

# Chapitre 2 : Formes linéaires et dualité

## I Formes linéaires et hyperplan

**Rappel :**  $E$  et  $F$  des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. On note  $\mathcal{L}(E, F)$  l'ensemble des applications linéaires de  $E$  dans  $F$ .

**Remarque :** On note  $\dim_{\mathbb{K}}(E)$  la dimension de  $E$  en tant qu'espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ . C'est utile, car par exemple  $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$  mais  $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$ .

**Définition :** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

On appelle **forme linéaire** sur  $E$  toute application linéaire de  $E$  dans  $\mathbb{K}$ .

On appelle l'espace dual de  $E$  et on note  $E^*$  l'ensemble des formes linéaires sur  $E$  :

$$E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$$

**Remarque :** Si  $\varphi \in E^*$  et  $x \in E$ , on peut noter  $\varphi(x) = \langle \varphi, x \rangle$ .

**Vocabulaire :** On appelle  $\langle, \rangle$  le crochet de dualité.

**Exemple :**  $E = \mathbb{R}^3$ .

On pose  $f(x, y, z) = 3x + 2y - z$ . Alors  $f \in E^*$ .

**Proposition :**

L'image d'un élément de  $E^*$  est  $\mathbb{K}$  ou  $\{0\}$  et  $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}) = 1$ .

$$\text{Im}(f) = \{0\} \Leftrightarrow f = 0.$$

**Preuve :** Appliquer le théorème du rang.

**Définition :** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

On appelle **hyperplan** de  $E$  le noyau d'une forme linéaire non nulle sur  $E$ .

**Proposition :**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et soit  $H$  un sous-espace vectoriel de  $E$ .

$H$  est un hyperplan de  $E \Leftrightarrow \exists x_0 \in E \setminus \{0\}$  tel que  $E = H \oplus \text{Vect}(x_0)$ .

De plus, si  $\dim(E) = n$ ,  $H$  est un hyperplan de  $E \Leftrightarrow \dim(H) = n - 1$ .

**Remarque :** Le prof a noté  $\mathbb{K}x_0$  au lieu de  $\text{Vect}(x_0)$ .

**Note de rédaction :** On pourrait avoir aussi :  $\forall x \in E \setminus H, E = H \oplus \text{Vect}(x)$ .

**Démonstration :**

Supposons que  $H$  est un hyperplan de  $E$ .

Par définition, il existe  $f \in E^* \setminus \{0\}$  tel que  $H = \text{Ker}(f)$ .

Soit  $x_0 \in E$  tel que  $f(x_0) \neq 0$ . En particulier,  $f(x_0) \neq 0$  (car  $f$  est non nulle).

Montrons que  $E = H \oplus \text{Vect}(x_0)$ .

Soit  $x \in H \cup Vect(x_0)$ .

Comme  $x \in Vect(x_0)$ , il existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que  $x = x_0 * \lambda$ .

Or  $x \in H \Rightarrow 0 = f(x) = f(x_0 * \lambda) = \lambda f(x_0)$ .

Comme  $f(x_0) \neq 0$ , on en déduit que  $\lambda = 0$  et donc  $x = 0$  et  $H \cap Vect(x_0) = \{0\}$ .

Montrons que  $E = H + Vect(x_0)$ .

Soit  $x \in E$ .

$$\text{On a } x = \underbrace{x - \frac{f(x)}{f(x_0)}x_0}_{\in H} + \underbrace{\frac{f(x)}{f(x_0)}x_0}_{\in Vect(x_0)}.$$

Donc  $E = H + Vect(x_0)$  et finalement  $E = H \oplus Vect(x_0)$ .

Réciproquement, supposons qu'il existe  $x_0 \in E \setminus \{0\}$  tel que  $E = H \oplus Vect(x_0)$ .

Soit  $p$  la projection sur  $Vect(x_0)$  parallèlement à  $H$ . (ie. pour  $x \in E$ ,  $p(x)$  est l'unique élément  $\lambda x_0$  dans la décomposition  $x = h + \lambda x_0$  avec  $h \in H$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ ).

