

Chapitre 5 : Fonctions de plusieurs variables

Cadre de travail :

- $p, q \in \mathbb{N}^*$
- U ouvert de \mathbb{R}^n
- $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$
- \mathbb{R}^p et \mathbb{R}^q sont des espaces vectoriels qui peuvent être normés, donc des espaces métriques. Ainsi, toutes les propriétés et des notions des espaces métriques s'appliquent.

I Continuité

Rappel : Une suite (X_n) de composante $\begin{pmatrix} x_1^{(n)} \\ x_2^{(n)} \\ \vdots \\ x_p^{(n)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$ tend vers $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$ si et seulement si chacune de ses composantes converge, c'est-à-dire :

$$\forall i \in \{1, \dots, p\}, \quad x_i^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x_i$$

Proposition :

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^q$ et $a \in U$. On écrit $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_q(x))$, $x \in U$.
On a : f est continue en $a \Leftrightarrow \forall i = 1, \dots, q$, $f_i(x)$ est continue en a .

Remarque : $\forall i = 1, \dots, q$, les fonctions $x \mapsto f_i(x)$ sont à valeur dans \mathbb{R} , donc on peut utiliser les résultats de la continuité pour les fonctions à valeur réelle.

Vocabulaire : On appelle les f_i les **fonctions composantes** de f .

Preuve :

On rappelle que f est continue en a ssi par toute suite (x_n) qui converge vers a , la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(a)$.
On a donc $f(x_n) = (f_1(x_n), f_2(x_n), \dots, f_q(x_n)) \rightarrow f(a) = (f_1(a), f_2(a), \dots, f_q(a))$ ssi $\forall i = 1, \dots, q$, $f_i(x_n) \rightarrow f_i(a)$.
Donc f est continue en a ssi $\forall i = 1, \dots, q$, f_i est continue en a .

Pour comprendre la continuité, il suffit de se restreindre aux fonctions $f : U \rightarrow \mathbb{R}$.

Exemple :

1. $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$ et $f(0, 0) = 0$.
On a $U = \mathbb{R}^2$, $p = 2$ et $q = 1$.
Montrons que f est continue.

f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ car c'est un quotient de fonctions continues (polynômes) dont le dénominateur ne s'annule pas.

Montrons que f est continue en $(0, 0)$.

On doit montrer que si $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, alors $f(x, y) \rightarrow 0$.

$$|f(x, y)| = \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| = \frac{x^2 |y|}{x^2 + y^2} \leq \frac{x^2 |y|}{y^2} = |y|.$$

Donc si $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, alors $|y| \rightarrow 0$ et donc $f(x, y) \rightarrow 0$.

Ainsi, f est continue en $(0, 0)$.

Donc f est continue sur \mathbb{R}^2 .

2. $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$.

f peut-elle être continue sur \mathbb{R}^2 ?

Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, f est continue (même raison).

Problème en $(0, 0)$.

Montrons que $f(x, y)$ n'a pas de limite en $(0, 0)$.

Trouvons $(x_n, y_n) \rightarrow (0, 0)$ et $(a_n, b_n) \rightarrow (0, 0)$ tels que $f(x_n, y_n)$ et $f(a_n, b_n)$ aient des limites différentes.

Prenons $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$. On a : $f(x_n, y_n) = \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{(\frac{1}{n})^2 + (\frac{1}{n})^2} = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2}$.

De plus, prenons $(a_n, b_n) = (\frac{2}{n}, \frac{1}{n})$. On a : $f(a_n, b_n) = \frac{\frac{2}{n} \cdot \frac{1}{n}}{(\frac{2}{n})^2 + (\frac{1}{n})^2} = \frac{\frac{2}{n^2}}{\frac{4}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \frac{2}{5}$.

Ainsi, $f(x_n, y_n) \rightarrow \frac{1}{2}$ et $f(a_n, b_n) \rightarrow \frac{2}{5}$.

