Chapitre 1 : Suites de Cauchy

I Rappels sur les suites

A Définitions générales

On ne rappelera que ce qui n'est pas "évident" dans le cours de L1.

Définition : Une sous-suite (ou suite extraite) d'une suite (u_n) est une suite (v_n) : $\exists \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N},$ strictement croissante tq $v_n = u_{\varphi(n)}$

Vocabulaire : Une sous-suite de (u_n) est aussi notée (u_{n_k}).

Définition : Une suite (u_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$ si : $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\varepsilon, |u_n - l| < \varepsilon$

Vocabulaire : Si elle ne converge pas on dit qu'elle diverge. Une suite divergente peut avoir une limite (une suite qui tend vers l'infini).

Propriété : Bornes *(admise)*

Si une suite (u_n) converge, alors elle est bornée : $\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$.

Propriété : Convergence des sous-suites *(admise)*

Si une suite (u_n) converge vers l, alors toute sous-suite (u_{n_k}) converge aussi vers l.

B Propriétés et théorèmes fondamentaux

Propriété : Espace-vectoriel *(admise)*

L'ensemble des suites réelles convergentes est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Théorème : Suites adjacentes *(admis)*

Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes si :

- (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante
- $u_n \leq v_n, \forall n \in \mathbb{N}$
- $v_n - u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Si deux suites sont adjacentes, alors elles convergent vers la même limite.

Théorème : Bolzano-Weierstrass *(admis)*

Toute suite réelle bornée admet une sous-suite convergente.

II Suites de Cauchy

Note de rédaction : Tout ce qui va suivre est une application du chapitre 4 de ce cours.

Définition : Une suite (u_n) est une suite de Cauchy si : $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N_\varepsilon, |u_p - u_q| < \varepsilon$

Définition : autre formulation utile
Soit (u_n) une suite à valeur dans $(K, |\cdot|)$.
(u_n) est une suite de Cauchy si : $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}, |u_{n+p} - u_n| < \varepsilon$

Propriété : Convergence

Toute suite convergente est une suite de Cauchy.

Preuve: Soit $\varepsilon \in 0$
Comme (u_n) est convergent, $\forall N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - \ell| < \varepsilon/2$, $\forall n \geq N_\varepsilon$
$\forall p, q \geq N_\varepsilon, |u_p - u_q| = |u_p - \ell + \ell - u_q| \leq |u_p - \ell| + |\ell - u_q| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$
Ainsi, $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p, q \geq N_\varepsilon$ on a $|u_p - u_q| < \varepsilon$

Proposition : Bornes

Toute suite de Cauchy est bornée.

Preuve:
Prenons $\varepsilon = 1, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p, q \geq N$, on a $|u_p - u_q| < 1 \Rightarrow |u_p - u_q| < 1 \Rightarrow |u_p| < 1 + |u_q|$.
On a $\forall p \geq N$, on a $|u_p| < 1 + |u_q|$. Posons $M \in \mathbb{R}_+ := max\{|u_0|, |u_1|, ..., |u_{N-1}|, |u_N|\}$
Alors $|u_p| \leq M, \forall p \in \mathbb{N}$

Théorème :

Toute suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ converge dans $\mathbb{R}$.

Preuve: Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{R}}$ de Cauchy.
On sait que (u_n) est bornée par la proposition précédente.
Par le théorème de Bozano-Weierstrass, $\exists \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(u_\varphi(n))$ est convergente.
Soit $\ell \in \mathbb{R}$ sa limite. Soit $\varepsilon > 0$, $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_\varepsilon$, on a $|u_\varphi(n) - \ell| < \varepsilon/2$.
Par ailleurs, comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, $\exists N'_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p, q \geq N'_\varepsilon$, on a $|u_p - u_q| < \varepsilon/2$. Alors pour $p \geq N'_\varepsilon$ et n_0 tel que pour $n_0 \geq N_\varepsilon$ et $\varphi(n_0) \geq N'_\varepsilon$
$|u_p - \ell| \leq |u_p - u_{\varphi(n_0)}| + |u_{\varphi(n_0)} - \ell| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$
Ainsi, $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $|u_p - \ell| < \varepsilon, \forall p \geq N'_\varepsilon$.
Donc, la suite de Cauchy est bien convergente.

Remarque : On dit que $\mathbb{R}$ est complet.

Définition : On dit que $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est complet.

Exemple : Notion de complétude
$(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ n'est pas complet : la suite définie par $u_n =$ la partie décimale de $\sqrt{2}$ à la n-ième décimale est une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ qui ne converge pas dans $\mathbb{Q}$ (car $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).
Par contre, elle converge dans $\mathbb{R}$.

III Topologie de $\mathbb{R}$

A Rappels

a) Ouvert

Définition : Soit $x \in \mathbb{R}$ et $V \subset \mathbb{R}$. On dit que V est un voisinage de x si : $\exists \varepsilon > 0,]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset V$

Définition : $U \subset \mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ si : $\forall x \in U, U$ est un voisinage de x

Exemple :

- $\mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.
- $]a, b[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$
- $]a, +\infty[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$
- $]-\infty, a[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$
- L'ensemble vide est un ouvert de $\mathbb{R}$.

Propriété : Opérations sur les ouverts *(admise)*

- L'intersection finie d'ouverts est un ouvert.
- L'union quelconque d'ouverts est un ouvert.

