

Chapitre 4 : Topologie des espaces métriques et des espaces vectoriels normés

I Distances et normes

Soit X un ensemble quelconque (dans la suite supposé non nul).

Définition : Une distance d sur X est une application $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ qui vérifie les axiomes suivants :

1. $\forall (x, y) \in X^2, d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie)
2. $\forall x, y, z \in X, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire)
3. $\forall (x, y) \in X^2, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (séparation)

Vocabulaire : On appelle **espace métrique** un couple (X, d) où X est un ensemble et d une distance sur X .

Exemple :

- \mathbb{R} muni de la distance $d(x, y) = |x - y|$, où $|\cdot|$ est la valeur absolue.
- \mathbb{C} muni de la distance $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$, où $|\cdot|$ est le module.
- Une autre façon de voir l'exemple 2, on considère l'ensemble \mathbb{R}^2 muni de la distance suivante :
Si $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$ sont deux points de \mathbb{R}^2 , on définit la distance $d(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$.
On appelle cette distance la **distance euclidienne** sur \mathbb{R}^2 .
- Prenons $X =$ cercle unité muni de la distance $d(A, B) = \arccos(\cos(\theta_2 - \theta_1))$ où θ_1 et θ_2 sont les arguments des points A et B respectivement. (voir schéma OneNote)

Remarque : On peut voir l'exemple 1 comme un cas particulier de l'exemple 2, en identifiant \mathbb{R} à l'axe des réels dans le plan complexe.

Remarque : On peut généraliser l'exemple 3 à \mathbb{R}^n muni de la distance euclidienne définie par :

$$d(A, B) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_{A_i} - x_{B_i})^2}$$

où $A = (x_{A_1}, x_{A_2}, \dots, x_{A_n})$ et $B = (x_{B_1}, x_{B_2}, \dots, x_{B_n})$ sont deux points de \mathbb{R}^n .

Il se trouve que les exemples 1, 2 et 3 proviennent d'espaces vectoriels normés, qu'on verra (très) rapidement.

Proposition : Inégalités triangulaires

Soit (X, d) un espace métrique.

On a :

1. $\forall (x, y, z) \in X^3, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire)
2. $\forall (x, y, z) \in X^3, |d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z)$ (inégalité triangulaire généralisée)

Preuve :

1. C'est l'axiome 2 de la définition d'une distance.
2. On a $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ d'après l'inégalité triangulaire.
Donc $d(x, y) - d(x, z) \leq d(z, y) = d(y, z)$.
De plus, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ d'après l'inégalité triangulaire.
Donc $d(x, z) - d(x, y) \leq d(y, z)$.
En combinant les deux, on obtient $|d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z)$.

Construction d'espaces métriques : Restriction (*admis*)

On part de (X, d) un espace métrique.

Soit $Y \subset X$. Alors $(Y, d|_{Y \times Y})$ est un espace métrique.

Vocabulaire : On dit que $d|_{Y \times Y}$ est la **distance sur Y induite** par la distance sur X .

Remarque : Ainsi, tout sous-ensemble d'un espace métrique est muni d'une "structure d'espace métrique" induite : c'est la distance induite.

Exemple : $(X, d_X) = (\mathbb{C}, |\cdot|)$ un espace métrique. Alors pour $Y = \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, d_Y n'est autre que la distance usuelle sur \mathbb{R} .

Idem pour \mathbb{Q} .

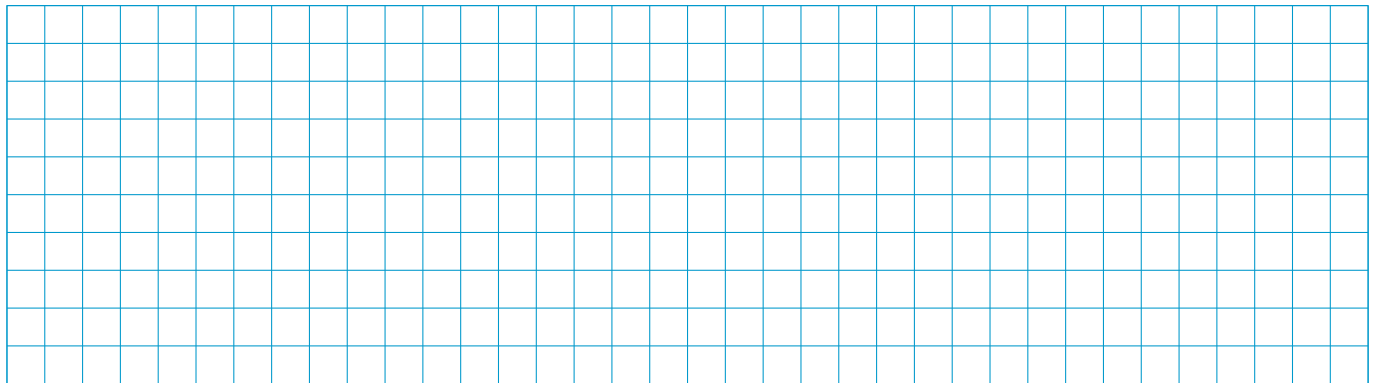
Construction d'espaces métriques : Bijection (*admis*)