Donc f n'a pas de limite en $(0, 0)$ et donc f n'est pas continue en $(0, 0)$. Ainsi, f n'est pas continue sur \mathbb{R}^2 .

II Vers une bonne notion de dérivée pour les fonctions à plusieurs variables

Introduction : Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ où $]a, b[\subset \mathbb{R}$. On dit que f est dérivable en $x \in]a, b[$ si il existe un réel $f'(x)$ tel que :

$$f(x + h) = f(x) + hf'(x) + o(h)$$

Ce qui équivaut à : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ existe.

Si f est dérivable en x alors on sait que f est continue en x .

$|f(x + h) - f(x)| \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$.

A Rappels : fonctions à valeurs dans \mathbb{R}^q , $q \geq 1$

Soit $f : x \mapsto (f_1(x), f_2(x), \dots, f_q(x))$ (fonction coordonnées)

Définition : On dit que f est dérivable en $x \in]a, b[$ si $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x+h)}{h}$ existe. (avec $\frac{f(x) - f(x+h)}{h} \in \mathbb{R}^q$).
i.e. $\exists L \in \mathbb{R}^q$ tel que $\|\frac{f(x) - f(x+h)}{h} - L\| \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$ où $\|\cdot\|$ est une norme \mathbb{R}^q (elles sont équivalentes).

Proposition : Dérivabilité

f est dérivable en $x \Leftrightarrow \forall i = 1, \dots, q$, f_i est dérivable en x et on a : $f'(x) = (f'_1(x), f'_2(x), \dots, f'_q(x))$.
Autrement dit, f est dérivable en x si et seulement si chacune de ses composantes est dérivable en x .

Preuve :

\Rightarrow / Supposons f dérivable en x .

$\exists L = (L_1, L_2, \dots, L_q) \in \mathbb{R}^q$ tel que $\|\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - L\| \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$.

On a le choix de $\|\cdot\|$ car les normes sont toutes équivalentes (en dimension finie). Prenons la norme infinie.

Alors $\forall i \in \{1, \dots, q\}$, $|\frac{f_i(x+h) - f_i(x)}{h} - L_i| \leq \|\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - L\|_{+\infty} \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$.

Ainsi, $\forall i \in \{1, \dots, q\}$, f_i est dérivable en x et $f'_i(x) = L_i$.

Et donc $f'(x) = (f'_1(x), f'_2(x), \dots, f'_q(x))$.

\Leftarrow / Supposons que $\forall i = 1, \dots, q$, f_i est dérivable en x .

Donc $\forall i \in \{1, \dots, q\}$, $\frac{f_i(x+h) - f_i(x)}{h} \rightarrow f'_i(x)$ quand $h \rightarrow 0$.

Montrons que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ existe.

Posons $L = (f'_1(x), f'_2(x), \dots, f'_q(x)) \in \mathbb{R}^q$.

On veut $\|\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - L\| \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$.

Prenons $\|\cdot\|_1$ la norme 1.

On a :

$$\left\| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - L \right\|_1 = \sum_{i=1}^q \left| \frac{f_i(x+h) - f_i(x)}{h} - L_i \right|$$

On a une somme finie donc chaque terme (par hypothèse) tend vers 0 quand $h \rightarrow 0$.

En passant à la limite on obtient : $\|\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - L\|_1 \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$.

Donc f est dérivable en x et $f'(x) = L = (f'_1(x), f'_2(x), \dots, f'_q(x))$.

B Dérivées partielles

Soit $U \subset \mathbb{R}^p$ ouvert et $p \in \mathbb{N}^*$. On considère $f : U \rightarrow \mathbb{R}^q$.

Remarque : Penser à une fonction f définie de $U = \mathbb{R}^2$ dans \mathbb{R} , donc $p = 2$ et $q = 1$. (tous les problèmes se posent déjà dans ce cas)

On veut définir la notion de dérivées partielles en un point $a = (a_1, a_2, \dots, a_p) \in U$.

