

# Chapitre 4.2 : Topologie des espaces métriques et des espaces vectoriels normés

## I Topologie sur les espaces métriques

### A Ouverts et fermés

**Remarque :** Un evn étant un espace métrique avec la distance  $d(x, y) = N(y - x)$ , toutes les notions de topologie vues ici s'appliquent aux evn.

**Définition :** Soit  $(X, d)$  un espace métrique.

Une boule ouverte de centre  $a \in X$  de rayon  $r > 0$  est  $B(a, r) = \{x \in X \mid d(x, a) = d(a, x) < r\}$ .

**Définition :** Soit  $(X, d)$  un espace métrique.

Une boule fermée de centre  $a \in X$  de rayon  $r > 0$  est  $B_F(a, r) = \{x \in X \mid d(a, x) \leq r\}$ .

**Définition :** Soit  $(X, d)$  un espace métrique.

La sphère de centre  $a \in X$  de rayon  $r > 0$  est  $S(a, r) = \{x \in X \mid d(a, x) = r\}$ .

**Exemple :** Dans  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ ,  $B(1, 1) = ]0, 2[$

**Exemple :** Dans  $\mathbb{R}^2$  avec trois métriques :

$d_1 = \|y - x\|_1$ ,  $d_2 = \|y - x\|_2$  et  $d_\infty = \|y - x\|_\infty$ .

Traçons les boules de centre 0 de rayon 1 associées à chaque distance.

$B(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x, 0) < 1\}$ .

On a :  $\|x\|_{1,2,\infty} < 1$ .

- Pour  $d_1$  :  $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| < 1$ . C'est un losange.
- Pour  $d_2$  :  $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < 1$ . C'est un disque.
- Pour  $d_\infty$  :  $\|x\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|) < 1$ . C'est un carré.

**Remarque :** Les bordures correspondent aux sphères  $S(0, 1)$  associées à chaque distance. Les boules fermées  $B_F(0, 1)$  correspondent aux mêmes figures mais en incluant les bordures.

**Définition :** Une partie  $U$  de  $X$  est un ouvert de  $(X, d)$  si  $\forall x \in U, \exists r > 0$  tel que  $B(x, r) \subset U$ .

**Exemple :**  $]0, 1[ \subset \mathcal{C}(]0, 1[, \mathbb{R})$  est un ouvert :  $\forall x \in ]0, 1[, B(x, \min(x, 1 - x)) \subset ]0, 1[$ .

**Définition :** Une topologie sur  $(X, d)$  est l'ensemble des ouverts de  $(X, d)$ . Autrement dit,  $\tau = \{U \subset X \mid U \text{ est un ouvert de } (X, d)\}$ .

**Proposition :**

1. Toute boule ouverte de  $(X, d)$  est un ouvert de  $(X, d)$ .
2. Si  $(U_i)_{i \in I}$  est une famille d'ouverts de  $(X, d)$ , alors  $\bigcup_{i \in I} U_i$  est un ouvert de  $(X, d)$ . (I un ensemble quelconque)
3. Si  $(U_1, U_2, \dots, U_n)$  est une famille finie d'ouverts de  $(X, d)$ , alors  $\bigcap_{i=1}^n U_i$  est un ouvert de  $(X, d)$ .

**Preuve :**

1. Soit  $B(a, r)$  une boule ouverte de  $(X, d)$ . Soit  $x \in B(a, r)$ . On a  $d(a, x) < r$ . Posons  $s = r - d(a, x) > 0$ . Montrons que  $B(x, s) \subset B(a, r)$ .  
Soit  $y \in B(x, s)$ . On a  $d(x, y) < s$ . D'après l'inégalité triangulaire, on a  $d(a, y) \leq d(a, x) + d(x, y) < d(a, x) + s = d(a, x) + (r - d(a, x)) = r$ . Donc  $y \in B(a, r)$ . Ainsi,  $B(x, s) \subset B(a, r)$  et donc  $B(a, r)$  est un ouvert de  $(X, d)$ .
2. Soit  $x \in (U_i)_{i \in I}$ . Alors  $\exists i_0 \in I$  tel que  $x \in U_{i_0}$ . Comme  $U_{i_0}$  est un ouvert de  $(X, d)$ , il existe  $r > 0$  tel que  $B(x, r) \subset U_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ . Donc  $\bigcup_{i \in I} U_i$  est un ouvert de  $(X, d)$ .
3. Soit  $x \in \bigcap_{i=1}^n U_i$ , où on a écrit  $I = \{1, 2, \dots, n\}, n \in \mathbb{N}^*$ .  
Alors  $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \exists r_i > 0$  tel que  $B(x, r_i) \subset U_i$ . Posons  $r = \min(r_1, r_2, \dots, r_n) > 0$ . Alors  $B(x, r) \subset \bigcap_{i=1}^n U_i$  pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .  
En effet, soit  $z \in B(x, r), d(z, x) < r \leq r_i$  donc  $z \in B(x, r_i) \subset U_i$  pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Donc  $z \in \bigcap_{i=1}^n U_i$ .  
Ainsi,  $\bigcap_{i=1}^n U_i$  est un ouvert de  $(X, d)$ .

**Contre-Exemple :** Si  $I$  est infini, la propriété 3 n'est pas vraie en général. Par exemple, dans  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ , considérons la famille d'ouverts  $U_n = ]-1/n, 1/n[$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ . Alors  $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \{0\}$  qui n'est pas un ouvert de  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ .

**Définition :** Soit  $(X, d)$  un espace métrique.

Une partie  $F$  de  $X$  est un fermé de  $(X, d)$  si son complémentaire  $X \setminus F$  est un ouvert de  $(X, d)$ .

**Proposition :**

1. Toute boule fermée de  $(X, d)$  est un fermé de  $(X, d)$ .
2. Si  $(F_i)_{i \in I}$  est une famille de fermés de  $(X, d)$ , alors  $\bigcap_{i \in I} F_i$  est un fermé de  $(X, d)$ . (I un ensemble quelconque)
3. Si  $(F_1, F_2, \dots, F_n)$  est une famille finie de fermés de  $(X, d)$ , alors  $\bigcup_{i=1}^n F_i$  est un fermé de  $(X, d)$ .

**Preuve :**

1. Soit  $B_F(x, r)$  une boule fermée de  $(X, d)$ . C'est un fermé  $\Leftrightarrow X \setminus B_F(x, r)$  est un ouvert de  $(X, d)$ .  
Soit  $y \in X \setminus B_F(x, r)$ . On a  $d(x, y) > r$ . Posons  $\varrho = d(y, x) - r > 0$ . Montrons que  $B(y, \varrho) \subset X \setminus B_F(x, r)$ .  
Soit  $z \in B(y, \varrho)$ . On a  $d(y, z) < \varrho$ .  
 $d(z, y) < d(y, x) - r \Rightarrow r < d(y, x) - d(z, y) \leq d(z, x)$  (inégalité triangulaire)  $\Rightarrow z \in X \setminus B_F(x, r)$ .  
Ainsi,  $B(y, \varrho) \subset X \setminus B_F(x, r)$  et donc  $X \setminus B_F(x, r)$  est un ouvert de  $(X, d)$ .  
Donc  $B_F(x, r)$  est un fermé de  $(X, d)$ .
2. Laissé en exercice au lecteur.
3. Laissé en exercice au lecteur.

