

Chapitre 2.3 : Séries semi-convergentes et produit de Cauchy

I Séries semi-convergentes

Exemple : $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n}$, on voit qu'elle n'est pas ACV, mais $|\frac{e^{in\theta}}{n}| = \frac{1}{n} \forall \theta \in \mathbb{R}$.

Mais on a pas les outils pour voir si elle est "seulement" convergente. *Idem* pour la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$.

Donc le but ici, c'est de trouver des critères de convergence pour des séries qui ne sont pas ACV.

A Définitions et premières propriétés

Définition : Une série est dite **semi-convergente** (SCV) si elle est convergente mais pas absolument convergente.

Remarque : On considère ici les séries à terme général $u_n \in \mathbb{C}$ ou \mathbb{R} (on a pas $u_n \geq 0$).

Proposition : "étrange"

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série à terme général dans \mathbb{R} .

On considère la série $\sum_{n \geq 0} u_n^+$ et $\sum_{n \geq 0} u_n^-$.

On a $\sum_{n \geq 0} u_n$ est SCV $\Rightarrow \sum_{n \geq 0} u_n^+$ et $\sum_{n \geq 0} u_n^-$ divergent.

Preuve:

On rappelle que $u_n^+ = \max(u_n, 0)$ et $u_n^- = \max(-u_n, 0)$ et donc $u_n = u_n^+ - u_n^-$ (2) et $|u_n| = u_n^+ + u_n^-$ (1).

- Si $\sum_{n \geq 0} u_n^+$ et $\sum_{n \geq 0} u_n^-$ convergent, alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ ACV par (1) : **absurde**.
- Si l'une des séries converge et l'autre diverge, alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge par (2).
- Seule possibilité donc : $\sum_{n \geq 0} u_n^+$ et $\sum_{n \geq 0} u_n^-$ divergent.

Proposition :

Considérons $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série à terme général dans \mathbb{C} .

Alors on a :

$\sum_{n \geq 0} u_n$ est SCV $\Leftrightarrow \sum_{n \geq 0} \operatorname{Re}(u_n)$ et $\sum_{n \geq 0} \operatorname{Im}(u_n)$ sont CV et l'une d'entre elles est SCV.

Preuve:

\Rightarrow / Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ est CV, alors $\sum_{n=0}^N u_n = \sum_{n=0}^N \operatorname{Re}(u_n) + i \sum_{n=0}^N \operatorname{Im}(u_n)$.

Donc on a la CV des séries $\sum_{n \geq 0} \operatorname{Re}(u_n)$ et $\sum_{n \geq 0} \operatorname{Im}(u_n)$.

Montrons que l'une des deux séries n'est pas ACV.

En effet on a $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq |\operatorname{Re}(u_n)| + |\operatorname{Im}(u_n)|$ si $\sum_{n \geq 0} |\operatorname{Re}(u_n)|$ et $\sum_{n \geq 0} |\operatorname{Im}(u_n)|$ ACV.

\Rightarrow une des deux séries n'est pas ACV.

\Rightarrow une des deux séries est ACV.

\Leftarrow / On a que $\sum_{n \geq 0} \operatorname{Re}(u_n)$ et $\sum_{n \geq 0} \operatorname{Im}(u_n)$ sont CV.


Donc $\sum_{n \geq 0} u_n$ est CV.

Montrons que $\sum_{n \geq 0} u_n$ est SCV.

On a : $|\operatorname{Re}(u_n)| \leq |u_n|$ et $|\operatorname{Im}(u_n)| \leq |u_n|, \forall n \in \mathbb{N}$.

Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ était ACV, alors $\sum_{n \geq 0} \operatorname{Re}(u_n)$ et $\sum_{n \geq 0} \operatorname{Im}(u_n)$ seraient ACV ce qui est contraire à l'hypothèse "l'une d'entre elles est SCV".

B Critère d'Abel


 **Application :** On veut donner un critère pour la convergence d'une série du type $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n} = a_n b_n$ avec $a_n = e^{in\theta}$ et $b_n = \frac{1}{n}$.

Théorème : Critère d'Abel

On considère la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ où $\sum_{n \geq 0} u_n \in \mathbb{C}$, avec $u_n = a_n b_n$ tels que :

1. (a_n) est **réelle, décroissante**, et $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.
2. (b_n) est **complexe** telle que $B_N = \sum_{n=0}^N b_n$, i.e. (B_N) est **bornée**.

