

Chapitre 4 : Espaces euclidiens

I Produit scalaire et norme

A Produit scalaire

On ne rappellera pas les définitions de normes et distances ici et les propositions qui s'ensuivent. Le lecteur est invité à se référer au chapitre 4 du cours AN3.

Définition : Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel.

Un **produit scalaire** sur E est une application $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie les propriétés suivantes :

1. $\forall x, y \in E, \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ (symétrie)
2. $\forall x, x', y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \langle \lambda x + x', y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle$ (linéarité en la première variable)
3. $\forall x \in E, \langle x, x \rangle \geq 0$ et $\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$ (positivité)

En résumé, un produit scalaire est une forme bilinéaire, symétrique et définie positive.

Exemple : Dans $\mathbb{R}^n, \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ est un produit scalaire.

Dans $C^0([0, 1], \mathbb{R}), \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ est un produit scalaire.

Remarque : Si E est un espace vectoriel normé de dimension finie, il n'y a pas de produit scalaire canonique *a priori*. (On a vu néanmoins que dans \mathbb{R}^n , il existe un produit scalaire canonique.)

Définition : Un \mathbb{R} -espace vectoriel E muni d'un produit scalaire est appelé un **espace euclidien**.

On le note $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Identités remarquables :

$$\begin{aligned}\langle x + y, x + y \rangle &= \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \\ \langle x + y, x - y \rangle &= \langle x, x \rangle - \langle y, y \rangle\end{aligned}$$

Théorème : Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

Alors, pour tous $x, y \in E$, on a :

$$|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}$$

De plus, l'égalité a lieu si et seulement si x et y sont colinéaires.

Démonstration :

- Soit $t \in \mathbb{R}$. On pose $P(t) = \langle x + ty, x + ty \rangle$. Supposons $y \neq 0$.
 $P(t) = \langle x, x \rangle + 2t\langle x, y \rangle + t^2\langle y, y \rangle \geq 0$ est polynômiale de degré 2 si $y \neq 0$. Ainsi $\Delta \leq 0$.
 $\Delta = (2\langle x, y \rangle)^2 - 4\langle x, x \rangle\langle y, y \rangle = 4(\langle x, y \rangle^2 - \langle x, x \rangle\langle y, y \rangle)$. Donc $\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle\langle y, y \rangle$.
- Supposons l'égalité. Alors $\Delta = 0$. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $P(t_0) = 0$.
On obtient $\langle x + t_0 y, x + t_0 y \rangle = 0$, c'est-à-dire que $x + t_0 y = 0$. Donc x et y sont colinéaires.
- Réciproquement, si x et y sont colinéaires.
Si $y \neq 0$, on peut écrire $x = \lambda y$ et $|\langle x, y \rangle| = |\langle \lambda y, y \rangle| = |\lambda| \langle y, y \rangle$.
 $\sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\langle \lambda y, \lambda y \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle y, y \rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle y, y \rangle} = \lambda \langle y, y \rangle$. D'où l'égalité. \square

B Normes

Rappel : On rappelle qu'une norme est une application $N: E \rightarrow \mathbb{R}_+$ qui vérifie l'homogénéité, l'inégalité triangulaire et la séparation.

Proposition :

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel, muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

On pose $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Alors $\|\cdot\|$ est une norme sur E , appelée la norme associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Démonstration :

Homogénéité : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in E$.

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle x, x \rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle x, x \rangle} = |\lambda| \|x\|$$

Inégalité triangulaire : Soit $x, y \in E$.

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \leq \langle x, x \rangle + 2|\langle x, y \rangle| + \langle y, y \rangle$$

$$\leq \langle x, x \rangle + 2\sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle} + \langle y, y \rangle = (\sqrt{\langle x, x \rangle} + \sqrt{\langle y, y \rangle})^2$$

$$\Rightarrow \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Séparation : Soit $x \in E$ tel que $\|x\| = 0$.

$$\text{Alors } \sqrt{\langle x, x \rangle} = 0 \Rightarrow \langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$$

Remarque : $x \mapsto |x|$ est une norme sur \mathbb{R} , associée au produit scalaire $\langle x, y \rangle = xy$.

Rappel : Une distance sur un ensemble X est une application $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ qui vérifie la séparation, la symétrie et l'inégalité triangulaire.

Proposition : Lien entre norme et distance

Soit N une norme sur un \mathbb{R} -espace vectoriel E .

Alors $d(x, y) = N(x - y)$ est une distance sur E .

