

# Chapitre 6.2 : Sous-espaces caractéristiques

Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ .

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme de  $E$ .

Soit  $\lambda \in K$  une valeur propre de  $u$ .

**Rappel :** On appelle  $m_a(\lambda)$  la multiplicité algébrique de  $\lambda$ , c'est-à-dire la multiplicité de  $\lambda$  comme racine du polynôme caractéristique de  $u$ .

**Rappel :** On appelle  $m_g(\lambda)$  la multiplicité géométrique de  $\lambda$ , c'est-à-dire la dimension du sous-espace propre  $E_\lambda = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)$ .

**Définition :** On pose  $N_\lambda = \text{Ker}((u - \lambda \text{Id}_E)^{m_a(\lambda)})$ .  
Il s'agit du **sous-espace caractéristique** de  $u$  associé à la valeur propre  $\lambda$ .

**Théorème :** (admis)

On suppose  $P_u$  scindé (i.e. trigonalisable).

Alors :

1.  $N_\lambda$  est un sev stable par  $u$  de dimension  $m_a(\lambda)$ .
2.  $E_\lambda \subset N_\lambda$ .
3.  $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} N_\lambda$ .
4. Soit  $\pi_\lambda$  la projection de  $E$  sur  $N_\lambda$  parallèlement à  $\bigoplus_{\mu \in Sp(u), \mu \neq \lambda} N_\mu$ .  
Alors  $\pi_\lambda \in K[u]$ .
5. Si  $\lambda \neq \mu$ ,  $\pi_\lambda \circ \pi_\mu = 0$

**Exemple :**  $\text{Mat}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ . Les valeurs propres sont 1 et 2.  $P_u(X) = -(X-1)^2(X-2)$ .

Donc :

- $\lambda = 2$ ,  $m_a(2) = m_g(1) = 1$  donc  $E_2 = Ke_3 = N_2$ .
- $\lambda = 1$ ,  $m_a(1) = 2$  et  $m_g(1) = 1$  donc  $E_1 = Ke_1$  et  $N_1 = Ke_1 \oplus Ke_2$ .

**Théorème :** (admis)

$N_\lambda$  est stable par  $u$  et posons  $u_\lambda = u|_{N_\lambda}$ .

Alors :

1.  $u_\lambda$  a une seule valeur propre qui est  $\lambda$ .
2. On a  $P_{u_\lambda} = \pm(X - \lambda)^{m_a(\lambda)}$ .
3. On a  $\dim N_\lambda = m_a(\lambda)$ .
4.  $\exists B_\lambda$  une base de  $N_\lambda$  telle que  $\text{Mat}_{B_\lambda}(u_\lambda) = \lambda I_{m_a(\lambda)}$ .

**Corollaire :** (admis)

On suppose  $P_u$  scindé.

Il existe une base  $B$  de trigonalisation de  $u$  telle que la  $\text{Mat}_B(u)$  est de la forme suivante :

$$\text{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} A_{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_{\lambda_k} \end{pmatrix},$$

$$\text{avec } A_{\lambda_i} = \begin{pmatrix} \lambda_i & * & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_i & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

**Exemple :**  $E = \mathbb{R}^3$  et  $u$  tel que  $\text{Mat}(u) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 6 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ .

$$P_u(X) = -(X-1)^3.$$

Donc 1 est la seule valeur propre de  $u$  avec  $m_a(1) = 3$ .

Or  $u$  n'est pas diagonalisable car si  $u$  diagonalisable dans  $B$ , on a  $\text{Mat}_B(u) = I_3$ . Donc  $u = \text{Id}_E$ . Absurde.

$u$  est scindé, donc trigonalisable.

## I Nilpotence

**Définition :** On dit que  $u \in \text{End}(E)$  est **nilpotent** s'il existe  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $u^k = 0_{\text{End}(E)}$ .

**Vocabulaire :** On appelle l'indice de nilpotence le plus petit entier  $k$  tel que  $u^k = 0$ .

**Proposition :** (admis)

L'endomorphisme  $u$  est nilpotent si et seulement si  $P_u$  est scindé avec pour seule racine 0 (c'est à dire que sa seule valeur propre est 0).

En particulier,  $u$  est trigonalisable strictement avec des 0 sur la diagonale. On a que l'indice de nilpotence de  $u$  est inférieur ou égal à  $\dim(E)$ .

**Corollaire :** (admis)

$u$  nilpotent et diagonalisable  $\Rightarrow u = 0_{\text{End}(E)}$ .

**Proposition :** (admis)

Si  $u$  est nilpotent d'indice  $k$  et  $x \in E$  avec  $u^{k-1}(x) \neq 0$ , alors la famille  $\{x, u(x), u^2(x), \dots, u^{k-1}(x)\}$  est libre. Ainsi, on a  $k \leq \dim(E)$ .

