Chapitre 2 : Séries numériques

I Séries et sommes d'une série

Définition : Soit (u_n) une suite dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On considère $\forall N \in \mathbb{N}, S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n \in \mathbb{K}$.
On a donc une suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ associée à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Définition : On appelle **série de terme général** u_n que l'on note $\sum_{n\geq 0} u_n$ la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$.

Note de rédaction : Les deux définitions précédentes gagneraient à être fusionnées.

Vocabulaire : On dit que (S_N) est la suite des sommes partielles de la série.

Remarque : (S_N) correspond aux $N+1$ premiers termes de la suite.

A Correspondance suite - série

Raisonnement : Par définition une série est une suite. Expliquons comment une suite peut-être vue comme une série.
Si (u_n) est une suite, considérons la série de terme général $v_n = u_n - u_{n-1} \forall n \in \mathbb{N}$ (avec la convention $v_0 = u_0$).
Ainsi, $u_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$.

Remarque : Cependant la série associée à une suite (u_n) va s'étudier en tant que telle (que série) grâce à u_n.

B Opérations sur les séries

Propriété : Opérations sur les séries *(admise)*

Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries.
Alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$:

- **Somme** : $\sum_{n\geq 0}(u_n + v_n) = \sum_{n\geq 0} u_n + \sum_{n\geq 0} v_n$ définie comme $(S_N + S'_N)$
- **Produit par un scalaire** : $\sum_{n\geq 0} \lambda u_n = \lambda \sum_{n\geq 0} u_n$ définie comme (λS_N)

Exemple : Si $u_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$, alors $\sum_{n\geq 0} u_n = 0$ est la série nulle.

C Troncature d'une série

Définition : Si (u_n) est une suite définie pour $n \geq n_0 \mid n_0 \in \mathbb{N}$. On peut considérer la série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ où $u_0 = u_1 = ... = u_{n_0-1} = 0$, ou bien on peut écrire $\sum_{n\geq n_0} u_n$.
Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ est une série de terme général u_n, une **troncature** de la série est $\sum_{n\geq n_0} u_n$. C'est la suite (S_N) où $S_N = \sum_{n=n_0}^{N} u_n$.

Note de rédaction : Cette définition pourraît être synthétisée.

Exemple :

- la série nulle
- la série géométrique de raison $q \in \mathbb{C}^*$: $\sum_{n\geq 0} q^n$ de terme général q^n ;
- la série harmonique : $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ de terme général $\frac{1}{n}$;
- la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$.

II Convergence d'une série

A Définitions et nature d'une série

Définition : Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série.
On dit que la série converge, si la suite (S_N) converge, et on note S la limite de S_N.
S s'appelle la somme de la série.

Dans ce cas, on écrit : $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = S \in \mathbb{R}$ *(c'est une "somme infinie", un objet-limite).*

Vocabulaire : Si (S_N) diverge, alors on dit que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge.

✖ Attention ✖ Si S n'existe pas, alors on écrit **jamais** la notation avec ∞

Vocabulaire : La convergence ou la divergence d'une série s'appelle la **nature** de la série.

Proposition : Stabilité de la limite par troncature *(admis)*

La nature d'une série n'est pas modifée par troncature.

Preuve:

Note de rédaction : Indication : les premiers termes n'influencent pas la convergence.

B Quelques applications...

Exemple :

- Si (u_n) est nulle à partir d'un rang N_0 alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est converge, et $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{N_0} u_n$.

- Série géométrique $\sum_{n\geq 0} q^n$:
  On considère la suite des sommes partielles (S_N) où $S_N = \sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}$ avec $q \neq 1$. On a plusieurs cas :
  - Si $|q| < 1$, $q^{N+1} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$ donc $S_N \xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{1}{1-q} \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.
    La série $\sum_{n\geq 0} q^n$ converge et on arrive à trouver S !
  - Si $|q| > 1$, alors $\sum_{n\geq 0} q^n$ diverge.
  - Si $q = 1$, alors $\sum_{n\geq 0} q^n = N+1 \Rightarrow \sum_{n\geq 0} q^n$ diverge.
- $\sum_{n\geq 1} log(1+1/n)$:
  On a $\forall N \geq 1, S_N = \sum_{n=1}^{N} log(\frac{n+1}{n}) = log(N+1)$ (télescopage).
  Or $log(N+1) \xrightarrow[N\to\infty]{} +\infty$, donc la série $\sum_{n\geq 1} log(1+1/n)$ diverge.
- $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$:
  On a $\forall N \geq 1, S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{N+1}$ (télescopage).
  Or $1 - \frac{1}{N+1} \xrightarrow[N\to\infty]{} 1$, donc la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.
- **Important, démontré plus tard :** $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ (série harmonique) diverge.
- $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge. *(idée : montrer que S_N converge en montant $A_N = S_{2N}$ et $B_N = S_{2N+1}$ sont adjacentes)*

✖ Attention ✖ Ces six exemples sont à connaître et comprendre parfaitement.

Application : Étudier la convergence de la série géométrique pour $|q| = 1$ et $q = -1$ ($q \in \mathbb{C}$).

C Propriétés des séries convergentes

Propriété : Convergence de la combinaison linéaire *(admise)*

Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries convergentes.
Alors $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$: $\sum_{n\geq 0}(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n\geq 0} u_n + \mu \sum_{n\geq 0} v_n$, cette série converge (vers la combinaison linéaire des limites).

Remarque : En d'autres termes, la somme de deux séries convergentes est une série $\sum_{n\geq 0}(u_n + v_n)$ qui converge.

Preuve :
La suite de sommes partielles associée à $\sum_{n\geq}(u_n + v_n)$ est $\sum_{n=0}^{N}(u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{N}(u_n) + \sum_{n=0}^{N}(v_n)$
Comme $\sum_{n=0}^{N}(u_n)$ et $\sum_{n=0}^{N}(v_n)$ sont convergentes, on a $\sum_{n=0}^{N}(u_n + v_n)$ est convergente et sa limite est $\sum_{n=0}^{\infty}(u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{\infty}(u_n) + \sum_{n=0}^{\infty}(v_n)$.

Exemple : Retour : Divergence de la série harmonique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$
But : minorer $\sum_{n\geq 1}^{N} \frac{1}{n} \forall N \in \mathbb{N}$.
$n \leq t \in \mathbb{R} \leq n+1 \Rightarrow \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{n}$
Intégrons entre n et $n+1$: $\int_n^{n+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{n}$
Donc en sommant : $\sum_{n=1}^{N} \int_n^{n+1} \frac{1}{t} dt \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$
donc par Chasles : $\int_1^{N+1} \frac{1}{t} dt \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \forall n \in \mathbb{N}$
Or $\int_1^{N+1} \frac{1}{t} dt = \ln(N+1) \xrightarrow[N\to\infty]{} +\infty$ donc $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \xrightarrow[N\to\infty]{} +\infty$.
Donc la série harmonique diverge.

