Chapitre 1 : Dénombrement

I Ensembles et cardinalité

A Ensembles finis et cardinal

Définition : Soit E un ensemble. On dit que E est **fini** s'il existe un entier naturel $n \in \mathbb{N}$ et une bijection entre E et l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$.
Si $n = 0$, on dit que E est vide et on note $E = \emptyset$.

On appelle n le **cardinal** de E et on le note $Card(E)$.

Lemme : Égalité des cardinaux

Soient A et B deux ensembles finis non vides. Alors, on a $Card(A) = Card(B)$ si et seulement si il existe une bijection entre A et B.

Démonstration :
Soit $n \geq 1$ tq $Card(A) = n$.
On a au tableau le dessin d'une bijection entre A et $S_n = \{1, 2, \ldots, n\}$.
$\Rightarrow \exists f : A \to S_n$ bijective.
Si $Card(B) = n$, alors $\exists g : B \to S_n$ bijective.
Donc, $g^{-1} : S_n \to B$ est bijective.
Considérons $g^{-1} \circ f : A \to B$. C'est une bijection entre A et B par composition de bijections.
Donc, $Card(A) = Card(B)$.

Application : Montrer que si A et B sont en bijection, alors $Card(A) = Card(B)$.

B Produit cartésien et n-uplets

Définition : Soient E et F deux ensembles non vides. Alors on appelle le **produit cartésien** de E et F et on note $E \times F := \{(x, y) \mid x \in E, y \in F\}$.

Exemple : Soient $E = \{1, 2\}$ et $F = \{5, 6, 7\}$.
Alors, $E \times F = \{(1, 5), (1, 6), (1, 7), (2, 5), (2, 6), (2, 7)\}$.

Proposition : Principe multiplicatif

Soient A et B deux ensembles finis non vides. Alors, $A \times B$ est fini et on a :

$$Card(A \times B) = Card(A) \times Card(B)$$

.
En règle générale, si $A_1, A_2, \ldots, A_k$ sont des ensembles finis non vides, alors :

$$Card(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k) = \prod_{i=1}^{k} Card(A_i)$$

Démonstration :
On démontre cette proposition pour le cas $k = 2$.
Soient A et B deux ensembles finis non vides.
Soient $n = Card(A)$ et $m = Card(B)$.

On pose $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ et $B = \{1, 2, \ldots, m\}$. (ça revient au même par le lemme précédent)
On peut dresser le tableau suivant pour représenter $A \times B$:

	1	2	...	n
1	(1,1)	(2,1)	...	(n,1)
2	(1,2)	(2,2)	...	(n,2)
⋮	⋮	⋮	⋱	⋮
m	(1,m)	(2,m)	...	(n,m)

On remarque que le tableau contient n colonnes et m lignes.
Donc, le tableau contient $n \times m$ cases.
Chaque case correspond à un élément de $A \times B$.

On pose donc $f : A \times B \to \{1, 2, \ldots, n \times m\}$ l'application définie par $f((i, j)) = i + (j - 1) \times n$ (l'idée est de numéroter les cases de gauche à droite et de haut en bas).
On vérifie facilement que f est une bijection (strictement croissante et bien définie).
Donc, $Card(A \times B) = n \times m = Card(A) \times Card(B)$.

Définition : Soit E un ensemble non vide et $n \geq 1$ un entier naturel.
Les éléments de $E^n := \underbrace{E \times E \times \ldots \times E}_{n \text{ fois}}$ sont appelés des **n-uplets** d'éléments de E, et on les note $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ avec $\omega_i \in E$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Proposition : Cardinal des n-uplets

Soient $n, M \geq 1$ et soit E un ensemble tel que $Card(E) = M$.
On dit que le nombre de n-uplets d'éléments de E est égal à M^n, c'est-à-dire :

$$Card(E^n) = M^n$$

Exemple : L'ensemble des dates d'anniversaires des 8 étudiants du premier rang est décrit par $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_8)$ où chaque ω_i est une date parmi les 366 possibles *(années bissextiles)*.
Le nombre de configurations possibles pour les dates d'anniversaires des 8 étudiants est donc 366^8.

II Dénombrement des structures

A Arrangements et permutations

Définition : Soit E un ensemble de cardinal $M \geq 1$ et soit $0 \leq n \leq M$.
Un **arrangement** de n éléments de E est un n-uplet $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ d'éléments de E tels que tous les ω_i sont distincts.
On parle de n-uplets d'éléments distincts de E.