Remarque : En géométrie affine, si A et B sont deux points, le vecteur \overrightarrow{AB} est défini par $\overrightarrow{AB} = B - A$, et $d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\|$.

Remarque : Un produit scalaire donne une norme ($\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$) et une norme donne une distance ($d(x, y) = \|x - y\|$).

Propriété : Norme associée au produit scalaire (identité du parallélogramme)

$$\forall x, y \in E, \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

On peut le vérifier avec $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ et les identités remarquables.

D'où si une norme ne vérifie pas l'identité du parallélogramme, elle n'est pas associée à un produit scalaire.

Démonstration :

Vérifions avec $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \text{ et } \|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2.$$

$$\text{Donc, } \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Définition : Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel, muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

L'angle non-orienté entre $x, y \in E \setminus \{0\}$ est défini par $\theta = \arccos \left(\frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|} \right) \in [0, \pi]$.

Remarque : Cette définition est basée sur la propriété en géométrie euclidienne classique (angle où la direction

n'a pas d'importance), et on a : $\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \cos(\theta)$.

Remarque : Le vecteur normé associé à $x \in E \setminus \{0\}$ est $\frac{x}{\|x\|}$. C'est utile pour calculer des vecteurs unitaires.

II Orthogonalité

A Vecteurs orthogonaux, familles orthogonales et orthonormées

Définition : Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel, muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
Deux vecteurs $x, y \in E$ sont dits **orthogonaux** si $\langle x, y \rangle = 0$.

On note $x \perp y$. De même, si F est un sous-espace vectoriel de E , on dit que $x \perp F$ si $\forall y \in F, x \perp y$.

Remarque : L'angle entre deux vecteurs orthogonaux non nuls est $\frac{\pi}{2}$, et tout vecteur est orthogonal au vecteur nul.

Définition : Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel, muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
Une famille de vecteurs $(x_i)_{i \in I}$ est dite **orthogonale** si $x_i \perp x_j$ pour tous $i \neq j$, i.e. si ses vecteurs sont deux à deux orthogonaux.

Théorème de Pythagore :

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel, muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Soit (x_1, \dots, x_k) une famille orthogonale (finie) de E .

Alors :

$$\|x_1 + \dots + x_k\|^2 = \|x_1\|^2 + \dots + \|x_k\|^2.$$

De plus, si $k = 2$, alors $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \Rightarrow x \perp y$.

Démonstration :

$$\|\sum_{i=1}^k x_i\|^2 = \langle \sum_{i=1}^k x_i, \sum_{j=1}^k x_j \rangle = (\text{bilinéarité}) \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \langle x_i, x_j \rangle = \sum_{i=1}^k \langle x_i, x_i \rangle = \sum_{i=1}^k \|x_i\|^2.$$

Pour $k = 2$, $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$.

Donc si $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$, alors $2\langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow x \perp y$. \square

Définition : Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel, muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Une famille de vecteurs $(x_i)_{i \in I}$ est dite **orthonormée** si elle est orthogonale et que $\|x_i\| = 1$ pour tout $i \in I$.

Autrement dit, $\forall i, j \in I, \langle x_i, x_j \rangle = \delta_{ij}$.

Proposition :

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel, muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Alors une famille orthogonale dont chacun des vecteurs est non nul est libre.

En particulier, une famille orthonormée est libre.

Remarque : Si E est de dimension finie, toute famille orthonormée admet au plus $\dim(E)$ vecteurs.

Démonstration :

Soit $\sum_{i \in J} \lambda_i x_i = 0$ une combinaison linéaire nulle de vecteur de la famille J , avec $J \subset I$ un ensemble fini.

Soit $j \in J, \langle x_j, \sum_{i \in J} \lambda_i x_i \rangle = 0$.

D'où $\sum_{i \in J} \lambda_i \langle x_j, x_i \rangle = 0$ car $\langle x_j, x_i \rangle = 0$ si $i \neq j$.

D'où $\lambda_j \langle x_j, x_j \rangle = 0; \langle x_j, x_j \rangle > 0$ car $x_j \neq 0$. D'où $\lambda_j = 0$. D'où $\forall j \in J, \lambda_j = 0$.

Donc $(x_i)_{i \in I}$ est libre.

Définition : Soit E un espace euclidien.

Une **base orthonormée** de E est une famille orthonormée qui est une base de E .

Parenthèse : avantages d'une base orthonormée :

Soit (e_1, \dots, e_n) une base orthonormée de E .

Soit $x \in E$.

Alors : $x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i$. (on remarque que ça ressemble à la dualité !)

