

# Chapitre 5 : Fonctions de plusieurs variables

## Cadre de travail :

- $p, q \in \mathbb{N}^*$
- $U$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$
- $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$
- $\mathbb{R}^p$  et  $\mathbb{R}^q$  sont des espaces vectoriels qui peuvent être normés, donc des espaces métriques. Ainsi, toutes les propriétés et des notions des espaces métriques s'appliquent.

## I Continuité

**Rappel :** Une suite  $(X_n)$  à valeur dans  $\mathbb{R}^p$  converge si et seulement si chacune de ses composantes converge.

### Proposition :

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^q$  et  $a \in U$ . On écrit  $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_q(x))$ ,  $x \in U$ .  
On a :  $f$  est continue en  $a \Leftrightarrow \forall i = 1, \dots, q, f_i(x)$  est continue en  $a$ .

**Remarque :**  $\forall i = 1, \dots, q$ , les fonctions  $x \mapsto f_i(x)$  sont à valeur dans  $\mathbb{R}$ , donc on peut utiliser les résultats de la continuité pour les fonctions à valeur réelle.

**Vocabulaire :** On appelle les  $f_i$  les **fonctions composantes** de  $f$ .

Pour comprendre la continuité, il suffit de se restreindre aux fonctions  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ .

## II Vers une bonne notion de dérivée pour les fonctions à plusieurs variables

**Introduction :** Soit  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  où  $]a, b[ \subset \mathbb{R}$ . On dit que  $f$  est dérivable en  $x \in ]a, b[$  si il existe un réel  $f'(x)$  tel que :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + o(h)$$

Ce qui équivaut à :  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$  existe.

Si  $f$  est dérivable en  $x$  alors on sait que  $f$  est continue en  $x$ .

$|f(x+h) - f(x)| \rightarrow 0$  quand  $h \rightarrow 0$ .

### A Rappels : fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^q, q \geq 1$

Soit  $f : x \mapsto (f_1(x), f_2(x), \dots, f_q(x))$  (fonction coordonnées)

**Définition :** On dit que  $f$  est dérivable en  $x \in ]a, b[$  si  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x+h)}{h}$  existe. (avec  $\frac{f(x) - f(x+h)}{h} \in \mathbb{R}^q$ ).  
i.e.  $\exists L \in \mathbb{R}^q$  tel que  $\|\frac{f(x) - f(x+h)}{h} - L\| \rightarrow 0$  quand  $h \rightarrow 0$  où  $\|\cdot\|$  est une norme  $\mathbb{R}^q$  (elles sont équivalentes).

### Proposition : Dérivabilité

$f$  est dérivable en  $x \Leftrightarrow \forall i = 1, \dots, q, f_i$  est dérivable en  $x$  et on a :  $f'(x) = (f'_1(x), f'_2(x), \dots, f'_q(x))$ .  
Autrement dit,  $f$  est dérivable en  $x$  si et seulement si chacune de ses composantes est dérivable en  $x$ .

## B Dérivées partielles

Soit  $U \subset \mathbb{R}^p$  ouvert et  $p \in \mathbb{N}^*$ . On considère  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^q$ .

**Remarque :** Penser à une fonction  $f$  définie de  $U = \mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$ , donc  $p = 2$  et  $q = 1$ . (tous les problèmes se posent déjà dans ce cas)

On veut définir la notion de dérivées partielles en un point  $a = (a_1, a_2, \dots, a_p) \in U$ .

Il y a  $p$  dérivées partielles (car  $p$  variables). Prenons  $k \in \{1, \dots, p\}$  et définissons la  $k$ -ième dérivée partielle de  $f$  en  $a = (a_1, a_2, \dots, a_p)$ .

Considérons la  $k$ -ième fonction partielle d'une variable réelle  $g_k : x_k \mapsto f(a_1, \dots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \dots, a_p)$ .

Les points  $a_1, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_p$  sont fixés dans  $\mathbb{R}$  et  $x_k$  varie dans un voisinage de  $a_k$ .

On dit que  $f$  admet une  $k$ -ième dérivée partielle en  $a$  si  $g_k$  est dérivable en  $a_k$  et on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = g'_k(a_k)$$

**Attention** Avant de calculer une dérivée partielle en un point, il faut justifier qu'elles existent (i.e. que les fonctions partielles sont dérivables en les points correspondants).

**Remarque :**  $f$  admet une  $k$ -ième dérivée partielle en  $a \Leftrightarrow$  la fonction  $t \mapsto f(a + te_k)$  (où  $e_k$  est le  $k$ -ième vecteur de la base canonique de  $\mathbb{R}^p$ ) est dérivable en 0.

