Chapitre 4 : Topologie des espaces métriques et des espaces vectoriels normés

I Distances et normes

Soit X un ensemble quelconque (dans la suite supposé non nul).

Définition : Une distance d sur X est une application $d\colon X \times X \to \mathbb{R}_+$ qui vérifie les axiomes suivants :

1. $\forall (x, y) \in X^2, d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie)
2. $\forall x, y, z \in X, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire)
3. $\forall (x, y) \in X^2, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (séparation)

Vocabulaire : On appelle **espace métrique** un couple (X, d) où X est un ensemble et d une distance sur X.

Exemple :

- $\mathbb{R}$ muni de la distance $d(x, y) = |x - y|$, où $|\cdot|$ est la valeur absolue.
- $\mathbb{C}$ muni de la distance $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$, où $|\cdot|$ est le module.
- Une autre façon de voir l'exemple 2, on considère l'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni de la distance suivante :
  Si $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$ sont deux points de $\mathbb{R}^2$, on définit la distance $d(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$.
  On appelle cette distance la **distance euclidienne** sur $\mathbb{R}^2$.
- Prenons X = cercle unité muni de la distance $d(A, B) = arccos(cos(\theta_2 - \theta_1))$ où θ_1 et θ_2 sont les arguments des points A et B respectivement. *(voir schéma OneNote)*

Remarque : On peut voir l'exemple 1 comme un cas particulier de l'exemple 2, en identifiant $\mathbb{R}$ à l'axe des réels dans le plan complexe.

Remarque : On peut généraliser l'exemple 3 à $\mathbb{R}^n$ muni de la distance euclidienne définie par :

$$d(A, B) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_{A_i} - x_{B_i})^2}$$

où $A = (x_{A_1}, x_{A_2}, \ldots, x_{A_n})$ et $B = (x_{B_1}, x_{B_2}, \ldots, x_{B_n})$ sont deux points de $\mathbb{R}^n$.

Il se trouve que les exemples 1, 2 et 3 proviennent d'espaces vectoriels normés, qu'on verra (très) rapidement.

Proposition : Inégalités triangulaires

Soit (X, d) un espace métrique.
On a :

1. $\forall (x, y, z) \in X^3, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire)
2. $\forall (x, y, z) \in X^3, |d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z)$ (inégalité triangulaire généralisée)

Preuve :

1. C'est l'axiome 2 de la définition d'une distance.
2. On a $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ d'après l'inégalité triangulaire.
   Donc $d(x, y) - d(x, z) \leq d(z, y) = d(y, z)$.
   De plus, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ d'après l'inégalité triangulaire.
   Donc $d(x, z) - d(x, y) \leq d(y, z)$.
   En combinant les deux, on obtient $|d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z)$.

Construction d'espaces métriques : Restriction *(admis)*

On part de (X, d) un espace métrique.
Soit $Y \subset X$. Alors $(Y, d|_{Y\times Y})$ est un espace métrique.

Vocabulaire : On dit que $d|_{Y\times Y}$ est la **distance sur Y induite** par la distance sur X.

Remarque : Ainsi, tout sous-ensemble d'un espace métrique est muni d'une "structure d'espace métrique" induite : c'est la distance induite.

Exemple : $(X, d_X) = (\mathbb{C}, |\cdot|)$ un espace métrique. Alors pour $Y = \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, d_Y n'est autre que la distance usuelle sur $\mathbb{R}$.
Idem pour $\mathbb{Q}$.

Construction d'espaces métriques : Bijection *(admis)*

Soient (X, d_X) et Y un ensemble quelconque et $f : Y \to X$ bijective.
Alors (Y, d_Y) est un espace métrique, où $d_Y(y_1, y_2) = d_X(f(y_1), f(y_2))$ pour tout $y_1, y_2 \in Y$.

Autrement dit, $d_Y : \substack{Y\times Y \to \mathbb{R}_+ \\ (y_1,y_2)\mapsto d_X(f(y_1),f(y_2))}$.

Application : Démontrer le théorème ci-dessus. *(vérifier que d_Y satisfait bien les axiomes d'une distance.)*

A Espaces vectoriels normés

On a plus un ensemble X quelconque mais on considère E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). (a priori pas de dimension finie)

1 Définitions

Définition : Une norme N sur E est une application $N : E \to \mathbb{R}_+$ souvent notée $\|\cdot\|$ qui vérifie les axiomes suivants :

1. $\forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \|\lambda u\| = |\lambda| \cdot \|u\|$ (homogénéité)
2. $\forall (u, v) \in E^2, \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (inégalité triangulaire)
3. $\forall u \in E, \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0_E$ (séparation)

Vocabulaire : On dit que le couple $(E, N) = (E, \|\cdot\|)$ est un **espace vectoriel normé**. Il est commun d'écrire $e.v.n.$.

Remarque : $\forall x \in E, N(-x) = N(x)$ d'après l'axiome 1.

Théorème : Association norme-distance

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.
Alors c'est en particulier un espace métrique pour la distance définie par $d_N(u,v) = \|v-u\|$.

Preuve : Il suffit de vérifier les axiomes d'une distance.

