Chapitre 5 : Séries entières

I Introduction et convergence d'une série entière

Définition : Une **série entière** est une série de fonction dont le $n^{\text{ème}}$ terme général est un monôme de degré n.
C'est-à-dire que c'est une série de la forme $\sum_n a_n z^n$ où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes ($\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ ou $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$) et z est une variable complexe.

Remarque : Comme séries de fonctions, les propositions vues sur le chapitre sur les séries de fonctions, exceptées celles sur la dérivation, s'appliquent aux séries entières.

Exemple : Quelques séries entières :

$$\sum_{n\geq 0} z^n \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!} \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n} \qquad \cdots$$

Rappel : Le sup d'une partie de $\mathbb{R}$ est défini par $sup(A) = min\{x \in \mathbb{R} : A \subset]-\infty, x]\}$ et le inf d'une partie de $\mathbb{R}$ est défini par $inf(A) = max\{x \in \mathbb{R} : A \subset [x, +\infty[\}$.

Lemme :

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière et $z_0 \in \mathbb{C}$.

1. Si $\sum_{n\geq 0} a_n z_0^n$ converge absolument, alors la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge normalement sur $\overline{D}(0, |z_0|) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq |z_0|\}$.
2. Si $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge normalement sur $\overline{D}(0, r)$ pour tout $r < |z_0|$

Démonstration :
1. Soit $z \in \overline{D}(0, |z_0|)$ et soit $n \in \mathbb{N}$.
On a $|a_n z^n| = |a_n||z|^n \leq |a_n||z_0|^n$.
Et de plus $\sum_{n\geq 0} |a_n||z_0|^n$ converge par hypothèse et est indépendant de z.

Donc la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge normalement sur $\overline{D}(0, |z_0|)$.

2. Soit $r < |z_0|$.
Montrons que $\sum_{n\geq 0} a_n r^n$ converge absolument.

et $1 \Rightarrow 2$ et $|a_n|r^n = |a_n||z_0|^n \cdot \left(\frac{r}{|z_0|}\right)^n \leq M \cdot \left(\frac{r}{|z_0|}\right)^n$ pour un certain $M = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n||z_0|^n$.
et comme série géométrique de raison $\frac{r}{|z_0|} < 1$, la série $\sum_{n\geq 0} M \cdot \left(\frac{r}{|z_0|}\right)^n$ converge.
D'où la série $\sum_{n\geq 0} a_n r^n$ converge absolument.

Définition : On appelle **rayon de convergence** de la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ le nombre $R \in [0, +\infty[$ défini par $R = \sup\{r \in [0, +\infty[: (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée$\} = \sup\{r \in [0, +\infty[: \sum_{n\geq 0} a_n r^n$ converge$\}$.

Définition : On appelle **disque ouvert de convergence** de la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ l'ensemble $D(0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ où R est le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$.

Remarque : Si $R = 0$, $D(0, R) = \emptyset$ et si $R = +\infty$, $D(0, R) = \mathbb{C}$

Exemple : La série $\sum_{n\geq 0} z^n$ converge si et seulement si $|z|<1$ sur $\{z\in\mathbb{C} : |z|<1\} = D(0,1)$

Exemple : Soit $z\in\mathbb{C}$. On pose $u_n = \frac{z^n}{n!}$. Alors on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{z^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{z^n} = \frac{z}{n+1} \to 0$ lorsque $n\to+\infty$.
Par le critère de d'Alembert, la série $\sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{n!}$ converge pour tout $z\in\mathbb{C}$ et on dira que le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{n!}$ est $+\infty$.

Théorème :

Une série entière converge absolument en tout point du disque ouvert de convergence et converge normalement sur tout disque fermé inclus dans le disque ouvert de convergence. En particulier, la somme est continue en tout point du disque ouvert de convergence.

Note de rédaction : cf. Laurent pour la preuve

Remarque : On déduit que $\{r\in[0,+\infty[: \sum_{n\geq 0} a_n r^n \text{ converge}\} = [0,R[$ ou $[0,R]$.
Autrement dit, il y a convergence sur $D(0,R) = \{z\in\mathbb{C} : |z|<R\}$ et il y a divergence sur $\{z\in\mathbb{C} : |z|>R\}$. Par contre, on ne peut rien dire sur le cercle $\{z\in\mathbb{C} : |z|=R\}$.

