

Chapitre 2 : Séries numériques

I Séries et sommes d'une série

Définition : Soit (u_n) une suite dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Pour tout $N \in \mathbb{N}$ on pose $S_N = \sum_{n=0}^N u_n \in \mathbb{K}$.

La suite $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$ est appelée la **série** de terme général u_n et se note $\sum_{n \geq 0} u_n$.
Les S_N sont appelées les **sommes partielles** de la série.

Vocabulaire : On dit que (S_N) est la suite des sommes partielles de la série.

Remarque : (S_N) correspond aux $N + 1$ premiers termes de la suite.

A Correspondance suite - série

Raisonnement : Par définition une série est une suite. Expliquons comment une suite peut-être vue comme une série.

Si (u_n) est une suite, considérons la série de terme général $v_n = u_n - u_{n-1} \forall n \in \mathbb{N}$ (avec la convention $v_0 = u_0$).

Ainsi, $u_n = \sum_{k=0}^n v_k$.

Remarque : Cependant la série associée à une suite (u_n) va s'étudier en tant que telle (que série) grâce à u_n .

B Opérations sur les séries

Propriété : Opérations sur les séries (admise)

Soient $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries.

Alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$:

- **Somme :** $\sum_{n \geq 0} (u_n + v_n) = \sum_{n \geq 0} u_n + \sum_{n \geq 0} v_n$ définie comme $(S_N + S'_N)$
- **Produit par un scalaire :** $\sum_{n \geq 0} \lambda u_n = \lambda \sum_{n \geq 0} u_n$ définie comme (λS_N)

Exemple : Si $u_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$, alors $\sum_{n \geq 0} u_n = 0$ est la série nulle.

C Troncature d'une série

Définition : Soit (u_n) défini à partir d'un rang $n_0 \in \mathbb{N}$. Une troncature de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ au rang n_0 est la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$.

Les sommes partielles associées sont $S_N = \sum_{n=n_0}^N u_n$.

Exemple :

- la série nulle
- la série géométrique de raison $q \in \mathbb{C}^*$: $\sum_{n \geq 0} q^n$ de terme général q^n ;
- la série harmonique : $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ de terme général $\frac{1}{n}$;
- la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$.

II Convergence d'une série

A Définitions et nature d'une série

Définition : Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série.

On dit que la série converge, si la suite (S_N) converge, et on note S la limite de S_N .
S s'appelle la somme de la série.

Dans ce cas, on écrit : $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = S \in \mathbb{R}$ (c'est une "somme infinie", un objet-limite).

💬 **Vocabulaire :** Si (S_N) diverge, alors on dit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge.

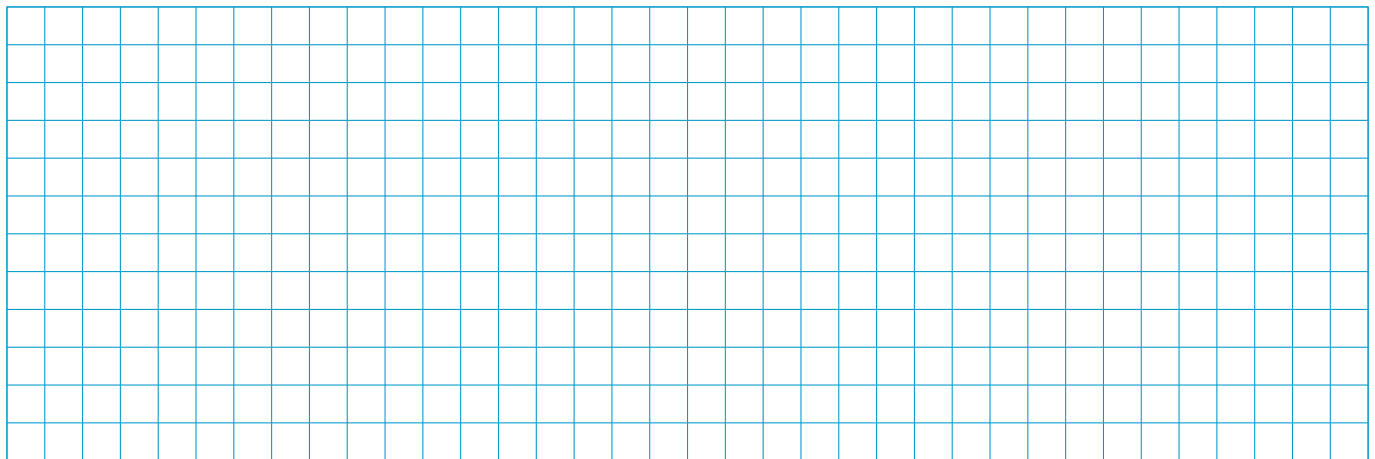
✗ **Attention** ✗ Si S n'existe pas, alors on écrit **jamais** la notation avec ∞

💬 **Vocabulaire :** La convergence ou la divergence d'une série s'appelle la **nature** de la série.

Proposition : Stabilité de la limite par troncature (admis)

La nature d'une série n'est pas modifiée par troncature.

Preuve:



💬 **Note de rédaction :** Indication : les premiers termes n'influencent pas la convergence.

B Quelques applications...

💡 **Exemple :**

• Si (u_n) est nulle à partir d'un rang N_0 alors la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente, et $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{N_0} u_n$.

• Série géométrique $\sum_{n \geq 0} q^n$:

On considère la suite des sommes partielles (S_N) où $S_N = \sum_{n=0}^N q^n = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}$ avec $q \neq 1$. On a plusieurs cas :

– Si $|q| < 1$, $q^{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$ donc $S_N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{1-q} \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

La série $\sum_{n \geq 0} q^n$ converge et on arrive à trouver S !

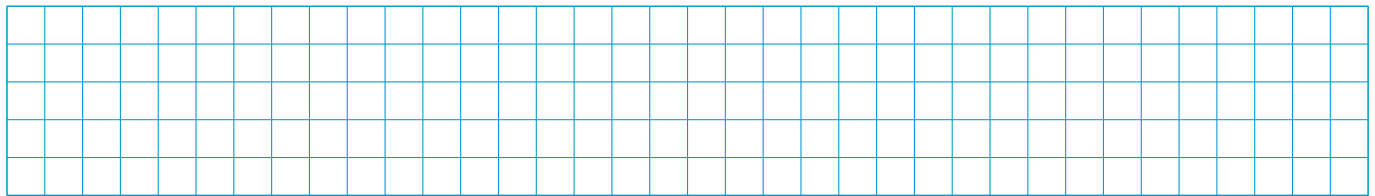
– Si $|q| > 1$, alors $\sum_{n \geq 0} q^n$ diverge.

– Si $q = 1$, alors $\sum_{n \geq 0} q^n = N + 1 \Rightarrow \sum_{n \geq 0} q^n$ diverge.

- $\sum_{n \geq 1} \log(1 + 1/n)$:
On a $\forall N \geq 1, S_N = \sum_{n=1}^N \log(\frac{n+1}{n}) = \log(N+1)$ (télescopage).
Or $\log(N+1) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} +\infty$, donc la série $\sum_{n \geq 1} \log(1 + 1/n)$ diverge.
- $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$:
On a $\forall N \geq 1, S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^N (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{N+1}$ (télescopage).
Or $1 - \frac{1}{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1$, donc la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.
- **Important, démontré plus tard** : $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ (série harmonique) diverge.
- $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge. (idée : montrer que S_N converge en montrant $A_N = S_{2N}$ et $B_N = S_{2N+1}$ sont adjacentes)

✗ **Attention** ✗ Ces six exemples sont à connaître et comprendre parfaitement.

📌 **Application** : Étudier la convergence de la série géométrique pour $|q| = 1$ et $q = -1$ ($q \in \mathbb{C}$).



C Propriétés des séries convergentes

Propriété : Convergence de la combinaison linéaire (admise)

Soient $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries convergentes.

Alors $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} : \sum_{n \geq 0} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n \geq 0} u_n + \mu \sum_{n \geq 0} v_n$, cette série converge (vers la combinaison linéaire des limites).

📌 **Remarque** : En d'autres termes, la somme de deux séries convergentes est une série $\sum_{n \geq 0} (u_n + v_n)$ qui converge.

Preuve :

La suite de sommes partielles associée à $\sum_{n \geq 0} (u_n + v_n)$ est $\sum_{n=0}^N (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^N u_n + \sum_{n=0}^N v_n$

Comme $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ sont convergentes, on a $\sum_{n=0}^{\infty} (u_n + v_n)$ est convergente et sa limite est $\sum_{n=0}^{\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \sum_{n=0}^{\infty} v_n$.

💡 Exemple : Retour : Divergence de la série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$

But : minorer $\sum_{n \geq 1}^N \frac{1}{n} \forall N \in \mathbb{N}$.

$$n \leq t \in \mathbb{R} \leq n+1 \Rightarrow \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{n}$$

Intégrons entre n et $n+1$: $\int_n^{n+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{n}$

Donc en sommant : $\sum_{n=1}^N \int_n^{n+1} \frac{1}{t} dt \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$

donc par Chasles : $\int_1^{N+1} \frac{1}{t} dt \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \forall n \in \mathbb{N}$

Or $\int_1^{N+1} \frac{1}{t} dt = \ln(N+1) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} +\infty$ donc $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} +\infty$.

