

Chapitre 5 : Fonctions de plusieurs variables

Cadre de travail :

- $p, q \in \mathbb{N}^*$
- U ouvert de \mathbb{R}^n
- $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$
- \mathbb{R}^p et \mathbb{R}^q sont des espaces vectoriels qui peuvent être normés, donc des espaces métriques. Ainsi, toutes les propriétés et des notions des espaces métriques s'appliquent.

I Continuité

Rappel : Une suite (X_n) à valeur dans \mathbb{R}^p converge si et seulement si chacune de ses composantes converge.

Proposition :

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^q$ et $a \in U$. On écrit $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_q(x))$, $x \in U$.
On a : f est continue en $a \Leftrightarrow \forall i = 1, \dots, q, f_i(x)$ est continue en a .

Remarque : $\forall i = 1, \dots, q$, les fonctions $x \mapsto f_i(x)$ sont à valeur dans \mathbb{R} , donc on peut utiliser les résultats de la continuité pour les fonctions à valeur réelle.

Vocabulaire : On appelle les f_i les **fonctions composantes** de f .

Pour comprendre la continuité, il suffit de se restreindre aux fonctions $f : U \rightarrow \mathbb{R}$.

II Vers une bonne notion de dérivée pour les fonctions à plusieurs variables

Introduction : Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ où $]a, b[\subset \mathbb{R}$. On dit que f est dérivable en $x \in]a, b[$ si il existe un réel $f'(x)$ tel que :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + o(h)$$

Ce qui équivaut à : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ existe.

Si f est dérivable en x alors on sait que f est continue en x .

$|f(x+h) - f(x)| \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$.

A Rappels : fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^q, q \geq 1$

Soit $f : x \mapsto (f_1(x), f_2(x), \dots, f_q(x))$ (fonction coordonnées)

Définition : On dit que f est dérivable en $x \in]a, b[$ si $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x+h)}{h}$ existe. (avec $\frac{f(x) - f(x+h)}{h} \in \mathbb{R}^q$).
i.e. $\exists L \in \mathbb{R}^q$ tel que $\|\frac{f(x) - f(x+h)}{h} - L\| \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$ où $\|\cdot\|$ est une norme \mathbb{R}^q (elles sont équivalentes).

Proposition : Dérivabilité

f est dérivable en $x \Leftrightarrow \forall i = 1, \dots, q, f_i$ est dérivable en x et on a : $f'(x) = (f'_1(x), f'_2(x), \dots, f'_q(x))$.
Autrement dit, f est dérivable en x si et seulement si chacune de ses composantes est dérivable en x .

B Dérivées partielles

Soit $U \subset \mathbb{R}^p$ ouvert et $p \in \mathbb{N}^*$. On considère $f : U \rightarrow \mathbb{R}^q$.

Remarque : Penser à une fonction f définie de $U = \mathbb{R}^2$ dans \mathbb{R} , donc $p = 2$ et $q = 1$. (tous les problèmes se posent déjà dans ce cas)

On veut définir la notion de dérivées partielles en un point $a = (a_1, a_2, \dots, a_p) \in U$.

Il y a p dérivées partielles (car p variables). Prenons $k \in \{1, \dots, p\}$ et définissons la k -ième dérivée partielle de f en $a = (a_1, a_2, \dots, a_p)$.

Considérons la k -ième fonction partielle d'une variable réelle $g_k : x_k \mapsto f(a_1, \dots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \dots, a_p)$.

Les points $a_1, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_p$ sont fixés dans \mathbb{R} et x_k varie dans un voisinage de a_k .

On dit que f admet une k -ième dérivée partielle en a si g_k est dérivable en a_k et on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = g'_k(a_k)$$

Attention Avant de calculer une dérivée partielle en un point, il faut justifier qu'elles existent (i.e. que les fonctions partielles sont dérivables en les points correspondants).

Remarque : f admet une k -ième dérivée partielle en $a \Leftrightarrow$ la fonction $t \mapsto f(a + te_k)$ (où e_k est le k -ième vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^p) est dérivable en 0.

Définition : On dit que f admet des dérivées partielles en a si $\forall k \in \{1, \dots, p\}$, $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$ existe. (i.e. toutes les dérivées partielles existent en a)

Attention Problème : Malheureusement, ce n'est pas parce que f admet des dérivées partielles en a que f est continue en a . (d'où le fait de chercher une meilleure notion de dérivabilité)

Transition : On peut voir le problème de continuité en $(0, 0)$ comme le fait que $f(x, x) = \frac{1}{2}$ qui ne tend pas vers 0 quand $x \rightarrow 0$.

