

# Chapitre 3 : Espaces vectoriels

## I Corps

**Définition :** Un **corps** est un ensemble  $K$  muni de deux lois de composition interne notées  $+$  et  $\times$  telles que :

- $(K, +)$  est un groupe abélien
- $(K \setminus \{0\}, \times)$  est un groupe abélien
- La loi  $\times$  est distributive par rapport à la loi  $+$

Si de plus la loi  $\times$  est commutative, on dit que  $K$  est un **corps commutatif**.

**Rappel :** Distributivité :  $\forall a, b, c \in K, a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

**Exemple :**  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, p$  premier sont des corps.

## II Espaces vectoriels

**Définition :** Soient  $K$  un corps et  $E$  un groupe abélien.

Soit une loi :  $\begin{matrix} K \times E \rightarrow E \\ (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v \end{matrix}$  (*multiplication externe*).

On dit que  $(E, +, \cdot)$  est un  **$K$ -espace vectoriel** si on a  $\forall \lambda, \mu \in K, \forall v \in E$  :

- $\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \times \mu) \cdot v$
- $1 \cdot v = v$
- $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$  (*on a deux + différents*)
- $\lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w$

**Vocabulaire :** Les éléments de  $E$  sont appelés **vecteurs**. Les éléments de  $K$  sont appelés **scalaires**.

**Exemple :**  $\mathbb{R}^n$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. De même pour  $\{0\}, \mathbb{R}[X], M_n(\mathbb{R})$ .  
On peut voir  $\mathbb{C}$  comme un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

**Définition :** Soit  $E$  un  $K$ -ev, et soit  $(v_i)_{i \in I}$  une famille de vecteurs de  $E$ .

Soit  $(\lambda_i)_{i \in I}$  une famille de scalaires de  $K$ .

On dit que  $(\lambda_i)_{i \in I}$  est presque nulle si :  $\{i \in I, \lambda_i \neq 0\}$  est fini.

Alors on considère  $\sum_{i \in I, \lambda_i \neq 0} \lambda_i v_i$  noté  $\sum_{i \in I} \lambda_i v_i$ . C'est une **combinaison linéaire** des  $v_i$ .

**Définition :** Soit  $X \subset E$ . Une combinaison linéaire de vecteurs de  $X$  est de la forme  $\sum_{v \in X} \lambda_v v$  avec  $(\lambda_v)_{v \in X}$  presque nulle.

**Vocabulaire :** Les  $(\lambda_v)_{v \in X}$  sont appelés les **coefficients** de la combinaison linéaire.

### III Sous-espaces vectoriels

**Définition :** Soit  $E$  un  $K$ -ev. Soit  $F \subset E$ .

On dit que  $F$  est un **sous-espace vectoriel** (sous-ev) de  $E$  si :

- $F \neq \emptyset$
- $\forall u, v \in F, \lambda, \mu \in K, \lambda u + \mu v \in F$

**Proposition : Caractérisation des sous-ev**

Tout sous-espace vectoriel est un espace vectoriel pour les lois induites par  $E$ .


**Preuve:**

Montrons  $(F, +)$  est un sous-groupe de  $(E, +)$  :

- $F \neq \emptyset$  donc  $\exists u \in F$ .
- $\lambda = \mu = 1 \implies u + v \in F, \forall u, v \in F$  donc  $F$  est stable par  $+$
- $u + (-1)u = u(1 + (-1)) = 0_E \in F$ . On a donc  $-u \in F, \forall u \in F$ .

Donc on a bien un sous-groupe.

Les autres propriétés sont vérifiables et immédiates, on a bien un espace vectoriel

 **Exemple :** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev.

- $\{0_E\}$  et  $E$  sont des sous-ev de  $E$ .
- $\{(x, y) \mid ax + by = 0\} \subset \mathbb{R}^2$  est un sous-ev de  $\mathbb{R}^2$ .

**Proposition : Intersection de sev**

Soit  $E$  un  $K$ -ev. Soit  $(F_i)_{i \in I}$  une famille de sev de  $E$ .

Alors  $\bigcap_{i \in I} F_i$  est un sev de  $E$ .

**Preuve:**

Montrons que  $\bigcap_{i \in I} F_i$  est stable par combinaison linéaire.

Soient  $x, y \in \bigcap_{i \in I} F_i$  et  $\lambda, \mu \in K$ .

On a  $x, y \in F_i$  pour tout  $i \in I$ , donc  $\lambda x + \mu y \in F_i$  pour tout  $i \in I$ .

