Chapitre 4 : Topologie des espaces métriques et des espaces vectoriels normés

I Distances et normes

Soit X un ensemble quelconque (dans la suite supposé non nul).

Définition : Une distance d sur X est une application $d\colon X \times X \to \mathbb{R}_+$ qui vérifie les axiomes suivants :

1. $\forall (x,y) \in X^2, d(x,y) = d(y,x)$ (symétrie)
2. $\forall x,y,z \in X, d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (inégalité triangulaire)
3. $\forall (x,y) \in X^2, d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (séparation)

Vocabulaire : On appelle **espace métrique** un couple (X,d) où X est un ensemble et d une distance sur X.

Exemple :

- $\mathbb{R}$ muni de la distance $d(x,y) = |x-y|$, où $|\cdot|$ est la valeur absolue.
- $\mathbb{C}$ muni de la distance $d(z_1,z_2) = |z_1 - z_2|$, où $|\cdot|$ est le module.
- Une autre façon de voir l'exemple 2, on considère l'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni de la distance suivante :
  Si $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$ sont deux points de $\mathbb{R}^2$, on définit la distance $d(A,B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$.
  On appelle cette distance la **distance euclidienne** sur $\mathbb{R}^2$.
- Prenons $X =$ cercle unité muni de la distance $d(A,B) = arccos(cos(\theta_2 - \theta_1))$ où θ_1 et θ_2 sont les arguments des points A et B respectivement. *(voir schéma OneNote)*

Remarque : On peut voir l'exemple 1 comme un cas particulier de l'exemple 2, en identifiant $\mathbb{R}$ à l'axe des réels dans le plan complexe.

Remarque : On peut généraliser l'exemple 3 à $\mathbb{R}^n$ muni de la distance euclidienne définie par :

$$d(A,B) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_{A_i} - x_{B_i})^2}$$

où $A = (x_{A_1}, x_{A_2}, \dots, x_{A_n})$ et $B = (x_{B_1}, x_{B_2}, \dots, x_{B_n})$ sont deux points de $\mathbb{R}^n$.