

Chapitre 2 : Formes linéaires et dualité

I Formes linéaires et hyperplan

Rappel : E et F des \mathbb{K} -espaces vectoriels. On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F .

Remarque : On note $\dim_{\mathbb{K}}(E)$ la dimension de E en tant qu'espace vectoriel sur \mathbb{K} . C'est utile, car par exemple $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$ mais $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$.

Définition : Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel.

On appelle **forme linéaire** sur E toute application linéaire de E dans \mathbb{K} .

On appelle l'espace dual de E et on note E^* l'ensemble des formes linéaires sur E :

$$E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$$

Remarque : Si $\varphi \in E^*$ et $x \in E$, on peut noter $\varphi(x) = \langle \varphi, x \rangle$.

Vocabulaire : On appelle \langle, \rangle le crochet de dualité.

Exemple : $E = \mathbb{R}^3$.

On pose $f(x, y, z) = 3x + 2y - z$. Alors $f \in E^*$.

Proposition :

L'image d'un élément de E^* est \mathbb{K} ou $\{0\}$ et $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}) = 1$.

$$\text{Im}(f) = \{0\} \Leftrightarrow f = 0.$$

Preuve : Appliquer le théorème du rang.

Définition : Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel.

On appelle **hyperplan** de E le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E .

Proposition :

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et soit H un sous-espace vectoriel de E .

H est un hyperplan de $E \Leftrightarrow \exists x_0 \in E \setminus \{0\}$ tel que $E = H \oplus \text{Vect}(x_0)$.

De plus, si $\dim(E) = n$, H est un hyperplan de $E \Leftrightarrow \dim(H) = n - 1$.

Remarque : Le prof a noté $\mathbb{K}x_0$ au lieu de $\text{Vect}(x_0)$.

Note de rédaction : On pourrait avoir aussi : $\forall x \in E \setminus H, E = H \oplus \text{Vect}(x)$.

Démonstration :

Supposons que H est un hyperplan de E .

Par définition, il existe $f \in E^* \setminus \{0\}$ tel que $H = \text{Ker}(f)$.

Soit $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) \neq 0$. En particulier, $f(x_0) \neq 0$ (car f est non nulle).

Montrons que $E = H \oplus \text{Vect}(x_0)$.

Soit $x \in H \cup Vect(x_0)$.

Comme $x \in Vect(x_0)$, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $x = x_0 * \lambda$.

Or $x \in H \Rightarrow 0 = f(x) = f(x_0 * \lambda) = \lambda f(x_0)$.

Comme $f(x_0) \neq 0$, on en déduit que $\lambda = 0$ et donc $x = 0$ et $H \cap Vect(x_0) = \{0\}$.

Montrons que $E = H + Vect(x_0)$.

Soit $x \in E$.

$$\text{On a } x = \underbrace{x - \frac{f(x)}{f(x_0)}x_0}_{\in H} + \underbrace{\frac{f(x)}{f(x_0)}x_0}_{\in Vect(x_0)}.$$

Donc $E = H + Vect(x_0)$ et finalement $E = H \oplus Vect(x_0)$.

Réciproquement, supposons qu'il existe $x_0 \in E \setminus \{0\}$ tel que $E = H \oplus Vect(x_0)$.

Soit p la projection sur $Vect(x_0)$ parallèlement à H . (ie. pour $x \in E$, $p(x)$ est l'unique élément λx_0 dans la décomposition $x = h + \lambda x_0$ avec $h \in H$ et $\lambda \in \mathbb{K}$).

Pour $x \in E$, on note $\lambda(x) \in \mathbb{K}$ tel que $p(x) = \lambda(x)x_0$.

On a $\lambda : E \rightarrow \mathbb{K} \in E^*$ (il suffit de montrer que λ est linéaire).

De plus, $\lambda(x_0) = 1$ par définition donc $\lambda \in E^* \setminus \{0\}$ et $\forall h \in H, \lambda(h) = 0$ (car $p(h) = 0$).

Donc $H = \text{Ker}(\lambda)$, c'est-à-dire que H est un hyperplan de E . \square

Proposition :

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et soient $f, g \in E^*$.

$$\text{ker}(f) = \text{ker}(g) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}, g = \lambda f$$

(ie. f et g sont proportionnelles).

Démonstration :

Comme f et g sont non nulles, $\text{ker}(f) = \text{ker}(g)$ est un hyperplan de E .

