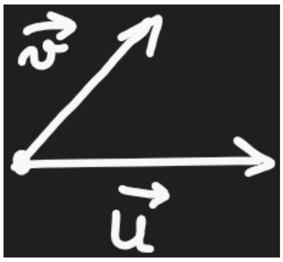
Déterminants

I Aire algébrique



Soit E un plan sur un corps K. Soient $u, v \in E$.

Comment définir $\mathcal{A}(u, v) \in K$? (aire du parallélogramme)

Propriétés attendues :

- $\forall \lambda \in K, \quad u, u_1, u_2, v, v_1, v_2 \in E$
    - $\mathcal{A}(\lambda u, v) = \lambda \mathcal{A}(u, v)$;
    - $\mathcal{A}(u, \lambda v) = \lambda \mathcal{A}(u, v)$;
    - $\mathcal{A}(u_1 + u_2, v) = \mathcal{A}(u_1, v) + \mathcal{A}(u_2, v)$;
    - $\mathcal{A}(u, v_1 + v_2) = \mathcal{A}(u, v_1) + \mathcal{A}(u, v_2)$.

  Les applications $\begin{matrix} u \mapsto \mathcal{A}(u, v) \\ v \mapsto \mathcal{A}(u, v) \end{matrix}$ sont linéaires.

  Vocabulaire : On dit que $\mathcal{A}$ est bilinéaire.

  De plus, $\mathcal{A}(u, v) = 0$. Cela entraîne $\mathcal{A}(u + v, u + v) = 0$
  et donc $\mathcal{A}(u, u + v) + \mathcal{A}(v, u + v) = 0$
  et donc $\mathcal{A}(u, u) + \mathcal{A}(u, v) = +\mathcal{A}(v, u) + \mathcal{A}(v, v) = 0$
  et donc $\mathcal{A}(u, v) = -\mathcal{A}(v, u)$

  Vocabulaire : On dit que $\mathcal{A}$ est antisymétrique ou alterné.

- Soit (e_1, e_2) une base de E. Soient $u = ae_1 + be_2, v = ce_1 + de_2 \in E$ avec $a, b, c, d \in K$.

  On a $\mathcal{A}(u, v) = \mathcal{A}(ae_1 + be_1, ce_1 + de_2)$
  $= ac\mathcal{A}(e_1, e_1) + ad\mathcal{A}(e_1, e_2) + bc\mathcal{A}(e_2, e_1) + bd\mathcal{A}(e_2, e_2)$
  $= ad\mathcal{A}(e_1, e_2) + bc\mathcal{A}(e_2, e_1) = ad\mathcal{A}(e_1, e_2) - bc\mathcal{A}(e_1, e_2)$
  $= (ad - bc)\mathcal{A}(e_1, e_2)$
  $\rightarrow$ indépendant de u, v. Donc $\mathcal{A}$ est déterminé par $\mathcal{A}(e_1, e_2)$.

  Déterminants de u, v dans la base (e_1, e_2) : $ad - bc$.

II Formes multilinéaire

Soit E un K-espace vectoriel. Soit p un entier ≥ 1. On a $E^p = E \times E \times \ldots \times E$ (p fois)

Définition : Soit $f : E^p \rightarrow K$.

On dit que f est p-linéaire si pour tout i et $(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_p) \in E^{p-1}$

$u_i \mapsto f(u_1, \ldots, u_p)$ est linéaire (on enlève la variable à la i^e variable).

(c'est-à-dire que f est linéaire en chaque variable).

Remarque :

- On dit que f est une forme <u>p-linéaire</u> ;
- C'est une forme linéaire si $p = 1$, bilinéaire si $p = 2$.

Définitions :

- On dit de plus que f est alternée si $u_i = u_j$ pour $i \neq j$ entraîne que $f(u_1, \dots, u_p) = 0$.
- On dit que f est antisymétrique si $\forall\, i, j$ tel que $i \neq j$,

$$f(u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_p) = -f(u_1, \dots, u_j, \dots, u_i, \dots, u_p)$$

Proposition : Soit $\sigma \in \mathcal{S}_p$ (groupe symétrique). Soit $f : E^p$ une forme p-linéaire.

L'application $(u_1, \dots, u_p) \mapsto f(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(p)})$ est une forme p-linéaire, notée f^σ.
De plus, si f est antisymétrique, on a $f^\sigma = \varepsilon(\sigma) f$. Avec $\varepsilon(\sigma)$ la signature de σ.

