Chapitre 6 : Théorie spectrale

I Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres

On se donne E un K-espace vectoriel et $u \in End(E)$ un endomorphisme de E.

Définition : Soit $\lambda \in K$. On dit que λ est une **valeur propre (vp)** de u s'il existe un vecteur $x \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $u(x) = \lambda x$. Un tel vecteur x est appelé un **vecteur propre ($\overrightarrow{vp}$)** associé à la valeur propre λ de u.

Définition : On note E_λ le **sous-espace propre** de u associé à la valeur propre λ :

$$E_\lambda = \{x \in E \mid u(x) = \lambda x\} = Ker(u - \lambda Id_E)$$

Propriété : *(admise)*

On a λ est une valeur propre de u si et seulement si $E_\lambda \neq \{0_E\}$.
Ce qui est vrai si et seulement si $u - \lambda Id_E$ n'est pas inversible (autrement dit, $det(u - \lambda Id_E) = 0$).

Vocabulaire : On dit que u est **diagonalisable** s'il existe une base de E formée de $\overrightarrow{vp}$ de u. (vecteurs propres)

Proposition :

u est diagonalisable si et seulement si $Mat_B(u)$ est diagonale pour une certaine base B de E. (E de dimension finie)

Preuve :
Soient $(x_1, \dots, x_n)$ une base de E formée de $\overrightarrow{vp}$ de u avec $u(x_i) = \lambda_i x_i$. On a donc :

$$Mat_B(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

□

Vocabulaire : On dit que u est **trigonalisable** s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure. (vecteurs propres)

Remarque : Alors x est un $\overrightarrow{vp}$ de u. Un endomorphisme sans $\overrightarrow{vp}$ n'est pas diagonalisable.

Exemple : Si $E = K^2$ et $Mat_B(u) = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ (B = canonique), alors u est trigonalisable pour la base $B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$. En effet, on a : $u(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Exemple : Si $Mat_B(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, alors u est diagonalisable.

Exemple : Si $Mat_B(u) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, n'est pas diagonalisable si $K = \mathbb{R}$ (pas de $\overrightarrow{vp}$), mais est diagonalisable si $K = \mathbb{C}$ (car $\lambda = i$ et $\lambda = -i$ sont des vp).

II Projections, symétries et rotations

Posons $E = F \oplus G$ avec F, G sous-espaces vectoriels de E.

Proposition : *(admis)*

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ la projection sur F parallèlement à G (i.e. $p(x+y) = x$ pour tout $(x, y) \in F \times G$).
Alors les valeurs propres de p sont contenues dans $\{0, 1\}$. De plus, $F = E_1$ et $G = E_0$ et p est diagonalisable.

Note de rédaction : cf. Laurent pour la démonstration

Proposition : *(admis)*

Soit $s \in \mathcal{L}(E)$ la symétrie par rapport à F parallèlement à G (i.e. $s(x+y) = x - y$ pour tout $(x, y) \in F \times G$).
Alors les valeurs propres de s sont contenues dans $\{-1, 1\}$. De plus, $F = E_1$ et $G = E_{-1}$ et s est diagonalisable.

Supposons $E = \mathbb{K}^2, K = \mathbb{R}$.
Considérons u tel que $Mat_B(u) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ dans la base canonique B de $\mathbb{R}^2$ avec $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.

Proposition : *(admis)*

u n'est pas diagonalisable si $K = \mathbb{R}$ (pas de $\overrightarrow{vp}$), mais est diagonalisable si $K = \mathbb{C}$ (car $\lambda = \cos\theta + i\sin\theta$ et $\lambda = \cos\theta - i\sin\theta$ sont des vp).

III Rappels sur les polynômes

Note de rédaction : cf. AL2

Définition : Un polynôme P est irréductible sur K si $P = QR$ entraine que Q ou R est de degré 0 (c'est-à-dire une constante).
Cela dépend du corps K.

Définition : P est sciendé sur K si P est produit de polynômes de degré 1 sur K.

Exemple : Sur $\mathbb{R}$, $X^2 + 1$ est irréductible. Sur $\mathbb{C}$, $X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$ est scindé.