Donc  $\lambda x + \mu y \in \bigcap_{i \in I} F_i$ .  $\square$

 **Remarque :** L'union de sev n'est pas forcément un sev.


**Proposition : Sous-ev engendré**

Soit  $E$  un  $K$ -ev. Soit  $X \subset E$ .

Alors il existe un plus petit sev de  $E$  contenant  $X$ , noté  $\text{Vect}(X)$  et appelé le **sev engendré** par  $X$ .

On a  $\text{Vect}(X) = \{\sum_{x \in X} \lambda_x x \mid (\lambda_x)_{x \in X} \text{ est presque nulle, } \lambda_x \in K\} = \bigcap_{\substack{F \text{ sev de } E \\ X \subset F}} F$ .

Intuitivement, c'est l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de  $X$ .

 **Rappel :** "Presque nulle" signifie que tous les coefficients sont nuls sauf un nombre fini d'entre eux.

**Preuve:**

Montrons que  $\text{Vect}(X)$  est un sev de  $E$ .

Soient  $u, v \in \text{Vect}(X)$  et  $\lambda, \mu \in K$ .

On a  $u = \sum_{x \in X} \lambda_x x$  et  $v = \sum_{x \in X} \mu_x x$  avec  $(\lambda_x)_{x \in X}$  et  $(\mu_x)_{x \in X}$  presque nulles.

Donc  $\lambda u + \mu v = \sum_{x \in X} (\lambda \lambda_x + \mu \mu_x) x$  est une combinaison linéaire d'éléments de  $X$  avec des coefficients presque

nuls.

Donc  $\lambda u + \mu v \in \text{Vect}(X)$ . C'est bien un sev.

On a  $X \subset \{CLdeX\}$  car  $x = 1 \cdot x + 0 \cdot y, \forall x \in X, y \in E$ .

Donc  $\text{Vect}(X) \subset \{CLdeX\}$ .

Réciproquement,  $\text{Vect}(X)$  est stable par combinaison linéaire et contient  $X$ , donc  $\{CLdeX\} \subset \text{Vect}(X)$ . Donc  $\text{Vect}(X) = \{CLdeX\}$ .  $\square$ .

**Remarque :** La démonstration est générée par IA, elle diffère de celle du cours.

### Proposition : Addition de sev

Soit  $E$  un  $K$ -ev. Soit  $(F_i)_{i \in I}$  une famille de sev de  $E$ .

On peut considérer  $\text{Vect}(\bigcup_{i \in I} F_i)$ , noté  $\sum_{i \in I} F_i$  et appelé la **somme** de la famille  $(F_i)_{i \in I}$ .

**Remarque :** On note  $F_1 + F_2 + \dots + F_n$  au lieu de  $\sum_{i=1}^n F_i$ .

### Proposition : Caractérisation de la somme

Soit  $E$  un  $K$ -ev. Soit  $(F_i)_{i \in I}$  une famille de sev de  $E$ .

Alors  $\sum_{i \in I} F_i = \{\sum_{i \in I} x_i \mid x_i \in F_i, \text{ presque tous nuls}\}$ .

**Preuve:**

**Note de rédaction :** cf. Laurent

**Exemple :** Soient  $F$  et  $G$  deux sev de  $E$ .

Alors  $F + G = \{x + y \mid x \in F, y \in G\}$ .

### Proposition : Application

On a une application  $\varphi : \begin{matrix} F_1 \times F_2 \times \dots \times F_n \rightarrow F_1 + F_2 + \dots + F_n \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto x_1 + x_2 + \dots + x_n \end{matrix}$ .

Elle est surjective.

**Vocabulaire :** Si de plus l'application  $\varphi$  est injective, alors on dit que la somme  $F_1 + F_2 + \dots + F_n$  est **directe** et on note  $F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_n$ .

### Proposition : Caractérisation de la somme directe

Soient  $F_1, F_2, \dots, F_n$  des sev de  $E$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- $F_1 + F_2 + \dots + F_n$  est une somme directe.
- $\forall (u_1, u_2, \dots, u_n) \in F_1 \times F_2 \times \dots \times F_n, u_1 + u_2 + \dots + u_n = 0_E \implies u_1 = u_2 = \dots = u_n = 0_E$
- $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, F_i \cap (F_1 + \dots + F_{i-1}) = \{0_E\}$

**Preuve:**

**Note de rédaction :** cf. Laurent

**Attention :** On a  $F_1$  somme directe avec  $F_2$  ssi  $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$ . Mais pour avoir  $F_1 \oplus F_2$  et  $F_1 \oplus F_3$ , et  $F_2 \oplus F_3 = \{0_E\}$ , mais pas forcément  $F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$ .