Il y a p dérivées partielles (car p variables). Prenons $k \in \{1, \dots, p\}$ et définissons la k -ième dérivée partielle de f en $a = (a_1, a_2, \dots, a_p)$.

Considérons la k -ième fonction partielle d'une variable réelle $g_k : x_k \mapsto f(a_1, \dots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \dots, a_p)$.

Les points $a_1, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_p$ sont fixés dans \mathbb{R} et x_k varie dans un voisinage de a_k .

On dit que f admet une k -ième dérivée partielle en a si g_k est dérivable en a_k et on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = g'_k(a_k)$$

Exemple : Soit $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$.

Prenons $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = 2a_1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a) = 2a_2$$

On utilise plutôt les notations suivantes :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y$$

Attention Avant de calculer une dérivée partielle en un point, il faut justifier qu'elles existent (i.e. que les fonctions partielles sont dérivables en les points correspondants).

Exemple : (suite) Ici, il faut dire :

$\forall y$ fixé dans \mathbb{R} , la fonction $x \mapsto f(x, y) = x^2 + y^2$ avec y constant est dérivable en tout $x \in \mathbb{R}$ (c'est un polynôme).

Donc $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ existe pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

De même, $\forall x$ fixé dans \mathbb{R} , la fonction $y \mapsto f(x, y) = x^2 + y^2$ avec x constant est dérivable en tout $y \in \mathbb{R}$. Donc

$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ existe pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Remarque : f admet une k -ième dérivée partielle en $a \Leftrightarrow$ la fonction $t \mapsto f(a + te_k)$ (où e_k est le k -ième vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^p) est dérivable en 0.

Définition : On dit que f admet des dérivées partielles en a si $\forall k \in \{1, \dots, p\}$, $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$ existe. (i.e. toutes les dérivées partielles existent en a)

Attention Problème : Malheureusement, ce n'est pas parce que f admet des dérivées partielles en a que f est continue en a . (d'où le fait de chercher une meilleure notion de dérivabilité)

Contre-Exemple : Soit $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.

On a $U \subset \mathbb{R}^2$ ouvert, $p = 2$ et $q = 1$.

Montrons que f admet des dérivées partielles sur \mathbb{R}^2 mais que f n'est pas continue en $(0, 0)$.

Montrons que $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ existe pour tout y .

Fixons $y \in \mathbb{R}$.

Considérons $x \mapsto f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ est dérivée en tout $x \in \mathbb{R}$.

Ainsi $\forall y \in \mathbb{R} \ x \mapsto f(x, y)$ est dérivable en tout $x \in \mathbb{R}$. Donc $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ existe pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

De même, par symétrie on montre que $y \mapsto f(x, y)$ est dérivable en tout $y \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
 Ainsi f admet des dérivées partielles en tout point de \mathbb{R}^2 .
 En particulier, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ existent.
 Pourtant, on a vu que f n'est pas continue en $(0, 0)$.

Transition : On peut voir le problème de continuité en $(0, 0)$ comme le fait que $f(x, x) = \frac{1}{2}$ qui ne tend pas vers 0 quand $x \rightarrow 0$.

En fait, on regarde la trajectoire $t \mapsto (t, t)$ qui n'est pas alignée avec les axes.

Une notion plus forte que la dérivée partielle est la dérivée directionnelle.

C Dérivées directionnelles

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^q$ où $U \subset \mathbb{R}^p$ ouvert.

Soit $a \in U$ et soit h un vecteur de \mathbb{R}^p .

Considérons la fonction d'une variable réelle $\varphi : t \mapsto f(a + th)$ où t varie dans un voisinage de 0 tel que $a + th \in U$.

