Savoir-faire	Exercices
Utiliser les théorèmes sur la convergence des séries des dérivées	2,3
Dénombrer et calculer des probabilités	4,5,6,7

1 TD3.5

Pour tout entier $n \geq 1$, soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f_n(x) = \frac{1}{n^2 + x^2}.$$

1. Montrer que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. On note s la somme de cette série.
2. Montrer que s est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que pour tout réel $a > 0$, la série $\sum f_n'$ converge normalement sur $[-a, a]$.
4. Montrer que s est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2 TD3.7

Soit $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \sin(nx)}{n}.$$

1. Montrer que f est de classe C^1 sur $]-1, 1[$.
2. Calculer $f'(x)$ et en déduire que :

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x \sin x}{1 - x \cos x}\right).$$

3 TD3.2b

Étudier la convergence de $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n+n^3x^2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

4 TD2.11 : Supplémentaire d'hyperplans

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et soit ϕ une forme linéaire non nulle sur E. Montrer que pour tout $u \in E \setminus \ker(\phi)$, $\ker(\phi)$ et $\mathrm{Vect}(u)$ sont supplémentaires dans E.

5 TD1.10

On choisit un nombre au hasard parmi les entiers entre 1 et 100. Quel est l'espace probabilisé suggéré par cet énoncé ?

6 TD1.19

Une urne contient 4 boules blanches et 6 boules noires. On tire au hasard successivement 3 boules sans remise.

1. Définir un espace de probabilité $(\Omega, \mathbb{P})$ correspondant à cette expérience.
2. Quelle est la probabilité d'obtenir les 3 boules blanches ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule noire au 2ème tirage ?

7 Paradoxe des anniversaires

On considère un groupe de n personnes prises au hasard dans la population. Quelle est la probabilité qu'au moins deux d'entre elles aient leur anniversaire le même jour ? Pour simplifier on pourra considérer que toutes les années ont 365 jours.

8 TD1.14

Pour chacune des expériences aléatoires suivantes, proposer un espace probabilisé adéquat :

1. On jette une pièce de monnaie 10 fois de suite en s'intéressant à l'apparition à chaque jet de pile (P) ou face (F).
2. On distribue à un joueur 13 cartes d'un jeu de 52 cartes correctement battues.
3. On joue à pile ou face jusqu'à obtenir face

Il conviendra également d'apprendre le reste du cours, en particulier :

- *le lemme d'Abel (et le théorème qui s'ensuit)*
- *le cours sur les espaces euclidiens*

9 Logique propositionnelle (CAPES sujet 0)

On désigne par $\mathcal{F}$ un ensemble de fonctions définies sur $\mathbb{R}$. On donne deux assertions P et Q :

$$(P) : \forall f \in \mathcal{F}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$$

$$(Q) : \exists x \in \mathbb{R}, \forall f \in \mathcal{F}, f(x) = 0$$

Ces deux assertions sont-elles équivalentes ?

10 Polynômes (CAPES sujet 0)

On désigne par $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes d'une variable X à coefficients réels. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier votre réponse.

1. Tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ sans racine réelle est irréductible.
2. Le polynôme $P = X^3 + 2X^2 + X$ est le polynôme caractéristique d'une matrice carrée inversible à coefficients réels.

11 Calcul intégral de Bibm@th

Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2} dt \quad J = \int_0^1 x(\arctan x)^2 dx \quad K = \int_0^1 \frac{x \ln x}{(x^2+1)^2} dx$$