suppose P_u scindé (i.e. trigonalisable).

Alors :

1. N_λ est un sev stable par u de dimension $m_a(\lambda)$.
2. $E_\lambda \subset N_\lambda$.
3. $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} N_\lambda$.
4. Soit π_λ la projection de E sur N_λ parallèlement à $\bigoplus_{\mu \in Sp(u), \mu \neq \lambda} N_\mu$.
Alors $\pi_\lambda \in K[u]$.
5. Si $\lambda \neq \mu$, $\pi_\lambda \circ \pi_\mu = 0$

Exemple : $\text{Mat}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres sont 1 et 2. $P_u(X) = -(X - 1)^2(X - 2)$.

Donc :

- $\lambda = 2$, $m_a(2) = m_g(1) = 1$ donc $E_2 = Ke_3 = N_2$.
- $\lambda = 1$, $m_a(1) = 2$ et $m_g(1) = 1$ donc $E_1 = Ke_1$ et $N_1 = Ke_1 \oplus Ke_2$.

Théorème : (admis)

N_λ est stable par u et posons $u_\lambda = u|_{N_\lambda}$.

Alors :

1. u_λ a une seule valeur propre qui est λ .
2. On a $P_u = \pm(X - \lambda)^{m_a(\lambda)}$.
3. On a $\dim N_\lambda = m_a(\lambda)$.
4. $\exists B_\lambda$ une base de N_λ telle que $\text{Mat}_{B_\lambda}(u_\lambda) = \lambda I_{m_a(\lambda)}$.

Corollaire : (*admis*)

On suppose P_u scindé.

Il existe une base B de trigonalisation de u telle que la $\text{Mat}_B(u)$ est de la forme suivante :

$$\text{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} A_{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_{\lambda_k} \end{pmatrix},$$

avec $A_{\lambda_i} = \begin{pmatrix} \lambda_i & * & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_i & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$

Exemple : $E = \mathbb{R}^3$ et u tel que $\text{Mat}(u) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 6 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

$$P_u(X) = -(X - 1)^3.$$

Donc 1 est la seule valeur propre de u avec $m_a(1) = 3$.

Or u n'est pas diagonalisable car si u diagonalisable dans B , on a $\text{Mat}_B(u) = I_3$. Donc $u = Id_E$. Absurde.

u est scindé, donc trigonalisable.

I Nilpotence

Définition : On dit que $u \in End(E)$ est **nilpotent** s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^k = 0_{End(E)}$.

Vocabulaire : On appelle l'indice de nilpotence le plus petit entier k tel que $u^k = 0$.

Proposition : (*admis*)

L'endomorphisme u est nilpotent si et seulement si P_u est scindé avec pour seule racine 0 (c'est à dire que sa seule valeur propre est 0).

En particulier, u est trigonalisable strictement avec des 0 sur la diagonale. On a que l'indice de nilpotence de u est inférieur ou égal à $\dim(E)$.

Corollaire : (*admis*)

u nilpotent et diagonalisable $\Rightarrow u = 0_{End(E)}$.

Proposition : (*admis*)

Si u est nilpotent d'indice k et $x \in E$ avec $u^{k-1}(x) \neq 0$, alors la famille $\{x, u(x), u^2(x), \dots, u^{k-1}(x)\}$ est libre.
Ainsi, on a $k \leq \dim(E)$.

Proposition : (*admis*)

Si u est nilpotent d'indice $n = \dim(E)$, alors il existe une base B de E telle que :

$$\text{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque : La matrice ci-dessus est un cas particulier de forme de Jordan.

Remarque : Comment trouver une base de trigonalisation de u lorsque u est nilpotent d'indice $k \leq n = \dim(E)$?

On a $\text{Ker}(u) \subset \text{Ker}(u^2) \subset \cdots \subset \text{Ker}(u^{k-1}) \subsetneq \text{Ker}(u^k) = E$.

On considère B_1 une base de $\text{Ker}(u)$, que l'on complète en une base B_2 de $\text{Ker}(u^2)$, que l'on complète en une base B_3 de $\text{Ker}(u^3)$, et ainsi de suite jusqu'à obtenir une base B_k de E .

On a ainsi construit une base B_k de E telle que $\text{Mat}_{B_k}(u)$ est triangulaire supérieure avec des 0 sur la diagonale.

Proposition : Combinaison linéaire (*admis*)

Soient $u, v \in \text{End}(E)$ deux endomorphismes nilpotents qui commutent.

Alors toute combinaison linéaire $au + bv$ avec $a, b \in K$ est nilpotente.

II Décomposition de Jordan Chévalley (ou Dunford)

Théorème : (*admis*)

Soit $u \in \text{End}(E)$ tel que P_u est scindé.

Il existe un unique $(d, e) \in \text{End}(E)^2$ tel que :

- $u = d + e$,
- d est diagonalisable,
- e est nilpotent,
- d et e commutent.
- $d, e \in K[u]$ (polynômes en u).

C'est la **décomposition de Jordan Chévalley** (ou Dunford) de u .

Définition : Soit $A \in M_n(K)$.

On dit que A est nilpotente si il existe $k \geq 1$ tel que $A^k = 0$ (matrice nulle).

Théorème : Décomposition de Jordan Chévalley matricielle (admis)

Soit $A \in M_n(K)$ tel que son polynôme caractéristique est scindé.

Il existe un unique couple $(D, N) \in M_n(K)^2$ tel que :

- $A = D + N$,
- D est diagonalisable,
- N est nilpotente,
- D et N commutent,
- D, N sont des polynômes en A .

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

On calcule facilement que :

- $P_A(X) = -(X - 2)^2(X - 1)$,
- $m_a(2) = 2, m_g(2) = 1$,
- $m_a(1) = m_g(1) = 1$.
- $E_2 = \text{Ker}(A - 2I_3) = \text{Vect}\{(1, 1, 0)^T\}$,
- $N_1 = E_1 == \text{Ker}(A - I_3) = \text{Vect}\{(0, 1, 1)^T\}$.
- $N_2 = \text{Ker}((A - 2I_3)^2) = \text{Vect}\{(1, 1, 0)^T, (0, 0, 1)^T\}$.

On a donc $N_1 + N_2 = \mathbb{R}^3$. (car $\dim(N_1) + \dim(N_2) = 3$ et $N_1 \cap N_2 = \{0\}$).

Donc $N_1 \oplus N_2 = \mathbb{R}^3$.

Par le théorème de Jordan Chévalley, il existe un unique (D, N) tel que $A = D + N$ avec D diagonalisable, N nilpotente et $DN = ND$.

Or :

- $d(e_1) = 2e_1 + e_2 + e_3$
- $d(e_2) = e_2 - e_2$
- $d(e_3) = 2e_3$

Donc $D = \text{Mat}_{can}d = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = A - D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

De plus, $N^2 = 0_3$. Donc N est nilpotente d'indice 2. Donc : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$: décomposition de Jordan Chévalley de A .

Pour calculer A^n :

On utilise le fait que D et N commutent, le binôme de Newton donc et la nilpotence de N :

$$A^n = (D + N)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = D^n + nD^{n-1}N$$

(tous les termes avec $k \geq 2$ sont nuls car $N^2 = 0$).