Définition : On dit que f admet une dérivée directionnelle en a selon la direction h si φ est dérivable en 0.
 On a :

$$\varphi'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + th) - f(a)}{t}$$


Proposition : Lien avec la dérivée partielle

Si on choisit comme direction $h = e_k$ (le k -ième vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^p), alors la dérivée directionnelle de f en a selon la direction e_k est la k -ième dérivée partielle de f en a .

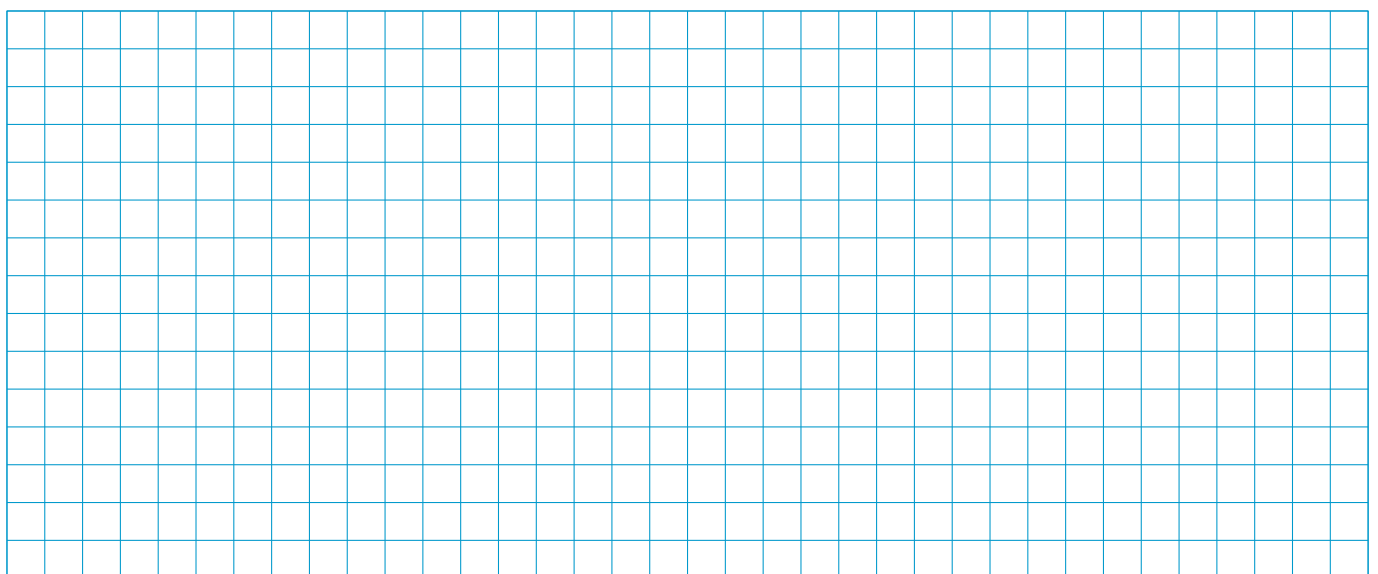
Preuve :

On a $\varphi(t) = f(a + te_k) = f(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k + t, a_{k+1}, \dots, a_p)$.


Donc φ est dérivable en 0 ssi la fonction $x_k \mapsto f(a_1, \dots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \dots, a_p)$ est dérivable en a_k .

Ainsi, la dérivée directionnelle de f en a selon la direction e_k est égale à la k -ième dérivée partielle de f en a . 

