Chapitre 5 : Fonctions de plusieurs variables

Cadre de travail :

- $p, q \in \mathbb{N}^*$
- U ouvert de $\mathbb{R}^n$
- $f : U \to \mathbb{R}^m$
- $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$ sont des espaces vectoriels qui peuvent être normés, donc des espaces métriques. Ainsi, toutes les propriétés et des notions des espaces métriques s'appliquent.

I Continuité

Rappel : Une suite (X_n) de composante $\begin{pmatrix} x_1^{(n)} \\ x_2^{(n)} \\ \vdots \\ x_p^{(n)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$ tend vers $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$ si et seulement si chacune de ses composantes converge, c'est-à-dire :

$$\forall i \in \{1, \dots, p\}, \quad x_i^{(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} x_i$$

Proposition :

Soit $f : U \to \mathbb{R}^q$ et $a \in U$. On écrit $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_q(x)), x \in U$.
On a : f est continue en $a \Leftrightarrow \forall i = 1, \dots, q, f_i(x)$ est continue en a.

Remarque : $\forall i = 1, \dots, q$, les fonctions $x \mapsto f_i(x)$ sont à valeur dans $\mathbb{R}$, donc on peut utiliser les résultats de la continuité pour les fonctions à valeur réelle.

Vocabulaire : On appelle les f_i les **fonctions composantes** de f.

Preuve :
On rappelle que f est continue en a ssi par toute suite (x_n) qui converge vers a, la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(a)$.
On a donc $f(x_n) = (f_1(x_n), f_2(x_n), \dots, f_q(x_n)) \to f(a) = (f_1(a), f_2(a), \dots, f_q(a))$ ssi $\forall i = 1, \dots, q, f_i(x_n) \to f_i(a)$.
Donc f est continue en a ssi $\forall i = 1, \dots, q, f_i$ est continue en a.

Pour comprendre la continuité, il suffit de se restreindre aux fonctions $f : U \to \mathbb{R}$.

Exemple :

1. $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$ et $f(0, 0) = 0$.
   On a $U = \mathbb{R}^2$, $p = 2$ et $q = 1$.
   Montrons que f est continue.

   f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ car c'est un quotient de fonctions continues (polynômes) dont le dénominateur ne s'annule pas.
   Montrons que f est continue en $(0, 0)$.
   On doit montrer que si $(x, y) \to (0, 0)$, alors $f(x, y) \to 0$.
   $|f(x, y)| = \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| = \frac{x^2 |y|}{x^2 + y^2} \leq \frac{x^2 |y|}{y^2} = |y|$.
   Donc si $(x, y) \to (0, 0)$, alors $|y| \to 0$ et donc $f(x, y) \to 0$.
   Ainsi, f est continue en $(0, 0)$.
   Donc f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$.
   f peut-elle être continue sur $\mathbb{R}^2$?
   Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, f est continue (même raison).
   Problème en $(0,0)$.
   Montrons que $f(x,y)$ n'a pas de limite en $(0,0)$.
   Trouvons $(x_n,y_n) \to (0,0)$ et $(a_n,b_n) \to (0,0)$ tels que $f(x_n,y_n)$ et $f(a_n,b_n)$ aient des limites différentes.
   Prenons $(x_n,y_n) = \left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$. On a : $f(x_n,y_n) = \frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2}$.
   De plus, prenons $(a_n,b_n) = \left(\frac{2}{n},\frac{1}{n}\right)$. On a : $f(a_n,b_n) = \frac{\frac{2}{n}\cdot\frac{1}{n}}{\left(\frac{2}{n}\right)^2+\left(\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{\frac{2}{n^2}}{\frac{4}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \frac{2}{5}$.
   Ainsi, $f(x_n,y_n) \to \frac{1}{2}$ et $f(a_n,b_n) \to \frac{2}{5}$.
   Donc f n'a pas de limite en $(0,0)$ et donc f n'est pas continue en $(0,0)$. Ainsi, f n'est pas continue sur $\mathbb{R}^2$.