Propriété : Divergence de la combinaison linéaire *(admise)*

Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série convergente et $\sum_{n\geq 0} v_n$ une série divergente.
Alors $\sum_{n\geq 0}(u_n + v_n)$ diverge.

Preuve :
$\sum_{n=0}^{N}(u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{N}(u_n) + \sum_{n=0}^{N}(v_n)$
Comme $\sum_{n=0}^{N}(u_n)$ est convergente et $\sum_{n=0}^{N}(v_n)$ est divergente, on a $\sum_{n=0}^{N}(u_n + v_n)$ est divergente.

✗ Attention ✗ Quand on considère deux séries divergentes, la situation est à étudier au cas par cas.

Exemple : Considérons $\sum_{n\geq 1} u_n$ avec $u_n = 1 \forall n \in \mathbb{N}$ et $\sum_{n\geq 1} v_n$ avec $v_n = -1 \forall n \in \mathbb{N}$.
D'une part $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge, et $\sum_{n\geq 1} v_n$ diverge aussi.
Mais $\sum_{n\geq 1}(u_n + v_n) = \sum_{n\geq 1} 0 = 0$ converge.

Mais si on considère $v_n = u_n$, alors $\sum_{n\geq 1}(u_n + v_n) = \sum_{n\geq 1} 2u_n$ diverge.

✗ Attention ✗ Source d'erreur classique : Si $\sum_{n\geq 0} u_n + v_n$ est convergente, ***a priori*** on ne peut pas écrire que $\sum_{n=0}^{\infty} u_n + v_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \sum_{n=0}^{\infty} v_n$ car les séries de termes généraux u_n et v_n peuvent être divergentes (il faut donc vérifier leur convergence).

Proposition : *(admis)*

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série numérique où $u_n \in \mathbb{C}\ \forall n \in \mathbb{N}$.
On a $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge $\Leftrightarrow$ les suites $(Re(u_n))$ et $(Im(u_n))$ sont convergentes.

Application : Montrer la proposition précédente.

Indication pour la preuve:
écrire $u_n = Re(u_n) + iIm(u_n)$ et utiliser la propriété sur les combinaisons linéaires.

Théorème : Lien entre convergence et limite des termes

Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, alors $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Preuve:
Considérons (S_N) la suite des sommes partielles associée à $\sum_{n\geq 0} u_n$.
On a $S_{N+1} - S_N = u_{N+1}\ \forall N \in \mathbb{N}$.
Or $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge $\Rightarrow (S_N)$ converge. Donc $\lim_{N\to\infty} S_N - \lim_{N\to\infty} S_{N+1} = 0 \Rightarrow \lim_{N\to\infty} u_N = 0$.

✗ Attention ✗ La réciproque est fausse. Par exemple la série harmonique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge mais $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Vocabulaire : Si $u_n \nrightarrow 0$, on dit que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ **diverge grossièrement**.

D Reste d'une série

Définition : On suppose que $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge. On note $S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ sa somme et (S_N) la suite des sommes partielles.
Le **reste** de la série au rang N est $R_N = S - S_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} u_n$.

Proposition : Comportement du reste

Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, alors $R_N \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$.

Preuve:
Par définition, $R_N = S - S_N$. Or $S_N \xrightarrow[N\to\infty]{} S$. Donc $R_N \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$.

III Série absolument convergente (ACV)

A Critère de Cauchy pour les séries numériques

Ce qui a été fait dans le **Chapitre 1 - Suites de Cauchy** sur les suites réelles reste valable si on considère des suites complexes.

Définition : On dit que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ vérifie le **critère de Cauchy** si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall N \geq N_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}, |\sum_{k=N}^{N+p} u_k| < \varepsilon$$

Proposition : Convergence et critère de Cauchy

$\sum_{n\geq 0} u_n$ vérifie le critère de Cauchy $\Leftrightarrow$ $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

Preuve: (par équivalence)
$\sum_{n\geq 0} u_n$ converge $\Leftrightarrow$ (S_N) converge $\Leftrightarrow$ (S_N) est une suite de Cauchy *(car l'espace est complet)* $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall N \geq N_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}, |S_{N+p} - S_N| < \varepsilon \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall N \geq N_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}, |\sum_{n=N}^{N+p} u_n| < \varepsilon$

Remarque : Autre preuve de la divergence de la série harmonique :
Soit $\varepsilon = 1/2$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on peut choisir $p = N$ et on a : $|\sum_{k=N}^{2N} \frac{1}{k}| \geq \sum_{k=N}^{2N} \frac{1}{2N} = \frac{1}{2}$.
Donc la série harmonique ne vérifie pas le critère de Cauchy, donc elle diverge.

B Définitions et propriétés

Définition : On dit que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est absolument convergente (ACV) si la série $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ converge.

Théorème : Série ACV et convergence

Série ACV $\Rightarrow$ série convergente et $|\sum_{n=0}^{\infty} u_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$.

Preuve:
Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série ACV.
Donc $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ converge.
Donc $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ vérifie le critère de Cauchy : $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall N \geq N_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}, |\sum_{k=N+1}^{N+p} |u_k|| < \varepsilon$
Donc $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall N \geq N_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}, |\sum_{k=N+1}^{N+p} u_k| \leq \sum_{k=N+1}^{N+p} |u_k| < \varepsilon$
Ainsi $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall N \geq N_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}, |\sum_{k=N}^{N+p} u_k| < \varepsilon$
Donc $\sum_{n\geq 0} u_n$ vérifie le critère de Cauchy.

Donc $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge et on a $|\sum_{n=0}^{N} u_n| \leq \sum_{n=0}^{N} |u_n| \implies |\sum_{n=0}^{\infty} u_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$.

✖ Attention ✖ La réciproque est fausse.

Exemple : La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente, mais elle n'est pas absolument convergente car $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

IV Convergence absolue d'une série

Note de rédaction : Correspond à II. dans le plan de cours du prof.

A Séries à termes positifs

Théorème :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.
Alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ $(u_n \geq 0)$ converge ⇔ la suite (S_N) des sommes partielles est bornée.

Preuve:
En effet, $S_{N+1} - S_N = u_{N+1} \geq 0$ donc (S_N) est croissante (à termes positifs).
Ainsi (S_N) converge ⇔ (S_N) est bornée *(théorème de convergence monotone)*.
Or $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge ⇔ (S_N) converge.
Donc $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge ⇔ (S_N) est bornée.