Démonstration :

- Comme $(u_1, \dots, u_p) \mapsto (u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(p)})$ est une forme linéaire, $(u_1, \dots, u_p) \mapsto f(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(p)})$ est linéaire en chaque variable.
- Remarquons que si $\sigma\sigma' \in \mathcal{S}_p$, on a $f^{\sigma\circ\sigma'}(u_1, \dots, u_p) = f(u_{\sigma\circ\sigma'(1)}, \dots, u_{\sigma\circ\sigma'(p)})$

$$= f^\sigma(u_{\sigma'(1)}, \dots, u_{\sigma'(p)}) = (f^\sigma)^{\sigma'}(u_1, \dots, u_p).$$

  Donc $f^{\sigma\circ\sigma'} = (f^\sigma)^{\sigma'}$.

  Ecrivons $\sigma = \tau_1 \dots \tau_k$ (produit de transpositions).

  On a $f^{\tau_i} = -f$ par antisymétrie.

  Donc $f^\sigma = f^{\tau_1 \dots \tau_k} = -f^{\tau_2 \dots \tau_k} = (-1)^2 f^{\tau_3 \dots \tau_k} = \cdots = (-1)^k f = \varepsilon(\sigma) f$.

Théorème : Toute forme p-linéaire alternée est antisymétrique.
Si $2 \neq 0$ dans K, toute forme p-linéiare antisymétrique est alternée.

Remarque : Si $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ $(= \mathbb{F}_2)$ et $E = K^2$.
$f(u = (x, y), v = (z, t)) \mapsto xz + yt$ n'est pas alternée car $f((1,0),(1,0)) = 1 \neq 0$
mais elle est antisymétrique (on a $2 = 0$ donc $1 = -1$).

Démonstration : Soit f une forme p-linéaire.

- Si f est alternée : Soient $i, j \in \{1, \dots, p\}$ avec $i < j$. Soit $(u_1, \dots, u_p) \in E$.

  On a $f(u_1, \dots, u_{i-1}, u_i + u_j, u_{i+1}, \dots, u_{j-1}, u_i + u_j, u_{j+1}, \dots, u_p) = 0$ car alterné.

  En développant, on trouve : $0 = f(u_1, \dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \dots, u_{j-1}, u_i, u_{j+1}, \dots, u_p)$

$$+f(u_1, \dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \dots, u_{j-1}, u_j, u_{j+1}, \dots, u_p)$$
$$+f(u_1, \dots, u_{i-1}, u_j, u_{i+1}, \dots, u_{j-1}, u_i, u_{j+1}, \dots, u_p)$$
$$+f(u_1, \dots, u_{i-1}, u_j, u_{i+1}, \dots, u_{j-1}, u_j, u_{j+1}, \dots, u_p)$$
$$= f(u_1, \dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \dots, u_{j-1}, u_j, u_{j+1}, \dots, u_p)$$
$$+f(u_1, \dots, u_{i-1}, u_j, u_{i+1}, \dots, u_{j-1}, u_i, u_{j+1}, \dots, u_p)$$

  Le 1e et 4e terme sont nuls, donc la somme des 2e et 3e termes est nulle

  donc f est antisymétrique

- Réciproquement, supposons f antisymétrique et $2 \neq 0$ dans L.

  On a, pour $i, j \in \{1, \dots, p\}$ avec $i < j$ et $u_i = u_j$

$$f(u_1, \dots, u_p) = -f(u_1, \dots, u_p) \text{ par antisymétrie.}$$

  Donc $2f(u_1, \dots, u_p) = 0$. Comme $2 \neq 0$. 2 est inversible dans K. Donc $f(u_1, \dots, u_p) = 0$.

  Donc f est alternée.

Proposition : Soit f une forme p-linéaire alternée. Soit $(u_1, \dots, u_p) \in E^p$.
Soit $i \in \{1, \dots, p\}$. Soit $v_i = u_i + \mathrm{CL}$ de $u_1, \dots, \widehat{u_i}, \dots, u_p$.

Alors $f(u_1, \dots, u_p) = f(u_1, \dots, u_{i-1}, v_i, u_{i+1}, u_p)$.

Remarque : $u_1, \dots, \widehat{u_i}, \dots, u_p = u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_p$.

Démonstration : Posons $v_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p} \alpha_j u_j$ avec $\alpha_j \in K$.

On a $f(u_1, \dots, u_{i-1}, v_i, u_{i+1}, \dots, u_p) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p} \alpha f(u_1, \dots, u_{i-1}, u_j, u_{i+1}, \dots, u_p) + f(u_1, \dots, u_p)$

$= f(u_1, \dots, u_p)$.

