Chapitre 2.3 : Séries semi-convergentes et produit de Cauchy

I Séries semi-convergentes

Exemple : $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n}$, on voit qu'elle n'est pas ACV, mais $|\frac{e^{in\theta}}{n}| = \frac{1}{n}$ $\forall \theta \in \mathbb{R}$.
Mais on a pas les outils pour voir si elle est "seulement" convergente. *Idem* pour la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$.

Donc le but ici, c'est de trouver des critères de convergence pour des séries qui ne sont pas ACV.

A Définitions et premières propriétés

Définition : Une série est dite **semi-convergente** (SCV) si elle est convergente mais pas absolument convergente.

Remarque : On considère ici les les séries à terme général $u_n \in \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ (on a pas $u_n \geq 0$).

Proposition : "étrange"

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à terme général dans $\mathbb{R}$.
On considère la série $\sum_{n\geq 0} u_n^+$ et $\sum_{n\geq 0} u_n^-$.

On a $\sum_{n\geq 0} u_n$ est SCV $\Rightarrow$ $\sum_{n\geq 0} u_n^+$ et $\sum_{n\geq 0} u_n^-$ divergent.

Preuve:
On rappelle que $u_n^+ = \max(u_n, 0)$ et $u_n^- = \max(-u_n, 0)$ et donc $u_n = u_n^+ - u_n^-$ (2) et $|u_n| = u_n^+ + u_n^-$ (1).

- Si $\sum_{n\geq 0} u_n^+$ et $\sum_{n\geq 0} u_n^-$ convergent, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ ACV par (1) : **absurde**.
- Si l'une des séries converge et l'autre diverge, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge par (2).
- Seule possibilité donc : $\sum_{n\geq 0} u_n^+$ et $\sum_{n\geq 0} u_n^-$ divergent.

Proposition :

Considérons $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à terme général dans $\mathbb{C}$.
Alors on a :
$\sum_{n\geq 0} u_n$ est SCV $\Leftrightarrow$ $\sum_{n\geq 0} Re(u_n)$ et $\sum_{n\geq 0} Im(u_n)$ sont CV et l'une d'entre elles est SCV.

Preuve:
$\Rightarrow$ / Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ est CV, alors $\sum n = 0^N u_n = \sum_{n=0}^N Re(u_n) + i \sum_{n=0}^N Im(u_n)$.
Donc on a la CV des séries $\sum_{n\geq 0} Re(u_n)$ et $\sum_{n\geq 0} Im(u_n)$.
Montrons que l'une des deux séries n'est pas ACV.
En effet on a $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq |Re(u_n)| + |Im(u_n)|$ si $\sum_{n\geq 0} |Re(u_n)|$ et $\sum_{n\geq 0} |Im(u_n)|$ ACV.
$\Rightarrow$ une des deux séries n'est pas ACV.
$\Rightarrow$ une des deux séries est ACV.

$\Leftarrow$ / On a que $\sum_{n\geq 0} Re(u_n)$ et $\sum_{n\geq 0} Im(u_n)$ sont CV.
Donc $\sum_{n\geq 0} u_n$ est CV.
Montrons que $\sum_{n\geq 0} u_n$ est SCV.
On a : $|Re(u_n)| \leq |u_n|$ et $|Im(u_n)| \leq |u_n|$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ était ACV, alors $\sum_{n\geq 0} Re(u_n)$ et $\sum_{n\geq 0} Im(u_n)$ seraient ACV ce qui est contraite à l'hypothèse "l'une d'entre elles est SCV".

B Critère d'Abel

Application : On veut donner un critère pour la convergence d'une série du type $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n} = a_n b_n$ avec $a_n = e^{in\theta}$ et $b_n = \frac{1}{n}$.