**Définition :** On dit que  $f$  admet des dérivées partielles en  $a$  si  $\forall k \in \{1, \dots, p\}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$  existe. (i.e. toutes les dérivées partielles existent en  $a$ )

**Attention** Problème : Malheureusement, ce n'est pas parce que  $f$  admet des dérivées partielles en  $a$  que  $f$  est continue en  $a$ . (d'où le fait de chercher une meilleure notion de dérivabilité)

*Transition :* On peut voir le problème de continuité en  $(0, 0)$  comme le fait que  $f(x, x) = \frac{1}{2}$  qui ne tend pas vers 0 quand  $x \rightarrow 0$ .

En fait, on regarde la trajectoire  $t \mapsto (t, t)$  qui n'est pas alignée avec les axes.

Une notion plus forte que la dérivée partielle est la dérivée directionnelle.

## C Dérivées directionnelles

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^q$  où  $U \subset \mathbb{R}^p$  ouvert.

Soit  $a \in U$  et soit  $h$  un vecteur de  $\mathbb{R}^p$ .

Considérons la fonction d'une variable réelle  $\varphi : t \mapsto f(a + th)$  où  $t$  varie dans un voisinage de 0 tel que  $a + th \in U$ .

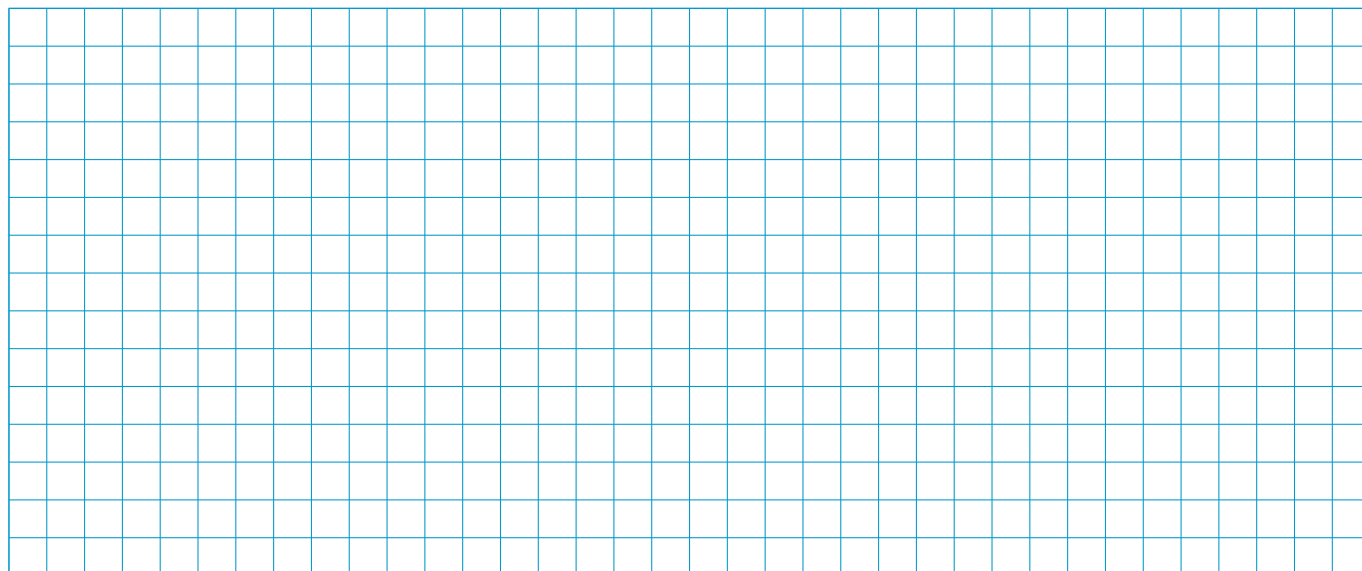
**Définition :** On dit que  $f$  admet une dérivée directionnelle en  $a$  selon la direction  $h$  si  $\varphi$  est dérivable en 0. On a :

$$\varphi'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + th) - f(a)}{t}$$


### Proposition : Lien avec la dérivée partielle

Si on choisit comme direction  $h = e_k$  (le  $k$ -ième vecteur de la base canonique de  $\mathbb{R}^p$ ), alors la dérivée directionnelle de  $f$  en  $a$  selon la direction  $e_k$  est la  $k$ -ième dérivée partielle de  $f$  en  $a$ .