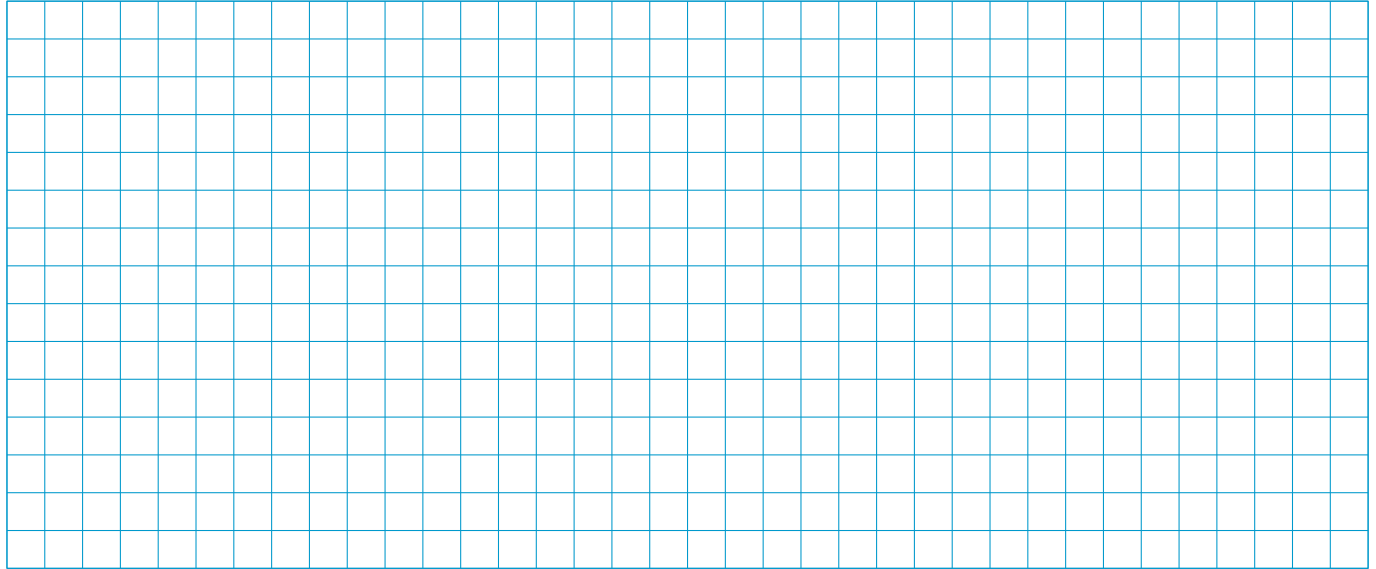
Application : Étudier la dérivée directionnelle en toutes les directions au point $(0, 0)$ de la fonction $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.



✗ **Attention** ✗ Cette notion de dérivée directionnelle est encore trop faible pour garantir la continuité de f en a .

 **Application :** Considérer $f(x, y) = \frac{y^2}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(x, y) = y$ sinon.

1. Montrer que f admet des dérivées directionnelles en tout point de \mathbb{R}^2 et en toute direction.
2. Montrer que f n'est pas continue sur \mathbb{R}^2 . *Indication : Considérer le point $(0, 1)$ et $(\frac{1}{n}, 1) \rightarrow (0, 1)$.*




D Dérivées différentielles (cette fois-ci c'est la bonne !)

La dérivée différentielle est la notion qui assure que si une fonction est différentiable en un point, alors elle est continue en ce point. Soit $f: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ et $a \in U$, où $U \subset \mathbb{R}^p$ est ouvert.

Définition : On dit que f est différentiable en $a \Leftrightarrow \exists Df(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ telle que :

$$f(a + h) = f(a) + Df(a) \cdot h + o(\|h\|) \quad \text{quand } h \rightarrow 0$$

avec $\forall h \in \mathbb{R}^p, f(a) \in \mathbb{R}^q, Df(a) \cdot h \in \mathbb{R}^q$, et $o(\|h\|) = \|h\|\varepsilon(h)$ où $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ quand $\|h\| \rightarrow 0$.

 **Exemple :** $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f$ dérivable en $a \in \mathbb{R}$.

$Df(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Dans le cas d'une fonction d'une variable réelle, $Df(a): h \mapsto f'(a)h$. (c'est une multiplication par un scalaire)

 **Exemple :** Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$.

$\forall a \in \mathbb{R}^p, \forall h \in \mathbb{R}^q, f(a + h) = f(a) + f(h)$.