La i^{me} coordonnée de x dans la base (e_1, \dots, e_n) est $\langle x, e_i \rangle$.

B Procédé d'orthonormalisation Gram-Schmidt

Voir cette vidéo pour une explication du procédé d'orthonormalisation Gram-Schmidt.

Théorème :

Soit E un espace euclidien de dimension finie et soit (e_1, \dots, e_k) une famille libre de E .

Il existe une famille (u_1, \dots, u_k) orthonormée de E telle que $\forall i \in S_k, \text{Vect}(u_1, \dots, u_i) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_i)$.

En particulier, si $k = \dim(E)$, alors $(u_1, \dots, u_k = u_n)$ est une base orthonormée de E .

Démonstration :

On procède par récurrence sur k .

Initialisation : $k = 1$.

Alors (e_1) est une famille libre de E si et seulement si $e_1 \neq 0$.

Dans ce cas, on pose $u_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$, qui est un vecteur de norme 1.

Hérédité : Supposons que la propriété est vérifiée pour $k \leq n - 1$.

Soit (e_1, \dots, e_{k+1}) une famille libre de E .

Par hypothèse de récurrence, il existe une famille (u_1, \dots, u_k) orthonormée de E telle que $\forall i \in S_k, \text{Vect}(u_1, \dots, u_i) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_i)$.

On pose : $\overline{u_{k+1}} = e_{k+1} - \sum_{i=1}^k \langle e_{k+1}, u_i \rangle u_i$.

Soit $1 \leq i \leq k$.

On a : $\langle \overline{u_{k+1}}, u_i \rangle = \langle e_{k+1}, u_i \rangle - \sum_{j=1}^k \langle e_{k+1}, u_j \rangle \underbrace{\langle u_j, u_i \rangle}_{\delta_{ij}}$. (car (u_1, \dots, u_k) est orthonormée)

$\langle \overline{u_{k+1}}, u_j \rangle = \langle e_{k+1}, u_j \rangle - \langle e_{k+1}, u_j \rangle = 0$.

De plus, $\overline{u_{k+1}} \neq 0$ car $e_{k+1} \notin \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_k)$.

On pose alors $u_{k+1} = \frac{\overline{u_{k+1}}}{\|\overline{u_{k+1}}\|}$, qui est un vecteur de norme 1.

On a : (u_1, \dots, u_{k+1}) est une famille orthonormée de E qui vérifie $\forall i \in S_{k+1}, \text{Vect}(u_1, \dots, u_i) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_i)$. \square

Corollaire :

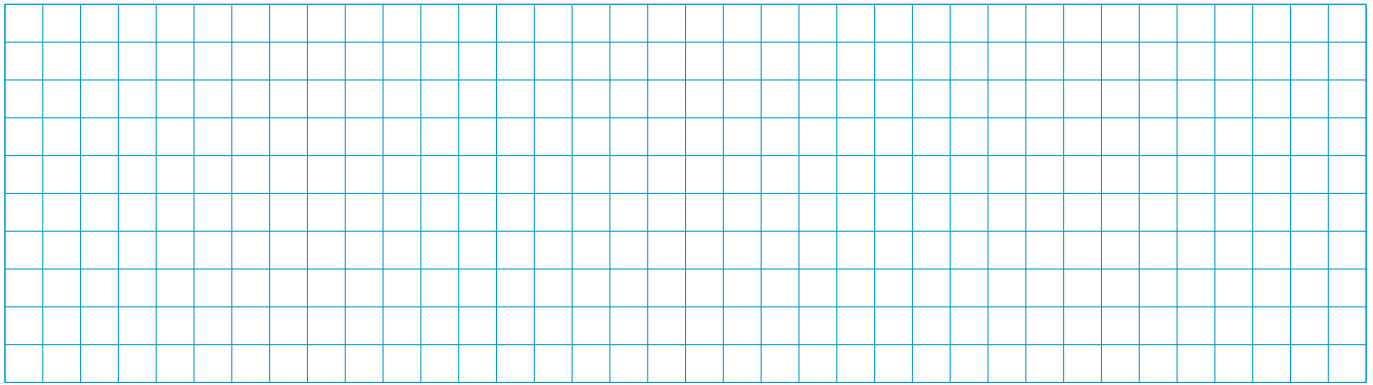
Tout espace euclidien de dimension finie admet une base orthonormée.

Définition : Soient E, F deux espaces euclidiens.

On appelle **isométrie** de E dans F toute application $f : E \rightarrow F$ qui est un isomorphisme d'espace vectoriel et $\forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\|$.

