

Chapitre 3 : Intégrales impropres

✗ **Attention** ✗ Tous les exemples de calculs d'intégrales dans ce chapitre sont à connaître par cœur (il s'agit d'intégrales de référence), et peuvent être utilisés dans des exercices.

I Généralités sur les intégrales impropres

A Sur un intervalle du type $[a, +\infty[$, $a \in \mathbb{R}$

Définition : Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} une fonction continue.

On dit que l'intégrale impropre (ou généralisée) au voisinage de $+\infty$ converge (ou existe) si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt$ existe et est finie.

Dans ce cas, on note: $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ l'intégrale impropre. Si une telle limite n'existe pas, on dit que l'intégrale diverge.

❗ **Remarque :** On utilisera la notation $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ pour l'intégrale impropre qui converge ou diverge (on précise toujours si elle converge ou diverge).

Propriété :

Supposons que $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge.

Alors, $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_A^{+\infty} f(t) dt = 0$ converge. C'est le reste de l'intégrale impropre.

Preuve:

Soit $x > A > a$.

On a : $\int_a^x f(t) dt = \int_a^A f(t) dt + \int_A^x f(t) dt$.

En faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient : $\int_a^{+\infty} f(t) dt = \int_a^A f(t) dt + \int_A^{+\infty} f(t) dt$.

On passe à la limite sur A , $A \rightarrow +\infty$ et on obtient :

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt = \int_a^{+\infty} f(t) dt + \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_A^{+\infty} f(t) dt.$$

Donc $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_A^{+\infty} f(t) dt = 0$ □.

❗ **Remarque :** Si on continue f continue de $] -\infty, a]$ dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} , on peut définir l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^a f(t) dt$ par $\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^a f(t) dt$.

💡 **Exemple :** $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$ converge-t-elle?

1. D'abord, $t \mapsto \frac{1}{t}$ est continue sur $[1, +\infty[$.

2. Soit $x > 1$, $\int_1^x \frac{1}{t} dt = [\ln(t)]_1^x = \ln(x)$.

Donc, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{1}{t} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$.

Donc $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$ diverge.

💡 **Exemple :** $\int_0^{+\infty} \cos(t) dt$ converge-t-elle?

1. D'abord, $t \mapsto \cos(t)$ est continue sur $[0, +\infty[$.

2. Soit $x > 0$, $\int_0^x \cos(t) dt = [\sin(t)]_0^x = \sin(x)$.

Donc, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \cos(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(x)$ n'existe pas.

Donc $\int_0^{+\infty} \cos(t) dt$ diverge.

💡 **Exemple :** $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge-t-elle? ($\alpha \in \mathbb{R}$)

1. D'abord, $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est continue sur $[0, +\infty[$ pour $\alpha > 0$.

2. Soit $x > 0$, $\int_0^x \frac{1}{t^\alpha} dt = \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_0^x = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.

Donc, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{1}{t^\alpha} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.


- Si $\alpha < 1$, alors $1 - \alpha > 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} = +\infty$.
- Si $\alpha = 1$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ est indéfini.
- Si $\alpha > 1$, alors $1 - \alpha < 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} = 0$.

Donc $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ **converge si et seulement si** $\alpha > 1$.

Proposition : Convergence des intégrales de Riemann

Les intégrales de la forme $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ sont appelées des intégrales de Riemann et convergent si et seulement si $\alpha > 1$, et on a :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{si } \alpha > 1 \\ \text{indéterminée} & \text{si } \alpha = 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha < 1 \end{cases}$$

 **Exemple :** $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ converge-t-elle?

1. D'abord, $t \mapsto e^{-\alpha t}$ est continue sur $[0, +\infty[$ pour $\alpha > 0$.


2. Soit $x > 0$, $\int_0^x e^{-\alpha t} dt = \left[-\frac{e^{-\alpha t}}{\alpha} \right]_0^x = \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha x})$.

La convergence de $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ est la même que $\frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha x})$, quand $x \rightarrow +\infty$.

Donc, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^{-\alpha t} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha x}) = \frac{1}{\alpha}$.

Donc $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ **converge si, et seulement si, $\alpha > 0$, et vaut $\frac{1}{\alpha}$.**

✗ Attention ✗ Si $\alpha \leq 0$, l'intégrale diverge.

 **Vocabulaire :** La nature de l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ est la convergence ou la divergence de cette intégrale.