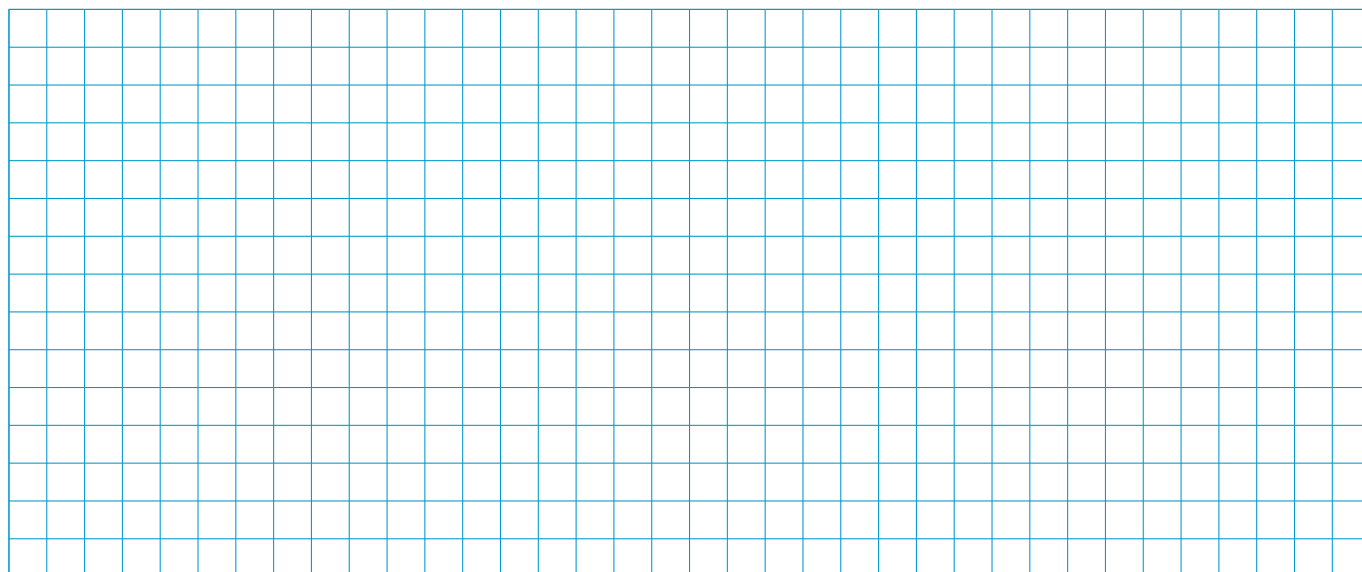
**Application :** Étudier la dérivée directionnelle en toutes les directions au point  $(0, 0)$  de la fonction  $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$  si  $(x, y) \neq (0, 0)$  et  $f(0, 0) = 0$ .



✗ **Attention** ✗ Cette notion de dérivée directionnelle est encore trop faible pour garantir la continuité de  $f$  en  $a$ .

 **Application** : Considérer  $f(x, y) = \frac{y^2}{x}$  si  $x \neq 0$  et  $f(x, y) = y$  sinon.

1. Montrer que  $f$  admet des dérivées directionnelles en tout point de  $\mathbb{R}^2$  et en toute direction.
2. Montrer que  $f$  n'est pas continue sur  $\mathbb{R}^2$ . *Indication : Considérer le point  $(0, 1)$  et  $(\frac{1}{n}, 1) \rightarrow (0, 1)$ .*



## D Dérivées différentielles (cette fois-ci c'est la bonne !)

La dérivée différentielle est la notion qui assure que si une fonction est différentiable en un point, alors elle est continue en ce point. Soit  $f: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  et  $a \in U$ , où  $U \subset \mathbb{R}^p$  est ouvert.

**Définition** : On dit que  $f$  est différentiable en  $a \Leftrightarrow \exists Df(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$  telle que :

$$f(a + h) = f(a) + Df(a) \cdot h + o(\|h\|) \quad \text{quand } h \rightarrow 0$$

avec  $\forall h \in \mathbb{R}^p, f(a) \in \mathbb{R}^q, Df(a) \cdot h \in \mathbb{R}^q$ , et  $o(\|h\|) = \|h\|\varepsilon(h)$  où  $\varepsilon(h) \rightarrow 0$  quand  $\|h\| \rightarrow 0$ .

**Proposition : Différentiabilité implique continuité**

Si  $f$  est différentiable en  $a$ , alors  $f$  est continue en  $a$ .

**Proposition : Lien avec les dérivées directionnelles**

Si  $f$  est différentiable en  $a$ , alors  $f$  admet des dérivées directionnelles en  $a$  selon toutes les directions et on a :

$$\forall h \in \mathbb{R}^p, \quad \text{la dérivée directionnelle de } f \text{ en } a \text{ selon la direction } h \text{ est } Df(a) \cdot h$$

**Proposition : Lien avec le gradient (admis)**

On a que la dérivée directionnelle de  $f$  en  $a$  selon la direction  $h$  est donnée par  $Df(a) \cdot h = \langle \nabla f(a), h \rangle$  où  $\nabla f(a)$  est le gradient de  $f$  en  $a$ .