1. Symétrie : $d_N(u,v) = \|v-u\| = \|-(u-v)\| = \|u-v\| = d_N(v,u)$.
2. Inégalité triangulaire : $d_N(u,w) = \|w-u\| = \|(w-v)+(v-u)\| \leq \|w-v\| + \|v-u\| = d_N(u,v) + d_N(v,w)$.
3. Séparation : $d_N(u,v) = 0 \Leftrightarrow \|v-u\| = 0 \Leftrightarrow v-u = 0_E \Leftrightarrow u = v$.

Remarque : Hors programme : espaces euclidiens $\subset$ espaces vectoriels normés $\subset$ espaces métriques.

Exemple : En fait, les exemples 1, 2 et 3 dans "Espaces métriques" sont des evn : $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ et $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ où $\|(x_1,\ldots,x_n)\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \|\cdot\|_{\text{euclidienne}}$.

Application : Définissons $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto \|X\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|)$.
Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.
Observation : $\|X\|_\infty = |x_{i_0}|$ où $i_0 \in \{1, 2, \ldots, n\}$ réalise le maximum.
Homogénéité : $\forall i \in \{1,\ldots,n\}, |x_i| \leq |x_{i_0}|$
$\forall \lambda \in \mathbb{R}, |\lambda| \cdot |x_i| \leq |\lambda| \cdot |x_{i_0}| \forall i \in \{1,\ldots,n\}$
D'où $\forall \lambda \in \mathbb{R}, |\lambda x_i| \leq |\lambda| \cdot |x_{i_0}| \forall i \in \{1,\ldots,n\}$
Or $\lambda X = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$, i_0 réalise le maximum de $(|\lambda x_1|, \ldots, |\lambda x_n|)$
Donc $\|\lambda X\|_\infty = |\lambda| \cdot |x_{i_0}| = |\lambda| \cdot \|X\|_\infty$.
Inégalité triangulaire : Soient $X = (x_1,\ldots,x_n)$ et $Y = (y_1,\ldots,y_n)$ dans $\mathbb{R}^n$.
$\|X+Y\|_\infty = \max(|x_1+y_1|, \ldots, |x_n+y_n|)$.
On a $\forall i \in \{1,\ldots,n\}, |x_i+y_i| \leq |x_i| + |y_i| \leq \|X\|_\infty + \|Y\|_\infty$.
En prenant le max sur i, on obtient $\|X+Y\|_\infty \leq \|X\|_\infty + \|Y\|_\infty$.
Séparation : Soit $X = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$.
$\|X\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \max(|x_1|,\ldots,|x_n|) = 0$.
Or $\forall k \in \{1,\ldots,n\}, |x_k| \leq \max(|x_1|,\ldots,|x_n|) = 0 \Rightarrow x_k = 0 \Rightarrow X = 0_{\mathbb{R}^n}$.

Application :

1. Montrer que $\|\cdot\|_1 : \substack{\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+ \\ X \mapsto \sum_{i=1}^n |x_i|}$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.
2. **Plus difficile.** Plus généralement, montrer que pour $p \in \mathbb{R}_+$, $\|\cdot\|_p : \substack{\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+ \\ X \mapsto \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}}$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Exemple : Exemples de normes sur des espaces de dimension infinie :

- Considérons $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On définit la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$ pour $f \in E$. En effet,

  Homogénéité : Soit $f \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
  On a $\|\lambda f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |\lambda f(x)| = |\lambda| \cdot \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| = |\lambda| \cdot \|f\|_\infty$.
  Inégalité triangulaire : Soient $f, g \in E$.
  On a $\|f+g\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)+g(x)|$.
  Or $\forall x \in [0,1], |f(x)+g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.
  En prenant le supremum sur x, on obtient $\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.
  Séparation : Soit $f \in E$.
  On a $\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| = 0$.
  Or $\forall x \in [0,1], |f(x)| \leq \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| = 0 \Rightarrow f(x) = 0$ pour tout x dans $[0,1] \Rightarrow f = 0_E$.

- Considérons $E = \{f\colon I \to \mathbb{R}, f \in \mathcal{C}^0(I) \mid \int_I |f|(t)dt \text{ converge}\} = L_1$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. On définit la norme $\|f\|_1 = \int_I |f(t)|dt$ pour $f \in E$.

✖ **Attention** ✖ $\|f\|_\infty$ existe car $\sup |f(t)| < +\infty$ pour f continue sur le compact $[0,1]$.

Contre-Exemple : $f \in \mathcal{C}^0(]0,1], \mathbb{R})$ définie par $f(x) = \frac{1}{x}$. Alors $\|f\|_\infty$ n'existe pas car $\sup_{x\in]0,1]} |f(x)| = +\infty$.

2 Propriétés

Propriété : Vecteurs unitaires *(admise)*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul, soit $x \in E \setminus \{0_E\}$ et soit N une norme sur E.
Alors $\frac{x}{N(x)}$ est un vecteur unitaire (ou vecteur normé), c'est-à-dire $N\left(\frac{x}{N(x)}\right) = 1$. (existe car $N(x) \neq 0$ par séparation)

Propriété : *(admise)*

Soit (E, N) un espace vectoriel normé.
Alors $\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E^n$, $\forall (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, on a :

$$N(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \cdot N(x_i)$$

Propriété : Inégalité triangulaire renversée

Soit (E, N) un espace vectoriel normé.