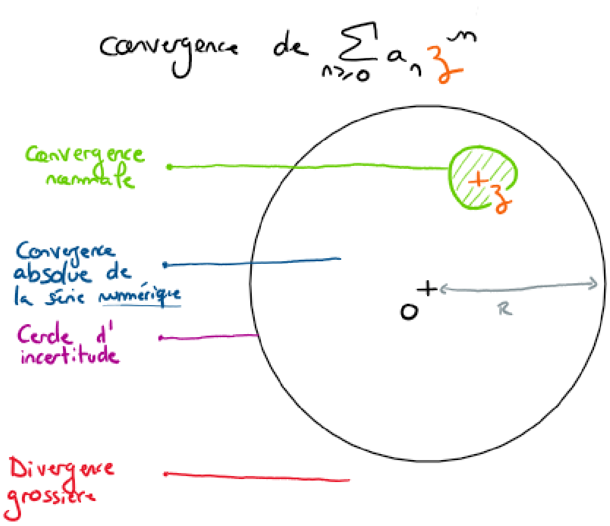

Figure 1: Conditions de convergence d'une série entière

Exemple :

- $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ a pour rayon de convergence $R=1$. En effet, $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ converge si et seulement si $|z|<1$. En particulier, il y a divergence si $|z|=1$.
- $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n^2}$ a pour rayon de convergence $R=1$. En effet, $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n^2}$ converge si et seulement si $|z|\leq 1$ (sinon, divergence grossière). En particulier, il y a divergence si $|z|>1$.

Remarque : $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière. Si $(a_n r^n)$ est bornée sur $R\geq r$, sinon $R\leq r$

Théorème : Critères de d'Alembert et Cauchy

Soit R le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

1. Si $|a_n|^{\frac{1}{n}} \to l$ lorsque $n \to +\infty$, alors $R = \frac{1}{l}$
2. Si $a_n \neq 0$ à partir d'un certain rang et si $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \to l$ lorsque $n \to +\infty$, alors $R = \frac{1}{l}$.

On pose les conventions suites : lorsque $l = 0$, $R = +\infty$ et lorsque $l = +\infty$, $R = 0$.

Exemple : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n^2}$ a pour rayon de convergence $R = 1$ car $\frac{1}{n^2}^{\frac{1}{n}} \to 1$ lorsque $n \to +\infty$.

Remarque : Si f est définie sur $D(0,1)$. Alors $z \mapsto f(az)$ est définie sur $D(0, \frac{1}{a})$.

Note de rédaction : cf. Laurent pour l'exemple

Note de rédaction : Une proposition hors programme sur la limsup a été vue en cours, mais elle n'est pas au programme, donc pas ici.

Proposition :

Soit $\frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle. Alors, pour n_0 assez grand $\sum_{n \geq n_0} \frac{P(n)}{Q(n)} a_n z^n$ est bien défini et son rayon et convergence est le même que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

Note de rédaction : cf. Laurent pour la preuve

Exemple : $\sum a_n z^n$, $\sum \frac{a_n}{n} z^n$, $\sum \frac{a_n}{n^2} z^n$ ont le même rayon de convergence.

Proposition :

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.
Alors $\sum (a_n + b_n) z^n$ a pour rayon de convergence $R \geq min(R_a, R_b)$.

II Produit de séries entières

Rappel : Produit de Cauchy de séries absolument convergentes :
Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries absolument convergentes. Alors, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ où $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ est absolument convergente et on a $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right)$.

Proposition :

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.

Alors la série entière $\sum c_n z^n$ où $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ a pour rayon de convergence $R_c \geq min(R_a, R_b)$ et sur le disque ouvert de convergence $D(0, R_c)$, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right)$.

Note de rédaction : cf. Laurent pour la preuve

Exemple : On va définir $exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.
On pose $a_n = \frac{1}{n!}$. Alors $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{(n+1)!} \cdot n! = \frac{1}{n+1} \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

Par le critère de d'Alembert, $R = +\infty$.

Montrer que $\forall z, w \in \mathbb{C}\ exp(z+w) = exp(z) \cdot exp(w)$

On a $exp(z+w) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{w^n}{n!}\right) = exp(z) \cdot exp(w)$ (on utilise le produit de Cauchy de séries entières pour la troisième égalité).

