

# Chapitre 6 : Théorie spectrale

## I Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres

On se donne  $E$  un  $K$ -espace vectoriel et  $u \in \text{End}(E)$  un endomorphisme de  $E$ .

**Définition :** Soit  $\lambda \in K$ . On dit que  $\lambda$  est une **valeur propre (vp)** de  $u$  s'il existe un vecteur  $x \in E \setminus \{0_E\}$  tel que  $u(x) = \lambda x$ . Un tel vecteur  $x$  est appelé un **vecteur propre ( $\vec{vp}$ )** associé à la valeur propre  $\lambda$  de  $u$ .

**Définition :** On note  $E_\lambda$  le **sous-espace propre** de  $u$  associé à la valeur propre  $\lambda$  :

$$E_\lambda = \{x \in E \mid u(x) = \lambda x\} = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)$$

**Propriété :** (admise)

On a  $\lambda$  est une valeur propre de  $u$  si et seulement si  $E_\lambda \neq \{0_E\}$ .

Ce qui est vrai si et seulement si  $u - \lambda \text{Id}_E$  n'est pas inversible (autrement dit,  $\det(u - \lambda \text{Id}_E) = 0$ ).

**Vocabulaire :** On dit que  $u$  est **diagonalisable** s'il existe une base de  $E$  formée de  $\vec{vp}$  de  $u$ . (vecteurs propres)

**Proposition :**

$u$  est diagonalisable si et seulement si  $\text{Mat}_B(u)$  est diagonale pour une certaine base  $B$  de  $E$ . ( $E$  de dimension finie)

**Preuve :**

Soient  $(x_1, \dots, x_n)$  une base de  $E$  formée de  $\vec{vp}$  de  $u$  avec  $u(x_i) = \lambda_i x_i$ . On a donc :

$$\text{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

□

**Vocabulaire :** On dit que  $u$  est **trigonalisable** s'il existe une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est triangulaire supérieure. (vecteurs propres)

**Remarque :** Alors  $x$  est un  $\vec{vp}$  de  $u$ . Un endomorphisme sans  $\vec{vp}$  n'est pas diagonalisable.

**Exemple :** Si  $E = K^2$  et  $\text{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$  ( $B$  = canonique), alors  $u$  est trigonalisable pour la base  $B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ . En effet, on a :  $u\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

**Exemple :** Si  $\text{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ , alors  $u$  est diagonalisable.

**Exemple :** Si  $\text{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , n'est pas diagonalisable si  $K = \mathbb{R}$  (pas de  $\vec{vp}$ ), mais est diagonalisable si  $K = \mathbb{C}$  (car  $\lambda = i$  et  $\lambda = -i$  sont des vp).

## II Projections, symétries et rotations

Posons  $E = F \oplus G$  avec  $F, G$  sous-espaces vectoriels de  $E$ .

**Proposition :** (admis)

Soit  $p \in \mathcal{L}(E)$  la projection sur  $F$  parallèlement à  $G$  (i.e.  $p(x+y) = x$  pour tout  $(x, y) \in F \times G$ ).  
Alors les valeurs propres de  $p$  sont contenues dans  $\{0, 1\}$ . De plus,  $F = E_1$  et  $G = E_0$  et  $p$  est diagonalisable.

💬 **Note de rédaction :** cf. Laurent pour la démonstration

**Proposition :** (admis)

Soit  $s \in \mathcal{L}(E)$  la symétrie par rapport à  $F$  parallèlement à  $G$  (i.e.  $s(x+y) = x - y$  pour tout  $(x, y) \in F \times G$ ).  
Alors les valeurs propres de  $s$  sont contenues dans  $\{-1, 1\}$ . De plus,  $F = E_1$  et  $G = E_{-1}$  et  $s$  est diagonalisable.

Supposons  $E = \mathbb{K}^2$ ,  $K = \mathbb{R}$ .

Considérons  $u$  tel que  $Mat_B(u) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  dans la base canonique  $B$  de  $\mathbb{R}^2$  avec  $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ .

**Proposition :** (admis)

$u$  n'est pas diagonalisable si  $K = \mathbb{R}$  (pas de  $\vec{vp}$ ), mais est diagonalisable si  $K = \mathbb{C}$  (car  $\lambda = \cos \theta + i \sin \theta$  et  $\lambda = \cos \theta - i \sin \theta$  sont des vp).