Théorème : Critère d'Abel

On considère la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ où $\sum_{n\geq 0} u_n \in \mathbb{C}$, avec $u_n = a_n b_n$ tels quels :

1. (a_n) est **réelle**, **décroissante**, et $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
2. (b_n) est **complexe** telle que $B_N = \sum_{n=0}^{N} b_n$, *i.e.* (B_N) est **bornée**.

Alors la série $\sum_{n\geq 0} a_n b_n$ converge.

Rappel : Une suite complexe est bornée : $\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |z_n| \leq M$, où $|z_n| = \sqrt{Re(z_n)^2 + Im(z_n)^2}$.

Preuve:
On va utiliser la "transformation d'Abel".
On a $B_N = \sum_{n=0}^{N} b_n$.
Alors $B_k - B_{k-1} = b_k, \forall k \geq 1$ et $B_0 = b_0$.

On part de la somme partielle de la série :
$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^{N} a_k b_k = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{N} a_k (B_k - B_{k-1})$
$= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{N} a_k B_k - \sum_{k=1}^{N} a_k B_{k-1}$
$= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{N} a_k B_k - \sum_{k=0}^{N-1} a_{k+1} B_k$
$= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{N-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_N B_N - a_1 b_0 = \sum_{k=0}^{N} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_N$ avec a_n tend vers 0 et B_n bornée

Etude de $\sum_{k=0}^{N} (a_k - a_{k+1}) B_k$, séries à termes dans $\mathbb{C}$.
Etudions donc l'ACV :
$|a_k - a_{k+1} B_k| |a_k - a_{k+1}| |B_k| \leq (a_k - a_{k+1}) M$ car $|B_k| \leq M$
Or la série $\sum_{k=0}^{N} (a_k - a_{k+1}) M$ est de même nature que $\sum_{k=0}^{N} a_k - a_{k+1}$ (car M est un scalaire non nul).
Et la CV de cette série téléscopique est évidente.

Note de rédaction : Il y avait beaucoup d'indices et d'infos, j'attends la vérification de Laurent pour être sûr que c'est correct (j'ai un doute sur la fin).

Application : Pour $\theta \neq 2\pi k, \sum_{n\geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n}$ converge par le critère d'Abel, $a_n = \frac{1}{n}$ et $b_n = e^{in\theta}$ et $\sum_{n\geq 1} b_n = \frac{1-e^{i(N+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}$ et $|B_N| = |\frac{1-e^{i(N+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}| \leq \frac{|1|+|e^{i(N+1)\theta}|}{|1-e^{i\theta}|} = \frac{2}{|1-e^{i\theta}|}$.
Donc la série $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n}$ converge, mais pas ACV, donc elle est SCV.

Application : Etudier la convergence, l'absolue convergence et la semi-convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^{\alpha}}$ avec $\theta \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

Remarque : Dans le critère d'Abel, comme (a_n) est décroissante et $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $a_n \geq 0$ (car $a_n \in \mathbb{R}$).

C Séries alternées

Définition : Une série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est dite **alternée** si $u_n = (-1)^n a_n$ ou $u_n = (-1)^{n+1} a_n$ avec $a_n \geq 0$.

Exemple : $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n}$, $\sum_{n\geq 0} (-1)^n$ sont des séries alternées.

Remarque : $(-1)^n \cdot u_n = (-1)^{2n} a_n = a_n$ ou $u_n = -a_n \Rightarrow (-1)^n u_n$ est de signe constant

Remarque : Une définition équivalente est : une série est alternée si le signe de $(-1)^n \cdot u_n$ est constant.

Théorème : Critère spécial des séries alternées (CSSA)

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série de terme général $u_n = (-1)^n a_n$, avec $a_n \geq 0$.
Si :

1. (a_n) est décroissante.
2. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

Preuve:
On applique le critère d'Abel avec $a_n = a_n$ et $b_n = (-1)^n$.
On a bien $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et (a_n) décroissante.
De plus, $B_N = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n = \frac{1-(-1)^{N+1}}{1-(-1)}$ est bornée (égale à 0 ou 1).
Donc la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

Proposition :

Soit $\sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n$ une série alternée vérifiant les hypothèses du CSSA (donc (a_n) est décroissante et $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$).
On considère la suite des sommes partielles (S_N) avec $S_N = \sum_{k=0}^{N}(-1)^k a_k$.
Soit S la somme de la série.