Remarque : Si (S_N) n'est pas bornée, alors $S_N \xrightarrow[N\to\infty]{} +\infty$. On tolère la notation $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = +\infty$.

Application : Application du théorème.
Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries à termes positifs.
Montrons que la série $\sum_{n\geq 0} \sqrt{u_n v_n}$ converge.
En effet, utilisons l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
$\forall N \in \mathbb{N}, \sum_{n=0}^{N} \sqrt{u_n v_n} \leq \sqrt{\sum_{n=0}^{N} u_n}\sqrt{\sum_{n=0}^{N} v_n}$.
Or les deux termes de droite sont bornés, donc $\forall N \in \mathbb{N}, \sum_{n=0}^{N} \sqrt{u_n v_n}$ est bornée.
Donc $\sum_{n\geq 0} \sqrt{u_n v_n}$ converge.

Autre preuve (sans Cauchy-Schwarz) :
$(a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow ab \leq \frac{a^2+b^2}{2} \forall a, b \in \mathbb{R}$.
Donc $\sum_{n=0}^{N} \sqrt{u_n v_n} \leq \frac{1}{2}(\sum_{n=0}^{N} u_n + \sum_{n=0}^{N} v_n)$.
Or les deux termes de droite sont bornés, donc $\forall N \in \mathbb{N}, \sum_{n=0}^{N} \sqrt{u_n v_n}$ est bornée.
Donc $\sum_{n\geq 0} \sqrt{u_n v_n}$ converge.

Note de rédaction : On a pas encore abordé Cauchy-Schwarz.

Proposition :

Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries convergentes *(pas forcément à termes positifs mais réels)*.
Si $u_n \leq v_n \forall n \in \mathbb{N}$, alors $\sum_{n=0}^{\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} v_n$.

Preuve:
On considère la série à termes positifs $\sum_{n\geq 0}(v_n - u_n)$. C'est une série convergente.
On a $\sum_{n=0}^{\infty}(v_n - u_n) \geq 0$.
Or $\sum_{n\geq 0} v_n$ et $\sum_{n\geq 0} u_n$ sont convergentes.

Donc on peut écrire : $\sum_{n=0}^{\infty} v_n - \sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty}(v_n - u_n) \geq 0$.
Donc $\sum_{n=0}^{\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} v_n$.

B Critère de comparaison

Tout cela est fait pour des séries à termes positifs.

Théorème : Critère de comparaison ("Hyper important")

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries à termes positifs.
Supposons que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq v_n$.
Alors :

- Si $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.
- Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge, alors $\sum_{n\geq 0} v_n$ diverge.

Preuve:

- On a $\forall N \in \mathbb{N}, 0 \leq \sum_{n=0}^{N} u_n \leq \sum_{n=0}^{N} v_n$.
  Or $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge, donc la suite des sommes partielles$(\sum_{n=0}^{N} v_n)$ est bornée.
  Donc la suite des sommes partielles $(\sum_{n=0}^{N} u_n)$ est bornée et donc $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.
- Comme $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge, la suite des sommes partielles $(\sum_{n=0}^{N} u_n)$ n'est pas bornée.
  Et comme $\forall N \in \mathbb{N}, 0 \leq \sum_{n=0}^{N} u_n \leq \sum_{n=0}^{N} v_n$, la suite des sommes partielles $(\sum_{n=0}^{N} v_n)$ n'est pas bornée.
  Et donc par le théorème de convergence des séries à termes positifs on a que $\sum_{n\geq 0} v_n$ diverge.

Corollaire :

Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries à termes positifs.
$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$.
Alors :

- Si $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.
- Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge, alors $\sum_{n\geq 0} v_n$ diverge.

Preuve:
Pour $n \geq n_0$,
$\frac{u_{n+1}}{u_n} \times \frac{u_n}{u_{n-1}} \times \dots \times \frac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n} \times \frac{v_n}{v_{n-1}} \times \dots \times \frac{v_{n_0+1}}{v_{n_0}}$
$\Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_{n_0}} \leq \frac{v_{n+1}}{v_{n_0}} \Rightarrow u_{n+1} \leq k v_{n+1}$ avec $k = \frac{u_{n_0}}{v_{n_0}} \in \mathbb{R}_+^*$

- On suppose que $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge.
  Donc $\sum_{n\geq 0} k v_n$ converge.
  Donc par le théorème précédent, comme $\forall n \geq n_0, 0 \leq u_n \leq k v_n$, on a que $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.
- *(non démontré en cours)*

Application : *applications aux séries absolument convergentes*

Proposition :

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à termes réels.
Définissons $u_n^+ = \max(u_n, 0) \geq 0$ et $u_n^- = \max(-u_n, 0) \geq 0$.

On a $\sum_{n\geq 0} u_n$ est ACV.
$\sum_{n\geq 0} |u_n|$ converge $\Leftrightarrow \sum_{n\geq 0} u_n^+$ et $\sum_{n\geq 0} u_n^-$ convergent.

Preuve:
$\Rightarrow$/ On a $\forall n \in \mathbb{N} 0 \leq u_n^+ \leq |u_n|$ et $0 \leq u_n^- \leq |u_n|$.
Donc par le théorème de comparaison, $\sum_{n\geq 0} u_n^+$ et $\sum_{n\geq 0} u_n^-$ convergent.
$\Leftarrow$/ On remarque que $|u_n| = u_n^+ + u_n^-$.
Si $\sum_{n\geq 0} u_n^+$ et $\sum_{n\geq 0} u_n^-$ convergent, alors $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ converge $\Rightarrow \sum_{n\geq 0} u_n$ est ACV.

Proposition :

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à termes complexes.
On a $\sum_{n\geq 0} u_n$ est ACV $\Leftrightarrow \sum_{n\geq 0} Re(u_n)$ et $\sum_{n\geq 0} Im(u_n)$ sont ACV.

Application : Montrer la proposition précédente.

C Domination, convergence et équivalence

Rappel : Soient (u_n) et (v_n) deux suites.

- $u_n = O(v_n)$ ssi $\exists M > 0, |u_n| \leq M|v_n|$ au voisinage de l'infini (n assez grand) $\Leftrightarrow |\frac{u_n}{v_n}|$ est bornée.
- $u_n = o(v_n)$ ssi $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. ($u_n$ est négligeable devant v_n)
- $u_n = o(v_n) \Rightarrow u_n = O(v_n)$
- $u_n \sim v_n$ ssi $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. ($u_n$ est équivalent à v_n)

Proposition : *(admis)*

Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries à termes positifs.
On suppose $u_n = O_{+\infty}(v_n)$.

- Si $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.
- Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge, alors $\sum_{n\geq 0} v_n$ diverge.

