

# Chapitre 1 : Suites de Cauchy

## I Rappels sur les suites

### A Définitions générales

On ne rappellera que ce qui n'est pas "évident" dans le cours de L1.

**Définition :** Une sous-suite (ou suite extraite) d'une suite  $(u_n)$  est une suite  $(v_n) : \exists \varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , strictement croissante tq  $v_n = u_{\varphi(n)}$

**Vocabulaire :** Une sous-suite de  $(u_n)$  est aussi notée  $(u_{n_k})$ .

**Définition :** Une suite  $(u_n)$  converge vers  $l \in \mathbb{R}$  si :  $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\varepsilon, |u_n - l| < \varepsilon$

**Vocabulaire :** Si elle ne converge pas on dit qu'elle diverge.

Attention : une suite peut diverger mais avoir une limite (une suite qui tend vers l'infini).

**Propriété : Bornes (admise)**

Si une suite  $(u_n)$  converge, alors elle est bornée :  $\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$ .

**Propriété : Convergence des sous-suites (admise)**

Si une suite  $(u_n)$  converge vers  $l$ , alors toute sous-suite  $(u_{n_k})$  converge aussi vers  $l$ .

### B Propriétés et théorèmes fondamentaux

**Propriété : Espace-vectoriel (admise)**

L'ensemble des suites réelles convergentes est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

**Théorème : Suites adjacentes (admis)**

Deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont dites adjacentes si :

- $(u_n)$  est croissante et  $(v_n)$  est décroissante
- $u_n \leq v_n, \forall n \in \mathbb{N}$
- $v_n - u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$

Si deux suites sont adjacentes, alors elles convergent vers la même limite.

**Théorème : Bolzano-Weierstrass (admis)**

Toute suite réelle bornée admet une sous-suite convergente.

## II Suites de Cauchy

**Définition :** Une suite  $(u_n)$  est une suite de Cauchy si :  $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N_\varepsilon, |u_p - u_q| < \varepsilon$

**Définition : autre formulation utile**

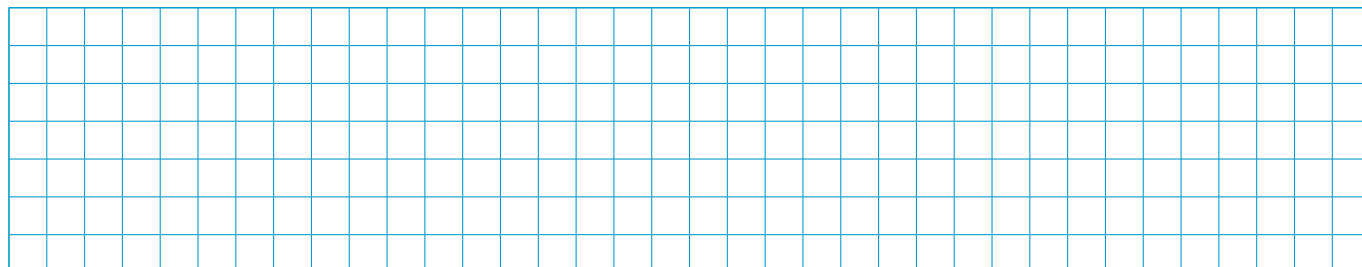
Soit  $(u_n)$  une suite à valeur dans  $(K, |\cdot|)$ .

$(u_n)$  est une suite de Cauchy si :  $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}, |u_{n+p} - u_n| < \varepsilon$

