Savoir-faire	Exercices
Rattraper son retard et consolider les acquis	∞

ANALYSE

1 Convergence uniforme d'une suite de fonctions

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme des suites de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ dans les cas suivants :

1. $f_n(x) = e^{-nx}\sin(2nx)$ sur $\mathbb{R}_+$ puis sur $[a,+\infty[$, avec $a>0$.
2. $f_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n}$ sur $\mathbb{R}$, puis sur $[a,+\infty[$, avec $a>0$.

2 Convergence de séries de fonctions

Étudier les convergences simple, uniforme et normale de la série de fonctions $\sum f_n$ dans chacun des cas suivants :

1. $f_n(x) = nx^2e^{-x\sqrt{n}}$ sur $\mathbb{R}_+$
2. $f_n(x) = \frac{1}{n+n^3x^2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$
3. $f_n(x) = \frac{(-1)^n x}{(1+x^2)^n}$ sur $\mathbb{R}$
4. $f_n(x) = \frac{\sin(n^3x^2)}{1+3nx^2+2n^2}$ pour $x\in\mathbb{R}$
5. $f_n(x) = nx\exp(-nx)$ pour $x\in[0,+\infty[$

3

Soit $a\in]-1,1[$. Pour $n\in\mathbb{N}$ et $t\in[0,\pi/2]$, on pose :

$$u_n(t) = a^n\cos^n(t).$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0,\pi/2]$. Déterminer la somme de cette série.
2. En déduire l'égalité suivante :

$$\int_0^{\pi/2}\frac{dt}{1-a\cos t} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^{\pi/2}\cos^n(t)\,dt\right)a^n.$$

4 Convergence normale locale de la série des dérivées

Pour tout entier $n\geq 1$, soit $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f_n(x) = \frac{1}{n^2+x^2}.$$

1. Montrer que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. On note s la somme de cette série.
2. Montrer que s est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que pour tout réel $a>0$, la série $\sum f_n'$ converge normalement sur $[-a,a]$.
4. Montrer que s est dérivable sur $\mathbb{R}$.

5

Soit $f:]-1,1[\to\mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n\sin(nx)}{n}.$$

1. Montrer que f est de classe C^1 sur $]-1,1[$.
2. Calculer $f'(x)$ et en déduire que :

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x\sin x}{1-x\cos x}\right).$$

6 Rayons de convergence - Exemples

Calculer le rayon de convergence des séries entières de la forme $\sum a_nz^n$ lorsque la suite (a_n) est donnée par :

1. $a_n = \frac{1}{n\pi^n}$
2. $a_n = \frac{n^2\log n}{2^{3n}}$
3. $a_n = \frac{1}{n^\alpha},\ \alpha\in\mathbb{R}$
4. $a_n = \frac{n^n}{n!}$

7 Rayons de convergence - Exemples

Calculer le rayon de convergence des séries entières de la forme $\sum a_n z^n$ lorsque la suite (a_n) est donnée par :

1. $a_n = n^{\sqrt{n}}$
2. $a_n = n^n$
3. $a_n = n^{\ln n}$
4. $a_n = \begin{cases} 2^p & \text{si } n = 2p \\ 0 & \text{si n impair} \end{cases}$

8 Rayons de convergence – Séries données

Calculer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{9^n}$
2. $\sum_{n\geq 0} \frac{z^{2n}}{9^n}$
3. $\sum_{n\geq 0} \frac{z^{n^2}}{9^n}$

9 Rayons et sommes par séries connues

En se ramenant à des séries entières bien connues, calculer le rayon de convergence et la somme des séries suivantes :

1. $\sum_{n\geq 1} \frac{(n+2)^2}{(n+2)!} x^n$
2. $\sum_{n\geq 0} \frac{\sin(n\alpha)}{n!} x^n$

10 Développement en série entière

À l'aide des théorèmes d'interversion, donner le développement en série entière de :

1. $\arctan\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ en 0
2. $\ln(x+a)$ en 0, avec $a > 0$

11 Développement en série de $f(x) = \frac{e^x}{1-x}$

Pour tout $x \neq 1$, posons $f(x) = \frac{e^x}{1-x}$.

1. Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0.
On note $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ce développement et R le rayon de convergence.
2. Montrer que $R \geq 1$ et que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ pour tout $x \in]-1, 1[$.
3. En calculant un produit de séries, montrer que $a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.
4. En raisonnant par l'absurde, montrer que $R = 1$.

