

# Chapitre 5 : Séries entières

## I Introduction

**Définition :** Une **série entière** est une série de fonctions dont le  $n^{\text{ème}}$  terme général est un monôme de degré  $n$ .

C'est-à-dire que c'est une série de la forme  $\sum_n a_n z^n$  où  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de nombres complexes ( $\mathbb{C}^\mathbb{N}$  ou  $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ ) et  $z$  est une variable complexe.

**Remarque :** Comme séries de fonctions, les propositions vues sur le chapitre sur les séries de fonctions s'appliquent aux séries entières. Exception faite sur le théorème touchant aux dérivées, car on ne sait pas encore ce qu'est la dérivée d'une fonction de variable complexe.

**Exemple :**

$$\sum_{n \geq 0} z^n \quad \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} \quad \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n} \quad \dots$$

**Rappel :** Le *sup* d'une partie de  $\mathbb{R}$  est défini par  $\sup(A) = \min\{x \in \mathbb{R} : A \subset ]-\infty, x]\}$  et le *inf* d'une partie de  $\mathbb{R}$  est défini par  $\inf(A) = \max\{x \in \mathbb{R} : A \subset [x, +\infty[\}$ .

## A Convergence d'une série entière

**Exemple :** La série  $\sum_{n \geq 0} z^n$  converge si et seulement si  $|z| < 1$  sur  $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} = D(0, 1)$

**Exemple :** Soit  $z \in \mathbb{C}$ . On pose  $u_n = \frac{z^n}{n!}$ . Alors on a  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{z^n} = \frac{z}{n+1} \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ . Par le critère de d'Alembert, la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$  converge pour tout  $z \in \mathbb{C}$  et on dira que le rayon de convergence de la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$  est  $+\infty$ .

**Vocabulaire :** On dit que 1 est le **rayon de convergence** de la série  $\sum_{n \geq 0} z^n$  (et  $D(0, 1)$  est le **disque de convergence** de la série  $\sum_{n \geq 0} z^n$ ).

**Lemme :**

Soit  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  une série entière et  $z_0 \in \mathbb{C}$ .

1. Si  $\sum_{n \geq 0} a_n z_0^n$  converge absolument, alors la série  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  converge normalement sur  $\overline{D}(0, |z_0|) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq |z_0|\}$ .
2. Si  $(a_n z_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée, alors la série  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  converge normalement sur  $\overline{D}(0, r)$  pour tout  $r < |z_0|$

**Démonstration :**

1. Soit  $z \in \overline{D}(0, |z_0|)$  et soit  $n \in \mathbb{N}$ .

On a  $|a_n z^n| = |a_n| |z|^n \leq |a_n| |z_0|^n$ .

Et de plus  $\sum_{n \geq 0} |a_n| |z_0|^n$  converge par hypothèse et est indépendant de  $z$ .

Donc la série  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  converge normalement sur  $\overline{D}(0, |z_0|)$ .

2. Soit  $r < |z_0|$ .

Montrons que  $\sum_{n \geq 0} a_n r^n$  converge absolument.

et  $1 \Rightarrow 2$  et  $|a_n|r^n = |a_n||z_0|^n \cdot \left(\frac{r}{|z_0|}\right)^n \leq M \cdot \left(\frac{r}{|z_0|}\right)^n$  pour un certain  $M = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n||z_0|^n$ .  
 et comme série géométrique de raison  $\frac{r}{|z_0|} < 1$ , la série  $\sum_{n \geq 0} M \cdot \left(\frac{r}{|z_0|}\right)^n$  converge.  
 D'où la série  $\sum_{n \geq 0} a_n r^n$  converge absolument.

**Définition :** On appelle **rayon de convergence** de la série  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  le nombre  $R \in [0, +\infty]$  défini par  $R = \sup\{r \in [0, +\infty] : (a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée}\} = \sup\{r \in [0, +\infty] : \sum_{n \geq 0} a_n r^n \text{ converge}\}$ .