Alors la série $\sum_{n \geq 0} a_n b_n$ converge.

 **Rappel :** Une suite complexe est bornée : $\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |z_n| \leq M$, où $|z_n| = \sqrt{\operatorname{Re}(z_n)^2 + \operatorname{Im}(z_n)^2}$.

Preuve:

On va utiliser la "transformation d'Abel".

On a $B_N = \sum_{n=0}^N b_n$.

Alors $B_k - B_{k-1} = b_k, \forall k \geq 1$ et $B_0 = b_0$.

On part de la somme partielle de la série :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^N a_k b_k &= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^N a_k (B_k - B_{k-1}) \\ &= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^N a_k B_k - \sum_{k=1}^N a_k B_{k-1} \\ &= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^N a_k B_k - \sum_{k=0}^{N-1} a_{k+1} B_k \\ &= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{N-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_N B_N - a_1 b_0 = \sum_{k=0}^N (a_k - a_{k+1}) B_k + a_N B_N \end{aligned}$$

avec a_n tend vers 0 et B_n bornée


Etude de $\sum_{k=0}^N (a_k - a_{k+1}) B_k$, séries à termes dans \mathbb{C} .


Etudions donc l'ACV :

$$|a_k - a_{k+1} B_k| |a_k - a_{k+1}| |B_k| \leq (a_k - a_{k+1}) M \text{ car } |B_k| \leq M$$

Or la série $\sum_{k=0}^N (a_k - a_{k+1}) M$ est de même nature que $\sum_{k=0}^N a_k - a_{k+1}$ (car M est un scalaire non nul).


Et la CV de cette série télescopique est évidente.

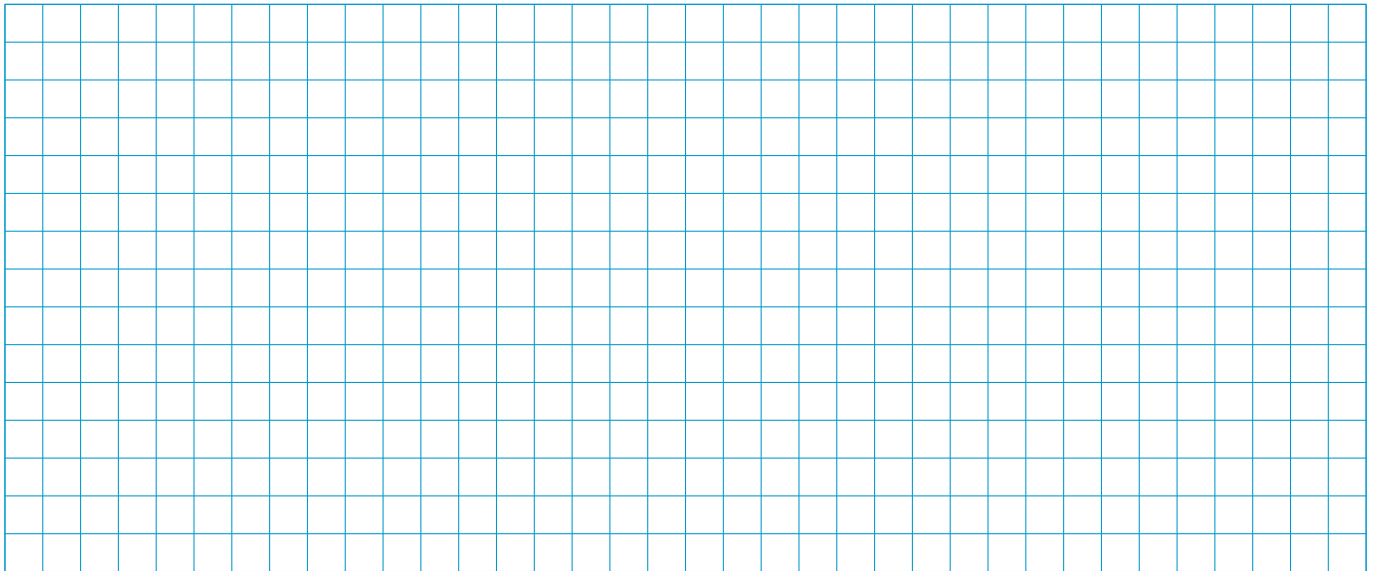
 **Note de rédaction :** Il y avait beaucoup d'indices et d'infos, j'attends la vérification de Laurent pour être sûr que c'est correct (j'ai un doute sur la fin).

