

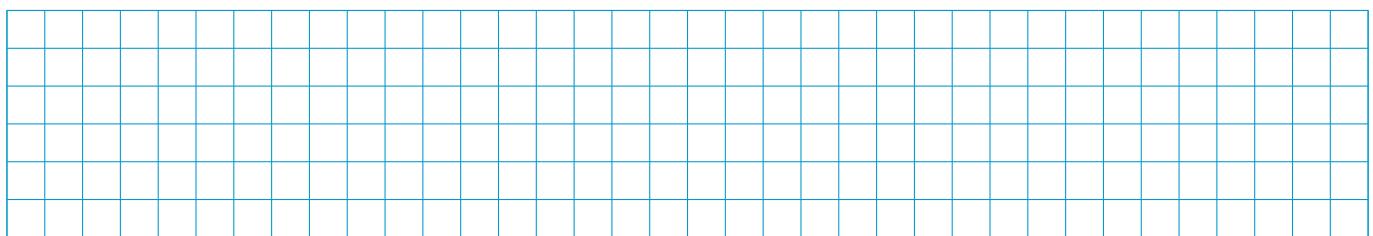
# Dénombrément

## I Partie d'un ensemble

**Définition :** Soit  $E$  un ensemble.

- On dit qu'un ensemble  $A$  est une **partie** de  $E$  si tous les éléments de  $A$  sont des éléments de  $E$ . On écrit dans ce cas  $A \subseteq E$ .
- L'ensemble de toutes les parties de  $E$  est noté  $\mathcal{P}(E)$ .

**Exemple :** Notons  $E$  l'ensemble des élèves du groupe de spécialité maths 4.



**Exemple :**

- Si  $E = \{0; 1; 2; 3\}$  alors  $\emptyset, \{0; 1\}, \{0\}, \{0; 2\}$  sont des parties de  $E$ .
- $\{0; 2024\}$  et  $\mathbb{Z}$  sont des parties de  $\mathbb{R}$ .

**Vocabulaire :** Une partie à 1 élément s'appelle un **singleton**. Une partie à 2 éléments s'appelle une **paire**.

**Remarque :** Tout ensemble  $E$  contient au moins deux parties : l'ensemble vide et lui-même. Autrement dit, nous avons toujours  $\emptyset \subseteq E$  et  $E \subseteq E$ .

**Propriété : Nombre de parties d'un ensemble fini**

Soit  $E$  un ensemble fini à  $n$  éléments. Le nombre de parties de  $E$  est égal à  $2^n$ . Autrement dit :

$$\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n.$$

**Démonstration :**

Lorsque l'on cherche à construire une partie de  $E$ , pour chaque élément de  $E$  il y a deux choix possibles : soit il est dans cette partie, soit il n'y est pas.

Si un élément est dans cette partie, on peut considérer qu'on lui affecte la valeur 1, et la valeur 0 sinon.

Ainsi, cela revient à déterminer le nombre de  $n$ -uplets de  $\{0; 1\}$ , ou encore le cardinal de l'ensemble  $\{0; 1\}^n$ .

On sait que  $\text{Card}(\{0; 1\}) = 2$ , et par conséquent, d'après la propriété sur le cardinal du produit cartésien, on a :

$$\text{Card}(\{0; 1\}^n) = 2^n.$$

 **Application :** On pose  $E = \{\ln(3); e^\pi; 2024\}$ .

### Application 1 : Un peu d'algèbre

2. Donner toutes les parties de  $E$ .

## II Combinatoires

## A Définition

**Définition :** Soit  $E$  un ensemble fini de cardinal  $n$  et  $k$  un entier naturel tel que  $k \leq n$ .

- Une **combinaison** de  $k$  éléments de  $E$  est une partie de  $E$  de cardinal  $k$ .
  - Le nombre de combinaisons de  $k$  éléments de  $E$  est  $\binom{n}{k}$ .

**Attention** Dans une combinaison, l'ordre dans lequel on énumère les éléments ne compte pas. Par exemple, si  $a$  et  $b$  sont deux éléments d'un ensemble  $E = \{a, b\} = \{b, a\}$  (en tant qu'éléments de  $\mathcal{P}(E)$ ) alors que  $(a; b) \neq (b; a)$  (en tant qu'éléments de  $E \times E$ ).

**Propriété :** (*admise*)

Soient  $n$  et  $k$  deux entiers naturels tels que  $k < n$ . Alors :

$$1. \quad \binom{n}{1} = n ; \quad \binom{n}{n} = 1 ; \quad \text{et} \quad \binom{n}{0} = 1 ;$$

**2. Symétrie des coefficients binomiaux :**  $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$  ;

**3. Formule de Pascal :**  $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ .

💬 Note de rédaction : Démonstration laissée à l'appréciation du lecteur.

## Propriété : Somme des coefficients binomiaux

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Alors :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n.$$

## B Nombre de combinaisons à $k$ éléments

**Propriété : Nombre de combinaisons à  $k$  éléments (admise)**

Soient  $n$  et  $k$  deux entiers naturels tels que  $0 \leq k \leq n$ . Alors :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$