Alors :
$S_{2N+1} \leq S \leq S_{2N}$ et $|R_N| = |S - S_N| \leq a_{N+1}$.

Preuve:
On pouse $A_N = S_{2N}$ et $B_N = S_{2N+1}$.
On observe que $S_{2N+1} - S_{2N} = -a_{2N+1} \leq 0$
$\Leftrightarrow S_{2N+1} \leq S_{2N}$.

Variations de (A_N) et (B_N)
$A_{N+1} - A_N = S_{2N+2} - S_{2N} = a_{2N+2} - a_{2N+1} \leq 0$ car (a_n) décroissante.
$\Leftrightarrow A_{N+1} \leq A_N$. Donc (A_N) est décroissante et $B_{N+1} - B_N = S_{2N+3} - S_{2N+1} = a_{2N+2} - a_{2N+3} \geq 0$ car (a_n) décroissante.
$\Leftrightarrow B_{N+1} \geq B_N$. Donc (B_N) est croissante.

De plus, on a $B_N - A_N \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$ donc (A_N) et (B_N) sont adjacentes, et convergent vers la même limite S.
et donc $B_N \leq S \leq A_N$ où $S = \lim_{N\to\infty} A_N = \lim_{N\to\infty} B_N$.

On a bien $S_{2N+1} \leq S \leq S_{2N}, \forall N \in \mathbb{N}$.

Etudions maintenant le reste.
$R_N = S - S_N$, on veut montrer que $|R_N| \leq a_{N+1}$.
Séparons le cas N pair et impair :

- Si $N = 2p+1$, alors $S_{2p+1} \leq S \implies S - S_{2p+1} \geq 0$.
  $\Rightarrow |R_{2p+1}| = S - S_{2p+1} \leq S_{2p+2} - S_{2p+1} = a_{2p+2} = a_{N+1}$.
- *Laissé en exercice au lecteur :)* $\square$

✖ Attention ✖

1. Si deux suites sont équivalentes ($\sim$) et l'une monotone, l'autre ne l'est pas forcément. **Exemple :** $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ et $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. On a $a_n \sim b_n$ mais (a_n) n'est pas monotone (on le montre en encadrant/calculant 3 termes consécutifs (2p, 2p+1, 2p+2), alors que (b_n) l'est).

2. Considérons $\sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n$. On remarque que $\sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n$ n'est pas ACV. Est-elle semi-convergente ? Le CSSA ne s'applique pas. Mais $(-1)^n a_n \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ QUI N'IMPLIQUE PAS "$\sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n$ CV car $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ CV" (car $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ n'est pas positive).
   À faire : Montrer que $(-1)^n a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{(n)}} + b_n$, où $b_n = \frac{-1}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+(-1)^n)}$ et en déduire que $\sum u_n$ DV.

Donc $u_n \sim v_n$, $\sum v_n$ CV $\implies \sum u_n CV$ que si $v_n est \geq 0 ou \leq 0$

II Produit de Cauchy de deux séries

Définition : Soient $\sum_{n\geq 0} a_n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n$ deux séries.
La **série produit (de Cauchy)** est définie par la série $\sum_{n\geq 0} c_n$ où $c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Remarque : Supposons que $a_n = 0 = b_n$ pour $n > N \in \mathbb{N}$. Considérons $P(X) = a_0 + a_1 X + ... + a_n X^n$ et $Q(X) = b_0 + b_1 X + ... + b_n X^n$.
Alors $(PQ)(X) = c_0 + c_1 X + ... + c_{2N} X^{2N}$. On peut penser au produit de Cauchy comme une "généralisation".