Vocabulaire : Quand $n = M$, on parle de **permutations** d'éléments de E *(on parle de A_M^M)*.

Exemple : Si on reprend l'exemple des dates d'anniversaires, un arrangement de 3 éléments parmi les 8 étudiants du premier rang pourrait être $(\omega_1, \omega_3, \omega_5)$ où les dates d'anniversaires des étudiants 1, 3 et 5 sont distinctes.

Proposition : Cardinal des arrangements

Soient E un ensemble de cardinal $M \geq 1$ et soit $0 \leq n \leq M$.
Le nombre d'arrangements de n éléments de E est donné par la formule :

$$A_M^n = \frac{M!}{(M-n)!}$$

Dans le cas d'une permutation, on a $A_M^M = M!$ *(application de la formule avec $n = M$)*.

Démonstration :
Soit E un ensemble de cardinal $M \geq 1$ et soit $0 \leq n \leq M$.
On cherche à compter le nombre d'arrangements de n éléments de E.

Soit $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ un arrangement de n éléments de E.
- Pour choisir ω_1, on a M possibilités.
- Pour choisir ω_2, on a $M - 1$ possibilités (car ω_2 doit être distinct de ω_1).

$\vdots$

- Pour choisir ω_n, on a $M - n + 1$ possibilités (car ω_n doit être distinct de tous les ω_i précédents).

Par le principe multiplicatif, le nombre total d'arrangements de n éléments de E est donc :

$$A_M^n = M \times (M-1) \times (M-2) \times \ldots \times (M-n+1) = \frac{M!}{(M-n)!}$$

Rappel : On rappelle que $k! = \prod_{i=1}^{k} i$ pour tout $k \geq 1$ et $0! = 1$.

Exemple : Si on reprend l'exemple des dates d'anniversaires, le nombre d'arrangements de 3 éléments parmi les 8 étudiants du premier rang est donné par :

$$A_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = 8 \times 7 \times 6 = 336$$

Proposition : Dénombrement d'applications

Soient A et B deux ensembles finis tels que $Card(A) = n$ et $Card(B) = M$ (avec $n, M \geq 1$).
Alors :

1. L'ensemble $\mathcal{F}(A, B)$ des applications de A dans B est fini et on a : $Card(\mathcal{F}(A, B)) = M^n$.
2. Si $n \leq M$, le nombre de fonctions injectives de A dans B est donné par : A_M^n.
3. Si $n = M$, le nombre de fonctions bijectives de A dans B est donné par : $A_M^M = M!$.

Démonstration :
Soient A et B deux ensembles finis tels que $Card(A) = n$ et $Card(B) = M$ (avec $n, M \geq 1$).

1. Soit $f \in \mathcal{F}(A, B)$.
   On peut représenter f par un n-uplet $(f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n))$ d'éléments de B où $a_i \in A$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
   Chaque $f(a_i)$ peut prendre n'importe quelle valeur dans B, donc on a M possibilités pour chaque $f(a_i)$.
   Par le principe multiplicatif, le nombre total de fonctions de A dans B est donc : M^n. *Réciproquement, chaque n-uplet d'éléments de B correspond à une fonction de A dans B.*

2. Toute fonction injective correspond à un arrangement de n éléments de B (car les images des éléments de A doivent être distinctes).

3. *Laissée en exercice.*

Rappel : Soient X, Y deux ensembles. Soit $f : X \to Y$. $\forall A \subset Y$ $f^{-1}(A) = \{x \in X \mid f(x) \in A\}$ est l'**image réciproque** de A par f.

Remarque : $f^{-1}(A)$ peut être $\emptyset$, même si $A \neq \emptyset$.

Proposition : Lemme des bergers

Soit X et Y des ensembles finis et $f : X \to Y$ une application.
On suppose que $Card(f^{-1}(\{y\})) = k$ où $k \in \mathbb{N}^*$ pour tout $y \in f(X)$.

Alors $Card(Y) = \frac{Card(X)}{k}$.

Exemple : C'est l'idée du berger qui compte ses moutons. Si chaque mouton a 4 pattes, en comptant le nombre de pattes total et en divisant par 4, on obtient le nombre de moutons.

