Chapitre 1 : Dénombrement

I Cardinal d'un ensemble

Définition : Soit E un ensemble. On dit que E est **fini** s'il existe un entier naturel $n \in \mathbb{N}$ et une bijection entre E et l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$.
Si $n = 0$, on dit que E est vide et on note $E = \emptyset$.

On appelle n le **cardinal** de E et on le note $Card(E)$.

Lemme : Égalité des cardinaux

Soient A et B deux ensembles finis non vides. Alors, on a $Card(A) = Card(B)$ si et seulement si il existe une bijection entre A et B.

Démonstration :
Soit $n \geq 1$ tq $Card(A) = n$.
On a au tableau le dessin d'une bijection entre A et $S_n = \{1, 2, \ldots, n\}$.
$\Rightarrow \exists f : A \to S_n$ bijective.
Si $Card(B) = n$, alors $\exists g : B \to S_n$ bijective.
Donc, $g^{-1} : S_n \to B$ est bijective.
Considérons $g^{-1} \circ f : A \to B$. C'est une bijection entre A et B par composition de bijections.
Donc, $Card(A) = Card(B)$.

Application : Montrer que si A et B sont en bijection, alors $Card(A) = Card(B)$.

Définition : Soient E et F deux ensembles non vides. Alors on appelle le **produit cartésien** de E et F et on note $E \times F := \{(x, y) \mid x \in E, y \in F\}$.

Exemple : Soient $E = \{1, 2\}$ et $F = \{5, 6, 7\}$.
Alors, $E \times F = \{(1, 5), (1, 6), (1, 7), (2, 5), (2, 6), (2, 7)\}$.

Proposition : Principe multiplicatif

Soient A et B deux ensembles finis non vides. Alors, $A \times B$ est fini et on a :

$$Card(A \times B) = Card(A) \times Card(B)$$

.
En règle générale, si $A_1, A_2, \dots, A_k$ sont des ensembles finis non vides, alors :

$$Card(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k) = \prod_{i=1}^{k} Card(A_i)$$

Démonstration :
On démontre cette proposition pour le cas $k = 2$.
Soient A et B deux ensembles finis non vides.
Soient $n = Card(A)$ et $m = Card(B)$.

On pose $A = \{1, 2, \dots, n\}$ et $B = \{1, 2, \dots, m\}$. (ça revient au même par le lemme précédent)
On peut dresser le tableau suivant pour représenter $A \times B$:

	1	2	...	n
1	(1,1)	(2,1)	...	(n,1)
2	(1,2)	(2,2)	...	(n,2)
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
m	(1,m)	(2,m)	...	(n,m)

On remarque que le tableau contient n colonnes et m lignes.
Donc, le tableau contient $n \times m$ cases.
Chaque case correspond à un élément de $A \times B$.

On pose donc $f\colon A \times B \to \{1, 2, \dots, n \times m\}$ l'application définie par $f((i, j)) = i + (j - 1) \times n$ (l'idée est de numéroter les cases de gauche à droite et de haut en bas).
On vérifie facilement que f est une bijection (strictement croissante et bien définie).
Donc, $Card(A \times B) = n \times m = Card(A) \times Card(B)$.