1. $\forall (x,y) \in E^2, N(x+y) \leq N(x) + N(y)$
2. $\forall (x,y) \in E^2, |N(x) - N(y)| \leq N(x-y)$

Preuve :

1. C'est l'axiome 2 de la définition d'une norme.
2. On a $N(x) = N((x-y)+y) \leq N(x-y) + N(y)$ d'après l'inégalité triangulaire.
   Donc $N(x) - N(y) \leq N(x-y)$.
   De plus, $N(y) = N((y-x)+x) \leq N(y-x) + N(x)$ d'après l'inégalité triangulaire.
   Donc $N(y) - N(x) \leq N(y-x) = N(x-y)$.
   En combinant les deux, on obtient $|N(x) - N(y)| \leq N(x-y)$.

II Topologie sur les espaces métriques

A Ouverts et fermés

Remarque : Un evn étant un espace métrique avec la distance $d(x,y) = N(y-x)$, toutes les notions de topologie vues ici s'appliquent aux evn.

Définition : Soit (X, d) un espace métrique.
Une boule ouverte de centre $a \in X$ de rayon $r > 0$ est $B(a,r) = \{x \in X \mid d(x,a) = d(a,x) < r\}$.

Définition : Soit (X, d) un espace métrique.
Une boule fermée de centre $a \in X$ de rayon $r > 0$ est $B_F(a,r) = \{x \in X \mid d(a,x) \leq r\}$.

Définition : Soit (X, d) un espace métrique.
La sphère de centre $a \in X$ de rayon $r > 0$ est $S(a, r) = \{x \in X \mid d(a, x) = r\}$.

Exemple : Dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $B(1, 1) =]0, 2[$

Exemple : Dans $\mathbb{R}^2$ avec trois métriques :
$d_1 = \|y - x\|_1$, $d_2 = \|y - x\|_2$ et $d_\infty = \|y - x\|_\infty$.
Traçons les boules de centre 0 de rayon 1 associées à chaque distance.
$B(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x, 0) < 1\}$.
On a : $\|x\|_{1,2,\infty} < 1$.

- Pour d_1 : $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| < 1$. C'est un losange.
- Pour d_2 : $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < 1$. C'est un disque.
- Pour d_∞ : $\|x\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|) < 1$. C'est un carré.

Remarque : Les bordures correspondent aux sphères $S(0, 1)$ associées à chaque distance. Les boules fermées $B_F(0, 1)$ correspondent aux mêmes figures mais en incluant les bordures.

Définition : Une partie U de X est un ouvert de (X, d) si $\forall x \in U, \exists r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U$.

Exemple : $]0, 1[\subset \mathcal{C}(]0, 1[, \mathbb{R})$ est un ouvert : $\forall x \in]0, 1[, B(x, \min(x, 1 - x)) \subset]0, 1[$.

Définition : Une topologie sur (X, d) est l'ensemble des ouverts de (X, d). Autrement dit, $\tau = \{U \subset X \mid U \text{ est un ouvert de } (X, d)\}$.

Proposition :

1. Toute boule ouverte de (X, d) est un ouvert de (X, d).
2. Si $(U_i)_{i \in I}$ est une famille d'ouverts de (X, d), alors $\bigcup_{i \in I} U_i$ est un ouvert de (X, d). (I un ensemble quelconque)
3. Si $(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ est une famille finie d'ouverts de (X, d), alors $\bigcap_{i=1}^n U_i$ est un ouvert de (X, d).

Preuve :

1. Soit $B(a, r)$ une boule ouverte de (X, d). Soit $x \in B(a, r)$. On a $d(a, x) < r$. Posons $s = r - d(a, x) > 0$. Montrons que $B(x, s) \subset B(a, r)$.
Soit $y \in B(x, s)$. On a $d(x, y) < s$. D'après l'inégalité triangulaire, on a $d(a, y) \leq d(a, x) + d(x, y) < d(a, x) + s = d(a, x) + (r - d(a, x)) = r$. Donc $y \in B(a, r)$. Ainsi, $B(x, s) \subset B(a, r)$ et donc $B(a, r)$ est un ouvert de (X, d).
2. Soit $x \in (U_i)_{i \in I}$. Alors $\exists i_0 \in I$ tel que $x \in U_{i_0}$. Comme U_{i_0} est un ouvert de (X, d), il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} U_i$. Donc $\bigcup_{i \in I} U_i$ est un ouvert de (X, d).
3. Soit $x \in \bigcap_{i=1}^n U_i$, où on a écrit $I = \{1, 2, \ldots, n\}, n \in \mathbb{N}^*$.
Alors $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \exists r_i > 0$ tel que $B(x, r_i) \subset U_i$. Posons $r = \min(r_1, r_2, \ldots, r_n) > 0$. Alors $B(x, r) \subset \bigcap U_i$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
En effet, soit $z \in B(x, r), d(z, x) < r \leq r_i$ donc $z \in B(x, r_i) \subset U_i$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Donc $z \in \bigcap_{i=1}^n U_i$. Ainsi, $\bigcap_{i=1}^n U_i$ est un ouvert de (X, d).

