

# Chapitre 5 : Fonctions de plusieurs variables

## Cadre de travail :

- $p, q \in \mathbb{N}^*$
- $U$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$
- $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$
- $\mathbb{R}^p$  et  $\mathbb{R}^q$  sont des espaces vectoriels qui peuvent être normés, donc des espaces métriques. Ainsi, toutes les propriétés et des notions des espaces métriques s'appliquent.

## I Continuité

**Rappel :** Une suite  $(X_n)$  de composante  $\begin{pmatrix} x_1^{(n)} \\ x_2^{(n)} \\ \vdots \\ x_p^{(n)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$  tend vers  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$  si et seulement si chacune de ses composantes converge, c'est-à-dire :

$$\forall i \in \{1, \dots, p\}, \quad x_i^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x_i$$

### Proposition :

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^q$  et  $a \in U$ . On écrit  $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_q(x))$ ,  $x \in U$ .  
On a :  $f$  est continue en  $a \Leftrightarrow \forall i = 1, \dots, q$ ,  $f_i(x)$  est continue en  $a$ .

**Remarque :**  $\forall i = 1, \dots, q$ , les fonctions  $x \mapsto f_i(x)$  sont à valeur dans  $\mathbb{R}$ , donc on peut utiliser les résultats de la continuité pour les fonctions à valeur réelle.

**Vocabulaire :** On appelle les  $f_i$  les **fonctions composantes** de  $f$ .

### Preuve :

On rappelle que  $f$  est continue en  $a$  ssi par toute suite  $(x_n)$  qui converge vers  $a$ , la suite  $(f(x_n))$  converge vers  $f(a)$ .  
On a donc  $f(x_n) = (f_1(x_n), f_2(x_n), \dots, f_q(x_n)) \rightarrow f(a) = (f_1(a), f_2(a), \dots, f_q(a))$  ssi  $\forall i = 1, \dots, q$ ,  $f_i(x_n) \rightarrow f_i(a)$ .  
Donc  $f$  est continue en  $a$  ssi  $\forall i = 1, \dots, q$ ,  $f_i$  est continue en  $a$ .

Pour comprendre la continuité, il suffit de se restreindre aux fonctions  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ .

### Exemple :

1.  $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$  et  $f(0, 0) = 0$ .  
On a  $U = \mathbb{R}^2$ ,  $p = 2$  et  $q = 1$ .  
Montrons que  $f$  est continue.

$f$  est continue sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  car c'est un quotient de fonctions continues (polynômes) dont le dénominateur ne s'annule pas.

Montrons que  $f$  est continue en  $(0, 0)$ .

On doit montrer que si  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ , alors  $f(x, y) \rightarrow 0$ .

$$|f(x, y)| = \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| = \frac{x^2 |y|}{x^2 + y^2} \leq \frac{x^2 |y|}{y^2} = |y|.$$

Donc si  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ , alors  $|y| \rightarrow 0$  et donc  $f(x, y) \rightarrow 0$ .

Ainsi,  $f$  est continue en  $(0, 0)$ .

Donc  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .

2.  $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ .

$f$  peut-elle être continue sur  $\mathbb{R}^2$  ?

Sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ,  $f$  est continue (même raison).

Problème en  $(0, 0)$ .

Montrons que  $f(x, y)$  n'a pas de limite en  $(0, 0)$ .

Trouvons  $(x_n, y_n) \rightarrow (0, 0)$  et  $(a_n, b_n) \rightarrow (0, 0)$  tels que  $f(x_n, y_n)$  et  $f(a_n, b_n)$  aient des limites différentes.

Prenons  $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ . On a :  $f(x_n, y_n) = \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{(\frac{1}{n})^2 + (\frac{1}{n})^2} = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2}$ .

De plus, prenons  $(a_n, b_n) = (\frac{2}{n}, \frac{1}{n})$ . On a :  $f(a_n, b_n) = \frac{\frac{2}{n} \cdot \frac{1}{n}}{(\frac{2}{n})^2 + (\frac{1}{n})^2} = \frac{\frac{2}{n^2}}{\frac{4}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \frac{2}{5}$ .

Ainsi,  $f(x_n, y_n) \rightarrow \frac{1}{2}$  et  $f(a_n, b_n) \rightarrow \frac{2}{5}$ .