Remarque : $\forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\| \Leftrightarrow \forall x, y \in E, \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$.

Application : Démontrer la remarque précédente.



Définition : Deux espaces euclidiens E et F sont dits **isométriques** s'il existe une isométrie de E dans F .

Théorème :

Soit E un espace euclidien de dimension n .

Alors E est isométrique à \mathbb{R}^n muni du produit scalaire canonique.

Démonstration :

Soit (e_1, \dots, e_n) une base orthonormée de E .

Soit $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ la base canonique de \mathbb{R}^n .

On définit l'application linéaire $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ par $f(e_i) = \varepsilon_i$ pour tout $i \in S_n$.

Alors f est un isomorphisme d'espace vectoriel (car l'image d'une base est une base).

Soit $x, y \in E$.

$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$ avec $x_i, y_i \in \mathbb{R}$.

$\langle x, y \rangle = \langle \sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \langle e_i, e_j \rangle$ (bilinéarité)

$= \sum_{i=1}^n x_i y_i$ (car (e_1, \dots, e_n) est orthonormée) qui est le produit scalaire canonique de $f(x) = \sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i$ et $f(y) = \sum_{i=1}^n y_i \varepsilon_i$.

$= \langle f(x), f(y) \rangle$ (car $f(x) = \sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i$ et $f(y) = \sum_{i=1}^n y_i \varepsilon_i$)

$\Rightarrow f$ est une isométrie de E dans \mathbb{R}^n . \square

C Projections orthogonales

Définition : Soit E un espace euclidien et soit F un sous-espace vectoriel de E .

Alors :

1. $\forall x \in E \exists ! y \in F : (x - y) \perp F$. On dit que y est le **projeté orthogonal** de x sur F .
2. L'application $p : E \rightarrow F$ qui à x associe son projeté orthogonal sur F est appelée **projection orthogonale** de E sur F et $\ker(p) = \{z \in E : z \perp F\} = F^\perp$. On a de plus que p est un projecteur (i.e. $p^2 = p$).

Démonstration de l'unicité du projeté orthogonal :

Soit y tel que $y \in F$ et $x - y \perp F$.

F est un espace euclidien en posant comme produit scalaire sur F la restriction à $F \times F$ du produit scalaire de E .

Soit (e_1, \dots, e_k) une base orthonormée de F .

Alors : $y = \sum_{i=1}^k \langle y, e_i \rangle e_i$ et on a de plus $\forall i \in S_n \ e_i \perp x - y$.

Donc $0 = \langle x - y, e_i \rangle = \langle x, e_i \rangle - \langle y, e_i \rangle$ donc $y = \sum_{i=1}^k \langle x, e_i \rangle e_i$. \square

Démonstration de l'existence du projeté orthogonal :

Le vecteur $y = \sum_{i=1}^k \langle x, e_i \rangle e_i$ vérifie bien $y \in F$ et $x - y \perp F$. \square

Démonstration de $\ker(p)$:

$\ker p = \{z \in E : p(z) = 0\} = \{z \in E : z \perp F\} = F^\perp$. \square


Remarque : Soit p la projection orthogonale sur F . Alors pour $x \in E$, $p(x)$ est l'unique vecteur de F tel que $\|x - p(x)\| = \min_{z \in F} \|x - z\|$. Autrement dit, $p(x)$ est le point de F le plus proche de x .


Démonstration :


On a $\|x - z\|^2 = \|x - p(x) + p(x) - z\|^2 = \|x - p(x)\|^2 \|p(x) - z\|^2$ par Pythagore.

$\geq \|x - p(x)\|^2$. Donc $p(x)$ atteint le $\min_{z \in F} \|x - z\|$.

De plus, le minimum est unique car $\|x - z\| = \min_{z \in F} \|x - z\| \Rightarrow \|p(x) - z\| = 0 \Rightarrow p(x) = z$.

 **Note de rédaction** : cf. Laurent pour ce qui s'ensuit (fait). cf. OneNote pour le schéma.

 **Remarque** : On peut retrouver la formule de la distance d'un point à une droite / plan dans \mathbb{R}^3 . Prendre une base orthonormée du plan P et $d(x, P) = \|x - \sum_{i=1}^2 \langle x, e_i \rangle e_i\|$ où $d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|$.

 **Remarque** : Si (e_1, \dots, e_k) est une famille libre de E . Gram-Schmit définit par récurrence $u_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$ et $u_{k+1} = \frac{e_{k+1} - p_i(e_{k+1})}{\|e_{k+1} - p_i(e_{k+1})\|}$, où p_i est la projection orthogonale sur $\text{Vect}(u_1, \dots, u_k)$.