Contre-Exemple : Si I est infini, la propriété 3 n'est pas vraie en général. Par exemple, dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, considérons la famille d'ouverts $U_n =]-1/n, 1/n[$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $\bigcap_{n=1}^\infty U_n = \{0\}$ qui n'est pas un ouvert de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

Définition : Soit (X, d) un espace métrique.
Une partie F de X est un fermé de (X, d) si son complémentaire $X \setminus F$ est un ouvert de (X, d).

Proposition :

1. Toute boule fermée de (X, d) est un fermé de (X, d).
2. Si $(F_i)_{i \in I}$ est une famille de fermés de (X, d), alors $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un fermé de (X, d). (I un ensemble quelconque)
3. Si $(F_1, F_2, \dots, F_n)$ est une famille finie de fermés de (X, d), alors $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ est un fermé de (X, d).

Preuve :

1. Soit $B_F(x, r)$ une boule fermée de (X, d). C'est un fermé $\Leftrightarrow X \setminus B_F(x, r)$ est un ouvert de (X, d).
   Soit $y \in X \setminus B_F(x, r)$. On a $d(x, y) > r$. Posons $\varrho = d(y, x) - r > 0$. Montrons que $B(y, \varrho) \subset X \setminus B_F(x, r)$.
   Soit $z \in B(y, \varrho)$. On a $d(y, z) < \varrho$.
   $d(z, y) < d(y, x) - r \Rightarrow r < d(y, x) - d(z, y) \leq d(z, x)$ (inégalité triangulaire) $\Rightarrow z \in X \setminus B_F(x, r)$.
   Ainsi, $B(y, \varrho) \subset X \setminus B_F(x, r)$ et donc $X \setminus B_F(x, r)$ est un ouvert de (X, d).
   Donc $B_F(x, r)$ est un fermé de (X, d).
2. Laissé en exercice au lecteur.
3. Laissé en exercice au lecteur.

Remarque : Dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, tout intervalle fermé est un fermé, et tout intervalle ouvert est un ouvert. ($\mathbb{R}$ est ouvert).
On a : $]a, +\infty[= \bigcup_{n=1}^{\infty}]a, a+n[$ est un ouvert.

Remarque : X et $\emptyset$ sont des ouverts et des fermés de (X, d) (prendre r arbitrairement grand pour X et r quelconque pour $\emptyset$).

Définition : Soit $\mathcal{V} \subset X$ une partie de l'espace métrique (X, d).
On dit que $\mathcal{V}$ est un voisinage de $a \in X$ si $\exists r > 0$ tel que $B(a, r) \subset \mathcal{V}$.

Proposition :

On dit aussi que U est un ouvert de (X, d) si et seulement si U est un voisinage de chacun de ses points.

B Intérieur et adhérence

Soit (X, d) un espace métrique.

Définition : Soit $A \subset X$ une partie de l'espace métrique (X, d).
On appelle intérieur de A l'ensemble des points $a \in A$ tels que A est un voisinage de a. On le note : $\mathring{A}$.
On a :

$$\mathring{A} = \bigcup \{U \subset A \mid U \text{ est un ouvert de } (X, d)\}$$

Définition : Soit $A \subset X$ une partie de l'espace métrique (X, d).
On appelle adhérence de A l'ensemble des points $x \in X$ tels que $\forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset$. On le note : $\overline{A}$.
On a :

$$\overline{A} = \bigcap_{F \supset A, F \text{ fermé de } (X,d)} F$$

Proposition : Lien avec les ouverts

Soit $A \subset X$ une partie de l'espace métrique (X, d).

1. $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert contenu dans A.
2. Si $U \subset A$ est un ouvert de (X, d), alors $U \subset \overset{\circ}{A}$.
   Autrement dit, $\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A.

Preuve :

1. C'est une union quelconque d'ouverts indus dans A, donc $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert. De plus, par définition, $\overset{\circ}{A} \subset A$.
2. Par définition $\overset{\circ}{A} = \bigcup\{U \subset A \mid U$ est un ouvert de $(X, d)\}$. Donc si $U \subset A$ est un ouvert de (X, d), alors U est dans la famille indexée par l'union, donc $U \subset \overset{\circ}{A}$.

Proposition : Lien avec les fermés

Soit $A \subset X$ une partie de l'espace métrique (X, d).

1. $\overline{A}$ est un fermé contenant A.
2. Si $F \supset A$ est un fermé de (X, d), alors $\overline{A} \subset F$.
   Autrement dit, $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A.

Preuve :

1. C'est une intersection quelconque de fermés contenant A, donc $\overline{A}$ est un fermé. De plus, par définition, $A \subset \overline{A}$.
2. Par définition $\overline{A} = \bigcap_{F \supset A, F \text{ fermé de } (X,d)} F$. Donc si $F \supset A$ est un fermé de (X, d), alors F est dans la famille indexée par l'intersection, donc $\overline{A} \subset F$.

