Chapitre 5 : Déterminants

I Aire algébrique dans le plan

Soit E un plan sur un corps K. Soient $u, v \in E$. Comment définir $\mathcal{A}(u, v)$, l'aire algébrique du parallélogramme construit sur les vecteurs u et v ? Propriéts attendues :

- $\mathcal{A}(\lambda u, v) = \lambda\mathcal{A}(u, v)$ pour tout $\lambda \in K$ (linéarité par rapport au premier argument) ;
- $\mathcal{A}(u, \lambda v) = \lambda\mathcal{A}(u, v)$ pour tout $\lambda \in K$ (linéarité par rapport au premier argument) ;
- $\mathcal{A}(u_1 + u_2, v) = \mathcal{A}(u_1, v) + \mathcal{A}(u_2, v)$ (additivité par rapport au premier argument) ;
- $\mathcal{A}(u, v_1 + v_2) = \mathcal{A}(u, v_1) + \mathcal{A}(u, v_2)$ (additivité par rapport au second argument) ;

Donc les applications $u \mapsto \mathcal{A}(u, v)$ et $v \mapsto \mathcal{A}(u, v)$ sont linéaires. De plus, $\mathcal{A}(u, u) = 0$ pour tout $u \in E$. Cela entraine : $(u + v, u + v) = 0$
et donc : $\mathcal{A}(u, u + v) + \mathcal{A}(v, u + v) = 0$
et donc : $\mathcal{A}(u, u) + \mathcal{A}(u, v) + \mathcal{A}(v, u) + \mathcal{A}(v, v) = 0$
et donc : $\mathcal{A}(v, u) = -\mathcal{A}(u, v)$ (antisymétrie/alternée).

Soit (e_1, e_2) une base de E.
Soient $u = ae_1 + be_2$ et $v = ce_1 + de_2$, avec $a, b, c, d \in K$.
On a : $\mathcal{A}(u, v) = \mathcal{A}(ae_1 + be_2, ce_1 + de_2)$
$= ac\mathcal{A}(e_1, e_1) + ad\mathcal{A}(e_1, e_2) + bc\mathcal{A}(e_2, e_1) + bd\mathcal{A}(e_2, e_2)$
$= (ad - bc)\mathcal{A}(e_1, e_2)$ =déterminant de u et v dans la base (e_1, e_2) multiplié par $\mathcal{A}(e_1, e_2)$.

✕ **Attention** ✕ Pour avoir une meilleure idée que le ramassis de maths crachées au tableau, voir cette vidéo (en anglais).

II Formes multilinéaires

Définition : Soit E un espace vectoriel sur un corps K, soit p un entier naturel non nul.
Soit $f : {}^{E^p}_{K}$ une application.
On dit que f est une **forme multilinéaire** si pour tout i et $(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_p) \in E^p$, $u \mapsto f(u_1, \ldots, u_{i-1}, u, u_{i+1}, \ldots, u_p)$ est une application linéaire de E dans K.
Autrement dit, f est linéaire par rapport à chacun de ses variables.

Vocabulaire : On dit que f est p-linéaire. C'est une forme linéaire si $p = 1$, une forme bilinéaire si $p = 2$.

Définition : On dit que f est **alternée** si pour tout $(u_1, \ldots, u_p) \in E^p$ et pour tout $i \neq j$, $f(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_j, \ldots, u_p) = 0_K$ dès que $u_i = u_j$.

Autrement dit, f s'annule si deux de ses arguments sont égaux.

Définition : On dit que f est **antisymétrique** si pour tous $i, j, i \neq j$ on a $f(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_j, \ldots, u_p) = -f(u_1, \ldots, u_j, \ldots, u_i, \ldots, u_p)$.

Autrement dit, permuter deux arguments de f change le signe de son image.

Proposition :

Soit $\sigma \in S_p$ une permutation et soit $f : E^p \to K$ une forme p-linéaire.
L'application $(u_1, \ldots, u_p) \mapsto f(u_{\sigma(1)}, \ldots, u_{\sigma(p)})$ est une forme p-linéaire notée f^σ.
De plus, si f est antisymétrique, on a $f^\sigma = \varepsilon(\sigma)f$ où $\varepsilon(\sigma)$ est la signature de la permutation σ.

Note de rédaction : cf. Laurent pour la preuve

Théorème : Relation entre alternance et antisymétrie

Toute forme p-linéaire alternée est antisymétrique.
De plus, si $2 \neq 0$ (i.e. 2 est inversible dans K), toute forme p-linéaire antisymétrique est alternée.

