

# Chapitre 1 : Dénombrément

## I Cardinal d'un ensemble

**Définition :** Soit  $E$  un ensemble. On dit que  $E$  est **fini** s'il existe un entier naturel  $n \in \mathbb{N}$  et une bijection entre  $E$  et l'ensemble  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

Si  $n = 0$ , on dit que  $E$  est vide et on note  $E = \emptyset$ .

On appelle  $n$  le **cardinal** de  $E$  et on le note  $Card(E)$ .

### Lemme : Égalité des cardinaux

Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles finis non vides. Alors, on a  $Card(A) = Card(B)$  si et seulement si il existe une bijection entre  $A$  et  $B$ .

#### Démonstration :

Soit  $n \geq 1$  tq  $Card(A) = n$ .

On a au tableau le dessin d'une bijection entre  $A$  et  $S_n = \{1, 2, \dots, n\}$ .

$\Rightarrow \exists f: A \rightarrow S_n$  bijective.

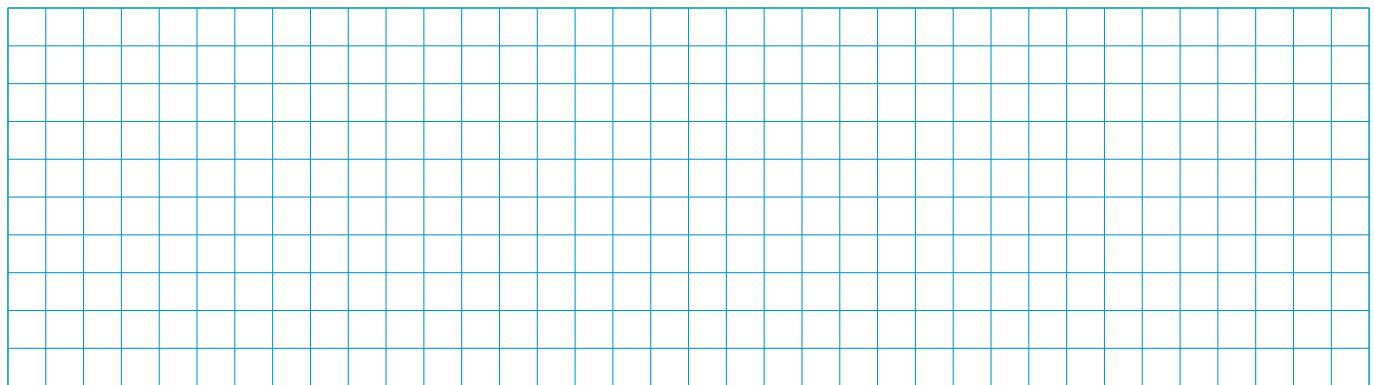
Si  $Card(B) = n$ , alors  $\exists g: B \rightarrow S_n$  bijective.

Donc,  $g^{-1}: S_n \rightarrow B$  est bijective.

Considérons  $g^{-1} \circ f: A \rightarrow B$ . C'est une bijection entre  $A$  et  $B$  par composition de bijections.

Donc,  $Card(A) = Card(B)$ .

 **Application :** Montrer que si  $A$  et  $B$  sont en bijection, alors  $Card(A) = Card(B)$ .



**Définition :** Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles non vides. Alors on appelle le **produit cartésien** de  $E$  et  $F$  et on note  $E \times F := \{(x, y) \mid x \in E, y \in F\}$ .

 **Exemple :** Soient  $E = \{1, 2\}$  et  $F = \{5, 6, 7\}$ .

Alors,  $E \times F = \{(1, 5), (1, 6), (1, 7), (2, 5), (2, 6), (2, 7)\}$ .

### Proposition : Principe multiplicatif

Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles finis non vides. Alors,  $A \times B$  est fini et on a :

$$\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B)$$

En règle générale, si  $A_1, A_2, \dots, A_k$  sont des ensembles finis non vides, alors :

$$\text{Card}(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k) = \prod_{i=1}^k \text{Card}(A_i)$$

#### Démonstration :

On démontre cette proposition pour le cas  $k = 2$ .

Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles finis non vides.

Soient  $n = \text{Card}(A)$  et  $m = \text{Card}(B)$ .

On pose  $A = \{1, 2, \dots, n\}$  et  $B = \{1, 2, \dots, m\}$ . (ça revient au même par le lemme précédent)

On peut dresser le tableau suivant pour représenter  $A \times B$  :

	1	2	...	n
1	(1,1)	(2,1)	...	(n,1)
2	(1,2)	(2,2)	...	(n,2)
:	:	:	..	:
m	(1,m)	(2,m)	...	(n,m)

On remarque que le tableau contient  $n$  colonnes et  $m$  lignes.

Donc, le tableau contient  $n \times m$  cases.

Chaque case correspond à un élément de  $A \times B$ .

On pose donc  $f: A \times B \rightarrow \{1, 2, \dots, n \times m\}$  l'application définie par  $f((i, j)) = i + (j - 1) \times n$  (l'idée est de numérotter les cases de gauche à droite et de haut en bas).

On vérifie facilement que  $f$  est une bijection (strictement croissante et bien définie).

Donc,  $\text{Card}(A \times B) = n \times m = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B)$ .

**Définition :** Soit  $E$  un ensemble non vide et  $n \geq 1$  un entier naturel.

Les éléments de  $E^n := \underbrace{E \times E \times \dots \times E}_{n \text{ fois}}$  sont appelés des **n-uplets** d'éléments de  $E$ , et on les note  $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$  avec  $\omega_i \in E$  pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

### Proposition : Cardinal des n-uplets

Soient  $n, M \geq 1$  et soit  $E$  un ensemble tel que  $\text{Card}(E) = M$ .

On dit que le nombre de  $n$ -uplets d'éléments de  $E$  est égal à  $M^n$ , c'est-à-dire :

$$\text{Card}(E^n) = M^n$$

**Exemple :** L'ensemble des dates d'anniversaires des 8 étudiants du premier rang est décrit par  $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_8)$  où chaque  $\omega_i$  est une date parmi les 366 possibles (années bissextiles).

Le nombre de configurations possibles pour les dates d'anniversaires des 8 étudiants est donc  $366^8$ .

**Définition :** Soit  $E$  un ensemble de cardinal  $M \geq 1$  et soit  $0 \leq n \leq M$ .

Un **arrangement** de  $n$  éléments de  $E$  est un n-uplet  $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$  d'éléments de  $E$  tels que tous les  $\omega_i$  sont distincts.

On parle de  $n$ -uplets d'éléments distincts de  $E$ .

**Vocabulaire :** Quand  $n = M$ , on parle de **permutations** d'éléments de  $E$  (*on parle de  $A_M^M$* ).

**Exemple :** Si on reprend l'exemple des dates d'anniversaires, un arrangement de 3 éléments parmi les 8 étudiants du premier rang pourrait être  $(\omega_1, \omega_3, \omega_5)$  où les dates d'anniversaires des étudiants 1, 3 et 5 sont distinctes.

### Proposition : Cardinal des arrangements

Soient  $E$  un ensemble de cardinal  $M \geq 1$  et soit  $0 \leq n \leq M$ .

Le nombre d'arrangements de  $n$  éléments de  $E$  est donné par la formule :

$$A_M^n = \frac{M!}{(M-n)!}$$

Dans le cas d'une permutation, on a  $A_M^M = M!$  (*application de la formule avec  $n = M$* ).

#### Démonstration :

Soit  $E$  un ensemble de cardinal  $M \geq 1$  et soit  $0 \leq n \leq M$ .

On cherche à compter le nombre d'arrangements de  $n$  éléments de  $E$ .

Soit  $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$  un arrangement de  $n$  éléments de  $E$ .

- Pour choisir  $\omega_1$ , on a  $M$  possibilités.

- Pour choisir  $\omega_2$ , on a  $M - 1$  possibilités (car  $\omega_2$  doit être distinct de  $\omega_1$ ).

⋮

- Pour choisir  $\omega_n$ , on a  $M - n + 1$  possibilités (car  $\omega_n$  doit être distinct de tous les  $\omega_i$  précédents).