Soient (X, d_X) et Y un ensemble quelconque et $f : Y \rightarrow X$ bijective.

Alors (Y, d_Y) est un espace métrique, où $d_Y(y_1, y_2) = d_X(f(y_1), f(y_2))$ pour tout $y_1, y_2 \in Y$.

Autrement dit, $d_Y : \overset{Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}_+}{(y_1, y_2) \mapsto d_X(f(y_1), f(y_2))}$.

Application : Démontrer le théorème ci-dessus. (*vérifier que d_Y satisfait bien les axiomes d'une distance.*)



A Espaces vectoriels normés

On a plus un ensemble X quelconque mais on considère E un \mathbb{K} -espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}). (a priori pas de dimension finie)

1 Définitions

Définition : Une norme N sur E est une application $N : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ souvent notée $\|\cdot\|$ qui vérifie les axiomes suivants :

1. $\forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \|\lambda u\| = |\lambda| \cdot \|u\|$ (homogénéité)
2. $\forall (u, v) \in E^2, \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (inégalité triangulaire)
3. $\forall u \in E, \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0_E$ (séparation)

Vocabulaire : On dit que le couple $(E, N) = (E, \|\cdot\|)$ est un **espace vectoriel normé**. Il est commun d'écrire *e.v.n.*.

Remarque : $\forall x \in E, N(-x) = N(x)$ d'après l'axiome 1.

Théorème : Association norme-distance

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

Alors c'est en particulier un espace métrique pour la distance définie par $d_N(u, v) = \|v - u\|$.

Preuve : Il suffit de vérifier les axiomes d'une distance.

1. Symétrie : $d_N(u, v) = \|v - u\| = \|(u - v)\| = \|u - v\| = d_N(v, u)$.
2. Inégalité triangulaire : $d_N(u, w) = \|w - u\| = \|(w - v) + (v - u)\| \leq \|w - v\| + \|v - u\| = d_N(u, v) + d_N(v, w)$.
3. Séparation : $d_N(u, v) = 0 \Leftrightarrow \|v - u\| = 0 \Leftrightarrow v - u = 0_E \Leftrightarrow u = v$.

Remarque : Hors programme : espaces euclidiens \subset espaces vectoriels normés \subset espaces métriques.

Exemple : En fait, les exemples 1, 2 et 3 dans "Espaces métriques" sont des evn : $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ et $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ où $\|(x_1, \dots, x_n)\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \|\cdot\|_{\text{euclidienne}}$.

Application : Définissons $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto \|X\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)$.

Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur \mathbb{R}^n .

Observation : $\|X\|_\infty = |x_{i_0}|$ où $i_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$ réalise le maximum.

Homogénéité : $\forall i \in \{1, \dots, n\}, |x_i| \leq |x_{i_0}|$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}, |\lambda| \cdot |x_i| \leq |\lambda| \cdot |x_{i_0}| \forall i \in \{1, \dots, n\}$

D'où $\forall \lambda \in \mathbb{R}, |\lambda x_i| \leq |\lambda| \cdot |x_{i_0}| \forall i \in \{1, \dots, n\}$

Or $\lambda X = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$, i_0 réalise le maximum de $(|\lambda x_1|, \dots, |\lambda x_n|)$

Donc $\|\lambda X\|_\infty = |\lambda| \cdot |x_{i_0}| = |\lambda| \cdot \|X\|_\infty$.