Donc  $f$  n'a pas de limite en  $(0, 0)$  et donc  $f$  n'est pas continue en  $(0, 0)$ . Ainsi,  $f$  n'est pas continue sur  $\mathbb{R}^2$ .

## II Vers une bonne notion de dérivée pour les fonctions à plusieurs variables

**Introduction :** Soit  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  où  $]a, b[ \subset \mathbb{R}$ . On dit que  $f$  est dérivable en  $x \in ]a, b[$  si il existe un réel  $f'(x)$  tel que :

$$f(x + h) = f(x) + hf'(x) + o(h)$$

Ce qui équivaut à :  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$  existe.

Si  $f$  est dérivable en  $x$  alors on sait que  $f$  est continue en  $x$ .

$|f(x + h) - f(x)| \rightarrow 0$  quand  $h \rightarrow 0$ .

### A Rappels : fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^q$ , $q \geq 1$

Soit  $f : x \mapsto (f_1(x), f_2(x), \dots, f_q(x))$  (fonction coordonnées)

**Définition :** On dit que  $f$  est dérivable en  $x \in ]a, b[$  si  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x+h)}{h}$  existe. (avec  $\frac{f(x) - f(x+h)}{h} \in \mathbb{R}^q$ ).  
i.e.  $\exists L \in \mathbb{R}^q$  tel que  $\|\frac{f(x) - f(x+h)}{h} - L\| \rightarrow 0$  quand  $h \rightarrow 0$  où  $\|\cdot\|$  est une norme  $\mathbb{R}^q$  (elles sont équivalentes).

#### Proposition : Dérivabilité

$f$  est dérivable en  $x \Leftrightarrow \forall i = 1, \dots, q$ ,  $f_i$  est dérivable en  $x$  et on a :  $f'(x) = (f'_1(x), f'_2(x), \dots, f'_q(x))$ .

Autrement dit,  $f$  est dérivable en  $x$  si et seulement si chacune de ses composantes est dérivable en  $x$ .

**Preuve :**

$\Rightarrow$  / Supposons  $f$  dérivable en  $x$ .

$\exists L = (L_1, L_2, \dots, L_q) \in \mathbb{R}^q$  tel que  $\|\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - L\| \rightarrow 0$  quand  $h \rightarrow 0$ .

On a le choix de  $\|\cdot\|$  car les normes sont toutes équivalentes (en dimension finie). Prenons la norme infinie.

Alors  $\forall i \in \{1, \dots, q\}$ ,  $|\frac{f_i(x+h) - f_i(x)}{h} - L_i| \leq \|\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - L\|_{+\infty} \rightarrow 0$  quand  $h \rightarrow 0$ .

Ainsi,  $\forall i \in \{1, \dots, q\}$ ,  $f_i$  est dérivable en  $x$  et  $f'_i(x) = L_i$ .

Et donc  $f'(x) = (f'_1(x), f'_2(x), \dots, f'_q(x))$ .

$\Leftarrow$  / Supposons que  $\forall i = 1, \dots, q$ ,  $f_i$  est dérivable en  $x$ .

Donc  $\forall i \in \{1, \dots, q\}$ ,  $\frac{f_i(x+h) - f_i(x)}{h} \rightarrow f'_i(x)$  quand  $h \rightarrow 0$ .

Montrons que  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$  existe.

Posons  $L = (f'_1(x), f'_2(x), \dots, f'_q(x)) \in \mathbb{R}^q$ .

On veut  $\|\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - L\| \rightarrow 0$  quand  $h \rightarrow 0$ .

Prenons  $\|\cdot\|_1$  la norme 1.

On a :

$$\left\| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - L \right\|_1 = \sum_{i=1}^q \left| \frac{f_i(x+h) - f_i(x)}{h} - L_i \right|$$

On a une somme finie donc chaque terme (par hypothèse) tend vers 0 quand  $h \rightarrow 0$ .

En passant à la limite on obtient :  $\|\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - L\|_1 \rightarrow 0$  quand  $h \rightarrow 0$ .

Donc  $f$  est dérivable en  $x$  et  $f'(x) = L = (f'_1(x), f'_2(x), \dots, f'_q(x))$ .

## B Dérivées partielles

Soit  $U \subset \mathbb{R}^p$  ouvert et  $p \in \mathbb{N}^*$ . On considère  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^q$ .