12 Rayons de convergence et sommes – Applications

À l'aide des théorèmes d'interversion, calculer le rayon de convergence et la somme des séries entières suivantes :

1. $\sum_{n\geq 0} n^2 x^n$
2. $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{2^{2n-1}} x^{2n}$
3. $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{1+2+\cdots+n}$

ALGÈBRE LINÉAIRE

13 Permutation dans S_8

Soit

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in S_8.$$

1. Décomposer σ en produit de cycles à supports disjoints.
2. Donner la signature de σ.
3. Décomposer σ en produit de transpositions.
4. Calculer σ^{2021}.

14 Permutation dans S_{10}

Soit σ la permutation de S_{10} donnée par :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 6 & 7 & 4 & 8 & 9 & 3 & 10 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Écrire l'inverse de σ.
2. Décomposer σ en cycles.
3. Calculer sa signature.
4. Quel est le plus petit entier non nul n tel que $\sigma^n = \mathrm{id}$?
5. Calculer σ^{147}.

15 Permutation dans S_9

Soit σ la permutation de S_9 donnée par :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 7 & 8 & 9 & 4 & 5 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le nombre d'inversions de σ et sa signature.
2. Décomposer σ en produit de cycles disjoints.
3. Décomposer σ en produit de transpositions.
4. On dit qu'une transposition est simple si elle est de la forme $(i\ i+1)$. Décomposer σ en produit de transpositions simples.
5. Quel est l'ordre de σ dans S_9 ? Calculer σ^{1000}.

ALGÈBRE BILINÉAIRE

17 Gram-Schmidt dans $\mathbb{R}^3$

Soit $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique. Construire une base orthonormée en utilisant le procédé de Gram-Schmidt à partir de la famille (u, v, w) définie par :

$$u = (1, 0, 1), \quad v = (1, 1, 1), \quad w = (-1, 1, 0).$$

17 Projection orthogonale dans $\mathbb{R}^4$

Soit $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel. On se donne :

$$u = (2, 1, 1, -1), \quad v = (1, 1, 3, -1),$$

et on pose $F = \mathrm{Vect}(u, v)$.

1. Déterminer une base orthonormale de F
2. Donner un système d'équations cartésiennes de $F^\perp$
3. Donner la projection de $w = (1, 2, -2, 2)$ sur F et sur $F^\perp$
4. En déduire la distance de w à F

18 Supplémentaire orthogonal et distance à un plan dans $\mathbb{R}^3$

On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire usuel. Soit P le plan d'équation :

$$2x + y - z + 2 = 0.$$

Déterminer le supplémentaire orthogonal de P et donner la distance de

$$u = (3, 4, 5)$$

à P.

22 Projection orthogonale

Soit E un espace euclidien et F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que l'ensemble $\{\|x - y\| \mid y \in F\}$ admet un minimum et que ce minimum est atteint en un unique vecteur $v \in F$, donné par $v = p_F(x)$, la projection orthogonale de x sur F.

19 Projection orthogonale sur un plan dans $\mathbb{R}^3$

On munit $\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire canonique. Soit H le plan d'équation :

$$2x + y - z = 0.$$

1. Donner les coordonnées d'un vecteur non nul orthogonal à H
2. Déterminer les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ du projeté orthogonal sur H d'un vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$
3. Donner la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur H
4. Déterminer une base orthonormée de H

20 Produit scalaire sur $C^0([a,b],\mathbb{R})$

On considère l'espace $E = C^0([a,b],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire suivant :

$$\langle f \mid g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)\,dt.$$

1. Justifier qu'il s'agit bien d'un produit scalaire.
2. Soit f une fonction strictement positive sur $[a,b]$. On pose :

$$l(f) = \left(\int_a^b f(t)\,dt\right)\left(\int_a^b \frac{dt}{f(t)}\right).$$

Montrer que $l(f) \geq (b-a)^2$. Étudier les cas d'égalité.

21 Identité de Polarisation

Soit E un espace euclidien, et $x, y \in E$. Interpréter et montrer l'égalité :

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

23 Base duale dans $\mathbb{R}_n[X]$

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. Soit $B = (1, X, \ldots, X^n)$ la base canonique de E, et soit $B^* = (f_0, \ldots, f_n)$ la base duale de B.

1. Soit $P = a_0 + \cdots + a_n X^n$. Pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$, exprimer $f_i(P)$ en fonction de $a_0, \ldots, a_n$.
2. Soient ϕ et ψ les deux éléments de E^* définis par :

$$\forall P \in E, \quad \phi(P) = P(1), \quad \psi(P) = P'(0).$$

Déterminer les coordonnées de ϕ et ψ dans la base B^*.