**Remarque :** Dans  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ , tout intervalle fermé est un fermé, et tout intervalle ouvert est un ouvert. ( $\mathbb{R}$  est ouvert).  
On a :  $]a, +\infty[ = \bigcup_{n=1}^{\infty } ]a, a+n[$  est un ouvert.

**Remarque :**  $X$  et  $\emptyset$  sont des ouverts et des fermés de  $(X, d)$  (prendre  $r$  arbitrairement grand pour  $X$  et  $r$  quelconque pour  $\emptyset$ ).

**Définition :** Soit  $\mathcal{V} \subset X$  une partie de l'espace métrique  $(X, d)$ .  
On dit que  $\mathcal{V}$  est un voisinage de  $a \in X$  si  $\exists r > 0$  tel que  $B(a, r) \subset \mathcal{V}$ .

**Proposition :**

On dit aussi que  $U$  est un ouvert de  $(X, d)$  si et seulement si  $U$  est un voisinage de chacun de ses points.

## B Intérieur et adhérence

Soit  $(X, d)$  un espace métrique.

**Définition :** Soit  $A \subset X$  une partie de l'espace métrique  $(X, d)$ .

On appelle intérieur de  $A$  l'ensemble des points  $a \in A$  tels que  $A$  est un voisinage de  $a$ . On le note :  $\overset{\circ}{A}$ .  
On a :

$$\overset{\circ}{A} = \bigcup \{U \subset A \mid U \text{ est un ouvert de } (X, d)\}$$

**Définition :** Soit  $A \subset X$  une partie de l'espace métrique  $(X, d)$ .

On appelle adhérence de  $A$  l'ensemble des points  $x \in X$  tels que  $\forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ . On le note :  $\overline{A}$ .  
On a :

$$\overline{A} = \bigcap_{F \supset A, F \text{ fermé de } (X, d)} F$$

**Proposition : Lien avec les ouverts**

Soit  $A \subset X$  une partie de l'espace métrique  $(X, d)$ .

1.  $\overset{\circ}{A}$  est un ouvert contenu dans  $A$ .
2. Si  $U \subset A$  est un ouvert de  $(X, d)$ , alors  $U \subset \overset{\circ}{A}$ .  
Autrement dit,  $\overset{\circ}{A}$  est le plus grand ouvert contenu dans  $A$ .

**Preuve :**

1. C'est une union quelconque d'ouverts indus dans  $A$ , donc  $\overset{\circ}{A}$  est un ouvert. De plus, par définition,  $\overset{\circ}{A} \subset A$ .
2. Par définition  $\overset{\circ}{A} = \bigcup \{U \subset A \mid U \text{ est un ouvert de } (X, d)\}$ . Donc si  $U \subset A$  est un ouvert de  $(X, d)$ , alors  $U$  est dans la famille indexée par l'union, donc  $U \subset \overset{\circ}{A}$ .

**Proposition : Lien avec les fermés**

Soit  $A \subset X$  une partie de l'espace métrique  $(X, d)$ .

1.  $\overline{A}$  est un fermé contenant  $A$ .
2. Si  $F \supset A$  est un fermé de  $(X, d)$ , alors  $\overline{A} \subset F$ .  
Autrement dit,  $\overline{A}$  est le plus petit fermé contenant  $A$ .

**Preuve :**

1. C'est une intersection quelconque de fermés contenant  $A$ , donc  $\overline{A}$  est un fermé. De plus, par définition,  $A \subset \overline{A}$ .
2. Par définition  $\overline{A} = \bigcap_{F \supset A, F \text{ fermé de } (X, d)} F$ . Donc si  $F \supset A$  est un fermé de  $(X, d)$ , alors  $F$  est dans la famille indexée par l'intersection, donc  $\overline{A} \subset F$ .

**Proposition :**

1.  $\overset{\circ}{A} = X \setminus \overline{(X \setminus A)}$
2.  $\overline{A} = X \setminus (X \setminus \overset{\circ}{A})$
3.  $x \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset$

**Preuve :**

1.  $(\Rightarrow) x \in \overset{\circ}{A}$ . Par définition d'un ouvert,  $\exists r > 0$  tel que  $B(x, r) \subset \overset{\circ}{A} \subset A$ .  
 $(\Leftarrow)$  On a  $B(x, r) \subset A$  qui est un ouvert.  
Donc  $B(x, r) \subset \overset{\circ}{A}$  car  $\overset{\circ}{A}$  est le plus grand ouvert contenu dans  $A$ . Donc  $x \in \overset{\circ}{A}$ , donc  $x \in \overset{\circ}{A}$ .
2.  $\overset{\circ}{A} \Leftrightarrow X \setminus \overline{A} = \overline{(X \setminus A)}$ .  
Or  $\overset{\circ}{A} = \bigcup \{U \subset A \mid U \text{ est un ouvert de } (X, d)\}$ .  
Donc  $X \setminus \overset{\circ}{A} = X \setminus \bigcup \{U \subset A \mid U \text{ est un ouvert de } (X, d)\} = \bigcap_{F \supset X \setminus A, F \text{ fermé de } (X, d)} F = \overline{(X \setminus A)}$ .  
Faire de même avec  $\overline{A} = X \setminus (X \setminus \overset{\circ}{A})$ .
3.  $x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \in X \setminus (X \setminus \overset{\circ}{A})$  (d'après 2)  $\Leftrightarrow x \notin (X \setminus \overset{\circ}{A}) \Leftrightarrow$  pour tout  $r > 0, B(x, r) \not\subset X \setminus A \Leftrightarrow$  pour tout  $r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ .

**Proposition :**

- $U$  est ouvert  $\Leftrightarrow \overset{\circ}{U} = U$ .
- $F$  est fermé  $\Leftrightarrow \overline{F} = F$ .

**C Suites dans un espace métrique****1 Définitions**

**Définition :** On dit qu'une suite  $(x_n), x_n \in X$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , converge si  $\exists x \in X$  tel que  $d(x_n, x) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

Autrement dit,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, d(x_n, x) < \varepsilon$$

**Remarque :** Si  $(X, d) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$ , on retrouve la définition usuelle de la convergence des suites réelles.

**Définition :** On dit que  $x \in X$  est une valeur d'adhérence d'une suite  $(x_n)$  si il existe une sous suite qui converge vers  $x$ . i.e.  $\exists (n_k)_{k \in \mathbb{N}}$  strictement croissante telle que  $d(x_{n_k}, x) \rightarrow 0$  quand  $k \rightarrow +\infty$ .

**Proposition :**

Soit  $(x_n)$  une suite de  $(X, d)$  qui converge vers  $x$ .

Alors  $x$  est la seule valeur d'adhérence de  $(x_n)$ . En particulier, la limite de  $(x_n)$  est unique.

