Chapitre 4.2 : Topologie des espaces métriques et des espaces vectoriels normés

I Topologie sur les espaces métriques

A Ouverts et fermés

Remarque : Un evn étant un espace métrique avec la distance $d(x,y) = N(y-x)$, toutes les notions de topologie vues ici s'appliquent aux evn.

Définition : Soit (X,d) un espace métrique.
Une boule ouverte de centre $a \in X$ de rayon $r > 0$ est $B(a,r) = \{x \in X \mid d(x,a) = d(a,x) < r\}$.

Définition : Soit (X,d) un espace métrique.
Une boule fermée de centre $a \in X$ de rayon $r > 0$ est $B_F(a,r) = \{x \in X \mid d(a,x) \leq r\}$.

Définition : Soit (X,d) un espace métrique.
La sphère de centre $a \in X$ de rayon $r > 0$ est $S(a,r) = \{x \in X \mid d(a,x) = r\}$.

Exemple : Dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $B(1,1) =]0,2[$

Exemple : Dans $\mathbb{R}^2$ avec trois métriques :
$d_1 = \|y-x\|_1$, $d_2 = \|y-x\|_2$ et $d_\infty = \|y-x\|_\infty$.
Traçons les boules de centre 0 de rayon 1 associées à chaque distance.
$B(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x,0) < 1\}$.
On a : $\|x\|_{1,2,\infty} < 1$.

- Pour d_1 : $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| < 1$. C'est un losange.
- Pour d_2 : $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < 1$. C'est un disque.
- Pour d_∞ : $\|x\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|) < 1$. C'est un carré.

Remarque : Les bordures correspondent aux sphères $S(0,1)$ associées à chaque distance. Les boules fermées $B_F(0,1)$ correspondent aux mêmes figures mais en incluant les bordures.

Définition : Une partie U de X est un ouvert de (X,d) si $\forall x \in U, \exists r > 0$ tel que $B(x,r) \subset U$.

Exemple : $]0,1[\subset \mathcal{C}(]0,1[, \mathbb{R})$ est un ouvert : $\forall x \in]0,1[, B(x, \min(x, 1-x)) \subset]0,1[$.

Définition : Une topologie sur (X,d) est l'ensemble des ouverts de (X,d). Autrement dit, $\tau = \{U \subset X \mid U \text{ est un ouvert de } (X,d)\}$.

Proposition :

1. Toute boule ouverte de (X,d) est un ouvert de (X,d).
2. Si $(U_i)_{i\in I}$ est une famille d'ouverts de (X,d), alors $\bigcup_{i\in I} U_i$ est un ouvert de (X,d). (I un ensemble quelconque)
3. Si $(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ est une famille finie d'ouverts de (X,d), alors $\bigcap_{i=1}^n U_i$ est un ouvert de (X,d).

Contre-Exemple : Si I est infini, la propriété 3 n'est pas vraie en général. Par exemple, dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, considérons la famille d'ouverts $U_n =]-1/n, 1/n[$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $\bigcap_{n=1}^\infty U_n = \{0\}$ qui n'est pas un ouvert de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

Définition : Soit (X,d) un espace métrique.
Une partie F de X est un fermé de (X,d) si son complémentaire $X \setminus F$ est un ouvert de (X,d).

Proposition :

1. Toute boule fermée de (X,d) est un fermé de (X,d).
2. Si $(F_i)_{i\in I}$ est une famille de fermés de (X,d), alors $\bigcap_{i\in I} F_i$ est un fermé de (X,d). (I un ensemble quelconque)
3. Si $(F_1, F_2, \ldots, F_n)$ est une famille finie de fermés de (X,d), alors $\bigcup_{i=1}^n F_i$ est un fermé de (X,d).

Remarque : Dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, tout intervalle fermé est un fermé, et tout intervalle ouvert est un ouvert. ($\mathbb{R}$ est ouvert).
On a : $]a, +\infty[= \bigcup_{n=1}^\infty]a, a+n[$ est un ouvert.

Remarque : X et $\emptyset$ sont des ouverts et des fermés de (X,d) (prendre r arbitrairement grand pour X et r quelconque pour $\emptyset$).

Définition : Soit $\mathcal{V} \subset X$ une partie de l'espace métrique (X,d).
On dit que $\mathcal{V}$ est un voisinage de $a \in X$ si $\exists r > 0$ tel que $B(a,r) \subset \mathcal{V}$.

Proposition :

On dit aussi que U est un ouvert de (X,d) si et seulement si U est un voisinage de chacun de ses points.

B Intérieur et adhérence

Soit (X,d) un espace métrique.

Définition : Soit $A \subset X$ une partie de l'espace métrique (X,d).