Pour  $x \in E$ , on note  $\lambda(x) \in \mathbb{K}$  tel que  $p(x) = \lambda(x)x_0$ .

On a  $\lambda : E \rightarrow \mathbb{K} \in E^*$  (il suffit de montrer que  $\lambda$  est linéaire).

De plus,  $\lambda(x_0) = 1$  par définition donc  $\lambda \in E^* \setminus \{0\}$  et  $\forall h \in H, \lambda(h) = 0$  (car  $p(h) = 0$ ).

Donc  $H = \text{Ker}(\lambda)$ , c'est-à-dire que  $H$  est un hyperplan de  $E$ .  $\square$

### Proposition :

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et soient  $f, g \in E^*$ .

$$\text{ker}(f) = \text{ker}(g) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}, g = \lambda f$$

(ie.  $f$  et  $g$  sont proportionnelles).

### Démonstration :

Comme  $f$  et  $g$  sont non nulles,  $\text{ker}(f) = \text{ker}(g)$  est un hyperplan de  $E$ .

Donc  $E$  s'écrit comme  $E = H \oplus Vect(x_0)$  avec  $H = \text{ker}(f) = \text{ker}(g)$  et  $x_0 \in E \setminus \{0\}$ .

En particulier,  $x_0 \notin \text{ker}(f)$  et  $x_0 \notin \text{ker}(g)$ . (car sinon  $E = \text{ker}(f)$  ou  $E = \text{ker}(g)$  et donc  $f = 0$  ou  $g = 0$ ).

$$\text{Donc posons } \lambda = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}.$$

Montrons que  $f = \lambda g$ .

Soit  $x \in E$ .

On écrit  $x = h + \mu x_0$  avec  $h \in H$  et  $\mu \in \mathbb{K}$ .

Alors  $f(x) = f(h + \mu x_0) = f(h) + \mu f(x_0) = \mu f(x_0)$  (car  $h \in H = \text{ker}(f)$ ).

Et de même  $g(x) = g(h + \mu x_0) = g(h) + \mu g(x_0) = \mu g(x_0) = \mu \frac{f(x_0)}{\lambda}$ .

Donc  $f = \lambda g$ .  $\square$

## II Bases duales

### A Définition et exemples

#### Proposition : Dimension de l'espace dual (admis)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ . Alors  $\dim(E^*) = \dim_{\mathbb{K}}(E) \cdot \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}) = n \cdot 1 = n$ .

**Définition :** Soit  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  une base de  $E$ .

On appelle  $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$  la base duale de  $E$  définie par :

$$\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, \langle e_i^*, e_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

De manière équivalente, si  $x \in E$  s'écrit  $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$  (coordonnées de  $x$  dans la base  $(e_1, \dots, e_n)$ ), alors :  $\langle e_i^*, x \rangle = x_i$ . (car  $\langle e_i^*, \sum_{j=1}^n x_j e_j \rangle = \sum_{j=1}^n x_j \langle e_i^*, e_j \rangle = x_i$ )

Ou encore  $x = \sum_{j=1}^n \langle e_j^*, x \rangle e_j$ .

**Preuve de pourquoi est-ce une base :**

Montrons que  $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$  est une base de  $E^*$ .

Comme il y a  $n$  vecteurs dans cette famille, il suffit de montrer que cette famille est libre.

Soit  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$  tels que  $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i^* = 0_{E^*}$ .

Montrons que tous les  $\lambda_i$  sont nuls.

On applique en  $e_j$  l'application linéaire  $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i^*$  :

$$\left( \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i^* \right) (e_j) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle e_i^*, e_j \rangle = \lambda_j = 0$$

Donc la famille est libre et c'est bien une base de  $E^*$ .  $\square$

**Exemple :** Dans  $\mathbb{R}^n$ , soit  $(e_1, \dots, e_n)$  la base canonique.

Notons  $(e_1^*, \dots, e_n^*)$  sa base duale (canonique).