Démonstration :
$X_i = f^{-1}(\{y_i\})$.
$X = \bigcup_{y_i \in f(X)} X_i$ et les X_i sont disjoints.
Donc $Card(X) = \sum_{i=1}^{n} Card(X_i)$.
En effet, si $z_1 \in f^{-1}(\{y_1\}) \Rightarrow z_1 \notin f^{-1}(\{y_j\})$ pour $j \neq 1$.
Donc $X_i \cap X_j = \emptyset$ pour $i \neq j$.
$\forall x \in X$, $\exists i : f(x) = y_i$ par définition de l'image.
Donc $X = \bigcup_{i=1}^{n} X_i$.
Or $Card(X_i) = K$ donc $Card(X) = \sum_{i=1}^{n} k = n \times k$ où $n = Card(f(X))$.
Donc $n = \frac{Card(X)}{k}$.

Exemple : Prenons le mot "Ensemble". On a 8 lettres, dont 3 "e" identiques.
Le nombre de façons de réarranger les lettres du mot "Ensemble" est donc : $\frac{8!}{3!} = 6720$.

B Combinaisons

Définition : Soient E un ensemble fini de cardinal N et $0 \leq n \leq N$.
Un sous-ensemble à n éléments de E est appelé une **combinaison** de n éléments de E.

Elle est donnée $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ où les ω_i sont distincts et non ordonnés.

Proposition :

Le nombre total des combinaisons à n éléments de E est donné par :

$$C_N^n = \frac{N!}{n!(N-n)!} = \frac{1}{n!} A_N^n = \binom{N}{n}$$

Démonstration :
$X = \{$arrangements de n éléments de E$\}$.
$Y = \{$combinaisons de n éléments de E$\}$.
Soit $f \colon X \to Y$ l'application telle que $f((\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)) = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$.
Donc $Card(f^{-1}(\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\})) = n!$ car il y a $n!$ façons d'ordonner les éléments d'une combinaison.
Donc $Card(Y) = \frac{Card(X)}{n!} = \frac{A_N^n}{n!} = \frac{N!}{n!(N-n)!}$.

C Formules de dénombrement

Proposition :

1. Soient A et B tq $A \cap B = \emptyset, A, B$ finis.
   $\Rightarrow Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B)$.
2. Soient A, B finis.
   $\Rightarrow Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B)$.

Démonstration :

1. Exercice : si $n = Card(A)$ et $m = Card(B)$.
   Idée montrer $A \cup B$ est en bijection avec $\{1, \dots, n, \dots, n+m\}$.
2. cf. Laurent.

Formulaire : Cas d'utilisation des formules de dénombrement

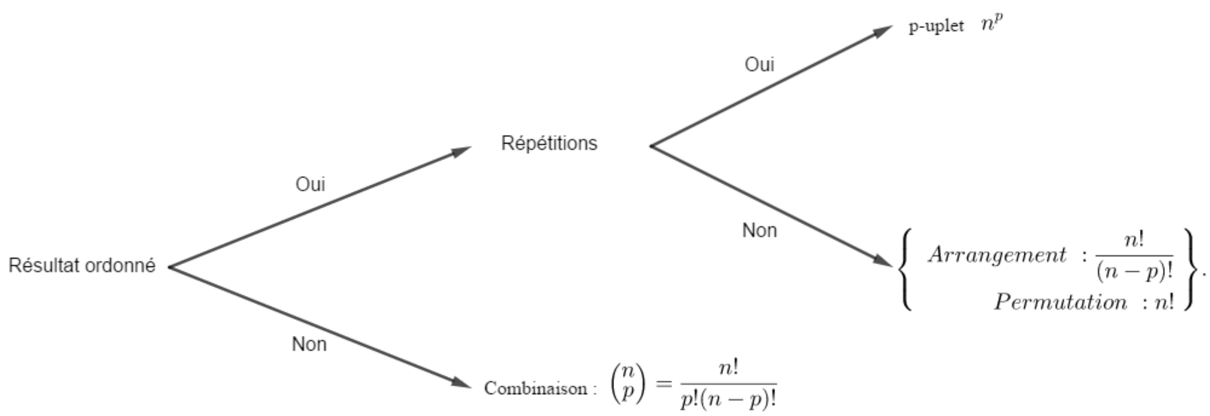

Figure 1: Arbre décisionnel illustrant les cas d'utilisation des formules de dénombrement