**Preuve :**

Soit  $x$  la limite de  $(x_n)$ . Supposons qu'il existe une sous-suite  $(x_{n_k})$  qui converge vers une autre valeur  $y \neq x$ .

On a  $d(x, y) > 0$ . Posons  $\varepsilon = \frac{d(x, y)}{2} > 0$ .

$\exists k_1, (\varepsilon, y) \in \mathbb{N}, \forall k \geq k_1, d(x_{n_k}, y) < \varepsilon$ . (convergence de la sous-suite)

Et comme  $x_n \rightarrow x$ , alors  $x_{n_k} \rightarrow x$  aussi.

Donc  $\exists k_2, (\varepsilon, x) \in \mathbb{N}, \forall k \geq k_2, d(x_{n_k}, x) < \varepsilon$ .

Alors on a pour  $k \geq \max(k_1, k_2)$  :

$d(x, y) \leq d(x, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, y) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = d(x, y)$ , ce qui est absurde. Donc  $x$  est la seule valeur d'adhérence de  $(x_n)$ .

### Fermés

Soit  $A$  une partie quelconque de l'espace métrique  $(X, d)$ .

#### Proposition : Caractérisation de l'adhérence par des suites

$\bar{A} = \{x \in X \mid \exists (x_n) \text{ suite de } A, x_n \rightarrow x\}$ .

#### Preuve :

( $\subset$ ) Soit  $x \in \bar{A}$  tq  $\exists (x_n) \in A$  avec  $d(x_n, x) \rightarrow 0$ .

On veut montrer que  $x \in \bar{A} \Rightarrow$  pour tout  $r > 0$ ,  $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ .

Soit  $r > 0$ . Comme  $d(x_n, x) \rightarrow 0$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n \geq N, d(x_n, x) < r$ .

On a  $x_n \in A$  donc  $x_n \in B(x, r) \cap A \neq \emptyset \forall n \geq N$ . Donc  $x \in \bar{A}$ .  $\square$

( $\supset$ ) Soit  $x \in \bar{A} \Rightarrow$  pour tout  $r > 0$ ,  $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ .

Prenons,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $r = \frac{1}{n+1} > 0$ .

Alors  $B(x, \frac{1}{n+1}) \cap A \neq \emptyset$ .

Pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ , choisissons  $x_n \in B(x, \frac{1}{n+1}) \cap A$ .

On a alors construit une suite  $(x_n)$  qui vérifie  $d(x_n, x) < \frac{1}{n+1}$ .

Ainsi,  $x$  est bien la limite d'une suite d'éléments de  $A$ .  $\square$

#### Proposition : Caractérisation des fermés par des suites

Une partie  $F$  de  $(X, d)$  est fermée si et seulement si pour toute suite  $(x_n)$  d'éléments de  $F$  qui converge vers  $x \in X$ , on a  $x \in F$ .

#### Preuve :

On a  $\bar{F} = \{x \in X \mid \exists (x_n) \text{ suite de } F, x_n \rightarrow x\}$ .

Or  $\bar{F} = F$ . On a donc le résultat.

## D Continuité

### 1 Définitions

**Définition :** Soit  $f: (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  une application entre deux espaces métriques.

- $f$  est continue en  $a \in X$  si  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0: x \in B(a, \delta_\varepsilon)$ , alors  $f(x) \in B(f(a), \varepsilon)$ .  
Autrement dit, pour tout  $\varepsilon \exists \delta_\varepsilon$  tel que  $d_X(x, a) < \delta_\varepsilon \Rightarrow d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$ .
- $f$  est continue sur  $X$  si  $f$  est continue en tout point de  $X$ .

**Remarque :** Si  $f: (\mathbb{R}, |\cdot|) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$ , on retrouve la définition usuelle de la continuité des fonctions réelles.

**Définition :** Soit  $k \geq 0$  un réel.

On dit que  $f: (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  est  $k$ -lipschitzienne si  $\forall x, y \in X, d_Y(f(x), f(y)) \leq k d_X(x, y)$ .

**Définition :** Si  $f: (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  est une application  $k$ -lipschitzienne, alors  $f$  est continue sur  $X$ .

#### Preuve :

Montrons que  $f$  est continue.

Soit  $a \in X$  et soit  $\varepsilon > 0$ . Posons  $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2k} > 0$ .

$\forall x \in B(a, \delta_\varepsilon)$ , on a  $d_Y(f(a), f(x)) \leq k d_X(a, x) \leq k \delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ .

Ainsi,  $f$  est continue.

Remarquons de plus que  $\delta_\varepsilon$  ne dépend pas de  $a$ , donc  $f$  est uniformément continue sur  $X$ . (HP)

**Exemple :** Exemple d'une fonction 1-lipschitzienne :  $f: (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$   $x \mapsto \|x\|$ .

En effet,  $|f(x) - f(y)| = ||x| - |y|| \leq \|x - y\| = d(x, y)$  (inégalité triangulaire renversée).

## 2 Caractérisation de la continuité

### Proposition : Caractérisation de la continuité par des suites

Soit  $f: (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  une application entre deux espaces métriques.

Alors  $f$  est continue en  $a \in X$  si et seulement si pour toute suite  $(x_n)$  de  $X$  qui converge vers  $a$ , la suite  $(f(x_n))$  converge vers  $f(a)$ .

#### Preuve :

( $\Rightarrow$ ) Soit  $(x_n)$  une suite de  $X$  qui converge vers  $a$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ . Comme  $f$  est continue en  $a$ , il existe  $\delta_\varepsilon > 0$  tel que  $d_X(x, a) < \delta_\varepsilon \Rightarrow d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$ .

Comme  $x_n \rightarrow a$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n \geq N, d_X(x_n, a) < \delta_\varepsilon$ .

Donc  $\forall n \geq N, d_Y(f(x_n), f(a)) < \varepsilon$  pour tout  $n \geq N$ .

Ainsi  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, d_Y(f(x_n), f(a)) < \varepsilon$ . Donc  $f(x_n) \rightarrow f(a)$ .

( $\Leftarrow$ ) Par l'absurde, supposons que  $f$  n'est pas continue en  $a$ .

C'est-à-dire qu'il existe  $\varepsilon_0 > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in X$  tel que  $d_X(x, a) < \delta$  mais  $d_Y(f(x), f(a)) > \varepsilon_0$ .

$\forall n \in \mathbb{N}$ , posons  $\delta = \frac{1}{n+1} > 0$ .

On construit une suite  $(x_n)$  de  $X$  telle que  $d_X(x_n, a) < \frac{1}{n+1}, d_Y(f(x_n), f(a)) > \varepsilon_0$ .

On a  $x_n \rightarrow a$  mais  $f(x_n) \not\rightarrow f(a)$  (car  $d_Y(f(x_n), f(a)) > \varepsilon_0$  pour tout  $n$ ).

Absurde. Donc  $f$  est continue en  $a$ .

### Proposition :

$f: (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  est continue sur  $X$  si et seulement si pour tout ouvert  $U$  de  $(Y, d_Y)$ ,  $f^{-1}(U)$  est un ouvert de  $(X, d_X)$ .