Par le principe multiplicatif, le nombre total d'arrangements de  $n$  éléments de  $E$  est donc :

$$A_M^n = M \times (M-1) \times (M-2) \times \dots \times (M-n+1) = \frac{M!}{(M-n)!}$$

**Rappel :** On rappelle que  $k! = \prod_{i=1}^k i$  pour tout  $k \geq 1$  et  $0! = 1$ .

**Exemple :** Si on reprend l'exemple des dates d'anniversaires, le nombre d'arrangements de 3 éléments parmi les 8 étudiants du premier rang est donné par :

$$A_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = 8 \times 7 \times 6 = 336$$

### Proposition : Dénombrement d'applications

Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles finis tels que  $\text{Card}(A) = n$  et  $\text{Card}(B) = M$  (avec  $n, M \geq 1$ ).

Alors :

1. L'ensemble  $\mathcal{F}(A, B)$  des applications de  $A$  dans  $B$  est fini et on a :  $\text{Card}(\mathcal{F}(A, B)) = M^n$ .
2. Si  $n \leq M$ , le nombre de fonctions injectives de  $A$  dans  $B$  est donné par :  $A_M^n$ .
3. Si  $n = M$ , le nombre de fonctions bijectives de  $A$  dans  $B$  est donné par :  $A_M^M = M!$ .

#### Démonstration :

Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles finis tels que  $\text{Card}(A) = n$  et  $\text{Card}(B) = M$  (avec  $n, M \geq 1$ ).

1. Soit  $f \in \mathcal{F}(A, B)$ .

On peut représenter  $f$  par un  $n$ -uplet  $(f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n))$  d'éléments de  $B$  où  $a_i \in A$  pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

Chaque  $f(a_i)$  peut prendre n'importe quelle valeur dans  $B$ , donc on a  $M$  possibilités pour chaque  $f(a_i)$ .

Par le principe multiplicatif, le nombre total de fonctions de  $A$  dans  $B$  est donc :  $M^n$ . Réciproquement, chaque  $n$ -uplet d'éléments de  $B$  correspond à une fonction de  $A$  dans  $B$ .

2. Toute fonction injective correspond à un arrangement de  $n$  éléments de  $B$  (car les images des éléments de  $A$  doivent être distinctes).
3. *Laissée en exercice.*

**Rappel :** Soient  $X, Y$  deux ensembles. Soit  $f : X \rightarrow Y$ .  $\forall A \subset Y f^{-1}(A) = \{x \in X \mid f(x) \in A\}$  est l'**image réciproque** de  $A$  par  $f$ .

**Remarque :**  $f^{-1}(A)$  peut être  $\emptyset$ , même si  $A \neq \emptyset$ .

### Proposition : Lemme des bergers

Soit  $X$  et  $Y$  des ensembles finis et  $f : X \rightarrow Y$  une application.  
On suppose que  $\text{Card}(f^{-1}(\{y\})) = k$  où  $k \in \mathbb{N}^*$  pour tout  $y \in f(X)$ .  
Alors  $\text{Card}(Y) = \frac{\text{Card}(X)}{k}$ .

**Exemple :** C'est l'idée du berger qui compte ses moutons. Si chaque mouton a 4 pattes, en comptant le nombre de pattes total et en divisant par 4, on obtient le nombre de moutons.

#### Démonstration :

$X_i = f^{-1}(\{y_i\})$ .  
 $X = \bigcup_{y_i \in f(X)} X_i$  et les  $X_i$  sont disjoints.  
Donc  $\text{Card}(X) = \sum_{i=1}^n \text{Card}(X_i)$ .  
En effet, si  $z_1 \in f^{-1}(\{y_1\}) \Rightarrow z_1 \notin f^{-1}(\{y_j\})$  pour  $j \neq 1$ .  
Donc  $X_i \cap X_j = \emptyset$  pour  $i \neq j$ .  
 $\forall x \in X, \exists i : f(x) = y_i$  par définition de l'image.  
Donc  $X = \bigcup_{i=1}^n X_i$ .  
Or  $\text{Card}(X_i) = K$  donc  $\text{Card}(X) = \sum_{i=1}^n k = n \times k$  où  $n = \text{Card}(f(X))$ .  
Donc  $n = \frac{\text{Card}(X)}{k}$ .

