

# Chapitre 2.3 : Séries semi-convergentes et produit de Cauchy

## I Séries semi-convergentes

**Exemple :**  $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n}$ , on voit qu'elle n'est pas ACV, mais  $|\frac{e^{in\theta}}{n}| = \frac{1}{n} \forall \theta \in \mathbb{R}$ .

Mais on a pas les outils pour voir si elle est "seulement" convergente. *Idem* pour la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ .

Donc le but ici, c'est de trouver des critères de convergence pour des séries qui ne sont pas ACV.

## A Définitions et premières propriétés

**Définition :** Une série est dite **semi-convergente** (SCV) si elle est convergente mais pas absolument convergente.

**Remarque :** On considère ici les séries à terme général  $u_n \in \mathbb{C}$  ou  $\mathbb{R}$  (on a pas  $u_n \geq 0$ ).

### Proposition : "étrange"

Soit  $\sum_{n \geq 0} u_n$  une série à terme général dans  $\mathbb{R}$ .

On considère la série  $\sum_{n \geq 0} u_n^+$  et  $\sum_{n \geq 0} u_n^-$ .

On a  $\sum_{n \geq 0} u_n$  est SCV  $\Rightarrow \sum_{n \geq 0} u_n^+$  et  $\sum_{n \geq 0} u_n^-$  divergent.

**Preuve:**

On rappelle que  $u_n^+ = \max(u_n, 0)$  et  $u_n^- = \max(-u_n, 0)$  et donc  $u_n = u_n^+ - u_n^-$  (2) et  $|u_n| = u_n^+ + u_n^-$  (1).

- Si  $\sum_{n \geq 0} u_n^+$  et  $\sum_{n \geq 0} u_n^-$  convergent, alors  $\sum_{n \geq 0} u_n$  ACV par (1) : **absurde**.
- Si l'une des séries converge et l'autre diverge, alors  $\sum_{n \geq 0} u_n$  diverge par (2).
- Seule possibilité donc :  $\sum_{n \geq 0} u_n^+$  et  $\sum_{n \geq 0} u_n^-$  divergent.

### Proposition :

Considérons  $\sum_{n \geq 0} u_n$  une série à terme général dans  $\mathbb{C}$ .

Alors on a :

$\sum_{n \geq 0} u_n$  est SCV  $\Leftrightarrow \sum_{n \geq 0} \operatorname{Re}(u_n)$  et  $\sum_{n \geq 0} \operatorname{Im}(u_n)$  sont CV et l'une d'entre elles est SCV.

**Preuve:**

$\Rightarrow$  / Si  $\sum_{n \geq 0} u_n$  est CV, alors  $\sum_{n=0}^N u_n = \sum_{n=0}^N \operatorname{Re}(u_n) + i \sum_{n=0}^N \operatorname{Im}(u_n)$ .

Donc on a la CV des séries  $\sum_{n \geq 0} \operatorname{Re}(u_n)$  et  $\sum_{n \geq 0} \operatorname{Im}(u_n)$ .

Montrons que l'une des deux séries n'est pas ACV.

En effet on a  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq |\operatorname{Re}(u_n)| + |\operatorname{Im}(u_n)|$  si  $\sum_{n \geq 0} |\operatorname{Re}(u_n)|$  et  $\sum_{n \geq 0} |\operatorname{Im}(u_n)|$  ACV.

$\Rightarrow$  une des deux séries n'est pas ACV.

$\Rightarrow$  une des deux séries est ACV.

$\Leftarrow$  / On a que  $\sum_{n \geq 0} \operatorname{Re}(u_n)$  et  $\sum_{n \geq 0} \operatorname{Im}(u_n)$  sont CV.


Donc  $\sum_{n \geq 0} u_n$  est CV.

Montrons que  $\sum_{n \geq 0} u_n$  est SCV.