Proposition :

On considère $\sum_{n\geq 0} a_n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n$ deux séries à termes positifs et convergentes.
Alors la série produit $\sum_{n\geq 0} c_n$ est convergente et on a : $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n)(\sum_{n=0}^{\infty} b_n)$.

Preuve:
Soient $A_n = \sum_{n=0}^{N} a_n$ et $B_N = \sum_{n=0}^{N} b_n$.
Notons $C_N = \sum_{n=0}^{N} c_n$ = $\sum_{n=0}^{N} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

On veut monrer que (C_N) converge et déterminer sa limite.

(C_n) est une somme partielle à termes positifs, donc (C_N) est croissante.
Posons $I_N = \{0, \ldots, N\} \subset \mathbb{N}$
Note de rédaction : Dessin $I_N x I_N$

Considérons $A_N B_N = \sum_{(p,q)\in I_N x I_N} a_p b_q$.
Mais $C_N = \sum_{n=0}^{N} c_n = \sum_{n=0}^{N} \sum_{p+q=n} a_p b_q = \sum_{(p,q)\in I_N^2, p+q\leq N} a_p b_q$.
On a $\{(p,q) \mid p+q \leq N\} \subset \{(p,q) \mid p,q \in I_N\}$, donc $C_N \leq A_N B_N$ (1) qui est bornée car A_N CV et B_N CV $\implies C_N$ bornée.
On a aussi l'inégalité : $A_N B_N \leq C_{2N}(2)$
Note de rédaction : Deuxième schema

car $\{(p,q) \mid p+q \leq N\} \supset \{(p,q) \mid 0 \leq p,q \leq N\}$. On obtient $\lim_{+\infty} c_n = \lim_{+\infty}(A_N B_N) = (\lim_{+\infty} A_N) \cdot (\lim_{+\infty} B_N)$. $\square$

Théorème :

Soient $\sum_{n\geq 0} a_n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n$ deux séries à termes dans $\mathbb{C}$.
Si les séries sont ACV, alors la série produit $\sum_{n\geq 0} c_n$ est ACV. (où $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$)

Preuve:
On considère $A_N = \sum_{n=0}^N |a_n|$, $B_N = \sum_{n=0}^N |b_n|$ et $C_N = \sum_{n=0}^N |c_n|$.
D'après la proposition précédente et sa démonstration, on a $A_N B_N - C_N \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$. (on va utiliser cette propriété)
On a $\forall N \in \mathbb{N}, |(\sum_{n=0}^N a_n)(\sum_{n=0}^N |b_n|) - (\sum_{n=0}^N |c_n|)|$.
On peut donc écrire :

$$|(\sum_{n=0}^N a_n)(\sum_{n=0}^N |b_n|)-(\sum_{n=0}^N |c_n|)| = |\sum_{p\in I_N}\sum_{q\in I_N} a_pb_q - \sum_{(p,q)\in I_N^2, p+q\leq N} a_pb_q| = |\sum_{(p,q)\in I_N^2} a_pb_q - \sum_{(p,q)\in J_N^2} a_pb_q| \text{ où } J_N = \{(p,q) \mid p+q \leq N\}$$

Or $J_N \subset I_N^2$, donc

$$|\sum_{(p,q)\in I_N^2} a_pb_q - \sum_{(p,q)\in J_N^2} a_pb_q| = |\sum_{(p,q)\in I_N^2\setminus J_N^2} a_pb_q| = \sum_{(p,q)\in K_N} |a_pb_q|$$

où $K_N = I_N^2 \setminus J_N^2 = \{(p,q) \mid p+q > N\}$.

$$\leq \sum_{(p,q)\in K_N} |a_p||b_q| = (\sum_{n=0}^N |a_n|)(\sum_{n=0}^N |b_n|) - \sum_{n=0}^N |c_n| = A_NB_N - C_N \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

par la proposition précédente et l'inégalité triangulaire.