Proposition :

1. $\overset{\circ}{A} = X \setminus \overline{(X \setminus A)}$
2. $\overline{A} = X \setminus (X \overset{\circ}{\setminus} A)$
3. $x \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset$

Preuve :

1. $(\Rightarrow)$ $x \in \overset{\circ}{A}$. Par définition d'un ouvert, $\exists r > 0$ tel que $B(x, r) \subset \overset{\circ}{A} \subset A$.
   $(\Leftarrow)$ On a $B(x, r) \subset A$ qui est un ouvert.
   Donc $B(x, r) \subset \overset{\circ}{A}$ car $\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A. Donc $x \in \overset{\circ}{A}$, donc $x \in \overset{\circ}{A}$.
2. $\overset{\circ}{A} \Leftrightarrow X \setminus \overset{\circ}{A} = \overline{(X \setminus A)}$.
   Or $\overset{\circ}{A} = \bigcup\{U \subset A \mid U$ est un ouvert de $(X, d)\}$.
   Donc $X \setminus \overset{\circ}{A} = X \setminus \bigcup\{U \subset A \mid U$ est un ouvert de $(X, d)\} = \bigcap_{F \supset X \setminus A, F \text{ fermé de } (X,d)} F = \overline{(X \setminus A)}$.
   Faire de même avec $\overline{A} = X \setminus (X \overset{\circ}{\setminus} A)$.
3. $x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \in X \setminus (X \overset{\circ}{\setminus} A)$ (d'après 2) $\Leftrightarrow x \notin (X \overset{\circ}{\setminus} A) \Leftrightarrow$ pour tout $r > 0$, $B(x, r) \not\subset X \setminus A \Leftrightarrow$ pour tout $r > 0$. $\Leftarrow B(x, r) \cap A \neq \emptyset$.

Proposition :

- U est ouvert $\Leftrightarrow \overset{\circ}{U} = U$.
- F est fermé $\Leftrightarrow \overline{F} = F$.

C Suites dans un espace métrique

1 Définitions

Définition : On dit qu'une suite (x_n), $x_n \in X$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, converge si $\exists x \in X$ tel que $d(x_n, x) \to 0$ quand $n \to +\infty$.
Autrement dit,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, d(x_n, x) < \varepsilon$$

Remarque : Si $(X, d) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$, on retrouve la définition usuelle de la convergence des suites réelles.

Définition : On dit que $x \in X$ est une valeur d'adhérence d'une suite (x_n) si il existe une sous suite qui converge vers x. i.e. $\exists (n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ strictement croissante telle que $d(x_{n_k}, x) \to 0$ quand $k \to +\infty$.

Proposition :

Soit (x_n) une suite de (X, d) qui converge vers x.
Alors x est la seule valeur d'adhérence de (x_n). En particulier, la limite de (x_n) est unique.

Preuve :
Soit x la limite de (x_n). Suppons qu'il existe une sous-suite (x_{n_k}) qui converge vers une autre valeur $y \neq x$.
On a $d(x, y) > 0$. Posons $\varepsilon = \frac{d(x,y)}{2} > 0$.
$\exists k_1, (\varepsilon, y) \in \mathbb{N}, \forall k \geq k_1, d(x_{n_k}, y) < \varepsilon$. (convergence de la sous-suite)
Et comme $x_n \to x$, alors $x_{n_k} \to x$ aussi.
Donc $\exists k_2, (\varepsilon, x) \in \mathbb{N}, \forall k \geq k_2, d(x_{n_k}, x) < \varepsilon$.
Alors on a pour $k \geq \max(k_1, k_2)$:
$d(x, y) \leq d(x, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, y) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = d(x, y)$, ce qui est absurde. Donc x est la seule valeur d'adhérence de (x_n).

Fermés
Soit A une partie quelconque de l'espace métrique (X, d).

Proposition : Caractérisation de l'adhérence par des suites

$\overline{A} = \{x \in X \mid \exists (x_n)$ suite de $A, x_n \to x\}$.

Preuve :
$(\subset)$ Soit $x \in X$ tq $\exists (x_n) \in A$ avec $d(x_n, x) \to 0$.
On veut montrer que $x \in \overline{A} \Rightarrow$ pour tout $r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset$.
Soit $r > 0$. Comme $d(x_n, x) \to 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, d(x_n, x) < r$.
On a $x_n \in A$ donc $x_n \in B(x, r) \cap A \neq \emptyset \forall n \geq N$. Donc $x \in \overline{A}$. □
$(\supset)$ Soit $x \in \overline{A} \Rightarrow$ pour tout $r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset$.
Prenons, $n \in \mathbb{N}$, $r = \frac{1}{n+1} > 0$.
Alors $B(x, \frac{1}{n+1}) \cap A \neq \emptyset$.
Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, choisissons $x_n \in B(x, \frac{1}{n+1}) \cap A$.
On a alors construit une suite (x_n) qui vérifie $d(x_n, x) < \frac{1}{n+1}$.
Ainsi, x est bien la limite d'une suite d'éléments de A. □

Proposition : Caractérisation des fermés par des suites

Une partie F de (X, d) est fermée si et seulement si pour toute suite (x_n) d'éléments de F qui converge vers $x \in X$, on a $x \in F$.