Indication pour la preuve:
Il suffit de remarquer que $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} Mv_n$ sont de même nature ; et M est tel que $u_n \leq Mv_n$

✗ Attention ✗ Si on sait que $\sum_{n\geq 0} v_n$ alors pour montrer que $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, il suffit de montrer que $u_n = o_{+\infty}(v_n)$.
(en réalité il faudrait montrer grand O, mais o $\Rightarrow$ O donc c'est plus fort et plus simple à montrer)

Corollaire : *(admis)*

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à terme général dans $\mathbb{C}$ et soit $\sum_{n\geq 0} v_n$ une série à terme général positif tel que $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge.
Si $u_n = O_{+\infty}(v_n)$, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge absolument (ACV).

Application : Montrer le corollaire précédent.

Théorème : "Hyper² important"

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à terme général dans $\mathbb{C}$ et soit $\sum_{n\geq 0} v_n$ une série à termes positifs.
On suppose $u_n \sim_{+\infty} v_n$.
(on pourrait mettre une constante)
On a :

- Si $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge absolument (ACV).
- Si $\sum_{n\geq 0} v_n$ diverge alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge.

Remarque : Si $u_n \geq 0$ alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ sont de même nature.

V Séries de références

A Série de Riemann

Théorème :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$, dite **série de Riemann**.
La série converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$.

Preuve:
On a vu que pour $\alpha = 1$, la série diverge (série harmonique).

- Si $\alpha \leq 1$, $\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n}$. Donc par le théorème de comparaison, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.
- $\Leftarrow$ / Supposons $\alpha > 1$.
Considérons la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ de terme général $u_n = \frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$.
Observation 1 : $\forall N \in \mathbb{N}^*, \sum_{n=1}^{N} u_n = 1 - \frac{1}{(N+1)^{\alpha-1}}$ donc $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge (car $\alpha - 1 > 0$). (téléscopage)
Observation 2 : Déterminons un équivalent de u_n.
$u_n = \frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} = \frac{1}{n^{\alpha-1}}(1 - (\frac{n}{n+1})^{\alpha-1})$.
On a $(\frac{n}{n+1})^{\alpha-1} = (\frac{n+1-1}{n+1})^{\alpha-1} = (1 - \frac{1}{n+1})^{\alpha-1} = 1 - \frac{\alpha-1}{n} + o_{+\infty}(\frac{1}{n})$ (DL ordre 1).
$\Rightarrow 1 - (\frac{n}{n+1})^{\alpha-1} = \frac{\alpha-1}{n} + o_{+\infty}(\frac{1}{n}) \sim_{+\infty} \frac{\alpha-1}{n}$.
Donc $u_n \sim_{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha-1}} \times \frac{\alpha-1}{n} = \frac{\alpha-1}{n^\alpha} > 0$.

On a deux séries à termes positifs $\sum_{n\geq 1} u_n$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{\alpha-1}{n^\alpha}$ qui sont de même nature car équivalentes ($u_n \sim_{+\infty} \frac{\alpha-1}{n^\alpha}$).
On en déduit que $\sum_{n\geq 1} \frac{\alpha-1}{n^\alpha}$ converge pour $\alpha > 1$ par le théorème sur les équivalents.
De plus la nature d'une série n'est pas modifiée quand le terme général est multiplié par un scalaire non nul.
Donc $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est de même nature que $\sum_{n\geq 1} \frac{\alpha-1}{n^\alpha}$.
Donc $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge.

✕ Attention ✕ Démonstration probablement en question de cours au partiel/CC :)

Règles de comparaisons avec les séries de Riemann :

Soient $\sum u_n$ une série de terme général dans $\mathbb{C}$.

1. Si $u_n \sim_{+\infty} k\frac{1}{n^\alpha}$ avec $k \in \mathbb{C}^*$.
   - Si $\alpha > 1$ alors $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge absolument (ACV).
   - Si $\alpha \leq 1$ alors $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge.
2. Si $\exists \alpha > 1, n^\alpha |u_n|$ bornée (i.e. $u_n = O(\frac{1}{n^\alpha})$), alors $\sum u_n$ converge absolument (ACV).
   il suffit de montrer que $u_n = o(\frac{1}{n^\alpha})$
3. On se restreint à $u_n \in \mathbb{R}$. Si $\exists \alpha \leq 1, n^\alpha u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$, alors $\sum u_n$ diverge.

Remarque : Penser u_n à terme réel positif et $k \in \mathbb{R}_+^*$ pour la compréhension. *(suffisant pour la compréhension et la plupart des exercices)*

Application : Montrer les règles de comparaison avec les séries de Riemann.

Application : Etudier la nature de la série de terme général $u_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt[3]{n^3+an^2+bn+c}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

B Série géométrique

Rappel : La série $\sum_{n\geq 0} q^n$ converge $\Leftrightarrow |q| < 1$ et dans ce cas $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

Preuve:
$\Leftarrow$ Si $|q| < 1$, alors $S_N = \sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{1-q^{N+1}}{1-q} \xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{1}{1-q}$.
$\Rightarrow$ Si $|q| \geq 1$, alors $q^n \nrightarrow 0$ donc la série diverge (grossièrement).

Règle de Cauchy :

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à terme général dans $\mathbb{C}$.
On suppose que $\lim_{n\to\infty} |u_n|^{\frac{1}{n}} = l$ (existe et égale à $l \in [0, +\infty]$, $+\infty$ autorisé).

1. Si $l < 1$, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge absolument (ACV).
2. Si $l > 1$, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge.
3. Si $l = 1$, on ne peut rien conclure.

Remarque : Comprendre la règle précédente dans le cas réel, terme positif.

Preuve:

1. Si $l < 1$, prenons $\varepsilon > 0$ tel que $l + \varepsilon < 1$.
   Or $|u_n|^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} l$, donc $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n|^{\frac{1}{n}} \leq l + \varepsilon$.
   Donc $|u_n| \leq (l+\varepsilon)^n$ pour $n \geq N$.
   Or la série de terme général $(l+\varepsilon)^n$ est une série géométrique de raison $l + \varepsilon < 1$, donc elle converge.
   Donc $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.
2. Laissée à la douce appréciation du lecteur.
3. Trouvons une série $\sum_{n\geq 0} u_n$ où $|u_n|^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ et où on ne peut rien conclure sur la nature de la série.
   Si on prend $u_n = \frac{1}{n^\alpha} = e^{-\alpha \ln(n)}$, on a bien $u_n^{\frac{1}{n}} = e^{-\alpha\frac{\ln(n)}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \forall\alpha$.
   Or on a convergence pour $\alpha > 1$ et divergence pour $\alpha \leq 1$, on ne peut rien conclure.