24 Critère pour une base de E^*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et soient $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$ des formes linéaires sur E. On suppose que :

$$\bigcap_{1 \leq k \leq n} \ker \ell_k = \{0\}.$$

On considère l'application linéaire $L : E \to \mathbb{R}^n$ définie pour $x \in E$ par :

$$L(x) = \begin{pmatrix} \ell_1(x) \\ \ell_2(x) \\ \vdots \\ \ell_n(x) \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que L est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
2. En déduire l'existence d'une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que :

$$\forall j, k \in \{1, \ldots, n\}, \quad \ell_k(e_j) = \delta_{j,k}.$$

3. En déduire que $(\ell_1, \ldots, \ell_n)$ est une base de E^*.

25 Supplémentaire d'un hyperplan

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et soit φ une forme linéaire non nulle sur E. Montrer que pour tout $u \in E \setminus \ker(\varphi)$, $\ker(\varphi)$ et $\mathrm{Vect}(u)$ sont supplémentaires dans E.

PROBABILITÉS

26 Deux boîtes

On considère deux boîtes : l'une contient une bille noire et une blanche, et l'autre deux noires et une blanche. On choisit une boîte au hasard, puis on tire une bille dans cette boîte.

1. Quelle est la probabilité que la bille tirée soit noire ?
2. Sachant que la bille est blanche, quelle est la probabilité que ce soit la première boîte qui ait été choisie ?

27 Jeu de cartes

A propose à B le jeu suivant : tirer r cartes parmi 52 ; si l'as de pique figure parmi les r cartes, B a gagné.

1. Quelle est la probabilité que B gagne ?
2. A envisage de tricher de la façon suivante : il subtilise k cartes ($k \leq 52 - r$) avant que B ne tire ses r cartes (ces k cartes étant prises au hasard). Quelle est alors la probabilité que B gagne ?

28 Formule des probabilités composées

Montrer que si n événements $(E_i)_{1\leq i\leq n}$ vérifient

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} E_i\right) > 0,$$

alors

$$P(E_1\cap\cdots\cap E_n) = P(E_1)\, P(E_2 \mid E_1)\, P(E_3 \mid E_1\cap E_2) \cdots P(E_n \mid E_1\cap\cdots\cap E_{n-1}).$$

29 Somme et produit de variables uniformes

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et uniformes sur l'ensemble $\{0, 1, 2\}$.

Calculer les lois de $X + Y$ et de XY.

30 Indépendance

1. On munit $\Omega := \{0, 1\}^2$ de la probabilité uniforme et l'on considère les événements :

$$A = \{0\} \times \{0, 1\}, \quad B = \{0, 1\} \times \{0\}, \quad C = \{(0, 1), (1, 0)\}.$$

   Montrer que les événements A, B, C sont deux-à-deux indépendants mais non mutuellement indépendants.

2. On munit $\Omega := \{0, 1\}^3$ de la probabilité uniforme et l'on considère les événements :

$$A = \{0\} \times \{0, 1\}^2,$$
$$B = \{0, 1\}^2 \times \{0\},$$
$$C = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\}.$$

   Montrer que

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C).$$

   Les événements A, B, C sont-ils mutuellement indépendants ?

31 Suite de lancers d'une pièce

On effectue une suite de n lancers d'une pièce à pile ou face. On suppose les lancers indépendants et on note p la probabilité d'obtenir pile à un lancer donné ($0 \leq p \leq 1$).

1. Décrire l'espace probabilisé associé à cette expérience.
2. Calculer la probabilité :
   (a) d'obtenir au moins un pile au cours des n lancers ($n \geq 1$),
   (b) d'obtenir exactement k pile ($0 \leq k \leq n$).
3. Décrire le nouvel espace obtenu lorsqu'on conditionne par l'événement « obtenir exactement k pile au cours des n lancers ».
4. On prend $n = 6$. Calculer la probabilité, sachant qu'on a obtenu exactement deux piles, que ces deux piles soient consécutifs.

32 Deux dés distinguables

On lance deux dés distinguables.

1. Définir un espace probabilisé décrivant l'expérience aléatoire.
2. Soit S la variable aléatoire représentant la somme des deux nombres obtenus. Donner l'expression de S et déterminer sa loi.
3. Soit Z la variable aléatoire donnant la valeur absolue de la différence entre les valeurs des deux dés. Donner l'expression de Z et déterminer sa loi.

33 Marche aléatoire à trois pas

On lance une pièce équilibrée trois fois de suite. Pour chaque pile obtenu, on fait un pas en avant, et pour chaque face obtenu, on fait un pas en arrière.

Soit D la distance entre le point d'arrivée et le point de départ (en nombre de pas).

1. Définir un espace probabilisé décrivant l'expérience.
2. Donner une expression de la variable aléatoire D (on pourra introduire la variable aléatoire X donnant le nombre de piles obtenus).
3. Déterminer la loi de D.