III Dérivabilité

Définition : Soit $f : U \to \mathbb{C}$ où U est un disque ouvert de $\mathbb{C}$. On dit que f est **holomorphe** (ou $\mathbb{C}$-dérivable) en $z_0 \in U$ si :

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \text{ existe dans } \mathbb{C}$$

Dans ce cas, $f'(z_0)$ est cette limite. Si f est dérivable en tout point de U, on note f' sa dérivée.

✖ Attention ✖ On étend la notation de la dérivabilité de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$, mais il ne faut pas confondre ça avec la différentiabilité.

Proposition :

Soit f est $\mathbb{C}$-dérivable (ou holomorphe) en z_0. Alors f est différentiable en z_0

Note de rédaction : cf. Laurent pour la preuve

✖ Attention ✖ Réciproque fausse

Note de rédaction : cf. Laurent pour la preuve

Remarque : Les identités : $\begin{cases} Re(\frac{\partial f}{\partial x}) = Im(\frac{\partial f}{\partial y}) \\ Re(\frac{\partial f}{\partial y}) = -Im(\frac{\partial f}{\partial x}) \end{cases}$

Théorème :

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.
Alors la somme de la série entière $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est continue et holomorphe sur le disque ouvert de centre 0 et de rayon R de dérivée $f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}$.

Note de rédaction : cf. Laurent pour la preuve

Corollaire :

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière à coefficients réels de rayon de convergence $R > 0$.
Alors $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ est dérivable sur $]-R, R[$ et $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$.

Proposition :

Soit f et $g : U \to \mathbb{C}$ deux fonctions holomorphes sur U.
Alors $(\lambda f + g)' = \lambda f' + g'$, $(fg)' = f'g + fg'$.

En particulier, si f et g sont des séries entières de rayon de convergence $\geq R$, alors sur $D(0, R)$, on a $(fg)' = f'g + g'f$.

Théorème :

Une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence R est parfois dérivable pour tout $p \in \mathbb{N}$ sur $D(0, R)$ et $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ admet pour dérivée $f^{(p)}(z) = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1) \cdots (n-p+1) a_n z^{n-p} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+p) \cdot (n+1) a_{n+p} z^n$.

Remarque : On a également la formule de Taylor : $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$.

Définition : Soit U un ouvert $\mathbb{C}$ et $f : U \to \mathbb{C}$.
On dit que f est **analytique** en $z_0 \in U$ s'il existe $r > 0$ tel que sur $D(0, r)$ il existe $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n w^n$ une série entière de rayon de convergence $R \geq r$ tel que $\forall z \in \mathbb{C}, |z - z_0| < r \Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$.

On dit que aussi que f est développable en série entière de z_0 (DSE).

Remarque : f est DSE en z_0 si et seulement si $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$ au voisinage de z_0.

Théorème :

Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est série entière de rayon de convergence R.
Alors $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est DSE en tout point de $D(0, R)$.

Plus précisément $\forall z_0 \in D(0, R), f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$ sur $D(z_0, R - |z_0|)$.

Note de rédaction : cf. Laurent pour la preuve

Corollaire :

Si f est DSE en z_0, alors f est holomorphe en z_0.

Note de rédaction : Car une série entière est holomorphe sur son disque de convergence.

Vocabulaire : Soit $A \subset \mathbb{C}$. On dit que $x \in A$ est isolé dans A s'il existe $r > 0$ tel que $D(x, r) \cap A = \{x\}$

Théorème : Zéros isolés

Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière à coefficients non tous nuls de rayon de convergence R et de somme f.
Alors si f s'annule en 0, alors $\exists r > 0$ tel $D(0, r) \cap f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$, c'est-à-dire que f n'a pas d'autres zéros que 0 dans le disque ouvert de centre 0 et de rayon r.

Note de rédaction : cf. Laurent pour la preuve

Remarque : Ici, "zéro isolé" signifie que tous les points de $f^{-1}(\{0\})$ sont isolés.

Remarque : De manière générale, toute fonction analytique vérifie le théorème des zéros isolés (il suffit de le translater pour que le zéro soit en 0).

Corollaire : Unicité du DSE en un point

Si $f\colon U \to \mathbb{C}$ où U est un ouvert de $\mathbb{C}$ est DSE en $z_0 \in U$, alors la série entière qui développe f en z_0 de la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ est unique.