**Exemple :** On prend 3 droites dans le plan passant par l'origine, deux par deux distinctes. Alors elles sont en somme, mais pas en somme directe.

💬 **Vocabulaire :** Si  $F \oplus G = E$ , on dit que  $F$  et  $G$  sont des **supplémentaires**.

✗ **Attention** ✗ Le supplémentaire n'est pas unique.

## IV Familles

**Définition :** Soit  $E$  un  $K$ -ev. Soit  $I$  un ensemble.  
Soit  $(x_i)_{i \in I}$  une famille d'éléments de  $E$ .

Soit  $J \subset I$ . On dit que  $(x_i)_{i \in J}$  est une **sous-famille** de  $(x_i)_{i \in I}$ .

💬 **Vocabulaire :** À l'inverse,  $(x_i)_{i \in I}$  est une **sur-famille** de  $(x_i)_{i \in J}$ .

📌 **Remarque :** Dans la pratique, on prend souvent  $I = \{1, 2, \dots, n\}$ .

📌 **Remarque :** Soit  $X \subset E$ . On a une famille  $(x)_{x \in X}$  indexée par  $X$ .  
Donc une combinaison linéaire de  $X$  est une combinaison linéaire de la famille  $(x)_{x \in X}$ . (la réciproque n'est pas vraie, car il peut y avoir des répétitions dans la famille:  $x+x$  n'est pas une combinaison linéaire de  $X$ )

**Définition :** Soit  $(x_i)_{i \in I}$  une famille de vecteurs de  $E$ .  
On dit que  $(x_i)_{i \in I}$  est **libre** si :  
 $\forall (\lambda_i)_{i \in I}$  presque nulle,  $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0_E \implies \forall i \in I, \lambda_i = 0$ .  
On dit que  $(x_i)_{i \in I}$  est **liée** sinon.

Pour  $X \subset E$ , on dit que  $X$  est une partie libre (resp. liée) si la famille  $(x)_{x \in X}$  est libre (resp. liée).

💡 **Exemple :** Dans  $\mathbb{R}^3$ , les vecteurs  $(1, 0, 0)$  et  $(0, 1, 0)$  sont libres.  
Les vecteurs  $(1, 0, 0)$  et  $(2, 0, 0)$  sont liés.

**Définition :** Soit  $(x_i)_{i \in I}$  une famille de vecteurs de  $E$ .  
On dit que c'est une **famille génératrice** de  $E$  si  $\text{Vect}(\{x_i \mid i \in I\}) = E$ .

Alors tout élément de  $E$  s'écrit comme une combinaison linéaire des  $x_i$ .  
Pour  $X \subset E$ , on dit que  $X$  est une partie génératrice de  $E$  si la famille  $(x)_{x \in X}$  est génératrice de  $E$ .

### Proposition : Sous-familles

Soit  $(x_i)_{i \in I}$  une famille de vecteurs de  $E$ .  
Alors toute sous-famille  $(x_j)_{j \in J}$  de  $(x_i)_{i \in I}$  est libre (resp. liée) si  $(x_i)_{i \in I}$  est libre (resp. liée).  
Et toute sur-famille  $(x_k)_{k \in K}$  de  $(x_i)_{i \in I}$  est génératrice (resp. non génératrice) si  $(x_i)_{i \in I}$  est génératrice (resp. non génératrice).

(de même pour un sous-ensemble et un sur-ensemble d'une partie de  $E$ )

## V Bases

**Définition :** Soit  $(x_i)_{i \in I}$  une famille de vecteurs de  $E$ .

On dit que  $(x_i)_{i \in I}$  est une **base** de  $E$  si c'est une famille libre et génératrice de  $E$ .

Pour  $X \subset E$ , on dit que  $X$  est une partie basique de  $E$  si c'est une partie libre et génératrice de  $E$ .  
Alors la famille  $(x)_{x \in X}$  est une base de  $E$ .

💬 **Vocabulaire :** Une partie basique appelée une **base** par abus de langage.

### Théorème : Coordonnées

Soit  $(b_i)_{i \in I}$  une base de  $E$ , et soit  $u \in E$ .