Vocabulaire : P est scindé à racines simples si P est scindé et si toutes ses racines sont de multiplicité 1, i.e. $P = c(X - \alpha_1)(X - \alpha_2)\ldots(X - \alpha_n)$ avec α_i distincts.

Théorème d'Alembert-Gauss : *(admis)*

1. Si $K = \mathbb{C}$, tout polynôme de degré ≥ 1 est scindé. (i.e. $\mathbb{C}$ est un corps algébriquement clos)
2. Si $K = \mathbb{R}$, tout polynôme de degré ≥ 1 est produit de polynômes irréductibles de degré 1 ou 2.

IV Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n et $u \in End(E)$.
Rappel : Soit $\lambda \in K$. C'est une valeur propre de u si et seulement si $det(u - \lambda Id_E) = 0$.

Exemple : $Mat_B(u) = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. $E = \mathbb{R}^2$, $K = \mathbb{R}$ et B la base canonique.
On a :

$$det(u - \lambda Id_E) = det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 1 \\ 2 & 4-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 9\lambda + 18 = (\lambda - 6)(\lambda - 3)$$

Donc les valeurs propres de u sont 3 et 6.

Théorème : *(admis)*

Posons $P_u(\lambda) = det(\lambda Id_E - u)$. C'est un polynôme de $K[\lambda]$ de degré n appelé **polynôme caractéristique** de u.
Plus précisément, on a $P_u(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}tr(u)\lambda^{n-1} + \ldots + det(u)$.

Exemple : Pour $n = 2$, on a $P_u(\lambda) = \lambda^2 - tr(u)\lambda + det(u)$.

Corollaire : *(admis)*

L'endomorphisme u admet au plus n valeurs propres (distinctes).

V Polynôme caractéristique d'une matrice

Soit $A \in M_n(K)$ une matrice carrée, soit $\lambda \in K$. On dit que λ est une valeur propre de A s'il existe un vecteur $X \in K^n \setminus \{0\}$ tel que $AX = \lambda X$. On pose $E_\lambda(A) = Ker(A - \lambda I_n)$ le sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ. Et on pose $P_A(\lambda) = det(\lambda I_n - A)$ le polynôme caractéristique de A.

Proposition : *(admis)*

Soit $AB \in M_n(K)$ tel que B sont semblables A (i.e. il existe $P \in GL_n(K)$ tel que $B = P^{-1}AP$).
Alors A et B ont même polynôme caractéristique ($P_A = P_B$) et donc les mêmes valeurs propres.

Proposition : *(admis)*

Supposons A triagonalisable (i.e. semblable à une matrice triangulaire).
Alors P_A est scindé sur K.

Remarque : La réciproque est vraie (vu plus tard), P_A scindé $\implies$ A trigonalisable.

✗ Attention ✗ Retenir que P_A non scindé $\implies$ A non trigonalisable.

Exemple : Si $K = \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $P_A(\lambda) = \lambda^2$. Mais A n'est pas diagonalisable.

VI Étude des sous-espaces propres (sep)

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n et $u \in End(E)$. Soit F un sev de E.

Définition : On dit que F est **stable** par u si $u(F) \subset F$. Alors $u_{|F} \in End(F)$ est la restriction de u à F.

Proposition : *(admis)*

Le polynôme caractéristique de $u_{|F}$ divise celui de u. Autrement dit : $P_{u_{|F}}(\lambda) | P_u(\lambda)$.
Autrement dit : $\exists Q \in K[\lambda], P_u(\lambda) = P_{u_{|F}}(\lambda)Q(\lambda)$.

La preuve utilise le déterminant par blocs.

Proposition : *(admis)*

Soit $k \leq n$ et soient $A \in M_k(K)$ et $B \in M_{k,n-k}(K)$ et $D \in M_{n-k}(K)$.
On a : $det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = det(A)det(D)$.

Proposition : *(admis)*

Soit $\lambda \in K$. Alors E_λ est stable par u.

En effet, si $u(x) = \lambda x$, alors $u(u(x)) = u(\lambda x) = \lambda u(x)$, donc $u(x) \in E_\lambda$.