Application : Etudier la nature de la série de terme général $u_n = \cosh(\frac{1}{n})^{-n^3}$.

Règle de d'Alembert :

Soit $\sum u_n$ une série à terme général dans $\mathbb{C}$.
On suppose que $\lim_{n\to\infty} |\frac{u_{n+1}}{u_n}| = l$ (existe et égale à $l \in [0, +\infty]$, $+\infty$ autorisé).

1. Si $l < 1$, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge absolument (ACV).
2. Si $l > 1$, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge.
3. Si $l = 1$, on ne peut rien conclure.

Preuve:

1. Si $l < 1$, prenons $\varepsilon > 0$ tel que $l + \varepsilon < 1$.
   Or $|\frac{u_{n+1}}{u_n}| \xrightarrow[n\to\infty]{} l$, donc $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |\frac{u_{n+1}}{u_n}| \leq l + \varepsilon$.
   Posons $q = l + \varepsilon < 1$.
   Ainsi, $|\frac{u_{n+1}}{u_n}| \leq \frac{q^{n+1}}{q^n}$ pour $n \geq N$.
   On a une comparaison du type $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$.
   On a vu que dans ce cas, $sumb_n$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge.
   Or $\sum q^n$ converge (série géométrique de raison $q < 1$) donc $\sum u_n$ converge (ACV).

2. Comme $\lim_{n\to\infty} |\frac{u_{n+1}}{u_n}| = l > 1, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |\frac{u_{n+1}}{u_n}| \geq 1 \Rightarrow |u_n|$ est minorée par n assez grand.
   Donc $\sum u_n$ diverge.

3. Prendre $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$. On a bien $\frac{(n+1)^\alpha}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ et la nature dépend de α.

Application : Etudier la nature de la série de terme général $u_n = \frac{n!}{n^n}$.

Note de rédaction : On a évoqué en cours la formule de Stirling pour la culture, mais elle est hors programme : $n! \sim \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$.

Proposition : Comparaison des règles de d'Alembert et de Cauchy

Soit $\sum u_n$ une série à terme général positif ou nul.
On suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} l \in [0, +\infty]$.

Alors $u_n^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} l$.

Preuve:
On suppose $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l, l > 0, l \neq +\infty$.
On a $\forall l_1, 0 < l_1 < l$, $\sum_{n\geq 0} \frac{l_1^n}{u_n}$ converge par la règle de d'Alembert.
En effet, $\frac{l_1^{n+1}}{u_{n+1}} \times \frac{u_n}{l_1^n} = l_1 \times \frac{u_n}{u_{n+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{l_1}{l} < 1$.
Par convergence de la série on a que $\frac{l_1^n}{u_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
À partir d'un certain rang, $\frac{l_1^n}{u_n} \leq 1 \Rightarrow l_1^n \leq u_n \Rightarrow l_1 \leq u_n^{\frac{1}{n}}$.

On a $\forall l_2, 0 < l < l_2$, $\sum_{n\geq 0} \frac{u_n}{l_2^n}$ converge par la règle de d'Alembert.
À partir d'un certain rang (même argument que pour l_1), $u_n \leq l_2^n \Rightarrow u_n^{\frac{1}{n}} \leq l_2$.

Donc $l_1 \leq u_n^{\frac{1}{n}} \leq l_2$, $\forall l_1 < l < l_2$ pour un n assez grand.
On fait tendre n vers ∞ puis l_1 et l_2 vers l et on en déduit que $u_n^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} l$.

✖ **Attention** ✖ La réciproque est fausse.

Exemple : Contre-exemple.
Soit $0 < a < b$. Posons :

$$u_n = \begin{cases} a^p b^p & \text{si n = 2p} \\ a^{p+1} b^p & \text{si n = 2p + 1} \end{cases}$$

On a $u_n^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} ab$ (peu importe la parité de n).
Mais $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ dépend de la parité de n.

Remarque : Donc on préfère la règle de d'Alembert à celle de Cauchy. Mais si la règle d'Alembert ne donne rien, la règle de Cauchy ne donnera rien non plus.

VI Séries semi-convergentes

Exemple : $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n}$, on voit qu'elle n'est pas ACV, mais $|\frac{e^{in\theta}}{n}| = \frac{1}{n}$ $\forall \theta \in \mathbb{R}$.
Mais on a pas les outils pour voir si elle est "seulement" convergente. *Idem* pour la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$.

Donc le but ici, c'est de trouver des critères de convergence pour des séries qui ne sont pas ACV.

A Définitions et premières propriétés

Définition : Une série est dite **semi-convergente** (SCV) si elle est convergente mais pas absolument convergente.

Remarque : On considère ici les les séries à terme général $u_n \in \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ (on a pas $u_n \geq 0$).

Proposition : "étrange"

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à terme général dans $\mathbb{R}$.
On considère la série $\sum_{n\geq 0} u_n^+$ et $\sum_{n\geq 0} u_n^-$.

On a $\sum_{n\geq 0} u_n$ est SCV $\Rightarrow \sum_{n\geq 0} u_n^+$ et $\sum_{n\geq 0} u_n^-$ divergent.

Preuve:
On rappelle que $u_n^+ = \max(u_n, 0)$ et $u_n^- = \max(-u_n, 0)$ et donc $u_n = u_n^+ - u_n^-$ (2) et $|u_n| = u_n^+ + u_n^-$ (1).

- Si $\sum_{n\geq 0} u_n^+$ et $\sum_{n\geq 0} u_n^-$ convergent, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ ACV par (1) : **absurde**.
- Si l'une des séries converge et l'autre diverge, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge par (2).
- Seule possibilité donc : $\sum_{n\geq 0} u_n^+$ et $\sum_{n\geq 0} u_n^-$ divergent.

Proposition :

Considérons $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à terme général dans $\mathbb{C}$.
Alors on a :
$\sum_{n\geq 0} u_n$ est SCV $\Leftrightarrow \sum_{n\geq 0} Re(u_n)$ et $\sum_{n\geq 0} Im(u_n)$ sont CV et l'une d'entre elles est SCV.

Preuve:
$\Rightarrow$ / Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ est CV, alors $\sum n = 0^N u_n = \sum_{n=0}^N Re(u_n) + i\sum_{n=0}^N Im(u_n)$.
Donc on a la CV des séries $\sum_{n\geq 0} Re(u_n)$ et $\sum_{n\geq 0} Im(u_n)$.
Montrons que l'une des deux séries n'est pas ACV.
En effet on a $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq |Re(u_n)| + |Im(u_n)|$ si $\sum_{n\geq 0} |Re(u_n)|$ et $\sum_{n\geq 0} |Im(u_n)|$ ACV.
$\Rightarrow$ une des deux séries n'est pas ACV.
$\Rightarrow$ une des deux séries est ACV.