**Définition :** On appelle **disque ouvert de convergence** de la série  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  l'ensemble  $D(0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$  où  $R$  est le rayon de convergence de la série  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ .

**Remarque :** Si  $R = 0$ ,  $D(0, R) = \emptyset$   
 Si  $R = +\infty$ ,  $D(0, R) = \mathbb{C}$

### Théorème :

Une série entière converge absolument en tout point du disque ouvert de convergence et converge normalement sur tout disque fermé inclus dans le disque ouvert de convergence. En particulier, la somme est continue en tout point du disque ouvert de convergence.

**Note de rédaction :** cf. Laurent pour la preuve

**Remarque :** On déduit que  $\{r \in [0, +\infty] : \sum_{n \geq 0} a_n r^n \text{ converge}\} = [0, R[$  ou  $[0, R]$ .  
 Autrement dit, il y a convergence sur  $D(0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$  et il y a divergence sur  $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$ . Par contre, on ne peut rien dire sur le cercle  $\{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$ .

### Exemple :

- $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$  a pour rayon de convergence  $R = 1$ . En effet,  $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$  converge si et seulement si  $|z| < 1$ . En particulier, il y a divergence si  $|z| = 1$ .
- $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n^2}$  a pour rayon de convergence  $R = 1$ . En effet,  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n^2}$  converge si et seulement si  $|z| \leq 1$  (sinon, divergence grossière). En particulier, il y a divergence si  $|z| > 1$ .

**Calculs de rayons de convergence :**  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  une série entière.  
 Si  $(a_n r^n)$  est bornée sur  $R \geq r$  Si  $(a_n r^n)$  est non bornée alors  $R \leq r$

### Théorème : Critères de d'Alembert et Cauchy

Soit  $R$  le rayon de convergence de  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ .

1. Si  $|a_n|^{\frac{1}{n}} \rightarrow l$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , alors  $R = \frac{1}{l}$
2. Si  $a_n \neq 0$  à partir d'un certain rang et si  $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \rightarrow l$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , alors  $R = \frac{1}{l}$ .

**Remarque :** Lorsque  $R = +\infty$ ,  $l = 0$  et lorsque  $R = 0$ ,  $l = +\infty$ .

**Exemple :**  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n^2}$  a pour rayon de convergence  $R = 1$  car  $\frac{1}{n^2}^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

**Remarque :** Si  $f$  est définie sur  $D(0, 1)$ . Alors  $z \mapsto f(az)$  est définie sur  $D(0, \frac{1}{a})$ .

**Note de rédaction :** cf. Laurent pour l'exemple

>Note de rédaction : Une proposition hors programme sur la limsup a été vue en cours, mais elle n'est pas au programme, donc pas ici.

### Proposition :

Soit  $\frac{P}{Q}$  une fraction rationnelle. Alors, pour  $n_0$  assez grand  $\sum_{n \geq n_0} \frac{P(n)}{Q(n)} a_n z^n$  est bien défini et son rayon et convergence est le même que  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ .

Note de rédaction : cf. Laurent pour la preuve

**Exemple :**  $\sum a_n z^n$ ,  $\sum \frac{a_n}{n} z^n$ ,  $\sum \frac{a_n}{n^2} z^n$  ont le même rayon de convergence.

### Proposition :

$\sum a_n z^n$  de rayon de convergence  $R_a$ .

$\sum b_n z^n$  de rayon de convergence  $R_b$ .

Alors  $\sum (a_n + b_n) z^n$  a pour rayon de convergence  $R \geq \min(R_a, R_b)$ .

### Proposition : Produit de Cauchy de séries absolument convergentes

Soient  $\sum a_n$  et  $\sum b_n$  deux séries absolument convergentes. Alors, la série  $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$  où  $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$  est absolument convergente et on a  $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right) \cdot \left( \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right)$ .

## II Produit de séries entières

### Proposition :

Soit  $\sum a_n z^n$  et  $\sum b_n z^n$  deux séries entières de rayons de convergence respectifs  $R_a$  et  $R_b$ .

