

# Chapitre 4 : Topologie des espaces métriques et des espaces vectoriels normés

## I Distances et normes

Soit  $X$  un ensemble quelconque (dans la suite supposé non nul).

**Définition :** Une distance  $d$  sur  $X$  est une application  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$  qui vérifie les axiomes suivants :

1.  $\forall (x, y) \in X^2, d(x, y) = d(y, x)$  (symétrie)
2.  $\forall x, y, z \in X, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  (inégalité triangulaire)
3.  $\forall (x, y) \in X^2, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$  (séparation)

**Vocabulaire :** On appelle **espace métrique** un couple  $(X, d)$  où  $X$  est un ensemble et  $d$  une distance sur  $X$ .

### Exemple :

- $\mathbb{R}$  muni de la distance  $d(x, y) = |x - y|$ , où  $|\cdot|$  est la valeur absolue.
- $\mathbb{C}$  muni de la distance  $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$ , où  $|\cdot|$  est le module.
- Une autre façon de voir l'exemple 2, on considère l'ensemble  $\mathbb{R}^2$  muni de la distance suivante : Si  $A = (x_A, y_A)$  et  $B = (x_B, y_B)$  sont deux points de  $\mathbb{R}^2$ , on définit la distance  $d(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$ . On appelle cette distance la **distance euclidienne** sur  $\mathbb{R}^2$ .
- Prenons  $X = \text{ cercle unité}$  muni de la distance  $d(A, B) = \arccos(\cos(\theta_2 - \theta_1))$  où  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sont les arguments des points  $A$  et  $B$  respectivement. (voir schéma OneNote)

**Remarque :** On peut voir l'exemple 1 comme un cas particulier de l'exemple 2, en identifiant  $\mathbb{R}$  à l'axe des réels dans le plan complexe.

**Remarque :** On peut généraliser l'exemple 3 à  $\mathbb{R}^n$  muni de la distance euclidienne définie par :

$$d(A, B) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_{A_i} - x_{B_i})^2}$$

où  $A = (x_{A_1}, x_{A_2}, \dots, x_{A_n})$  et  $B = (x_{B_1}, x_{B_2}, \dots, x_{B_n})$  sont deux points de  $\mathbb{R}^n$ .

Il se trouve que les exemples 1, 2 et 3 proviennent d'espaces vectoriels normés, qu'on verra (très) rapidement.

### Proposition : Inégalités triangulaires

Soit  $(X, d)$  un espace métrique.

On a :

1.  $\forall (x, y, z) \in X^3, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  (inégalité triangulaire)
2.  $\forall (x, y, z) \in X^3, |d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z)$  (inégalité triangulaire généralisée)

### Preuve :

1. C'est l'axiome 2 de la définition d'une distance.
2. On a  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  d'après l'inégalité triangulaire.  
Donc  $d(x, y) - d(x, z) \leq d(z, y) = d(y, z)$ .  
De plus,  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  d'après l'inégalité triangulaire.  
Donc  $d(x, z) - d(x, y) \leq d(y, z)$ .  
En combinant les deux, on obtient  $|d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z)$ .

**Construction d'espaces métriques : Restriction (admis)**

On part de  $(X, d)$  un espace métrique.

Soit  $Y \subset X$ . Alors  $(Y, d|_{Y \times Y})$  est un espace métrique.

💡 **Vocabulaire :** On dit que  $d|_{Y \times Y}$  est la **distance sur  $Y$  induite** par la distance sur  $X$ .

❶ **Remarque :** Ainsi, tout sous-ensemble d'un espace métrique est muni d'une "structure d'espace métrique" induite : c'est la distance induite.

💡 **Exemple :**  $(X, d_X) = (\mathbb{C}, |\cdot|)$  un espace métrique. Alors pour  $Y = \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ ,  $d_Y$  n'est autre que la distance usuelle sur  $\mathbb{R}$ .

Idem pour  $\mathbb{Q}$ .

**Construction d'espaces métriques : Bijection (admis)**

Soient  $(X, d_X)$  et  $Y$  un ensemble quelconque et  $f : Y \rightarrow X$  bijective.

Alors  $(Y, d_Y)$  est un espace métrique, où  $d_Y(y_1, y_2) = d_X(f(y_1), f(y_2))$  pour tout  $y_1, y_2 \in Y$ .

Autrement dit,  $d_Y : {}^{Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}_+}_{(y_1, y_2) \mapsto d_X(f(y_1), f(y_2))}$ .

💡 **Application :** Démontrer le théorème ci-dessus. (vérifier que  $d_Y$  satisfait bien les axiomes d'une distance.)