Donc la série harmonique diverge.

Propriété : Divergence de la combinaison linéaire (admise)

Soient $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série convergente et $\sum_{n \geq 0} v_n$ une série divergente.

Alors $\sum_{n \geq 0} (u_n + v_n)$ diverge.

Preuve :

$$\sum_{n=0}^N (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^N (u_n) + \sum_{n=0}^N (v_n)$$

Comme $\sum_{n=0}^N (u_n)$ est convergente et $\sum_{n=0}^N (v_n)$ est divergente, on a $\sum_{n=0}^N (u_n + v_n)$ est divergente.

✗ **Attention** ✗ Quand on considère deux séries divergentes, la situation est à étudier au cas par cas.

💡 **Exemple :** Considérons $\sum_{n \geq 1} u_n$ avec $u_n = 1 \forall n \in \mathbb{N}$ et $\sum_{n \geq 1} v_n$ avec $v_n = -1 \forall n \in \mathbb{N}$.

D'une part $\sum_{n \geq 1} u_n$ diverge, et $\sum_{n \geq 1} v_n$ diverge aussi.

Mais $\sum_{n \geq 1} (u_n + v_n) = \sum_{n \geq 1} 0 = 0$ converge.

Mais si on considère $v_n = u_n$, alors $\sum_{n \geq 1} (u_n + v_n) = \sum_{n \geq 1} 2u_n$ diverge.

✗ **Attention** ✗ **Source d'erreur classique :** Si $\sum_{n \geq 0} u_n + v_n$ est convergente, **a priori** on ne peut pas écrire que $\sum_{n=0}^{\infty} u_n + v_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \sum_{n=0}^{\infty} v_n$ car les séries de termes généraux u_n et v_n peuvent être divergentes (il faut donc vérifier leur convergence).

Proposition : (admis)

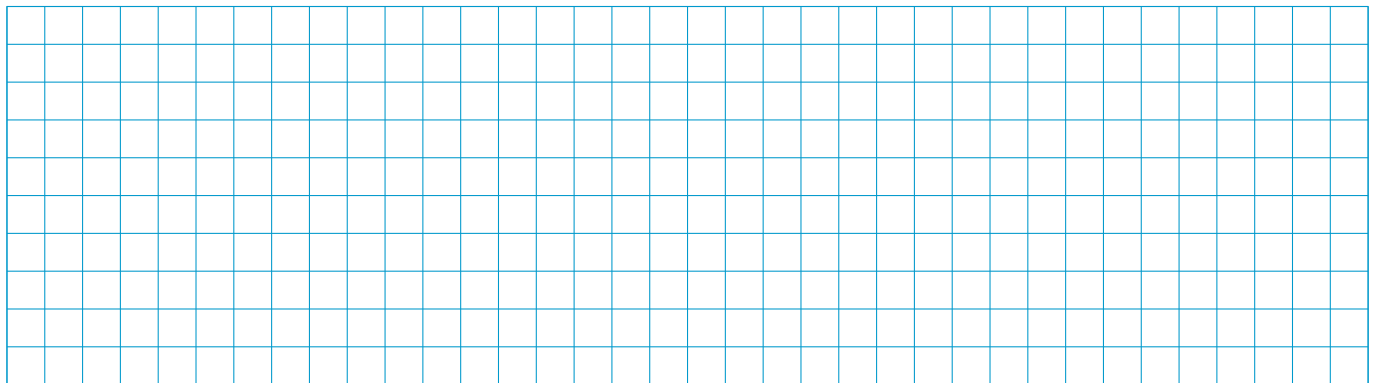
Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série numérique où $u_n \in \mathbb{C} \forall n \in \mathbb{N}$.

On a $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge \Leftrightarrow les suites $(\operatorname{Re}(u_n))$ et $(\operatorname{Im}(u_n))$ sont convergentes.

📌 **Application :** Montrer la proposition précédente.

Indication pour la preuve:

écrire $u_n = \operatorname{Re}(u_n) + i\operatorname{Im}(u_n)$ et utiliser la propriété sur les combinaisons linéaires.

**Théorème : Lien entre convergence et limite des termes**

Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge, alors $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Preuve:

Considérons (S_N) la suite des sommes partielles associée à $\sum_{n \geq 0} u_n$.

On a $S_{N+1} - S_N = u_{N+1} \forall N \in \mathbb{N}$.

Or $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge $\Rightarrow (S_N)$ converge. Donc $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N - \lim_{N \rightarrow \infty} S_{N+1} = 0 \Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} u_N = 0$.

✗ **Attention** ✗ La réciproque est fausse. Par exemple la série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge mais $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

💬 **Vocabulaire :** Si $u_n \not\rightarrow 0$, on dit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ **diverge grossièrement**.

D Reste d'une série

Définition : On suppose que $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge. On note $S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ sa somme et (S_N) la suite des sommes partielles.

Le **reste** de la série au rang N est $R_N = S - S_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} u_n$.

Proposition : Comportement du reste

Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge, alors $R_N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$.

Preuve:

Par définition, $R_N = S - S_N$. Or $S_N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} S$. Donc $R_N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$.

III Série absolument convergente (ACV)

A Critère de Cauchy pour les séries numériques

Ce qui a été fait dans le **Chapitre 1 - Suites de Cauchy** sur les suites réelles reste valable si on considère des suites complexes.

Définition : On dit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ vérifie le **critère de Cauchy** si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall N \geq N_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}, \left| \sum_{k=N}^{N+p} u_k \right| < \varepsilon$$

Proposition : Convergence et critère de Cauchy

$\sum_{n \geq 0} u_n$ vérifie le critère de Cauchy $\Leftrightarrow \sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

Preuve: (par équivalence)

$\sum_{n \geq 0} u_n$ converge $\Leftrightarrow (S_N)$ converge $\Leftrightarrow (S_N)$ est une suite de Cauchy (car l'espace est complet) $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall N \geq N_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}, |S_{N+p} - S_N| < \varepsilon \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall N \geq N_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}, \left| \sum_{n=N}^{N+p} u_n \right| < \varepsilon$

Remarque : Autre preuve de la divergence de la série harmonique :

Soit $\varepsilon = 1/2$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on peut choisir $p = N$ et on a : $\left| \sum_{k=N}^{2N} \frac{1}{k} \right| \geq \sum_{k=N}^{2N} \frac{1}{2N} = \frac{1}{2}$.
Donc la série harmonique ne vérifie pas le critère de Cauchy, donc elle diverge.

B Définitions et propriétés

Définition : On dit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est absolument convergente (ACV) si la série $\sum_{n \geq 0} |u_n|$ converge.

Théorème : Série ACV et convergence

Série ACV \Rightarrow série convergente et $\left| \sum_{n=0}^{\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$.

Preuve:

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série ACV.

Donc $\sum_{n \geq 0} |u_n|$ converge.

Donc $\sum_{n \geq 0} |u_n|$ vérifie le critère de Cauchy : $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall N \geq N_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}, \left| \sum_{k=N}^{N+p} |u_k| \right| < \varepsilon$

Donc $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall N \geq N_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}, \left| \sum_{k=N}^{N+p} u_k \right| \leq \sum_{k=N}^{N+p} |u_k| < \varepsilon$

Ainsi $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall N \geq N_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}, \left| \sum_{k=N}^{N+p} u_k \right| < \varepsilon$

Donc $\sum_{n \geq 0} u_n$ vérifie le critère de Cauchy.

Donc $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge et on a $|\sum_{n=0}^N u_n| \leq \sum_{n=0}^N |u_n| \implies |\sum_{n=0}^{\infty} u_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$.

✗ **Attention** ✗ La réciproque est fausse.

💡 **Exemple** : La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente, mais elle n'est pas absolument convergente car $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

IV Convergence absolue d'une série

💬 **Note de rédaction** : Correspond à II. dans le plan de cours du prof.

A Séries à termes positifs

Théorème :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans \mathbb{R}^+ .

Alors la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ ($u_n \geq 0$) converge \Leftrightarrow la suite (S_N) des sommes partielles est bornée.

Preuve:

En effet, $S_{N+1} - S_N = u_{N+1} \geq 0$ donc (S_N) est croissante (à termes positifs).

Ainsi (S_N) converge $\Leftrightarrow (S_N)$ est bornée (*théorème de convergence monotone*).

Or $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge $\Leftrightarrow (S_N)$ converge.

Donc $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge $\Leftrightarrow (S_N)$ est bornée.

📌 **Remarque** : Si (S_N) n'est pas bornée, alors $S_N \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} +\infty$. On tolère la notation $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = +\infty$.

📌 Application : Application du théorème.

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries à termes positifs.

Montrons que la série $\sum_{n \geq 0} \sqrt{u_n v_n}$ converge.