Donc E s'écrit comme $E = H \oplus Vect(x_0)$ avec $H = \text{ker}(f) = \text{ker}(g)$ et $x_0 \in E \setminus \{0\}$.

En particulier, $x_0 \notin \text{ker}(f)$ et $x_0 \notin \text{ker}(g)$. (car sinon $E = \text{ker}(f)$ ou $E = \text{ker}(g)$ et donc $f = 0$ ou $g = 0$).

Donc posons $\lambda = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$.

Montrons que $f = \lambda g$.

Soit $x \in E$.

On écrit $x = h + \mu x_0$ avec $h \in H$ et $\mu \in \mathbb{K}$.

Alors $f(x) = f(h + \mu x_0) = f(h) + \mu f(x_0) = \mu f(x_0)$ (car $h \in H = \text{ker}(f)$).

Et de même $g(x) = g(h + \mu x_0) = g(h) + \mu g(x_0) = \mu g(x_0) = \mu \frac{f(x_0)}{\lambda}$.

Donc $f = \lambda g$. \square

II Bases duales

A Définition et exemples

Proposition : Dimension de l'espace dual (admis)

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n . Alors $\dim(E^*) = \dim_{\mathbb{K}}(E) \cdot \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}) = n \cdot 1 = n$.

Définition : Soit (e_1, e_2, \dots, e_n) une base de E .

On appelle $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ la base duale de E définie par :

$$\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, \langle e_i^*, e_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

De manière équivalente, si $x \in E$ s'écrit $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$ (coordonnées de x dans la base (e_1, \dots, e_n)), alors : $\langle e_i^*, x \rangle = x_i$. (car $\langle e_i^*, \sum_{j=1}^n x_j e_j \rangle = \sum_{j=1}^n x_j \langle e_i^*, e_j \rangle = x_i$)

Ou encore $x = \sum_{j=1}^n \langle e_j^*, x \rangle e_j$.

Preuve de pourquoi est-ce une base :

Montrons que $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ est une base de E^* .

Comme il y a n vecteurs dans cette famille, il suffit de montrer que cette famille est libre.

Soit $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i^* = 0_{E^*}$.

Montrons que tous les λ_i sont nuls.

On applique en e_j l'application linéaire $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i^*$:

$$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i^* \right) (e_j) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle e_i^*, e_j \rangle = \lambda_j = 0$$

Donc la famille est libre et c'est bien une base de E^* . \square

Exemple : Dans \mathbb{R}^n , soit (e_1, \dots, e_n) la base canonique.

Notons (e_1^*, \dots, e_n^*) sa base duale (canonique).

On a : $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \langle e_i^*, (x_1, \dots, x_n) \rangle = x_i$.

C'est à dire, $e_i^* : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$.

Remarque : C'est un fait général, (e_1^*, \dots, e_n^*) est la base de E^* telle que chaque e_i^* extrait la i -ième coordonnée dans la base (e_1, \dots, e_n) .

B Représentation matricielle

Proposition : Couplage en base et lien avec les matrices (admis)

Soit E un espace vectoriel de dimension n sur un corps \mathbb{K} . Soit (e_1, \dots, e_n) une base de E et (e_1^*, \dots, e_n^*) sa base duale.

Soit $x \in E$ et $\varphi \in E^*$ écrits sous la forme

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \quad \text{et} \quad \varphi = \sum_{i=1}^n y_i e_i^*.$$

Alors

$$\langle \varphi, x \rangle = \sum_{i=1}^n y_i x_i.$$

De plus, si l'on pose

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

on obtient

$$\langle \varphi, x \rangle = {}^t Y X.$$

Démonstration :

Soit (e_1, \dots, e_n) une base de E et (e_1^*, \dots, e_n^*) sa base duale.

Soit $x \in E$ et $\varphi \in E^*$.

On écrit $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $\varphi = \sum_{i=1}^n y_i e_i^*$.

Alors : $\langle \varphi, x \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n y_i e_i^*, \sum_{j=1}^n x_j e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n y_i \langle e_i^*, \sum_{j=1}^n x_j e_j \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n y_i x_j \langle e_i^*, e_j \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n y_i x_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^n y_i x_i$.

Autrement dit, si on pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, on a :

$$\langle \varphi, x \rangle = {}^t Y X$$

□

C Pratique : Calcul de bases duales

Définition : On appelle **matrice de passage de B vers C** la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de la base C dans la base B .