Corollaire : *(admis)*

Soit $\lambda \in K$, et soit $X \in E_\lambda \setminus \{0_E\}$.
On a que $u_{|E_\lambda}$ est une homothétie de rapport λ.
Donc $P_{u_{|E_\lambda}}(\lambda) = (\lambda - X)^{\dim(E_\lambda)}$
. En particulier, $P_{u_{|E_\lambda}}$ divise P_u.

Vocabulaire : On appelle la **multiplicité** de la valeur propre λ pour u le plus grand entier m tel que $(\lambda - X)^m$ divise $P_u(X)$. On la note $m_a(\lambda)$.

Vocabulaire : On appelle la **multiplicité géométrique** de la valeur propre λ pour u l'entier $\dim(E_\lambda)$. On la note $m_g(\lambda)$.

Proposition : *(admis)*

On a $1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$ si λ est une valeur propre de u.

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. On a $P_A(\lambda) = (3 - \lambda)^3$. Donc $m_a(3) = 3$.
On a $E_3 = Ker(A - 3I_3) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \mid (x, y) \in K^2 \right\}$. Donc $\dim(E_3) = 2$. Donc $m_g(3) = 2$.

Proposition : Somme directe des sep *(admis)*

Soit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ des valeurs propres distinctes de u.
Alors $E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2} + \ldots + E_{\lambda_k}$ est une somme directe.
i.e. $\sum_{i=1}^k E_{\lambda_i} = \bigoplus_{i=1}^k E_{\lambda_i}$.

Autrement dit, les sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe.

Corollaire : *(admis)*

Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

Corollaire : *(admis)*

Si u admet n valeurs propres distinctes (avec $n = \dim(E)$), alors u est diagonalisable.

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$. On a $P_A(\lambda) = -\lambda(\lambda^2 - 15\lambda - 18)$ qui est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples. Les valeurs propres sont $0, \frac{15+\sqrt{297}}{2}, \frac{15-\sqrt{297}}{2}$, donc distinctes. Donc A est diagonalisable.

VII Diagonalisabilité

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n et $u \in End(E)$. Soit F un sev de E.

Théorème : *(admis)*

u est diagonalisable si et seuelemnt si $E = \bigoplus_{\lambda \text{ vp de } u} E_\lambda$.

Autrement dit, u est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions des sous-espaces propres de u est égale à $\dim(E)$.

Théorème : *(admis)*

u est diagonalisable si et seulement si le polynôme caractéristique de u est scindé et on a $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$ pour toute valeur propre λ de u.

Proposition : *(admis)*

Supposons u diagonalisable. Soit F un sev de E stable par u.
Alors la restriction $u_{|F} \in \mathcal{L}(F)$ est diagonalisable.

Lemme : *(admis)*

On a $F = \bigoplus_{\lambda \text{ vp de } u} (F \cap E_\lambda)$.

Théorème : *(admis)*

Soit $v \in End(E)$ tel que $u \circ v = v \circ u$ (i.e. u et v commutent).
Supposons que u et v sont diagonalisables.
Alors il existe une base B de E telle que les matrices de u et v dans cette base sont diagonales.

Vocabulaire : On dit que u et v sont **simultanément diagonalisables**.

Corollaire : *(admis)*

Soit $v \in End(E)$ tel que $u \circ v = v \circ u$ (i.e. u et v commutent).
Alors toute combinaison linéaire de u et v est diagonalisable.
De plus, $u \circ v$ et $v \circ u$ sont diagonalisables.

VIII Trigonalisation

Théorème : *(admis)*

u est trigonalisable si et seulement si le polynôme caractéristique de u est scindé.

Corollaire : *(admis)*

Si $K = \mathbb{C}$, tout endomorphisme de E est trigonalisable.

Exemple : Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ et u tel que $Mat_B(u) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ dans la base canonique B de $\mathbb{R}^2$.
On a $P_u(\lambda) = \lambda^2 - 2\cos\theta\lambda + 1$. Ce polynôme n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ car ses racines sont $\cos\theta \pm i\sin\theta$. Donc u n'est pas trigonalisable sur $\mathbb{R}$. Cependant, P_u est scindé sur $\mathbb{C}$, donc u est trigonalisable sur $\mathbb{C}$.