## III Rappels sur les polynômes

💬 **Note de rédaction :** cf. AL2

**Définition :** Un polynôme  $P$  est irréductible sur  $K$  si  $P = QR$  entraîne que  $Q$  ou  $R$  est de degré 0 (c'est-à-dire une constante).  
Cela dépend du corps  $K$ .

**Définition :**  $P$  est scindé sur  $K$  si  $P$  est produit de polynômes de degré 1 sur  $K$ .

💡 **Exemple :** Sur  $\mathbb{R}$ ,  $X^2 + 1$  est irréductible. Sur  $\mathbb{C}$ ,  $X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$  est scindé.

💬 **Vocabulaire :**  $P$  est scindé à racines simples si  $P$  est scindé et si toutes ses racines sont de multiplicité 1, i.e.  $P = c(X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \dots (X - \alpha_n)$  avec  $\alpha_i$  distincts.

**Théorème d'Alembert-Gauss :** (admis)

1. Si  $K = \mathbb{C}$ , tout polynôme de degré  $\geq 1$  est scindé. (i.e.  $\mathbb{C}$  est un corps algébriquement clos)
2. Si  $K = \mathbb{R}$ , tout polynôme de degré  $\geq 1$  est produit de polynômes irréductibles de degré 1 ou 2.

## IV Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$  et  $u \in \text{End}(E)$ .

💡 **Rappel :** Soit  $\lambda \in K$ . C'est une valeur propre de  $u$  si et seulement si  $\det(u - \lambda Id_E) = 0$ .

💡 **Exemple :**  $Mat_B(u) = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ .  $E = \mathbb{R}^2$ ,  $K = \mathbb{R}$  et  $B$  la base canonique.

On a :

$$\det(u - \lambda Id_E) = \det \begin{pmatrix} 5 - \lambda & 1 \\ 2 & 4 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 9\lambda + 18 = (\lambda - 6)(\lambda - 3)$$

Donc les valeurs propres de  $u$  sont 3 et 6.

**Théorème :** (admis)

Posons  $P_u(\lambda) = \det(\lambda Id_E - u)$ . C'est un polynôme de  $K[\lambda]$  de degré  $n$  appelé **polynôme caractéristique** de  $u$ .

Plus précisément, on a  $P_u(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \text{tr}(u) \lambda^{n-1} + \dots + \det(u)$ .

💡 **Exemple :** Pour  $n = 2$ , on a  $P_u(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(u)\lambda + \det(u)$ .

**Corollaire :** (admis)

L'endomorphisme  $u$  admet au plus  $n$  valeurs propres (distinctes).

## V Polynôme caractéristique d'une matrice

Soit  $A \in M_n(K)$  une matrice carrée, soit  $\lambda \in K$ . On dit que  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$  s'il existe un vecteur  $X \in K^n \setminus \{0\}$  tel que  $AX = \lambda X$ . On pose  $E_\lambda(A) = \text{Ker}(A - \lambda I_n)$  le sous-espace propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda$ . Et on pose  $P_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$  le polynôme caractéristique de  $A$ .

**Proposition :** (admis)

Soit  $A, B \in M_n(K)$  tel que  $A$  et  $B$  sont semblables (i.e. il existe  $P \in GL_n(K)$  tel que  $B = P^{-1}AP$ ). Alors  $A$  et  $B$  ont même polynôme caractéristique ( $P_A = P_B$ ) et donc les mêmes valeurs propres.

**Proposition :** (admis)

Supposons  $A$  triangulable (i.e. semblable à une matrice triangulaire). Alors  $P_A$  est scindé sur  $K$ .

💡 **Remarque :** La réciproque est vraie (vu plus tard),  $P_A$  scindé  $\implies A$  trigonalisable.

✗ **Attention** ✗ Retenir que  $P_A$  non scindé  $\implies A$  non trigonalisable.

💡 **Exemple :** Si  $K = \mathbb{R}$  et  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . On a  $P_A(\lambda) = \lambda^2$ . Mais  $A$  n'est pas diagonalisable.

## VI Étude des sous-espaces propres (sep)

Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$  et  $u \in \text{End}(E)$ . Soit  $F$  un sev de  $E$ .

