Chapitre 1: Suites de Cauchy

X Attention X Certaines démonstrations ont été omises dans ce cours. Je les ai en format papier, n'hésitez pas à me demander à e.rodriguesdeoliveir@gmail.com.

I Rappels sur les suites

A Définitions générales

On ne rappelera que ce qui n'est pas "évident" dans le cours de L1.

Définition : Une sous-suite (ou suite extraite) d'une suite (u_n) est une suite (v_n) : $\exists \varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, strictement croissante tq $v_n = u_{\varphi(n)}$

 $oldsymbol{\wp}$ Vocabulaire : Une sous-suite de (u_n) est aussi notée (u_{n_k}) .

Définition : Une suite (u_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$ si : $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\varepsilon, |u_n - l| < \varepsilon$

Description Vocabulaire: Si elle ne converge pas on dit qu'elle diverge.

Attention: une suite peut diverger mais avoir une limite (une suite qui tend vers l'infini).

Propriété: Bornes (admise)

Si une suite (u_n) converge, alors elle est bornée : $\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$.

Propriété : Convergence des sous-suites (admise)

Si une suite (u_n) converge vers l, alors toute sous-suite (u_{n_k}) converge aussi vers l.

B Propriétés et théorèmes fondamentaux

Propriété : Espace-vectoriel (admise)

L'ensemble des suites réelles convergentes est un ℝ-espace vectoriel.

Théorème: Suites adjacentes (admis)

Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes si :

- (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante
- $u_n \leq v_n, \forall n \in \mathbb{N}$
- $v_n u_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

Si deux suites sont adjacentes, alors elles convergent vers la même limite.

Théorème: Bolzano-Weierstrass (admis)

Toute suite réelle bornée admet une sous-suite convergente.

Il Suites de Cauchy

Définition : Une suite (u_n) est une suite de Cauchy si : $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall p,q \geq N_\varepsilon, |u_p - u_q| < \varepsilon$

Définition : autre formulation utile

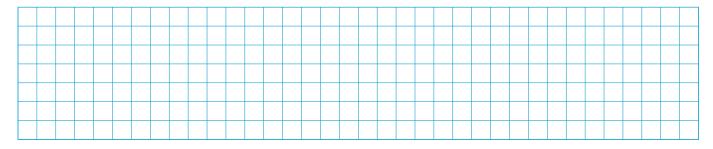
Soit (u_n) une suite à valeur dans $(K, |\cdot|)$.

 $(u_n) \text{ est une suite de Cauchy si}: \forall \varepsilon>0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n\geq N_\varepsilon, \forall p\in \mathbb{N}, |u_{n+p}-u_n|<\varepsilon$

Propriété : Convergence

Toute suite convergente est une suite de Cauchy.

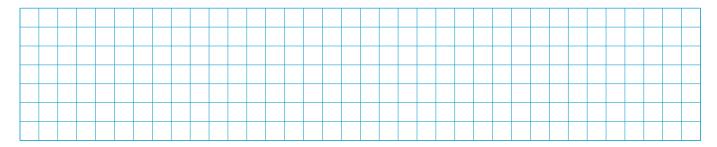
Preuve:



Proposition: Bornes

Toute suite de Cauchy est bornée.

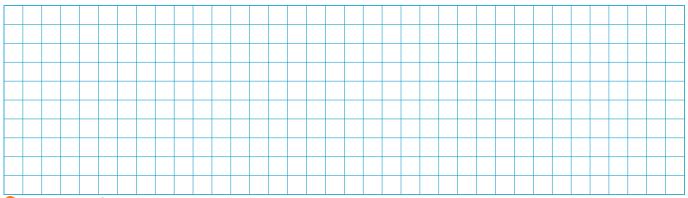
Preuve:



Théorème:

Toute suite de Cauchy dans $\mathbb R$ converge dans $\mathbb R$.

Preuve:



Remarque: On dit que ℝ est complet.

Définition : On dit que $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est complet.

Exemple : Notion de complétude

 $(\mathbb{Q},|\cdot|)$ n'est pas complet : la suite définie par $u_n=$ la partie décimale de $\sqrt{2}$ à la n-ième décimale est une suite de Cauchy dans \mathbb{Q} qui ne converge pas dans \mathbb{Q} (car $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$).

Par contre, elle converge dans \mathbb{R} .

III Topologie de $\mathbb R$

A Rappels

a) Ouvert

Définition : Soit $x \in \mathbb{R}$ et $V \subset \mathbb{R}$. On dit que V est un voisinage de x si : $\exists \varepsilon > 0, \exists x - \varepsilon, x + \varepsilon [\subset V]$

Définition : $U \subset \mathbb{R}$ est un ouvert de \mathbb{R} si : $\forall x \in U, U$ est un voisinage de x

Exemple:

- \mathbb{R} est un ouvert de \mathbb{R} .
- a, b est un ouvert de \mathbb{R}
- $]a, +\infty[$ est un ouvert de $\mathbb R$
- $]-\infty,a[$ est un ouvert de $\mathbb R$
- L'ensemble vide est un ouvert de \mathbb{R} .

Propriété : Opérations sur les ouverts (admise)

- · L'intersection finie d'ouverts est un ouvert.
- L'union quelconque d'ouverts est un ouvert.

