Chapitre 5 : Espérance

I Définition et exemples

Rappel : Rappel sur les séries. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.
Si les a_n sont positifs, alors :

- la série $\sum_{n\geq 1} a_n$ est définie positive
- l'ordre dans lequel on somme les termes n'affecte pas la somme ni la finitude
- Si on partitionnel $\mathbb{N}^*$ en une collection dénombrable $(I_p)_{p\in\mathbb{N}}$ d'ensembles infinis, alors $\sum_{n\geq 1} a_n = \sum_{p\geq 1}\sum_{n\in I_p} a_n$

On suppose à présent que les a_n sont de signes quelconques. Si $\sum_{n\geq 1} |a_n| < +\infty$ (série absolument convergente), alors :

1. la série $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge (dans $]-\infty,+\infty[$) ;
2. l'ordre dans lequel l'on somme les a_n n'influe pas sur la finitude ni sur la valeur de la série ;
3. si l'on partitionne $\mathbb{N}^*$ en une collection dénombrable $(I_p)_{p\geq 1}$ de parties, alors

$$\sum_{n\geq 1} a_n = \sum_{p\geq 1}\sum_{n\in I_p} a_n.$$

Définition : Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathbb{P})$ et à valeurs dans un ensemble (dénombrable) $E\subset\mathbb{R}_+$. Soit μ_X la loi de X. L'espérance de X est définie comme la quantité :

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x\in E} x\cdot\mu_X(\{x\}) \in [0,+\infty[$$

Définition : Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathbb{P})$ et à valeurs dans un ensemble (dénombrable) $E\subset\mathbb{R}$. Soit μ_X la loi de X. On dit que X est intégrable si l'espérance de $|X| = \{|x| : x\in E\}$ est finie, et dans ce cas on définit l'espérance de X comme la quantité :

$$\mathbb{E}[X] := \sum_{x\in E} x\cdot\mu_X(\{x\}) \in]-\infty,+\infty[.$$

Vocabulaire : On dira que X admet une espérance si l'on est dans le cadre de l'une des deux définitions précédentes.

	Admet une espérance	Intégrable
X positive et $\mathbb{E}[X] < +\infty$	oui (finie)	oui
X positive et $\mathbb{E}[X] = +\infty$	oui (infinie)	non
X quelconque et $\mathbb{E}[\lvert X\rvert] < +\infty$	oui (finie)	oui
X quelconque et $\mathbb{E}[\lvert X\rvert] = +\infty$	non	non

Remarque : Dans le cas particulier où l'ensemble E est fini, X admet toujours une espérance et X est même toujours intégrable.

Exemple : On pose $\Omega = \{1,\ldots,6\}$, $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme et $X(\omega)=\omega$ la variable qui associe à chaque lancer de dé le nombre sur la face supérieure. X prend un nombre fini de valeurs, donc X est intégrable, et est à valeurs positives, donc X admet une espérance. On trouve $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{6}\cdot(1+2+3+4+5+6) = \frac{7}{2}$.

Vocabulaire : En vocabulaire sur les séries, on dit que X admet une espérance si la série $\sum_{x\in E} x\cdot\mu_X(\{x\})$ est absolument convergente.

II Formule de transfert et propriétés

Théorème : Formule de transfert

Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ à valeurs dans un ensemble dénombrable E. Soit $g\colon E \to F$ une fonction, avec $F \subset \mathbb{R}$ un ensemble dénombrable.

1. Si g est à valeurs positives, alors :
$$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_{x\in E} g(x) \cdot \mu_X(\{x\}).$$
2. Si g est de signe quelconque, alors : la variable aléatoire $g(X)$ est intégrable si et seulement si la série $\sum_{x\in E} |g(x)| \cdot \mu_X(\{x\})$ est finie, et dans ce cas :
$$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_{x\in E} g(x) \cdot \mu_X(\{x\}).$$

Corollaire : Expression de l'espérance à partir de la loi de X

Soit X une variable aléatoire réelle discrète dans un ensemble E.

1. Si X est à valeurs positives, alors :
$$\mathbb{E}[X] = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega) \cdot \mathbb{P}(\{\omega\}).$$
2. Si X est de signe quelconque, alors : X est intégrable si et seulement si la série $\sum_{\omega\in\Omega} |X(\omega)| \cdot \mathbb{P}(\{\omega\})$ est finie, et dans ce cas :
$$\mathbb{E}[X] = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega) \cdot \mathbb{P}(\{\omega\}).$$

On a donc vu que l'espérance d'une variable aléatoire discrète est une série de la forme $\sum_{n\geq 1} a_n$ avec $a_n = x \cdot \mu_X(\{x\})$ ou $a_n = X(\omega) \cdot \mathbb{P}(\{\omega\})$ qui converge absolument. On peut alors appliquer les propriétés des séries absolument convergentes pour obtenir les propriétés suivantes de l'espérance.

Propriété :

1. Linéarité : pour toutes variables aléatoires intégrables X, Y et tous réels a, b, la variable aléatoire $aX + bY$ est intégrable et $\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y]$.
2. Monotonie : pour toutes variables aléatoires X, Y admettant une espérance, si $X(\omega) \leq Y(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$, alors $\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$.
3. Valeur absolue : $|\mathbb{E}[X]| \leq \mathbb{E}[|X|]$ pour toute variable aléatoire X admettant une espérance.

Proposition :

Soit X une variable aléatoire discrète. Supposons $X(\omega) \geq 0$ pour tout $\omega \in \Omega$ (ie. X est à valeurs positives). Alors $E[X] = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}(X = 0) = 1$.

Attention, si X est de signe quelconque, $\Rightarrow$ n'est plus vérifié.

Proposition : Variable aléatoire entière

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Alors :
$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq k).$$