Preuve :
On a $\overline{F} = \{x \in X \mid \exists (x_n)$ suite de $F, x_n \to x\}$.
Or $\overline{F} = F$. On a donc le résultat.

D Continuité

1 Définitions

Définition : Soit $f\colon (X,d_X) \to (Y,d_Y)$ une application entre deux espaces métriques.

- f est continue en $a \in X$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 \colon x \in B(a,\delta_\varepsilon)$, alors $f(x) \in B(f(a),\varepsilon)$.
  Autrement dit, pour tout $\varepsilon \exists \delta_\varepsilon$ *tel que* $d_X(x,a) < \delta_\varepsilon \Rightarrow d_Y(f(x),f(a)) < \varepsilon$.
- f est continue sur X si f est continue en tout point de X.

Remarque : Si $f\colon (\mathbb{R},|\cdot|) \to (\mathbb{R},|\cdot|)$, on retrouve la définition usuelle de la continuité des fonctions réelles.

Définition : Soit $k \geq 0$ un réel.
On dit que $f\colon (X,d_X) \to (Y,d_Y)$ est k-lipschitzienne si $\forall x,y \in X, d_Y(f(x),f(y)) \leq k d_X(x,y)$.

Définition : Si $f\colon (X,d_X) \to (Y,d_Y)$ est une application k-lipschitzienne, alors f est continue sur X.

Preuve :
Montrons que f est continue.
Soit $a \in X$ et soit $\varepsilon > 0$. Posons $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2k} > 0$.
$\forall x \in B(a,\delta_\varepsilon)$, on a $d_Y(f(a),f(x)) \leq k d_X(a,x) \leq k\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.
Ainsi, f est continue.
Remarquons de plus que δ_ε ne dépend pas de a, donc f est uniformément continue sur X. (HP)

Exemple : Exemple d'une fonction 1-lipschitzienne : $f : \substack{(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|)\to(\mathbb{R},|\cdot|) \\ x\mapsto\|x\|}$.
En effet, $|f(x) - f(y)| = ||x| - |y|| \leq \|x - y\| = d(x,y)$ (inégalité triangulaire renversée).

2 Caractérisation de la continuité

Proposition : Caractérisation de la continuité par des suites

Soit $f\colon (X,d_X) \to (Y,d_Y)$ une application entre deux espaces métriques.
Alors f est continue en $a \in X$ si et seulement si pour toute suite (x_n) de X qui converge vers a, la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(a)$.

Preuve :
$(\Rightarrow)$ Soit (x_n) une suite de X qui converge vers a.
Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue en a, il existe $\delta_\varepsilon > 0$ tel que $d_X(x,a) < \delta_\varepsilon \Rightarrow d_Y(f(x),f(a)) < \varepsilon$.
Comme $x_n \to a$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, d_X(x_n,a) < \delta_\varepsilon$.
Donc $\forall n \geq N, d_Y(f(x_n),f(a)) < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$.
Ainsi $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, d_Y(f(x_n),f(a)) < \varepsilon$. Donc $f(x_n) \to f(a)$.
$(\Leftarrow)$ Par l'absurde, supposons que f n'est pas continue en a.
C'est-à-dire qu'il existe $\varepsilon_0 > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in X$ tel que $d_X(x,a) < \delta$ mais $d_Y(f(x),f(a)) > \varepsilon_0$.
$\forall n \in \mathbb{N}$, posons $\delta = \frac{1}{n+1} > 0$.
On construit une suite (x_n) de X telle que $d_X(x_n,a) < \frac{1}{n+1}$, $d_Y(f(x_n),f(a)) > \varepsilon_0$.
On a $x_n \to a$ mais $f(x_n) \not\to f(a)$ (car $d_Y(f(x_n),f(a)) > \varepsilon_0$ pour tout n).
Absurde. Donc f est continue en a.

Proposition :

$f\colon (X,d_X) \to (Y,d_Y)$ est continue sur X si et seulement si pour tout ouvert U de (Y,d_Y), $f^{-1}(U)$ est un ouvert de (X,d_X).

Rappel : $f^{-1}(U) = \{x \in X \mid f(x) \in U\}$.

Preuve :
$(\Rightarrow)$ Soit U un ouvert de (Y,d_Y).

Montrons que $f^{-1}(U)$ est un ouvert de (X, d_X).
Soit $a \in f^{-1}(U)$. Alors $f(a) \in U$.
Comme U est un ouvert de (Y, d_Y), il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B_Y(f(a), \varepsilon) \subset U$.
Or $\exists \delta_\varepsilon > 0$ tel que $x \in B_X(a, \delta_\varepsilon) \Rightarrow f(x) \in B_Y(f(a), \varepsilon)$.
Vérifions que $B_X(a, \delta_\varepsilon) \subset f^{-1}(U)$.
Soit $x \in B_X(a, \delta_\varepsilon)$. Alors $d_X(x, a) < \delta_\varepsilon \Rightarrow d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon \Rightarrow f(x) \in B_Y(f(a), \varepsilon) \subset U \Rightarrow x \in f^{-1}(U)$.
Donc $B_X(a, \delta_\varepsilon) \subset f^{-1}(U)$. Ainsi, $f^{-1}(U)$ est un ouvert de (X, d_X).

