Chapitre 6.2 : Sous-espaces caractéristiques

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n.
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E.
Soit $\lambda \in K$ une valeur propre de u.

Rappel : On appelle $m_a(\lambda)$ la multiplicité algébrique de λ, c'est-à-dire la multiplicité de λ comme racine du polynôme caractéristique de u.

Rappel : On appelle $m_g(\lambda)$ la multiplicité géométrique de λ, c'est-à-dire la dimension du sous-espace propre $E_\lambda = Ker(u - \lambda Id_E)$.

Définition : On pose $N_\lambda = Ker\big((u - \lambda Id_E)^{m_a(\lambda)}\big)$.
Il s'agit du **sous-espace caractéristique** de u associé à la valeur propre λ.

Théorème : *(admis)*

On suppose P_u scindé (i.e. trigonalisable).
Alors :

1. N_λ est un sev stable par u de dimension $m_a(\lambda)$.
2. $E_\lambda \subset N_\lambda$.
3. $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} N_\lambda$.
4. Soit π_λ la projection de E sur N_λ parallèlement à $\bigoplus_{\mu \in Sp(u), \mu \neq \lambda} N_\mu$.
   Alors $\pi_\lambda \in K[u]$.
5. Si $\lambda \neq \mu$, $\pi_\lambda \circ \pi_\mu = 0$

Exemple : $Mat(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres sont 1 et 2. $P_u(X) = -(X-1)^2(X-2)$.

Donc :

- $\lambda = 2$, $m_a(2) = m_g(1) = 1$ donc $E_2 = Ke_3 = N_2$.
- $\lambda = 1$, $m_a(1) = 2$ et $m_g(1) = 1$ donc $E_1 = Ke_1$ et $N_1 = Ke_1 \oplus Ke_2$.

Théorème : *(admis)*

N_λ est stable par u et posons $u_\lambda = u_{|N_\lambda}$.
Alors :

1. u_λ a une seule valeur propre qui est λ.
2. On a $P_u = \pm(X - \lambda)^{m_a(\lambda)}$.
3. On a $dim N_\lambda = m_a(\lambda)$.
4. $\exists B_\lambda$ une base de N_λ telle que $Mat_{B_\lambda}(u_\lambda) = \lambda I_{m_a(\lambda)}$.

Corollaire : *(admis)*

On suppose P_u scindé.
Il existe une base B de trigonalisation de u telle que la $Mat_B(u)$ est de la forme suivante :

$$\mathrm{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} A_{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_{\lambda_k} \end{pmatrix},$$

avec $$A_{\lambda_i} = \begin{pmatrix} \lambda_i & * & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_i & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

Exemple : $E = \mathbb{R}^3$ et u tel que $Mat(u) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 6 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

$P_u(X) = -(X-1)^3$.
Donc 1 est la seule valeur propre de u avec $m_a(1) = 3$.
Or u n'est pas diagonalisable car si u diagonalisable dans B, on a $Mat_B(u) = I_3$. Donc $u = Id_E$. Absurde.

u est scindé, donc trigonalisable.