

# Chapitre 1 : Réduction des endomorphismes et matrices diagonalisables

Dans toute ce chapitre, on notera  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, avec  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ .

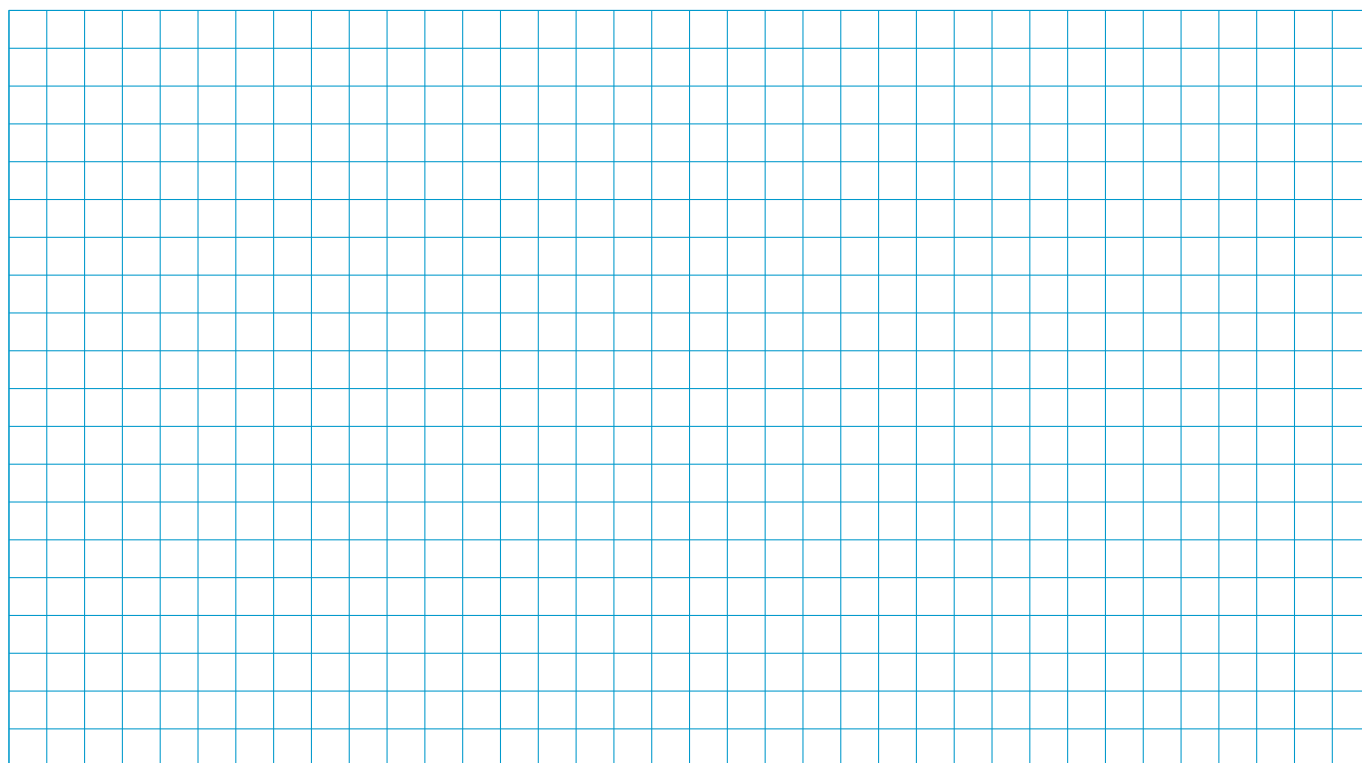
## I Sous-espaces stables par un endomorphisme

**Définition :** Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ , et soit  $F \subset E$  un sous-espace vectoriel. On dit que  $F$  est **stable** par  $f$  si  $f(F) \subset F$ , i.e.  $\forall x \in F, f(x) \in F$ .

### **Remarque :**

- $0_E$  est stable par  $f$ .
- $E$  est stable par  $f$ .
- $\ker(f)$  et  $\text{Im}(f)$  sont stables par  $f$ .

**Preuve:**



## II Éléments propres d'un endomorphisme

**Vocabulaire :** On appelle **élément propre** de  $f$  ses valeurs propres, vecteurs propres et sous-espaces propres.

## A Valeur propre

**Définition :** Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ , et soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

$\lambda$  est une **valeur propre** de  $f$  si  $\exists x \in E \setminus \{0_E\} : f(x) = \lambda x$ .

On dit que  $x$  est un **vecteur propre** de  $f$  associé à  $\lambda$ .

L'ensemble des valeurs propres de  $f$  est noté  $Sp(f)$  et appelé **spectre** de  $f$ .

