

# Chapitre 2 : Espaces probabilisés

## I Dénombrabilité

**Définition :** On dit que  $E$  est **infini dénombrable** s'il existe une bijection entre  $E$  et  $\mathbb{N}$ .

**Définition :**  $E$  est **dénombrable** s'il est fini ou infini dénombrable.

**Proposition :**

Si  $E$  et  $F$  sont dénombrables, alors  $E \times F$  est dénombrable.

**Démonstration :**

Supposons  $E$  et  $F$  dénombrables, donc supposons que  $E = \mathbb{N}$  et  $F = \mathbb{N}$ .

**Proposition :**

Soit  $(E_i)_{i \in J}$  où  $J \subset \mathbb{N}$  et  $E_i$  est dénombrable pour chaque  $i \in J$ .  
Alors  $\bigcup_{i \in J} E_i$  est dénombrable.

## II Espaces probabilisés dénombrables

### A Généralités

**Définition :** Soit  $\Omega$  un ensemble dénombrable.

Une **probabilité** sur  $\Omega$  est une application  $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$  telle que :

1.  $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$  et  $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
2. Soit  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tq  $E_i \cap E_j = \emptyset$  une suite finie ou dénombrable de parties de  $\Omega$  alors  $\mathbb{P}(\bigcup_n E_n) = \sum_n \mathbb{P}(E_n)$ .

**Remarque :**  $\Omega$  est aussi appelé "univers". Les parties de  $\Omega$  sont appelées "événements".

**Vocabulaire :**  $\omega \in \Omega$  est appelé un "résultat-élémentaire".

**Vocabulaire :**  $E \in \mathcal{P}(\Omega)$  est appelé un "événement".

**Remarque :**  $E = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots\} = \bigcup_i \{\omega_i\}$   
 $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(\bigcup_i \{\omega_i\}) = \sum_i \mathbb{P}(\{\omega_i\})$

**Proposition :** (admis)

Soient  $\Omega$  et  $\mathbb{P}$  sur  $\Omega$  une probabilité sur  $\Omega$ .

Soit  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(\omega) = \mathbb{P}(\{\omega\})$  pour tout  $\omega \in \Omega$ .

Alors :

1.  $0 \leq f(\omega) \leq 1$ .
2.  $\sum_{\omega \in \Omega} f(\omega) = 1$ .

**Proposition :** (admis)

Soit  $\Omega$  un ensemble dénombrable alors et  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tel que :

1.  $f(\omega) \geq 0$
2.  $\sum_{\omega \in \Omega} f(\omega) = 1$

Alors  $\mathbb{P}_f(E) : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $\mathbb{P}_f(E) = \sum_{\omega \in E} f(\omega)$  est une probabilité sur  $\Omega$ .

**Démonstration :**

1.  $\mathbb{P}_f(E) = [0, 1]$   
 $\mathbb{P}_f(E) \geq 0$  car  $f(\omega) \geq 0$ .  
 $\mathbb{P}_f(E) = \sum_{\omega \in E} f(\omega) \leq \sum_{\omega \in \Omega} f(\omega) = 1$ .
2.  $\sigma$ -additivité : Soit  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  où  $E_n \cap E_m = \emptyset$  pour  $n \neq m$  et  $E \in \mathcal{P}(\Omega)$ .  
 $\mathbb{P}_f(\bigcup_n E_n) = \sum_{\omega \in \bigcup_n E_n} f(\omega) = \sum_n \sum_{\omega \in E_n} f(\omega) = \sum_n \mathbb{P}_f(E_n)$ .

**Définition :** Soit  $\Omega$  un ensemble dénombrable et  $\mathbb{P}$  une probabilité sur  $\Omega$ ,  $(\Omega, \mathbb{P})$  est un **espace de probabilité**.

**Définition :** Soit  $\Omega$  un ensemble fini alors la probabilité  $\mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|}$  pour tout  $\omega \in \Omega$  est appelée **probabilité uniforme** sur  $\Omega$ .

