Savoir-faire	Exercices
Vérifier qu'une application est une distance.	1, 2
Montrer qu'une application est une norme.	3, 4
Manipuler l'inégalité triangulaire et sa version généralisée.	5, 6
Topologie : ouverts, fermés, adhérence, intérieur.	7, 8, 9, 10
Suites : convergence, Cauchy, caractérisations.	11, 12, 13, 14, 15
Continuité : ε - δ, suites, Lipschitz.	16, 17, 18
Normes équivalentes et propriétés en dimension finie.	19, 20

1 Distance induite par une norme

Montrer que si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé, alors $d(u, v) = \|v - u\|$ est une distance sur E.

2 Distance induite par une bijection

Soient (X, d) un espace métrique et $f : Y \to X$ une bijection. Vérifier que $d_Y(y_1, y_2) = d(f(y_1), f(y_2))$ est une distance.

3 Norme infinie

Montrer que $\|x\|_\infty = \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

4 Norme ℓ^1

Montrer que $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

5 Inégalité triangulaire généralisée

Dans un espace métrique (X, d), démontrer que $|d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z)$.

6 Inégalité triangulaire renversée

Dans un espace vectoriel normé, montrer que $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$.

7 Boules ouvertes

Montrer qu'une boule ouverte $B(a, r)$ d'un espace métrique est un ouvert.

8 Boules fermées

Montrer qu'une boule fermée $\overline{B}(a, r)$ est un fermé.

9 Intérieur

Montrer que $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A.

10 Adhérence

Montrer que $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A.

11 Convergence ⇒ Cauchy

Montrer qu'une suite convergente dans un espace métrique est de Cauchy.

12 Unicité de la limite

Montrer qu'une suite dans un espace métrique possède au plus une limite.

13 Caractérisation séquentielle de l'adhérence

Montrer que $x \in \overline{A}$ ssi il existe une suite $(x_n) \subset A$ telle que $x_n \to x$.

14 Caractérisation des fermés

Montrer que F est fermé ssi toute suite de F convergeant dans X converge dans F.

15 Caractérisation séquentielle de la continuité

Montrer qu'une fonction est continue en a ssi $x_n \to a$ implique $f(x_n) \to f(a)$.

16 Lipschitz ⇒ continu

Montrer qu'une application k-lipschitzienne est continue.

17 Cauchy–Schwarz

Démontrer l'inégalité de Cauchy–Schwarz dans $\mathbb{R}^n$.

18 Applications linéaires continues

Montrer que si f est linéaire et continue en 0, alors il existe $K > 0$ tel que $\|f(x)\| \leq K\|x\|$.

19 **Suites et normes équivalentes**

Montrer que si deux normes sont équivalentes, alors elles donnent les mêmes suites convergentes.

20 **Compacts de $\mathbb{R}^n$**

Montrer qu'un ensemble est compact dans $\mathbb{R}^n$ ssi il est fermé et borné.