En fait, on regarde la trajectoire $t \mapsto (t, t)$ qui n'est pas alignée avec les axes.

Une notion plus forte que la dérivée partielle est la dérivée directionnelle.

C Dérivées directionnelles

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^q$ où $U \subset \mathbb{R}^p$ ouvert.

Soit $a \in U$ et soit h un vecteur de \mathbb{R}^p .

Considérons la fonction d'une variable réelle $\varphi : t \mapsto f(a + th)$ où t varie dans un voisinage de 0 tel que $a + th \in U$.

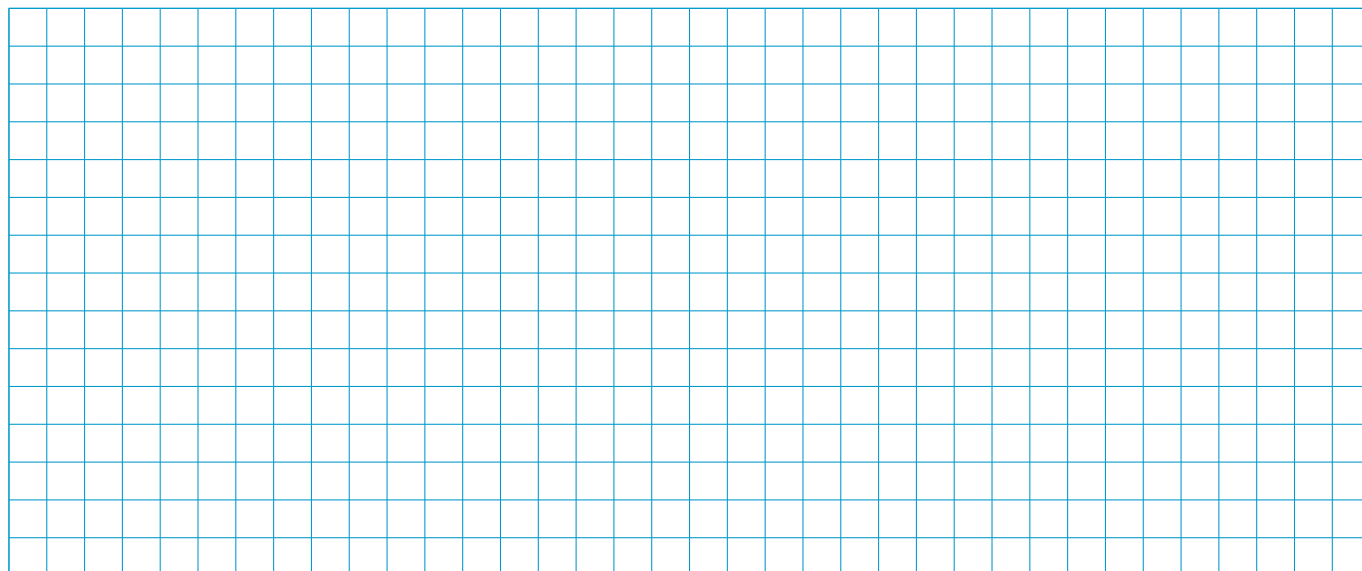
Définition : On dit que f admet une dérivée directionnelle en a selon la direction h si φ est dérivable en 0. On a :

$$\varphi'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + th) - f(a)}{t}$$


Proposition : Lien avec la dérivée partielle

Si on choisit comme direction $h = e_k$ (le k -ième vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^p), alors la dérivée directionnelle de f en a selon la direction e_k est la k -ième dérivée partielle de f en a .