On a :  $|\operatorname{Re}(u_n)| \leq |u_n|$  et  $|\operatorname{Im}(u_n)| \leq |u_n|, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Si  $\sum_{n \geq 0} u_n$  était ACV, alors  $\sum_{n \geq 0} \operatorname{Re}(u_n)$  et  $\sum_{n \geq 0} \operatorname{Im}(u_n)$  seraient ACV ce qui est contraire à l'hypothèse "l'une d'entre elles est SCV".

## B Critère d'Abel


 **Application :** On veut donner un critère pour la convergence d'une série du type  $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n} = a_n b_n$  avec  $a_n = e^{in\theta}$  et  $b_n = \frac{1}{n}$ .

### Théorème : Critère d'Abel

On considère la série  $\sum_{n \geq 0} u_n$  où  $\sum_{n \geq 0} u_n \in \mathbb{C}$ , avec  $u_n = a_n b_n$  tels que :

1.  $(a_n)$  est **réelle, décroissante**, et  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .
2.  $(b_n)$  est **complexe** telle que  $B_N = \sum_{n=0}^N b_n$ , i.e.  $(B_N)$  est **bornée**.

Alors la série  $\sum_{n \geq 0} a_n b_n$  converge.

 **Rappel :** Une suite complexe est bornée :  $\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |z_n| \leq M$ , où  $|z_n| = \sqrt{\operatorname{Re}(z_n)^2 + \operatorname{Im}(z_n)^2}$ .

### Preuve:

On va utiliser la "transformation d'Abel".

On a  $B_N = \sum_{n=0}^N b_n$ .

Alors  $B_k - B_{k-1} = b_k, \forall k \geq 1$  et  $B_0 = b_0$ .

On part de la somme partielle de la série :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^N a_k b_k &= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^N a_k (B_k - B_{k-1}) \\ &= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^N a_k B_k - \sum_{k=1}^N a_k B_{k-1} \\ &= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^N a_k B_k - \sum_{k=0}^{N-1} a_{k+1} B_k \\ &= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{N-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_N B_N - a_1 b_0 = \sum_{k=0}^N (a_k - a_{k+1}) B_k + a_N B_N \end{aligned}$$

avec  $a_n$  tend vers 0 et  $B_n$  bornée


Etude de  $\sum_{k=0}^N (a_k - a_{k+1}) B_k$ , séries à termes dans  $\mathbb{C}$ .


Etudions donc l'ACV :

$$|a_k - a_{k+1} B_k| |a_k - a_{k+1}| |B_k| \leq (a_k - a_{k+1}) M \text{ car } |B_k| \leq M$$

Or la série  $\sum_{k=0}^N (a_k - a_{k+1}) M$  est de même nature que  $\sum_{k=0}^N a_k - a_{k+1}$  (car  $M$  est un scalaire non nul).


Et la CV de cette série télescopique est évidente.