$\Leftarrow$ / On a que $\sum_{n\geq 0} Re(u_n)$ et $\sum_{n\geq 0} Im(u_n)$ sont CV.
Donc $\sum_{n\geq 0} u_n$ est CV.
Montrons que $\sum_{n\geq 0} u_n$ est SCV.
On a : $|Re(u_n)| \leq |u_n|$ et $|Im(u_n)| \leq |u_n|, \forall n \in \mathbb{N}$.
Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ était ACV, alors $\sum_{n\geq 0} Re(u_n)$ et $\sum_{n\geq 0} Im(u_n)$ seraient ACV ce qui est contraite à l'hypothèse "l'une d'entre elles est SCV".

B Critère d'Abel

Application : On veut donner un critère pour la convergence d'une série du type $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n} = a_n b_n$ avec $a_n = e^{in\theta}$ et $b_n = \frac{1}{n}$.

Théorème : Critère d'Abel

On considère la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ où $\sum_{n\geq 0} u_n \in \mathbb{C}$, avec $u_n = a_n b_n$ tels quels :

1. (a_n) est **réelle**, **décroissante**, et $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
2. (b_n) est **complexe** telle que $B_N = \sum_{n=0}^N b_n$, *i.e.* (B_N) est **bornée**.

Alors la série $\sum_{n\geq 0} a_n b_n$ converge.

Rappel : Une suite complexe est bornée : $\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |z_n| \leq M$, où $|z_n| = \sqrt{Re(z_n)^2 + Im(z_n)^2}$.

Preuve:
On va utiliser la "transformation d'Abel".
On a $B_N = \sum_{n=0}^N b_n$.

Alors $B_k - B_{k-1} = b_k$, $\forall k \geq 1$ et $B_0 = b_0$.

On part de la somme partielle de la série :
$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^{N} a_k b_k = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{N} a_k (B_k - B_{k-1})$
$= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{N} a_k B_k - \sum_{k=1}^{N} a_k B_{k-1}$
$= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{N} a_k B_k - \sum_{k=0}^{N-1} a_{k+1} B_k$
$= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{N-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_N B_N - a_1 b_0 = \sum_{k=0}^{N} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_N$ avec a_n tend vers 0 et B_n bornée

Etude de $\sum_{k=0}^{N} (a_k - a_{k+1}) B_k$, séries à termes dans $\mathbb{C}$.
Etudions donc l'ACV :
$|a_k - a_{k+1} B_k||a_k - a_{k+1}||B_k| \leq (a_k - a_{k+1}) M$ car $|B_k| \leq M$
Or la série $\sum_{k=0}^{N} (a_k - a_{k+1}) M$ est de même nature que $\sum_{k=0}^{N} a_k - a_{k+1}$ (car M est un scalaire non nul).
Et la CV de cette série téléscopique est évidente.

Note de rédaction : Il y avait beaucoup d'indices et d'infos, j'attends la vérification de Laurent pour être sûr que c'est correct (j'ai un doute sur la fin).

Application : Pour $\theta \neq 2\pi k, \sum_{n\geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n}$ converge par le critère d'Abel, $a_n = \frac{1}{n}$ et $b_n = e^{in\theta}$ et $\sum_{n\geq 1} b_n = \frac{1-e^{i(N+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}$ et $|B_N| = |\frac{1-e^{i(N+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}| \leq \frac{|1|+|e^{i(N+1)\theta}|}{|1-e^{i\theta}|} = \frac{2}{|1-e^{i\theta}|}$.
Donc la série $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n}$ converge, mais pas ACV, donc elle est SCV.

Application : Etudier la convergence, l'absolue convergence et la semi-convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^{\alpha}}$ avec $\theta \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

Remarque : Dans le critère d'Abel, comme (a_n) est décroissante et $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $a_n \geq 0$ (car $a_n \in \mathbb{R}$).

C Séries alternées

Définition : Une série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est dite **alternée** si $u_n = (-1)^n a_n$ ou $u_n = (-1)^{n+1} a_n$ avec $a_n \geq 0$.

Exemple : $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n}$, $\sum_{n\geq 0} (-1)^n$ sont des séries alternées.

Remarque : $(-1)^n \cdot u_n = (-1)^{2n} a_n = a_n$ ou $u_n = -a_n \Rightarrow (-1)^n u_n$ est de signe constant

Remarque : Une définition équivalente est : une série est alternée si le signe de $(-1)^n \cdot u_n$ est constant.

Théorème : Critère spécial des séries alternées (CSSA)

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série de terme général $u_n = (-1)^n a_n$, avec $a_n \geq 0$.
Si :

1. (a_n) est décroissante.
2. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

Preuve:
On applique le critère d'Abel avec $a_n = a_n$ et $b_n = (-1)^n$.
On a bien $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et (a_n) décroissante.
De plus, $B_N = \sum_{n=0}^{N}(-1)^n = \frac{1-(-1)^{N+1}}{1-(-1)}$ est bornée (égale à 0 ou 1).
Donc la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

Proposition :

Soit $\sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n$ une série alternée vérifiant les hypothèses du CSSA (donc (a_n) est décroissante et $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$).
On considère la suite des sommes partielles (S_N) avec $S_N = \sum_{k=0}^{N}(-1)^k a_k$.
Soit S la somme de la série.

Alors :
$S_{2N+1} \leq S \leq S_{2N}$ et $|R_N| = |S - S_N| \leq a_{N+1}$.

Preuve:
On pouse $A_N = S_{2N}$ et $B_N = S_{2N+1}$.
On observe que $S_{2N+1} - S_{2N} = -a_{2N+1} \leq 0$
$\Leftrightarrow S_{2N+1} \leq S_{2N}$.

Variations de (A_N) et (B_N)
$A_{N+1} - A_N = S_{2N+2} - S_{2N} = a_{2N+2} - a_{2N+1} \leq 0$ car (a_n) décroissante.
$\Leftrightarrow A_{N+1} \leq A_N$. Donc (A_N) est décroissante et $B_{N+1} - B_N = S_{2N+3} - S_{2N+1} = a_{2N+2} - a_{2N+3} \geq 0$ car (a_n) décroissante.
$\Leftrightarrow B_{N+1} \geq B_N$. Donc (B_N) est croissante.

De plus, on a $B_N - A_N \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$ donc (A_N) et (B_N) sont adjacentes, et convergent vers la même limite S.
et donc $B_N \leq S \leq A_N$ où $S = \lim_{N\to\infty} A_N = \lim_{N\to\infty} B_N$.