IX Polynômes d'endomorphismes (et de matrices)

Soit K un corps. Soit E un K-espace vectoriel. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $P = P(X) = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ (où d est le degré de P). Soit $u \in End(E)$ un endomorphisme de E, et $u \circ u = u^2$. En particulier, on a $u \circ u \circ \ldots \circ u = u^k$ (k fois), $u^0 = Id_E$ et $u^1 = u$.

Définition : On pose $P(u) = \sum_{k=0}^{d} a_k u^k \in End(E)$. C'est un polynôme en u.
L'application $\varphi_u : \begin{smallmatrix} K[X] \to End(E) \\ P \mapsto P(u) \end{smallmatrix}$ est linéaire.
On note $\mathbb{K}[u] = Im(\varphi_u) = \{P(u) \mid P \in K[X]\}$. C'est un sous-espace vectoriel de $End(E)$.

Définition : Soit $A \in M_n(K)$. On définit de même $P(A) = a_0 I_n + a_1 A + \cdots + a_d A^d = \sum_{k=0}^{d} a_k A^k \in M_n(K)$.
L'application $\psi_A : \begin{smallmatrix} K[X] \to M_n(K) \\ P \mapsto P(A) \end{smallmatrix}$ est linéaire.

Si $A = Mat_B(u)$, alors $P(A) = Mat_B(P(u))$.
On note $\mathbb{K}[A] = Im(\psi_A) = \{P(A) \mid P \in K[X]\}$. C'est un sous-espace vectoriel de $M_n(K)$.

Proposition : Stabilité du noyau *(admis)*

Le sous-espace vectoriel $Ker(P(u))$ est stable par u.

Remarque : Si $u, v \in End(E)$, on a $Ker(v)$ est stable par u. Or $P(u)$ et u commutent.

Remarque : Plus généralement, pour $P, Q \in K[X]$, on a $P(u)$ et $Q(u)$ commutent.

Preuve :
Si $Q = b_0 + b_1 X + \ldots + b_e X^e$, alors $P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$ car :

$$\begin{aligned} P(u) \circ Q(u) &= \left(\sum_{k=0}^{d} a_k u^k\right) \circ \left(\sum_{l=0}^{e} b_l u^l\right) \\ &= \sum_{k=0}^{d} \sum_{l=0}^{e} a_k b_l u^{k+l} \\ &= \sum_{l=0}^{e} \sum_{k=0}^{d} b_l a_k u^{l+k} \\ &= Q(u) \circ P(u) \end{aligned}$$

□

Proposition : *(admis)*

Si $\lambda \in Sp(u)$, alors $P(\lambda) \in Sp(P(u))$.

Remarque : Il peut exister $\lambda \in K$ tq $P(\lambda) \in Sp(P(u))$ mais $\lambda \notin Sp(u)$.

Contre-Exemple : $u = id_E, P(X) = X^2 - 1, \lambda = -1$. On a $Sp(u) = \{1\}$, mais $P(-1) = 0 \in Sp(P(u))$. Mais $-1 \notin Sp(u)$.

Vocabulaire : On dit que P est un polynôme annulateur de u si $P(u) = 0_{End(E)}$.

Proposition : Sous-groupe des polynômes annulateurs *(admis)*

Considérons $Ann_{\mathbb{K}[X]}(u) = \{P \in K[X] \mid P(u) = 0\}$ l'ensemble des polynômes annulateurs de u.
C'est un sous-groupe de $(K[X], +)$.

De plus, pour $Q \in K[X]$ et $P \in Ann_{\mathbb{K}[X]}(u)$, on a $QP \in Ann_{\mathbb{K}[X]}(u)$.

Vocabulaire : On dit que $Ann_{\mathbb{K}[X]}(u)$ est un idéal de l'anneau $K[X]$. (HP)

Preuve du sous groupe :
Soient $P, Q \in Ann_{\mathbb{K}[X]}(u)$. On a :

- $P + Q \in Ann_{\mathbb{K}[X]}(u)$ car $(P + Q)(u) = P(u) + Q(u) = 0 + 0 = 0$.
- $-P \in Ann_{\mathbb{K}[X]}(u)$ car $(-P)(u) = -P(u) = -0 = 0$.
- $0 \in Ann_{\mathbb{K}[X]}(u)$ car $0(u) = 0$.