Alors il existe une unique famille  $(\lambda_i)_{i \in I}$  presque nulle telle que  $u = \sum_{i \in I} \lambda_i b_i$ .

💬 **Vocabulaire :** On dit que  $\lambda_i$  est la **i-ème coordonnée** de  $u$  dans la base  $B$ .

#### Preuve:

Montrons l'existence.

Comme  $B$  est une base, c'est une famille génératrice, donc  $u$  s'écrit comme une combinaison linéaire de vecteurs de  $B$ .

Montrons l'unicité.

Supposons qu'il existe  $(\lambda_i)_{i \in I}$  et  $(\mu_i)_{i \in I}$  presque nulles telles que  $u = \sum_{i \in I} \lambda_i b_i = \sum_{i \in I} \mu_i b_i$ .

On a donc  $\sum_{i \in I} (\lambda_i - \mu_i) b_i = 0_E$ . Comme  $B$  est libre, on a  $\forall i \in I, \lambda_i - \mu_i = 0$ , donc  $\lambda_i = \mu_i$ .  $\square$

💡 **Exemple :**  $E = \{0\}$ , la seule base est la base vide.

Dans  $\mathbb{R}^2$ , la famille  $((1, 0), (0, 1))$  est une base : c'est la base canonique.

💬 **Vocabulaire :** Si  $E$  est engendré par une partie finie, on dit que  $E$  est de **dimension finie**.

📌 **Remarque :**  $K^n$  est de dimension finie,  $K^X$  avec  $X$  infini est de dimension infinie.

### Proposition :

Soit  $L \subset E$  avec une partie libre. Soit  $u \in E$ .

Alors  $L \cup \{u\}$  est libre ssi  $u \notin \text{Vect}(L)$ .

#### Preuve:

Si  $u \in \text{Vect}(L)$ , alors  $u = \sum_{v \in L} \lambda_v v$  avec  $(\lambda_v)_{v \in L}$  presque nulle.

Donc  $u - \sum_{v \in L} \lambda_v v = 0$  avec  $1 \neq 0$ , donc  $L \cup \{u\}$  est liée.

Réciproquement, si  $L \cup \{u\}$  est liée, alors il existe  $(\lambda_v)_{v \in L}$  presque nulle et  $\mu \neq 0$  tels que  $\sum_{v \in L} \lambda_v v + \mu u = 0_E$ .

Donc  $u = -\frac{1}{\mu} \sum_{v \in L} \lambda_v v \in \text{Vect}(L)$ .  $\square$

✗ **Attention** ✗ Démonstration générée par IA, différente de celle du cours.

💬 **Note de rédaction :** cf. Laurent pour une autre preuve

### Théorème : Base incomplète

Soit  $G$  une partie génératrice finie de  $E$ .

Soit  $L \subset G$  une partie libre.

Alors il existe une partie basique  $B$  de  $E$  telle que  $L \subset B \subset G$ .

💬 **Note de rédaction** : cf. Laurent pour les preuve

### Corollaire : Existence de base

Si  $E$  est un  $K$ -ev de dimension finie, alors  $E$  admet une base.

**Preuve:**

On applique le théorème de la base incomplète avec  $L = \emptyset$ .  $\square$

### Corollaire : Caractérisation des bases

Si  $L$  est une partie libre à  $p$  éléments de  $E$  et  $G$  une partie génératrice finie à  $q$  éléments de  $E$ .  
On a  $p \leq q$ .

💬 **Note de rédaction** : cf. Laurent pour les preuve

### Théorème : Bases finies

Si  $E$  est un  $K$ -ev de dimension finie, alors toutes les bases de  $E$  ont le même cardinal, appelé la **dimension** de  $E$  et noté  $\dim(E)$ .

Si  $E$  est de dimension finie  $n$  et  $(u_1, \dots, u_n)$  est une famille libre de  $E$ , il existe  $(u_{p+1}, \dots, u_n)$  tels que  $(u_1, \dots, u_n)$  est une base de  $E$ .

### Théorème : Assertions équivalentes

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1.  $E$  est un ev de dimension  $n$ .
2. Toute base de  $E$  a  $n$  vecteurs.
3. Toute base génératrice de  $E$  a au moins  $n$  vecteurs.
4. Toute partie génératrice de  $E$  a  $n$  vecteurs est libre.
5. Toute partie libre de  $E$  a au plus  $n$  vecteurs.
6. Toute partie libre  $E$  à  $n$  éléments est génératrice.

💬 **Note de rédaction** : cf. Laurent pour les preuve