Définition : On dit qu'un ensemble que $U \subset \mathbb{C}$ est **connexe** si toute écriture $U = V \sqcup W$ avec V et W ouverts de U implique que $V = \emptyset$ ou $W = \emptyset$.

Note de rédaction : Cette définition n'est pas au programme, mais le prof a demandé si on la voulait quand même. Étant donné qu'elle était nécessaire pour ce qui suit, Alex (alex.theophilos@etu.u-paris.fr, @alex._jth) lui a demandé de la donner. Le prof a dit "si vous ne comprenez rien, c'est normal".

Remarque : Un ouvert de U est un ensemble de la forme $U \cap O$ où O est un ouvert de $\mathbb{C}$.

Définition : Soit U un sous-ensemble de $\mathbb{C}$, on dit que $z \in U$ est un point d'accumulation de U si $\exists (z_n)$ tel que $z_n \in U, z_n \neq z$ et $z_n \to z$.

Remarque : z est un point d'accumulation de U si et seulement si il n'est pas isolé dans U.

Théorème : Prolongement analytique

Si f et g sont deux fonctions analytiques sur un ouvert connexe U de $\mathbb{C}$ qui sont égales sur une partie de U de la forme $\{z_\infty\} \cup \{z_n \in \mathbb{N}\}$ où $z_n \to z_\infty$ (z_∞ est alors un point d'accumulation de U), alors f et g sont égales sur tout U.

Note de rédaction : cf. Laurent pour la preuve

Note de rédaction : Exemple d'application sur OneNote

Proposition :

f analytique sur $\mathbb{C} \Rightarrow f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{C} \Rightarrow f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$

Note de rédaction : cf. Laurent pour la preuve

✗ Attention ✗ La réciproque de la dernière implication est fausse.

IV Fonction exponentielle et fonctions trigonométriques

Définition : On a les fonctions suivantes :

$$exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad cos(z) = \frac{exp(iz) + exp(-iz)}{2} \qquad sin(z) = \frac{exp(iz) - exp(-iz)}{2i}$$

Et on a aussi :

$$cosh(z) = \frac{exp(z) + exp(-z)}{2} \qquad sinh(z) = \frac{exp(z) - exp(-z)}{2}$$

En particulier $cos(z) = cosh(iz)$ et $sin(z) = \frac{sinh(iz)}{i}$.

Propriété :

$exp(iz) = cos(z) + isin(z) = cosh(iz) + sh(z)$
$cos' = -sin$, $sin' = cos$, et $cosh' = sinh$, $sinh' = cosh$
cos et $cosh$ sont paires, et sin et $sinh$ sont impaires.

$cosh(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ et $sinh(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$
D'où $cosh(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ et $sinh(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

$exp(z + z') = exp(z) \cdot exp(z')$, $cos(z + z') = cos(z) \cdot cos(z') - sin(z) \cdot sin(z')$, et $sin(z + z') = sin(z) \cdot cos(z') + cos(z) \cdot sin(z')$.

$cos^2(z) + sin^2(z) = 1$ et $cosh^2(z) - sinh^2(z) = 1$.

Théorème : Propriétés de la fonction exponentielle

- $\forall a, b \in \mathbb{C}\ exp(a + b) = exp(a) \cdot exp(b)$
- $\forall z \in \mathbb{C}\ exp(z) \neq 0$ et $exp(-z) = \frac{1}{exp(z)}$
- $exp' = exp$
- $exp(\overline{z}) = \overline{exp(z)}$
- $exp_{|\mathbb{R}} > 0$ et est strictement croissante et $lim_{x\to+\infty} exp(x) = +\infty$ et $lim_{x\to-\infty} exp(x) = 0$
- Sur $]0, 2[$ $x \mapsto sin(x)$ est positive et $x \mapsto cosx$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et strictement décroissante.
- $\exists \pi \in]0, 4[$ tel quie $exp(i\frac{\pi}{2}) = i$
- La fonction exp est période de période $2i\pi$ et $exp(z) = exp(z') \Leftrightarrow z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}$
- $exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ est surjective
- $exp_{\mathbb{R}}(i\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{U}$ est surjective 2π-périodique où $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Contents