**Proposition :** (admis)

Si  $u$  est nilpotent d'indice  $n = \dim(E)$ , alors il existe une base  $B$  de  $E$  telle que :

$$\text{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Remarque :** La matrice ci-dessus est un cas particulier de forme de Jordan.

**Remarque :** Comment trouver une base de trigonalisation de  $u$  lorsque  $u$  est nilpotent d'indice  $k \leq n = \dim(E)$  ?

On a  $\text{Ker}(u) \subset \text{Ker}(u^2) \subset \cdots \subset \text{Ker}(u^{k-1}) \subsetneq \text{Ker}(u^k) = E$ .

On considère  $B_1$  une base de  $\text{Ker}(u)$ , que l'on complète en une base  $B_2$  de  $\text{Ker}(u^2)$ , que l'on complète en une base  $B_3$  de  $\text{Ker}(u^3)$ , et ainsi de suite jusqu'à obtenir une base  $B_k$  de  $E$ .

On a ainsi construit une base  $B_k$  de  $E$  telle que  $\text{Mat}_{B_k}(u)$  est triangulaire supérieure avec des 0 sur la diagonale.

**Proposition : Combinaison linéaire** (admis)

Soient  $u, v \in \text{End}(E)$  deux endomorphismes nilpotents qui commutent.  
Alors toute combinaison linéaire  $au + bv$  avec  $a, b \in K$  est nilpotente.

## II Décomposition de Jordan Chévalley (ou Dunford)

**Théorème :** (admis)

Soit  $u \in \text{End}(E)$  tel que  $P_u$  est scindé.

Il existe un unique  $(d, e) \in \text{End}(E)^2$  tel que :

- $u = d + e$ ,
- $d$  est diagonalisable,
- $e$  est nilpotent,
- $d$  et  $e$  commutent.
- $d, e \in K[u]$  (polynômes en  $u$ ).

C'est la **décomposition de Jordan Chévalley** (ou Dunford) de  $u$ .

**Définition :** Soit  $A \in M_n(K)$ .


On dit que  $A$  est nilpotente si il existe  $k \geq 1$  tel que  $A^k = 0$  (matrice nulle).

**Théorème : Décomposition de Jordan Chévalley matricielle** (*admis*)

Soit  $A \in M_n(K)$  tel que son polynôme caractéristique est scindé.

Il existe un unique couple  $(D, N) \in M_n(K)^2$  tel que :

- $A = D + N$ ,
- $D$  est diagonalisable,
- $N$  est nilpotente,
- $D$  et  $N$  commutent,
- $D, N$  sont des polynômes en  $A$ .

 **Exemple :** Soit  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ .

On calcule facilement que :

- $P_A(X) = -(X - 2)^2(X - 1)$ ,
- $m_a(2) = 2, m_g(2) = 1$ ,
- $m_a(1) = m_g(1) = 1$ .
- $E_2 = \text{Ker}(A - 2I_3) = \text{Vect}\{(1, 1, 0)^T\}$ ,
- $N_1 = E_1 = \text{Ker}(A - I_3) = \text{Vect}\{(0, 1, 1)^T\}$ .
- $N_2 = \text{Ker}((A - 2I_3)^2) = \text{Vect}\{(1, 1, 0)^T, (0, 0, 1)^T\}$ .

On a donc  $N_1 + N_2 = \mathbb{R}^3$ . (car  $\dim(N_1) + \dim(N_2) = 3$  et  $N_1 \cap N_2 = \{0\}$ ).

Donc  $N_1 \oplus N_2 = \mathbb{R}^3$ .

Par le théorème de Jordan Chévalley, il existe un unique  $(D, N)$  tel que  $A = D + N$  avec  $D$  diagonalisable,  $N$  nilpotente et  $DN = ND$ .

Or :

- $d(e_1) = 2e_1 + e_2 + e_3$
- $d(e_2) = e_2 - e_2$
- $d(e_3) = 2e_3$

Donc  $D = \text{Mat}_{can} d = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $N = A - D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

De plus,  $N^2 = 0_3$ . Donc  $N$  est nilpotente d'indice 2. Donc :  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  : décomposition de Jordan Chévalley de  $A$ .

**Pour calculer  $A^n$  :**

On utilise le fait que  $D$  et  $N$  commutent, le binôme de Newton donc et la nilpotence de  $N$  :

$$A^n = (D + N)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = D^n + nD^{n-1}N$$

(tous les termes avec  $k \geq 2$  sont nuls car  $N^2 = 0$ ).