Ainsi, la différentielle de f en a est : $\forall h \in \mathbb{R}^p, Df(a) \cdot h = f(h)$.

Autrement dit, $Df(a) = f$, et la différentielle est indépendante de a .

Proposition : Différentiabilité implique continuité

Si f est différentiable en a , alors f est continue en a .

Preuve :

$\forall h \in \mathbb{R}^p, f(a + h) = f(a) + Df(a) \cdot h + o(\|h\|)$.

On a : $\|f(a + h) - f(a)\| \leq \|Df(a) \cdot h\| + \|o(\|h\|)\|$. (car $\|\cdot\|$ est une norme)

$= \|Df(a) \cdot h\| + \|h\|\varepsilon_a(h)$.

$\leq C_a\|h\| + \|h\|\varepsilon_a(h)$ où C_a est une constante telle que $\|Df(a) \cdot h\| \leq C_a\|h\|$ (par continuité automatique des applications linéaires en dimension finie).

Or $\|h\|\varepsilon_a(h) \rightarrow 0$ quand $\|h\| \rightarrow 0$.

Donc $\|f(a+h) - f(a)\| \rightarrow 0$ quand $\|h\| \rightarrow 0$.

Ainsi, f est continue en a .

Proposition : Lien avec les dérivées directionnelles

Si f est différentiable en a , alors f admet des dérivées directionnelles en a selon toutes les directions et on a :

$$\forall h \in \mathbb{R}^p, \quad \text{la dérivée directionnelle de } f \text{ en } a \text{ selon la direction } h \text{ est } Df(a) \cdot h$$

Preuve :

On a $\forall t \in \mathbb{R}, \forall h \in \mathbb{R}^p, f(a+th) = f(a) + Df(a) \cdot (th) + \|th\| \varepsilon_a(th)$. (car f est différentiable en a)
 $= f(a) + t(Df(a) \cdot h) + |t|\|h\|\varepsilon_a(th)$.

On veut montrer que $t \mapsto f(a+th)$ est dérivable en 0.

Par ce qui précède, on a :

$$f(a+h) - f(a) = t(Df(a) \cdot h) + |t|\|h\|\varepsilon_a(th).$$

$$\Rightarrow \frac{f(a+th)-f(a)}{t} = Df(a) \cdot h + \frac{|t|}{t}\|h\|\varepsilon_a(th).$$

En passant à la limite quand $t \rightarrow 0$, on obtient : $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+th)-f(a)}{t} = Df(a) \cdot h$.

Donc $t \mapsto f(a+th)$ est dérivable en 0 et sa dérivée en 0 est $Df(a) \cdot h$.

Ainsi, f admet une dérivée directionnelle en a selon la direction h .

Remarque : Il existe des fonctions qui admettent des dérivées directionnelles en un point selon toutes les directions mais qui ne sont pas différentiables en ce point.

Contre-Exemple : Considérons $\|\cdot\|: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ une norme quelconque. C'est une fonction à plusieurs variables. Montrons que $\|\cdot\|$ n'est pas différentiable en a (si elle l'était, par la proposition précédente, elle serait dérivable dans toutes les directions en a).

$$\text{On a } \forall t \in \mathbb{R}, \forall h \in \mathbb{R}^p, \|th\| = |t|\|h\|.$$

$$\text{On a } \frac{\|0+th\|-\|0\|}{t} = \frac{\|th\|}{t} = \frac{|t|}{t}\|h\|.$$

En passant à la limite quand $t \rightarrow 0$, on constate que la limite n'existe pas (car $\frac{|t|}{t}$ n'a pas de limite quand $t \rightarrow 0$).

Ainsi, $\|\cdot\|$ n'admet pas de dérivée directionnelle en 0 selon la direction h .

Donc $\|\cdot\|$ n'est pas différentiable en 0.