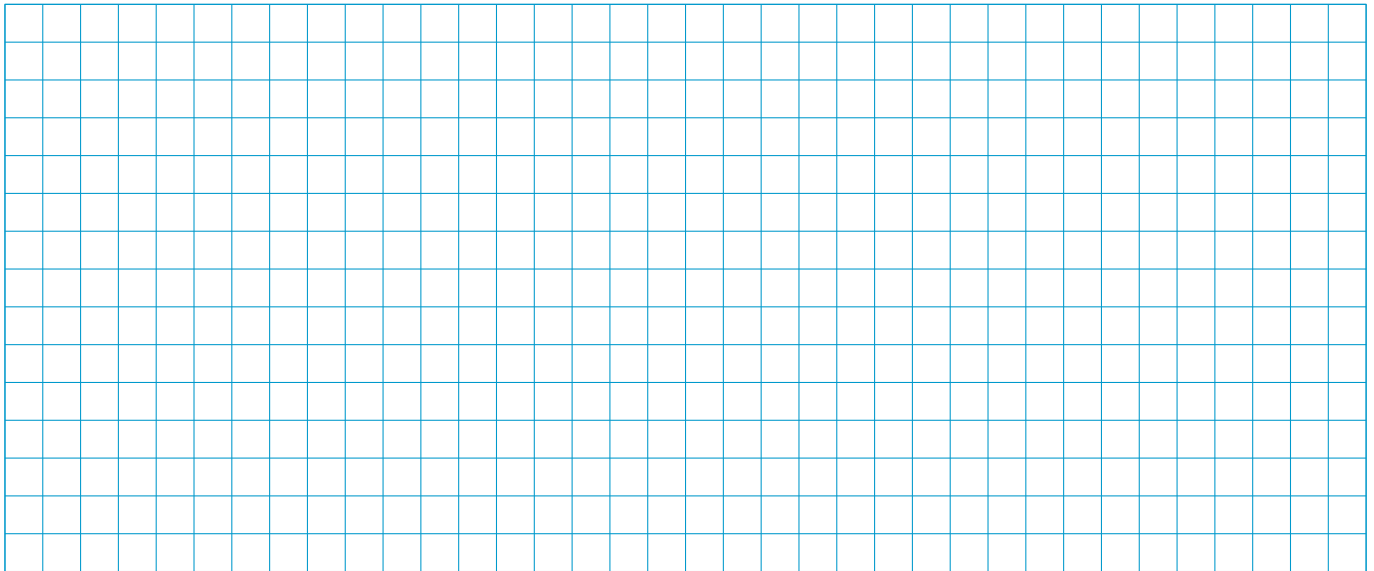
 **Note de rédaction :** Il y avait beaucoup d'indices et d'infos, j'attends la vérification de Laurent pour être sûr que c'est correct (j'ai un doute sur la fin).

 **Application :** Pour  $\theta \neq 2\pi k, \sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n}$  converge par le critère d'Abel,  $a_n = \frac{1}{n}$  et  $b_n = e^{in\theta}$  et  $\sum_{n \geq 1} b_n = \frac{1 - e^{i(N+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}$

$$\text{et } |B_N| = \left| \frac{1 - e^{i(N+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} \right| \leq \frac{|1| + |e^{i(N+1)\theta}|}{|1 - e^{i\theta}|} = \frac{2}{|1 - e^{i\theta}|}.$$

Donc la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n}$  converge, mais pas ACV, donc elle est SCV.

 **Application :** Etudier la convergence, l'absolue convergence et la semi-convergence de la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$  avec  $\theta \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}_+^*$ .



**Remarque :** Dans le critère d'Abel, comme  $(a_n)$  est décroissante et  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ ,  $a_n \geq 0$  (car  $a_n \in \mathbb{R}$ ).

## C Séries alternées

**Définition :** Une série  $\sum_{n \geq 0} u_n$  est dite **alternée** si  $u_n = (-1)^n a_n$  ou  $u_n = (-1)^{n+1} a_n$  avec  $a_n \geq 0$ .

**Exemple :**  $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n}$ ,  $\sum_{n \geq 0} (-1)^n$  sont des séries alternées.

**Remarque :**  $(-1)^n \cdot u_n = (-1)^{2n} a_n = a_n$  ou  $u_n = -a_n \Rightarrow (-1)^n u_n$  est de signe constant

**Remarque :** Une définition équivalente est : une série est alternée si le signe de  $(-1)^n \cdot u_n$  est constant.

### Théorème : Critère spécial des séries alternées (CSSA)

Soit  $\sum_{n \geq 0} u_n$  une série de terme général  $u_n = (-1)^n a_n$ , avec  $a_n \geq 0$ .

Si :

1.  $(a_n)$  est décroissante.

2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

Alors la série  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge.

#### Preuve:

On applique le critère d'Abel avec  $a_n = a_n$  et  $b_n = (-1)^n$ .

On a bien  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  et  $(a_n)$  décroissante.

De plus,  $B_N = \sum_{n=0}^N (-1)^n = \frac{1 - (-1)^{N+1}}{1 - (-1)}$  est bornée (égale à 0 ou 1).

