Chapitre 2.3 : Séries semi-convergentes et produit de Cauchy

I Séries semi-convergentes

Exemple : $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n}$, on voit qu'elle n'est pas ACV, mais $|\frac{e^{in\theta}}{n}| = \frac{1}{n}\ \forall\theta \in \mathbb{R}$.
Mais on a pas les outils pour voir si elle est "seulement" convergente. *Idem* pour la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$.

Donc le but ici, c'est de trouver des critères de convergence pour des séries qui ne sont pas ACV.

A Définitions et premières propriétés

Définition : Une série est dite **semi-convergente** (SCV) si elle est convergente mais pas absolument convergente.

Remarque : On considère ici les les séries à terme général $u_n \in \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ (on a pas $u_n \geq 0$).

Proposition : "étrange"

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à terme général dans $\mathbb{R}$.
On considère la série $\sum_{n\geq 0} u_n^+$ et $\sum_{n\geq 0} u_n^-$.

On a $\sum_{n\geq 0} u_n$ est SCV $\Rightarrow \sum_{n\geq 0} u_n^+$ et $\sum_{n\geq 0} u_n^-$ divergent.

Preuve:
On rappelle que $u_n^+ = \max(u_n, 0)$ et $u_n^- = \max(-u_n, 0)$ et donc $u_n = u_n^+ - u_n^-$ (2) et $|u_n| = u_n^+ + u_n^-$ (1).

- Si $\sum_{n\geq 0} u_n^+$ et $\sum_{n\geq 0} u_n^-$ convergent, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ ACV par (1) : **absurde**.
- Si l'une des séries converge et l'autre diverge, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge par (2).
- Seule possibilité donc : $\sum_{n\geq 0} u_n^+$ et $\sum_{n\geq 0} u_n^-$ divergent.

Proposition :

Considérons $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à terme général dans $\mathbb{C}$.
Alors on a :
$\sum_{n\geq 0} u_n$ est SCV $\Leftrightarrow \sum_{n\geq 0} Re(u_n)$ et $\sum_{n\geq 0} Im(u_n)$ sont CV et l'une d'entre elles est SCV.

Preuve:
$\Rightarrow$ / Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ est CV, alors $\sum n = 0^N u_n = \sum_{n=0}^N Re(u_n) + i\sum_{n=0}^N Im(u_n)$.
Donc on a la CV des séries $\sum_{n\geq 0} Re(u_n)$ et $\sum_{n\geq 0} Im(u_n)$.
Montrons que l'une des deux séries n'est pas ACV.
En effet on a $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq |Re(u_n)| + |Im(u_n)|$ si $\sum_{n\geq 0} |Re(u_n)|$ et $\sum_{n\geq 0} |Im(u_n)|$ ACV.
$\Rightarrow$ une des deux séries n'est pas ACV.
$\Rightarrow$ une des deux séries est ACV.

$\Leftarrow$ / On a que $\sum_{n\geq 0} Re(u_n)$ et $\sum_{n\geq 0} Im(u_n)$ sont CV.
Donc $\sum_{n\geq 0} u_n$ est CV.
Montrons que $\sum_{n\geq 0} u_n$ est SCV.
On a : $|Re(u_n)| \leq |u_n|$ et $|Im(u_n)| \leq |u_n|$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ était ACV, alors $\sum_{n\geq 0} Re(u_n)$ et $\sum_{n\geq 0} Im(u_n)$ seraient ACV ce qui est contraite à l'hypothèse "l'une d'entre elles est SCV".

B Critère d'Abel

Application : On veut donner un critère pour la convergence d'une série du type $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n} = a_n b_n$ avec $a_n = e^{in\theta}$ et $b_n = \frac{1}{n}$.

Théorème : Critère d'Abel

On considère la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ où $\sum_{n\geq 0} u_n \in \mathbb{C}$, avec $u_n = a_n b_n$ tels quels :

1. (a_n) est **réelle**, **décroissante**, et $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
2. (b_n) est **complexe** telle que $B_N = \sum_{n=0}^{N} b_n$, *i.e.* (B_N) est **bornée**.

Alors la série $\sum_{n\geq 0} a_n b_n$ converge.

Rappel : Une suite complexe est bornée : $\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |z_n| \leq M$, où $|z_n| = \sqrt{Re(z_n)^2 + Im(z_n)^2}$.

Preuve:
On va utiliser la "transformation d'Abel".
On a $B_N = \sum_{n=0}^{N} b_n$.
Alors $B_k - B_{k-1} = b_k$, $\forall k \geq 1$ et $B_0 = b_0$.

