

# Chapitre 2 : Formes linéaires et dualité

## I Formes linéaires et hyperplan

**Rappel :**  $E$  et  $F$  des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. On note  $\mathcal{L}(E, F)$  l'ensemble des applications linéaires de  $E$  dans  $F$ .

**Définition :** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

On appelle **forme linéaire** sur  $E$  toute application linéaire de  $E$  dans  $\mathbb{K}$ .

On appelle l'espace dual de  $E$  et on note  $E^*$  l'ensemble des formes linéaires sur  $E$  :

$$E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$$

**Remarque :** Si  $\varphi \in E^*$  et  $x \in E$ , on peut noter  $\varphi(x) = \langle \varphi, x \rangle$ .

**Vocabulaire :** On appelle  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le crochet de dualité.

**Exemple :**  $E = \mathbb{R}^3$ .

On pose  $f(x, y, z) = 3x + 2y - z$ . Alors  $f \in E^*$ .

**Proposition :**

L'image d'un élément de  $E^*$  est  $\mathbb{K}$  ou  $\{0\}$  et  $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}) = 1$ .

$$\text{Im}(f) = \{0\} \Leftrightarrow f = 0.$$

**Preuve :** Appliquer le théorème du rang.

**Définition :** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

On appelle **hyperplan** de  $E$  le noyau d'une forme linéaire non nulle sur  $E$ .

**Proposition :**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et soit  $H$  un sous-espace vectoriel de  $E$ .

$H$  est un hyperplan de  $E \Leftrightarrow \exists x_0 \in E \setminus \{0\}$  tel que  $E = H \oplus \text{Vect}(x_0)$ .

De plus, si  $\dim(E) = n$ ,  $H$  est un hyperplan de  $E \Leftrightarrow \dim(H) = n - 1$ .

**Remarque :** Le prof a noté  $\mathbb{K}x_0$  au lieu de  $\text{Vect}(x_0)$ .

**Démonstration :**

Supposons que  $H$  est un hyperplan de  $E$ .

Par définition, il existe  $f \in E^* \setminus \{0\}$  tel que  $H = \text{Ker}(f)$ .

Soit  $x_0 \in E$  tel que  $f(x_0) \neq 0$ . En particulier,  $f(x_0) \neq 0$  (car  $f$  est non nulle).

Montrons que  $E = H \oplus \text{Vect}(x_0)$ .

Soit  $x \in H \cup \text{Vect}(x_0)$ .

Comme  $x \in \text{Vect}(x_0)$ , il existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que  $x = x_0 * \lambda$ .

Or  $x \in H \Rightarrow 0 = f(x) = f(x_0 * \lambda) = \lambda f(x_0)$ .

Comme  $f(x_0) \neq 0$ , on en déduit que  $\lambda = 0$  et donc  $x = 0$  et  $H \cap \text{Vect}(x_0) = \{0\}$ .

Montrons que  $E = H + Vect(x_0)$ .

Soit  $x \in E$ .

$$\text{On a } x = x - \underbrace{\frac{f(x)}{f(x_0)}x_0}_{\in H} + \underbrace{\frac{f(x)}{f(x_0)}x_0}_{\in Vect(x_0)}$$

Donc  $E = H + Vect(x_0)$  et finalement  $E = H \oplus Vect(x_0)$ .

Réciproquement, supposons qu'il existe  $x_0 \in E \setminus \{0\}$  tel que  $E = H \oplus Vect(x_0)$ .

Soit  $p$  la projection sur  $Vect(x_0)$  parallèlement à  $H$ . (ie. pour  $x \in E$ ,  $p(x)$  est l'unique élément  $\lambda x_0$  dans la décomposition  $x = h + \lambda x_0$  avec  $h \in H$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ ).

Pour  $x \in E$ , on note  $\lambda(x) \in \mathbb{K}$  tel que  $p(x) = \lambda(x)x_0$ .

On a  $\lambda : E \rightarrow \mathbb{K} \in E^*$  (il suffit de montrer que  $\lambda$  est linéaire).

De plus,  $\lambda(x_0) = 1$  par définition donc  $\lambda \in E^* \setminus \{0\}$  et  $\forall h \in H, \lambda(h) = 0$  (car  $p(h) = 0$ ).

Doc  $H = Ker(\lambda)$ , c'est-à-dire que  $H$  est un hyperplan de  $E$ .  $\square$

### Proposition :

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et soient  $f, g \in E^*$ .

$$ker(f) = ker(g) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}, g = \lambda f$$

(ie.  $f$  et  $g$  sont proportionnelles).

### Démonstration :

Comme  $f$  et  $g$  sont non nulles,  $ker(f) = ker(g)$  est un hyperplan de  $E$ .

Donc  $E$  s'écrit comme  $E = H \oplus Vect(x_0)$  avec  $H = ker(f) = ker(g)$  et  $x_0 \in E \setminus \{0\}$ .

En particulier,  $x_0 \notin ker(f)$  et  $x_0 \notin ker(g)$ . (car sinon  $E = ker(f)$  ou  $E = ker(g)$  et donc  $f = 0$  ou  $g = 0$ ).

Donc posons  $\lambda = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$ .

Montrons que  $f = \lambda g$ .

Soit  $x \in E$ .

On écrit  $x = h + \mu x_0$  avec  $h \in H$  et  $\mu \in \mathbb{K}$ .

Alors  $f(x) = f(h + \mu x_0) = f(h) + \mu f(x_0) = \mu f(x_0)$  (car  $h \in H = ker(f)$ ).

Et de même  $g(x) = g(h + \mu x_0) = g(h) + \mu g(x_0) = \mu g(x_0) = \lambda \mu f(x)$ .

Donc  $g = \lambda f$ .  $\square$

## II Bases duales