**Remarque :** Penser à une fonction  $f$  définie de  $U = \mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$ , donc  $p = 2$  et  $q = 1$ . (tous les problèmes se posent déjà dans ce cas)

On veut définir la notion de dérivées partielles en un point  $a = (a_1, a_2, \dots, a_p) \in U$ .

Il y a  $p$  dérivées partielles (car  $p$  variables). Prenons  $k \in \{1, \dots, p\}$  et définissons la  $k$ -ième dérivée partielle de  $f$  en  $a = (a_1, a_2, \dots, a_p)$ .

Considérons la  $k$ -ième fonction partielle d'une variable réelle  $g_k : x_k \mapsto f(a_1, \dots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \dots, a_p)$ .

Les points  $a_1, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_p$  sont fixés dans  $\mathbb{R}$  et  $x_k$  varie dans un voisinage de  $a_k$ .

On dit que  $f$  admet une  $k$ -ième dérivée partielle en  $a$  si  $g_k$  est dérivable en  $a_k$  et on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = g'_k(a_k)$$

**Exemple :** Soit  $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$ .

Prenons  $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ . Alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = 2a_1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a) = 2a_2$$

On utilise plutôt les notations suivantes :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y$$

**Attention** Avant de calculer une dérivée partielle en un point, il faut justifier qu'elles existent (i.e. que les fonctions partielles sont dérivables en les points correspondants).

**Exemple :** (suite) Ici, il faut dire :

$\forall y$  fixé dans  $\mathbb{R}$ , la fonction  $x \mapsto f(x, y) = x^2 + y^2$  avec  $y$  constant est dérivable en tout  $x \in \mathbb{R}$  (c'est un polynôme).

Donc  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  existe pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

De même,  $\forall x$  fixé dans  $\mathbb{R}$ , la fonction  $y \mapsto f(x, y) = x^2 + y^2$  avec  $x$  constant est dérivable en tout  $y \in \mathbb{R}$ . Donc

$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$  existe pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

**Remarque :**  $f$  admet une  $k$ -ième dérivée partielle en  $a \Leftrightarrow$  la fonction  $t \mapsto f(a + te_k)$  (où  $e_k$  est le  $k$ -ième vecteur de la base canonique de  $\mathbb{R}^p$ ) est dérivable en 0.

**Définition :** On dit que  $f$  admet des dérivées partielles en  $a$  si  $\forall k \in \{1, \dots, p\}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$  existe. (i.e. toutes les dérivées partielles existent en  $a$ )

**Attention** Problème : Malheureusement, ce n'est pas parce que  $f$  admet des dérivées partielles en  $a$  que  $f$  est continue en  $a$ . (d'où le fait de chercher une meilleure notion de dérivabilité)

**Contre-Exemple :** Soit  $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$  si  $(x, y) \neq (0, 0)$  et  $f(0, 0) = 0$ .

On a  $U \subset \mathbb{R}^2$  ouvert,  $p = 2$  et  $q = 1$ .

Montrons que  $f$  admet des dérivées partielles sur  $\mathbb{R}^2$  mais que  $f$  n'est pas continue en  $(0, 0)$ .

Montrons que  $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  existe pour tout  $y$ .

Fixons  $y \in \mathbb{R}$ .

Considérons  $x \mapsto f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$  est dérivée en tout  $x \in \mathbb{R}$ .

Ainsi  $\forall y \in \mathbb{R} \ x \mapsto f(x, y)$  est dérivable en tout  $x \in \mathbb{R}$ . Donc  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  existe pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

De même, par symétrie on montre que  $y \mapsto f(x, y)$  est dérivable en tout  $y \in \mathbb{R}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .  
Ainsi  $f$  admet des dérivées partielles en tout point de  $\mathbb{R}^2$ .  
En particulier,  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$  existent.  
Pourtant, on a vu que  $f$  n'est pas continue en  $(0, 0)$ .

*Transition :* On peut voir le problème de continuité en  $(0, 0)$  comme le fait que  $f(x, x) = \frac{1}{2}$  qui ne tend pas vers 0 quand  $x \rightarrow 0$ .

En fait, on regarde la trajectoire  $t \mapsto (t, t)$  qui n'est pas alignée avec les axes.

Une notion plus forte que la dérivée partielle est la dérivée directionnelle.