On a bien $S_{2N+1} \leq S \leq S_{2N}, \forall N \in \mathbb{N}$.

Etudions maintenant le reste.
$R_N = S - S_N$, on veut montrer que $|R_N| \leq a_{N+1}$.
Séparons le cas N pair et impair :

- Si $N = 2p+1$, alors $S_{2p+1} \leq S \implies S - S_{2p+1} \geq 0$.
  $\Rightarrow |R_{2p+1}| = S - S_{2p+1} \leq S_{2p+2} - S_{2p+1} = a_{2p+2} = a_{N+1}$.
- *Laissé en exercice au lecteur :)* □

✖ Attention ✖

1. Si deux suites sont équivalentes ($\sim$) et l'une monotone, l'autre ne l'est pas forcément. **Exemple :** $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ et $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. On a $a_n \sim b_n$ mais (a_n) n'est pas monotone (on le montre en encadrant/calculant 3 termes consécutifs (2p, 2p+1, 2p+2), alors que (b_n) l'est).

2. Considérons $\sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n$. On remarque que $\sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n$ n'est pas ACV. Est-elle semi-convergente ? Le CSSA ne s'applique pas. Mais $(-1)^n a_n \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ QUI N'IMPLIQUE PAS "$\sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n$ CV car $\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ CV" (car $\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ n'est pas positive).
   À faire : Montrer que $(-1)^n a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt(n)} + b_n$, où $b_n = \frac{-1}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+(-1)^n)}$ et en déduire que $\sum u_n$ DV.

Donc $u_n \sim v_n$, $\sum v_n$ CV $\implies \sum u_n CV$ que si $v_n est \geq 0 ou \leq 0$

VII Produit de Cauchy de deux séries

Définition : Soient $\sum_{n\geq 0} a_n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n$ deux séries.
La **série produit (de Cauchy)** est définie par la série $\sum_{n\geq 0} c_n$ où $c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Remarque : Supposons que $a_n = 0 = b_n$ pour $n > N \in \mathbb{N}$. Considérons $P(X) = a_0 + a_1 X + ... + a_n X^n$ et $Q(X) = b_0 + b_1 X + ... + b_n X^n$.
Alors $(PQ)(X) = c_0 + c_1 X + ... + c_{2N} X^{2N}$. On peut penser au produit de Cauchy comme une "généralisation".

Proposition :

On considère $\sum_{n\geq 0} a_n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n$ deux séries à termes positifs et convergentes.
Alors la série produit $\sum_{n\geq 0} c_n$ est convergente et on a : $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n)(\sum_{n=0}^{\infty} b_n)$.

Preuve:
Soient $A_n = \sum_{n=0}^{N} a_n$ et $B_N = \sum_{n=0}^{N} b_n$.
Notons $C_N = \sum_{n=0}^{N} c_n$ = $\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

On veut monrer que (C_N) converge et déterminer sa limite.

(C_n) est une somme partielle à termes positifs, donc (C_N) est croissante.
Posons $I_N = \{0,\dots,N\} \subset \mathbb{N}$
Note de rédaction : Dessin $I_N x I_N$

Considérons $A_N B_N = \sum_{(p,q)\in I_N x I_N} a_p b_q$.
Mais $C_N = \sum_{n=0}^{N} c_n = \sum_{n=0}^{N}\sum_{p+q=n} a_p b_q = \sum_{(p,q)\in I_N^2, p+q\leq N} a_p b_q$.
On a $\{(p,q) \mid p+q \leq N\} \subset \{(p,q) \mid p,q \in I_N\}$, donc $C_N \leq A_N B_N$ (1) qui est bornée car A_N CV et B_N CV $\implies C_N$ bornée.
On a aussi l'inégalité : $A_N B_N \leq C_{2N}(2)$
Note de rédaction : Deuxième schema

car $\{(p,q) \mid p+q \leq N\} \supset \{(p,q) \mid 0 \leq p,q \leq N\}$. On obtient $\lim_{+\infty} c_n = \lim_{+\infty}(A_N B_N) = (\lim_{+\infty} A_N)\cdot(\lim_{+\infty} B_N)$. $\square$

Théorème :

Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries à termes dans $\mathbb{C}$.
Si les séries sont ACV, alors la série produit $\sum_{n\geq 0} c_n$ est ACV.

Preuve:
On considère $A_N = \sum_{n=0}^{N} |a_n|$, $B_N = \sum_{n=0}^{N} |b_n|$ et $C_N = \sum_{n=0}^{N} |c_n|$.
D'après la proposition précédente et sa démonstration, on a $A_N B_N - C_N \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$. (on va utiliser cette propriété)
On a $\forall N \in \mathbb{N}, |(\sum_{n=0}^{N} a_n)(\sum_{n=0}^{N} |b_n|) - (\sum_{n=0}^{N} |c_n|)|$.
On peut donc écrire :

$$|(\sum_{n=0}^{N} a_n)(\sum_{n=0}^{N} |b_n|) - (\sum_{n=0}^{N} |c_n|)| = |\sum_{p\in I_N}\sum_{q\in I_N} a_p b_q - \sum_{(p,q)\in I_N^2, p+q\leq N} a_p b_q| = |\sum_{(p,q)\in I_N^2} a_p b_q - \sum_{(p,q)\in J_N^2} a_p b_q| \text{ où } J_N = \{(p,q) \mid p+q \leq N\}$$

Or $J_N \subset I_N^2$, donc

$$|\sum_{(p,q)\in I_N^2} a_p b_q - \sum_{(p,q)\in J_N^2} a_p b_q| = |\sum_{(p,q)\in I_N^2\setminus J_N^2} a_p b_q| = \sum_{(p,q)\in K_N} |a_p b_q|$$

où $K_N = I_N^2 \setminus J_N^2 = \{(p,q) \mid p+q > N\}$.

$$\leq \sum_{(p,q)\in K_N} |a_p||b_q| = (\sum_{n=0}^{N} |a_n|)(\sum_{n=0}^{N} |b_n|) - \sum_{n=0}^{N} |c_n| = A_N B_N - C_N \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

par la proposition précédente et l'inégalité triangulaire.

Note de rédaction : À changer dans la démo A_N en A'_N et B_N en B'_N.
De plus, il faut mettre $C'_N = \sum_{n=0}^{N} |c'_n| = \sum_{n=0}^{N} |a_k||b_{n-k}|$ et pas $|\sum_{n=0}^{N} a_k b_{n-k}|$.

Remarque : L'hypothèse d'absolue convergence pour $\sum a_n$ et $\sum b_n$ est très importante dans le théorème. L'hypothèse de positivité dans la proposition qui précède le théorème est fondamentale.

