

Chapitre 2 : Formes linéaires et dualité

I Formes linéaires et hyperplan

Rappel : E et F des \mathbb{K} -espaces vectoriels. On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F .

Remarque : On note $\dim_{\mathbb{K}}(E)$ la dimension de E en tant qu'espace vectoriel sur \mathbb{K} . C'est utile, car par exemple $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$ mais $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$.

Définition : Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel.

On appelle **forme linéaire** sur E toute application linéaire de E dans \mathbb{K} .

On appelle l'espace dual de E et on note E^* l'ensemble des formes linéaires sur E :

$$E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$$

Remarque : Si $\varphi \in E^*$ et $x \in E$, on peut noter $\varphi(x) = \langle \varphi, x \rangle$.

Vocabulaire : On appelle \langle, \rangle le crochet de dualité.

Exemple : $E = \mathbb{R}^3$.

On pose $f(x, y, z) = 3x + 2y - z$. Alors $f \in E^*$.

Proposition :

L'image d'un élément de E^* est \mathbb{K} ou $\{0\}$ et $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}) = 1$.

$$\text{Im}(f) = \{0\} \Leftrightarrow f = 0.$$

Preuve : Appliquer le théorème du rang.

Définition : Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel.

On appelle **hyperplan** de E le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E .

Proposition :

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et soit H un sous-espace vectoriel de E .

H est un hyperplan de $E \Leftrightarrow \exists x_0 \in E \setminus \{0\}$ tel que $E = H \oplus \text{Vect}(x_0)$.

De plus, si $\dim(E) = n$, H est un hyperplan de $E \Leftrightarrow \dim(H) = n - 1$.

Remarque : Le prof a noté $\mathbb{K}x_0$ au lieu de $\text{Vect}(x_0)$.

Démonstration :

Supposons que H est un hyperplan de E .

Par définition, il existe $f \in E^* \setminus \{0\}$ tel que $H = \text{Ker}(f)$.

Soit $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) \neq 0$. En particulier, $f(x_0) \neq 0$ (car f est non nulle).

Montrons que $E = H \oplus \text{Vect}(x_0)$.

Soit $x \in H \cup \text{Vect}(x_0)$.

Comme $x \in \text{Vect}(x_0)$, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $x = x_0 * \lambda$.

Or $x \in H \Rightarrow 0 = f(x) = f(x_0 * \lambda) = \lambda f(x_0)$.

Comme $f(x_0) \neq 0$, on en déduit que $\lambda = 0$ et donc $x = 0$ et $H \cap Vect(x_0) = \{0\}$.

Montrons que $E = H + Vect(x_0)$.

Soit $x \in E$.

$$\text{On a } x = \underbrace{x - \frac{f(x)}{f(x_0)}x_0}_{\in H} + \underbrace{\frac{f(x)}{f(x_0)}x_0}_{\in Vect(x_0)}.$$

Donc $E = H + Vect(x_0)$ et finalement $E = H \oplus Vect(x_0)$.

Réciproquement, supposons qu'il existe $x_0 \in E \setminus \{0\}$ tel que $E = H \oplus Vect(x_0)$.

Soit p la projection sur $Vect(x_0)$ parallèlement à H . (ie. pour $x \in E$, $p(x)$ est l'unique élément λx_0 dans la décomposition $x = h + \lambda x_0$ avec $h \in H$ et $\lambda \in \mathbb{K}$).

Pour $x \in E$, on note $\lambda(x) \in \mathbb{K}$ tel que $p(x) = \lambda(x)x_0$.

On a $\lambda : E \rightarrow \mathbb{K} \in E^*$ (il suffit de montrer que λ est linéaire).

De plus, $\lambda(x_0) = 1$ par définition donc $\lambda \in E^* \setminus \{0\}$ et $\forall h \in H, \lambda(h) = 0$ (car $p(h) = 0$).

Donc $H = Ker(\lambda)$, c'est-à-dire que H est un hyperplan de E . \square

Proposition :

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et soient $f, g \in E^*$.

$$ker(f) = ker(g) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}, g = \lambda f$$

(ie. f et g sont proportionnelles).

Démonstration :

Comme f et g sont non nulles, $ker(f) = ker(g)$ est un hyperplan de E .

Donc E s'écrit comme $E = H \oplus Vect(x_0)$ avec $H = ker(f) = ker(g)$ et $x_0 \in E \setminus \{0\}$.

En particulier, $x_0 \notin ker(f)$ et $x_0 \notin ker(g)$. (car sinon $E = ker(f)$ ou $E = ker(g)$ et donc $f = 0$ ou $g = 0$).

$$\text{Donc posons } \lambda = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}.$$

Montrons que $f = \lambda g$.

Soit $x \in E$.

On écrit $x = h + \mu x_0$ avec $h \in H$ et $\mu \in \mathbb{K}$.

Alors $f(x) = f(h + \mu x_0) = f(h) + \mu f(x_0) = \mu f(x_0)$ (car $h \in H = ker(f)$).

Et de même $g(x) = g(h + \mu x_0) = g(h) + \mu g(x_0) = \mu g(x_0) = \mu \frac{f(x_0)}{\lambda}$.

Donc $f = \lambda g$. \square

II Bases duales

Proposition : Dimension de l'espace dual (admis)

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n . Alors $\dim(E^*) = \dim_{\mathbb{K}}(E) \cdot \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}) = n \cdot 1 = n$.

Définition : Soit (e_1, e_2, \dots, e_n) une base de E .

On appelle $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ la base duale de E définie par :

$$\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, \langle e_i^*, e_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

De manière équivalente, si $x \in E$ s'écrit $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$ (coordonnées de x dans la base (e_1, \dots, e_n)), alors : $\langle e_i^*, x \rangle = x_i$.

Ou encore $x = \sum_{j=1}^n \langle e_j^*, x \rangle e_j$.