On a :  $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \langle e_i^*, (x_1, \dots, x_n) \rangle = x_i$ .

C'est à dire,  $e_i^* : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$ .

**Remarque :** C'est un fait général,  $(e_1^*, \dots, e_n^*)$  est la base de  $E^*$  telle que chaque  $e_i^*$  extrait la  $i$ -ième coordonnée dans la base  $(e_1, \dots, e_n)$ .

## B Représentation matricielle

**Proposition : Couplage en base et lien avec les matrices (admis)**

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  sur un corps  $\mathbb{K}$ . Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  et  $(e_1^*, \dots, e_n^*)$  sa base duale.

Soit  $x \in E$  et  $\varphi \in E^*$  écrits sous la forme

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \quad \text{et} \quad \varphi = \sum_{i=1}^n y_i e_i^*.$$

Alors

$$\langle \varphi, x \rangle = \sum_{i=1}^n y_i x_i.$$

De plus, si l'on pose

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

on obtient

$$\langle \varphi, x \rangle = {}^t Y X.$$

**Démonstration :**

Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  et  $(e_1^*, \dots, e_n^*)$  sa base duale.

Soit  $x \in E$  et  $\varphi \in E^*$ .

On écrit  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$  et  $\varphi = \sum_{i=1}^n y_i e_i^*$ .

Alors :  $\langle \varphi, x \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n y_i e_i^*, \sum_{j=1}^n x_j e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n y_i \langle e_i^*, \sum_{j=1}^n x_j e_j \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n y_i x_j \langle e_i^*, e_j \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n y_i x_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^n y_i x_i$ .

Autrement dit, si on pose  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  et  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ , on a :

$$\langle \varphi, x \rangle = {}^t Y X$$

□

**C Pratique : Calcul de bases duales**

**Définition :** On appelle **matrice de passage de  $B$  vers  $C$**  la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de la base  $C$  dans la base  $B$ .

On la note  $P_{B \rightarrow C}$ .

**Rappel :**  $A$  est la matrice de passage de  $B$  à  $B'$  si  $e'_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot e_i$ .

**Rappel :** On a la relation suivante par rapport aux coordonnées :  $X_B = P_{B \rightarrow C} X_C$ .

**Proposition : Relation entre matrices de passage**

On a  $({}^t P_{B_C^* \rightarrow B^*}) P_{B_C \rightarrow B} = I_n$  et donc  $P_{B_C^* \rightarrow B^*} = ({}^t P_{B_C \rightarrow B})^{-1}$ .

Avec les notations de la démonstration :  ${}^t P A = I_n$  c'est-à-dire  $P = ({}^t A)^{-1}$ .

**Démonstration :**

Soit  $B = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  une base de  $\mathbb{R}^n$  et  $B_C = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .

Soit  $B^* = (u_1^*, u_2^*, \dots, u_n^*)$  la base duale de  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  et  $B_C^* = (e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$  la base duale de  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ .

Notons  $A$  la matrice des coefficients de la base  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  dans la base  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ .

On écrit  $u_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$  pour  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

Alors  $A$  est la matrice de passage de la base  $B_C$  à la base  $B$ .

On note également  $P$  la matrice de passage de la base  $B_C^*$  à la base  $B^*$ .

ie  $u_i^* = \sum_{j=1}^n p_{ji} e_j^*$  pour  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . ( $= (p_{1i}, p_{2i}, \dots, p_{ni})$  dans la base canonique de  $(\mathbb{R}^n)^*$ ).

Question : peut-on calculer  $P$  à partir de  $A$  ?

$\delta_{ij} = \langle u_i^*, u_j \rangle$  (par définition de la base duale).  $= \langle \sum_{k=1}^n p_{ki} e_k^*, \sum_{l=1}^n a_{lj} e_l \rangle = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n p_{ki} a_{lj} \langle e_k^*, e_l \rangle = \sum_{k=1}^n p_{ki} a_{kj}$ .