💬 **Note de rédaction :** Exemple manquant à revoir avec Laurent.

**B Propriétés élémentaires****Proposition :**

Soit  $A_1, A_2 \in \mathcal{P}(\Omega)$  alors :

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$$

**Démonstration :**

Patatoïde (diagramme de Venn).

On a  $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2^c) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$  car  $A_1 = (A_1 \cap A_2^c) \cup (A_1 \cap A_2)$ .

De même,  $\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_2 \cap A_1^c) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$ .

Donc  $\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2^c) + \mathbb{P}(A_2 \cap A_1^c) + 2\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$ .

Or,  $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2^c) + \mathbb{P}(A_2 \cap A_1^c) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$ .


D'où :  $\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_1 \cup A_2) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) \Rightarrow \mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$ .  $\square$

📌 **Remarque :** On a toujours que  $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$  car  $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$ .

**Proposition : Principe d'inclusion-exclusion** (admis)

Soit  $E_1, E_2, \dots, E_n \in \mathcal{P}(\Omega)$  alors :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^n E_k\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \left( \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{P}(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \dots \cap E_{i_k}) \right)$$

 **Application :** Dans le cas  $n = 3$ , exprimer la formule précédente.

On a :  $\mathbb{P}(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = \mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_2) + \mathbb{P}(E_3) - \mathbb{P}(E_1 \cap E_2) - \mathbb{P}(E_1 \cap E_3) - \mathbb{P}(E_2 \cap E_3) + \mathbb{P}(E_1 \cap E_2 \cap E_3)$ .

**Proposition :**

Si  $A \subset B \in \mathcal{P}(\Omega)$  alors  $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ .

**Démonstration :**


$B = A \cup (B \cap A^c)$  avec  $A \cap (B \cap A^c) = \emptyset$ .

Donc,  $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \cap A^c) \geq \mathbb{P}(A)$ .  $\square$

**Proposition :**

Soit  $(E_1, E_2, \dots, E_n)$  une partition de  $\Omega$  finie.

On a  $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^n E_i) \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(E_i)$ .

 **Note de rédaction :** cf. Laurent pour la preuve (faire une récurrence.)

**Définition :** Soit  $(E_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une suite de  $\mathcal{P}(\Omega)$ , telle que  $E_i \subset E_{i+1}$  pour tout  $i \in \mathbb{N}$ .

La **limite croissante** de la suite  $(E_i)$  est l'événement  $E = \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i$ .

**Proposition :** (admis)

$\mathbb{P}(E_{\infty}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(E_n)$ .

**Démonstration :**


$F_0 = E_0$  et  $F_i = E_i \setminus E_{i-1}$  pour  $i \geq 1$ .

Alors,  $E_n = \bigcup_{i=0}^n F_i$ , et  $F_i \cap F_j = \emptyset$  pour  $i \neq j$ .

Donc,  $\mathbb{P}(E_n) = \sum_{i=0}^n \mathbb{P}(F_i)$ .

Or,  $E_{\infty} = \bigcup_{i=0}^{\infty} F_i$ .

Donc,  $\mathbb{P}(E_{\infty}) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(F_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \mathbb{P}(F_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(E_n)$ .  $\square$

 **Exemple :**  $(\mathbb{N}^*, \mathbb{P})$  avec  $\mathbb{P}(\{k\}) = \frac{1}{2^k}$  la loi géométrique de paramètre  $\frac{1}{2}$ .

$E_i = \{2, 4, \dots, 2i\}$  alors  $E_i \subset E_{i+1}$  et  $E_{\infty} = (2\mathbb{N})^*$ .

$A_i = \{1, 2, \dots, i\}$  alors  $A_i \subset A_{i+1}$  et  $A_{\infty} = \mathbb{N}^*$ .

## Contents

<b>I</b>	<b>Dénombrabilité</b>	<b>1</b>
<b>II</b>	<b>Espaces probabilisés dénombrables</b>	<b>1</b>
<b>A</b>	Généralités . . . . .	1
<b>B</b>	Propriétés élémentaires . . . . .	2