D Suppléments orthogonaux

Définition : Soit E un espace euclidien. Soit F un sous-espace vectoriel de E .

On note

$$F^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in F, \langle x, y \rangle = 0\} = \bigcap_{y \in F} \ker(x \mapsto \langle x, y \rangle) = \bigcap_{i \in S_k} \ker(x \mapsto \langle x, e_i \rangle)$$

où (e_1, \dots, e_k) est une base de F . F^\perp est appelé l'**espace orthogonal** de F dans E .

 **Remarque** : $x \perp F \Leftrightarrow x \in F^\perp$.

Théorème :

Soit E un espace euclidien de dimension finie et soit F un sous-espace vectoriel de E .

Alors $E = F \oplus F^\perp$ (c'est même une somme directe orthogonale) et $F = (F^\perp)^\perp$.

Démonstration :

$F^\perp = \ker p$ et $F = \text{Im } p$ où p est la projection orthogonale de E sur F .

D'où $F^\perp \oplus F = \ker p \oplus \text{Im } p = E$.

On a $\dim(F^\perp)^\perp = \dim(E) - \dim(F^\perp) = \dim(F)$ donc il suffit de montrer une inclusion.

Soit $y \in F^\perp$.

Alors $\forall x \in F, \langle y, x \rangle = 0$ (en effet, si $x \in F$ alors $\forall y \in F^\perp, \langle y, x \rangle = 0$)

D'où $F \subset (F^\perp)^\perp$, d'où $F^\perp \supset (F^\perp)^\perp$. \square

Corollaire :

Soit H un hyperplan de E . Alors il existe $x_0 \in E$ tel que $H = (\text{Vect}(x_0))^\perp$.


Démonstration :

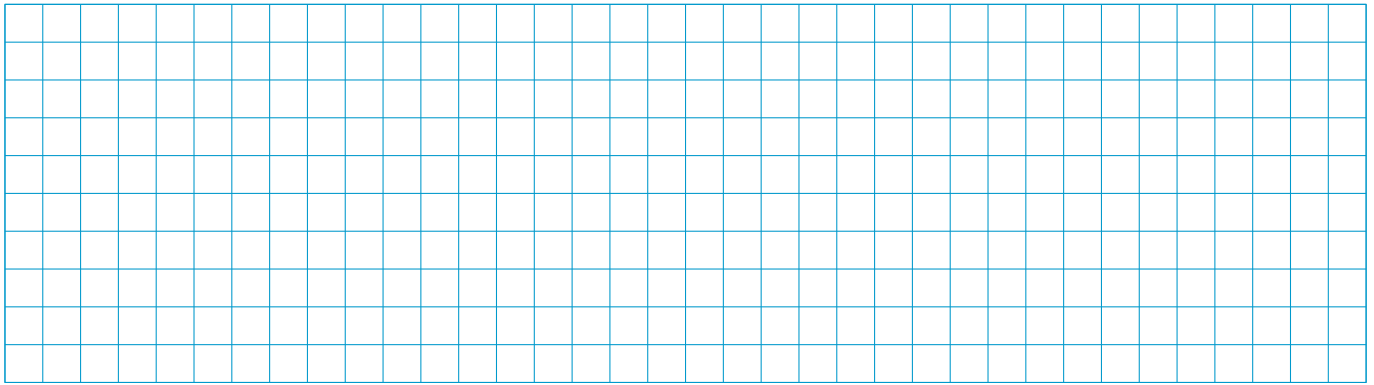
Par définition d'un hyperplan, et comme H^\perp est un supplémentaire de H , il existe $x_0 \in H^\perp$ tel que $H^\perp = \text{Vect}(x_0)$.

Et donc $H = (H^\perp)^\perp = (\text{Vect}(x_0))^\perp$. \square

 **Remarque** : Si $A \subset E$, on définit $A^\perp = \{x \in E : \forall a \in A, \langle x, a \rangle = 0\}$.

Alors A^\perp est un sev de E et $A^\perp = (\text{Vect}(A))^\perp$.

 **Application** : Montrer que $F_1 \subset F_2 \Rightarrow F_2^\perp \subset F_1^\perp$.



III Dual d'espace euclidien

Théorème : Représentation des formes linéaires

Soit E un espace euclidien. On note $j_E : E \rightarrow E^*$ l'application qui à x associe $j_E(x) : y \mapsto \langle x, y \rangle$. Alors j_E est un isomorphisme d'espace vectoriel de E dans E^* .

