Chapitre 4 : Espaces euclidiens

I Produit scalaire et norme

Définition : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Un **produit scalaire** sur E est une application $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ qui vérifie les propriétés suivantes :

1. $\forall x, y \in E,\ \langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ (symétrie)
2. $\forall x, x', y \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \langle \lambda x + x', y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle + \langle x', y\rangle$ (linéarité en la première variable)
3. $\forall x \in E,\ \langle x, x\rangle \geq 0$ et $\langle x, x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0$ (positivité)

En résumé, un produit scalaire est une application bilinéaire, symétrique et définie positive.

Exemple : Dans $\mathbb{R}^n$,$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ est un produit scalaire.
Dans $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ est un produit scalaire.

Remarque : Si E est un espace vectoriel normé de dimension finie, il n'y a pas de produit scalaire canonique *a priori*. (On a vu néanmoins que dans $\mathbb{R}^n$, il existe un produit scalaire canonique.

Définition : Un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E muni d'un produit scalaire est appelé un **espace euclidien**.
On le note $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Identités remarquables :

$\langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle$
$\langle x + y, x - y\rangle = \langle x, x\rangle - \langle y, y\rangle$

Théorème : Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.
Alors, pour tous $x, y \in E$, on a :

$$|\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle}$$

De plus, l'égalité a lieu si et seulement si x et y sont linéairement dépendants.

Note de rédaction : cf. Laurent.

Contents