Dénombrement

I Partie d'un ensemble

Définition : Soit E un ensemble.

- On dit qu'un ensemble A est une **partie** de E si tous les éléments de A sont des éléments de E. On écrit dans ce cas $A \subseteq E$.
- L'ensemble de toutes les parties de E est noté $\mathcal{P}(E)$.

Exemple : Notons E l'ensemble des élèves du groupe de spécialité maths 4.

Exemple :

1. Si $E = \{0; 1; 2; 3\}$ alors $\varnothing$, $\{0; 1\}$, $\{0\}$, $\{0; 2\}$ sont des parties de E.
2. $\{0; 2024\}$ et $\mathbb{Z}$ sont des parties de $\mathbb{R}$.

Vocabulaire : Une partie à 1 élément s'appelle un **singleton**. Une partie à 2 éléments s'appelle une **paire**.

Remarque : Tout ensemble E contient au moins deux parties : l'ensemble vide et lui-même. Autrement dit, nous avons toujours $\varnothing \subseteq E$ et $E \subseteq E$.

Propriété : Nombre de parties d'un ensemble fini

Soit E un ensemble fini à n éléments. Le nombre de parties de E est égal à 2^n. Autrement dit :

$$\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n.$$

Démonstration :
Lorsque l'on cherche à construire une partie de E, pour chaque élément de E il y a deux choix possibles : soit il est dans cette partie, soit il n'y est pas.
Si un élément est dans cette partie, on peut considérer qu'on lui affecte la valeur 1, et la valeur 0 sinon.
Ainsi, cela revient à déterminer le nombre de n-uplets de $\{0; 1\}$, ou encore le cardinal de l'ensemble $\{0; 1\}^n$.
On sait que $\mathrm{Card}(\{0; 1\}) = 2$, et par conséquent, d'après la propriété sur le cardinal du produit cartésien, on a :

$$\mathrm{Card}(\{0; 1\}^n) = 2^n.$$

Application : On pose $E = \{\ln(3);\, e^{\pi};\, 2024\}$.
1. Déterminer le nombre de parties de E.

2. Donner toutes les parties de E.

II Combinaisons

A Définition

Définition : Soit E un ensemble fini de cardinal n et k un entier naturel tel que $k \leq n$.

- Une **combinaison** de k éléments de E est une partie de E de cardinal k.
- Le nombre de combinaisons de k éléments de E est $\binom{n}{k}$.

Attention Dans une combinaison, l'ordre dans lequel on énumère les éléments ne compte pas. Par exemple, si a et b sont deux éléments d'un ensemble $E = \{a, b\} = \{b, a\}$ (en tant qu'éléments de $\mathcal{P}(E)$) alors que $(a; b) \neq (b; a)$ (en tant qu'éléments de $E \times E$).

Propriété : *(admise)*

Soient n et k deux entiers naturels tels que $k \leq n$. Alors :

1. $\binom{n}{1} = n$; $\binom{n}{n} = 1$; et $\binom{n}{0} = 1$;
2. **Symétrie des coefficients binomiaux :** $\dbinom{n}{n-k} = \dbinom{n}{k}$;
3. **Formule de Pascal :** $\dbinom{n}{k} + \dbinom{n}{k+1} = \dbinom{n+1}{k+1}$.

Note de rédaction : Démonstration laissée à l'appréciation du lecteur.

Propriété : Somme des coefficients binomiaux

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

B Nombre de combinaisons à k éléments

Propriété : Nombre de combinaisons à k éléments *(admise)*

Soient n et k deux entiers naturels tels que $0 \leq k \leq n$. Alors :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$