**Définition :** On dit que  $F$  est **stable** par  $u$  si  $u(F) \subset F$ . Alors  $u|_F \in \text{End}(F)$  est la restriction de  $u$  à  $F$ .

**Proposition :** (admis)

Le polynôme caractéristique de  $u|_F$  divise celui de  $u$ . Autrement dit :  $P_{u|_F}(\lambda) | P_u(\lambda)$ .  
Autrement dit :  $\exists Q \in K[\lambda], P_u(\lambda) = P_{u|_F}(\lambda)Q(\lambda)$ .

La preuve utilise le déterminant par blocs.

**Proposition :** (admis)

Soit  $k \leq n$  et soient  $A \in M_k(K)$  et  $B \in M_{k,n-k}(K)$  et  $D \in M_{n-k}(K)$ .

On a :  $\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(D)$ .

**Proposition :** (admis)

Soit  $\lambda \in K$ . Alors  $E_\lambda$  est stable par  $u$ .

En effet, si  $u(x) = \lambda x$ , alors  $u(u(x)) = u(\lambda x) = \lambda u(x)$ , donc  $u(x) \in E_\lambda$ .

**Corollaire :** (admis)

Soit  $\lambda \in K$ , et soit  $X \in E_\lambda \setminus \{0_E\}$ .

On a que  $u|_{E_\lambda}$  est une homothétie de rapport  $\lambda$ .

Donc  $P_{u|_{E_\lambda}}(\lambda) = (\lambda - X)^{\dim(E_\lambda)}$

. En particulier,  $P_{u|_{E_\lambda}}$  divise  $P_u$ .

💬 **Vocabulaire :** On appelle la **multiplicité** de la valeur propre  $\lambda$  pour  $u$  le plus grand entier  $m$  tel que  $(\lambda - X)^m$  divise  $P_u(X)$ . On la note  $m_a(\lambda)$ .

💬 **Vocabulaire :** On appelle la **multiplicité géométrique** de la valeur propre  $\lambda$  pour  $u$  l'entier  $\dim(E_\lambda)$ . On la note  $m_g(\lambda)$ .

**Proposition :** (admis)

On a  $1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$  si  $\lambda$  est une valeur propre de  $u$ .

💡 **Exemple :** Soit  $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ . On a  $P_A(\lambda) = (3 - \lambda)^3$ . Donc  $m_a(3) = 3$ .

On a  $E_3 = \text{Ker}(A - 3I_3) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \mid (x, y) \in K^2 \right\}$ . Donc  $\dim(E_3) = 2$ . Donc  $m_g(3) = 2$ .

**Proposition : Somme directe des sep** (admis)

Soit  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  des valeurs propres distinctes de  $u$ .

Alors  $E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2} + \dots + E_{\lambda_k}$  est une somme directe.

i.e.  $\sum_{i=1}^k E_{\lambda_i} = \bigoplus_{i=1}^k E_{\lambda_i}$ .

Autrement dit, les sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe.

**Corollaire :** (admis)

Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

**Corollaire :** (admis)

Si  $u$  admet  $n$  valeurs propres distinctes (avec  $n = \dim(E)$ ), alors  $u$  est diagonalisable.

💡 **Exemple :** Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ . On a  $P_A(\lambda) = -\lambda(\lambda^2 - 15\lambda - 18)$  qui est scindé sur  $\mathbb{R}$  à racines simples. Les valeurs propres sont  $0, \frac{15+\sqrt{297}}{2}, \frac{15-\sqrt{297}}{2}$ , donc distinctes. Donc  $A$  est diagonalisable.

## VII Diagonalisabilité

Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$  et  $u \in \text{End}(E)$ . Soit  $F$  un sev de  $E$ .

### **Théorème :** (admis)

$u$  est diagonalisable si et seulement si  $E = \bigoplus_{\lambda \text{ vp de } u} E_\lambda$ .

Autrement dit,  $u$  est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions des sous-espaces propres de  $u$  est égale à  $\dim(E)$ .

### **Théorème :** (admis)

$u$  est diagonalisable si et seulement si le polynôme caractéristique de  $u$  est scindé et on a  $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$  pour toute valeur propre  $\lambda$  de  $u$ .