Exemple : On considère la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

- u_n n'est pas positive.
- On a pas l'absolue convergence.
- Le CSSA s'applique car $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ est positive, décroissante et tend vers 0.

Considérons le produit de Cauchy. $(\sum_{n\geq 1} u_n)(\sum_{n\geq 1} u_n) = \sum_{n\geq 1} c_n$ où $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \cdot \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k}}$
Montrons que $\sum_{n\geq 1} c_n$ diverge (en montrant que ça ne tend pas vers 0).
On a $|c_n| = |\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k\cdot(n-k)}}|$
On a $k(n-k) \leq kn - k^2 \leq kn \leq (n-1)n$.
Donc $|c_n| = |\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k\cdot(n-k)}}| \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{(n-1)n}} = \frac{n-1}{\sqrt{(n-1)n}} = \sqrt{\frac{n-1}{n}}$.
Donc $|c_n| \nrightarrow 0$.
Conclusion : Pour faire le produit de Cauchy de deux séries, il faut :

1. Que les deux séries soient ACV.
2. ou Que les deux séries soient à termes positifs et CV.

Application : Fixons $z \in \mathbb{C}$. Etudions la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$.
1. Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$ la série ACV.
On va utiliser la règle de d'Alembert : $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{|z|}{(n+1)}$.
Donc $\forall z \in \mathbb{C}, \frac{z^n}{n!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
Donc $\forall z \in \mathbb{C}, \sum_{n\geq 0} u_n(z)$ est ACV.
Remarque : On a le bon goût de pouvoir appeller $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!} := exp(z)$. *(je dis bon goût mais ça risque de faire mal bientôt)*

2. Calculons $exp(z) \cdot exp(z')$ avec $z, z' \in \mathbb{C}$.
Comme les deux séries sont ACV, on peut faire le produit de Cauchy.

$exp(z) \cdot exp(z') = \sum_{n\geq 0} c_n$ où $c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \cdot \frac{(z')^{n-k}}{(n-k)!}$
On a $c_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} z^k (z')^{n-k} = \frac{(z+z')^n}{n!}$ par le binôme de Newton.
Donc $exp(z) \cdot exp(z') = \sum_{n\geq 0}^{+\infty} \frac{(z+z')^n}{n!} = exp(z+z')$.

VIII Compléments

A Hors-programme : Séries commutativement convergentes

Note de rédaction : On a traité de ça en parlant rapidement de permutations. À voir chez Laurent si c'est nécessaire à mettre, mais je l'omets ici pour l'instant.

B Introduction aux séries de Taylor d'une fonction

Définition : Considérons $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle ouvert contenant o.
Supposons que $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$. *(i.e. f est dérivable autant de fois qu'on veut sur I et les dérivées sont continues).*
La **série de Taylor** associée à f au voisinage de 0 est la série $\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Ici, $x \in \mathcal{V}(0)$ *(cela peut être I tout entier)*. Et il s'agit en fait d'une série de fonctions: $x \in \mathcal{V}(0) \subset I \mapsto \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.
À ce stade du cours, on y pense comme une série numérique à x fixé.

Deux questions se posent :

1. Pour quels $x \in I$ la série de Taylor $\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ converge-t-elle ?
2. Si elle converge "pour des x", a-t-elle pour somme $f(x)$?

Remarque : Plus généralement, si I est quelconque et que on prend $a < b \in I$, les mêmes questions se posent de la façon suivante : $f(b) = \sum_{n\geq 0} \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)$?

Remarque : Les sommes partielles de la série de Taylor associée à f, i.e. $\sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, x \in I$ sont appelées **polynômes de Taylor**

Réponses partielles aux questions.

1. Utiliser les règles de d'Alembert ou de Cauchy pour déterminer les $x \in I$ tels que $\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ converge.
2. Utilisons la formule de Taylor avec reste intégral si on veut montrer que pour les x où $\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ converge, on a $f(x) = \sum_{n\geq 0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.
   Ou de manière équivalente $\sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \xrightarrow[N\to\infty]{} f(x)$. (convergence à x fixé !)

Application : Retrouvons la formule de Taylor avec reste intégral.

Théorème fondamental de l'analyse : Rappel *(admis)*

Soit $x \in I, x > 0$.
Alors $f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)dt$.

$\int_0^x f'(t)dt = \int_0^x (t-x)' f'(t)dt = [(t-x)f'(t)]_0^x - \int_0^x (t-x)f''(t)dt$.
$= -xf'(0) + \int_0^x (x-t)f''(t)dt$.
Ce qui se réécrit : $f(x) - f(0) - xf'(0) = \int_0^x (x-t)f''(t)dt$.
On refait la même chose pour f'' :
$\int_0^x (x-t)f''(t)dt = \int_0^x ((x-t)^2/2)' f''(t)dt = -[(x-t)^2/2f''(t)]_0^x + \int_0^x (x-t)^2/2 f^{(3)}(t)dt$.

$= -x^2/2f''(0) + \int_0^x (x-t)^2/2f^{(3)}(t)dt$.
Ce qui se réécrit : $f(x) - f(0) - xf'(0) - x^2/2f''(0) = \int_0^x (x-t)^2/2f^{(3)}(t)dt$.
Puis on continue par récurrence et on a :

Théorème : Taylor avec R.I.

$f \in \mathcal{C}^\infty(I), I \ni 0$
On a $\forall x \in I, x > 0, f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$.

Remarque : Pour montrer que $\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ converge vers $f(x)$, il suffit de montrer que le $R_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, où R_n est le reste.
On a $|R_n(x)| = |\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt|$. En principe, majorer $R_n(x)$!

Application : On prend $f(x) = exp(x)$, $I = \mathbb{R}$.
On a que $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(x) = exp(x)$. Sa série de Taylor au voisinage de 0 est $\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$.

1. Convergence

$u_n(x) = \frac{x^n}{n!}$.
On utilise la règle de d'Alembert : $\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \frac{|x|}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
Or $0 < 1$, donc $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ est ACV, $\forall x \in \mathbb{R}$.

2. Somme

On veut montrer que $\sum_{n\geq 0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = exp(x), \forall x \in \mathbb{R}$.
Par la formule de Taylor avec reste intégral, on a $|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k| = |R_n(x)| = |\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e(t)dt|$
$\leq \frac{|x|^n}{n!} e^x \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
Donc $exp(x) = \sum_{n\geq 0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \forall x \in \mathbb{R}$.

Exemple : Calculons la valeur de $\sum_{n\geq 0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$.
On sait que $\sum_{n\geq 0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = exp(x)$, donc en prenant $x = 1$, on obtient $\sum_{n\geq 0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = exp(1) = e$.