## B Sous-espace propre

**Définition :** Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ , et soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

On note  $E_\lambda(f)$  le **sous-espace propre** de  $f$  associé à  $\lambda$ , défini par :

$$E_\lambda(f) = \ker(f - \lambda Id_E) = \{x \in E : f(x) = \lambda x\}.$$

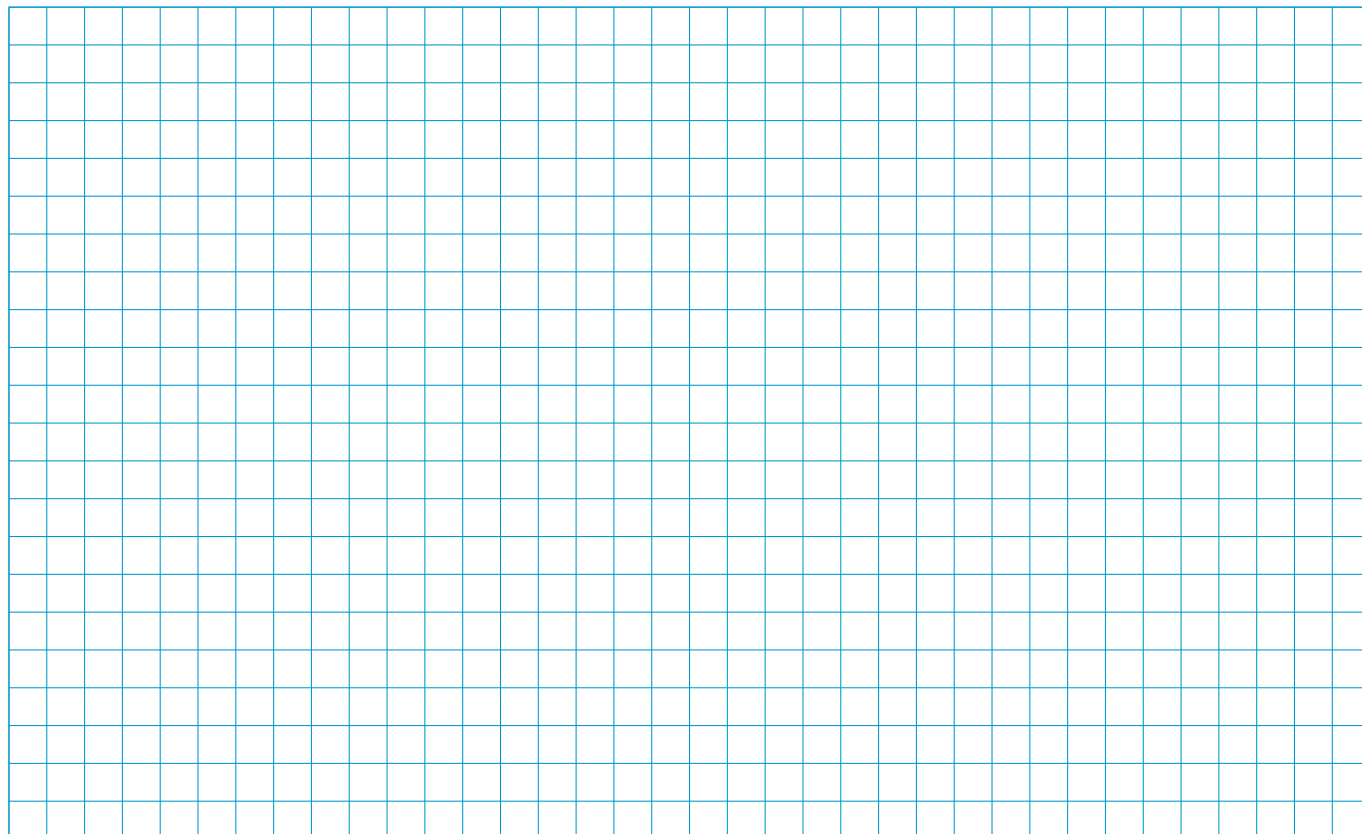
$E_\lambda(f)$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

**Remarque :**  $E_\lambda(f)$  est l'ensemble des vecteurs propres de  $f$  associés à  $\lambda$ .

**Remarque :**

- $\lambda \in Sp(f) \iff f \text{ n'est pas injective} \iff \det(E_\lambda(f)) \neq 0$ .
- $0_E \in Sp(f) \iff \det(f) = 0$ .

**Preuve:**



### III Polynôme caractéristique

**Définition :** On appelle **polynôme caractéristique** d'une matrice  $A \in M_n(\mathbb{K})$  le polynôme défini par :

$$\chi_A(X) = \det(A - XId_n).$$

💡 **Exemple :** Soit  $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & 0 \\ -8 & 0 & -7 \end{pmatrix}$ . Déterminons son polynôme caractéristique.

$$\chi_A(X) = \det(A - XId_3) = \det \left( \begin{pmatrix} 5-X & 0 & 4 \\ 4 & 1-X & 0 \\ -8 & 0 & -7-X \end{pmatrix} \right)$$

En développant le déterminant suivant la deuxième colonne, on obtient :

$$\chi_A(X) = (1-X) \det \left( \begin{pmatrix} 5-X & 4 \\ -8 & -7-X \end{pmatrix} \right) = (1-X)((5-X)(-7-X) + 32).$$