Donc la série  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge.

**Proposition :**

Soit  $\sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n$  une série alternée vérifiant les hypothèses du CSSA (donc  $(a_n)$  est décroissante et  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ).

On considère la suite des sommes partielles  $(S_N)$  avec  $S_N = \sum_{k=0}^N (-1)^k a_k$ .

Soit  $S$  la somme de la série.

Alors :

$$S_{2N+1} \leq S \leq S_{2N} \text{ et } |R_N| = |S - S_N| \leq a_{N+1}.$$

**Preuve:**

On pose  $A_N = S_{2N}$  et  $B_N = S_{2N+1}$ .

On observe que  $S_{2N+1} - S_{2N} = -a_{2N+1} \leq 0$

$$\Leftrightarrow S_{2N+1} \leq S_{2N}.$$

*Variations de  $(A_N)$  et  $(B_N)$*

$A_{N+1} - A_N = S_{2N+2} - S_{2N} = a_{2N+2} - a_{2N+1} \leq 0$  car  $(a_n)$  décroissante.

$\Leftrightarrow A_{N+1} \leq A_N$ . Donc  $(A_N)$  est décroissante et  $B_{N+1} - B_N = S_{2N+3} - S_{2N+1} = a_{2N+2} - a_{2N+3} \geq 0$  car  $(a_n)$  décroissante.

$\Leftrightarrow B_{N+1} \geq B_N$ . Donc  $(B_N)$  est croissante.

De plus, on a  $B_N - A_N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$  donc  $(A_N)$  et  $(B_N)$  sont adjacentes, et convergent vers la même limite  $S$ .

et donc  $B_N \leq S \leq A_N$  où  $S = \lim_{N \rightarrow \infty} A_N = \lim_{N \rightarrow \infty} B_N$ .

On a bien  $S_{2N+1} \leq S \leq S_{2N}, \forall N \in \mathbb{N}$ .


Etudions maintenant le reste.

$R_N = S - S_N$ , on veut montrer que  $|R_N| \leq a_{N+1}$ .

Séparons le cas  $N$  pair et impair :

- Si  $N = 2p + 1$ , alors  $S_{2p+1} \leq S \implies S - S_{2p+1} \geq 0$ .  
 $\implies |R_{2p+1}| = S - S_{2p+1} \leq S_{2p+2} - S_{2p+1} = a_{2p+2} = a_{N+1}$ .
- *Laissé en exercice au lecteur :) □*

### ✗ Attention ✗

1. Si deux suites sont équivalentes ( $\sim$ ) et l'une monotone, l'autre ne l'est pas forcément.  **Exemple :**  $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+(-1)^n}}$  et  $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ . On a  $a_n \sim b_n$  mais  $(a_n)$  n'est pas monotone (on le montre en encadrant/calculant 3 termes consécutifs  $(2p, 2p+1, 2p+2)$ , alors que  $(b_n)$  l'est).


2. Considérons  $\sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n$ . On remarque que  $\sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n$  n'est pas ACV. Est-elle semi-convergente ?  
Le CSSA ne s'applique pas. Mais  $(-1)^n a_n \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$  QUI N'IMPLIQUE PAS " $\sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n$  CV car  $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$  CV" (car  $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$  n'est pas positive).  
**À faire :** Montrer que  $(-1)^n a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{(n)}} + b_n$ , où  $b_n = \frac{-1}{\sqrt{n}(\sqrt{n+(-1)^n})}$  et en déduire que  $\sum u_n$  DV.