Alors la série entière  $\sum c_n z^n$  où  $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$  a pour rayon de convergence  $R_c \geq \min(R_a, R_b)$  et sur le disque ouvert de convergence  $D(0, R_c)$ , on a  $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \cdot \left( \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right)$ .

Note de rédaction : cf. Laurent pour la preuve

**Exemple :** On va définir  $\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ .

On pose  $a_n = \frac{1}{n!}$ . Alors  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{(n+1)!} \cdot n! = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

Par le critère de d'Alembert,  $R = +\infty$ .

Montrer que  $\forall z, w \in \mathbb{C} \exp(z+w) = \exp(z) \cdot \exp(w)$

On a  $\exp(z+w) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k w^{n-k} = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \right) \cdot \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{w^n}{n!} \right) = \exp(z) \cdot \exp(w)$  (on utilise le produit de Cauchy de séries entières pour la troisième égalité).

## III Dérivabilité

**Définition :** Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  où  $U$  est un disque ouvert de  $\mathbb{C}$ . On dit que  $f$  est **holomorphe** (ou  $\mathbb{C}$ -dérivable) en  $z_0 \in U$  si :

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \text{ existe dans } \mathbb{C}$$

Dans ce cas,  $f'(z_0)$  est cette limite. Si  $f$  est dérivable en tout point de  $U$ , on note  $f'$  sa dérivée.

**X Attention X** On étend la notation de la dérivabilité de  $\mathbb{R}$  à  $\mathbb{C}$ , mais il ne faut pas confondre ça avec la différentiabilité.

### Proposition :

Soit  $f$  est  $\mathbb{C}$ -dérivable (ou holomorphe) en  $z_0$ . Alors  $f$  est différentiable en  $z_0$

**Note de rédaction :** cf. Laurent pour la preuve

**X Attention X** Réciproque fausse

**Note de rédaction :** cf. Laurent pour la preuve

**1 Remarque :** Les identités :  $\begin{cases} \operatorname{Re}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\ \operatorname{Re}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = -\operatorname{Im}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \end{cases}$

### Théorème :

Soit  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R > 0$ .

Alors la somme de la série entière  $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$  est continue et holomorphe sur le disque ouvert de centre 0 et de rayon R de dérivée  $f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}$ .

**Note de rédaction :** cf. Laurent pour la preuve

### Corollaire :

Soit  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  une série entière à coefficients réels de rayon de convergence  $R > 0$ .

Alors  $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$  est dérivable sur  $] -R, R[$  et  $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$ .

### Proposition :

Soit  $f$  et  $g : U \rightarrow \mathbb{C}$  deux fonctions holomorphes sur  $U$ .

Alors  $(\lambda f + g)' = \lambda f' + g'$ ,  $(fg)' = f'g + fg'$ .

En particulier, si  $f$  et  $g$  sont des séries entières de rayon de convergence  $\geq R$ , alors sur  $D(0, R)$ , on a  $(fg)' = f'g + g'f$ .

### Théorème :

Une série entière  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$  de rayon de convergence  $R$  est parfois dérivable pour tout  $p \in \mathbb{N}$  sur  $D(0, R)$  et  $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$  admet pour dérivée  $f^{(p)}(z) = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1) \cdots (n-p+1) a_n z^{n-p} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+p) \cdot (n+1) a_{n+p} z^n$ .

**1 Remarque :** On a également la formule de Taylor :  $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$ .

**Définition :** Soit  $U$  un ouvert  $\mathbb{C}$  et  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ .

On dit que  $f$  est **analytique** en  $z_0 \in U$  s'il existe  $r > 0$  tel que sur  $D(0, r)$  il existe  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n w^n$  une série entière de rayon de convergence  $R \geq r$  tel que  $\forall z \in \mathbb{C}, |z - z_0| < r \Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ .

On dit que aussi que  $f$  est développable en série entière de  $z_0$  (DSE).