**Exemple :** Prenons le mot "Ensemble". On a 8 lettres, dont 3 "e" identiques.  
Le nombre de façons de réarranger les lettres du mot "Ensemble" est donc :  $\frac{8!}{3!} = 6720$ .

**Définition :** Soient  $E$  un ensemble fini de cardinal  $N$  et  $0 \leq n \leq N$ .  
Un sous-ensemble à  $n$  éléments de  $E$  est appelé une **combinaison** de  $n$  éléments de  $E$ .

Elle est donnée  $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$  où les  $\omega_i$  sont distincts et non ordonnés.

### Proposition :

Le nombre total des combinaisons à  $n$  éléments de  $E$  est donné par :

$$C_N^n = \frac{N!}{n!(N-n)!} = \frac{1}{n!} A_N^n = \binom{N}{n}$$

#### Démonstration :

$X = \{\text{arrangements de } n \text{ éléments de } E\}$ .  
 $Y = \{\text{combinaisons de } n \text{ éléments de } E\}$ .  
Soit  $f : X \rightarrow Y$  l'application telle que  $f((\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)) = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ .  
Donc  $\text{Card}(f^{-1}(\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\})) = n!$  car il y a  $n!$  façons d'ordonner les éléments d'une combinaison.  
Donc  $\text{Card}(Y) = \frac{\text{Card}(X)}{n!} = \frac{A_N^n}{n!} = \frac{N!}{n!(N-n)!}$ .

**Proposition :**

1. Soient  $A$  et  $B$  tq  $A \cap B = \emptyset$ ,  $A, B$  finis.  
 $\Rightarrow Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B)$ .
2. Soient  $A, B$  finis.  
 $\Rightarrow Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B)$ .

**Démonstration :**

1. Exercice : si  $n = Card(A)$  et  $m = Card(B)$ .  
Idée montrer  $A \cup B$  est en bijection avec  $\{1, \dots, n, \dots, n+m\}$ .
2. cf. Laurent.

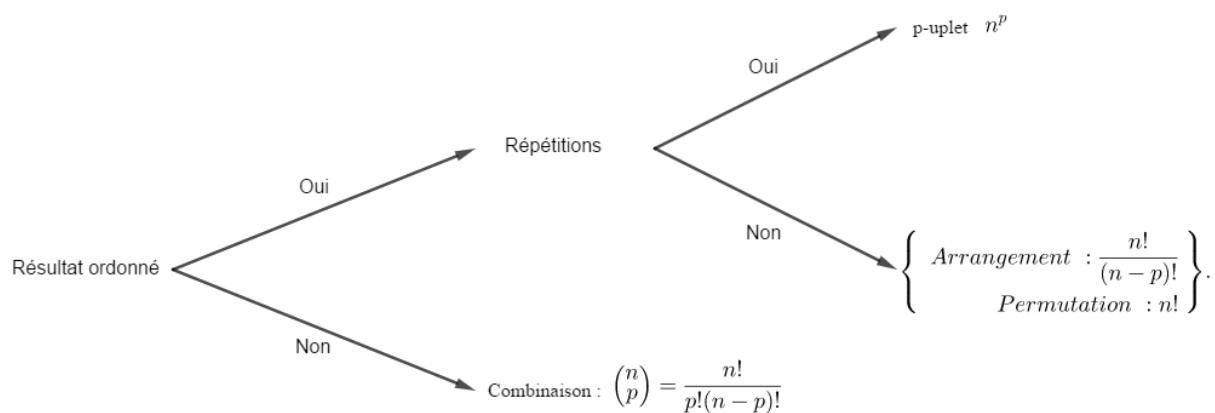
**Formulaire : Cas d'utilisation des formules de dénombrement**

Figure 1: Arbre décisionnel illustrant les cas d'utilisation des formules de dénombrement