

Chapitre 4 : Variables aléatoires

I Définitions

Rappel : Un rappel a été proposé sur l'image réciproque d'un ensemble par une application.

Définition : Soit (Ω, \mathbb{P}) un espace de probabilité et soit E un ensemble dénombrable. Une **variable aléatoire à valeurs dans E** est une application de Ω dans E .

De manière générique, on la note $X : \Omega \rightarrow E$

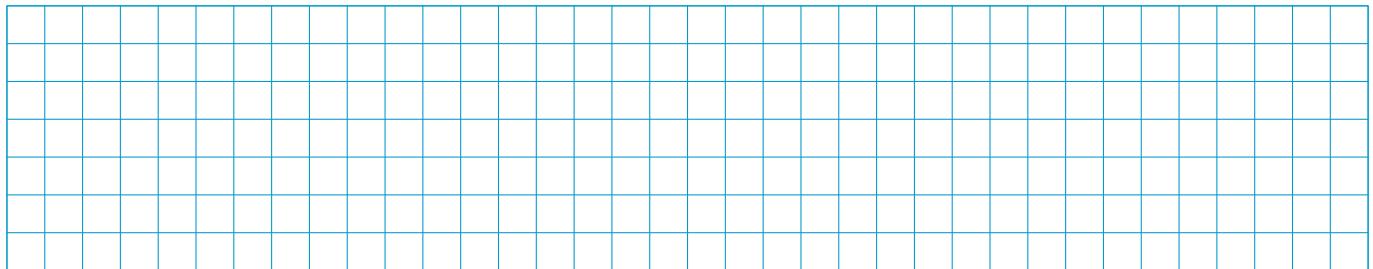
Vocabulaire : On écrira souvent *v.a.r.* pour *variable aléatoire réelle*, ie. une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{R} .

Définition : Soit (Ω, \mathbb{P}) un espace de probabilité et soit $X : \Omega \rightarrow E$ une variable aléatoire à valeurs dans E . La **loi de X** est une probabilité définie sur E par :

$$\mu_X(A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A)) := \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\})$$

où $A \in \mathcal{P}(E)$

 Application : Vérifier en montrant les axiomes de la probabilité que μ_X est bien une probabilité sur E .



Exemple : On lance deux dés. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2 = \{(\omega_1, \omega_2) : \omega_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$ et \mathbb{P} est la probabilité uniforme.

On pose $S : \Omega \rightarrow \{2, 3, \dots, 12\}$ définie par $S((\omega_1, \omega_2)) = \omega_1 + \omega_2$.

$$\mu_S(2) = \mathbb{P}(S^{-1}(\{2\})) = \mathbb{P}(\{(1, 1)\}) = \frac{1}{36} = \mathbb{P}(S = 2)$$

$$\mu_S(3) = \mathbb{P}(S^{-1}(\{3\})) = \mathbb{P}(\{(1,2), (2,1)\}) = \frac{2}{36} = \mathbb{P}(S=3)$$

$$\mu_S(4) = \mathbb{P}(S^{-1}(\{4\})) = \mathbb{P}(\{(1,3), (2,2), (3,1)\}) = \frac{3}{36} = \mathbb{P}(S=4)$$

• • •

Vocabulaire : On a les abréviations et/ou notations suivantes :

- $\mu_X(A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A)) = \mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\})$
 - $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X^{-1}(\{k\})) = \mu_X(\{k\})$

Exemple : On va ici illustrer la loi de Bernouilli.

La loi de Bernoulli est donnée par $\mu(\{0\}) = 1 - p$ et $\mu(\{1\}) = p$ où $p \in [0, 1]$.

Une **variable de Bernouilli** de paramètre p est une variable aléatoire définie sur (Ω, \mathbb{P}) $X : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ telle que μ_X est la loi de Bernouilli de paramètre p .

On la note $Ber(p)$

Définition : Soit E un ensemble fini.

La **loi uniforme sur E** est définie par $\mu(\{x\}) = \frac{1}{|E|}$ pour tout $x \in E$. On la note $\mathcal{U}(E)$

Contents

I Définitions

1