**Remarque :**  $f$  est DSE en  $z_0$  si et seulement si  $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$  au voisinage de  $z_0$ .

#### Théorème :

Soit  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R$ .  
Alors  $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$  est DSE en tout point de  $D(0, R)$ .

Plus précisément  $\forall z_0 \in D(0, R), f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$  sur  $D(z_0, R - |z_0|)$ .

**Note de rédaction :** cf. Laurent pour la preuve

#### Corollaire :

Si  $f$  est DSE en  $z_0$ , alors  $f$  est holomorphe en  $z_0$ .

**Note de rédaction :** Car une série entière est holomorphe sur son disque de convergence.

**Vocabulaire :** Soit  $A \subset \mathbb{C}$ . On dit que  $x \in A$  est isolé dans  $A$  s'il existe  $r > 0$  tel que  $D(x, r) \cap A = \{x\}$

#### Théorème : Zéros isolés

Soit  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$  une série entière à coefficients non tous nuls de rayon de convergence  $R$  et de somme  $f$ .  
Alors si  $f$  s'annule en 0, alors  $\exists r > 0$  tel que  $D(0, r) \cap f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$ , c'est-à-dire que  $f$  n'a pas d'autres zéros que 0 dans le disque ouvert de centre 0 et de rayon  $r$ .

**Note de rédaction :** cf. Laurent pour la preuve

**Remarque :** Ici, "zéro isolé" signifie que tous les points de  $f^{-1}(\{0\})$  sont isolés.

**Remarque :** De manière générale, toute fonction analytique vérifie le théorème des zéros isolés (il suffit de le translater pour que le zéro soit en 0).

#### Corollaire : Unicité du DSE en un point

Si  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  où  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{C}$  est DSE en  $z_0 \in U$ , alors la série entière qui développe  $f$  en  $z_0$  de la forme  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$  est unique.

**Définition :** On dit qu'un ensemble que  $U \subset \mathbb{C}$  est **connexe** si toute écriture  $U = V \sqcup W$  avec  $V$  et  $W$  ouverts de  $U$  implique que  $V = \emptyset$  ou  $W = \emptyset$ .

**Note de rédaction :** Cette définition n'est pas au programme, mais le prof a demandé si on la voulait quand même. Étant donné qu'elle était nécessaire pour ce qui suit, Alex (alex.theophilos@etu.u-paris.fr, @alex.\_jth) lui a demandé de la donner. Le prof a dit "si vous ne comprenez rien, c'est normal".

**Remarque :** Un ouvert de  $U$  est un ensemble de la forme  $U \cap O$  où  $O$  est un ouvert de  $\mathbb{C}$ .

**Définition :** Soit  $U$  un sous-ensemble de  $\mathbb{C}$ , on dit que  $z \in U$  est un point d'accumulation de  $U$  si  $\exists (z_n)$  tel que  $z_n \in U, z_n \neq z$  et  $z_n \rightarrow z$ .

❶ **Remarque :**  $z$  est un point d'accumulation de  $U$  si et seulement si il n'est pas isolé dans  $U$ .

### Théorème : Prolongement analytique

Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions analytiques sur un ouvert connexe  $U$  de  $\mathbb{C}$  qui sont égales sur une partie de  $U$  de la forme  $\{z_\infty\} \cup \{z_n \in \mathbb{N}\}$  où  $z_n \rightarrow z_\infty$  ( $z_\infty$  est alors un point d'accumulation de  $U$ ), alors  $f$  et  $g$  sont égales sur tout  $U$ .

💬 Note de rédaction : cf. Laurent pour la preuve

## Contents

|            |   |          |
|------------|---|----------|
| <b>I</b>   | <b>Introduction</b>                       | <b>1</b> |
| A          | Convergence d'une série entière . . . . . | 1        |
| <b>II</b>  | <b>Produit de séries entières</b>         | <b>3</b> |
| <b>III</b> | <b>Dérivabilité</b>                       | <b>3</b> |