## C Dérivées directionnelles

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^q$  où  $U \subset \mathbb{R}^p$  ouvert.

Soit  $a \in U$  et soit  $h$  un vecteur de  $\mathbb{R}^p$ .

Considérons la fonction d'une variable réelle  $\varphi : t \mapsto f(a + th)$  où  $t$  varie dans un voisinage de 0 tel que  $a + th \in U$ .

**Définition :** On dit que  $f$  admet une dérivée directionnelle en  $a$  selon la direction  $h$  si  $\varphi$  est dérivable en 0.  
On a :

$$\varphi'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + th) - f(a)}{t}$$


### Proposition : Lien avec la dérivée partielle

Si on choisit comme direction  $h = e_k$  (le  $k$ -ième vecteur de la base canonique de  $\mathbb{R}^p$ ), alors la dérivée directionnelle de  $f$  en  $a$  selon la direction  $e_k$  est la  $k$ -ième dérivée partielle de  $f$  en  $a$ .

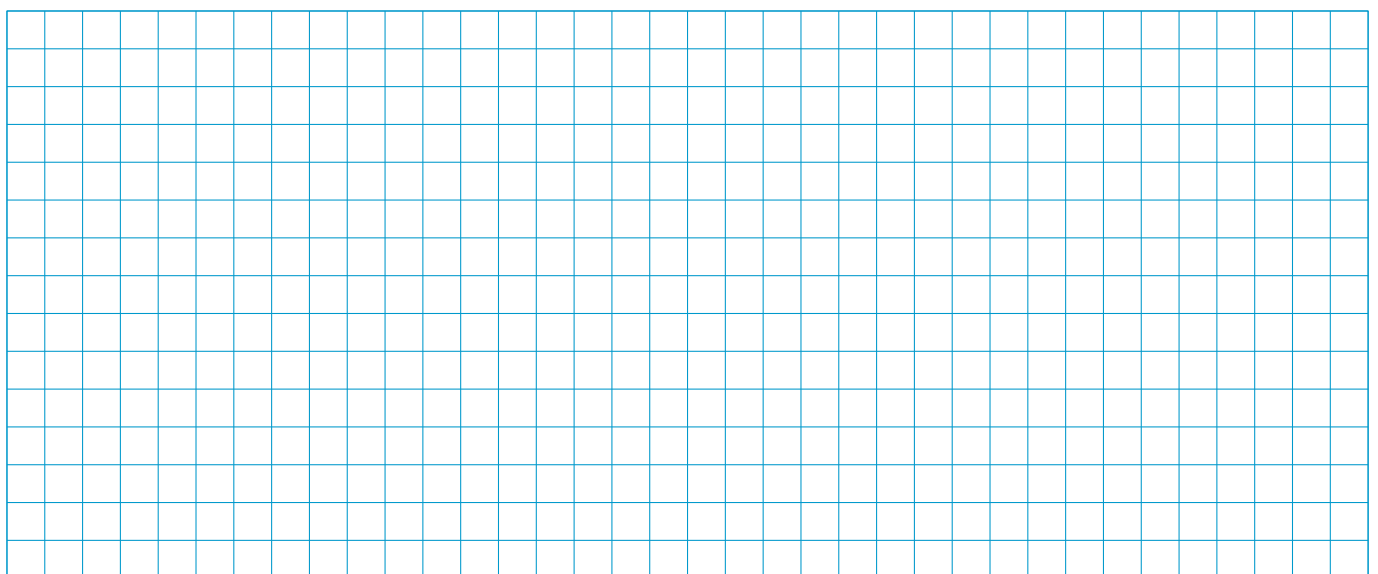
### Preuve :

On a  $\varphi(t) = f(a + te_k) = f(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k + t, a_{k+1}, \dots, a_p)$ .


Donc  $\varphi$  est dérivable en 0 ssi la fonction  $x_k \mapsto f(a_1, \dots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \dots, a_p)$  est dérivable en  $a_k$ .

Ainsi, la dérivée directionnelle de  $f$  en  $a$  selon la direction  $e_k$  est égale à la  $k$ -ième dérivée partielle de  $f$  en  $a$ . 