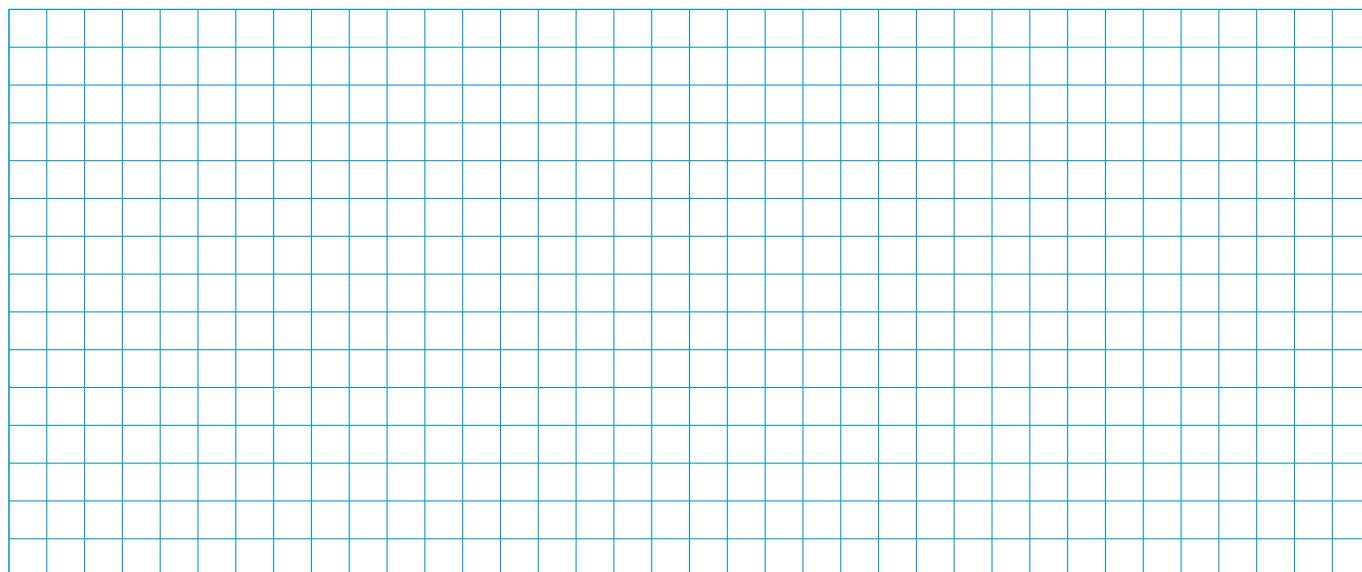
Application : Étudier la dérivée directionnelle en toutes les directions au point $(0, 0)$ de la fonction $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.



✗ **Attention** ✗ Cette notion de dérivée directionnelle est encore trop faible pour garantir la continuité de f en a .

 **Application** : Considérer $f(x, y) = \frac{y^2}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(x, y) = y$ sinon.

1. Montrer que f admet des dérivées directionnelles en tout point de \mathbb{R}^2 et en toute direction.
2. Montrer que f n'est pas continue sur \mathbb{R}^2 . *Indication : Considérer le point $(0, 1)$ et $(\frac{1}{n}, 1) \rightarrow (0, 1)$.*



D Dérivées différentielles (cette fois-ci c'est la bonne !)

La dérivée différentielle est la notion qui assure que si une fonction est différentiable en un point, alors elle est continue en ce point. Soit $f: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ et $a \in U$, où $U \subset \mathbb{R}^p$ est ouvert.

Définition : On dit que f est différentiable en $a \Leftrightarrow \exists Df(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ telle que :

$$f(a + h) = f(a) + Df(a) \cdot h + o(\|h\|) \quad \text{quand } h \rightarrow 0$$

avec $\forall h \in \mathbb{R}^p, f(a) \in \mathbb{R}^q, Df(a) \cdot h \in \mathbb{R}^q$, et $o(\|h\|) = \|h\|\varepsilon(h)$ où $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ quand $\|h\| \rightarrow 0$.

Proposition : Différentiabilité implique continuité

Si f est différentiable en a , alors f est continue en a .

Proposition : Lien avec les dérivées directionnelles

Si f est différentiable en a , alors f admet des dérivées directionnelles en a selon toutes les directions et on a :

$$\forall h \in \mathbb{R}^p, \quad \text{la dérivée directionnelle de } f \text{ en } a \text{ selon la direction } h \text{ est } Df(a) \cdot h$$

Remarque : Il existe des fonctions qui admettent des dérivées directionnelles en un point selon toutes les directions mais qui ne sont pas différentiables en ce point.

Note de rédaction : Les prochains théorèmes sont compliqués et leur preuve dépasse le cadre de ce cours. Ils seront donnés dans un cadre réduit et admis sans preuve.

Gradient d'une fonction numérique

Soit $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ où $U \subset \mathbb{R}^p$ est ouvert.

On a défini le gradient de f .

Supposons f différentiable en $a \in U$.

On a $Df(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$ (la différentielle est une forme linéaire).

Prenons $h, k \in \mathbb{R}^p$ dans la base canonique de \mathbb{R}^p .

Donc $h = (h_1, h_2, \dots, h_p)$ et $k = (k_1, k_2, \dots, k_p)$ (considérer plutôt des vecteurs colonnes, mais pas évident à écrire ici).