34 Lois d'images et loi conjointe

On considère $\Omega = \{a, b, c, d, e\}$ muni de la probabilité uniforme.

Soient X et Y deux variables aléatoires définies par :

$$X(a) = X(b) = X(c) = 1, \quad X(d) = 2, \quad X(e) = 3,$$

$$Y(b) = Y(d) = 1, \quad Y(a) = Y(c) = Y(e) = 2.$$

Calculer les lois de X, Y, $X + Y$ et du couple (X, Y).

35 Loi géométrique et absence de mémoire

Soit X une variable aléatoire géométrique de paramètre p, c'est-à-dire

$$P(X = n) = p(1 - p)^n \quad \text{pour } n \geq 0.$$

1. Calculer $P(X \geq n)$ pour tout entier n.
2. En déduire la propriété d'absence de mémoire :

$$P(X \geq n + m \mid X \geq n) = P(X \geq m) \quad \text{pour tous } n, m.$$

36 Somme d'indicatrices

Soient A, B, C trois événements tels que :

$$P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(B) = P(C) = \frac{5}{12},$$

$$P(A \cap B) = P(B \cap C) = \frac{4}{12}, \quad P(A \cap C) = \frac{3}{12}, \quad P(A \cap B \cap C) = \frac{3}{12}.$$

Chercher la loi de la variable aléatoire

$$X = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B + \mathbf{1}_C.$$

LANGAGE C

37 Apprentissage du cours

Voir et s'entraîner sur l'allocation mémoire dynamique et les pointeurs.

ÉLÉMENTS D'ALGORITHMIQUE

38 Apprentissage du cours

Revoir les notions suivantes des algorithmes :

1. Complexité des additions/multiplications en fonction de la taille du nombre
2. Algorithme de multiplication naïf et de Karatsuba

39 Problème de l'élément le plus original

On s'intéresse au problème suivant : étant donné une liste L de nombres *(non nécessairement entiers)* de longueur $n \geq 2$, déterminer l'élément le plus original de L, *i.e.* celui qui y apparaît le moins de fois (ou l'un quelconque d'entre eux, en cas d'égalité).

1. Décrire un algorithme naïf permettant de résoudre ce problème sans modifier la liste L, et avec mémoire auxiliaire constante.
2. Quel est l'ordre de grandeur de sa complexité en temps dans le pire cas ? Justifier.
3. Comment résoudre ce problème avec une complexité en temps strictement meilleure ? Laquelle ?

40 Algorithme de Karatsuba revisité

On rappelle l'identité remarquable $2ab = (a+b)^2 - a^2 - b^2$. En déduire une expression de $(2p \cdot a + b)^2$ faisant intervenir uniquement des puissances de 2 et les trois carrés a^2, b^2 et $(a+b)^2$.

1. En déduire un algorithme de type "diviser pour régner" inspiré de l'algorithme de Karatsuba pour
2. Calculer le carré d'un entier de n bits en temps $\Theta(n^{\log_2 3})$.
3. Justifier la complexité de cet algorithme.

3. Algorithme de Fibonacci naïf et de Fibonacci rapide
4. Algorithmes de tri : tri par insertion, tri par sélection, tri fusion

41 Montagne

On dit qu'un tableau T de n entiers est une *montagne* s'il est constitué d'une première partie strictement croissante, suivie d'une deuxième strictement décroissante, chacune pouvant éventuellement être vide.

Autrement dit, T est une montagne s'il est strictement croissant ou strictement décroissant, ou s'il existe un indice $m \in [\![1, n-2]\!]$ tel que :

$$T[0] < T[1] < \cdots < T[m] \quad \text{et} \quad T[m] > T[m+1] > \cdots > T[n-1].$$

1. Proposer un algorithme `est_une_montagne(T)` de complexité en temps optimale[1] qui teste si T est une montagne. Justifier rapidement sa correction et sa complexité.
2. **On suppose maintenant que T est une montagne.**
   Proposer un algorithme `pied(T)` de complexité en temps optimale[1] qui renvoie le plus petit élément de T. Justifier sa correction et sa complexité.
3. Étant donné un indice i, comment tester en temps constant si $i < m$, où m est l'indice (inconnu a priori) du maximum de T ?
4. En déduire un algorithme `sommet(T)` de complexité en temps optimale[1] qui renvoie le plus grand élément de T. Justifier rapidement sa correction et sa complexité.
5. Proposer un algorithme `nivelle(T)` de complexité en temps optimale[1] qui renvoie un tableau trié contenant les mêmes éléments que T. Justifier rapidement sa correction et sa complexité.

[1] C'est-à-dire l'algorithme qui vous semble le plus efficace ; il ne vous est pas demandé de prouver son optimalité.