On appelle intérieur de A l'ensemble des points $a \in A$ tels que A est un voisinage de a. On le note : $\mathring{A}$.
On a :

$$\mathring{A} = \bigcup \{U \subset A \mid U \text{ est un ouvert de } (X,d)\}$$

Définition : Soit $A \subset X$ une partie de l'espace métrique (X,d).
On appelle adhérence de A l'ensemble des points $x \in X$ tels que $\forall r > 0, B(x,r) \cap A \neq \emptyset$. On le note : $\overline{A}$.
On a :

$$\overline{A} = \bigcap_{F \supset A,\, F \text{ fermé de } (X,d)} F$$

Proposition : Lien avec les ouverts

Soit $A \subset X$ une partie de l'espace métrique (X, d).

1. $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert contenu dans A.
2. Si $U \subset A$ est un ouvert de (X, d), alors $U \subset \overset{\circ}{A}$.
   Autrement dit, $\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A.

Proposition : Lien avec les fermés

Soit $A \subset X$ une partie de l'espace métrique (X, d).

1. $\overline{A}$ est un fermé contenant A.
2. Si $F \supset A$ est un fermé de (X, d), alors $\overline{A} \subset F$.
   Autrement dit, $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A.

Proposition :

1. $\overset{\circ}{A} = X \setminus \overline{(X \setminus A)}$
2. $\overline{A} = X \setminus (X \overset{\circ}{\setminus} A)$
3. $x \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset$

Proposition :

- U est ouvert $\Leftrightarrow \overset{\circ}{U} = U$.
- F est fermé $\Leftrightarrow \overline{F} = F$.

C Suites dans un espace métrique

1 Définitions

Définition : On dit qu'une suite (x_n), $x_n \in X$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, converge si $\exists x \in X$ tel que $d(x_n, x) \to 0$ quand $n \to +\infty$.
Autrement dit,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, d(x_n, x) < \varepsilon$$

Remarque : Si $(X, d) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$, on retrouve la définition usuelle de la convergence des suites réelles.

Définition : On dit que $x \in X$ est une valeur d'adhérence d'une suite (x_n) si il existe une sous suite qui converge vers x. i.e. $\exists (n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ strictement croissante telle que $d(x_{n_k}, x) \to 0$ quand $k \to +\infty$.

Proposition :

Soit (x_n) une suite de (X, d) qui converge vers x.
Alors x est la seule valeur d'adhérence de (x_n). En particulier, la limite de (x_n) est unique.

Fermés
Soit A une partie quelconque de l'espace métrique (X, d).

Proposition : Caractérisation de l'adhérence par des suites
$\overline{A} = \{x \in X \mid \exists (x_n)$ suite de $A, x_n \to x\}$.

Proposition : Caractérisation des fermés par des suites
Une partie F de (X, d) est fermée si et seulement si pour toute suite (x_n) d'éléments de F qui converge vers $x \in X$, on a $x \in F$.

D Continuité

1 Définitions

Définition : Soit $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ une application entre deux espaces métriques.

- f est continue en $a \in X$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 : x \in B(a, \delta_\varepsilon)$, alors $f(x) \in B(f(a), \varepsilon)$.
  Autrement dit, pour tout $\varepsilon \exists \delta_\varepsilon$ *tel que* $d_X(x, a) < \delta_\varepsilon \Rightarrow d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$.
- f est continue sur X si f est continue en tout point de X.

Remarque : Si $f : (\mathbb{R}, |\cdot|) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$, on retrouve la définition usuelle de la continuité des fonctions réelles.

Définition : Soit $k \geq 0$ un réel.
On dit que $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ est k-lipschitzienne si $\forall x, y \in X, d_Y(f(x), f(y)) \leq k d_X(x, y)$.

Définition : Si $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ est une application k-lipschitzienne, alors f est continue sur X.

Exemple : Exemple d'une fonction 1-lipschitzienne : $f : \substack{(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|) \to (\mathbb{R}, |\cdot|) \\ x \mapsto \|x\|}$.
En effet, $|f(x) - f(y)| = ||x| - |y|| \leq \|x - y\| = d(x, y)$ (inégalité triangulaire renversée).

2 Caractérisation de la continuité

Proposition : Caractérisation de la continuité par des suites
Soit $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ une application entre deux espaces métriques.
Alors f est continue en $a \in X$ si et seulement si pour toute suite (x_n) de X qui converge vers a, la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(a)$.

Proposition :
$f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ est continue sur X si et seulement si pour tout ouvert U de (Y, d_Y), $f^{-1}(U)$ est un ouvert de (X, d_X).

Rappel : $f^{-1}(U) = \{x \in X \mid f(x) \in U\}$.

Interlude : Inégalité de Cauchy-Schwarz
Considérons $< \cdot, \cdot > : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $< x, y >= \sum_{i=1}^n x_i y_i$. Cette application est bilinéaire, symétrique, positive et définie ($< x, x >= 0 \Leftrightarrow x = 0$).
On observe que la norme euclidienne s'écrit $\|x\|_2 = \sqrt{< x, x >}$.

