Chapitre 3 : Espaces vectoriels

I Corps

Définition : Un **corps** est un ensemble K muni de deux lois de composition interne notées $+$ et $\times$ telles que :

- $(K, +)$ est un groupe abélien
- $(K \setminus \{0\}, \times)$ est un groupe abélien
- La loi $\times$ est distributive par rapport à la loi $+$

Si de plus la loi $\times$ est commutative, on dit que K est un **corps commutatif**.

Rappel : Distributivité : $\forall a, b, c \in K, a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

Exemple : $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, p$ premier sont des corps.

II Espaces vectoriels

Définition : Soient K un corps et E un groupe abélien.
Soit une loi : $\substack{K \times E \to E \\ (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v}$ *(multiplication externe)*.
On dit que $(E, +, \cdot)$ est un K**-espace vectoriel** si on a $\forall \lambda, \mu \in K, \forall v \in E$:

- $\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \times \mu) \cdot v$
- $1 \cdot v = v$
- $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$ *(on a deux + différents)*
- $\lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w$

Vocabulaire : Les éléments de E sont appelés **vecteurs**. Les éléments de K sont appelés **scalaires**.

Exemple : $\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. De même pour $\{0\}$, $\mathbb{R}[X]$, $M_n(\mathbb{R})$.
On peut voir $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Définition : Soit E un K-ev, et soit $(v_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E.
Soit $(\lambda_i)_{i \in I}$ une famille de scalaires de K.
On dit que $(\lambda_i)_{i \in I}$ est presque nulle si : $\{i \in I, \lambda_i \neq 0\}$ est fini.

Alors on considère $\sum_{i \in I, \lambda \neq 0} \lambda_i v_i$ noté $\sum_{i \in I} \lambda_i v_i$. C'est une **combinaison linéaire** des v_i.

Définition : Soit $X \subset E$. Une combinaison linéaire de vecteurs de X est de la forme $\sum_{v \in X} \lambda_v v$ avec $(\lambda_v)_{v \in X}$ presque nulle.

Vocabulaire : Les $(\lambda_v)_{v \in X}$ sont appelés les **coefficients** de la combinaison linéaire.

III Sous-espaces vectoriels

Définition : Soit E un K-ev. Soit $F \subset E$.
On dit que F est un **sous-espace vectoriel** (sous-ev) de E si :

- $F \neq \emptyset$
- $\forall u, v \in F, \lambda, \mu \in K, \lambda u + \mu v \in F$

Proposition : Caractérisation des sous-ev

Tout sous-espace vectoriel est un espace vectoriel pour les lois induites par E.

Preuve:
Montrons $(F, +)$ est un sous-groupe de $(E, +)$:

- $F \neq \emptyset$ donc $\exists u \in F$.
- $\lambda = \mu = 1 \implies u + v \in F, \forall u, v \in F$ donc F est stable par $+$
- $u + (-1)u = u(1 + (-1)) = 0_E \in F$. On a donc $-u \in F, \forall u \in F$.

Donc on a bien un sous-groupe.
Les autres propriétés sont vérifiables et immédiates, on a bien un espace vectoriel.