Donc la matrice  $I_n$  est égale à la matrice produit  ${}^t P A$ .

Donc  ${}^t P A = I_n$  c'est-à-dire  $P = ({}^t A)^{-1}$ . □

**Exemple :** Soit  $u_1 = {}^t(1 \ 1)$  et  $u_2 = {}^t(-1 \ 2)$ .

La matrice de passage de la base canonique à  $(u_1, u_2)$  est  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc la matrice de passage de la base duale canonique à la base duale de  $(u_1, u_2)$  est  $P = {}^t(A^{-1}) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

Donc  $u_1^* = \frac{1}{3}(2e_1^* + e_2^*)$  et  $u_2^* = \frac{1}{3}(-e_1^* + e_2^*)$ . Donc  $\langle u_1^*, {}^t(xy) \rangle = \frac{2x+y}{3}$  et  $\langle u_2^*, {}^t(xy) \rangle = \frac{-x+y}{3}$ .

### III Bases antéduales

**Définition :** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ .

Soit  $f$  une base de  $E^*$ .

Une **base antéduale** notée  $e$  de  $E$  est telle que  $e^* = f$ .

#### Théorème :

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ .

Soit  $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  une base de  $E^*$ .

Il existe une unique base antéduale de  $f$ .

#### Lemme de séparation :

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ .

On a que  $\forall \varphi \in E^*, \langle \varphi, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$ .

En particulier, soit  $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  une base de  $E^*$  et  $x \in E$ . Alors,  $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \langle f_i, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$ .

#### Démonstration du lemme de séparation :

On suppose que  $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \langle f_i, x \rangle = 0$ .

Comme  $f$  base de  $E^*$ , on a  $\forall \varphi \in E^*, \langle \varphi, x \rangle = 0$ .

Supposons par l'absurde que  $x \neq 0$ .

Soit  $H$  un supplémentaire de  $\text{Vect}(x)$  dans  $E$ .

Alors  $E = H \oplus \text{Vect}(x)$  et  $H$  est un hyperplan de  $E$  (ie  $\dim(H) = n - 1$ ).

$\exists \varphi \in E^* \setminus \{0\}$  tel que  $H = \text{Ker}(\varphi)$ .

Comme  $E = H \oplus \text{Vect}(x)$ ,  $x \notin H$  donc  $\langle \varphi, x \rangle \neq 0$ .

Contradiction. Donc  $x = 0$ .  $\square$

#### Démonstration du théorème :

##### Unicité :

Soient  $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  et  $e' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$  deux bases antéduales de  $f$ .

Montrons que  $e = e'$ .

On a  $e^* = (e')^* = f$ .

En particulier,  $f_i(e_j) = \delta_{ij} = f_i(e'_j)$  pour tous  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

Soit  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

On a  $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, f_i(e_j - e'_j) = 0$ .

Donc par le lemme de séparation,  $e_j - e'_j = 0$  c'est-à-dire  $e_j = e'_j$ .

##### Existence :

Notons  $E^{**} = (E^*)^*$  (l'espace bidual de  $E$ ).

Soit  $J : E \rightarrow E^{**}$  l'application définie par :  $J : x \mapsto \underbrace{(\varphi \mapsto \langle \varphi, x \rangle)}_{ev_x \in E^{**}}$ .

$J$  est linéaire, montrons qu'elle est injective.

Soit  $x \in \text{ker}(J)$ , donc  $ev_x = 0_{E^{**}}$ .

Alors  $\forall \varphi \in E^*, \langle \varphi, x \rangle = 0$ .

Donc par le lemme de séparation,  $x = 0$ .

Donc  $\text{ker}(J) = \{0\}$  et  $J$  est injective.