III Le cas des formes n-linéaire alternées de dimension n

Soit E un K-espace vectoriel. Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

But : Déterminer les formes n-linéaire alternées sur E.

Proposition : Soit $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$. Posons $u_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,j} e_i$ avec $\lambda_{i,j} \in K$.
Soit f une forme linéaire alternée sur E.

On a $f(u_1, \dots, u_n) = \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \lambda_{\sigma(1),1} \lambda_{\sigma(2),2} \dots \lambda_{\sigma(n),n}\right) f(e_1, \dots, e_n)$.

Remarques :

1) Pour $n = 1$, on a $f(u_1) = \lambda_{1,1} f(e_1)$;
2) Pour $n = 2$, on a $f(u_1, u_2) = (\lambda_{1,1}\lambda_{2,2} - \lambda_{1,2}\lambda_{2,1}) f(e_1, e_2)$; (cf : Formule pour $\mathcal{A}(u_1, u_2)$)
3) Il y a $n!$ Termes dans la formule, $n!$ Grandit très vite ;
4) La formule de gauche est indépendante de f.
   La formule de droite est indépendante de $(u_1, \dots, u_n)$.

Démonstration :

On a $f(u_1, \dots, u_n) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,1} e_i, \dots, \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,n} e_i\right)$

$= \sum_{\rho:\{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}} \lambda_{\rho(1),1} - \lambda_{\rho(n),n} \cdot \underbrace{f(e_{\rho(1)}, \dots, e_{\rho(n)})}_{= 0 \text{ si } \rho(i) = \rho(j) \text{ pour } i \neq j}$ par développement de n-linéarité

$= \sum_{\rho \text{ injective}} \lambda_{\rho(1),1} - \lambda_{\rho(n),n} \cdot f(e_{\rho(1)}, \dots, e_{\rho(n)})$.

En utilisant $f(e_{\rho(1)}, \dots, e_{\rho(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(e_1, \dots, e_n)$

On obtient : $\sum_{\rho(\mathcal{S}_n)} \varepsilon(\sigma) \lambda_{\rho(1),1} - \lambda_{\rho(n),n} \cdot f(e_n, \dots, e_n)$ (je crois).

On obtient donc la formule cherché.

Théorème :

1) Il existe une unique forme linéaire alternée f_0 sur E telle que $f_0(e_1, \dots e_n) = 1$.
   Elle est donnée par $f_0(u_1, \dots, u_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \lambda_{\sigma(1),1} - \lambda_{\sigma(n),n}$ où $u_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,j} e_i$.
2) Soit f une forme linéaire alternée de E. Il existe un unique $\lambda \in K$ tel que $f = \lambda f_0$.
   En particulier, on a $\lambda = f(e_1, \dots, e_n)$.

Démonstration :

1) Résultante de la proposition ;
2) On utilise la formule de la proposition.
   On a bien $f = f_0 \times f_0(e_1, \dots, e_n)$. Donc λ existe et vaut $f_0(e_1, \dots, e_n)$.

Correction : $f(u_1, \dots, u_n) = f_0(u_1, \dots, u_n)\, f(e_1, \dots, e_n)$.

Avec f_0 l'unique forme linéaire alternée telle que $f_0(e_1, \dots, e_n) = 1$.

$(u_1, \dots, u_n)$ un système de vecteurs.

f une forme n-linéaire alternée.

$(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. (il l'a bien écrit je crois)

IV Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

Définition : Soit E un K-espace vectoriel de dimension n. Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

Déterminant de $(u_1, \dots, u_n)$ dans la base B : Si $\det_B(u_1, \dots, u_n) = f_0(u_1, \dots, u_n)$

où f_0 est l'unique forme n linéaire alternée sur E telle que $f_0(e_1, \dots, e_n) = 1$.

Si on pose $u_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,j} e_i$, c'est $\left|\lambda_{i,j}\right|_{1 \leq i,j \leq n} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_{\sigma(i),i}\right)$.

Proposition : L'application $(u_1, \dots, u_n) \mapsto \det_B(u_1, \dots, u_n)$ est n-linéaire alternée.

En particulier, elle change de signe si on échange u_i et u_j pour $i \neq j$.

On a $\det_B(u_1, \dots, u_n) = 0$ si et seulement si la famille $(u_1, \dots u_n)$ est liée

($\Leftrightarrow$ $(u_1, \dots u_n)$ pas une base de E)

Démonstration : On sait que f_0 est n-linéaire alternée.