II Vers une bonne notion de dérivée pour les fonctions à plusieurs variables

Introduction : Soit $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ où $]a,b[\subset \mathbb{R}$. On dit que f est dérivable en $x \in]a,b[$ si il existe un réel $f'(x)$ tel que :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + o(h)$$

Ce qui équivaut à : $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ existe.
Si f est dérivable en x alors on sait que f est continue en x.
$|f(x+h)-f(x)| \to 0$ quand $h \to 0$.

A Rappels : fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^q, q \geq 1$

Soit $f : \substack{]a,b[\to\mathbb{R}^q \\ x\mapsto(f_1(x),f_2(x),\dots,f_q(x))}$. (fonction coordonnées)

Définition : On dit que f est dérivable en $x \in]a,b[$ si $\lim_{h\to 0} \frac{f(x)-f(x+h)}{h}$ existe. (avec $\frac{f(x)-f(x+h)}{h} \in \mathbb{R}^q$).
i.e. $\exists L \in \mathbb{R}^q$ tel que $\|\frac{f(x)-f(x+h)}{h} - L\| \to 0$ quand $h \to 0$ où $\|.\|$ est une norme $\mathbb{R}^q$ (elles sont équivalentes).

Proposition : Dérivabilité

f est dérivable en $x \Leftrightarrow \forall i = 1,\dots,q, f_i$ est dérivable en x et on a : $f'(x) = (f_1'(x), f_2'(x), \dots, f_q'(x))$.
Autrement dit, f est dérivable en x si et seulement si chacune de ses composantes est dérivable en x.

Preuve :
$\Rightarrow$ / Supposons f dérivable en x.
$\exists L = (L_1, L_2, \dots, L_q) \in \mathbb{R}^q$ tel que $\|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - L\| \to 0$ quand $h \to 0$.
On a le choix de $\|.\|$ car les normes sont toutes équivalentes (en dimension finie). Prenons la norme infinie.
Alors $\forall i \in \{1,\dots,q\}, |\frac{f_i(x+h)-f_i(x)}{h} - L_i| \leq \|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - L\|_{+\infty} \to 0$ quand $h \to 0$.
Ainsi, $\forall i \in \{1,\dots,q\}, f_i$ est dérivable en x et $f_i'(x) = L_i$.
Et donc $f'(x) = (f_1'(x), f_2'(x), \dots, f_q'(x))$.
$\Leftarrow$ / Supposons que $\forall i = 1,\dots,q, f_i$ est dérivable en x.
Donc $\forall i \in \{1,\dots,q\}, \frac{f_i(x+h)-f_i(x)}{h} \to f_i'(x)$ quand $h \to 0$.
Montrons que $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ existe.
Posons $L = (f_1'(x), f_2'(x), \dots, f_q'(x)) \in \mathbb{R}^q$.
On veut $\|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - L\| \to 0$ quand $h \to 0$.
Prenons $\|.\|_1$ la norme 1.
On a :

$$\left\|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - L\right\|_1 = \sum_{i=1}^{q} \left|\frac{f_i(x+h)-f_i(x)}{h} - L_i\right|$$

On a une somme finie donc chaque terme (par hypothèse) tend vers 0 quand $h \to 0$.
En passant à la limite on obtient : $\|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - L\|_1 \to 0$ quand $h \to 0$.
Donc f est dérivable en x et $f'(x) = L = (f_1'(x), f_2'(x), \dots, f_q'(x))$.

B Dérivées partielles

Soit $U \subset \mathbb{R}^p$ ouvert et $p \in \mathbb{N}^*$. On considère $f : U \to \mathbb{R}^q$.