En effet, utilisons l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

$$\forall N \in \mathbb{N}, \sum_{n=0}^N \sqrt{u_n v_n} \leq \sqrt{\sum_{n=0}^N u_n} \sqrt{\sum_{n=0}^N v_n}.$$

Or les deux termes de droite sont bornés, donc $\forall N \in \mathbb{N}, \sum_{n=0}^N \sqrt{u_n v_n}$ est bornée.

Donc $\sum_{n \geq 0} \sqrt{u_n v_n}$ converge.

Autre preuve (sans Cauchy-Schwarz) :

$$(a - b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2} \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Donc } \sum_{n=0}^N \sqrt{u_n v_n} \leq \frac{1}{2} (\sum_{n=0}^N u_n + \sum_{n=0}^N v_n).$$

Or les deux termes de droite sont bornés, donc $\forall N \in \mathbb{N}, \sum_{n=0}^N \sqrt{u_n v_n}$ est bornée.

Donc $\sum_{n \geq 0} \sqrt{u_n v_n}$ converge.

💬 **Note de rédaction** : On a pas encore abordé Cauchy-Schwarz.

Proposition :

Soient $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries convergentes (*pas forcément à termes positifs mais réels*).

Si $u_n \leq v_n \forall n \in \mathbb{N}$, alors $\sum_{n=0}^{\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} v_n$.

Preuve:

On considère la série à termes positifs $\sum_{n \geq 0} (v_n - u_n)$. C'est une série convergente.

On a $\sum_{n=0}^{\infty} (v_n - u_n) \geq 0$.

Or $\sum_{n \geq 0} v_n$ et $\sum_{n \geq 0} u_n$ sont convergentes.

Donc on peut écrire : $\sum_{n=0}^{\infty} v_n - \sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} (v_n - u_n) \geq 0$.
 Donc $\sum_{n=0}^{\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} v_n$.

B Critère de comparaison

Tout cela est fait pour des séries à termes positifs.

Théorème : Critère de comparaison ("Hyper important")

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries à termes positifs.

Supposons que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq v_n$.

Alors :

- Si $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge, alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.
- Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge, alors $\sum_{n \geq 0} v_n$ diverge.

Preuve:

- On a $\forall N \in \mathbb{N}, 0 \leq \sum_{n=0}^N u_n \leq \sum_{n=0}^N v_n$.
 Or $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge, donc la suite des sommes partielles $(\sum_{n=0}^N v_n)$ est bornée.
 Donc la suite des sommes partielles $(\sum_{n=0}^N u_n)$ est bornée et donc $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.
- Comme $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge, la suite des sommes partielles $(\sum_{n=0}^N u_n)$ n'est pas bornée.
 Et comme $\forall N \in \mathbb{N}, 0 \leq \sum_{n=0}^N u_n \leq \sum_{n=0}^N v_n$, la suite des sommes partielles $(\sum_{n=0}^N v_n)$ n'est pas bornée.
 Et donc par le théorème de convergence des séries à termes positifs on a que $\sum_{n \geq 0} v_n$ diverge.

Corollaire :

Soient $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries à termes positifs.

$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$.

Alors :

- Si $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge, alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.
- Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge, alors $\sum_{n \geq 0} v_n$ diverge.

Preuve:

Pour $n \geq n_0$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \times \frac{u_n}{u_{n-1}} \times \dots \times \frac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n} \times \frac{v_n}{v_{n-1}} \times \dots \times \frac{v_{n_0+1}}{v_{n_0}}$$

$$\Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_{n_0}} \leq \frac{v_{n+1}}{v_{n_0}} \Rightarrow u_{n+1} \leq k v_{n+1} \text{ avec } k = \frac{u_{n_0}}{v_{n_0}} \in \mathbb{R}_+^*$$

- On suppose que $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge.
 Donc $\sum_{n \geq 0} k v_n$ converge.
 Donc par le théorème précédent, comme $\forall n \geq n_0, 0 \leq u_n \leq k v_n$, on a que $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.
- (non démontré en cours)

 **Application :** applications aux séries absolument convergentes

Proposition :

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série à termes réels.

Définissons $u_n^+ = \max(u_n, 0) \geq 0$ et $u_n^- = \max(-u_n, 0) \geq 0$.

On a $\sum_{n \geq 0} u_n$ est ACV.

$\sum_{n \geq 0} |u_n|$ converge $\Leftrightarrow \sum_{n \geq 0} u_n^+$ et $\sum_{n \geq 0} u_n^-$ convergent.

Preuve:

\Rightarrow On a $\forall n \in \mathbb{N} \ 0 \leq u_n^+ \leq |u_n|$ et $0 \leq u_n^- \leq |u_n|$.

Donc par le théorème de comparaison, $\sum_{n \geq 0} u_n^+$ et $\sum_{n \geq 0} u_n^-$ convergent.


\Leftarrow On remarque que $|u_n| = u_n^+ + u_n^-$.

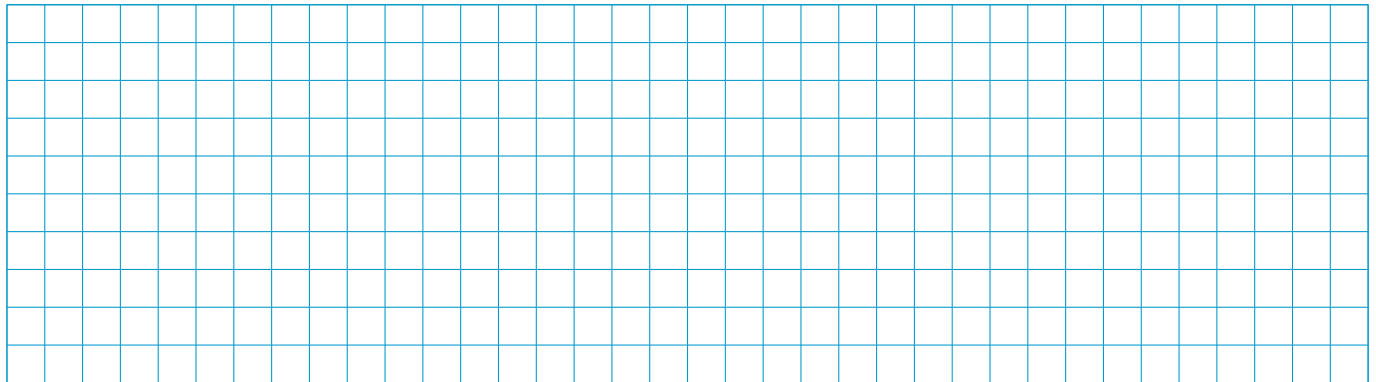
Si $\sum_{n \geq 0} u_n^+$ et $\sum_{n \geq 0} u_n^-$ convergent, alors $\sum_{n \geq 0} |u_n|$ converge $\Rightarrow \sum_{n \geq 0} u_n$ est ACV.


Proposition :

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série à termes complexes.

On a $\sum_{n \geq 0} u_n$ est ACV $\Leftrightarrow \sum_{n \geq 0} \operatorname{Re}(u_n)$ et $\sum_{n \geq 0} \operatorname{Im}(u_n)$ sont ACV.

 **Application :** Montrer la proposition précédente.

**C Domination, convergence et équivalence**

 **Rappel :** Soient (u_n) et (v_n) deux suites.

- $u_n = O(v_n)$ ssi $\exists M > 0, |u_n| \leq M|v_n|$ au voisinage de l'infini (n assez grand) $\Leftrightarrow \left| \frac{u_n}{v_n} \right|$ est bornée.
- $u_n = o(v_n)$ ssi $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$. (u_n est négligeable devant v_n)
- $u_n = o(v_n) \Rightarrow u_n = O(v_n)$
- $u_n \sim v_n$ ssi $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$. (u_n est équivalent à v_n)

Proposition : (admis)

Soient $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries à termes positifs.

On suppose $u_n = O_{+\infty}(v_n)$.

- Si $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge, alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.
- Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge, alors $\sum_{n \geq 0} v_n$ diverge.

Indication pour la preuve:

Il suffit de remarquer que $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} Mv_n$ sont de même nature ; et M est tel que $u_n \leq Mv_n$

✗ Attention ✗ Si on sait que $\sum_{n \geq 0} v_n$ alors pour montrer que $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge, il suffit de montrer que $u_n = o_{+\infty}(v_n)$.

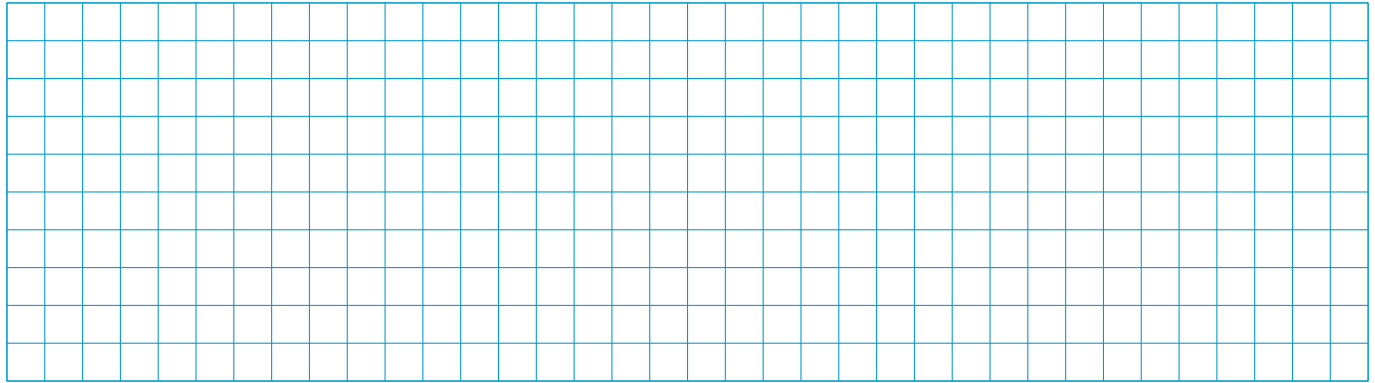
(en réalité il faudrait montrer grand O, mais $o \Rightarrow O$ donc c'est plus fort et plus simple à montrer)

Corollaire : (admis)

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série à terme général dans \mathbb{C} et soit $\sum_{n \geq 0} v_n$ une série à terme général positif tel que $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge.

Si $u_n = O_{+\infty}(v_n)$, alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge absolument (ACV).

 **Application :** Montrer le corollaire précédent.

**Théorème : "Hyper² important"**


Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série à terme général dans \mathbb{C} et soit $\sum_{n \geq 0} v_n$ une série à termes positifs.

On suppose $u_n \sim_{+\infty} v_n$.

(on pourrait mettre une constante)

On a :

- Si $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge absolument (ACV).
- Si $\sum_{n \geq 0} v_n$ diverge alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge.

 **Remarque :** Si $u_n \geq 0$ alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ sont de même nature.

V Séries de références

A Série de Riemann

Théorème :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$, dite **série de Riemann**.
La série converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$.

Preuve:

On a vu que pour $\alpha = 1$, la série diverge (série harmonique).

- Si $\alpha \leq 1$, $\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n}$. Donc par le théorème de comparaison, $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.
- \Leftarrow / Supposons $\alpha > 1$.
Considérons la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ de terme général $u_n = \frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$.
Observation 1 : $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{n=1}^N u_n = 1 - \frac{1}{(N+1)^{\alpha-1}}$ donc $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge (car $\alpha - 1 > 0$). (téléscopage)
Observation 2 : Déterminons un équivalent de u_n .
 $u_n = \frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} = \frac{1}{n^{\alpha-1}} \left(1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha-1} \right)$.
On a $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha-1} = \left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^{\alpha-1} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{\alpha-1} = 1 - \frac{\alpha-1}{n} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$ (DL ordre 1).
 $\Rightarrow 1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha-1} = \frac{\alpha-1}{n} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right) \sim_{+\infty} \frac{\alpha-1}{n}$.
Donc $u_n \sim_{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha-1}} \times \frac{\alpha-1}{n} = \frac{\alpha-1}{n^\alpha} > 0$.

On a deux séries à termes positifs $\sum_{n \geq 1} u_n$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{\alpha-1}{n^\alpha}$ qui sont de même nature car équivalentes ($u_n \sim_{+\infty} \frac{\alpha-1}{n^\alpha}$).

On en déduit que $\sum_{n \geq 1} \frac{\alpha-1}{n^\alpha}$ converge pour $\alpha > 1$ par le théorème sur les équivalents.

De plus la nature d'une série n'est pas modifiée quand le terme général est multiplié par un scalaire non nul.

Donc $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est de même nature que $\sum_{n \geq 1} \frac{\alpha-1}{n^\alpha}$.

Donc $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge.

✗ **Attention** ✗ Démonstration probablement en question de cours au partiel/CC :)

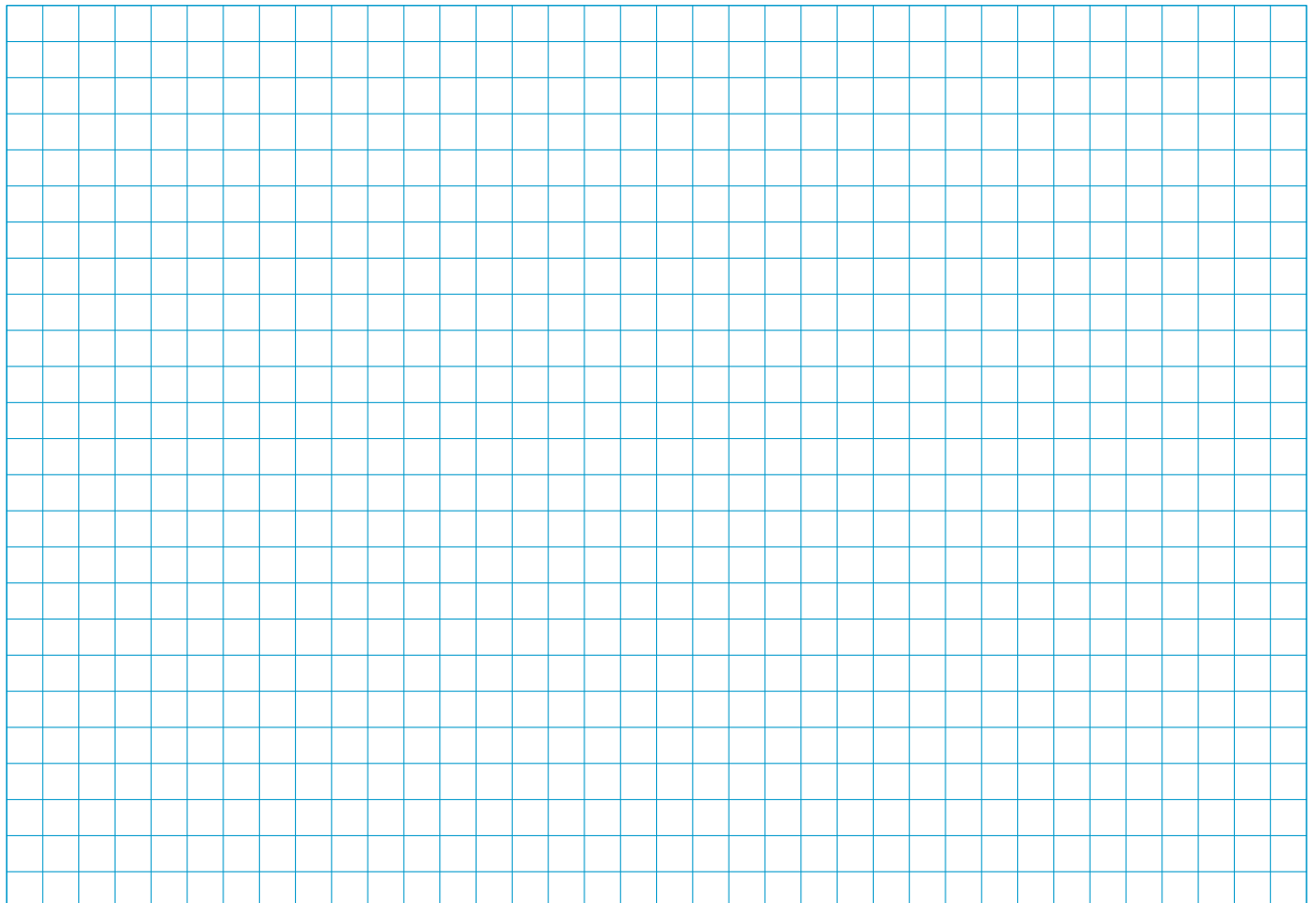
Règles de comparaisons avec les séries de Riemann :


Soient $\sum u_n$ une série de terme général dans \mathbb{C} .

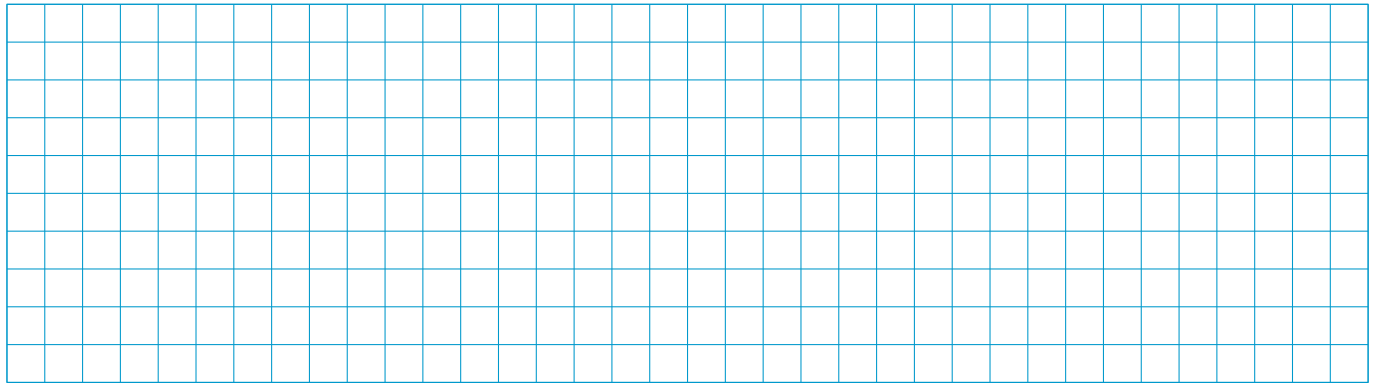
1. Si $u_n \sim_{+\infty} k \frac{1}{n^\alpha}$ avec $k \in \mathbb{C}^*$.
 - Si $\alpha > 1$ alors $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge absolument (ACV).
 - Si $\alpha \leq 1$ alors $\sum_{n \geq 1} u_n$ diverge.
2. Si $\exists \alpha > 1, n^\alpha |u_n|$ bornée (i.e. $u_n = O(\frac{1}{n^\alpha})$), alors $\sum u_n$ converge absolument (ACV).
il suffit de montrer que $u_n = o(\frac{1}{n^\alpha})$
3. On se restreint à $u_n \in \mathbb{R}$. Si $\exists \alpha \leq 1, n^\alpha u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$, alors $\sum u_n$ diverge.

Remarque : Penser u_n à terme réel positif et $k \in \mathbb{R}_+^*$ pour la compréhension. (suffisant pour la compréhension et la plupart des exercices)

Application : Montrer les règles de comparaison avec les séries de Riemann.



 **Application :** Etudier la nature de la série de terme général $u_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt[3]{n^3 + an^2 + bn + c}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.



B Série géométrique

 **Rappel :** La série $\sum_{n \geq 0} q^n$ converge $\Leftrightarrow |q| < 1$ et dans ce cas $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

Preuve:

\Leftarrow Si $|q| < 1$, alors $S_N = \sum_{n=0}^N q^n = \frac{1-q^{N+1}}{1-q} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{1-q}$.

\Rightarrow Si $|q| \geq 1$, alors $q^n \not\rightarrow 0$ donc la série diverge (grossièrement).

Règle de Cauchy :

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série à terme général dans \mathbb{C} .

On suppose que $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n|^{\frac{1}{n}} = l$ (existe et égale à $l \in [0, +\infty]$, $+\infty$ autorisé).

1. Si $l < 1$, alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge absolument (ACV).
2. Si $l > 1$, alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge.
3. Si $l = 1$, on ne peut rien conclure.

 **Remarque :** Comprendre la règle précédente dans le cas réel, terme positif.

Preuve:

1. Si $l < 1$, prenons $\varepsilon > 0$ tel que $l + \varepsilon < 1$.

Or $|u_n|^{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l$, donc $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n|^{\frac{1}{n}} \leq l + \varepsilon$.

Donc $|u_n| \leq (l + \varepsilon)^n$ pour $n \geq N$.

Or la série de terme général $(l + \varepsilon)^n$ est une série géométrique de raison $l + \varepsilon < 1$, donc elle converge.


Donc $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

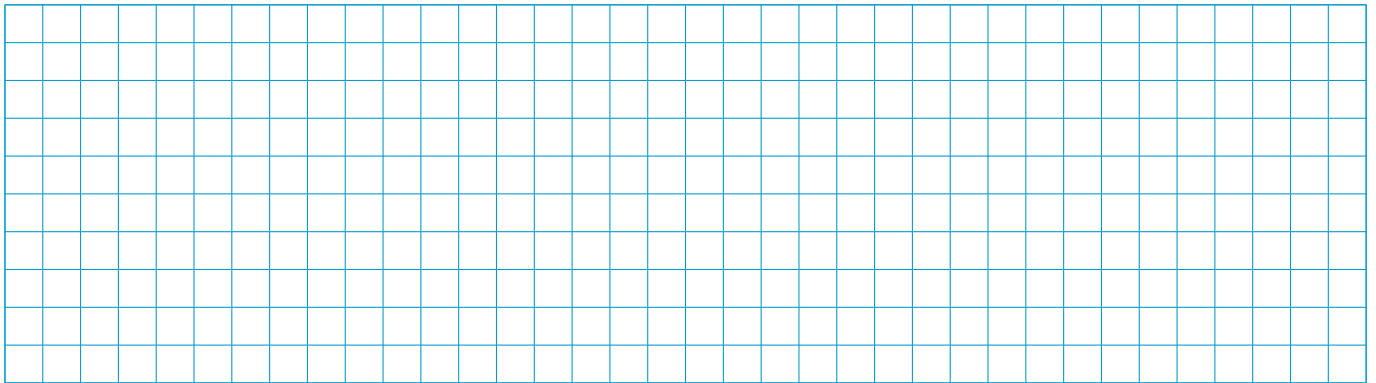
2. Laissez à la douce appréciation du lecteur.

3. Trouvons une série $\sum_{n \geq 0} u_n$ où $|u_n|^{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ et où on ne peut rien conclure sur la nature de la série.

Si on prend $u_n = \frac{1}{n^\alpha} = e^{-\alpha \ln(n)}$, on a bien $u_n^{\frac{1}{n}} = e^{-\alpha \frac{\ln(n)}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \forall \alpha$.

Or on a convergence pour $\alpha > 1$ et divergence pour $\alpha \leq 1$, on ne peut rien conclure.

 **Application :** Etudier la nature de la série de terme général $u_n = \cosh\left(\frac{1}{n}\right)^{-n^3}$.



Règle de d'Alembert :


Soit $\sum u_n$ une série à terme général dans \mathbb{C} .

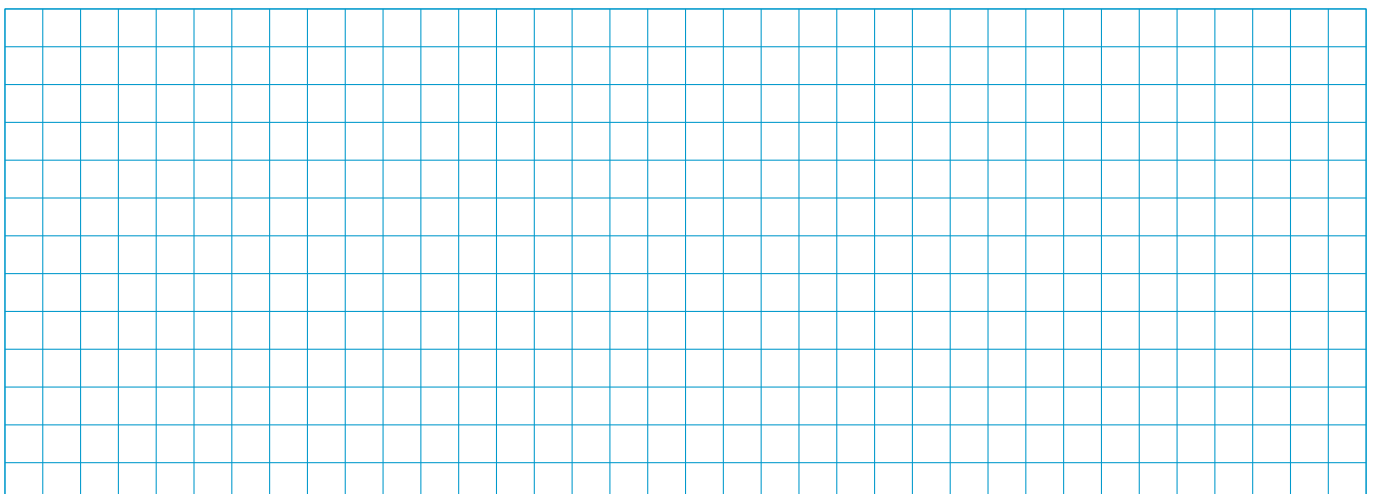
On suppose que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = l$ (existe et égale à $l \in [0, +\infty]$, $+\infty$ autorisé).

1. Si $l < 1$, alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge absolument (ACV).
2. Si $l > 1$, alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge.
3. Si $l = 1$, on ne peut rien conclure.

Preuve:

1. Si $l < 1$, prenons $\varepsilon > 0$ tel que $l + \varepsilon < 1$.
 Or $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l$, donc $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \leq l + \varepsilon$.
 Posons $q = l + \varepsilon < 1$.
 Ainsi, $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \leq \frac{q^{n+1}}{q^n}$ pour $n \geq N$.
 On a une comparaison du type $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$.
 On a vu que dans ce cas, $\sum b_n$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge.
 Or $\sum q^n$ converge (série géométrique de raison $q < 1$) donc $\sum u_n$ converge (ACV).
2. Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = l > 1, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \geq 1 \Rightarrow |u_n|$ est minorée par n assez grand.
 Donc $\sum u_n$ diverge.
3. Prendre $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$. On a bien $\frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ et la nature dépend de α .

 **Application :** Etudier la nature de la série de terme général $u_n = \frac{n!}{n^n}$.



🗣 **Note de rédaction** : On a évoqué en cours la formule de Stirling pour la culture, mais elle est hors programme : $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Proposition : Comparaison des règles de d'Alembert et de Cauchy

Soit $\sum u_n$ une série à terme général positif ou nul.

On suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l \in [0, +\infty]$.

Alors $u_n^{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l$.

Preuve:

On suppose $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l, l > 0, l \neq +\infty$.

On a $\forall l_1, 0 < l_1 < l, \sum_{n \geq 0} \frac{l_1^n}{u_n}$ converge par la règle de d'Alembert.

En effet, $\frac{l_1^{n+1}}{u_{n+1}} \times \frac{u_n}{l_1^n} = l_1 \times \frac{u_n}{u_{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{l_1}{l} < 1$.

Par convergence de la série on a que $\frac{l_1^n}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

À partir d'un certain rang, $\frac{l_1^n}{u_n} \leq 1 \Rightarrow l_1^n \leq u_n \Rightarrow l_1 \leq u_n^{\frac{1}{n}}$.

On a $\forall l_2, 0 < l < l_2, \sum_{n \geq 0} \frac{u_n}{l_2^n}$ converge par la règle de d'Alembert.

À partir d'un certain rang (même argument que pour l_1), $u_n \leq l_2^n \Rightarrow u_n^{\frac{1}{n}} \leq l_2$.

Donc $l_1 \leq u_n^{\frac{1}{n}} \leq l_2, \forall l_1 < l < l_2$ pour un n assez grand.

On fait tendre n vers ∞ puis l_1 et l_2 vers l et on en déduit que $u_n^{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l$.

✗ **Attention** ✗ La réciproque est fausse.

💡 Exemple : Contre-exemple.

Soit $0 < a < b$. Posons :

$$u_n = \begin{cases} a^p b^p & \text{si } n = 2p \\ a^{p+1} b^p & \text{si } n = 2p + 1 \end{cases}$$

On a $u_n^{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} ab$ (peu importe la parité de n).

Mais $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ dépend de la parité de n .

📌 **Remarque** : Donc on préfère la règle de d'Alembert à celle de Cauchy. Mais si la règle d'Alembert ne donne rien, la règle de Cauchy ne donnera rien non plus.

VI Séries semi-convergentes

💡 **Exemple** : $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n}$, on voit qu'elle n'est pas ACV, mais $|\frac{e^{in\theta}}{n}| = \frac{1}{n} \forall \theta \in \mathbb{R}$.

Mais on a pas les outils pour voir si elle est "seulement" convergente. *Idem* pour la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$.

Donc le but ici, c'est de trouver des critères de convergence pour des séries qui ne sont pas ACV.

A Définitions et premières propriétés

Définition : Une série est dite **semi-convergente** (SCV) si elle est convergente mais pas absolument convergente.

📌 **Remarque** : On considère ici les séries à terme général $u_n \in \mathbb{C}$ ou \mathbb{R} (on a pas $u_n \geq 0$).

Proposition : "étrange"

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série à terme général dans \mathbb{R} .

On considère la série $\sum_{n \geq 0} u_n^+$ et $\sum_{n \geq 0} u_n^-$.

On a $\sum_{n \geq 0} u_n$ est SCV $\Rightarrow \sum_{n \geq 0} u_n^+$ et $\sum_{n \geq 0} u_n^-$ divergent.

Preuve:

On rappelle que $u_n^+ = \max(u_n, 0)$ et $u_n^- = \max(-u_n, 0)$ et donc $u_n = u_n^+ - u_n^-$ (2) et $|u_n| = u_n^+ + u_n^-$ (1).

- Si $\sum_{n \geq 0} u_n^+$ et $\sum_{n \geq 0} u_n^-$ convergent, alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ ACV par (1) : **absurde**.
- Si l'une des séries converge et l'autre diverge, alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge par (2).
- Seule possibilité donc : $\sum_{n \geq 0} u_n^+$ et $\sum_{n \geq 0} u_n^-$ divergent.

Proposition :

Considérons $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série à terme général dans \mathbb{C} .

Alors on a :

$\sum_{n \geq 0} u_n$ est SCV $\Leftrightarrow \sum_{n \geq 0} \operatorname{Re}(u_n)$ et $\sum_{n \geq 0} \operatorname{Im}(u_n)$ sont CV et l'une d'entre elles est SCV.

Preuve:

\Rightarrow / Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ est CV, alors $\sum_{n=0}^N u_n = \sum_{n=0}^N \operatorname{Re}(u_n) + i \sum_{n=0}^N \operatorname{Im}(u_n)$.

Donc on a la CV des séries $\sum_{n \geq 0} \operatorname{Re}(u_n)$ et $\sum_{n \geq 0} \operatorname{Im}(u_n)$.

Montrons que l'une des deux séries n'est pas ACV.

En effet on a $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq |\operatorname{Re}(u_n)| + |\operatorname{Im}(u_n)|$ si $\sum_{n \geq 0} |\operatorname{Re}(u_n)|$ et $\sum_{n \geq 0} |\operatorname{Im}(u_n)|$ ACV.

\Rightarrow une des deux séries n'est pas ACV.

\Rightarrow une des deux séries est ACV.

\Leftarrow / On a que $\sum_{n \geq 0} \operatorname{Re}(u_n)$ et $\sum_{n \geq 0} \operatorname{Im}(u_n)$ sont CV.


Donc $\sum_{n \geq 0} u_n$ est CV.

Montrons que $\sum_{n \geq 0} u_n$ est SCV.

On a : $|\operatorname{Re}(u_n)| \leq |u_n|$ et $|\operatorname{Im}(u_n)| \leq |u_n|, \forall n \in \mathbb{N}$.

Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ était ACV, alors $\sum_{n \geq 0} \operatorname{Re}(u_n)$ et $\sum_{n \geq 0} \operatorname{Im}(u_n)$ seraient ACV ce qui est contraire à l'hypothèse "l'une d'entre elles est SCV".

B Critère d'Abel


 **Application :** On veut donner un critère pour la convergence d'une série du type $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n} = a_n b_n$ avec $a_n = e^{in\theta}$ et $b_n = \frac{1}{n}$.

Théorème : Critère d'Abel

On considère la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ où $\sum_{n \geq 0} u_n \in \mathbb{C}$, avec $u_n = a_n b_n$ tels quels :

1. (a_n) est **réelle, décroissante**, et $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.
2. (b_n) est **complexe** telle que $B_N = \sum_{n=0}^N b_n$, i.e. (B_N) est **bornée**.

Alors la série $\sum_{n \geq 0} a_n b_n$ converge.

 **Rappel :** Une suite complexe est bornée : $\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |z_n| \leq M$, où $|z_n| = \sqrt{\operatorname{Re}(z_n)^2 + \operatorname{Im}(z_n)^2}$.

Preuve:

On va utiliser la "transformation d'Abel".

On a $B_N = \sum_{n=0}^N b_n$.

Alors $B_k - B_{k-1} = b_k, \forall k \geq 1$ et $B_0 = b_0$.

On part de la somme partielle de la série :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^N a_k b_k &= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^N a_k (B_k - B_{k-1}) \\ &= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^N a_k B_k - \sum_{k=1}^N a_k B_{k-1} \\ &= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^N a_k B_k - \sum_{k=0}^{N-1} a_{k+1} B_k \\ &= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{N-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_N B_N - a_1 b_0 = \sum_{k=0}^N (a_k - a_{k+1}) B_k + a_N B_N \text{ avec } a_n \text{ tend vers } 0 \text{ et } B_n \text{ bornée} \end{aligned}$$

Etude de $\sum_{k=0}^N (a_k - a_{k+1}) B_k$, séries à termes dans \mathbb{C} .

Etudions donc l'ACV :

$$|a_k - a_{k+1} B_k| |a_k - a_{k+1}| |B_k| \leq (a_k - a_{k+1}) M \text{ car } |B_k| \leq M$$

Or la série $\sum_{k=0}^N (a_k - a_{k+1}) M$ est de même nature que $\sum_{k=0}^N a_k - a_{k+1}$ (car M est un scalaire non nul).

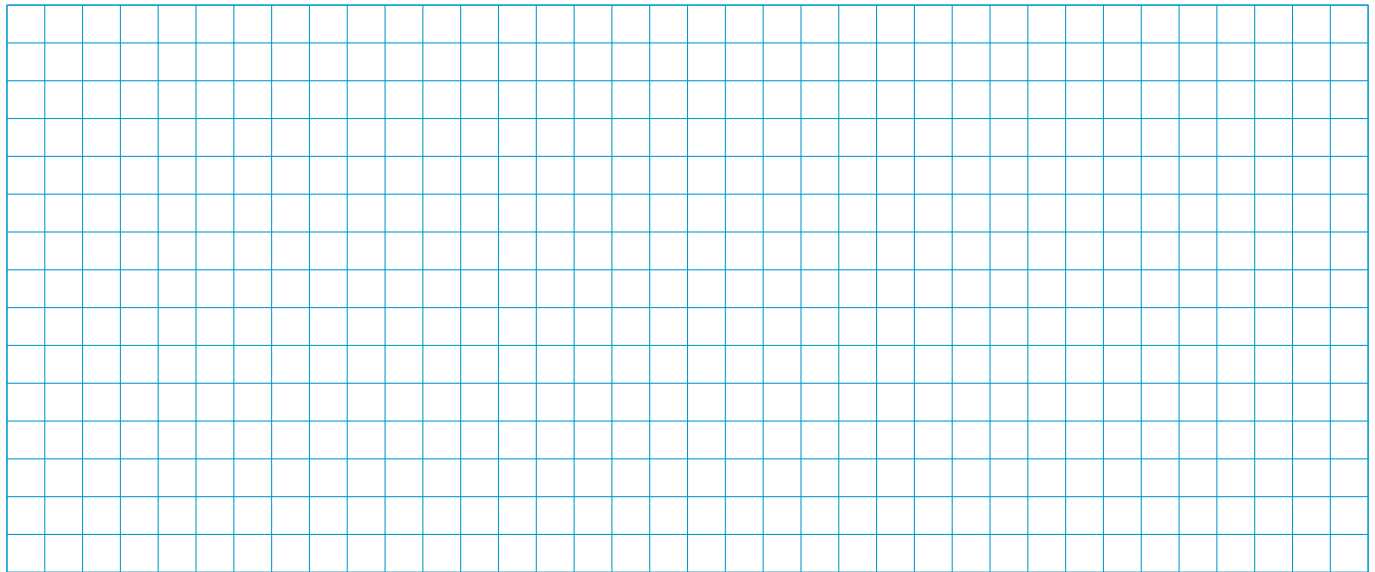
Et la CV de cette série télescopique est évidente.

Note de rédaction : Il y avait beaucoup d'indices et d'infos, j'attends la vérification de Laurent pour être sûr que c'est correct (j'ai un doute sur la fin).

Application : Pour $\theta \neq 2\pi k$, $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n}$ converge par le critère d'Abel, $a_n = \frac{1}{n}$ et $b_n = e^{in\theta}$ et $\sum_{n \geq 1} b_n = \frac{1 - e^{i(N+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}$ et $|B_N| = \left| \frac{1 - e^{i(N+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} \right| \leq \frac{|1| + |e^{i(N+1)\theta}|}{|1 - e^{i\theta}|} = \frac{2}{|1 - e^{i\theta}|}$.

Donc la série $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n}$ converge, mais pas ACV, donc elle est SCV.

Application : Etudier la convergence, l'absolue convergence et la semi-convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ avec $\theta \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}_+^*$.



Remarque : Dans le critère d'Abel, comme (a_n) est décroissante et $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, $a_n \geq 0$ (car $a_n \in \mathbb{R}$).

C Séries alternées

Définition : Une série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est dite **alternée** si $u_n = (-1)^n a_n$ ou $u_n = (-1)^{n+1} a_n$ avec $a_n \geq 0$.

Exemple : $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n}$, $\sum_{n \geq 0} (-1)^n$ sont des séries alternées.

Remarque : $(-1)^n \cdot u_n = (-1)^{2n} a_n = a_n$ ou $u_n = -a_n \Rightarrow (-1)^n u_n$ est de signe constant

Remarque : Une définition équivalente est : une série est alternée si le signe de $(-1)^n \cdot u_n$ est constant.

Théorème : Critère spécial des séries alternées (CSSA)

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série de terme général $u_n = (-1)^n a_n$, avec $a_n \geq 0$.
Si :

1. (a_n) est décroissante.
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Alors la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

Preuve:

On applique le critère d'Abel avec $a_n = a_n$ et $b_n = (-1)^n$.

On a bien $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ et (a_n) décroissante.

De plus, $B_N = \sum_{n=0}^N (-1)^n = \frac{1 - (-1)^{N+1}}{1 - (-1)}$ est bornée (égale à 0 ou 1).

Donc la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

Proposition :

Soit $\sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n$ une série alternée vérifiant les hypothèses du CSSA (donc (a_n) est décroissante et $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$).

On considère la suite des sommes partielles (S_N) avec $S_N = \sum_{k=0}^N (-1)^k a_k$.

Soit S la somme de la série.

Alors :

$$S_{2N+1} \leq S \leq S_{2N} \text{ et } |R_N| = |S - S_N| \leq a_{N+1}.$$

Preuve:

On pose $A_N = S_{2N}$ et $B_N = S_{2N+1}$.

On observe que $S_{2N+1} - S_{2N} = -a_{2N+1} \leq 0$

$$\Leftrightarrow S_{2N+1} \leq S_{2N}.$$

Variations de (A_N) et (B_N)

$A_{N+1} - A_N = S_{2N+2} - S_{2N} = a_{2N+2} - a_{2N+1} \leq 0$ car (a_n) décroissante.

$\Leftrightarrow A_{N+1} \leq A_N$. Donc (A_N) est décroissante et $B_{N+1} - B_N = S_{2N+3} - S_{2N+1} = a_{2N+2} - a_{2N+3} \geq 0$ car (a_n) décroissante.

$\Leftrightarrow B_{N+1} \geq B_N$. Donc (B_N) est croissante.

De plus, on a $B_N - A_N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$ donc (A_N) et (B_N) sont adjacentes, et convergent vers la même limite S .

et donc $B_N \leq S \leq A_N$ où $S = \lim_{N \rightarrow \infty} A_N = \lim_{N \rightarrow \infty} B_N$.

On a bien $S_{2N+1} \leq S \leq S_{2N}, \forall N \in \mathbb{N}$.


Etudions maintenant le reste.

$R_N = S - S_N$, on veut montrer que $|R_N| \leq a_{N+1}$.

Séparons le cas N pair et impair :

- Si $N = 2p + 1$, alors $S_{2p+1} \leq S \Rightarrow S - S_{2p+1} \geq 0$.
 $\Rightarrow |R_{2p+1}| = S - S_{2p+1} \leq S_{2p+2} - S_{2p+1} = a_{2p+2} = a_{N+1}$.
- *Laissé en exercice au lecteur :) □*

✗ Attention ✗

1. Si deux suites sont équivalentes (\sim) et l'une monotone, l'autre ne l'est pas forcément.  **Exemple :** $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+(-1)^n}}$ et $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. On a $a_n \sim b_n$ mais (a_n) n'est pas monotone (on le montre en encadrant/calculant 3 termes consécutifs $(2p, 2p+1, 2p+2)$, alors que (b_n) l'est).

2. Considérons $\sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n$. On remarque que $\sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n$ n'est pas ACV. Est-elle semi-convergente ?
Le CSSA ne s'applique pas. Mais $(-1)^n a_n \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ QUI N'IMPLIQUE PAS " $\sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n$ CV car $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ CV" (car $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ n'est pas positive).


À faire : Montrer que $(-1)^n a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{(n)}} + b_n$, où $b_n = \frac{-1}{\sqrt{n}(\sqrt{n+(-1)^n})}$ et en déduire que $\sum u_n$ DV.

Donc $u_n \sim v_n$, $\sum v_n$ CV $\implies \sum u_n$ CV que si v_n est ≥ 0 ou ≤ 0

VII Produit de Cauchy de deux séries

Définition : Soient $\sum_{n \geq 0} a_n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n$ deux séries.

La **série produit (de Cauchy)** est définie par la série $\sum_{n \geq 0} c_n$ où $c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

 **Remarque :** Supposons que $a_n = 0 = b_n$ pour $n > N \in \mathbb{N}$. Considérons $P(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$ et $Q(X) = b_0 + b_1 X + \dots + b_n X^n$.

Alors $(PQ)(X) = c_0 + c_1 X + \dots + c_{2N} X^{2N}$. On peut penser au produit de Cauchy comme une "généralisation".

Proposition :

On considère $\sum_{n \geq 0} a_n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n$ deux séries à termes positifs et convergentes.

Alors la série produit $\sum_{n \geq 0} c_n$ est convergente et on a : $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n)(\sum_{n=0}^{\infty} b_n)$.

Preuve:

Soient $A_N = \sum_{n=0}^N a_n$ et $B_N = \sum_{n=0}^N b_n$.

Notons $C_N = \sum_{n=0}^N c_n = \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$.

On veut montrer que (C_N) converge et déterminer sa limite.

(C_N) est une somme partielle à termes positifs, donc (C_N) est croissante.

Posons $I_N = \{0, \dots, N\} \subset \mathbb{N}$

 **Note de rédaction :** Dessin $I_N \times I_N$

Considérons $A_N B_N = \sum_{(p,q) \in I_N \times I_N} a_p b_q$.

Mais $C_N = \sum_{n=0}^N c_n = \sum_{n=0}^N \sum_{p+q=n} a_p b_q = \sum_{(p,q) \in I_N^2, p+q \leq N} a_p b_q$.

On a $\{(p, q) \mid p+q \leq N\} \subset \{(p, q) \mid p, q \in I_N\}$, donc $C_N \leq A_N B_N$ (1) qui est bornée car A_N CV et B_N CV $\implies C_N$ bornée.

On a aussi l'inégalité : $A_N B_N \leq C_{2N}$ (2)

 **Note de rédaction :** Deuxième schéma

car $\{(p, q) \mid p+q \leq N\} \supset \{(p, q) \mid 0 \leq p, q \leq N\}$. On obtient $\lim_{+\infty} c_n = \lim_{+\infty} (A_N B_N) = (\lim_{+\infty} A_N) \cdot (\lim_{+\infty} B_N)$. \square

Théorème :

Soient $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries à termes dans \mathbb{C} .

Si les séries sont ACV, alors la série produit $\sum_{n \geq 0} c_n$ est ACV.