**Rappel :**  $f^{-1}(U) = \{x \in X \mid f(x) \in U\}$ .

#### Preuve :

( $\Rightarrow$ ) Soit  $U$  un ouvert de  $(Y, d_Y)$ .

Montrons que  $f^{-1}(U)$  est un ouvert de  $(X, d_X)$ .

Soit  $a \in f^{-1}(U)$ . Alors  $f(a) \in U$ .

Comme  $U$  est un ouvert de  $(Y, d_Y)$ , il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $B_Y(f(a), \varepsilon) \subset U$ .

Or  $\exists \delta_\varepsilon > 0$  tel que  $x \in B_X(a, \delta_\varepsilon) \Rightarrow f(x) \in B_Y(f(a), \varepsilon)$ .

Vérifions que  $B_X(a, \delta_\varepsilon) \subset f^{-1}(U)$ .

Soit  $x \in B_X(a, \delta_\varepsilon)$ . Alors  $d_X(x, a) < \delta_\varepsilon \Rightarrow d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon \Rightarrow f(x) \in B_Y(f(a), \varepsilon) \subset U \Rightarrow x \in f^{-1}(U)$ .

Donc  $B_X(a, \delta_\varepsilon) \subset f^{-1}(U)$ . Ainsi,  $f^{-1}(U)$  est un ouvert de  $(X, d_X)$ .

( $\Leftarrow$ ) Soit  $U$  un ouvert de  $(Y, d_Y)$ .

Alors  $f^{-1}(U)$  est un ouvert de  $(X, d_X)$ .

Soit  $a \in f^{-1}(U)$ . Alors  $f(a) \in U$ .

Soit  $\varepsilon > 0$  tq  $B_Y(f(a), \varepsilon) \subset U$ .

Montrons que  $\exists \delta_\varepsilon > 0$  tel que  $d_X(x, a) < \delta_\varepsilon$  et  $d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$ .

Comme  $f^{-1}(U)$  est un ouvert de  $(X, d_X)$ , il existe  $\delta_\varepsilon > 0$  tel que  $B_X(a, \delta_\varepsilon) \subset f^{-1}(U)$  qui est ouvert.

Alors si  $x \in B_X(a, \delta_\varepsilon)$ , donc  $f(x) \in B_Y(f(a), \varepsilon)$ .

Donc on a  $d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$  car  $f(x) \in U$ .

Ainsi,  $f$  est continue en  $a$ .

#### Interlude : Inégalité de Cauchy-Schwarz

Considérons  $\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ . Cette application est bilinéaire, symétrique, positive et définie ( $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ).

On observe que la norme euclidienne s'écrit  $\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ .

On dit que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire (forme bilinéaire symétrique définie positive), et ce produit scalaire est relié à la norme 2 (il s'agit du produit scalaire euclidien).

### Théorème : Inégalité de Cauchy-Schwarz

$\forall X, Y \in \mathbb{R}^n, |\langle X, Y \rangle| \leq \|X\|_2 \|Y\|_2$ .

#### Démonstration :

- Fixons  $X, Y \in \mathbb{R}^n$  ( $\neq 0_{\mathbb{R}^n}$ )

$$P(t) = \|X + tY\|_2^2 = \langle X + tY, X + tY \rangle = \|X\|_2^2 + t^2\|Y\|_2^2 + 2t\langle X, Y \rangle \geq 0 = t^2\|Y\|_2^2 + 2t\langle X, Y \rangle + \|X\|_2^2.$$

$P$  est un polynôme de degré 2 en  $t$ .  $P(t) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$ , son discriminant est  $\leq 0$ .

$$\Delta = 4\langle X, Y \rangle^2 - 4\|X\|_2^2\|Y\|_2^2 = 4(\langle X, Y \rangle^2 - \|X\|_2^2\|Y\|_2^2).$$

$$\text{Or, } \Delta \leq 0 \iff \langle X, Y \rangle^2 - \|X\|_2^2\|Y\|_2^2 \leq 0 \iff \langle X, Y \rangle^2 \leq \|X\|_2^2\|Y\|_2^2 \iff |\langle X, Y \rangle| \leq \|X\|_2\|Y\|_2.$$

- De plus, si  $\Delta = 0$ ,  $\exists t_0 \in \mathbb{R}$  racine double,  $P(t_0) = 0 = \|X + t_0Y\|_2^2$

$$\implies X + t_0Y = 0 \implies X \text{ et } Y \text{ sont colinéaires.}$$

Et si  $X$  et  $Y$  sont colinéaires, alors

$$|\langle X, Y \rangle| = |\langle X, \lambda X \rangle| = |\lambda| \langle X, X \rangle = |\lambda| \|X\|_2^2 = |\lambda| \|X\|_2 \|X\|_2 = \|X\|_2 \|\lambda X\|_2 = \|X\|_2 \|Y\|_2.$$

### Corollaire : Égalité de Cauchy-Schwarz

L'égalité  $|\langle X, Y \rangle| = \|X\|_2\|Y\|_2$  est vérifiée si et seulement si  $X$  et  $Y$  sont colinéaires.

💬 **Note de rédaction** : Démo à reprendre, cf screen Laurent 2

## 3 Continuité des applications linéaires dans les evn

*A priori*, les espaces vectoriels ne sont pas forcément de dimension finie.

Soit  $f : (E, \|\cdot\|_E) \rightarrow (F, \|\cdot\|_F)$  une application linéaire entre deux  $K$ -espaces vectoriels normés (evn).

### Proposition : Caractérisation de la continuité des applications linéaires

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1.  $f$  est continue de  $(E, \|\cdot\|_E)$  dans  $(F, \|\cdot\|_F)$ .
2.  $f$  est continue en 0.
3.  $\exists k > 0$  tel que  $\forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq k\|x\|_E$ .

### Démonstration :

- $i) \Rightarrow ii) : f$  continue sur  $E \Rightarrow f$  continue en 0,  $f(0_E) = 0_F$
- $ii) \Rightarrow iii) : f$  continue en 0 : Soit  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  tel que si  $\|x\|_E < \delta \Rightarrow \|f(x)\|_F < \varepsilon$ .

Soit  $x \in E$ . Posons  $y = \frac{\delta x}{2\|x\|_E}$ . Alors

$$\|f(y)\|_F < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad f\left(\frac{\delta x}{2\|x\|_E}\right) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \frac{\delta}{2\|x\|_E} \|f(x)\|_F < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \|f(x)\|_F < \frac{2\varepsilon}{\delta} \|x\|_E$$

On trouve  $K = \frac{2\varepsilon}{\delta}$ , indépendant de  $x \in E$ , tel que  $\forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq K\|x\|_E$ .

- $iii) \Rightarrow i) : \text{On part de } \exists K > 0 \text{ tel que } \forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq K\|x\|_E, \text{ on obtient } \forall x, y \in E, \|f(x-y)\|_F \leq K\|x-y\|_E$

$$\Rightarrow \exists K > 0, \forall x, y \in E, \|f(x) - f(y)\|_F \leq K\|x - y\|_E$$

$$\Rightarrow f \text{ est } K\text{-Lipschitz} \Rightarrow f \text{ continue.}$$

## E Equivalence de normes

**Problème :** Soit  $E$  un evn avec une normée notée  $N_1 : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ .

On peut *a priori* mettre d'autres normes sur  $E$ , disons  $N_2 : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ .

Si  $(x_n)$  une suite de  $E$  converge pour la norme  $N_1$ , converge-t-elle aussi pour la norme  $N_2$  ?

**Définition :**  $N_1$  et  $N_2$  sont **équivalentes** si  $\exists C, c > 0$  tels que  $\forall x \in E, cN_2(x) \leq N_1(x) \leq CN_2(x)$ .  
On note  $N_1 \sim N_2$ .

**Proposition :**

1.  $N_1 \sim N_2 \Leftrightarrow N_2 \sim N_1$ .
2. Si  $N_1 \sim N_2$  et  $N_2 \sim N_3$ , alors  $N_1 \sim N_3$ .

**Exemple :** Voir TD, normes  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$  sur  $\mathbb{R}^n$ .

**Remarque :** Un des buts du cours est de montrer que sur  $\mathbb{R}^n$  (+ généralement pour tout evn), toutes les normes sont équivalentes.

**Proposition :**

Soit  $(x_n)$  une suite de  $E$ , où  $E$  est muni de  $N_1$  et  $N_2$  deux normes équivalentes.

Alors  $(x_n)$  converge pour la norme  $N_1$  si et seulement si  $(x_n)$  converge pour la norme  $N_2$ .

**Démonstration :**

- $\Rightarrow$  : On suppose  $\exists a \in X$  tel que  $x_n \xrightarrow{N_1} a \Leftrightarrow N_1(x_n - a) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

Or,  $cN_2(z) \leq N_1(z) \leq CN_2(z)$

Cette inégalité implique  $N_2(x_n - a) \leq \frac{1}{c} N_1(x_n - a) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

$\Rightarrow N_2(x_n - a) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

$\Rightarrow x_n \xrightarrow{N_2} a$ .

- $\Leftarrow$  : Si  $x_n \xrightarrow{N_2} a \Rightarrow N_2(x_n - a) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

On utilise  $N_1(\cdot) \leq CN_2(\cdot)$  ( $C > 0$ )

$\frac{N_1}{c}(x_n - a) \rightarrow 0 \Rightarrow N_1(x_n - a) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

## F Norme subordonnée

Soient  $(E, \|\cdot\|_E)$  et  $(F, \|\cdot\|_F)$ .

Soit  $f : E \rightarrow F$  une application linéaire continue. On a vu que la continuité d'une application linéaire entre evn se caractérisaient de la façon suivante :

$\exists K > 0 : \forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq K\|x\|_E$ .

Si  $x \neq 0$ , on peut considérer  $\frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \in \mathbb{R}_+$

Par continuité de  $f$ ,  $\forall x \in E \setminus \{0\}, \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq K$ .

**Définition :** La norme subordonnée de  $f$  par rapport à  $\|\cdot\|_E$  et  $\|\cdot\|_F$  est définie par  $\|f\| := \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}$ .

**Remarque :** Cette triple barre est bien définie et correspond à la meilleure constante de continuité de  $f$ .



**Proposition : Espace des applications linéaires continues**

Notons  $\mathcal{L}_c(E, F) = \{f: E \rightarrow F \mid f \text{ est continue}\}$ . Alors  $||| \cdot |||$  est une norme sur  $\mathcal{L}_c(E, F)$  et  $(\mathcal{L}_c(E, F), ||| \cdot |||)$  est un evn.

💬 **Vocabulaire :** On dit que  $||| \cdot |||$  est la "norme triple".

**Démonstration :**

- Séparation : Si  $|||f||| = 0 \Rightarrow \sup_{x \neq 0} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = 0 \Rightarrow \forall x \neq 0, \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = 0 \Rightarrow \forall x \neq 0, \|f(x)\|_F = 0 \Rightarrow f(x) = 0_F$ .
- Homogénéité : Soit  $\lambda \in K, f \in \mathcal{L}_c(E, F)$ .

$$|||\lambda f||| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|\lambda f(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{x \neq 0} \frac{|\lambda| \|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = |\lambda| \sup_{x \neq 0} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = |\lambda| |||f|||$$

- Inégalité triangulaire : Soient  $f, g \in \mathcal{L}_c(E, F)$ .

$$|||f + g||| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|(f + g)(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|f(x)\|_F + \|g(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} + \sup_{x \neq 0} \frac{\|g(x)\|_F}{\|x\|_E} = |||f||| + |||g|||$$

**Proposition : (admis)**

Soit  $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$ . On a  $|||f||| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|f(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E = 1} \|f(x)\|_F$ .

💡 **Remarque :** On montrera qu'en dimension finie, toute application linéaire est continue.

**G Introduction à la complétude dans les espaces métriques****1 Définitions et premières propriétés**

**Définition :** Soit  $(X, d)$  un espace métrique.

Une suite  $(x_n)$  de  $(X, d)$  est dite de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq N, d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

💡 **Remarque :** Si on travaille dans  $(X, d) = (E, \|\cdot\|)$  un evn, avec  $d_E(x, y) = \|x - y\|$ , et si on se donne une autre norme  $\|\cdot\|'$  sur  $E$  équivalente à  $\|\cdot\|$ , alors une suite est de Cauchy pour  $\|\cdot\|$  si et seulement si elle est de Cauchy pour  $\|\cdot\|'$ .

💬 **Note de rédaction :** cf. Laurent pour la démonstration de la remarque

**Proposition :**

1. Soit  $(x_n)$  une suite d'éléments de  $(X, d)$  qui converge vers  $x \in X$ .  
Alors  $(x_n)$  est une suite de Cauchy.
2. Une suite de Cauchy a au plus une valeur d'adhérence.
3. Une suite de Cauchy qui a une valeur d'adhérence converge vers cette valeur d'adhérence.

**Preuve :**

1. Soit  $(x_n)$  une suite qui converge vers  $a \in X$ .  
Donc  $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\varepsilon, d(x_n, a) < \varepsilon$ .  
Montrons que  $(x_n)$  est de Cauchy. Par convergence de  $(x_n)$ , on a  $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\varepsilon, d(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$ .  
Ainsi,  $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, a) + d(a, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ .

Donc on a :  $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq N_\varepsilon, d(x_n, x_m) < \varepsilon$ .

C'est-à-dire que  $(x_n)$  est de Cauchy.

2. Supposons que  $(x_n)$  est une suite de Cauchy qui admet deux valeurs d'adhérence distinctes  $a \neq b \in X$ .

On a  $x_{\varphi(n)} \rightarrow a$  et  $x_{\psi(n)} \rightarrow b$  deux sous-suites de  $(x_n)$ .

Posons  $\varepsilon = d(a, b) > 0$  car  $a \neq b$ .

Comme  $(x_n)$  est de Cauchy,  $\exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq N_0, d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{3}$ .