- Si $(u_1, \dots, u_n)$ est liée, alors il existe i tel que $u_i = CL\ de\ \{u_j \mid j \neq i\}$.
  Donc, $\det_B(u_1, \dots u_n) = 0$.
- Si $(u_1, \dots, u_n)$ est libre, c'est une base B' de E.
  Il existe $\lambda \in K$ tel que $1 = \det_{B'}(u_1, \dots, u_n) = \lambda \det_B(u_1, \dots u_n) = \lambda f_0$.
  Donc $\det_B(u_1, \dots u_n) \neq 0$.

Théorème : Soient B_1 et B_2 des bases de E.

On a $\det_{B_2}(u_1, \dots, u_n) = \det_{B_2}(B_1) \det_{B_1}(u_1, \dots u_n)$ (pour tout $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$).

Démonstration : Lorsque $(u_1, \dots, u_n)$ varie on a des formes n-linéaire alternées des deux côtés.

Donc, il existe $\lambda \in K$ tel que $\det_{B_2} = \lambda \det_{B_1}$.

Pour déterminer λ, on pose $(u_1, \dots u_n) = B_1$. On a $\det_{B_2}(B_1) = \lambda \det_{B_1}(B_1) = \lambda$.

V Déterminants en dimension 3

Supposons E de dimension 3. Soit $(u_1, u_2, u_3) \in E^3$.

Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Posons $u_j = \sum_{i=1}^{3} \lambda_{i,j}\, e_i$.

On a $\det_B(u_1, u_2, u_3) = \begin{vmatrix} \lambda_{1,1} & \lambda_{1,2} & \lambda_{1,3} \\ \lambda_{2,1} & \lambda_{2,2} & \lambda_{2,3} \\ \lambda_{3,1} & \lambda_{3,2} & \lambda_{3,3} \end{vmatrix} = \lambda_{1,1}\lambda_{2,2}\lambda_{3,3} + \lambda_{1,2}\lambda_{2,3}\lambda_{3,1} + \lambda_{1,3}\lambda_{2,1}\lambda_{3,2}$

(le prof ne sait pas le faire) $-\lambda_{1,1}\lambda_{2,3}\lambda_{3,2} - \lambda_{1,3}\lambda_{2,2}\lambda_{3,1} - \lambda_{1,2}\lambda_{2,1}\lambda_{3,3}$.

Vérification simple avec la règle de Sarrus.

VI Déterminant d'une matrice carrée

Définition : Soit $A \in M_n(K)$.

Déterminant de A : $\det(A) = \det_{\text{Base canonique de } K^n}(\text{vecteurs colonnes})$.

Si $A = (a_{i,j})_{i,j}$, on pose $\det A = |a_{i,j}|_{i,j}$.

Proposition : Si $A = (a_{i,j})_{i,j}$ est triangulaire (en particulier diagonale),

on a $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$ (produit des termes diagonaux).

Démonstration : On a $\det A = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$.

Supposons A triangulaire supérieur, on a $a_{i,j} = 0$ si $i > j$.

Donc, s'il existe i tel que $\sigma(i) < i$, on a $\prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i} = 0$.

On retient que les σ pour σ constante. Mais $\{\sigma \in \mathcal{S}_n \mid \sigma \text{ constante}\} = \{id\}$.

Donc, $\det A = \varepsilon(id) \prod_{i=1}^{n} a_{i,i} = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

Théorème : Soit $A \in M_n(K)$. On a $\det A = \det {}^tA$.

Démonstration : On a $\det {}^tA = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$. (Posons $\rho = \sigma^{-1}$)

$= \sum_{\rho \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\rho^{-1}) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\rho^{-1}(i)}$ (Posons $i = \rho(j)$)

$= \sum_{\rho \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\rho) \prod_{j=1}^{n} a_{\rho(j),j} = \det A$.

VII Déterminant d'un endomorphisme

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie. Soit B une base de E.

Théorème : Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.

Il existe un unique $\lambda \in K$ tel que pour tout $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$,

on a $\det_B(\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_n)) = \lambda \det_B(u_1, \dots, u_n)$.

Alors λ est indépendnat de B. C'est le déterminant de φ, noté $\det \varphi$.

Démonstration : Considérons $\begin{array}{c} E \to E \\ (u_1, \dots, u_n) \mapsto \det_B(\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_n)) \end{array}$ qui est n-linéaire alternée.