Comme  $\dim(E) = \dim(E^{**}) = n < +\infty$  et que  $J$  est injective,  $J$  est un isomorphisme (*théorème du rang*). On pose  $e_i = J^{-1}(f_i^*)$  où  $\underbrace{(f_1^*, f_2^*, \dots, f_n^*)}_{\text{base de } E^{**}}$  est la base duale de  $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ .

Montrons que  $e^* = f$ .

Soit  $1 \leq i, j \leq n$ .

On a  $\langle f_i, e_j \rangle = \langle J(e_j), f_i \rangle = \langle J(J^{-1}(f_j^*)), f_i \rangle = \langle f_j^*, f_i \rangle = \delta_{ij}$ .

Donc  $f$  est la base duale de  $e$ , i.e.  $e^* = f$ .  $\square$

**Remarque :** On a déjà vu qu'en pratique on peut calculer des bases duales. On suppose qu'on connaît  $B$  (base de  $E$ ) et  $B^*$  (base de  $E^*$ ) et on veut calculer la base duale de  $B'$ . On note  $A = P_{B \rightarrow B'}$  la matrice de passage de  $B$  à  $B'$ . Et on note  $P = P_{B^* \rightarrow (B')^*}$  la matrice de passage de  $B^*$  à  $(B')^*$ .

On a vu que  $P = ({}^t A)^{-1}$ .

Une autre preuve de l'existence des bases antéduales est la suivante :

Étant donné une base  $f$  de  $E^*$ , on veut construire sa base antéduale  $e$ .

Soit  $B$  une base quelconque de  $E$  et  $B^*$  sa base duale.

Soit  $P$  la matrice de passage de  $B^*$  à  $f$ .

On pose  $e_j = \sum_{i=1}^n c_{ij} \cdot \varepsilon_i$  où  $\varepsilon_i$  sont les vecteurs de la base  $B$  et  $C = (c_{ij})$  la matrice de passage de  $B$  à  $e$ .

$$\begin{array}{ccc}
 E & & E^* \\
 & & \\
 \mathcal{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) & & \mathcal{B}^* \\
 \downarrow C & & \downarrow P \\
 e = (e_1, \dots, e_n) & & f = (f_1, \dots, f_n) \\
 & & \\
 \text{On doit avoir } C = ({}^t P)^{-1}.
 \end{array}$$

Figure 1: Construction d'une base antéduale.

**Synthèse :** Montrons que  $\langle f_j, e_i \rangle = \delta_{ij}$ .

On a  $f_j = \sum_{i=1}^n p_{ij} \cdot \varepsilon_i^*$  où  $\varepsilon_i^*$  sont les vecteurs de la base  $B^*$ .

De plus, on a  $e_j = \sum_{i=1}^n c_{ij} \cdot \varepsilon_i$ .

D'où :  $\langle f_j, e_i \rangle = \langle \sum_{k=1}^n p_{kj} \cdot \varepsilon_k^*, \sum_{l=1}^n c_{li} \cdot \varepsilon_l \rangle = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n p_{kj} c_{li} \langle \varepsilon_k^*, \varepsilon_l \rangle = \sum_{k=1}^n p_{kj} c_{ki} = \delta_{ij}$  car  ${}^t P C = I_n$ .

Donc  $e$  est bien la base antéduale de  $f$ . *Box*

**Exemple :** On pose  $f_1(x, y) = 3x - y$  et  $f_2(x, y) = x + 2y$ .

Déterminons la base antéduale de  $(f_1, f_2)$  dans  $\mathbb{R}^2$ .

On pose  $A := P_{B_C \rightarrow f} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$  la matrice dont les colonnes sont les coordonnées de  $f_1$  et  $f_2$  dans la base duale canonique. (ie. la matrice de passage de la base duale canonique à la base  $(f_1, f_2)$ ).

On a :  $A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ .

On a que  $({}^t A)^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ . Donc la base antéduale de  $(f_1, f_2)$  est donnée par :  $\left( \begin{pmatrix} 2/7 \\ -1/7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/7 \\ 3/7 \end{pmatrix} \right)$ .