De plus, comme  $x_{\varphi(n)} \rightarrow a$ ,  $\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1, d(x_{\varphi(n)}, a) < \frac{\varepsilon}{3}$ .

Et comme  $x_{\psi(n)} \rightarrow b$ ,  $\exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_2, d(x_{\psi(n)}, b) < \frac{\varepsilon}{3}$ .

Comme  $\varphi(n), \psi(n) \rightarrow +\infty$ , on peut choisir  $n$  tel que  $\varphi(n), \psi(n) \geq N_0$  avec  $\varphi(n) \geq N_1$  et  $\psi(n) \geq N_2$ .

$\varepsilon = d(a, b) \leq d(a, x_{\varphi(n)}) + d(x_{\varphi(n)}, x_{\psi(n)}) + d(x_{\psi(n)}, b) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$ .

Absurde. Donc  $a = b$ , donc la valeur d'adhérence est unique.

3. Soit  $(x_n)$  une suite de Cauchy et soit  $(x_{\varphi(n)})$  une sous-suite de  $(x_n)$  qui converge vers  $a$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ . Comme  $(x_n)$  est de Cauchy,  $\exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq N_0, d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ .

De plus, comme  $x_{\varphi(n)} \rightarrow a$ ,  $\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1, d(x_{\varphi(n)}, a) < \frac{\varepsilon}{2}$ .

On a alors :

$d(x_n, a) \leq d(x_n, x_{\varphi(m)}) + d(x_{\varphi(m)}, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$  pour tout  $\forall n, m \geq \max(N_0, N_1)$  (possible car  $\varphi(n) \rightarrow +\infty$ ).

Donc  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, d(x_n, a) < \varepsilon$ .

C'est-à-dire que  $x_n \rightarrow a$ .  $\square$

**Définition :** Une partie  $A \in (X, d)$  est bornée si  $\exists x \in X \exists r > 0$  tel que  $A \subset B(x, r)$ .

 **Illustration :** Patatoïdes, une partie A dans un autre espace, avec un  $x$  dans cet autre espace, mais pas dans A.

**Proposition :**

Si  $(x_n)$  est une suite de Cauchy dans  $(X, d)$ , alors  $(x_n)$  est bornée.

**Preuve :**

Posons  $A = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n \dots\} \subset X$ .


On veut montrer que  $\exists y \in X, r > 0$  tel que  $d(x_n, y) < r, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Pour  $\varepsilon = 1 \exists N \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq N, d(x_n, x_m) < 1$ .

On a  $\forall n \geq N, d(x_n, y) \leq d(x_n, x_N) + d(x_N, y) < 1 + d(x_N, y) \leq 1 + \max_{0 \leq k \leq N} d(x_k, y) = r$ .

Ainsi,  $\forall n \in \mathbb{N}, d(x_n, y) < r$ . Donc  $(x_n)$  est bornée.  $\square$

**Définition :** Un espace métrique  $(X, d)$  est complet si toute suite de Cauchy de  $(X, d)$  converge dans  $X$ .

 **Exemple :**  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$  est complet.

**Théorème :**

$\mathbb{R}^d$  ( $d \in \mathbb{N}$ ) est complet pour  $\|\cdot\|_\infty$ . (feuille de TD4, exercice 13)

**Preuve :**

Soit  $(X_n)$  une suite de Cauchy dans  $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty)$ .

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq N, \|X_m - X_n\|_\infty < \varepsilon$ .

Écrivons  $X_n = \begin{pmatrix} x_1^{(n)} \\ x_2^{(n)} \\ \vdots \\ x_d^{(n)} \end{pmatrix}$  où  $(x_i^{(n)})$  est une suite de  $\mathbb{R}$  pour tout  $i \in \{1, \dots, d\}$ .

Or  $\forall i \in \{1, \dots, d\}, |x_i^{(m)} - x_i^{(n)}| \leq \|X_m - X_n\|_\infty$ .

Donc  $\forall i \in \{1, \dots, d\}, (x_i^{(n)})$  est une suite de Cauchy dans  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ .

Or  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$  est complet, donc  $\forall i \in \{1, \dots, d\}, x_i^{(n)} \rightarrow l_i \in \mathbb{R}$ .

Considérons le vecteur  $X = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d$ .

Alors  $X_n \rightarrow X$  dans  $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty)$ .

Donc  $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty)$  est complet.  $\square$

## 2 Complétude et fermeture

### Proposition :

Soit  $(X, d)$  un espace métrique.

On considère  $A \subset X$ , et donc  $A$  devient un espace métrique pour la distance  $d$  restreinte à  $A$ .

Si  $(A, d)$  est complet, alors  $A$  est fermé dans  $(X, d)$ .

### Preuve :

Soit  $(x_n)$  une suite de  $A$  qui converge vers  $l \in X$ .

Si  $(x_n)$  est une suite convergente, alors  $(x_n)$  est de Cauchy dans  $(A, d)$ .

Comme  $A$  est complet,  $x_n \rightarrow l \in A$ . (unicité de la limite)

Donc  $A$  est fermé dans  $(X, d)$ .  $\square$

### Proposition :

Soient  $(X, d)$  un espace métrique et  $A \subset X$ .

Si  $A$  est fermé dans  $(X, d)$  alors  $(A, d)$  est complet.

### Preuve (le prof l'a effacée) :

Soit  $(x_n)$  une suite de Cauchy dans  $(A, d)$ .

Mais  $(x_n)$  est aussi une suite de  $A$  qui est fermé. Alors  $(x_n)$  admet une valeur d'adhérence  $l \in X$ .

Or une suite de Cauchy qui admet une valeur d'adhérence converge vers cette valeur d'adhérence.

Donc  $x_n \rightarrow l \in A$ .

Donc toute suite de Cauchy de  $(A, d)$  converge dans  $A$ .

Ainsi,  $(A, d)$  est complet.  $\square$

### Preuve plus adaptée:

Soit  $(x_n)$  une suite de Cauchy dans  $(A, d)$ .

Mais  $(x_n)$  est aussi une suite de  $X$  qui est complet.

Alors  $(x_n)$  admet une limite  $l \in X$  a priori.

Donc  $x_n \rightarrow l \in A$  et  $l \in A$  car  $A$  est fermé dans  $(X, d)$ .

Donc toute suite de Cauchy de  $(A, d)$  converge dans  $A$ .

Ainsi,  $(A, d)$  est complet.  $\square$

**Remarque :** Comme dans  $\mathbb{R}$  on a la Caractérisation suivante : pour  $(X, d)$  complet, alors  $(A, d) \subset (X, d)$  est complet si et seulement si  $A$  est fermé dans  $(X, d)$ .

## H Compacité

### 1 Définitions et premières propriétés

**Définition :** On dit qu'un espace métrique  $(X, d)$  est compact si toute suite de  $(X, d)$  admet une sous-suite convergente dans  $(X, d)$ .

**Remarque :** On sait que si  $(x_n)$  est une suite bornée (i.e.  $\exists a < b \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, a \leq x_n \leq b$ ) dans  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ , alors par le théorème de Bolzano-Weierstrass,  $\exists$  une sous-suite de  $(x_n)$  qui converge.