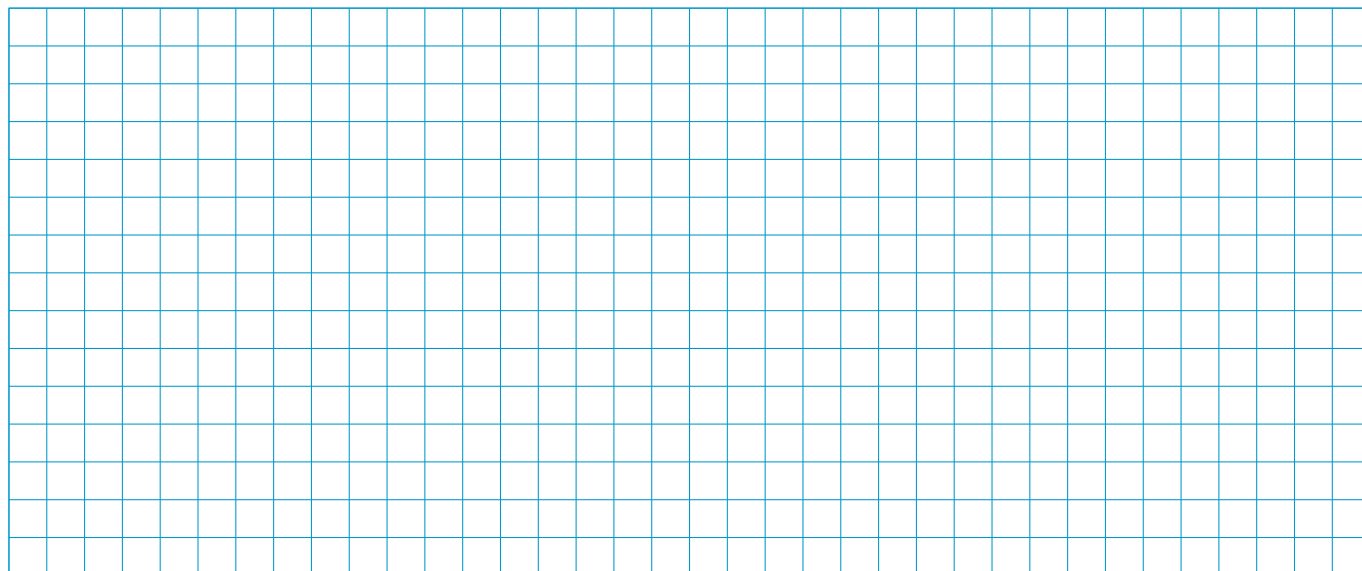
**Application :** Étudier la dérivée directionnelle en toutes les directions au point  $(0, 0)$  de la fonction  $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$  si  $(x, y) \neq (0, 0)$  et  $f(0, 0) = 0$ .



**✗ Attention ✗** Cette notion de dérivée directionnelle est encore trop faible pour garantir la continuité de  $f$  en  $a$ .

 **Application :** Considérer  $f(x, y) = \frac{y^2}{x}$  si  $x \neq 0$  et  $f(x, y) = y$  sinon.

1. Montrer que  $f$  admet des dérivées directionnelles en tout point de  $\mathbb{R}^2$  et en toute direction.
2. Montrer que  $f$  n'est pas continue sur  $\mathbb{R}^2$ . *Indication : Considérer le point  $(0, 1)$  et  $(\frac{1}{n}, 1) \rightarrow (0, 1)$ .*




## D Dérivées différentielles (cette fois-ci c'est la bonne !)

La dérivée différentielle est la notion qui assure que si une fonction est différentiable en un point, alors elle est continue en ce point. Soit  $f: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  et  $a \in U$ , où  $U \subset \mathbb{R}^p$  est ouvert.

**Définition :** On dit que  $f$  est différentiable en  $a \Leftrightarrow \exists Df(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$  telle que :

$$f(a + h) = f(a) + Df(a) \cdot h + o(\|h\|) \quad \text{quand } h \rightarrow 0$$

avec  $h \in \mathbb{R}^p, f(a) \in \mathbb{R}^q, Df(a) \cdot h \in \mathbb{R}^q$ .

 **Exemple :**  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f$  dérivable en  $a \in \mathbb{R}$ .

$Df(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

Dans le cas d'une fonction d'une variable réelle,  $Df(a): h \mapsto f'(a)h$ . (c'est une multiplication par un scalaire)