Note de rédaction : À changer dans la démo A_N en A'_N et B_N en B'_N.
De plus, il faut mettre $C'_N = \sum_{n=0}^N |c'_n| = \sum_{n=0}^N |a_k||b_{n-k}|$ et pas $|\sum_{n=0}^N a_kb_{n-k}|$.

Remarque : L'hypothèse d'absolue convergence pour $\sum a_n$ et $\sum b_n$ est très importante dans le théorème.
L'hypothèse de positivité dans la proposition qui précède le théorème est fondamentale.

Exemple : On considère la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

- u_n n'est pas positive.
- On a pas l'absolue convergence.
- Le CSSA s'applique car $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ est positive, décroissante et tend vers 0.

Considérons le produit de Cauchy. $(\sum_{n\geq 1} u_n)(\sum_{n\geq 1} u_n) = \sum_{n\geq 1} c_n$ où $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \cdot \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k}}$
Montrons que $\sum_{n\geq 1} c_n$ diverge (en montrant que ça ne tend pas vers 0).
On a $|c_n| = |\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k\cdot(n-k)}}|$
On a $k(n-k) \leq kn - k^2 \leq kn \leq (n-1)n$.
Donc $|c_n| = |\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k\cdot(n-k)}}| \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{(n-1)n}} = \frac{n-1}{\sqrt{(n-1)n}} = \sqrt{\frac{n-1}{n}}$.
Donc $|c_n| \nrightarrow 0$.
Conclusion : Pour faire le produit de Cauchy de deux séries, il faut :

1. Que les deux séries soient ACV.
2. ou Que les deux séries soient à termes positifs et CV.

Application : Fixons $z \in \mathbb{C}$. Etudions la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$.
1. Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$ la série ACV.
On va utiliser la règle de d'Alembert : $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{|z|}{(n+1)}$.
Donc $\forall z \in \mathbb{C}, \frac{z^n}{n!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
Donc $\forall z \in \mathbb{C}, \sum_{n\geq 0} u_n(z)$ est ACV.
Remarque : On a le bon goût de pouvoir appeller $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!} := exp(z)$. *(je dis bon goût mais ça risque de faire mal bientôt)*

2. Calculons $exp(z) \cdot exp(z')$ avec $z, z' \in \mathbb{C}$.
Comme les deux séries sont ACV, on peut faire le produit de Cauchy.

$exp(z) \cdot exp(z') = \sum_{n\geq 0} c_n$ où $c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \cdot \frac{(z')^{n-k}}{(n-k)!}$
On a $c_n = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} z^k (z')^{n-k} = \frac{(z+z')^n}{n!}$ par le binôme de Newton.
Donc $exp(z) \cdot exp(z') = \sum_{n\geq 0}^{+\infty} \frac{(z+z')^n}{n!} = exp(z+z')$.

III Compléments

A Hors-programme : Séries commutativement convergentes

Note de rédaction : On a traité de ça en parlant rapidement de permutations. À voir chez Laurent si c'est nécessaire à mettre, mais je l'omets ici pour l'instant.

B Introduction aux séries de Taylor d'une fonction

Définition : Considérons $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle ouvert contenant o.
Supposons que $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$. *(i.e. f est dérivable autant de fois qu'on veut sur I et les dérivées sont continues).*
La **série de Taylor** associée à f au voisinage de 0 est la série $\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Ici, $x \in \mathcal{V}(0)$ *(cela peut être I tout entier)*. Et il s'agit en fait d'une série de fonctions: $x \in \mathcal{V}(0) \subset I \mapsto \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.
À ce stade du cours, on y pense comme une série numérique à x fixé.

Deux questions se posent :

1. Pour quels $x \in I$ la série de Taylor $\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ converge-t-elle ?
2. Si elle converge "pour des x", a-t-elle pour somme $f(x)$?

Remarque : Plus généralement, si I est quelconque et que on prend $a < b \in I$, les mêmes questions se posent de la façon suivante : $f(b) = \sum_{n\geq 0} \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)$?