On part de la somme partielle de la série :
$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^{N} a_k b_k = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{N} a_k (B_k - B_{k-1})$
$= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{N} a_k B_k - \sum_{k=1}^{N} a_k B_{k-1}$
$= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{N} a_k B_k - \sum_{k=0}^{N-1} a_{k+1} B_k$
$= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{N-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_N B_N - a_1 b_0 = \sum_{k=0}^{N} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_N$ avec a_n tend vers 0 et B_n bornée

Etude de $\sum_{k=0}^{N} (a_k - a_{k+1}) B_k$, séries à termes dans $\mathbb{C}$.
Etudions donc l'ACV :
$|a_k - a_{k+1} B_k| |a_k - a_{k+1}| |B_k| \leq (a_k - a_{k+1}) M$ car $|B_k| \leq M$
Or la série $\sum_{k=0}^{N} (a_k - a_{k+1}) M$ est de même nature que $\sum_{k=0}^{N} a_k - a_{k+1}$ (car M est un scalaire non nul).
Et la CV de cette série téléscopique est évidente.

Note de rédaction : Il y avait beaucoup d'indices et d'infos, j'attends la vérification de Laurent pour être sûr que c'est correct (j'ai un doute sur la fin).

Application : Pour $\theta \neq 2\pi k, \sum_{n\geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n}$ converge par le critère d'Abel, $a_n = \frac{1}{n}$ et $b_n = e^{in\theta}$ et $\sum_{n\geq 1} b_n = \frac{1-e^{i(N+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}$ et $|B_N| = |\frac{1-e^{i(N+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}| \leq \frac{|1|+|e^{i(N+1)\theta}|}{|1-e^{i\theta}|} = \frac{2}{|1-e^{i\theta}|}$.
Donc la série $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n}$ converge, mais pas ACV, donc elle est SCV.

Application : Etudier la convergence, l'absolue convergence et la semi-convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ avec $\theta \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

Remarque : Dans le critère d'Abel, comme (a_n) est décroissante et $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $a_n \geq 0$ (car $a_n \in \mathbb{R}$).

C Séries alternées

Définition : Une série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est dite **alternée** si $u_n = (-1)^n a_n$ ou $u_n = (-1)^{n+1} a_n$ avec $a_n \geq 0$.

Exemple : $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n}$, $\sum_{n\geq 0} (-1)^n$ sont des séries alternées.

Remarque : $(-1)^n \cdot u_n = (-1)^{2n} a_n = a_n$ ou $u_n = -a_n \Rightarrow (-1)^n u_n$ est de signe constant

Remarque : Une définition équivalente est : une série est alternée si le signe de $(-1)^n \cdot u_n$ est constant.

Théorème : Critère spécial des séries alternées (CSSA)

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série de terme général $u_n = (-1)^n a_n$, avec $a_n \geq 0$.
Si :

1. (a_n) est décroissante.
2. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

Preuve:
On applique le critère d'Abel avec $a_n = a_n$ et $b_n = (-1)^n$.
On a bien $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et (a_n) décroissante.
De plus, $B_N = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n = \frac{1-(-1)^{N+1}}{1-(-1)}$ est bornée (égale à 0 ou 1).
Donc la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

Proposition :

Soit $\sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n$ une série alternée vérifiant les hypothèses du CSSA (donc (a_n) est décroissante et $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$).
On considère la suite des sommes partielles (S_N) avec $S_N = \sum_{k=0}^{N}(-1)^k a_k$.
Soit S la somme de la série.

Alors :
$S_{2N+1} \leq S \leq S_{2N}$ et $|R_N| = |S - S_N| \leq a_{N+1}$.

Preuve:
On pouse $A_N = S_{2N}$ et $B_N = S_{2N+1}$.
On observe que $S_{2N+1} - S_{2N} = -a_{2N+1} \leq 0$
$\Leftrightarrow S_{2N+1} \leq S_{2N}$.

Variations de (A_N) *et* (B_N)
$A_{N+1} - A_N = S_{2N+2} - S_{2N} = a_{2N+2} - a_{2N+1} \leq 0$ car (a_n) décroissante.
$\Leftrightarrow A_{N+1} \leq A_N$. Donc (A_N) est décroissante et $B_{N+1} - B_N = S_{2N+3} - S_{2N+1} = a_{2N+2} - a_{2N+3} \geq 0$ car (a_n) décroissante.
$\Leftrightarrow B_{N+1} \geq B_N$. Donc (B_N) est croissante.

De plus, on a $B_N - A_N \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$ donc (A_N) et (B_N) sont adjacentes, et convergent vers la même limite S.
et donc $B_N \leq S \leq A_N$ où $S = \lim_{N\to\infty} A_N = \lim_{N\to\infty} B_N$.