1 Remarque: L'intersection infinie d'ouverts n'est pas forcément un ouvert: $\bigcap_{n=1}^{\infty}] - \frac{1}{n}, \frac{1}{n}[=\{0\}$ qui n'est pas un ouvert de \mathbb{R} .

Toutefois, pour un n_{max} donné l'intersection de n_{max} ouverts est un ouvert.

b) Fermé

Définition : $F \subset \mathbb{R}$ est un fermé de \mathbb{R} si : $\mathbb{R} \setminus F$ est un ouvert de \mathbb{R}

© Exemple :

- \mathbb{R} est un fermé de \mathbb{R} .
- [a,b] est un fermé de $\mathbb R$
- Toute famille finie d'éléments de $\mathbb R$ est un fermé de $\mathbb R.$
- L'ensemble vide est un fermé de $\ensuremath{\mathbb{R}}.$

 \bigcirc Remarque : $\mathbb Q$ n'est ni ouvert ni fermé dans $\mathbb R$.

Propriété : Opérations sur les fermés (admise)

- · L'union finie de fermés est un fermé.
- · L'intersection quelconque de fermés est un fermé.

Théorème : Caractérisation séquentielle des fermés

 $F \subset \mathbb{R}$ fermé \Leftrightarrow toute suite (u_n) d'éléments de F qui converge dans \mathbb{R} a sa limite dans F.

Preuve:

 \Rightarrow / Supposons F fermé, on a $\mathbb{R} \setminus F$ ouvert.

Par l'absurde, on suppose qu'il existe une suite (u_n) d'éléments de F qui converge vers $l \in \mathbb{R} \setminus F$.

Comme $\mathbb{R} \setminus F$ est un ouvert, $\exists \varepsilon > 0,]l - \varepsilon, l + \varepsilon[\subset \mathbb{R} \setminus F.$

Par convergence de (u_n) , $\exists N_{\varepsilon} \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N_{\varepsilon}$, $|u_n - l| < \varepsilon \Rightarrow u_n \in]l - \varepsilon, l + \varepsilon[\subset \mathbb{R} \setminus F \text{ ce qui est absurde car } (u_n) \text{ est une suite d'éléments de } F.$

←/ On raisonne par contraposée.

 $\text{Si }\mathbb{R}\setminus F \text{ n'est pas un ouvert, } \exists l\in\mathbb{R}\setminus F \text{ tel que } \forall r>0, \\]l-r, \\ l+r[\cap F\neq\mathbb{R}\setminus F \text{ car }\mathbb{R}\setminus F \text{ est au voisinage de } l.$

Supposons qu'il existe une suite (u_n) d'éléments de F.

En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in]l-\frac{1}{n}, l+\frac{1}{n}[\cap F \implies u_n \xrightarrow[n \to \infty]{} l \text{ et } (u_n) \in F.$

1 Remarque: Ce théorème est utile pour montrer qu'on a un ensemble fermé.

Définition: Soit $A \subset \mathbb{R}$.

On définit l'adhérence de A, notée \overline{A} , comme suit : $\overline{A} = \bigcap_{F \text{ fermé}, A \subset F} F$.

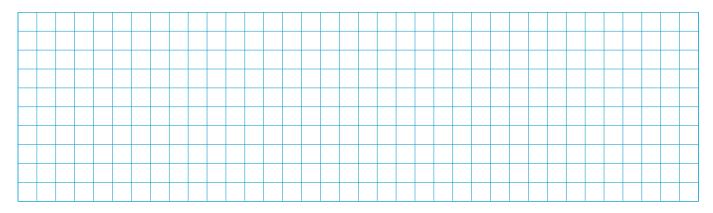
C'est le plus petit fermé contenant A.

Lemme:

Soit $A \subset \mathbb{R}$.

 $x \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, |x - \varepsilon, x + \varepsilon| \cap A \neq \emptyset.$

Preuve:



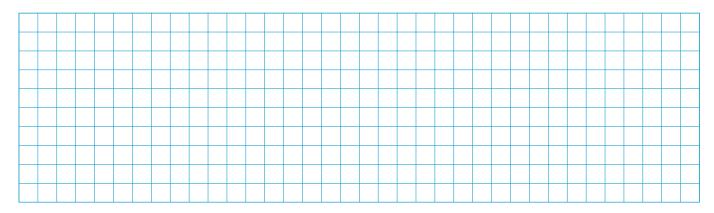
Théorème:

Soit $A \subset \mathbb{R}$.

Alors $\overline{A} = \{x \in \mathbb{R}, \exists (u_n) \text{ suite d'éléments de } A, u_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x\}.$

 $oldsymbol{0}$ Remarque : Autrement dit, l'adhérence de A est l'ensemble des limites de suites d'éléments de A.

Preuve:



B Complétude

Définition : $F \subset \mathbb{R}$ est complet si toute suite de Cauchy d'éléments de F converge dans F.

© Exemple: \mathbb{R} est complet.

Théorème : Caractérisation des parties complètes de $\ensuremath{\mathbb{R}}$

 $F \subset \mathbb{R}$ est complet $\Leftrightarrow F$ est fermé.

Preuve:

