Chapitre 4 : Variables aléatoires

I Définitions

Rappel : Un rappel a été proposé sur l'image réciproque d'un ensemble par une application.

Définition : Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et soit E un ensemble dénombrable.
Une **variable aléatoire à valeurs dans** E est une application de Ω dans E.

De manière générique, on la note $X : \Omega \to E$

Vocabulaire : On écrira souvent *v.a.r.* pour *variable aléatoire réelle*, ie. une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Définition : Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire à valeurs dans E.
La **loi de** X est une probabilité définie sur E par :

$$\mu_X(A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A)) := \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\})$$

où $A \in \mathcal{P}(E)$

Application : Vérifier en montrant les axiomes de la probabilité que μ_X est bien une probabilité sur E.

Exemple : On lance deux dés. $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^2 = \{(\omega_1, \omega_2) : \omega_i \in \{1,2,3,4,5,6\}\}$ et $\mathbb{P}$ est la probabilité uniforme.
On pose $S : \Omega \to \{2, 3, \ldots, 12\}$ définie par $S((\omega_1, \omega_2)) = \omega_1 + \omega_2$.
$\mu_S(2) = \mathbb{P}(S^{-1}(\{2\})) = \mathbb{P}(\{(1,1)\}) = \frac{1}{36} = \mathbb{P}(S = 2)$
$\mu_S(3) = \mathbb{P}(S^{-1}(\{3\})) = \mathbb{P}(\{(1,2),(2,1)\}) = \frac{2}{36} = \mathbb{P}(S = 3)$
$\mu_S(4) = \mathbb{P}(S^{-1}(\{4\})) = \mathbb{P}(\{(1,3),(2,2),(3,1)\}) = \frac{3}{36} = \mathbb{P}(S = 4)$
$\ldots$

Vocabulaire : On a les abréviations et/ou notations suivantes :

- $\mu_X(A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A)) = \mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\})$
- $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X^{-1}(\{k\})) = \mu_X(\{k\})$

Exemple : On va ici illustrer la loi de Bernouilli.
La loi de Bernouilli est donnée par $\mu(\{0\}) = 1 - p$ et $\mu(\{1\}) = p$ où $p \in [0, 1]$.
Une **variable de Bernouilli** de paramètre p est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathbb{P})$ $X : \Omega \to \{0, 1\}$ telle que μ_X est la loi de Bernouilli de paramètre p.
On la note $Ber(p)$

II Lois usuelles

A Loi de Bernouilli

Définition : La **loi de Bernouilli** de paramètre $p \in [0,1]$ est la mesure de probabilité sur $\{0,1\}$ définie par $\mu(\{0\}) = 1-p$ et $\mu(\{1\}) = p$.
On la note $Ber(p)$ ou $\mathcal{B}(p)$.

B Loi uniforme

Définition : Soit E un ensemble fini.
La **loi uniforme sur** E est définie par $\mu(\{x\}) = \frac{1}{|E|}$ pour tout $x \in E$. On la note $\mathcal{U}(E)$

C Loi binomiale et loi de Poisson

Définition : Soit $n \geq 1$ un entier et soit $p \in [0,1]$.
La **loi binomiale de paramètres** n **et** p est définie par $\mu(\{k\}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$.
On la note $Bin(n,p)$ ou $\mathcal{B}(n,p)$.

Proposition :

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables indépendantes de loi $Ber(p)$ pour un certain paramètre $p \in [0,1]$.
La variable aléatoire $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ suit la loi $\mathcal{B}(n,p)$.

Corollaire :

Soient $n_1, n_2 \geq 1$ des entiers et soient $p_\in [0,1]$ un paramètre.
Soit S_1 une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(n_1,p)$ et soit S_2 une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(n_2,p)$ indépendantes.
La loi de $S_1 + S_2$ est $\mathcal{B}(n_1+n_2,p)$.

Définition : La **loi de Poisson** de paramètre $\lambda > 0$ est définie par $\mu(\{n\}) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On la note $\mathcal{P}(\lambda)$ ou $Po(\lambda)$.