**Propriété : Convergence**

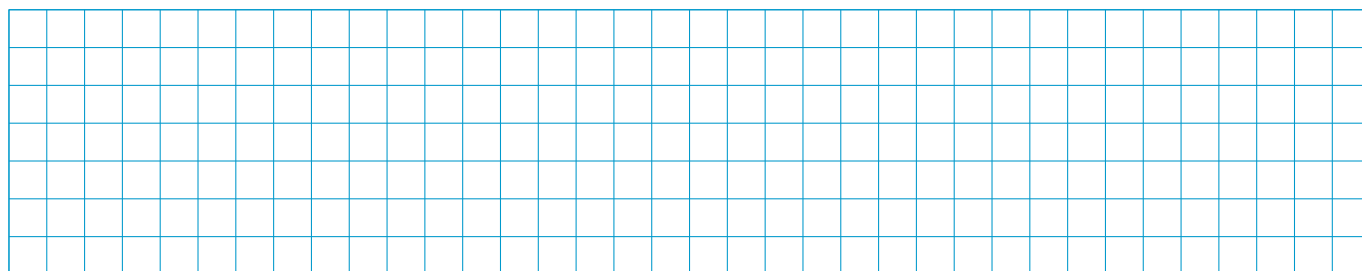
Toute suite convergente est une suite de Cauchy.

**Preuve:**

**Proposition : Bornes**

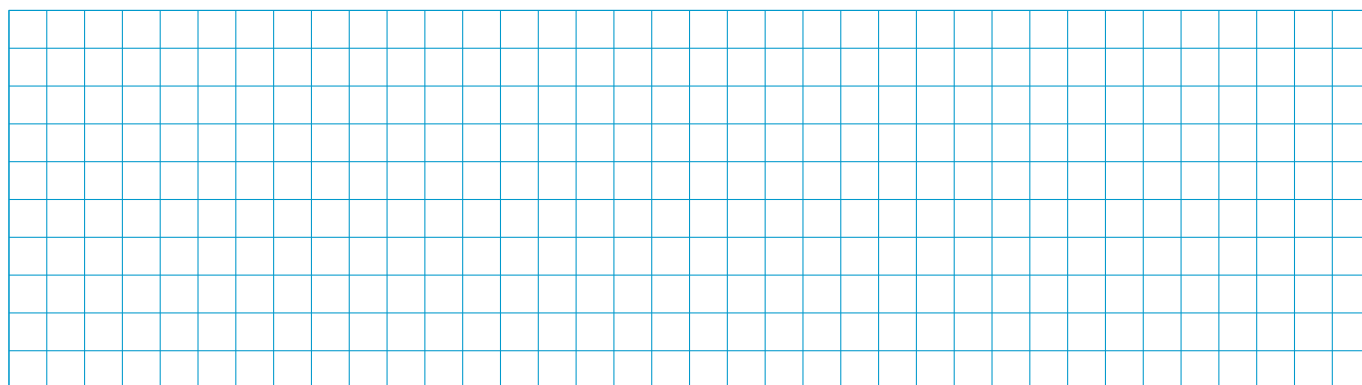
Toute suite de Cauchy est bornée.

**Preuve:**

**Théorème :**

Toute suite de Cauchy dans  $\mathbb{R}$  converge dans  $\mathbb{R}$ .

**Preuve:**



**Remarque :** On dit que  $\mathbb{R}$  est complet.

**Définition :** On dit que  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$  est complet.

**Exemple :** Notion de complétude

$(\mathbb{Q}, |\cdot|)$  n'est pas complet : la suite définie par  $u_n =$  la partie décimale de  $\sqrt{2}$  à la  $n$ -ième décimale est une suite de Cauchy dans  $\mathbb{Q}$  qui ne converge pas dans  $\mathbb{Q}$  (car  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ).  
Par contre, elle converge dans  $\mathbb{R}$ .

### III Topologie de $\mathbb{R}$

#### A Rappels

##### a) Ouvert

**Définition :** Soit  $x \in \mathbb{R}$  et  $V \subset \mathbb{R}$ . On dit que  $V$  est un voisinage de  $x$  si :  $\exists \varepsilon > 0, ]x - \varepsilon, x + \varepsilon[ \subset V$

**Définition :**  $U \subset \mathbb{R}$  est un ouvert de  $\mathbb{R}$  si :  $\forall x \in U, U$  est un voisinage de  $x$

##### 💡 Exemple :

- $\mathbb{R}$  est un ouvert de  $\mathbb{R}$ .
- $]a, b[$  est un ouvert de  $\mathbb{R}$
- $]a, +\infty[$  est un ouvert de  $\mathbb{R}$
- $] - \infty, a[$  est un ouvert de  $\mathbb{R}$
- L'ensemble vide est un ouvert de  $\mathbb{R}$ .