On la note $P_{B \rightarrow C}$.

Rappel : A est la matrice de passage de B à B' si $e'_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot e_i$.

Rappel : On a la relation suivante par rapport aux coordonnées : $X_B = P_{B \rightarrow C} X_C$.

Proposition : Relation entre matrices de passage

On a $({}^t P_{B_C^* \rightarrow B^*}) P_{B_C \rightarrow B} = I_n$ et donc $P_{B_C^* \rightarrow B^*} = ({}^t P_{B_C \rightarrow B})^{-1}$.

Avec les notations de la démonstration : ${}^t P A = I_n$ c'est-à-dire $P = ({}^t A)^{-1}$.

Démonstration :

Soit $B = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ une base de \mathbb{R}^n et $B_C = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de \mathbb{R}^n .

Soit $B^* = (u_1^*, u_2^*, \dots, u_n^*)$ la base duale de (u_1, u_2, \dots, u_n) et $B_C^* = (e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ la base duale de (e_1, e_2, \dots, e_n) .

Notons A la matrice des coefficients de la base (u_1, u_2, \dots, u_n) dans la base (e_1, e_2, \dots, e_n) .

On écrit $u_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ pour $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Alors A est la matrice de passage de la base B_C à la base B .

On note également P la matrice de passage de la base B_C^* à la base B^* .

ie $u_i^* = \sum_{j=1}^n p_{ji} e_j^*$ pour $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. ($= (p_{1i}, p_{2i}, \dots, p_{ni})$ dans la base canonique de $(\mathbb{R}^n)^*$).

Question : peut-on calculer P à partir de A ?

$\delta_{ij} = \langle u_i^*, u_j \rangle$ (par définition de la base duale). $= \langle \sum_{k=1}^n p_{ki} e_k^*, \sum_{l=1}^n a_{lj} e_l \rangle = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n p_{ki} a_{lj} \langle e_k^*, e_l \rangle = \sum_{k=1}^n p_{ki} a_{kj}$.

Donc la matrice I_n est égale à la matrice produit ${}^t P A$.

Donc ${}^t P A = I_n$ c'est-à-dire $P = ({}^t A)^{-1}$. □

Exemple : Soit $u_1 = {}^t(1 \ 1)$ et $u_2 = {}^t(-1 \ 2)$.

La matrice de passage de la base canonique à (u_1, u_2) est $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc la matrice de passage de la base duale canonique à la base duale de (u_1, u_2) est $P = {}^t(A^{-1}) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Donc $u_1^* = \frac{1}{3}(2e_1^* + e_2^*)$ et $u_2^* = \frac{1}{3}(-e_1^* + e_2^*)$. Donc $\langle u_1^*, {}^t(xy) \rangle = \frac{2x+y}{3}$ et $\langle u_2^*, {}^t(xy) \rangle = \frac{-x+y}{3}$.

III Bases antéduales

Définition : Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n .

Soit f une base de E^* .

Une **base antéduale** notée e de E est telle que $e^* = f$.

Théorème :

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n .

Soit $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ une base de E^* .

Il existe une unique base antéduale de f .

Lemme de séparation :

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n .

On a que $\forall \varphi \in E^*, \langle \varphi, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$.

En particulier, soit $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ une base de E^* et $x \in E$. Alors, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \langle f_i, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$.

Démonstration du lemme de séparation :

On suppose que $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \langle f_i, x \rangle = 0$.

Comme f base de E^* , on a $\forall \varphi \in E^*, \langle \varphi, x \rangle = 0$.

Supposons par l'absurde que $x \neq 0$.

Soit H un supplémentaire de $\text{Vect}(x)$ dans E .

Alors $E = H \oplus \text{Vect}(x)$ et H est un hyperplan de E (ie $\dim(H) = n - 1$).

$\exists \varphi \in E^* \setminus \{0\}$ tel que $H = \text{Ker}(\varphi)$.

Comme $E = H \oplus \text{Vect}(x)$, $x \notin H$ donc $\langle \varphi, x \rangle \neq 0$.

Contradiction. Donc $x = 0$. \square

Démonstration du théorème :

Unicité :

Soient $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $e' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ deux bases antéduales de f .

Montrons que $e = e'$.

On a $e^* = (e')^* = f$.