□

Preuve de la stabilité par multiplication :
Soit $P \in Ann_{\mathbb{K}[X]}(u)$ et $Q \in K[X]$. On a :

$$(QP)(u) = Q(u) \circ P(u) = Q(u) \circ 0 = 0$$

□

Proposition : Unicité du polynôme *(admis)*

Il existe un unique $P_0 \in \mathbb{K}[X]$ unitaire (i.e. de coefficient dominant $a_d = 1$) tel que $P \in Ann_{\mathbb{K}[X]}(u) \Leftrightarrow \exists Q : P = QP_0$.
En particulier, $P_0 \in Ann_{\mathbb{K}[X]}(u)$ et P_0 divise tout polynôme annulateur de u.

Alors P_0 est appelé le **polynôme minimal** de u. C'est le polynôme annulateur de u unitaire de plus petit degré.

Note de rédaction : Cette proposition gagnerait à être synthétisée et/ou divisée et améliorée en clarté.

Proposition : *(admis)*

Si λ est une valeur propre de u et $P \in Ann_{\mathbb{K}[X]}(u)$, alors $P(\lambda) = 0$.

Autrement dit, toute valeur propre de u est racine de son polynôme minimal.

Exemple : Soit u une homothétie de rapport $\lambda \in K$.
On a $P(u) = 0 \Leftrightarrow a_0 I_E + a_1 u + \ldots + a_d u^d = 0 \Leftrightarrow P(\lambda) id_E = 0 \Leftrightarrow P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (X - \lambda) | P$.
Donc le polynôme minimal de u est $P_0(X) = X - \lambda$.

Exemple : $E = \mathbb{R}^3$ $Mat_{B,C}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans les bases B, C canoniques.

$(X-1)^2$ annule u car $Mat_{B,C}(u - Id_E) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et donc $(u - Id_E)^2 = 0$.
Donc le polynôme minimal de u divise $(X-1)^2$ ou $(X-1)$.
Or $u \neq Id_E$, donc le polynôme minimal de u est $P_0(X) = (X-1)^2$.

Pour $A \in M_n(K)$, on définit de même le polynôme minimal de A.

Définition : Soient $P_1, P_2 \in K[X]$. On dit que P_1 et P_2 sont **premiers entre eux** s'il existe $Q_1, Q_2 \in K[X]$ tels que $Q_1P_1 + Q_2P_2 = 1$.

De même, pour m polynômes, on a : $P_1, P_2, \ldots, P_m$ sont premiers entre eux s'il existe $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m \in K[X]$ tels que $\sum_{i=1}^{m} Q_iP_i = 1$.
Cela entraine qu'ils n'ont pas de facteur commun non constant (i.e. de degré ≥ 1).

Définition : Soit $P_1, \ldots P_m \in K[X]$. On dit que $P_1, \ldots, P_m$ sont **premiers entre eux deux à deux** si pour tout $i \neq j$, P_i et P_j sont premiers entre eux.

Théorème : Lemme des noyaux *(admis)*

Soit $u \in End(E)$ et soient $P_1, P_2, \ldots, P_m \in K[X]$ des polynômes deux à deux premiers entre eux et tous non nuls.
Posons $P = \prod_{i=1}^{m} P_i$. Alors on a :

$$Ker\,(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^{m} Ker\,(P_i(u))$$

En particulier, si $P \in Ann_{\mathbb{K}[X]}(u)$ on a $E = \bigoplus_{i=1}^{m} Ker\,(P_i(u))$. Si π_i est la projection de E sur $Ker\,(P_i(u))$ parallèlement aux autres $Ker\,(P_j(u))$ ($j \neq i$), alors $\pi_i \in \mathbb{K}[u]$ et $\sum_{i=1}^{m} \pi_i = Id_E$.

Théorème : *(admis)*

u est diagonalisable ssi. u admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.