Remarque : Si $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} := \mathbb{F}_2$ et $E = \mathbb{K}$, alors : $(u = (x, y), v = (z, t)) \mapsto xz + yt$ n'est pas alternée car $(1, 0)$ et $(0, 1)$ sont distincts mais l'image est 1. Cependant, cette application est antisymétrique car $1 = -1$ dans $\mathbb{F}_2$.

Proposition :

Soit f une forme p-linéaire alternée.
Soit $(u_1, \ldots, u_p) \in E^p$ et soit $i \in \{1, \ldots, p\}$.
Soit $v_i = u_i$ + combinaison linéaire de $u_1, \ldots, \hat{u_i}, \ldots, u_p$ (c'est-à-dire des u_j avec $j \neq i$).
Alors $f(u_1, \ldots, u_{i-1}, v_i, u_{i+1}, \ldots, u_p) = f(u_1, \ldots, u_p)$.

Vocabulaire : On note $(u_1, \ldots, \hat{u_i}, \ldots, u_p)$ la famille obtenue en supprimant u_i de la famille $(u_1, \ldots, u_p)$.

III Cas des formes n-linéaires alternées sur un espace vectoriel de dimension n

Soit E un espace vectoriel de dimension n sur un corps K, et soit $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. *But : déterminer les formes n-linéaires alternées sur E.*

Proposition : Formule de développement d'une forme n-linéaire alternée

Soit $(u_1, \ldots, u_n) \in E^n$.
Posons $u_j = \sum_{i=1}^n \lambda_{ij} e_i$ avec $\lambda_{ij} \in K$.
Soit f une forme linéaire alternée sur E.
On a : $f(u_1, \ldots, u_n) = (\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \left(\prod_{j=1}^n \lambda_{\sigma(j),j}\right)) f(e_1, \ldots, e_n)$.

Remarque : Pour $n = 1$, on a : $f(u_1) = \lambda_{11} f(e_1)$ (linéarité).
Pour $n = 2$, on a : $f(u_1, u_2) = (\lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{21}\lambda_{12}) f(e_1, e_2)$ (déjà vu dans le cas bilinéaire).
Pour $n = 3$, on a : $f(u_1, u_2, u_3) = (\lambda_{11}\lambda_{22}\lambda_{33} + \lambda_{21}\lambda_{32}\lambda_{13} + \lambda_{31}\lambda_{12}\lambda_{23} - \lambda_{31}\lambda_{22}\lambda_{13} - \lambda_{21}\lambda_{12}\lambda_{33} - \lambda_{11}\lambda_{32}\lambda_{23}) f(e_1, e_2, e_3)$.
Il y a $n!$ termes dans la formule. On a l'intuition que ça ressemble à un déterminant.

Remarque : Le facteur de gauche dans la formule est indépendant de f. Celui de droite est indépendant des u_i.

Note de rédaction : cf. Laurent pour la preuve

Théorème :

1. Il existe une unique forme linéaire alternée f_0 sur E telle que $f(e_1, \ldots, e_n) = 1$.
   Elle est donnée par : $f_0(u_1, \ldots, u_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \left(\prod_{j=1}^n \lambda_{\sigma(j),j}\right)$ où $u_j = \sum_{i=1}^n \lambda_{ij} e_i$.
2. Soit une forme n-linéaire alternée f sur E.
   Il existe un unique $\lambda \in K$ tel que $f = \lambda f_0$.
   En particulier, on a $\lambda = f(e_1, \ldots, e_n)$.

IV Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

Définition : Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n, et soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
Soit $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$.
On appelle **déterminant** de la famille $(u_1, \dots, u_n)$ dans la base B eton note $det_B(u_1, \dots, u_n)$ la valeur de la forme n-linéaire alternée f_0 (définie précédemment) en $(u_1, \dots, u_n)$.

Autrement dit, si $det_B(u_1, \dots, u_n) = f_0(u_1, \dots, u_n)$ où f_0 est la forme n-linéaire alternée telle que $f_0(e_1, \dots, e_n) = 1$.
si on pose $u_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} e_i$ avec $\lambda_{ij} \in K$, on a :

Proposition : *(admis)*

L'application $(u_1, \dots, u_n) \mapsto det_B(u_1, \dots, u_n)$ est une forme n-linéaire alternée sur E.
En particulier, elle change de signe si on échange deux de ses arguments.

Proposition : Combinaison linéaire et déterminant *(admis)*

On a que $(u_1, \dots, u_n)$ est liée si $det_B(u_1, \dots, u_n) = 0$. (Et donc $(u_1, \dots, u_n)$ est une base de E si $det_B(u_1, \dots, u_n) \neq 0$).

