Chapitre 4 : Variables aléatoires

I Définitions

Rappel : Un rappel a été proposé sur l'image réciproque d'un ensemble par une application.

Définition : Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et soit E un ensemble dénombrable.
Une **variable aléatoire à valeurs dans** E est une application de Ω dans E.

De manière générique, on la note $X : \Omega \to E$

Vocabulaire : On écrira souvent *v.a.r.* pour *variable aléatoire réelle*, ie. une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Définition : Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire à valeurs dans E.
La **loi de** X est une probabilité définie sur E par :

$$\mu_X(A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A)) := \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\})$$

où $A \in \mathcal{P}(E)$

Application : Vérifier en montrant les axiomes de la probabilité que μ_X est bien une probabilité sur E.

Exemple : On lance deux dés. $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^2 = \{(\omega_1, \omega_2) : \omega_i \in \{1,2,3,4,5,6\}\}$ et $\mathbb{P}$ est la probabilité uniforme.
On pose $S : \Omega \to \{2, 3, \dots, 12\}$ définie par $S((\omega_1, \omega_2)) = \omega_1 + \omega_2$.
$\mu_S(2) = \mathbb{P}(S^{-1}(\{2\})) = \mathbb{P}(\{(1,1)\}) = \frac{1}{36} = \mathbb{P}(S = 2)$
$\mu_S(3) = \mathbb{P}(S^{-1}(\{3\})) = \mathbb{P}(\{(1,2),(2,1)\}) = \frac{2}{36} = \mathbb{P}(S = 3)$
$\mu_S(4) = \mathbb{P}(S^{-1}(\{4\})) = \mathbb{P}(\{(1,3),(2,2),(3,1)\}) = \frac{3}{36} = \mathbb{P}(S = 4)$
$\dots$

Vocabulaire : On a les abréviations et/ou notations suivantes :

- $\mu_X(A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A)) = \mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\})$
- $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X^{-1}(\{k\})) = \mu_X(\{k\})$

Exemple : On va ici illustrer la loi de Bernouilli.
La loi de Bernouilli est donnée par $\mu(\{0\}) = 1 - p$ et $\mu(\{1\}) = p$ où $p \in [0, 1]$.
Une **variable de Bernouilli** de paramètre p est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathbb{P})$ $X : \Omega \to \{0, 1\}$ telle que μ_X est la loi de Bernouilli de paramètre p.
On la note $Ber(p)$

Définition : Soit E un ensemble fini.
La **loi uniforme sur** E est définie par $\mu(\{x\}) = \frac{1}{|E|}$ pour tout $x \in E$. On la note $\mathcal{U}(E)$

Contents