Autrement dit, tout segment fermé  $[a, b]$  est compact avec la définition. On peut dire qu'on a choisi une définition qui "généralise" Bolzano-Weierstrass.

**Proposition :**

$(X, d)$  est compact  $\Rightarrow (X, d)$  est complet.

**Preuve :**

Soit  $(x_n)$  une suite de Cauchy dans  $(X, d)$ .

Comme  $(X, d)$  est compact,  $(x_n)$  admet une sous-suite convergente.

Autrement dit,  $(x_n)$  est de Cauchy et admet une valeur d'adhérence.

Donc  $(x_n)$  converge vers cette valeur d'adhérence.

(suite de Cauchy qui admet une valeur d'adhérence converge vers cette valeur d'adhérence)

Ainsi,  $(X, d)$  est complet.  $\square$

**Proposition :**

Soit  $(X, d)$  compact. Soit  $F \subset X$  (on pense  $(F, d)$ ).

Alors  $F$  est fermé  $\Leftrightarrow (F, d)$  est compact.

**Preuve :**

- $(\Rightarrow)$  On suppose  $F$  fermé. Soit  $(x_n)$  une suite de  $F$ .  
 $(x_n)$  est aussi une suite de  $X$  qui est compact.  
 Il existe donc  $(x_{\varphi(n)})$  une sous-suite de  $(x_n)$  qui converge vers  $l \in X$ .  
 Or  $(x_{\varphi(n)})$  est une suite convergente de  $F$  qui est fermé.  
 Donc  $l \in F$ .  
 Donc  $(x_n)$  suite de  $F$  admet une sous-suite convergente dans  $F$ .  
 Ainsi,  $(F, d)$  est compact.  $\square$
- $(\Leftarrow)$  On suppose  $(F, d)$  compact. Soit  $(x_n)$  une suite de  $F$  qui converge vers  $l \in X$ .  
 Or comme  $F$  est compact,  $(x_n)$  admet une sous-suite convergente dans  $F$ .  
 Comme  $(x_n)$  converge vers  $l \in X$ , cette sous-suite converge aussi vers  $l$ . (unicité de la limite + une suite convergente a une seule valeur d'adhérence)  
 Donc  $l \in F$ .  
 Ainsi,  $F$  est fermé.  $\square$

**Remarque :** Dans le cas  $(A, d) \subset (X, d)$  :

- La définition de compacité est : toute suite  $(x_n)$  de  $A$  admet une sous-suite convergente dans  $A$ .
- La définition de la complétude est : toute suite de Cauchy  $(x_n)$  de  $A$  converge dans  $A$ .

**Proposition :**

Soit  $(X, d)$  et  $(Y, d')$  deux espaces compacts.

Alors  $X \times Y$  est compact.

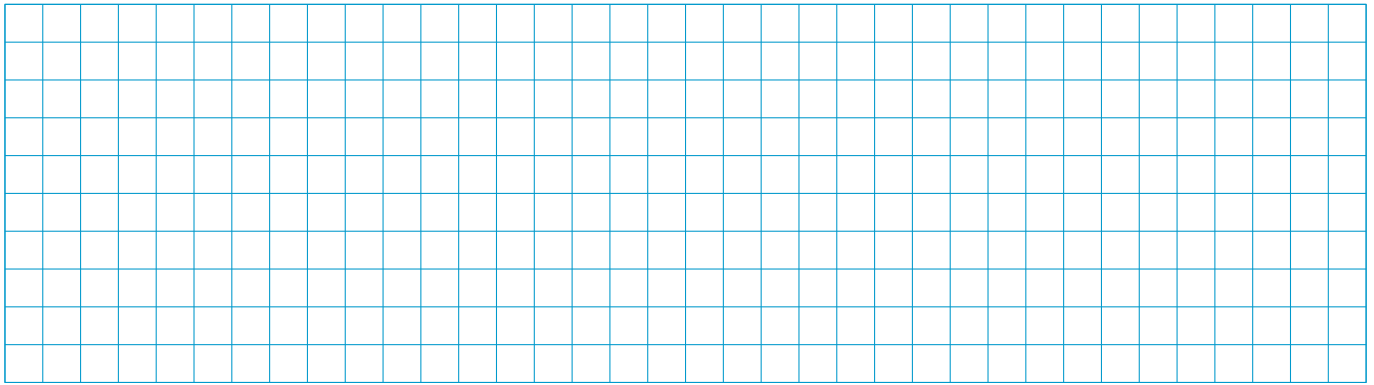
Autrement dit le produit d'espaces compacts est compact.

**Remarque :** D'abord, munissons  $X \times Y$  d'une distance.

Soit  $\delta : ((x, y), (x', y')) \in (X \times Y)^2 \mapsto d(x, x') + d'(y, y')$ .

**Application :** Montrer que  $\delta$  est une distance sur  $X \times Y$ .

On aurait pu considérer aussi  $\delta_\infty : ((x, y), (x', y')) \mapsto \max(d(x, x'), d'(y, y'))$ .

**Preuve (de la proposition) :**

Montrons que  $(X \times Y, \delta)$  est compact.

Soit  $((x_n, y_n))$  une suite de  $X \times Y$ .

Or  $(x_n)$  est une suite de  $X$  qui est compact.

Et  $(y_n)$  est une suite de  $Y$  qui est compact.

Donc par compacité,  $(x_n)$  admet une sous-suite convergente  $(x_{\varphi(n)})$  vers  $a$  dans  $X$ .

Et  $(y_n)$  admet une sous-suite convergente  $(y_{\psi(n)})$  vers  $b$  dans  $Y$ .

Considérons alors la sous-suite  $((x_{\varphi(\psi(n))}, y_{\psi(\varphi(n))}))$  de  $((x_n, y_n))$ .

Alors  $(x_{\varphi(\psi(n))})$  converge vers  $a$  dans  $X$  et  $(y_{\psi(\varphi(n))})$  converge vers  $b$  dans  $Y$ .

Donc  $((x_{\varphi(\psi(n))}, y_{\psi(\varphi(n))}))$  converge vers  $(a, b)$ .

Ainsi,  $(X \times Y, \delta)$  est compact.  $\square$

**Remarque :** Plus généralement, le produit fini d'espaces compacts est compact.

## 2 Fonctions continues sur un compact

### Propriété fondamentale :

Soit  $f$  continue de  $(X, d)$  (compact) dans  $\mathbb{R}$ .

Alors  $f$  est bornée et atteint ses bornes.

Autrement dit,  $m = \inf_{x \in X} f(x) \leq f(x) \leq \sup_{x \in X} f(x) = M$  pour tout  $x \in X$ , et  $\exists a, b \in X$  tels que  $f(a) = m$  et  $f(b) = M$ .

**Preuve :**

(Pour le  $\sup$ , le  $\inf$  est similaire)

Par définition de  $\sup$ ,  $\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in X$  tel que  $\sup_{x \in X} f(x) - \varepsilon \leq f(x_\varepsilon) \leq \sup_{x \in X} f(x)$ .