### **Proposition :** (admis)

Supposons  $u$  diagonalisable. Soit  $F$  un sev de  $E$  stable par  $u$ . Alors la restriction  $u|_F \in \mathcal{L}(F)$  est diagonalisable.

### **Lemme :** (admis)

On a  $F = \bigoplus_{\lambda \text{ vp de } u} (F \cap E_\lambda)$ .

### **Théorème :** (admis)

Soit  $v \in \text{End}(E)$  tel que  $u \circ v = v \circ u$  (i.e.  $u$  et  $v$  commutent).

Supposons que  $u$  et  $v$  sont diagonalisables.

Alors il existe une base  $B$  de  $E$  telle que les matrices de  $u$  et  $v$  dans cette base sont diagonales.

💬 **Vocabulaire :** On dit que  $u$  et  $v$  sont **simultanément diagonalisables**.

### **Corollaire :** (admis)

Soit  $v \in \text{End}(E)$  tel que  $u \circ v = v \circ u$  (i.e.  $u$  et  $v$  commutent).

Alors toute combinaison linéaire de  $u$  et  $v$  est diagonalisable.

De plus,  $u \circ v$  et  $v \circ u$  sont diagonalisables.

## VIII Trigonalisation

### **Théorème :** (admis)

$u$  est trigonalisable si et seulement si le polynôme caractéristique de  $u$  est scindé.

### **Corollaire :** (admis)

Si  $K = \mathbb{C}$ , tout endomorphisme de  $E$  est trigonalisable.

**Exemple :** Soit  $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$  et  $u$  tel que  $\text{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  dans la base canonique  $B$  de  $\mathbb{R}^2$ .

On a  $P_u(\lambda) = \lambda^2 - 2 \cos \theta \lambda + 1$ . Ce polynôme n'est pas scindé sur  $\mathbb{R}$  car ses racines sont  $\cos \theta \pm i \sin \theta$ . Donc  $u$  n'est pas trigonalisable sur  $\mathbb{R}$ . Cependant,  $P_u$  est scindé sur  $\mathbb{C}$ , donc  $u$  est trigonalisable sur  $\mathbb{C}$ .

## IX Polynômes d'endomorphismes (et de matrices)

Soit  $K$  un corps. Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel. Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$ ,  $P = P(X) = \sum_{k=0}^d a_k X^k$  (où  $d$  est le degré de  $P$ ). Soit  $u \in \text{End}(E)$  un endomorphisme de  $E$ , et  $u \circ u = u^2$ . En particulier, on a  $u \circ u \circ \dots \circ u = u^k$  ( $k$  fois),  $u^0 = \text{Id}_E$  et  $u^1 = u$ .

**Définition :** On pose  $P(u) = \sum_{k=0}^d a_k u^k \in \text{End}(E)$ . C'est un polynôme en  $u$ .

L'application  $\varphi_u : \begin{matrix} K[X] \rightarrow \text{End}(E) \\ P \mapsto P(u) \end{matrix}$  est linéaire.

On note  $\mathbb{K}[u] = \text{Im}(\varphi_u) = \{P(u) \mid P \in K[X]\}$ . C'est un sous-espace vectoriel de  $\text{End}(E)$ .

**Définition :** Soit  $A \in M_n(K)$ . On définit de même  $P(A) = a_0 I_n + a_1 A + \dots + a_d A^d = \sum_{k=0}^d a_k A^k \in M_n(K)$ .

L'application  $\psi_A : \begin{matrix} K[X] \rightarrow M_n(K) \\ P \mapsto P(A) \end{matrix}$  est linéaire.

Si  $A = \text{Mat}_B(u)$ , alors  $P(A) = \text{Mat}_B(P(u))$ .

On note  $\mathbb{K}[A] = \text{Im}(\psi_A) = \{P(A) \mid P \in K[X]\}$ . C'est un sous-espace vectoriel de  $M_n(K)$ .

**Proposition : Stabilité du noyau (admis)**

Le sous-espace vectoriel  $\text{Ker}(P(u))$  est stable par  $u$ .

**Remarque :** Si  $u, v \in \text{End}(E)$ , on a  $\text{Ker}(v)$  est stable par  $u$ . Or  $P(u)$  et  $u$  commutent.