Preuve:

On considère $A_N = \sum_{n=0}^N |a_n|$, $B_N = \sum_{n=0}^N |b_n|$ et $C_N = \sum_{n=0}^N |c_n|$.

D'après la proposition précédente et sa démonstration, on a $A_N B_N - C_N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$. (on va utiliser cette propriété)

On a $\forall N \in \mathbb{N}$, $|(\sum_{n=0}^N a_n)(\sum_{n=0}^N |b_n|) - (\sum_{n=0}^N |c_n|)|$.

On peut donc écrire :

$$|(\sum_{n=0}^N a_n)(\sum_{n=0}^N |b_n|) - (\sum_{n=0}^N |c_n|)| = |\sum_{p \in I_N} \sum_{q \in I_N} a_p b_q - \sum_{(p,q) \in I_N^2, p+q \leq N} a_p b_q| = |\sum_{(p,q) \in I_N^2} a_p b_q - \sum_{(p,q) \in J_N^2} a_p b_q| \text{ où } J_N = \{(p,q) \mid p+q \leq N\}$$


Or $J_N \subset I_N^2$, donc

$$|\sum_{(p,q) \in I_N^2} a_p b_q - \sum_{(p,q) \in J_N^2} a_p b_q| = |\sum_{(p,q) \in I_N^2 \setminus J_N^2} a_p b_q| = \sum_{(p,q) \in K_N} |a_p b_q|$$


où $K_N = I_N^2 \setminus J_N^2 = \{(p,q) \mid p+q > N\}$.


$$\leq \sum_{(p,q) \in K_N} |a_p| |b_q| = (\sum_{n=0}^N |a_n|)(\sum_{n=0}^N |b_n|) - \sum_{n=0}^N |c_n| = A_N B_N - C_N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

par la proposition précédente et l'inégalité triangulaire.

 **Note de rédaction** : À changer dans la démo A_N en A'_N et B_N en B'_N .

De plus, il faut mettre $C'_N = \sum_{n=0}^N |c'_n| = \sum_{n=0}^N |a_n| |b_{n-k}|$ et pas $|\sum_{n=0}^N a_k b_{n-k}|$.

 **Remarque** : L'hypothèse d'absolue convergence pour $\sum a_n$ et $\sum b_n$ est très importante dans le théorème. L'hypothèse de positivité dans la proposition qui précède le théorème est fondamentale.

 **Exemple** : On considère la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

- u_n n'est pas positive.
- On a pas l'absolue convergence.
- Le CSSA s'applique car $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ est positive, décroissante et tend vers 0.

Considérons le produit de Cauchy. $(\sum_{n \geq 1} u_n)(\sum_{n \geq 1} u_n) = \sum_{n \geq 1} c_n$ où $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \cdot \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k}}$

Montrons que $\sum_{n \geq 1} c_n$ diverge (en montrant que ça ne tend pas vers 0).

$$\text{On a } |c_n| = |\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k \cdot (n-k)}}|$$


$$\text{On a } k(n-k) \leq kn - k^2 \leq kn \leq (n-1)n.$$

$$\text{Donc } |c_n| = |\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k \cdot (n-k)}}| \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{(n-1)n}} = \frac{n-1}{\sqrt{(n-1)n}} = \sqrt{\frac{n-1}{n}}.$$

$$\text{Donc } |c_n| \not\rightarrow 0.$$

Conclusion : Pour faire le produit de Cauchy de deux séries, il faut :

1. Que les deux séries soient ACV.
2. ou Que les deux séries soient à termes positifs et CV.


 **Application** : Fixons $z \in \mathbb{C}$. Etudions la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$.

1. Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$ la série ACV.

$$\text{On va utiliser la règle de d'Alembert : } \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{|z|}{(n+1)}.$$

$$\text{Donc } \forall z \in \mathbb{C}, \frac{z^n}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Donc $\forall z \in \mathbb{C}$, $\sum_{n \geq 0} u_n(z)$ est ACV.

 **Remarque** : On a le bon goût de pouvoir appeler $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} := \exp(z)$. (je dis bon goût mais ça risque de faire mal bientôt)

2. Calculons $\exp(z) \cdot \exp(z')$ avec $z, z' \in \mathbb{C}$.

Comme les deux séries sont ACV, on peut faire le produit de Cauchy.


$$\exp(z) \cdot \exp(z') = \sum_{n \geq 0} c_n \text{ où } c_n = \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \cdot \frac{(z')^{n-k}}{(n-k)!}$$

On a $c_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} z^k (z')^{n-k} = \frac{(z+z')^n}{n!}$ par le binôme de Newton.

$$\text{Donc } \exp(z) \cdot \exp(z') = \sum_{n \geq 0} \frac{(z+z')^n}{n!} = \exp(z+z').$$

VIII Compléments

A Hors-programme : Séries commutativement convergentes

 **Note de rédaction** : On a traité de ça en parlant rapidement de permutations. À voir chez Laurent si c'est nécessaire à mettre, mais je l'omets ici pour l'instant.

B Introduction aux séries de Taylor d'une fonction

Définition : Considérons $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ où I est un intervalle ouvert contenant 0 .


Supposons que $f \in C^\infty(I)$. (i.e. f est dérivable autant de fois qu'on veut sur I et les dérivées sont continues).


La **série de Taylor** associée à f au voisinage de 0 est la série $\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Ici, $x \in \mathcal{V}(0)$ (cela peut être I tout entier). Et il s'agit en fait d'une série de fonctions: $x \in \mathcal{V}(0) \subset I \mapsto \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.
À ce stade du cours, on y pense comme une série numérique à x fixé.

Deux questions se posent :

1. Pour quels $x \in I$ la série de Taylor $\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ converge-t-elle ?
2. Si elle converge "pour des x ", a-t-elle pour somme $f(x)$?

 **Remarque** : Plus généralement, si I est quelconque et que on prend $a < b \in I$, les mêmes questions se posent de la façon suivante : $f(b) = \sum_{n \geq 0} \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)$?

 **Remarque** : Les sommes partielles de la série de Taylor associée à f , i.e. $\sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, x \in I$ sont appelées **polynômes de Taylor**

Réponses partielles aux questions.

1. Utiliser les règles de d'Alembert ou de Cauchy pour déterminer les $x \in I$ tels que $\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ converge.
2. Utilisons la formule de Taylor avec reste intégral si on veut montrer que pour les x où $\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ converge, on a $f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.
Ou de manière équivalente $\sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} f(x)$. (convergence à x fixé !)

 **Application** : Retrouvons la formule de Taylor avec reste intégral.

Théorème fondamental de l'analyse : Rappel (admis)

Soit $x \in I, x > 0$.

$$\text{Alors } f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t) dt.$$

$$\begin{aligned} \int_0^x f'(t) dt &= \int_0^x (t-x)' f'(t) dt = [(t-x)f'(t)]_0^x - \int_0^x (t-x)f''(t) dt. \\ &= -xf'(0) + \int_0^x (x-t)f''(t) dt. \end{aligned}$$

Ce qui se réécrit : $f(x) - f(0) - xf'(0) = \int_0^x (x-t)f''(t) dt$.

On refait la même chose pour f'' :

$$\int_0^x (x-t)f''(t) dt = \int_0^x ((x-t)^2/2)' f''(t) dt = -[(x-t)^2/2 f''(t)]_0^x + \int_0^x (x-t)^2/2 f^{(3)}(t) dt.$$

$$= -x^2/2f''(0) + \int_0^x (x-t)^2/2f^{(3)}(t)dt.$$

Ce qui se réécrit : $f(x) - f(0) - xf'(0) - x^2/2f''(0) = \int_0^x (x-t)^2/2f^{(3)}(t)dt.$

Puis on continue par récurrence et on a :

Théorème : Taylor avec R.I.

$$f \in \mathcal{C}^\infty(I), I \ni 0$$

$$\text{On a } \forall x \in I, x > 0, f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

Remarque : Pour montrer que $\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ converge vers $f(x)$, il suffit de montrer que le $R_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, où R_n est le reste.

On a $|R_n(x)| = \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt \right|$. En principe, majorer $R_n(x)$!

Application : On prend $f(x) = \exp(x)$, $I = \mathbb{R}$.

On a que $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(x) = \exp(x)$. Sa série de Taylor au voisinage de 0 est $\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$.

1. Convergence

$$u_n(x) = \frac{x^n}{n!}.$$

On utilise la règle de d'Alembert : $\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \frac{|x|}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \forall x \in \mathbb{R}.$

Or $0 < 1$, donc $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ est ACV, $\forall x \in \mathbb{R}$.

2. Somme

On veut montrer que $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} = \exp(x), \forall x \in \mathbb{R}.$

Par la formule de Taylor avec reste intégral, on a $|f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k| = |R_n(x)| = \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e(t)dt \right|$
 $\leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^x \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \forall x \in \mathbb{R}.$

Donc $\exp(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}, \forall x \in \mathbb{R}.$

Exemple : Calculons la valeur de $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!}$.

On sait que $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} = \exp(x)$, donc en prenant $x = 1$, on obtient $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} = \exp(1) = e.$