En discrétisant,  $\varepsilon = \frac{1}{n+1}$ , on obtient une suite  $(x_n)$  de  $X$  telle que  $f(x_n) \rightarrow \sup_{x \in X} f(x)$ .

Or  $(x_n)$  est une suite du compact  $(X, d)$ , donc  $(x_n)$  admet une sous-suite convergente  $(x_{\varphi(n)})$  qui converge vers  $b \in X$ .

Par continuité de  $f$ ,  $f(x_{\varphi(n)}) \rightarrow f(b)$ .

Donc  $f(b) = \sup_{x \in X} f(x) < +\infty$  et  $b$  réalise le  $\sup$ .  $\square$  faire de même pour l'inf

### Proposition :

Soit  $K \subset (X, d)$  et  $K$  compact. Alors  $K$  est borné.

**Preuve :**

Soit  $a \in X$ . Considérons la fonction  $f: X \rightarrow \mathbb{R}^+, x \mapsto d(x, a)$ .

$|f(x) - f(y)| = |d(x, a) - d(y, a)| \leq d(x, y)$  par inégalité triangulaire.

Donc  $f$  est 1-Lipschitz, donc continue.

Regardons  $f$  restreinte à  $K$ , qui est compact.

Donc par la propriété fondamentale,  $f$  est bornée sur  $K$  et atteint ses bornes sur  $K$ .

Donc  $\exists M > 0, \forall x \in K, d(x, a) \leq M$ .

Ainsi,  $K \subset B(a, M)$ , donc  $K$  est borné.  $\square$

**Proposition HP :** (admis)

Soit  $(K, d)$  compact. Soit  $f : (K, d) \rightarrow (Y, d')$  continue.  
Alors  $f(K)$  est compact dans  $(Y, d')$ .

**Preuve :** *Laissée à l'appréciation du lecteur.*

**3 Compacité dans un evn de dimension finie****Théorème :**

Les compacts de  $\mathbb{R}^n$  sont les fermés et bornés.

Autrement dit,  $K \subset \mathbb{R}^n$  est compact  $\Leftrightarrow K$  est fermé et borné.

**Preuve :**

- $(\Rightarrow)$  Soit  $K$  un compact de  $\mathbb{R}^n$ .  
Alors  $K$  est borné (proposition vue plus haut dans le cadre d'espaces métriques).  
Or  $\mathbb{R}^n$  est complet (avec par exemple la norme  $\|\cdot\|_\infty$ ).  
Et comme  $K$  est un compact de  $\mathbb{R}^n$ ,  $K$  est complet donc  $K$  est fermé dans  $\mathbb{R}^n$  (proposition vue plus haut).
- $(\Leftarrow)$  Soit  $K$  un fermé et borné de  $\mathbb{R}^n$ .  
Comme  $K$  est borné,  $\exists R > 0$  tel que  $K \subset B(0, R)$  pour la norme  $\|\cdot\|_\infty$ .  
Ainsi  $K \subset B(0, R) \subset [-R, R]^n$  qui est un compact de  $\mathbb{R}^n$ .  
Or  $K$  est fermé dans  $\mathbb{R}^n$ , donc  $K$  est fermé dans  $[-R, R]^n$  (car  $[-R, R]^n$  est fermé dans  $\mathbb{R}^n$ ).  
Donc  $K$  est un fermé d'un compact, donc  $K$  est compact.  $\square$

**✗ Attention ✗** Cette caractérisation est fautive en dimension infinie.

**💡 Contre-Exemple :** Pour fixer les idées, les boules unités (par exemple) sont des compacts en dimension finie, mais pas en dimension infinie.

**Théorème : Equivalence des normes**

Toutes les normes sur  $\mathbb{R}^n$  sont équivalentes.

**Preuve :** On va montrer que toute norme est équivalente à la norme 1 notée  $\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$ .

Ainsi, par transitivité, toutes les normes seront équivalentes.

Considérons  $f : X \xrightarrow{\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}} N(X)$  avec  $N$  une norme quelconque sur  $\mathbb{R}^n$ .

Montrons que  $f$  est lipschitzienne de  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$  dans  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ .

Notons  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .

$|f(X) - f(Y)| = |N(X) - N(Y)| \leq N(X - Y)$  par inégalité triangulaire reversée.

$= N(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)e_i) \leq \sum_{i=1}^n N((x_i - y_i)e_i) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|N(e_i) \leq (\max_{1 \leq i \leq n} N(e_i)) \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| = K\|X - Y\|_1$   
où  $K = \max_{1 \leq i \leq n} N(e_i)$ .

Donc  $f$  est  $K$ -lipschitzienne.

Donc  $f$  est donc continue.

Considérons  $S(0, 1) = \{X \in \mathbb{R}^n \mid \|X\|_1 = 1\}$  le bord de la boule unité pour la norme 1.

Or  $S(0, 1)$  est compact (fermé et borné dans  $\mathbb{R}^n$ ).

$f$  sur  $S(0, 1)$  est bornée et atteint ses bornes car  $f$  est continue (propriété fondamentale).

Donc  $\exists m, M > 0, \forall X \in S(0, 1), m \leq N(X) \leq M$ .

En effet  $m > 0$  car  $\exists x_0 \in S(0, 1)$  (qui réalise l'inf) tel que  $0 \leq f(x_0) = m$ , qui est différent de 0 car  $N$  est une norme.

Prenons  $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .

Considérons  $\frac{y}{\|y\|_1} \in S(0, 1)$ .

On a alors  $m \leq f(\frac{y}{\|y\|_1}) \leq M$ .

i.e.  $m \leq N(\frac{y}{\|y\|_1}) \leq M$ .

i.e.  $m\|y\|_1 \leq N(y) \leq M\|y\|_1$ .

Ce qui est vrai pour  $y \neq 0$ . Mais l'équivalence des normes est toujours vraie pour  $y = 0$ .

Ainsi,  $N$  est équivalente à la norme 1.

Donc par transitivité, toutes les normes sur  $\mathbb{R}^n$  sont équivalentes.

(car deux normes équivalentes à une troisième sont équivalentes entre elles)  $\square$

**Théorème : Continuité automatique des applications linéaires de  $\mathbb{R}^p$  dans  $\mathbb{R}^q$**

$f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q) \Rightarrow f$  est continue.

**Preuve :**

On va choisir la norme 1 sur  $\mathbb{R}^p$  et  $\|\cdot\|$  une norme quelconque sur  $\mathbb{R}^q$ .

Soit  $(e_1, e_2, \dots, e_p)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^p$ .

$\forall x \in \mathbb{R}^p, \|f(x)\| = \|f(\sum_{i=1}^p x_i e_i)\| = \|\sum_{i=1}^p x_i f(e_i)\| \leq \sum_{i=1}^p |x_i| \|f(e_i)\| \leq (\max_{1 \leq i \leq p} \|f(e_i)\|) \sum_{i=1}^p |x_i| = K \|x\|_1$  où  $K = \max_{1 \leq i \leq p} \|f(e_i)\|$ .

Ainsi,  $f$  est bien continue.  $\square$