Inégalité triangulaire : Soient $X = (x_1, \dots, x_n)$ et $Y = (y_1, \dots, y_n)$ dans \mathbb{R}^n .

$\|X + Y\|_\infty = \max(|x_1 + y_1|, \dots, |x_n + y_n|)$.

On a $\forall i \in \{1, \dots, n\}, |x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i| \leq \|X\|_\infty + \|Y\|_\infty$.

En prenant le \max sur i , on obtient $\|X + Y\|_\infty \leq \|X\|_\infty + \|Y\|_\infty$.

Séparation : Soit $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

$\|X\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \max(|x_1|, \dots, |x_n|) = 0$.

Or $\forall k \in \{1, \dots, n\}, |x_k| \leq \max(|x_1|, \dots, |x_n|) = 0 \Rightarrow x_k = 0 \Rightarrow X = 0_{\mathbb{R}^n}$.

Application :

1. Montrer que $\|\cdot\|_1 : X \mapsto \sum_{i=1}^n |x_i|$ est une norme sur \mathbb{R}^n .
2. **Plus difficile.** Plus généralement, montrer que pour $p \in \mathbb{R}_+$, $\|\cdot\|_p : X \mapsto (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p}$ est une norme sur \mathbb{R}^n .

Exemple : Exemples de normes sur des espaces de dimension infinie :

- Considérons $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} . On définit la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$ pour $f \in E$. En effet,

Homogénéité : Soit $f \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On a $\|\lambda f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |\lambda f(x)| = |\lambda| \cdot \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| = |\lambda| \cdot \|f\|_\infty$.

Inégalité triangulaire : Soient $f, g \in E$.

On a $\|f + g\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) + g(x)|$.

Or $\forall x \in [0, 1], |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

En prenant le supremum sur x , on obtient $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

Séparation : Soit $f \in E$.

On a $\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| = 0$.

Or $\forall x \in [0, 1], |f(x)| \leq \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| = 0 \Rightarrow f(x) = 0$ pour tout x dans $[0, 1] \Rightarrow f = 0_E$.

- Considérons $E = \{f : I \rightarrow \mathbb{R}, f \in \mathcal{C}^0(I) \mid \int_I |f|(t)dt \text{ converge}\} = L_1$ où I est un intervalle de \mathbb{R} . On définit la norme $\|f\|_1 = \int_I |f(t)|dt$ pour $f \in E$.

✗ **Attention** ✗ $\|f\|_\infty$ existe car $\sup |f(t)| < +\infty$ pour f continue sur le compact $[0, 1]$.

💡 **Contre-Exemple** : $f \in \mathcal{C}^0(]0, 1[, \mathbb{R})$ définie par $f(x) = \frac{1}{x}$. Alors $\|f\|_\infty$ n'existe pas car $\sup_{x \in]0, 1[} |f(x)| = +\infty$.

2 Propriétés

Propriété : Vecteurs unitaires (admise)

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel non nul, soit $x \in E \setminus \{0_E\}$ et soit N une norme sur E .

Alors $\frac{x}{N(x)}$ est un vecteur unitaire (ou vecteur normé), c'est-à-dire $N\left(\frac{x}{N(x)}\right) = 1$. (existe car $N(x) \neq 0$ par séparation)

Propriété : (admise)

Soit (E, N) un espace vectoriel normé.

Alors $\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n, \forall (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, on a :

$$N\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \cdot N(x_i)$$

Propriété : Inégalité triangulaire renversée

Soit (E, N) un espace vectoriel normé.

1. $\forall (x, y) \in E^2, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$
2. $\forall (x, y) \in E^2, |N(x) - N(y)| \leq N(x - y)$

Preuve :

1. C'est l'axiome 2 de la définition d'une norme.
2. On a $N(x) = N((x - y) + y) \leq N(x - y) + N(y)$ d'après l'inégalité triangulaire.
Donc $N(x) - N(y) \leq N(x - y)$.
De plus, $N(y) = N((y - x) + x) \leq N(y - x) + N(x)$ d'après l'inégalité triangulaire.
Donc $N(y) - N(x) \leq N(y - x) = N(x - y)$.
En combinant les deux, on obtient $|N(x) - N(y)| \leq N(x - y)$.

II Topologie sur les espaces métriques

A Ouverts et fermés

💡 **Remarque** : Un evn étant un espace métrique avec la distance $d(x, y) = N(y - x)$, toutes les notions de topologie vues ici s'appliquent aux evn.