 **Application :** Pour $\theta \neq 2\pi k, \sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n}$ converge par le critère d'Abel, $a_n = \frac{1}{n}$ et $b_n = e^{in\theta}$ et $\sum_{n \geq 1} b_n = \frac{1 - e^{i(N+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}$

$$\text{et } |B_N| = \left| \frac{1 - e^{i(N+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} \right| \leq \frac{|1| + |e^{i(N+1)\theta}|}{|1 - e^{i\theta}|} = \frac{2}{|1 - e^{i\theta}|}.$$

Donc la série $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n}$ converge, mais pas ACV, donc elle est SCV.

 **Application :** Etudier la convergence, l'absolue convergence et la semi-convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ avec $\theta \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}_+^*$.



Remarque : Dans le critère d'Abel, comme (a_n) est décroissante et $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, $a_n \geq 0$ (car $a_n \in \mathbb{R}$).

C Séries alternées

Définition : Une série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est dite **alternée** si $u_n = (-1)^n a_n$ ou $u_n = (-1)^{n+1} a_n$ avec $a_n \geq 0$.

Exemple : $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n}$, $\sum_{n \geq 0} (-1)^n$ sont des séries alternées.

Remarque : $(-1)^n \cdot u_n = (-1)^{2n} a_n = a_n$ ou $u_n = -a_n \Rightarrow (-1)^n u_n$ est de signe constant

Remarque : Une définition équivalente est : une série est alternée si le signe de $(-1)^n \cdot u_n$ est constant.

Théorème : Critère spécial des séries alternées (CSSA)

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série de terme général $u_n = (-1)^n a_n$, avec $a_n \geq 0$.

Si :

1. (a_n) est décroissante.

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Alors la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

Preuve:

On applique le critère d'Abel avec $a_n = a_n$ et $b_n = (-1)^n$.

On a bien $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ et (a_n) décroissante.

De plus, $B_N = \sum_{n=0}^N (-1)^n = \frac{1 - (-1)^{N+1}}{1 - (-1)}$ est bornée (égale à 0 ou 1).

Donc la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

Proposition :

Soit $\sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n$ une série alternée vérifiant les hypothèses du CSSA (donc (a_n) est décroissante et $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$).

On considère la suite des sommes partielles (S_N) avec $S_N = \sum_{k=0}^N (-1)^k a_k$.

Soit S la somme de la série.

Alors :

$$S_{2N+1} \leq S \leq S_{2N} \text{ et } |R_N| = |S - S_N| \leq a_{N+1}.$$

Preuve:

On pose $A_N = S_{2N}$ et $B_N = S_{2N+1}$.

On observe que $S_{2N+1} - S_{2N} = -a_{2N+1} \leq 0$

$$\Leftrightarrow S_{2N+1} \leq S_{2N}.$$

Variations de (A_N) et (B_N)

$A_{N+1} - A_N = S_{2N+2} - S_{2N} = a_{2N+2} - a_{2N+1} \leq 0$ car (a_n) décroissante.

$\Leftrightarrow A_{N+1} \leq A_N$. Donc (A_N) est décroissante et $B_{N+1} - B_N = S_{2N+3} - S_{2N+1} = a_{2N+2} - a_{2N+3} \geq 0$ car (a_n) décroissante.

$\Leftrightarrow B_{N+1} \geq B_N$. Donc (B_N) est croissante.

De plus, on a $B_N - A_N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$ donc (A_N) et (B_N) sont adjacentes, et convergent vers la même limite S .
et donc $B_N \leq S \leq A_N$ où $S = \lim_{N \rightarrow \infty} A_N = \lim_{N \rightarrow \infty} B_N$.

On a bien $S_{2N+1} \leq S \leq S_{2N}, \forall N \in \mathbb{N}$.

Etudions maintenant le reste.


$R_N = S - S_N$, on veut montrer que $|R_N| \leq a_{N+1}$.

Séparons le cas N pair et impair :

- Si $N = 2p + 1$, alors $S_{2p+1} \leq S \implies S - S_{2p+1} \geq 0$.
 $\implies |R_{2p+1}| = S - S_{2p+1} \leq S_{2p+2} - S_{2p+1} = a_{2p+2} = a_{N+1}$.