Donc il existe un unique $\lambda \in K$ tel que $\det_B(\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_n)) = \lambda \det_B(u_1, \dots, u_n)$.

Soit B' une base de E.

Il existe $\lambda' \in K$ tel que $\det_{B'}(\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_n)) = \lambda' \det_{B'}(u_1, \dots, u_n)$

Par formule de changement de base, on a

$$\underbrace{\det_{B'}(B) \det_B(\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_n))} = \lambda' \det_{B'}(B) \det_B(u_1, \dots u_n).$$

$$= \det_{B'} B \, \lambda \det_B(u_1, \dots, u_n)$$

Donc $\lambda' = \lambda$. Donc λ est indépendant de B.

Théorème : Soient $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{L}(E)$.

On a $\det(\varphi_2 \circ \varphi_1) = \det(\varphi_2) \cdot \det(\varphi_1)$.

Démonstration : Soient $(u_1, \dots u_n) \in E$. Soit B une base de E.

On a $\det_B(\varphi_2 \circ \varphi_1(u_1), \dots, \varphi_2 \circ \varphi_1(u_n)) = \det(\varphi_2) \det(\varphi_1(u_1), \dots \varphi_1(u_n))$

$$= \det(\varphi_2) \det(\varphi_1) \det(u_1, \dots, u_n).$$

Donc, $\det(\varphi_2 \circ \varphi_1) = \det(\varphi_2) \det(\varphi_1)$.

Corollaire : Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ un isomorphisme. On a $\det(\varphi) \neq 0$ et $\det(\varphi^{-1}) = (\det(\varphi))^{-1}$.

Démonstration : On a $1 = \det(id) = \det(\varphi \circ \varphi^{-1}) = \det(\varphi) \det(\varphi^{-1})$.

Corollaire : Soient $A, B \in M_n(K)$. On a :

1) $\det(AB) = \det A \det B$;
2) Si A et B sont semblables, $\det A = \det B$;
3) Si A est inversible $\det A \neq 0$ et $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.

Démonstration : 1) et 3) évident en posant $A = Mat(\varphi_1)$ et $B = Mat(\varphi_2)$.

2) Il existe $P \in GL_n(K)$ tel que $B = PAP^{-1}$.

Donc $\det B = \det PAP^{-1} = \det P \det A \det P^{-1} = \det A$.

VIII Calcul de déterminants

Proposition : Soit $A = (a_{i,j})_{i,j} \in M_n(K)$ avec $a_{i,n} = 0$ si $i < n$. On a donc $A_{n,n} = \begin{pmatrix} & 0 \\ (*) & \vdots \\ & 0 \\ & a_{n,n} \end{pmatrix}$.

Posons $A_{n,n} \in M_{n-1}$ obtenue en privant A de la dernière ligne et dernière colonne.

On a $\det A = a_{n,n} \det(A_{n,n})$.

Démonstration : On a $\det A = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),i}$. On a $a_{\sigma(n),n} = 0$ sauf si $\sigma(n) = n$.

$$= \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{S}_n \\ \sigma(n)=n}} \varepsilon(\sigma) a_{n,n} \prod_{i=1}^{n-1} a_{\sigma(i),i}$$

$$= \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{n-1}} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}\right) a_{n,n} = a_{n,n} \det(A_{n,n}).$$

Vocabulaire : Posons $A_{i,j} \in M_{n-1}(K)$ comme la matrice A privée de sa i^e ligne et de sa j^e colonne.

- Posons $\Delta_{i,j} = \det(A_{i,j})$. C'est le mineur d'indice i, j de A ;
- Posons $(-1)^{i+j}\Delta_{i,j} = \det(A_{i,j})$. C'est le cofacteur d'indice i, j de A ;
- Posons $com(A) = \left((-1)^{i+j}\Delta_{i,j}\right)_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(K)$. C'est la comatrice de A.

Théorème : On a $\det A = (-1)^{i+1}a_{i,1}A_{i,1} + \cdots + (-1)^{i+n}a_{i,n}A_{i,n}$

(développement par rapport à la i^e ligne)

$= (-1)^{j+1}a_{1,j}A_{1,j} + \cdots + (-1)^{j+n}a_{n,j}A_{n,j}$.

Théorème : On a $A\,{}^t com(A) = {}^t com(A) A = \det(A)\, I_n$.

Corollaire : On a A inversible si et seulement si $\det A \neq 0$

Si A est inversible, on a $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,{}^t com(A)$.