**Remarque :** Plus généralement, pour  $P, Q \in K[X]$ , on a  $P(u)$  et  $Q(u)$  commutent.

**Preuve :**

Si  $Q = b_0 + b_1 X + \dots + b_e X^e$ , alors  $P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$  car :

$$\begin{aligned} P(u) \circ Q(u) &= \left( \sum_{k=0}^d a_k u^k \right) \circ \left( \sum_{l=0}^e b_l u^l \right) \\ &= \sum_{k=0}^d \sum_{l=0}^e a_k b_l u^{k+l} \\ &= \sum_{l=0}^e \sum_{k=0}^d b_l a_k u^{l+k} \\ &= Q(u) \circ P(u) \end{aligned}$$

□

**Proposition : (admis)**

Si  $\lambda \in \text{Sp}(u)$ , alors  $P(\lambda) \in \text{Sp}(P(u))$ .

**Remarque :** Il peut exister  $\lambda \in K$  tq  $P(\lambda) \in \text{Sp}(P(u))$  mais  $\lambda \notin \text{Sp}(u)$ .

**Contre-Exemple :**  $u = \text{id}_E$ ,  $P(X) = X^2 - 1$ ,  $\lambda = -1$ . On a  $\text{Sp}(u) = \{1\}$ , mais  $P(-1) = 0 \in \text{Sp}(P(u))$ . Mais  $-1 \notin \text{Sp}(u)$ .

💬 **Vocabulaire :** On dit que  $P$  est un polynôme annulateur de  $u$  si  $P(u) = 0_{\text{End}(E)}$ .

**Proposition : Sous-groupe des polynômes annulateurs (admis)**

Considérons  $\text{Ann}_{\mathbb{K}[X]}(u) = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(u) = 0\}$  l'ensemble des polynômes annulateurs de  $u$ . C'est un sous-groupe de  $(\mathbb{K}[X], +)$ .

De plus, pour  $Q \in \mathbb{K}[X]$  et  $P \in \text{Ann}_{\mathbb{K}[X]}(u)$ , on a  $QP \in \text{Ann}_{\mathbb{K}[X]}(u)$ .

💬 **Vocabulaire :** On dit que  $\text{Ann}_{\mathbb{K}[X]}(u)$  est un idéal de l'anneau  $\mathbb{K}[X]$ . (HP)

**Preuve du sous groupe :**

Soient  $P, Q \in \text{Ann}_{\mathbb{K}[X]}(u)$ . On a :

- $P + Q \in \text{Ann}_{\mathbb{K}[X]}(u)$  car  $(P + Q)(u) = P(u) + Q(u) = 0 + 0 = 0$ .
- $-P \in \text{Ann}_{\mathbb{K}[X]}(u)$  car  $(-P)(u) = -P(u) = -0 = 0$ .
- $0 \in \text{Ann}_{\mathbb{K}[X]}(u)$  car  $0(u) = 0$ .

□

**Preuve de la stabilité par multiplication :**

Soit  $P \in \text{Ann}_{\mathbb{K}[X]}(u)$  et  $Q \in \mathbb{K}[X]$ . On a :

$$(QP)(u) = Q(u) \circ P(u) = Q(u) \circ 0 = 0$$

□

**Proposition : Unicité du polynôme (admis)**

Il existe un unique  $P_0 \in \mathbb{K}[X]$  unitaire (i.e. de coefficient dominant  $a_d = 1$ ) tel que  $P \in \text{Ann}_{\mathbb{K}[X]}(u) \Leftrightarrow \exists Q : P = QP_0$ .

En particulier,  $P_0 \in \text{Ann}_{\mathbb{K}[X]}(u)$  et  $P_0$  divise tout polynôme annulateur de  $u$ .

Alors  $P_0$  est appelé le **polynôme minimal** de  $u$ . C'est le polynôme annulateur de  $u$  unitaire de plus petit degré.

💬 **Note de rédaction :** Cette proposition gagnerait à être synthétisée et/ou divisée et améliorée en clarté.

**Proposition : (admis)**

Si  $\lambda$  est une valeur propre de  $u$  et  $P \in \text{Ann}_{\mathbb{K}[X]}(u)$ , alors  $P(\lambda) = 0$ .

Autrement dit, toute valeur propre de  $u$  est racine de son polynôme minimal.