Chapitre 2 : Espaces probabilisés

I Dénombrabilité

Définition : On dit que E est **infini dénombrable** s'il existe une bijection entre E en $\mathbb{N}$.

Définition : E est **dénombrale** s'il est fini ou infini dénombrable.

Proposition :

Si E et F sont dénombrables, alors $E \times F$ est dénombrable.

Démonstration :
Supposons E et F dénombrales, donc supposons que $E = \mathbb{N}$ et $F = \mathbb{N}$.

Proposition :

Soit $(E_i)_{i\in J}$ où $J \subset \mathbb{N}$ et E_i est dénombrable pour chaque $i \in J$.
Alors $\bigcup_{i\in J} E_i$ est dénombrable.

II Espaces probabilisés dénombrables

Définition : Soit Ω un ensemble dénombrable.
Une **probabilité** sur Ω est une application $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$ telle que :

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ et $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
2. Soit $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tq $E_i \cap E_j = \emptyset$ une suite finie ou dénombrable de parties de Ω alors $\mathbb{P}(\bigcup_n E_n) = \sum_n \mathbb{P}(E_n)$.

Remarque : Ω est aussi appelé "univers". Les parties de Ω sont appelées "événements".

Vocabulaire : $\omega \in \Omega$ est appelé un "résultat-élémentaire".

Vocabulaire : $E \in \mathcal{P}(\Omega)$ est appelé un "événement".

Remarque : $E = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots\} = \bigcup_i \{\omega_i\}$
$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(\bigcup_i \{\omega_i\}) = \sum_i \mathbb{P}(\{\omega_i\})$

Proposition : *(admis)*

Soient Ω et $\mathbb{P}$ sur Ω une probabilité sur Ω.
Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par $f(\omega) = \mathbb{P}(\{\omega\})$ pour tout $\omega \in \Omega$.
Alors :

1. $0 \leq f(\omega) \leq 1$.
2. $\sum_{\omega\in\Omega} f(\omega) = 1$.

Proposition : *(admis)*

Soit Ω un ensemble dénombrable alors et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tel que :

1. $f(\omega) \geq 0$
2. $\sum_{\omega \in \Omega} f(\omega) = 1$

Alors $\mathbb{P}_f(E) : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ définie par $\mathbb{P}_f(E) = \sum_{\omega \in E} f(\omega)$ est une probabilité sur Ω.

Démonstration :

1. $\mathbb{P}_f(E) = [0, 1]$
   $\mathbb{P}_f(E) \geq 0$ car $f(\omega) \geq 0$.
   $\mathbb{P}_f(E) = \sum_{\omega \in E} f(\omega) \leq \sum_{\omega \in \Omega} f(\omega) = 1$.

2. σ-additivité : Soit $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où $E_n \cap E_m = \emptyset$ pour $n \neq m$ et $E \in \mathcal{P}(\Omega)$.
   $\mathbb{P}_f(\bigcup_n E_n) = \sum_{\omega \in \bigcup_n E_n} f(\omega) = \sum_n \sum_{\omega \in E_n} f(\omega) = \sum_n \mathbb{P}_f(E_n)$.

Définition : Soit Ω un ensemble dénombrable et $\mathbb{P}$ une probabilité sur Ω, $(\Omega, \mathbb{P})$ est un **espace de probabilité**.

Définition : Soit Ω un ensemble fini alors la probabilité $\mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|}$ pour tout $\omega \in \Omega$ est appelée **probabilité uniforme** sur Ω.

Note de rédaction : Exemple manquant à revoir avec Laurent.