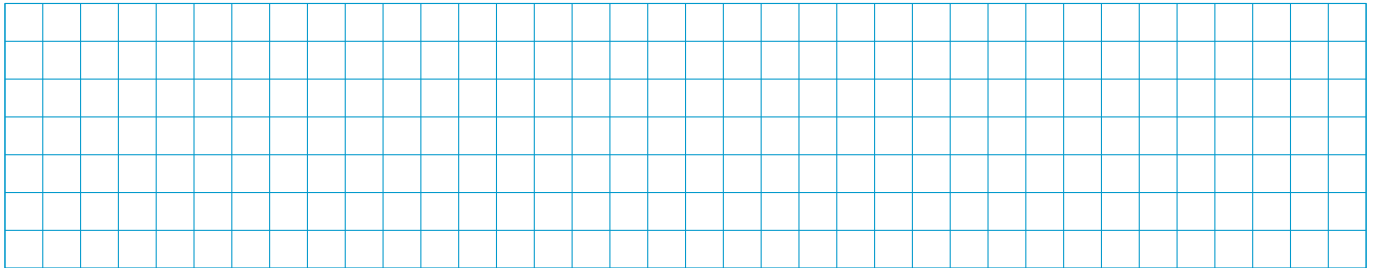
En factorisant ce polynôme, on trouve :

$$\chi_A(X) = -(X-1)^2(X+3)$$

📌 **Remarque :**  $\lambda \in Sp(A) \iff \det(A - \lambda Id_E) = 0 \iff \chi_A(\lambda) = 0$ .

Donc :  $Sp(A) = \{\lambda \in \mathbb{K} : \chi_A(\lambda) = 0\}$ .

**Preuve:**



💡 **Exemple :** (suite de l'exemple précédent)

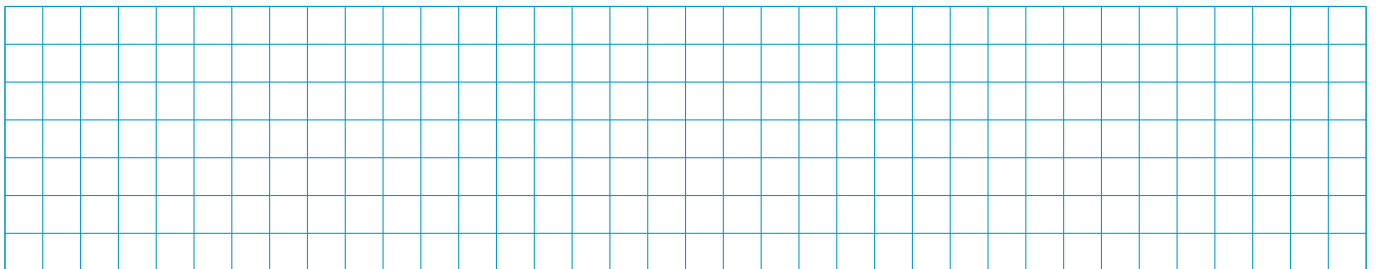
On a trouvé le polynôme caractéristique de  $A$  :  $\chi_A(X) = -(X-1)^2(X+3)$ .

Donc les valeurs propres de  $A$  sont  $\lambda_1 = 1$  (de multiplicité 2) et  $\lambda_2 = -3$ .

Alors, on a :  $Sp(A) = \{1, -3\}$ .

📌 **Remarque :**  $A \in M_2(\mathbb{K}) \implies Sp(A) = \chi_A(X) = X^2 - Tr(A)X + \det(A)$ .

**Preuve:**



## IV Matrice diagonalisable

**Définition :** Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$ . On dit que  $A$  est **diagonalisable** si  $A$  est **semblable** à une matrice diagonale.

Autrement dit,  $A$  est diagonalisable si  $A = PDP^{-1}$ , où  $D$  est une matrice diagonale et  $P$  est une matrice inversible.

**i Remarque :**

- Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  les valeurs propres de  $A$ , et soient  $E_{\lambda_i}(A)$  les sous-espaces propres associés à  $\lambda_i$ .  
 $A$  diagonalisable  $\iff \dim(E_{\lambda_i}(A)) = \text{ordre de multiplicité de } \lambda_i$ .  
*e.g.*  $\lambda_i$  est une valeur propre simple, alors  $\dim(E_{\lambda_i}(A)) = 1$ .
- $A$  diagonalisable  $\iff E = \bigoplus_{i=1}^k E_{\lambda_i}(A)$ . (*i.e.*  $E$  est la somme directe des sous-espaces propres associés aux valeurs propres de  $A$ )

**💡 Exemple :** (suite de l'exemple précédent)

On a trouvé que  $Sp(A) = \{1, -3\}$  et  $\chi_A(X) = -(X-1)^2(X+3)$ .

Alors,  $A$  est diagonalisable si :

$$\begin{cases} \dim(E_1(A)) = 2 \\ \dim(E_{-3}(A)) = 1 \end{cases}$$

On a aussi que  $A$  est diagonalisable si  $\mathbb{R}^3 = E_1(A) \oplus E_{-3}(A)$ .