Définition : Soit (X, d) un espace métrique.

Une boule ouverte de centre $a \in X$ de rayon $r > 0$ est $B(a, r) = \{x \in X \mid d(x, a) = d(a, x) < r\}$.

Définition : Soit (X, d) un espace métrique.

Une boule fermée de centre $a \in X$ de rayon $r > 0$ est $B_F(a, r) = \{x \in X \mid d(a, x) \leq r\}$.

Définition : Soit (X, d) un espace métrique.

La sphère de centre $a \in X$ de rayon $r > 0$ est $S(a, r) = \{x \in X \mid d(a, x) = r\}$.

💡 **Exemple :** Dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $B(1, 1) =]0, 2[$

💡 **Exemple :** Dans \mathbb{R}^2 avec trois métriques :

$d_1 = \|y - x\|_1$, $d_2 = \|y - x\|_2$ et $d_\infty = \|y - x\|_\infty$.

Traçons les boules de centre 0 de rayon 1 associées à chaque distance.

$B(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x, 0) < 1\}$.

On a : $\|x\|_{1,2,\infty} < 1$.

- Pour $d_1 : \|x\|_1 = |x_1| + |x_2| < 1$. C'est un losange.
- Pour $d_2 : \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < 1$. C'est un disque.
- Pour $d_\infty : \|x\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|) < 1$. C'est un carré.

📌 **Remarque :** Les bordures correspondent aux sphères $S(0, 1)$ associées à chaque distance. Les boules fermées $B_F(0, 1)$ correspondent aux mêmes figures mais en incluant les bordures.

Définition : Une partie U de X est un ouvert de (X, d) si $\forall x \in U, \exists r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U$.

💡 **Exemple :** $]0, 1[\subset \mathcal{C}(]0, 1[, \mathbb{R})$ est un ouvert : $\forall x \in]0, 1[, B(x, \min(x, 1 - x)) \subset]0, 1[$.

Définition : Une topologie sur (X, d) est l'ensemble des ouverts de (X, d) . Autrement dit, $\tau = \{U \subset X \mid U \text{ est un ouvert de } (X, d)\}$.

Proposition :

1. Toute boule ouverte de (X, d) est un ouvert de (X, d) .
2. Si $(U_i)_{i \in I}$ est une famille d'ouverts de (X, d) , alors $\bigcup_{i \in I} U_i$ est un ouvert de (X, d) . (I un ensemble quelconque)
3. Si (U_1, U_2, \dots, U_n) est une famille finie d'ouverts de (X, d) , alors $\bigcap_{i=1}^n U_i$ est un ouvert de (X, d) .

Preuve :

1. Soit $B(a, r)$ une boule ouverte de (X, d) . Soit $x \in B(a, r)$. On a $d(a, x) < r$. Posons $s = r - d(a, x) > 0$. Montrons que $B(x, s) \subset B(a, r)$.
Soit $y \in B(x, s)$. On a $d(x, y) < s$. D'après l'inégalité triangulaire, on a $d(a, y) \leq d(a, x) + d(x, y) < d(a, x) + s = d(a, x) + (r - d(a, x)) = r$. Donc $y \in B(a, r)$. Ainsi, $B(x, s) \subset B(a, r)$ et donc $B(a, r)$ est un ouvert de (X, d) .
2. Soit $x \in (U_i)_{i \in I}$. Alors $\exists i_0 \in I$ tel que $x \in U_{i_0}$. Comme U_{i_0} est un ouvert de (X, d) , il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} U_i$. Donc $\bigcup_{i \in I} U_i$ est un ouvert de (X, d) .
3. Soit $x \in \bigcap_{i=1}^n U_i$, où on a écrit $I = \{1, 2, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
Alors $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \exists r_i > 0$ tel que $B(x, r_i) \subset U_i$. Posons $r = \min(r_1, r_2, \dots, r_n) > 0$. Alors $B(x, r) \subset \bigcap_{i=1}^n U_i$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.
En effet, soit $z \in B(x, r)$, $d(z, x) < r \leq r_i$ donc $z \in B(x, r_i) \subset U_i$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Donc $z \in \bigcap_{i=1}^n U_i$.
Ainsi, $\bigcap_{i=1}^n U_i$ est un ouvert de (X, d) .

