Chapitre 4 : Matrices

I Généralités

Voir le cours de MM1.

Proposition : Symbole de Kronecker

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le symbole de Kronecker est défini par :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

pour $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Remarque : De là découle immédiatement les matrices élémentaires suivantes : $E_{ij} = (\delta_{ik}\delta_{jl})_{1 \leq k, l \leq n}$.

II Structure d'un espace vectoriel

A Ensemble des matrices

Proposition :

Soient $n, m \in \mathbb{N}$.
Comme $M_{n,m}(\mathbb{K}) = \{\varphi : \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, m\} \to \mathbb{K}\}$, on en déduit que $M_{n,m}(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel de dimension nm.

Remarque : Une base de $M_{n,m}(\mathbb{K})$ est donnée par les matrices élémentaires $\{E_{ij} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$.

B Structure multiplicative

Proposition :

Soient $n, m, p, q \in \mathbb{N}^*$.
Soient $A = (a_{ij}) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{jk}) \in M_{p,q}(\mathbb{K})$.
Le produit matriciel $C = AB$ est défini par $C = (c_{ik})$ où $c_{ik} = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} b_{jk}$.

Remarque : Le produit matriciel est associatif.

Proposition : Linéarité

Si on fixe $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, l'application $M_{p,q}(\mathbb{K}) \to M_{n,q}(\mathbb{K}), B \mapsto AB$ est K-linéaire.
Réciproquement $M_{n,p}(\mathbb{K}) \to M_{n,q}(\mathbb{K}), A \mapsto AB$ est K-linéaire si on fixe $B \in M_{p,q}(\mathbb{K})$.

Remarque : Si $n = p$, on a une **loi associative interne** sur $M_n(\mathbb{K})$. La matrice identité I_n est l'élément neutre.

Définition : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On dit que A est inversible s'il existe $B \in M_n(\mathbb{K})$ tel que $AB = BA = I_n$. Dans ce cas, B est unique et on le note A^{-1}.

Vocabulaire : On note $GL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{K})$.

Proposition : Groupe

L'ensemble $GL_n(\mathbb{K})$ muni du produit matriciel est un groupe. (non abélien si $n \geq 2$)

Remarque :

1. $GL_n(\mathbb{K})$ n'est pas un espace vectoriel.
2. $GL_1(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^*$ qui est abélien.

III Transposition

Définition : Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{ij}) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$.
La transposée de A est la matrice ${}^tA = (a_{ji}) \in M_{p,n}(\mathbb{K})$.

Propriété :

L'application transposée $M_{n,p}(\mathbb{K}) \to M_{p,n}(\mathbb{K}), A \mapsto {}^tA$ est une isomorphisme linéaire.
Elle est symétrique si ${}^t({}^tA) = A$ et antisymétrique si ${}^t({}^tA) = -A$.

IV Représentation matricielle

Définition : Soit E un K-espace vectoriel de dimension n. Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
Soit $(u_1, \dots, u_p)$ une famille de p vecteurs de E. Posons pour $1 \leq j \leq p$, $u_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$.

On définit $Mat_B(u_1, \dots, u_p) = A = (a_{ij}) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ la matrice des coordonnées des vecteurs $(u_1, \dots, u_p)$ dans la base B.

Propriété :

Si $p = 1$, on a $u = u_1$ et $Mat_B(u) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$
On a que l'application $E \to K^n, u \mapsto Mat_B(u)$ est un isomorphisme linéaire.

Définition : Soient E, F des K-espaces vectoriels avec $dimE = p, dimF = n$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Soient $B = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $B' = (v_1, \dots, v_n)$ une base de F.

On définit la matrice de f dans les bases B et B' par $Mat_{B,B'}(f) = Mat(f(e_1), \dots, f(e_p)) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$.

Proposition :

Soit $u \in E$.
Posons $X = Mat(u, B)$, $Y = Mat(f(u), B)$. Posons A $= Mat_{B,B'}(f)$.
On a $Y = AX$.

Proposition :

L'application $\mathcal{L}(E, F) \to M_{p,n}(\mathbb{K}), f \mapsto Mat_{B,B'}(f)$ est un isomorphisme linéaire.

Proposition : Composition

Soit G un K-espace vectoriel de base finie B''. Soit $g \in \mathcal{L}(F,G)$.
Alors $Mat_{B,B''}(g \circ f) = Mat_{B',B''}(g) \cdot Mat_{B,B'}(f)$.

Proposition : Bijection et inversibilité

On a $f \in \mathcal{L}(E,F)$ est un bijective si et seulement si $Mat_{B,B'}(f) \in GL_n(\mathbb{K})$.
Alors $Mat_{B',B}(f^{-1}) = (Mat_{B,B'}(f))^{-1}$.

Remarque : Soit $A \in M_{p,n}(\mathbb{K})$. Il lui correspond $L(A) : K^p \to K^n$ définie par $L(A)(X) = AX$.
On a $L(AB) = L(A) \circ L(B)$.

Définition :

1. Noyau de A : Ker$(A) = \{X \in K^m \mid AX = 0\} = Ker(L(A))$.
2. Image de A : Im$(A) = \{Y \in K^n \mid \exists X \in K^m, Y = AX\} = Im(L(A))$.
3. Rang de A : rg$(A) = dim(Im(A)) = rg(L(A))$.

V Matrice de changement de base

Définition : Soit E un K-espace vectoriel de dimension n. Soient $B = (e_1, \dots, e_n)$ et $B' = (v_1, \dots, v_n)$ des bases de E.
Si on pose $v_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_j$, alors : $P_{B,B'} = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ est la matrice de passage de la base B à la base B'.

...

Proposition :

Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. A est inversible.
2. Pour tout B, $AX = B$ a une unique solution X.
3. Pour tout B, $AX = B$ admet au moins une solution X.
4. Pour tout B, $AX = B$ admet au plus une solution X.
5. $AX = 0$ a pour solution $X = 0$.

Vocabulaire : On appelle système de Cramer un système de la forme $AX = B$ où A est inversible.