##### Propriété : Opérations sur les ouverts (admise)

- L'intersection finie d'ouverts est un ouvert.
- L'union quelconque d'ouverts est un ouvert.

**❗ Remarque :** L'intersection infinie d'ouverts n'est pas forcément un ouvert :  $\bigcap_{n=1}^{\infty} ]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[ = \{0\}$  qui n'est pas un ouvert de  $\mathbb{R}$ .

Toutefois, pour un  $n_{max}$  donné l'intersection de  $n_{max}$  ouverts est un ouvert.

##### b) Fermé

**Définition :**  $F \subset \mathbb{R}$  est un fermé de  $\mathbb{R}$  si :  $\mathbb{R} \setminus F$  est un ouvert de  $\mathbb{R}$

##### 💡 Exemple :

- $\mathbb{R}$  est un fermé de  $\mathbb{R}$ .
- $[a, b]$  est un fermé de  $\mathbb{R}$
- Toute famille finie d'éléments de  $\mathbb{R}$  est un fermé de  $\mathbb{R}$ .
- L'ensemble vide est un fermé de  $\mathbb{R}$ .

**❗ Remarque :**  $\mathbb{Q}$  n'est ni ouvert ni fermé dans  $\mathbb{R}$ .

**Propriété : Opérations sur les fermés** (*admise*)

- L'union finie de fermés est un fermé.
- L'intersection quelconque de fermés est un fermé.

**Théorème : Caractérisation séquentielle des fermés**

$F \subset \mathbb{R}$  fermé  $\Leftrightarrow$  toute suite  $(u_n)$  d'éléments de  $F$  qui converge dans  $\mathbb{R}$  a sa limite dans  $F$ .

**Preuve:**

$\Rightarrow$  / Supposons  $F$  fermé, on a  $\mathbb{R} \setminus F$  ouvert.

Par l'absurde, on suppose qu'il existe une suite  $(u_n)$  d'éléments de  $F$  qui converge vers  $l \in \mathbb{R} \setminus F$ .

Comme  $\mathbb{R} \setminus F$  est un ouvert,  $\exists \varepsilon > 0, ]l - \varepsilon, l + \varepsilon[ \subset \mathbb{R} \setminus F$ .

Par convergence de  $(u_n)$ ,  $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\varepsilon, |u_n - l| < \varepsilon \Rightarrow u_n \in ]l - \varepsilon, l + \varepsilon[ \subset \mathbb{R} \setminus F$  ce qui est absurde car  $(u_n)$  est une suite d'éléments de  $F$ .

$\Leftarrow$  / On raisonne par contraposée.

Si  $\mathbb{R} \setminus F$  n'est pas un ouvert,  $\exists l \in \mathbb{R} \setminus F$  tel que  $\forall r > 0, ]l - r, l + r[ \cap F \neq \emptyset$  car  $\mathbb{R} \setminus F$  est au voisinage de  $l$ .

Supposons qu'il existe une suite  $(u_n)$  d'éléments de  $F$ .

En particulier,  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in ]l - \frac{1}{n}, l + \frac{1}{n}[ \cap F \Rightarrow u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l$  et  $(u_n) \in F$ .