On dit que $< \cdot, \cdot >$ est un produit scalaire (forme bilinéaire symétrique définie positive), et ce produit scalaire est relié à la norme 2 (il s'agit du produit scalaire euclidien).

Théorème : Inégalité de Cauchy-Schwarz
$\forall X, Y \in \mathbb{R}^n, |< X, Y >| \leq \|X\|_2 \|Y\|_2$.

Corollaire : Égalité de Cauchy-Schwarz
L'égalité $|< X, Y >| = \|X\|_2 \|Y\|_2$ est vérifiée si et seulement si X et Y sont colinéaires.

Note de rédaction : Démo à reprendre, cf screen Laurent 2

3 Continuité des applications linéaires dans les evn

A priori, les espaces vectoriels ne sont pas forcément de dimension finie.
Soit $f: (E, \| \cdot \|_E) \to (F, \| \cdot \|_F)$ une application linéaire entre deux K-espaces vectoriels normés (evn).

Proposition : Caractérisation de la continuité des applications linéaires
Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est continue de $(E, \| \cdot \|_E)$ dans $(F, \| \cdot \|_F)$.
2. f est continue en 0.
3. $\exists k > 0$ tel que $\forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq k\|x\|_E$.

E Equivalence de normes

Problème : Soit E un evn avec une normée notée $N_1 : E \in \mathbb{R}^+$.
On peut *a priori* mettre d'autres normes sur E, disons $N_2 : E \in \mathbb{R}^+$.
Si (x_n) une suite de E converge pour la norme N_1, converge-t-elle aussi pour la norme N_2 ?

Définition : N_1 et N_2 sont **équivalentes** si $\exists C, c > 0$ tels que $\forall x \in E, cN_2(x) \leq N_1(x) \leq CN_2(x)$.
On note $N_1 \sim N_2$.

Proposition :

1. $N_1 \sim N_2 \Leftrightarrow N_2 \sim N_1$.
2. Si $N_1 \sim N_2$ et $N_2 \sim N_3$, alors $N_1 \sim N_3$.

Exemple : Voir TD, normes $\| \cdot \|_1, \| \cdot \|_2, \| \cdot \|_\infty$ sur $\mathbb{R}^n$.

Remarque : Un des buts du cours est de montrer que sur $\mathbb{R}^n$ (+ généralement pour tout evn), toutes les normes sont équivalentes.

Proposition :

Soit (x_n) une suite de E, où E est muni de N_1 et N_2 deux normes équivalentes.
Alors (x_n) converge pour la norme N_1 si et seulement si (x_n) converge pour la norme N_2.

F Norme subordonnée

Soient $(E, \|\dot{|}\|_E)$ et $(F, \|\dot{|}\|_F)$.
Soit $f: E \to F$ une application linéaire continue. On a vu que la continuité d'une application linéaire entre evn se

caractérisaient de la façon suivante :
$\exists K > 0 \colon \forall x \in E \|f(x)\|_F \leq K\|x\|_E$.
Si $x \neq 0$, on peut considérer $\frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \in \mathbb{R}_+$
Par continuité de f, $\forall x \in E \setminus \{0\} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq K$.

Définition : La norme subordonnée de f par rapport à $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$ est définie par $|||f||| := \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}$.

Remarque : Cette triple barre est bien définie et correspond à la meilleure constante de continuité de f.

Proposition : Espace des applications linéaires continues

Notons $\mathcal{L}_c(E, F) = \{f \colon E \to F \mid f$ est continue$\}$. Alors $|||\cdot|||$ est une norme sur $\mathcal{L}_c(E, F)$ et $(\mathcal{L}_c(E, F), |||\cdot|||)$ est un evn.

Vocabulaire : On dit que $|||\cdot|||$ est la "norme triple".

Proposition : *(admis)*

Soit $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$. On a $|||f||| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|f(x)\|_F$ = $\sup_{\|x\|_E = 1} \|f(x)\|_F$.

Remarque : On montrera qu'en dimension finie, toute application linéaire est continue.

G Introduction à la complétude dans les espaces métriques

1 Définitions et premières propriétés

Définition : Soit (X, d) un espace métrique.
Une suite (x_n) de (X, d) est dite de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq N, d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Remarque : Si on travaille dans (X, d) = $(E, \|\cdot\|)$ un evn, avec $d_E(x, y) = \|x - y\|$, et si on se donne une autre norme $\|\cdot\|'$ sur E équivalente à $\|\cdot\|$, alors une suite est de Cauchy pour $\|\cdot\|$ si et seulement si elle est de Cauchy pour $\|\cdot\|'$.