Donc  $u_n \sim v_n$ ,  $\sum v_n$  CV  $\implies \sum u_n$  CV que si  $v_n$  est  $\geq 0$  ou  $\leq 0$

## II Produit de Cauchy de deux séries

**Définition :** Soient  $\sum_{n \geq 0} a_n$  et  $\sum_{n \geq 0} b_n$  deux séries.

La **série produit (de Cauchy)** est définie par la série  $\sum_{n \geq 0} c_n$  où  $c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

 **Remarque :** Supposons que  $a_n = 0 = b_n$  pour  $n > N \in \mathbb{N}$ . Considérons  $P(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$  et  $Q(X) = b_0 + b_1 X + \dots + b_n X^n$ .

Alors  $(PQ)(X) = c_0 + c_1 X + \dots + c_{2N} X^{2N}$ . On peut penser au produit de Cauchy comme une "généralisation".

### Proposition :

On considère  $\sum_{n \geq 0} a_n$  et  $\sum_{n \geq 0} b_n$  deux séries à termes positifs et convergentes.

Alors la série produit  $\sum_{n \geq 0} c_n$  est convergente et on a :  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n)(\sum_{n=0}^{\infty} b_n)$ .

### Preuve:

Soient  $A_N = \sum_{n=0}^N a_n$  et  $B_N = \sum_{n=0}^N b_n$ .

Notons  $C_N = \sum_{n=0}^N c_n = \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ .

On veut montrer que  $(C_N)$  converge et déterminer sa limite.

$(C_N)$  est une somme partielle à termes positifs, donc  $(C_N)$  est croissante.

Posons  $I_N = \{0, \dots, N\} \subset \mathbb{N}$

 **Note de rédaction :** Dessin  $I_N \times I_N$

Considérons  $A_N B_N = \sum_{(p,q) \in I_N \times I_N} a_p b_q$ .

Mais  $C_N = \sum_{n=0}^N c_n = \sum_{n=0}^N \sum_{p+q=n} a_p b_q = \sum_{(p,q) \in I_N^2, p+q \leq N} a_p b_q$ .

On a  $\{(p, q) \mid p+q \leq N\} \subset \{(p, q) \mid p, q \in I_N\}$ , donc  $C_N \leq A_N B_N$  (1) qui est bornée car  $A_N$  CV et  $B_N$  CV  $\implies C_N$  bornée.

On a aussi l'inégalité :  $A_N B_N \leq C_{2N}$  (2)

 **Note de rédaction :** Deuxième schéma

car  $\{(p, q) \mid p+q \leq N\} \supset \{(p, q) \mid 0 \leq p, q \leq N\}$ . On obtient  $\lim_{+\infty} c_n = \lim_{+\infty} (A_N B_N) = (\lim_{+\infty} A_N) \cdot (\lim_{+\infty} B_N)$ .  $\square$

### Théorème :

Soient  $\sum_{n \geq 0} a_n$  et  $\sum_{n \geq 0} b_n$  deux séries à termes dans  $\mathbb{C}$ .

Si les séries sont ACV, alors la série produit  $\sum_{n \geq 0} c_n$  est ACV. (où  $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ )

**Preuve:**

On considère  $A_N = \sum_{n=0}^N |a_n|$ ,  $B_N = \sum_{n=0}^N |b_n|$  et  $C_N = \sum_{n=0}^N |c_n|$ .

D'après la proposition précédente et sa démonstration, on a  $A_N B_N - C_N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$ . (on va utiliser cette propriété)

On a  $\forall N \in \mathbb{N}$ ,  $|(\sum_{n=0}^N a_n)(\sum_{n=0}^N |b_n|) - (\sum_{n=0}^N |c_n|)|$ .