En particulier, $f_i(e_j) = \delta_{ij} = f_i(e'_j)$ pour tous $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Soit $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

On a $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, f_i(e_j - e'_j) = 0$.

Donc par le lemme de séparation, $e_j - e'_j = 0$ c'est-à-dire $e_j = e'_j$.

Existence :

Notons $E^{**} = (E^*)^*$ (l'espace bidual de E).

Soit $J : E \rightarrow E^{**}$ l'application définie par : $J : x \mapsto \underbrace{(\varphi \mapsto \langle \varphi, x \rangle)}_{ev_x \in E^{**}}$.

J est linéaire, montrons qu'elle est injective.

Soit $x \in \text{ker}(J)$, donc $ev_x = 0_{E^{**}}$.

Alors $\forall \varphi \in E^*, \langle \varphi, x \rangle = 0$.

Donc par le lemme de séparation, $x = 0$.

Donc $\text{ker}(J) = \{0\}$ et J est injective.

Comme $\dim(E) = \dim(E^{**}) = n < +\infty$ et que J est injective, J est un isomorphisme (*théorème du rang*). On pose $e_i = J^{-1}(f_i^*)$ où $\underbrace{(f_1^*, f_2^*, \dots, f_n^*)}_{\text{base de } E^{**}}$ est la base duale de $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$.

Montrons que $e^* = f$.

Soit $1 \leq i, j \leq n$.

On a $\langle f_i, e_j \rangle = \langle J(e_j), f_i \rangle = \langle J(J^{-1}(f_j^*)), f_i \rangle = \langle f_j^*, f_i \rangle = \delta_{ij}$.

Donc f est la base duale de e , i.e. $e^* = f$. \square

Remarque : On a déjà vu qu'en pratique on peut calculer des bases duales. On suppose qu'on connaît B (base de E) et B^* (base de E^*) et on veut calculer la base duale de B' . On note $A = P_{B \rightarrow B'}$ la matrice de passage de B à B' . Et on note $P = P_{B^* \rightarrow (B')^*}$ la matrice de passage de B^* à $(B')^*$.

On a vu que $P = ({}^t A)^{-1}$.

Une autre preuve de l'existence des bases antéduales est la suivante :

Étant donné une base f de E^* , on veut construire sa base antéduale e .

Soit B une base quelconque de E et B^* sa base duale.

Soit P la matrice de passage de B^* à f .

On pose $e_j = \sum_{i=1}^n c_{ij} \cdot \varepsilon_i$ où ε_i sont les vecteurs de la base B et $C = (c_{ij})$ la matrice de passage de B à e .

$$\begin{array}{ccc}
 E & & E^* \\
 & & \\
 \mathcal{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) & & \mathcal{B}^* \\
 \downarrow C & & \downarrow P \\
 e = (e_1, \dots, e_n) & & f = (f_1, \dots, f_n) \\
 & & \\
 \text{On doit avoir } C = ({}^t P)^{-1}.
 \end{array}$$

Figure 1: Construction d'une base antéduale.

Synthèse : Montrons que $\langle f_j, e_i \rangle = \delta_{ij}$.

On a $f_j = \sum_{i=1}^n p_{ij} \cdot \varepsilon_i^*$ où ε_i^* sont les vecteurs de la base B^* .

De plus, on a $e_j = \sum_{i=1}^n c_{ij} \cdot \varepsilon_i$.

D'où : $\langle f_j, e_i \rangle = \langle \sum_{k=1}^n p_{kj} \cdot \varepsilon_k^*, \sum_{l=1}^n c_{il} \cdot \varepsilon_l \rangle = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n p_{kj} c_{il} \langle \varepsilon_k^*, \varepsilon_l \rangle = \sum_{k=1}^n p_{kj} c_{ki} = \delta_{ij}$ car ${}^t P C = I_n$.

Donc e est bien la base antéduale de f . *Box*

Exemple : On pose $f_1(x, y) = 3x - y$ et $f_2(x, y) = x + 2y$.

Déterminons la base antéduale de (f_1, f_2) dans \mathbb{R}^2 .

On pose $A := P_{B_C \rightarrow f} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ la matrice dont les colonnes sont les coordonnées de f_1 et f_2 dans la base duale canonique. (ie. la matrice de passage de la base duale canonique à la base (f_1, f_2)).

On a : $A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.