($\Leftarrow$) Soit U un ouvert de (Y, d_Y).
Alors $f^{-1}(U)$ est un ouvert de (X, d_X).
Soit $a \in f^{-1}(U)$. Alors $f(a) \in U$.
Soit $\varepsilon > 0$ tq $B(f(a), \varepsilon) \subset U$.
Montrons que $\exists \delta_\varepsilon > 0$ tel que $d_X(x, a) < \delta_\varepsilon$ et $d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$.
Comme $f^{-1}(U)$ est un ouvert de (X, d_X), il existe $\delta_\varepsilon > 0$ tel que $B_X(a, \delta_\varepsilon) \subset f^{-1}(U)$ qui est ouvert.
Alors si $x \in X$ tq $d_X(x, a) < \delta_\varepsilon$, donc $f(x) \in B(f(a), \varepsilon)$.
Donc on a $d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$ car $f(x) \in U$.
Ainsi, f est continue en a.
Interlude : Inégalité de Cauchy-Schwarz

Considérons $< \cdot, \cdot >: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $< x, y >= \sum_{i=1}^n x_i y_i$. Cette application est bilinéaire, symétrique, positive et définie ($< x, x >= 0 \Leftrightarrow x = 0$).
On observe que la norme euclidienne s'écrit $\|x\|_2 = \sqrt{< x, x >}$.

On dit que $< \cdot, \cdot >$ est un produit scalaire (forme bilinéaire symétrique définie positive), et ce produit scalaire est relié à la norme 2 (il s'agit du produit scalaire euclidien).

Théorème : Inégalité de Cauchy-Schwarz

$\forall X, Y \in \mathbb{R}^n, | < X, Y > | \leq \|X\|_2 \|Y\|_2$.

Démonstration :

- Fixons $X, Y \in \mathbb{R}^n$ ($\neq 0_{\mathbb{R}^n}$)

$$P(t) = \|X + tY\|_2^2 = \langle X + tY, X + tY \rangle = \|X\|_2^2 + t^2 \|Y\|_2^2 + 2t\langle X, Y \rangle \geq 0 = t^2 \|Y\|_2^2 + 2t\langle X, Y \rangle + \|X\|_2^2.$$

  P est un polynôme de degré 2 en t. $P(t) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$, son discriminant est ≤ 0.

$$\Delta = 4\langle X, Y \rangle^2 - 4\|X\|_2^2 \|Y\|_2^2 = 4(\langle X, Y \rangle^2 - \|X\|_2^2 \|Y\|_2^2).$$

  Or, $\Delta \leq 0 \iff \langle X, Y \rangle^2 - \|X\|_2^2 \|Y\|_2^2 \leq 0 \iff \langle X, Y \rangle^2 \leq \|X\|_2^2 \|Y\|_2^2 \iff |\langle X, Y \rangle| \leq \|X\|_2 \|Y\|_2$.
- De plus, si $\Delta = 0$, $\exists t_0 \in \mathbb{R}$ racine double, $P(t_0) = 0 = \|X + t_0 Y\|_2^2$

$$\implies X + t_0 Y = 0 \implies X \text{ et } Y \text{ sont colinéaires.}$$

  Et si X et Y sont colinéaires, alors

$$|\langle X, Y \rangle| = |\langle X, \lambda X \rangle| = |\lambda| \langle X, X \rangle = |\lambda| \|X\|_2^2 = |\lambda| \|X\|_2 \|X\|_2 = \|X\|_2 \|\lambda X\|_2 = \|X\|_2 \|Y\|_2.$$

Corollaire : Égalité de Cauchy-Schwarz

L'égalité $| < X, Y > | = \|X\|_2 \|Y\|_2$ est vérifiée si et seulement si X et Y sont colinéaires.

Note de rédaction : Démo à reprendre, cf screen Laurent 2

3 Continuité des applications linéaires dans les evn

A priori, les espaces vectoriels ne sont pas forcément de dimension finie.
Soit $f: (E, \| \cdot \|_E) \to (F, \| \cdot \|_F)$ une application linéaire entre deux K-espaces vectoriels normés (evn).

Proposition : Caractérisation de la continuité des applications linéaires

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est continue de $(E, \|\cdot\|_E)$ dans $(F, \|\cdot\|_F)$.
2. f est continue en 0.
3. $\exists k > 0$ tel que $\forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq k\|x\|_E$.