Remarque : Penser à une fonction f définie de $U = \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, donc $p = 2$ et $q = 1$. (tous les problèmes se posent déjà dans ce cas)

On veut définir la notion de dérivées partielles en un point $a = (a_1, a_2, \dots, a_p) \in U$.
Il y a p dérivées partielles (car p variables). Prenons $k \in \{1, \dots, p\}$ et définissons la k-ième dérivée partielle de f en $a = (a_1, a_2, \dots, a_p)$.
Considérons la k-ième fonction partielle d'une variable réelle $g_k : x_k \mapsto f(a_1, \dots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \dots, a_p)$.
Les points $a_1, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_p$ sont fixés dans $\mathbb{R}$ et x_k varie dans un voisinage de a_k.
Note de rédaction : Schéma, ¬ cf. Laurent

On dit que f admet une k-ième dérivée partielle en a si g_k est dérivable en a_k et on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = g_k'(a_k)$$

Exemple : Soit $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$.
Prenons $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = 2a_1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a) = 2a_2$$

On utilise plutôt les notations suivantes :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y$$

✖ Attention ✖ Avant de calculer une dérivée partielle en un point, il faut justifier qu'elles existent (i.e. que les fonctions partielles sont dérivables en les points correspondants).

Exemple : (suite) Ici, il faut dire :
$\forall y$ fixé dans $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(x, y) = x^2 + y^2$ avec y constant est dérivable en tout $x \in \mathbb{R}$ (c'est un polynôme). Donc $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ existe pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
De même, $\forall x$ fixé dans $\mathbb{R}$, la fonction $y \mapsto f(x, y) = x^2 + y^2$ avec x constant est dérivable en tout $y \in \mathbb{R}$. Donc $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ existe pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Remarque : f admet une k-ième dérivée partielle en $a \Leftrightarrow$ la fonction $t \mapsto f(a + te_k)$ (où e_k est le k-ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^p$) est dérivable en 0.

Définition : On dit que f admet des dérivées partielles en a si $\forall k \in \{1, \dots, p\}$, $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$ existe. (*i.e.* toutes les dérivées partielles existent en a)

✖ Attention ✖ Problème : Malheureusement, ce n'est pas parce que f admet des dérivées partielles en a que f est continue en a. (d'où le fait de chercher une meilleure notion de dérivabilité)

Contre-Exemple : Soit $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.
On a $U \subset \mathbb{R}^2$ ouvert, $p = 2$ et $q = 1$.
Montrons que f admet des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$ mais que f n'est pas continue en $(0, 0)$.
Montrons que $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ existe pour tout y.
Fixons $y \in \mathbb{R}$.
Considérons $x \mapsto f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ est dérivée en tout $x \in \mathbb{R}$.

Ainsi $\forall y \in \mathbb{R} x \mapsto f(x,y)$ est dérivable en tout $x \in \mathbb{R}$. Donc $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ existe pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

De même, par symétrie on montre que $y \mapsto f(x,y)$ est dérivable en tout $y \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Ainsi f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.
En particulier, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existent.
Pourtant, on a vu que f n'est pas continue en $(0,0)$.

Transition : On peut voir le problème de continuité en $(0,0)$ comme le fait que $f(x,x) = \frac{1}{2}$ qui ne tend pas vers 0 quand $x \to 0$.
En fait, on regarde la trajectoire $t \mapsto (t,t)$ qui n'est pas alignée avec les axes.
Une notion plus forte que la dérivée partielle est la dérivée directionnelle.

C Dérivée directionnelle

Soit $f : U \to \mathbb{R}^q$ où $U \subset \mathbb{R}^p$ ouvert.
Soit $a \in U$ et soit h un vecteur de $\mathbb{R}^p$.
Considérons la fonction d'une variable réelle $\varphi \colon t \mapsto f(a+th)$ où t varie dans un voisinage de 0 tel que $a + th \in U$.

Définition : On dit que f admet une dérivée directionnelle en a selon la direction h si φ est dérivable en 0.
On a :
$$\varphi'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t}$$

Proposition : Lien avec la dérivée partielle

Si on choisit comme direction $h = e_k$ (le k-ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^p$), alors la dérivée directionnelle de f en a selon la direction e_k est la k-ième dérivée partielle de f en a.

Preuve :
On a $\varphi(t) = f(a + te_k) = f(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k + t, a_{k+1}, \dots, a_p)$.
Donc φ est dérivable en 0 ssi la fonction $x_k \mapsto f(a_1, \dots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \dots, a_p)$ est dérivable en a_k.
Ainsi, la dérivée directionnelle de f en a selon la direction e_k est égale à la k-ième dérivée partielle de f en a.