**Remarque :** Ce théorème est utile pour montrer qu'on a un ensemble fermé.

**Définition :** Soit  $A \subset \mathbb{R}$ .

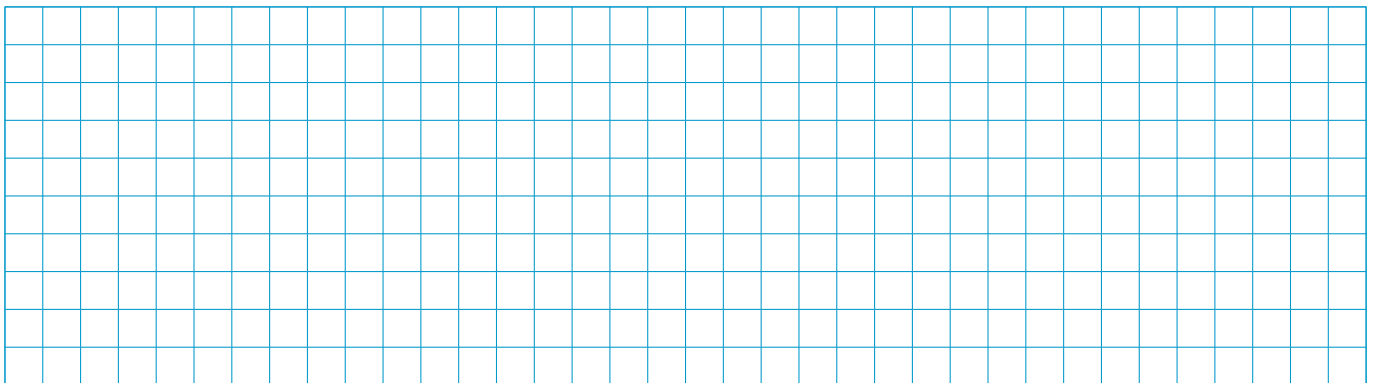
On définit l'adhérence de  $A$ , notée  $\overline{A}$ , comme suit :  $\overline{A} = \bigcap_{F \text{ fermé}, A \subset F} F$ .

C'est le plus petit fermé contenant  $A$ .

**Lemme :**

Soit  $A \subset \mathbb{R}$ .

$x \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, ]x - \varepsilon, x + \varepsilon[ \cap A \neq \emptyset$ .

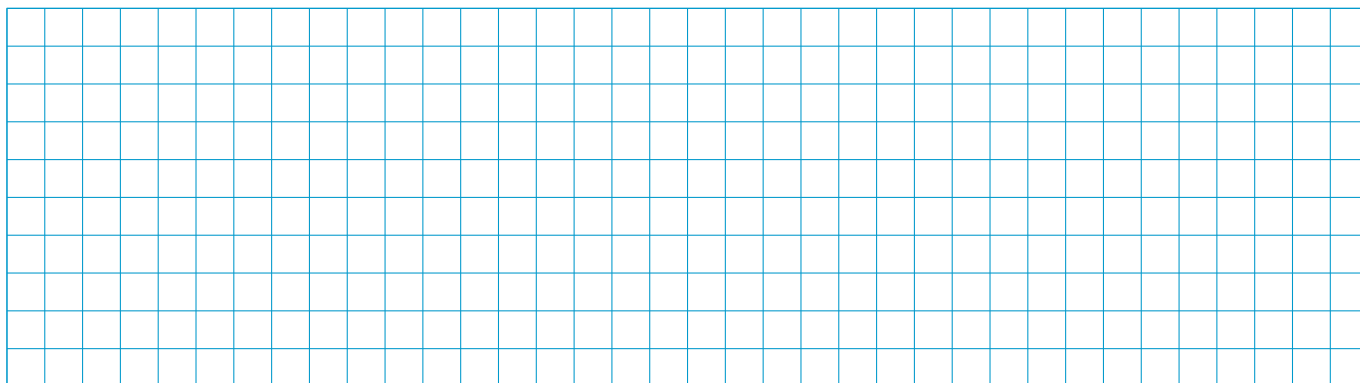
**Preuve:****Théorème :**

Soit  $A \subset \mathbb{R}$ .

Alors  $\overline{A} = \{x \in \mathbb{R}, \exists (u_n) \text{ suite d'éléments de } A, u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x\}$ .

**Remarque :** Autrement dit, l'adhérence de  $A$  est l'ensemble des limites de suites d'éléments de  $A$ .

**Preuve:**



## B Complétude

**Définition :**  $F \subset \mathbb{R}$  est complet si toute suite de Cauchy d'éléments de  $F$  converge dans  $F$ .

💡 **Exemple :**  $\mathbb{R}$  est complet.

**Théorème : Caractérisation des parties complètes de  $\mathbb{R}$**

$F \subset \mathbb{R}$  est complet  $\Leftrightarrow F$  est fermé.

**Preuve:**