Démonstration :

- $i) \Rightarrow ii)$: f continue sur $E \Rightarrow f$ continue en 0, $\quad f(0_E) = 0_F$
- $ii) \Rightarrow iii)$: f continue en 0 : Soit $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que si $\|x\|_E < \delta \Rightarrow \|f(x)\|_F < \varepsilon$.
  Soit $x \in E$. Posons $y = \frac{\delta x}{2\|x\|_E}$. Alors
  $$\|f(y)\|_F < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad f\left(\frac{\delta x}{2\|x\|_E}\right) < \varepsilon$$
  $$\Rightarrow \frac{\delta}{2\|x\|_E}\|f(x)\|_F < \varepsilon$$
  $$\Rightarrow \|f(x)\|_F < \frac{2\varepsilon}{\delta}\|x\|_E$$
  On trouve $K = \frac{2\varepsilon}{\delta}$, indépendant de $x \in E$, tel que $\forall x \in E,\ \|f(x)\|_F \leq K\|x\|_E$.
- $iii) \Rightarrow i)$: On part de $\exists K > 0$ tel que $\forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq K\|x\|_E$, on obtient $\forall x, y \in E, \|f(x-y)\|_F \leq K\|x-y\|_E$
  $$\Rightarrow \exists K > 0,\ \forall x, y \in E,\ \|f(x) - f(y)\|_F \leq K\|x - y\|_E$$
  $$\Rightarrow f \text{ est } K\text{-Lipschitz} \quad \Rightarrow f \text{ continue.}$$

E Equivalence de normes

Problème : Soit E un evn avec une normée notée $N_1 \colon E \in \mathbb{R}^+$.
On peut *a priori* mettre d'autres normes sur E, disons $N_2 \colon E \in \mathbb{R}^+$.
Si (x_n) une suite de E converge pour la norme N_1, converge-t-elle aussi pour la norme N_2 ?

Définition : N_1 et N_2 sont **équivalentes** si $\exists C, c > 0$ tels que $\forall x \in E, cN_2(x) \leq N_1(x) \leq CN_2(x)$.
On note $N_1 \sim N_2$.

Proposition :

1. $N_1 \sim N_2 \Leftrightarrow N_2 \sim N_1$.
2. Si $N_1 \sim N_2$ et $N_2 \sim N_3$, alors $N_1 \sim N_3$.

Exemple : Voir TD, normes $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^n$.

Remarque : Un des buts du cours est de montrer que sur $\mathbb{R}^n$ (+ généralement pour tout evn), toutes les normes sont équivalentes.

Proposition :

Soit (x_n) une suite de E, où E est muni de N_1 et N_2 deux normes équivalentes.
Alors (x_n) converge pour la norme N_1 si et seulement si (x_n) converge pour la norme N_2.

Démonstration :

- $\Rightarrow$: On suppose $\exists a \in X$ tel que $x_n \xrightarrow{N_1} a \Leftrightarrow N_1(x_n - a) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
  Or, $\underline{cN_2(z) \leq N_1(z)} \leq CN_2(z)$
  Cette inégalité implique $N_2(x_n - a) \leq \frac{1}{c}\underline{N_1(x_n - a)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
  $\Rightarrow N_2(x_n - a) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
  $\Rightarrow x_n \xrightarrow{N_2} a$.

- $\Leftarrow$: Si $x_n \xrightarrow{N_2} a \Rightarrow N_2(x_n - a) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
  On utilise $\underline{N_1(\cdot) \leq CN_2(\cdot)}$ $(C > 0)$
  $\frac{N_1}{c}(x_n - a) \to 0 \Rightarrow N_1(x_n - a) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

F Norme subordonnée

Soient $(E, \|\dot{\|}_E)$ et $(F, \|\dot{\|}_F)$.
Soit $f\colon E \to F$ une application linéaire continue. On a vu que la continuité d'une application linéaire entre evn se caractérisaient de la façon suivante :
$\exists K > 0\colon \forall x \in E \|f(x)\|_F \leq K\|x\|_E$.
Si $x \neq 0$, on peut considérer $\frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \in \mathbb{R}_+$
Par continuité de f, $\forall x \in E \setminus \{0\} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq K$.

Définition : La norme subordonnée de f par rapport à $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$ est définie par $|||f||| := \sup_{x\in E\setminus\{0\}} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}$.

Remarque : Cette triple barre est bien définie et correspond à la meilleure constante de continuité de f.

Proposition : Espace des applications linéaires continues

Notons $\mathcal{L}_c(E, F) = \{f\colon E \to F \mid f \text{ est continue}\}$. Alors $|||\cdot|||$ est une norme sur $\mathcal{L}_c(E, F)$ et $(\mathcal{L}_c(E, F), |||\cdot|||)$ est un evn.

Démonstration :

- Séparation : Si $|||f||| = 0 \Rightarrow \sup_{x\neq 0} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = 0 \Rightarrow \forall x \neq 0 \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = 0 \Rightarrow \forall x \neq 0, \|f(x)\|_F = 0 \Rightarrow f(x) = 0_F$.
- Homogénéité : Soit $\lambda \in K$, $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$.

$$|||\lambda f||| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|\lambda f(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{x\neq 0} \frac{|\lambda|\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = |\lambda| \sup_{x\neq 0} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = |\lambda||||f|||$$

- Inégalité triangulaire : Soient $f, g \in \mathcal{L}_c(E, F)$.

$$|||f + g||| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|(f + g)(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq \sup_{x\neq 0} \frac{\|f(x)\|_F + \|g(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq \sup_{x\neq 0} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} + \sup_{x\neq 0} \frac{\|g(x)\|_F}{\|x\|_E} = |||f||| + |||g|||$$