Chapitre 4 : Espaces euclidiens

I Produit scalaire et norme

A Produit scalaire

Définition : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Un **produit scalaire** sur E est une application $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ qui vérifie les propriétés suivantes :

1. $\forall x, y \in E,\ \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ (symétrie)
2. $\forall x, x', y \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \langle \lambda x + x', y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle$ (linéarité en la première variable)
3. $\forall x \in E,\ \langle x, x \rangle \geq 0$ et $\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$ (positivité)

En résumé, un produit scalaire est une forme bilinéaire, symétrique et définie positive.

Exemple : Dans $\mathbb{R}^n$,$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ est un produit scalaire.
Dans $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ est un produit scalaire.

Remarque : Si E est un espace vectoriel normé de dimension finie, il n'y a pas de produit scalaire canonique *a priori*. (On a vu néanmoins que dans $\mathbb{R}^n$, il existe un produit scalaire canonique.

Définition : Un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E muni d'un produit scalaire est appelé un **espace euclidien**.
On le note $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Identités remarquables :

$\langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle$
$\langle x + y, x - y \rangle = \langle x, x \rangle - \langle y, y \rangle$

Théorème : Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.
Alors, pour tous $x, y \in E$, on a :

$$|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle}\sqrt{\langle y, y \rangle}$$

De plus, l'égalité a lieu si et seulement si x et y sont linéairement dépendants.

Note de rédaction : cf. Laurent.

B Normes

Rappel : On rappelle qu'une norme est une application $N : E \to \mathbb{R}_+$ qui vérifie l'homogénéité, l'inégalité triangulaire et la séparation.

Proposition :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
On pose $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.
Alors $\| \cdot \|$ est une norme sur E, appelée la norme associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Démonstration :
Homogénéité : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in E$.
$\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x\rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle x, x\rangle} = |\lambda|\sqrt{\langle x, x\rangle} = |\lambda|\|x\|$
Inégalité triangulaire : Soit $x, y \in E$.
$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \leq \langle x, x\rangle + 2|\langle x, y\rangle| + \langle y, y\rangle$
$\leq \langle x, x\rangle + 2\sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle} + \langle y, y\rangle = (\sqrt{\langle x, x\rangle} + \sqrt{\langle y, y\rangle})^2$
$\Rightarrow \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$
Séparation : Soit $x \in E$ tel que $\|x\| = 0$.
Alors $\sqrt{\langle x, x\rangle} = 0 \Rightarrow \langle x, x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0$

Remarque : $x \mapsto |x|$ est une norme sur $\mathbb{R}$, associée au produit scalaire $\langle x, y\rangle = xy$.

Contents