On a bien $S_{2N+1} \leq S \leq S_{2N}, \forall N \in \mathbb{N}$.

Etudions maintenant le reste.
$R_N = S - S_N$, on veut montrer que $|R_N| \leq a_{N+1}$.
Séparons le cas N pair et impair :

- Si $N = 2p+1$, alors $S_{2p+1} \leq S \implies S - S_{2p+1} \geq 0$.
  $\Rightarrow |R_{2p+1}| = S - S_{2p+1} \leq S_{2p+2} - S_{2p+1} = a_{2p+2} = a_{N+1}$.
- *Laissé en exercice au lecteur :)* $\square$

✖ Attention ✖

1. Si deux suites sont équivalentes ($\sim$) et l'une monotone, l'autre ne l'est pas forcément. **Exemple :** $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ et $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. On a $a_n \sim b_n$ mais (a_n) n'est pas monotone (on le montre en encadrant/calculant 3 termes consécutifs (2p, 2p+1, 2p+2), alors que (b_n) l'est).

2. Considérons $\sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n$. On remarque que $\sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n$ n'est pas ACV. Est-elle semi-convergente ?
Le CSSA ne s'applique pas. Mais $(-1)^n a_n \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ QUI N'IMPLIQUE PAS "$\sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n$ CV car $\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ CV" (car $\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ n'est pas positive).
À faire : Montrer que $(-1)^n a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{(n)}} + b_n$, où $b_n = \frac{-1}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+(-1)^n)}$ et en déduire que $\sum u_n$ DV.

Donc $u_n \sim v_n$, $\sum v_n$ CV $\implies \sum u_n CV$ que si $v_n est \geq 0 ou \leq 0$

II Produit de Cauchy de deux séries

Définition : Soient $\sum_{n\geq 0} a_n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n$ deux séries.
La **série produit (de Cauchy)** est définie par la série $\sum_{n\geq 0} c_n$ où $c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Remarque : Supposons que $a_n = 0 = b_n$ pour $n > N \in \mathbb{N}$. Considérons $P(X) = a_0 + a_1 X + ... + a_n X^n$ et $Q(X) = b_0 + b_1 X + ... + b_n X^n$.
Alors $(PQ)(X) = c_0 + c_1 X + ... + c_{2N} X^{2N}$. On peut penser au produit de Cauchy comme une "généralisation".

Proposition :

On considère $\sum_{n\geq 0} a_n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n$ deux séries à termes positifs et convergentes.
Alors la série produit $\sum_{n\geq 0} c_n$ est convergente et on a : $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n)(\sum_{n=0}^{\infty} b_n)$.

Preuve:
Soient $A_n = \sum_{n=0}^{N} a_n$ et $B_N = \sum_{n=0}^{N} b_n$.
Notons $C_N = \sum_{n=0}^{N} c_n$ = $\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

On veut monrer que (C_N) converge et déterminer sa limite.

(C_n) est une somme partielle à termes positifs, donc (C_N) est croissante.
Posons $I_N = \{0, \ldots, N\} \subset \mathbb{N}$
Note de rédaction : Dessin $I_N x I_N$

Considérons $A_N B_N = \sum_{(p,q)\in I_N x I_N} a_p b_q$.
Mais $C_N = \sum_{n=0}^{N} c_n = \sum_{n=0}^{N}\sum_{p+q=n} a_p b_q = \sum_{(p,q)\in I_N^2, p+q\leq N} a_p b_q$.
On a $\{(p,q) \mid p+q \leq N\} \subset \{(p,q) \mid p,q \in I_N\}$, donc $C_N \leq A_N B_N$ (1) qui est bornée car A_N CV et B_N CV $\implies C_N$ bornée.
On a aussi l'inégalité : $A_N B_N \leq C_{2N}(2)$
Note de rédaction : Deuxième schema

car $\{(p,q) \mid p+q \leq N\} \supset \{(p,q) \mid 0 \leq p,q \leq N\}$. On obtient $\lim_{+\infty} c_n = \lim_{+\infty}(A_N B_N) = (\lim_{+\infty} A_N)\cdot(\lim_{+\infty} B_N)$. $\square$

Théorème :

Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries à termes dans $\mathbb{C}$.
Si les séries sont ACV, alors la série produit $\sum_{n\geq 0} c_n$ est ACV.

Preuve:
On considère $A_N = \sum_{n=0}^{N} |u_n|$ et $B_N = \sum_{n=0}^{N} |v_n|$.
On étudie $|\sum_{n=0}^{N} u_n \cdot \sum_{n=0}^{N} v_n - \sum_{n=0}^{N} c_n|$.