On peut donc écrire :

$$|(\sum_{n=0}^N a_n)(\sum_{n=0}^N |b_n|) - (\sum_{n=0}^N |c_n|)| = |\sum_{p \in I_N} \sum_{q \in I_N} a_p b_q - \sum_{(p,q) \in I_N^2, p+q \leq N} a_p b_q| = |\sum_{(p,q) \in I_N^2} a_p b_q - \sum_{(p,q) \in J_N^2} a_p b_q| \text{ où } J_N = \{(p,q) \mid p+q \leq N\}$$

Or  $J_N \subset I_N^2$ , donc

$$|\sum_{(p,q) \in I_N^2} a_p b_q - \sum_{(p,q) \in J_N^2} a_p b_q| = |\sum_{(p,q) \in I_N^2 \setminus J_N^2} a_p b_q| = \sum_{(p,q) \in K_N} |a_p b_q|$$

où  $K_N = I_N^2 \setminus J_N^2 = \{(p,q) \mid p+q > N\}$ .

$$\leq \sum_{(p,q) \in K_N} |a_p| |b_q| = (\sum_{n=0}^N |a_n|)(\sum_{n=0}^N |b_n|) - \sum_{n=0}^N |c_n| = A_N B_N - C_N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

par la proposition précédente et l'inégalité triangulaire.

**✗ Attention ✗** À changer dans la démo  $A_N$  en  $A'_N$  et  $B_N$  en  $B'_N$ .

De plus, il faut mettre  $C'_N = \sum_{n=0}^N |c'_n| = \sum_{n=0}^N |a_n| |b_{n-k}|$  et pas  $|\sum_{n=0}^N a_k b_{n-k}|$ .

**📌 Remarque :** L'hypothèse d'absolue convergence pour  $\sum a_n$  et  $\sum b_n$  est très importante dans le théorème. L'hypothèse de positivité dans la proposition qui précède le théorème est fondamentale.

**💡 Exemple :** On considère la série de terme général  $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ .

- $u_n$  n'est pas positive.
- On a pas l'absolue convergence.
- Le CSSA s'applique car  $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$  est positive, décroissante et tend vers 0.

Considérons le produit de Cauchy.  $(\sum_{n \geq 1} u_n)(\sum_{n \geq 1} u_n) = \sum_{n \geq 1} c_n$  où  $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \cdot \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k}}$

Montrons que  $\sum_{n \geq 1} c_n$  diverge (en montrant que ça ne tend pas vers 0).

$$\text{On a } |c_n| = |\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k \cdot (n-k)}}|$$

$$\text{On a } k(n-k) \leq kn - k^2 \leq kn \leq (n-1)n.$$

$$\text{Donc } |c_n| = |\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k \cdot (n-k)}}| \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{(n-1)n}} = \frac{n-1}{\sqrt{(n-1)n}} = \sqrt{\frac{n-1}{n}}.$$

$$\text{Donc } |c_n| \not\rightarrow 0.$$

**Conclusion :** Pour faire le produit de Cauchy de deux séries, il faut :

1. Que les deux séries soient ACV.
2. ou Que les deux séries soient à termes positifs et CV.

**📌 Application :** Fixons  $z \in \mathbb{C}$ . Etudions la convergence de la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$ .

1. Montrons que  $\forall n \in \mathbb{N}$  la série ACV.

$$\text{On va utiliser la règle de d'Alembert : } \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{|z|}{(n+1)}.$$

$$\text{Donc } \forall z \in \mathbb{C}, \frac{z^n}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Donc  $\forall z \in \mathbb{C}$ ,  $\sum_{n \geq 0} u_n(z)$  est ACV.

**📌 Remarque :** On a le bon goût de pouvoir appeler  $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} := \exp(z)$ . (je dis bon goût mais ça risque de faire mal bientôt)

2. Calculons  $\exp(z) \cdot \exp(z')$  avec  $z, z' \in \mathbb{C}$ .

Comme les deux séries sont ACV, on peut faire le produit de Cauchy.

$$\exp(z) \cdot \exp(z') = \sum_{n \geq 0} c_n \text{ où } c_n = \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \cdot \frac{(z')^{n-k}}{(n-k)!}$$

On a  $c_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} z^k (z')^{n-k} = \frac{(z+z')^n}{n!}$  par le binôme de Newton.

$$\text{Donc } \exp(z) \cdot \exp(z') = \sum_{n \geq 0} \frac{(z+z')^n}{n!} = \exp(z+z').$$