Note de rédaction : cf. Laurent pour la démonstration de la remarque

Proposition :

1. Soit (x_n) une suite d'éléments de (X, d) qui converge vers $x \in X$.
   Alors (x_n) est une suite de Cauchy.
2. Une suite de Cauchy a au plus une valeur d'adhérence.
3. Une suite de Cauchy qui a une valeur d'adhérence converge vers cette valeur d'adhérence.

Définition : Une partie $A \in (X, d)$ est bornée si $\exists x \in X \exists r > 0$ tel que $A \subset B(x, r)$.

Illustration : Patatoïdes, une partie A dans un autre espace, avec un x dans cet autre espace, mais pas dans A.

Proposition :

Si (x_n) est une suite de Cauchy dans (X, d), alors (x_n) est bornée.

Définition : Un espace métrique (X, d) est complet si toute suite de Cauchy de (X, d) converge dans X.

Exemple : $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est complet.

Théorème :

$\mathbb{R}^d$ $(d \in \mathbb{N})$ est complet pour $\|\cdot\|_\infty$. *(feuille de TD4, exercice 13)*

2 Complétude et fermeture

Proposition :

Soit (X, d) un espace métrique.
On considère $A \subset X$, et donc A devient un espace métrique pour la distance d restreinte à A.
Si (A, d) est complet, alors A est fermé dans (X, d).

Proposition :

Soient (X, d) un espace métrique et $A \subset X$.
Si A est fermé dans (X, d) alors (A, d) est complet.

Remarque : Comme dans $\mathbb{R}$ on a la Caractérisation suivante : pour (X, d) complet, alors $(A, d) \subset (X, d)$ est complet si et seulement si A est fermé dans (X, d).

H Compacité

1 Définitions et premières propriétés

Définition : On dit qu'un espace métrique (X, d) est compact si toute suite de (X, d) admet une sous-suite convergente dans (X, d).

Remarque : On sait que si (x_n) est une suite bornée (*i.e.* $\exists a < b \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, a \leq x_n \leq b$) dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, alors par le théorème de Bolzano-Weierstrass, $\exists$ une sous-suite de (x_n) qui converge.
Autrement dit, tout segment fermé $[a, b]$ est compact avec la définition. On peut dire qu'on a choisi une définition qui "généralise" Bolzano-Weierstrass.

Proposition :

(X, d) est compact $\Rightarrow$ (X, d) est complet.

Proposition :

Soit (X, d) compact. Soit $F \subset X$ (on pense (F, d)).
Alors F est fermé $\Leftrightarrow$ (F, d) est compact.

Remarque : Dans le cas $(A, d) \subset (X, d)$:

- La définition de compacité est : toute suite (x_n) de A admet une sous-suite convergente dans A.
- La défintiion de la complétude est : toute suite de Cauchy (x_n) de A converge dans A.

Proposition :

Soit (X, d) et (Y, d') deux espaces compacts.
Alors $X \times Y$ est compact.

Autrement dit le produit d'espaces compacts est compact.

Remarque : D'abord, mussions $X \times Y$ d'une distance.
Soit $\delta\colon ((x, y), (x', y')) \in (X \times Y)^2 \mapsto d(x, x') + d'(y, y')$.

Application : Montrer que δ est une distance sur $X \times Y$.

On aurait pu considérer aussi $\delta_\infty\colon ((x, y), (x', y')) \mapsto \max(d(x, x'), d'(y, y'))$.

Remarque : Plus généralement, le produit fini d'espaces compacts est compact.

2 Fonctions continues sur un compact

Propriété fondamentale :

Soit f continue de (X, d) (compact) dans $\mathbb{R}$.
Alors f est bornée et atteint ses bornes.

Autrement dit, $m = inf_{x \in X} f(x) \leq f(x) \leq sup_{x \in X} f(x) = M$ pour tout $x \in X$, et $\exists a, b \in X$ tels que $f(a) = m$ et $f(b) = M$.

Proposition :

Soit $K \subset (X, d)$ et K compact. Alors K est borné.

Proposition HP : *(admis)*

Soit (K, d) compact. Soit $f\colon (K, d) \to (Y, d')$ continue.
Alors $f(K)$ est compact dans (Y, d').

3 Compacité dans un evn de dimension finie

Théorème :

Les compacts de $\mathbb{R}^n$ sont les fermés et bornés.

Autrement dit, $K \subset \mathbb{R}^n$ est compact $\Leftrightarrow$ K est fermé et borné.

✖ **Attention** ✖ Cette caractérisation est fausse en dimension infinie.

Contre-Exemple : Pour fixer les idées, les boules unités (par exemple) sont des compacts en dimension finie, mais pas en dimension infinie.

Théorème : Equivalence des normes

Toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes.

Théorème : Continuité automatique des applications linéaires de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$

$f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q) \Rightarrow f$ est continue.