Théorème : Déterminants dans deux bases *(admis)*

Soient B_1 et B_2 deux bases de E.
On a $det_{B_2}(u_1, \dots, u_n) = det_{B_2}(B_1) \times det_{B_1}(u_1, \dots, u_n)$.

V Déterminant d'une matrice 3x3

Note de rédaction : Voir MM1, méthode de Sarrus

VI Déterminant d'une matrice carrée

Définition : Le déterminant d'une matrice A est le déterminant dans la base canonique de la famille de vecteurs constituée par les colonnes de A.

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(K)$.
On a $det(A) = det_{B_{can}}\left(\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}\right) = ad - bc$.

Proposition : Matrices triangulaires

Si $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ est triangulaire (en particulier diagonale), on a $det(A) = a_{11} \times a_{22} \times \dots \times a_{nn}$.

Autrement dit, le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des scalaires sur sa diagonale.

Théorème : Transposée *(admis)*

Pour toute matrice carrée $A \in M_n(K)$, on a $det({}^tA) = det(A)$.

VII Déterminant d'un endomorphisme

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n, et soit B une base de E.

Théorème :

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.
Alors il existe un unique scalaire $\lambda \in K$ tel que pour tout $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$, on a :
$det_B(\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_n)) = \lambda det_B(u_1, \dots, u_n)$.
Alors λ est indépendant de B. C'est le **déterminant** de φ, noté $det(\varphi)$.

Note de rédaction : cf. Laurent pour la preuve

Théorème : Composition

Soient $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{L}(E)$.
On a : $det(\varphi_1 \circ \varphi_2) = det(\varphi_1) \times det(\varphi_2)$.

Corollaire : Isomorphisme et déterminant

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ un isomorphisme.
Alors $det(\varphi) \neq 0_K$ et $det(\varphi^{-1}) = (det(\varphi))^{-1}$.

Corollaire : Matrices

Soient $A, B \in M_n(K)$. On a :

1. $det(AB) = det(A)det(B)$;
2. Si A et B sont semblables, alors $det(A) = det(B)$.
3. Si A est inversible, alors $det(A) \neq 0_K$ et $det(A^{-1}) = (det(A))^{-1}$.

VIII Calcul de déterminants

Proposition :

Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ avec $a_{in} = 0$ si $i < n$.

On a donc $A_{n,m} = \begin{pmatrix} & 0 \\ (*) & \vdots \\ & 0 \\ & a_{nn} \end{pmatrix}$

Posons $A_{ij} \in M_{n-1}(K)$ la matrice obtenue en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne de A.

Vocabulaire :

1. Posons $\Delta_{ij} = det(A_{ij})$ le **mineur** de A d'indices (i, j).
2. Posons $(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$ le **cofacteur** de A d'indices (i, j).
3. Posons $com(A) = ((-1)^{i+j}\Delta_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(K)$ la **comatrice** de A.

Théorème :

On a $det(A) = (-1)^{i+1} a_{i1} \Delta_{i1} + \ldots + (-1)^{i+n} a_{in} \Delta_{in}$ (développement suivant la i-ème ligne).
$= (-1)^{1+j} a_{1j} \Delta_{1j} + \ldots + (-1)^{n+j} a_{nj} \Delta_{nj}$ (développement suivant la j-ème colonne).

Autrement dit, $det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}$.

Théorème : Comatrice et transposée

On a $A^t com(A) = com(A)^t A = det(A) I_n$.

Corollaire : Inversibilité

On a A est inversible si et seulement si $det(A) \neq 0_K$.
Dans ce cas, $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} {}^t com(A)$.

IX Application aux systèmes linéaires

On se donne $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ et $b \in K^n$. Soit $B = \begin{pmatrix} b1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

On cherche les solutions $X \in K^n$ à l'équation $AX = B$. En posant $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, on a le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Théorème :

Si $\det(A) \neq 0_K$, alors le système admet une unique solution donnée par $X = A^{-1}B$ (formule de Cramer).

Plus précisément, la solution $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ vérifie pour tout k :

$x_k = \frac{det(A_k(B))}{det(A)}$ où $A_k(B)$ est la matrice obtenue en remplaçant la k-ème colonne de A par le vecteur B.
Si $\det(A) = 0_K$, le système admet soit aucune, soit une infinité de solutions.

Exemple : Pour $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$.
On a : $det(A) = ad - bc$.
Si $ad - bc \neq 0$, on a $\begin{cases} x_1 = \frac{b_1 d - b_2 b}{ad-bc} \\ x_2 = \frac{ab_2 - cb_1}{ad-bc} \end{cases}$.