Autrement dit, $\forall \varphi \in E^*, \exists x \in E : \varphi = \langle x, \cdot \rangle$.

Démonstration :

j_E est linéaire et $\dim E = \dim E^*$ et $x \in \ker(j_E) \Leftrightarrow \forall y \in E, \langle x, y \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$. \square

Remarque : Si $\varphi \in E^*, y \in E$ on a le crochet de dualité $\langle \varphi, y \rangle$. Mais aussi si x est tel que $\varphi = \langle x, \cdot \rangle$, on a aussi $\langle x, y \rangle = \langle \varphi, y \rangle$. Donc on peut confondre les deux crochets de dualité. Autrement dit, $\langle j_E(x), y \rangle_{E^* \times E} = \langle x, y \rangle_{E \times E}$ et j_E permet de dire que le crochet de dualité est la même chose que le produit scalaire en identifiant E et E^* de manière canonique.

IV Cas des \mathbb{C} -espaces vectoriels : espaces hermitiens

Définition : Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel.

Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ une application.

On dit que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un **produit scalaire** sur E si :

1. $\forall x, y \in E, \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ (hermitianité)
2. $\forall x \in E, y \mapsto \langle x, y \rangle$ est \mathbb{C} -linéaire (linéarité en la seconde variable)
3. $\forall x \in E, \langle x, x \rangle > 0$ si $x \neq 0$ et $\langle x, x \rangle = 0$ si $x = 0$ (positivité)

Remarque : Sesquilineaire : $\forall y \in E \forall x, x' \in E \lambda \in \mathbb{C} \langle \lambda x + x', y \rangle = \bar{\lambda} \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle. \forall x \in E \forall y, y' \in E \forall \lambda \in \mathbb{C} \langle x, \lambda y + y' \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle$.

Exemple : Dans $\mathbb{C}^n, x = (x_i)$ et $y = (y_i), \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i y_i$ est un produit scalaire (canonique).

Remarque : Pour $n = 1, x, y \in \mathbb{C}, \langle x, y \rangle = \bar{x}y$ est un produit scalaire, et $\langle x, x \rangle = |x|^2$ (module au carré).

Remarque :

$\left\{ \begin{array}{l} y \mapsto \langle x, y \rangle \text{ est } \mathbb{C}\text{-linéaire} \\ \forall x, y \in E, \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \text{ (hermitianité)} \end{array} \right\}$ implique que $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ est sesquilineaire.

Remarque : Dans $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{C})$, $\langle f, g \rangle = \int_a^b \overline{f(t)}g(t)dt$ est un produit scalaire.

Définition : On appelle **espace hermitien** un \mathbb{C} -espace vectoriel muni d'un produit scalaire (complexe/hermitien).

Définition : Soit E un espace hermitien.

On appelle **famille orthonormée** de E une famille de vecteurs normés qui sont deux à deux orthogonaux, c'est à dire (e_1, \dots, e_k) telle que $\forall i, j \in S_k, \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$.

Remarque : Le théorème de Pythagore reste vérifié dans les espaces hermitiens.

✖ **Attention** ✖ La réciproque du même théorème ($\langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$) n'est pas vérifiée dans les espaces hermitiens.

Proposition :

Si (e_1, \dots, e_n) est une base orthonormée de E un espace hermitien, et on a $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$, alors :

$$x_i = \langle x, e_i \rangle \text{ et } y_j = \langle y, e_j \rangle \text{ et } \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \overline{x_i} y_i$$

Théorème : Inégalité de Cauchy-Schwarz dans les espaces hermitiens

Soit E un espace hermitien de dimension finie (et son produit scalaire complexe).

Alors $\forall x, y \in E, |\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}$

Corollaire :

Si E est un \mathbb{C} -espace vectoriel muni d'un produit scalaire complexe, alors $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ est une norme sur E .

 **Application :** Proposer une démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans les espaces hermitiens.

[illegible]

Contents

I	Produit scalaire et norme	1
A	Produit scalaire	1
B	Normes	2
II	Orthogonalité	3
A	Vecteurs orthogonaux, familles orthogonales et orthonormées	3
B	Procédé d'orthonormalisation Gram-Schmidt	4
C	Projections orthogonales	5
D	Suppléments orthogonaux	6
III	Dual d'espace euclidien	7
IV	Cas des \mathbb{C}-espaces vectoriels : espaces hermitiens	7