Remarque : Les sommes partielles de la série de Taylor associée à f, i.e. $\sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, x \in I$ sont appelées **polynômes de Taylor**

Réponses partielles aux questions.

1. Utiliser les règles de d'Alembert ou de Cauchy pour déterminer les $x \in I$ tels que $\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ converge.
2. Utilisons la formule de Taylor avec reste intégral si on veut montrer que pour les x où $\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ converge, on a $f(x) = \sum_{n\geq 0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.
   Ou de manière équivalente $\sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \xrightarrow[N\to\infty]{} f(x)$. (convergence à x fixé !)

Application : Retrouvons la formule de Taylor avec reste intégral.

Théorème fondamental de l'analyse : Rappel *(admis)*

Soit $x \in I, x > 0$.
Alors $f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)dt$.

$\int_0^x f'(t)dt = \int_0^x (t-x)' f'(t)dt = [(t-x)f'(t)]_0^x - \int_0^x (t-x)f''(t)dt$.
$= -xf'(0) + \int_0^x (x-t)f''(t)dt$.
Ce qui se réécrit : $f(x) - f(0) - xf'(0) = \int_0^x (x-t)f''(t)dt$.
On refait la même chose pour f'' :
$\int_0^x (x-t)f''(t)dt = \int_0^x ((x-t)^2/2)' f''(t)dt = -[(x-t)^2/2f''(t)]_0^x + \int_0^x (x-t)^2/2 f^{(3)}(t)dt$.

$= -x^2/2f''(0) + \int_0^x (x-t)^2/2f^{(3)}(t)dt$.
Ce qui se réécrit : $f(x) - f(0) - xf'(0) - x^2/2f''(0) = \int_0^x (x-t)^2/2f^{(3)}(t)dt$.
Puis on continue par récurrence et on a :

Théorème : Taylor avec R.I.

$f \in \mathcal{C}^\infty(I), I \ni 0$
On a $\forall x \in I, x > 0, f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$.

Remarque : Pour montrer que $\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ converge vers $f(x)$, il suffit de montrer que le $R_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, où R_n est le reste.
On a $|R_n(x)| = |\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt|$. En principe, majorer $R_n(x)$!

Application : On prend $f(x) = exp(x)$, $I = \mathbb{R}$.
On a que $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(x) = exp(x)$. Sa série de Taylor au voisinage de 0 est $\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$.

1. Convergence

$u_n(x) = \frac{x^n}{n!}$.
On utilise la règle de d'Alembert : $\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \frac{|x|}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
Or $0 < 1$, donc $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ est ACV, $\forall x \in \mathbb{R}$.

2. Somme

On veut montrer que $\sum_{n\geq 0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = exp(x), \forall x \in \mathbb{R}$.
Par la formule de Taylor avec reste intégral, on a $|f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k| = |R_n(x)| = |\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e(t)dt|$
$\leq \frac{|x|^n}{n!}e^x \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
Donc $exp(x) = \sum_{n\geq 0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \forall x \in \mathbb{R}$.

Exemple : Calculons la valeur de $\sum_{n\geq 0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$.
On sait que $\sum_{n\geq 0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = exp(x)$, donc en prenant $x = 1$, on obtient $\sum_{n\geq 0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = exp(1) = e$.

Contre-Exemple : Voici une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$ dont la série de Taylor ne converge pas vers la fonction (sauf en 0).

Considérons $f : \overset{\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}}{x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}}$.

f est continue sur $\mathbb{R}$.
$x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$.

On montre que f est C^∞ : elle se prolonge en une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$ telle que $f^{(n)}(0) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$.
Il faut vérifier $\lim_{x\to 0} f^{(n)}(x) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

La série de Talyor associée à f est donc $\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = 0 \forall x \in \mathbb{R}$.
Et donc on a pas $f(x) = \sum_{n\geq 0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ sauf en 0.