

Savoir-faire	Exercices
Dualité	1
Utiliser les théorèmes sur la convergence uniforme	2,3,4
Dénombrer et calculer des probabilités	4,5,6,7

1 Annales 2023-2024 - Anthony F.

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ et soit $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de E .

1. Soit $\mathcal{B}^* = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ la base duale de \mathcal{B} de E . Calculer $\mu_1(X)$.
2. Montrer que la matrice dans la base \mathcal{B} de l'application linéaire $\phi : P(X) \mapsto P(X+1)$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Déterminer la matrice de ϕ^* dans la base duale \mathcal{B}^* .
4. L'application $P \mapsto P(0) \cdot P(1)$ est-elle une forme linéaire sur E ?
5. Indiquer λ_1 , une combinaison linéaire non nulle de \mathcal{B}^* , qui s'annule sur le polynôme $1 + X + X^2$.

2 TD3.5

Pour tout entier $n \geq 1$, soit $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f_n(x) = \frac{1}{n^2 + x^2}.$$

1. Montrer que la série $\sum f_n$ converge simplement sur \mathbb{R} . On note s la somme de cette série.
2. Montrer que s est continue sur \mathbb{R} .
3. Montrer que pour tout réel $a > 0$, la série $\sum f'_n$ converge normalement sur $[-a, a]$.
4. Montrer que s est dérivable sur \mathbb{R} .

2 TD3.6

Pour tout entier $n > 0$ et tout réel x , on pose :

$$f_n(x) = \frac{\arctan(nx)}{n^2},$$

et on considère $f(x) = \sum_{n \geq 1} f_n(x)$ définie sur \mathbb{R} . On précise de f est impaire.

1. Étudier la convergence normale de f sur \mathbb{R} , préciser si f est continue et quelles sont ses limites en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Montrer que f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^* . Montrer que f' est décroissante sur $]0, +\infty[$.
3. Montrer que f n'est pas dérivable en 0.

3 TD3.7

Soit $f :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \sin(nx)}{n}.$$

1. Montrer que f est de classe C^1 sur $] -1, 1[$.
2. Calculer $f'(x)$ et en déduire que :

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x \sin x}{1 - x \cos x}\right).$$

4 Le banc sexiste

1. De combien de façons peut-on asseoir en rang 3 garçons et 3 filles (qui sont des individus discernables !) ?
2. Même question si les garçons doivent rester ensemble et les filles aussi.
3. Même question si seuls les garçons doivent rester ensemble.
4. Même question si deux personnes de même sexe ne doivent jamais être voisins

5 Au loto

On range p boules dans n cases. Dans chacun des cas suivants, dire combien il y a de rangements possibles, et indiquer les contraintes éventuelles sur p et n (par exemple $p \leq n$) :

1. Les boules et les cases sont discernables, l'ordre dans chaque case n'est pas pris en compte, chaque case pouvant recevoir un nombre quelconque de boules.
2. Les boules et les cases sont discernables, chaque case ne pouvant recevoir qu'une boule au maximum.
3. Les boules sont indiscernables, les cases sont discernables, chaque case ne pouvant recevoir qu'une seule boule.
4. Les boules sont indiscernables, les cases sont discernables, chaque case pouvant recevoir un nombre quelconque de boules.

6 Et si elle tombe droite ?

On joue 4 fois à pile ou face.

1. Donner un espace de probabilité associé à cette expérience.
2. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins 3 faces ou 3 piles consécutivement ?

7 Secrétaire distrait

Un secrétaire un peu distrait a tapé N lettres et préparé N enveloppes portant les adresses des destinataires, mais il répartit au hasard les lettres dans les enveloppes. Pour $1 \leq j \leq N$, on note A_j l'événement « la j -ème lettre se trouve dans la bonne enveloppe ».

1. Définir un espace de probabilité (Ω_N, P_N) associé à cette expérience aléatoire.
2. Calculer $P_N(A_j)$.
3. On fixe k entiers $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ entre 1 et N . Dénombrer toutes les permutations σ sur $\{1, \dots, N\}$ telles que $\sigma(i_1) = i_1, \dots, \sigma(i_k) = i_k$. En déduire $P_N(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k})$.

5. On note B l'événement « au moins une des lettres est dans la bonne enveloppe ». Exprimer B à l'aide des A_j .
6. Utiliser la formule de Poincaré pour calculer $P_N(B)$ et sa limite quand $N \rightarrow +\infty$.

Il conviendra également d'apprendre le reste du cours, en particulier : le théorème III.B.1 et le lemme d'Abel (et le théorème qui s'ensuit)