- *Laissé en exercice au lecteur :) □*

✗ Attention ✗

1. Si deux suites sont équivalentes (\sim) et l'une monotone, l'autre ne l'est pas forcément.  **Exemple :** $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+(-1)^n}}$ et $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. On a $a_n \sim b_n$ mais (a_n) n'est pas monotone (on le montre en encadrant/calculant 3 termes consécutifs $(2p, 2p+1, 2p+2)$, alors que (b_n) l'est).


2. Considérons $\sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n$. On remarque que $\sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n$ n'est pas ACV. Est-elle semi-convergente ?
Le CSSA ne s'applique pas. Mais $(-1)^n a_n \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ QUI N'IMPLIQUE PAS " $\sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n$ CV car $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ CV" (car $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ n'est pas positive).
À faire : Montrer que $(-1)^n a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{(n)}} + b_n$, où $b_n = \frac{-1}{\sqrt{n}(\sqrt{n+(-1)^n})}$ et en déduire que $\sum u_n$ DV.

Donc $u_n \sim v_n$, $\sum v_n$ CV $\implies \sum u_n$ CV que si v_n est ≥ 0 ou ≤ 0

II Produit de Cauchy de deux séries

Définition : Soient $\sum_{n \geq 0} a_n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n$ deux séries.

La **série produit (de Cauchy)** est définie par la série $\sum_{n \geq 0} c_n$ où $c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

 **Remarque :** Supposons que $a_n = 0 = b_n$ pour $n > N \in \mathbb{N}$. Considérons $P(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$ et $Q(X) = b_0 + b_1 X + \dots + b_n X^n$.

Alors $(PQ)(X) = c_0 + c_1 X + \dots + c_{2N} X^{2N}$. On peut penser au produit de Cauchy comme une "généralisation".

Proposition :

On considère $\sum_{n \geq 0} a_n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n$ deux séries à termes positifs et convergentes.

Alors la série produit $\sum_{n \geq 0} c_n$ est convergente et on a : $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n)(\sum_{n=0}^{\infty} b_n)$.

Preuve:

Soient $A_N = \sum_{n=0}^N a_n$ et $B_N = \sum_{n=0}^N b_n$.

Notons $C_N = \sum_{n=0}^N c_n = \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$.

On veut montrer que (C_N) converge et déterminer sa limite.

(C_N) est une somme partielle à termes positifs, donc (C_N) est croissante.

Posons $I_N = \{0, \dots, N\} \subset \mathbb{N}$

 **Note de rédaction :** Dessin $I_N \times I_N$

Considérons $A_N B_N = \sum_{(p,q) \in I_N \times I_N} a_p b_q$.

Mais $C_N = \sum_{n=0}^N c_n = \sum_{n=0}^N \sum_{p+q=n} a_p b_q = \sum_{(p,q) \in I_N^2, p+q \leq N} a_p b_q$.

On a $\{(p, q) \mid p+q \leq N\} \subset \{(p, q) \mid p, q \in I_N\}$, donc $C_N \leq A_N B_N$ (1) qui est bornée car A_N CV et B_N CV $\implies C_N$ bornée.

On a aussi l'inégalité : $A_N B_N \leq C_{2N}$ (2)

 **Note de rédaction :** Deuxième schéma

car $\{(p, q) \mid p+q \leq N\} \supset \{(p, q) \mid 0 \leq p, q \leq N\}$. On obtient $\lim_{+\infty} c_n = \lim_{+\infty} (A_N B_N) = (\lim_{+\infty} A_N) \cdot (\lim_{+\infty} B_N)$. \square

Théorème :

Soient $\sum_{n \geq 0} a_n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n$ deux séries à termes dans \mathbb{C} .

Si les séries sont ACV, alors la série produit $\sum_{n \geq 0} c_n$ est ACV. (où $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$)

Preuve:

On considère $A_N = \sum_{n=0}^N |a_n|$, $B_N = \sum_{n=0}^N |b_n|$ et $C_N = \sum_{n=0}^N |c_n|$.

D'après la proposition précédente et sa démonstration, on a $A_N B_N - C_N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$. (on va utiliser cette propriété)

On a $\forall N \in \mathbb{N}$, $|(\sum_{n=0}^N a_n)(\sum_{n=0}^N |b_n|) - (\sum_{n=0}^N |c_n|)|$.