💡 **Contre-Exemple :** Si I est infini, la propriété 3 n'est pas vraie en général. Par exemple, dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, considérons la famille d'ouverts $U_n =]-1/n, 1/n[$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $\bigcap_{n=1}^\infty U_n = \{0\}$ qui n'est pas un ouvert de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

Définition : Soit (X, d) un espace métrique.

Une partie F de X est un fermé de (X, d) si son complémentaire $X \setminus F$ est un ouvert de (X, d) .

Proposition :

1. Toute boule fermée de (X, d) est un fermé de (X, d) .
2. Si $(F_i)_{i \in I}$ est une famille de fermés de (X, d) , alors $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un fermé de (X, d) . (I un ensemble quelconque)
3. Si (F_1, F_2, \dots, F_n) est une famille finie de fermés de (X, d) , alors $\bigcup_{i=1}^n F_i$ est un fermé de (X, d) .

Preuve :

1. Soit $B_F(x, r)$ une boule fermée de (X, d) . C'est un fermé $\Leftrightarrow X \setminus B_F(x, r)$ est un ouvert de (X, d) .
Soit $y \in X \setminus B_F(x, r)$. On a $d(x, y) > r$. Posons $\varrho = d(y, x) - r > 0$. Montrons que $B(y, \varrho) \subset X \setminus B_F(x, r)$.
Soit $z \in B(y, \varrho)$. On a $d(y, z) < \varrho$.
 $d(z, x) < d(y, x) + d(y, z) \Rightarrow r < d(y, x) + d(y, z) \leq d(z, x)$ (inégalité triangulaire) $\Rightarrow z \in X \setminus B_F(x, r)$.
Ainsi, $B(y, \varrho) \subset X \setminus B_F(x, r)$ et donc $X \setminus B_F(x, r)$ est un ouvert de (X, d) .
Donc $B_F(x, r)$ est un fermé de (X, d) .
2. Laissé en exercice au lecteur.
3. Laissé en exercice au lecteur.

Remarque : Dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, tout intervalle fermé est un fermé, et tout intervalle ouvert est un ouvert. (\mathbb{R} est ouvert).
On a : $]a, +\infty[= \bigcup_{n=1}^{\infty }]a, a+n[$ est un ouvert.

Remarque : X et \emptyset sont des ouverts et des fermés de (X, d) (prendre r arbitrairement grand pour X et r quelconque pour \emptyset).

Définition : Soit $\mathcal{V} \subset X$ une partie de l'espace métrique (X, d) .

On dit que \mathcal{V} est un voisinage de $a \in X$ si $\exists r > 0$ tel que $B(a, r) \subset \mathcal{V}$.

Proposition :

On dit aussi que U est un ouvert de (X, d) si et seulement si U est un voisinage de chacun de ses points.

B Intérieur et adhérence

Soit (X, d) un espace métrique.

Définition : Soit $A \subset X$ une partie de l'espace métrique (X, d) .

On appelle intérieur de A l'ensemble des points $a \in A$ tels que A est un voisinage de a . On le note : $\overset{\circ}{A}$.

On a :

$$\overset{\circ}{A} = \bigcup \{U \subset A \mid U \text{ est un ouvert de } (X, d)\}$$

Définition : Soit $A \subset X$ une partie de l'espace métrique (X, d) .

On appelle adhérence de A l'ensemble des points $x \in X$ tels que $\forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset$. On le note : \overline{A} .

On a :

$$\overline{A} = \bigcap_{F \supset A, F \text{ fermé de } (X, d)} F$$

Proposition : Lien avec les ouverts

Soit $A \subset X$ une partie de l'espace métrique (X, d) .

1. $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert contenu dans A .
2. Si $U \subset A$ est un ouvert de (X, d) , alors $U \subset \overset{\circ}{A}$.
Autrement dit, $\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A .

Preuve :

1. C'est une union quelconque d'ouverts indus dans A , donc $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert. De plus, par définition, $\overset{\circ}{A} \subset A$.
2. Par définition $\overset{\circ}{A} = \bigcup \{U \subset A \mid U \text{ est un ouvert de } (X, d)\}$. Donc si $U \subset A$ est un ouvert de (X, d) , alors U est dans la famille indexée par l'union, donc $U \subset \overset{\circ}{A}$.