Remarque : L'intersection infinie d'ouverts n'est pas forcément un ouvert : $\bigcap_{n=1}^{\infty}]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[= \{0\}$ qui n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$.
Toutefois, pour un n_{max} donné l'intersection de n_{max} ouverts est un ouvert.

b) Fermé

Définition : $F \subset \mathbb{R}$ est un fermé de $\mathbb{R}$ si : $\mathbb{R} \setminus F$ est un ouvert de $\mathbb{R}$

Exemple :

- $\mathbb{R}$ est un fermé de $\mathbb{R}$.
- $[a, b]$ est un fermé de $\mathbb{R}$
- Toute famille finie d'éléments de $\mathbb{R}$ est un fermé de $\mathbb{R}$.
- L'ensemble vide est un fermé de $\mathbb{R}$.

Remarque : $\mathbb{Q}$ n'est ni ouvert ni fermé dans $\mathbb{R}$.

Propriété : Opérations sur les fermés *(admise)*

- L'union finie de fermés est un fermé.
- L'intersection quelconque de fermés est un fermé.

Théorème : Caractérisation séquentielle des fermés

$F \subset \mathbb{R}$ fermé $\Leftrightarrow$ toute suite (u_n) d'éléments de F qui converge dans $\mathbb{R}$ a sa limite dans F.

Preuve:
$\Rightarrow$/ Supposons F fermé, on a $\mathbb{R} \setminus F$ ouvert.
Par l'absurde, on suppose qu'il existe une suite (u_n) d'éléments de F qui converge vers $l \in \mathbb{R} \setminus F$.
Comme $\mathbb{R} \setminus F$ est un ouvert, $\exists \varepsilon > 0,]l-\varepsilon, l+\varepsilon[\subset \mathbb{R} \setminus F$.
Par convergence de (u_n), $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\varepsilon, |u_n - l| < \varepsilon \Rightarrow u_n \in]l-\varepsilon, l+\varepsilon[\subset \mathbb{R} \setminus F$ ce qui est absurde car (u_n) est une suite d'éléments de F.

$\Leftarrow$/ On raisonne par contraposée.
Si $\mathbb{R} \setminus F$ n'est pas un ouvert, $\exists l \in \mathbb{R} \setminus F$ tel que $\forall r > 0,]l-r, l+r[\cap F \neq \mathbb{R} \setminus F$ car $\mathbb{R} \setminus F$ est au voisinage de l.
Supposons qu'il existe une suite (u_n) d'éléments de F.
En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in]l - \frac{1}{n}, l + \frac{1}{n}[\cap F \implies u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l$ et $(u_n) \in F$.

Remarque : Ce théorème est utile pour montrer qu'on a un ensemble fermé.

Définition : Soit $A \subset \mathbb{R}$.
On définit l'adhérence de A, notée $\overline{A}$, comme suit : $\overline{A} = \bigcap_{F \text{ fermé}, A \subset F} F$.
C'est le plus petit fermé contenant A.

Lemme :

Soit $A \subset \mathbb{R}$.
$x \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap A \neq \emptyset$.

Preuve:
Montrons $\Rightarrow$ par l'absurde
Soit $x \in \overline{A}$. Si $\exists r > 0$ tel que $]x-r, x+r[$.
On a $\mathbb{R} \setminus]x-r, x+r[\supset A$ qui est fermé. Absurde car $x \in \overline{A}$
Montrons $\Leftarrow$ par l'absurde
$\forall r > 0$ tel que $]x-r, x+r[\cap A \neq \emptyset$
Par l'absurde : Si $x \notin \overline{A} \Rightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \overline{A}$ un ouvert
$\Rightarrow \exists r_0 > 0$ tel que $]x-r, x+r[\subset \mathbb{R} \setminus \overline{A} \subset \mathbb{R} \setminus A$.
Donc $]x-r, x+r[\cap A = \emptyset$. Donc absurde

Théorème :

Soit $A \subset \mathbb{R}$.
Alors $\overline{A} = \{x \in \mathbb{R}, \exists (u_n)$ suite d'éléments de $A, u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x\}$.

Remarque : Autrement dit, l'adhérence de A est l'ensemble des limites de suites d'éléments de A.

Preuve:
Montrons $\Rightarrow$
Si $x \in \overline{A} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{N}^*,]x-r, x+r[\cap A \neq \emptyset$, on construit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ en choisissant u_n dans $]x - 1/n, x + 1/n[\cap A \neq \emptyset$.
Ainsi, $(u_n)_{n \in \ltimes \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de A qui tend vers x
Montrons $\Leftarrow$
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de A qui tend vers x.
$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_\varepsilon$, on a $|u_n - x| < \varepsilon$
$\Rightarrow]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\ni u_n \leftarrow$ qui est dans A
$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0,]x-r, x+r[\cap A \neq \emptyset$

B Complétude

Définition : $F \subset \mathbb{R}$ est complet si toute suite de Cauchy d'éléments de F converge dans F.

Exemple : $\mathbb{R}$ est complet.

Théorème : Caractérisation des parties complètes de $\mathbb{R}$

$F \subset \mathbb{R}$ est complet $\Leftrightarrow$ F est fermé.

Preuve:
Montrons $\Rightarrow$ avec l'utilisation de la caractérisation séquentielle des fermés :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de F qui converge vers ℓ.
Or, (u_n) est de Cauchy (car elle converge) dans F.
Comme F est complète on a que $\ell \in F$ et donc F est bien fermé.
Montrons $\Leftarrow$
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy de $F \subset \mathbb{R}$, c'est donc une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$.
Or, comme $\mathbb{R}$ est complet, on sait que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limie ℓ.
Donc, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors une de F convergente vers ℓ (elle converge dans $\overline{F}$) et F fermé.
Donc $\ell \in F$. Donc F est complète.