On note : $\langle h, k \rangle = \sum_{i=1}^p h_i k_i$ (HP : produit scalaire).

On veut $Df(a) \cdot h = \langle *, h \rangle$ pour un certain $* \in \mathbb{R}^p$.

Si $h = \sum_{i=1}^p h_i e_i$ où e_i est le i -ième vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^p , on a :

$$Df(a)h = \sum_{i=1}^p Df(a)(h_i e_i) = \sum_{i=1}^p h_i Df(a)e_i.$$

On note : $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = Df(a)e_i$ (la i -ième dérivée partielle de f en a).

$$\text{Donc : } Df(a)h = \sum_{i=1}^p h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

Pour écrire cela sous la forme $\langle *, h \rangle$, on pose :

$$\nabla f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_p}(a) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$$

(On appelle $\nabla f(a)$ le gradient de f en a)

On a donc : $Df(a)h = \langle \nabla f(a), h \rangle$.

Définition : Un point critique de f est un point x où $\nabla f(x) = 0$.

Si $f: U \rightarrow \mathbb{R}^q$ alors on a $\forall h \in \mathbb{R}^p, Df(a)h = Df(a) \cdot \sum_{i=1}^p h_i e_i = \sum_{i=1}^p h_i Df(a)e_i$.

$= \sum_{i=1}^p h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ où $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \in \mathbb{R}^q$ est la i -ième dérivée partielle de f en a .

$= \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) e_i^*$.

En notant $e_i^* = dx_i$ (forme linéaire sur \mathbb{R}^p), on a : $Df(a) = \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) dx_i$.

Matrice jacobienne

Soit $f: U \rightarrow \mathbb{R}^q$ où $U \subset \mathbb{R}^p$ est ouvert.

Supposons f différentiable en $a \in U$.

Définition : La jacobienne est la matrice de $Df(a)$ dans les bases canoniques de \mathbb{R}^p et \mathbb{R}^q . Elle est notée $J_f(a) \in M_{q,p}(\mathbb{R})$.

On a :

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_p}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_q}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_q}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_q}{\partial x_p}(a) \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{1 \leq i \leq q, 1 \leq j \leq p}$$

Remarque : On remarque que $J_f(a) = {}^t(\nabla f(a))$

Définition : Si $p = q$, alors $J_f(a) \in M_p(\mathbb{R})$.

On définit le déterminant jacobien de f en a comme étant : $\det J_f(a)$.

III Fonctions C^1, C^2

Supposons $f: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ (vrai pour \mathbb{R}^q)

Définition : On dit que f est continuellement différentiable sur U si : $a \in U \mapsto Df(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ est continue sur U .

Ce qui est équivalent à : $\forall h \in \mathbb{R}^2, a \mapsto Df(a) \cdot h$ est continue sur U .

Théorème :

f est différentiable sur $U \Leftrightarrow$ les dérivées partielles sont continues sur U .

C'est à dire, $a \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(a)$ et $a \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(a)$ sont continues sur U .

Définition : $f: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 sur U si f est différentiable sur U et si les dérivées partielles de f sont continues sur U .

Etant donnée $f: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur U , on peut se demander si f est plus régulière : est-elle de classe C^2 ?

Considérons la fonction qui $a \in U \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(a)$. (de même en remplaçant x par y)

On peut se demander si les dérivées partielles des dérivées partielles existent et sont continues.

Définition : f est de classe C^2 sur U si f est de classe C^1 sur U et si les dérivées partielles de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont continues sur U .

On note : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Théorème de Schwarz : (admis)

Si f est de classe C^2 sur U , alors :

$$\forall (x, y) \in U, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$$

On a la commutativité des dérivées partielles d'ordre 2.

Il est alors naturel de considérer la matrice $Hf(a) \in M_2(\mathbb{R})$ définie par :

$$Hf(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \end{pmatrix}$$

Le Théorème de Schwarz assure que $Hf(a)$ est une matrice symétrique (i.e. $Hf(a) = {}^t Hf(a)$).
Cela nous permet d'écrire deux développements de Taylor d'ordre 1 et 2 pour f en a :

Si f est C^1 , $f(a + (h, k)) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a)k + o(\|(h, k)\|)$ quand $(h, k) \rightarrow (0, 0)$.

Et à l'ordre 2, si f est C^2 ,

$f(a + (h, k)) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a)k + \frac{1}{2}(h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)) + o(\|(h, k)\|^2)$ quand $(h, k) \rightarrow (0, 0)$.

Bonnes vacances et bonnes révisions ! :)