Proposition : Approximation de la loi binomiale

$\forall k \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda > 0$, alors on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Exemple : Une usine fabrique 1500 composants électroniques par jour. Chaque composant a une chance sur 1000 d'être défectueux (indépendamment les uns des autres). Le nombre de composants défectueux suit la loi binomiale $\mathcal{B}(1500, \frac{1}{1000})$.
La proposition assure que cette loi est bien approximée par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = \frac{3}{2}$. On notera qu'il est plus pratique de manipuler la loi de Poisson que la loi binomiale :

$$e^{-\frac{3}{2}} \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^3}{3!} \quad \text{vs} \quad \binom{1500}{3} \left(\frac{1}{1000}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{1000}\right)^{1497}$$

Proposition : Transformation affine d'une variable suivant une loi de poisson

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ, alors $X+Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

D Loi géométrique

Définition : La **loi géométrique** de paramètre $p \in]0,1]$ est la mesure de probabilité sur $\mathbb{N}$ définie par $\mu(\{n\}) = p \cdot (1-p)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On la note $Geom(p)$.

Remarque : La loi géométrique apparaît lorsqu'on s'intéresse au premier temps (aléatoire !) de succès dans un tirage à pile ou face.

Proposition :

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite infinie de variables aléatoires indépendantes de la loi $Ber(p)$ pour un certain $p \in]0,1]$.
Soit $N = \inf\{n \in \mathbb{N} : X_n = 1\}$ le premier temps de succès.
Alors N suit la loi $Geom(p)$.

Exemple : On lance une pièce de monnaie équilibrée jusqu'à ce que l'on obtienne un pile.
La variable aléatoire N qui correspond au nombre de lancers nécessaires pour obtenir un pile suit la loi géométrique de paramètre $p = \frac{1}{2}$.
$\mathbb{P}(N=0) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(N=1) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(N=2) = \frac{1}{8}$, $\ldots$

E Loi hypergéométrique

Définition : La loi hypergéométrique de paramètres n, K, N avec $N \geq K \geq 1$ et $N \geq n \geq 1$ est la mesure de probabilité sur $E = \{0, 1, \ldots, K\}$ définie par :

$$\mu(\{k\}) = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}} \quad \text{pour tout } k \in E$$

Remarque : Lorsque $n-k$ est plus grand que $N-K$ ou lorsque k est plus grand que n, alors $\mu(\{k\}) = 0$.

Proposition :

On considère une urne contenant K boules blanches et $N-K$ boules noires. On tire au hasard n boules de l'urne sans remise.
Le nombre total de boules blanches tirées suit une loi hypergéométrique de paramètres n, K, N.

III Fonction d'une variable aléatoire

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans un ensemble dénombrable E.
Soit $g : E \to F$ une fonction, avec F un ensemble dénombrable. On peut définir une variable aléatoire $Y = g(X)$.

Proposition :

La variable aléatoire Y est bien définie et sa loi μ_Y sur F est donnée par :

$$\forall A \in \mathcal{P}(F), \quad \mu_Y(A) = \mu_X(g^{-1}(A)) = \mu_X(\{x \in E : g(x) \in A\})$$

Exemple : Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $E = \{-1, 0, 1\}$ dont la loi est donnée par :

$$\mu_X(\{-1\}) = \frac{1}{6}, \quad \mu_X(\{0\}) = \frac{1}{2}, \quad \mu_X(\{1\}) = \frac{1}{3}$$

Soit Y la variable aléatoire à valeurs dans $F = \{0,1\}$ définie par $Y = X^2$. On trouve alors :

$$\mu_Y(\{0\}) = \sum_{x \in E : x^2 = 0} \mu_X(\{x\}) = \mu_X(\{0\}) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mu_Y(\{1\}) = \sum_{x \in E : x^2 = 1} \mu_X(\{x\}) = \mu_X(\{-1\}) + \mu_X(\{1\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

Contents