On peut donc écrire :

$$|(\sum_{n=0}^N a_n)(\sum_{n=0}^N |b_n|) - (\sum_{n=0}^N |c_n|)| = |\sum_{p \in I_N} \sum_{q \in I_N} a_p b_q - \sum_{(p,q) \in I_N^2, p+q \leq N} a_p b_q| = |\sum_{(p,q) \in I_N^2} a_p b_q - \sum_{(p,q) \in J_N^2} a_p b_q| \text{ où } J_N = \{(p,q) \mid p+q \leq N\}$$


Or $J_N \subset I_N^2$, donc

$$|\sum_{(p,q) \in I_N^2} a_p b_q - \sum_{(p,q) \in J_N^2} a_p b_q| = |\sum_{(p,q) \in I_N^2 \setminus J_N^2} a_p b_q| = \sum_{(p,q) \in K_N} |a_p b_q|$$


où $K_N = I_N^2 \setminus J_N^2 = \{(p,q) \mid p+q > N\}$.


$$\leq \sum_{(p,q) \in K_N} |a_p| |b_q| = (\sum_{n=0}^N |a_n|)(\sum_{n=0}^N |b_n|) - \sum_{n=0}^N |c_n| = A_N B_N - C_N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

par la proposition précédente et l'inégalité triangulaire.

 **Note de rédaction :** À changer dans la démo A_N en A'_N et B_N en B'_N .

De plus, il faut mettre $C'_N = \sum_{n=0}^N |c'_n| = \sum_{n=0}^N |a_n| |b_{n-k}|$ et pas $|\sum_{n=0}^N a_k b_{n-k}|$.

 **Remarque :** L'hypothèse d'absolue convergence pour $\sum a_n$ et $\sum b_n$ est très importante dans le théorème. L'hypothèse de positivité dans la proposition qui précède le théorème est fondamentale.

 **Exemple :** On considère la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

- u_n n'est pas positive.
- On a pas l'absolue convergence.
- Le CSSA s'applique car $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ est positive, décroissante et tend vers 0.

Considérons le produit de Cauchy. $(\sum_{n \geq 1} u_n)(\sum_{n \geq 1} u_n) = \sum_{n \geq 1} c_n$ où $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \cdot \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k}}$

Montrons que $\sum_{n \geq 1} c_n$ diverge (en montrant que ça ne tend pas vers 0).

$$\text{On a } |c_n| = |\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k \cdot (n-k)}}|$$


$$\text{On a } k(n-k) \leq kn - k^2 \leq kn \leq (n-1)n.$$

$$\text{Donc } |c_n| = |\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k \cdot (n-k)}}| \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{(n-1)n}} = \frac{n-1}{\sqrt{(n-1)n}} = \sqrt{\frac{n-1}{n}}.$$

$$\text{Donc } |c_n| \not\rightarrow 0.$$

Conclusion : Pour faire le produit de Cauchy de deux séries, il faut :

1. Que les deux séries soient ACV.
2. ou Que les deux séries soient à termes positifs et CV.


 **Application :** Fixons $z \in \mathbb{C}$. Etudions la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$.

1. Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$ la série ACV.

$$\text{On va utiliser la règle de d'Alembert : } \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{|z|}{(n+1)}.$$

$$\text{Donc } \forall z \in \mathbb{C}, \frac{z^n}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Donc $\forall z \in \mathbb{C}$, $\sum_{n \geq 0} u_n(z)$ est ACV.

 **Remarque :** On a le bon goût de pouvoir appeler $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} := \exp(z)$. (je dis bon goût mais ça risque de faire mal bientôt)

2. Calculons $\exp(z) \cdot \exp(z')$ avec $z, z' \in \mathbb{C}$.

Comme les deux séries sont ACV, on peut faire le produit de Cauchy.

$$\exp(z) \cdot \exp(z') = \sum_{n \geq 0} c_n \text{ où } c_n = \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \cdot \frac{(z')^{n-k}}{(n-k)!}$$

On a $c_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} z^k (z')^{n-k} = \frac{(z+z')^n}{n!}$ par le binôme de Newton.

$$\text{Donc } \exp(z) \cdot \exp(z') = \sum_{n \geq 0} \frac{(z+z')^n}{n!} = \exp(z+z').$$

III Hors-programme : Séries commutativement convergentes

💬 **Note de rédaction** : On a traité de ça en parlant rapidement de permutations. À voir chez Laurent si c'est nécessaire à mettre, mais je l'omets ici pour l'instant.