Savoir-faire	Exercices
Calculer des probabilités conditionnelles	2,3,4,5
Appliquer le procédé de Gram-Schmidt	6,7,8,9

Remarque : L'objectif de cette semaine est de consolider les acquis en analyse et de préparer le chapitre sur les séries de fonctions, ainsi que d'avancer sur le programme de probabilités.

1 Louis Le Grand

Voici une courte sélection d'exercises issus du fameux polycopié de Louis Le Grand. Il est pertinent de les faire pour se remettre dans le bain des complexes et de la géométrie dans le plan complexe.

1. Soit $z = -\frac{4}{1+i\sqrt{3}}$. Écrire z sous forme trigonométrique puis calculer z^3.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer i^n.
3. Calculer $\sum_{k=0}^{n} i^k$.
4. Soit $a \in \mathbb{C}$. Quelle est l'image de l'ensemble $\{a + 2e^{i\theta}; \theta \in \mathbb{R}\}$?
5. Soient $a \in \mathbb{C}, \alpha \in \mathbb{R}$. Quelle est l'image de l'ensemble des nombres complexes de la forme $a + re^{i\alpha}$ lorsque r décrit $\mathbb{R}$? $\mathbb{R}_+$? $[0, R]$ où $R \in \mathbb{R}_+$ est fixé ?

2 Un peu de limites embêtantes

Déterminer la limite éventuelle des suites suivantes et justifier soigneusement.

$$u_n = \sin\left(\tfrac{1}{n}\right) \qquad v_n = n\left(\cos\left(\tfrac{1}{n}\right) - 1\right) \qquad w_n = \frac{\sin n}{n} \qquad x_n = \frac{n}{n+1}$$

$$y_n = (-1)^n \sin\left(\tfrac{1}{n}\right) \qquad z_n = n\left(\sqrt{1 + \tfrac{1}{n}} - 1\right) \qquad t_n = n^2\left(\ln\left(1 + \tfrac{1}{n}\right) - \tfrac{1}{n}\right) \qquad a_n = \frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{1 + \frac{1}{n^2}}$$

$$b_n = n\tan\left(\tfrac{1}{n}\right)$$

3 L'exo-type sur les séries

Pour tout entier $n \geq 1$, soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f_n(x) = \frac{1}{n^2 + x^2}.$$

1. Montrer que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. On note s la somme de cette série.
2. Montrer que s est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que pour tout réel $a > 0$, la série $\sum f_n'$ converge normalement sur $[-a, a]$.
4. Montrer que s est dérivable sur $\mathbb{R}$.

4 Vade retro

On considère pour tout entier $n \geq 1$ la fonction $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f_n(x) = n \cdot \sin \frac{nx}{1 + n^2}$$

1. Étudier la converge simple de la suite $(f_n)_{n \geq 1}$.
2. Montrer que la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$.
3. En utilisant l'inégalité $|sin(y) - y| \leq \frac{|y|^3}{6}$ pour $y \in \mathbb{R}$, montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$

$$|f_n(x) - x| \leq \frac{n^4 |x|^3}{(1 + n^2)^3} + |x| \cdot |\frac{n^2}{1 + n^2} - 1|$$

4. En déduire que la convergence est uniforme sur $[-t, t]$ pour tout $t > 0$.

5 Ballons colorés

On a un sac contenant **10 ballons** : 4 rouges et 6 bleus. On tire **3 ballons sans remise**. On définit la variable aléatoire W comme le nombre de ballons rouges tirés.

1. W suit-elle une loi binomiale ? Pourquoi ?
2. Quelle loi décrit W ? Calculer la probabilité que $W = 2$.

6 Crêpes surprises

Régis prépare une pile de 20 crêpes. Sur chaque crêpe, on met au hasard une garniture choisie parmi trois options : **sucre, chocolat, confiture**, avec une probabilité égale pour chaque garniture. On définit la variable aléatoire X comme suit :

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si la crêpe choisie au hasard est au chocolat} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer l'ensemble des valeurs possibles de X.
2. Quelle est la probabilité que $X = 1$?
3. Quelle loi suit X ?
4. Si on choisit deux crêpes au hasard, peut-on définir une nouvelle variable aléatoire Y correspondant au nombre de crêpes au chocolat parmi les deux ? Si oui, quelles seraient ses valeurs possibles ?

7 La fabrique à exams

Un professeur de mathématiques prépare un contrôle de 5 questions. Pour chaque question, il existe deux niveaux de difficulté : **facile** ou **très difficile**. On suppose que la probabilité qu'une question soit très difficile est de 0,6 et que les questions sont indépendantes. On définit la variable aléatoire Z comme le nombre de questions très difficiles dans le contrôle.

1. Déterminer l'ensemble des valeurs possibles de Z.
2. Quelle loi suit Z ? Justifier.
3. Calculer la probabilité que le contrôle contienne exactement 3 questions très difficiles.
4. Calculer la probabilité que toutes les questions soient très difficiles.

8 TD4.10

Soit R^4 muni du produit scalaire usuel. On se donne $u = (2, 1, 1, -1)$ et $v = (1, 1, 3, -1)$. On pose $F = Vect(u, v)$.

1. Déterminer une base orthonormale de F
2. Donner un système d'équations cartésiennes de $F^\perp$
3. Donner la projection de $w = (1, 2, -2, 2)$ sur F et sur $F^\perp$
4. En déduire la distance de w à F

9 TD4.11

Construire une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ dont deux vecteurs appartiennent au plan d'équation $x + y + z = 0$.