**Exemple :** Posons  $f(x, y, z) = x^2 \cdot (1 + z \cdot \cos(y))$ .

On admet que  $\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x(1 + z \cdot \cos(y)) \\ -x^2 z \cdot \sin(y) \\ x^2 \cdot \cos(y) \end{pmatrix}$ .

Donc la dérivée directionnelle de  $f$  le long du vecteur  $(1, 1, 1)$  au point  $(1, \pi, 1)$  est :

$$Df(1, \pi, 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \langle \nabla f(1, \pi, 1), (1, 1, 1) \rangle$$

$$\text{Or } \nabla f(1, \pi, 1) = \begin{pmatrix} 2(1 + 1 \cdot \cos(\pi)) \\ -1^2 \cdot 1 \cdot \sin(\pi) \\ 1^2 \cdot \cos(\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Donc la dérivée directionnelle de  $f$  le long du vecteur  $(1, 1, 1)$  au point  $(1, \pi, 1)$  est  $\langle (0, 0, -1), (1, 1, 1) \rangle = -1$ .

**Remarque :** Il existe des fonctions qui admettent des dérivées directionnelles en un point selon toutes les directions mais qui ne sont pas différentiables en ce point.

**Note de rédaction :** Les prochains théorèmes sont compliqués et leur preuve dépasse le cadre de ce cours. Ils seront donnés dans un cadre réduit et admis sans preuve.

**Gradient d'une fonction numérique**

Soit  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  où  $U \subset \mathbb{R}^p$  est ouvert.

On a défini le gradient de  $f$ .

Supposons  $f$  différentiable en  $a \in U$ .

On a  $Df(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$  (la différentielle est une forme linéaire).

Prenons  $h, k \in \mathbb{R}^p$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^p$ .

Donc  $h = (h_1, h_2, \dots, h_p)$  et  $k = (k_1, k_2, \dots, k_p)$  (considérer plutôt des vecteurs colonnes, mais pas évident à écrire ici).

On note :  $\langle h, k \rangle = \sum_{i=1}^p h_i k_i$  (HP : produit scalaire).

On veut  $Df(a) \cdot h = \langle *, h \rangle$  pour un certain  $* \in \mathbb{R}^p$ .

Si  $h = \sum_{i=1}^p h_i e_i$  où  $e_i$  est le  $i$ -ième vecteur de la base canonique de  $\mathbb{R}^p$ , on a :

$$Df(a)h = \sum_{i=1}^p Df(a)(h_i e_i) = \sum_{i=1}^p h_i Df(a)e_i.$$

On note :  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = Df(a)e_i$  (la  $i$ -ième dérivée partielle de  $f$  en  $a$ ).

Donc :  $Df(a)h = \sum_{i=1}^p h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ .

Pour écrire cela sous la forme  $\langle *, h \rangle$ , on pose :

$$\nabla f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_p}(a) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$$

(On appelle  $\nabla f(a)$  le gradient de  $f$  en  $a$ )

On a donc :  $Df(a)h = \langle \nabla f(a), h \rangle$ .

**Définition :** Un point critique de  $f$  est un point  $x$  où  $\nabla f(x) = 0$ .

Si  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^q$  alors on a  $\forall h \in \mathbb{R}^p, Df(a)h = Df(a) \cdot \sum_{i=1}^p h_i e_i = \sum_{i=1}^p h_i Df(a)e_i$ .  
 $= \sum_{i=1}^p h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$  où  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \in \mathbb{R}^q$  est la  $i$ -ième dérivée partielle de  $f$  en  $a$ .  
 $= \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) e_i^*$ .  
 En notant  $e_i^* = dx_i$  (forme linéaire sur  $\mathbb{R}^p$ ), on a :  $Df(a) = \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) dx_i$ .

### Matrice jacobienne

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^q$  où  $U \subset \mathbb{R}^p$  est ouvert.  
 Supposons  $f$  différentiable en  $a \in U$ .

**Définition :** La jacobienne est la matrice de  $Df(a)$  dans les bases canoniques de  $\mathbb{R}^p$  et  $\mathbb{R}^q$ .  
 Elle est notée  $J_f(a) \in M_{q,p}(\mathbb{R})$ .

On a :

$$Jf(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_p}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_q}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_q}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_q}{\partial x_p}(a) \end{pmatrix} = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{1 \leq i \leq q, 1 \leq j \leq p}$$

**Remarque :** On remarque que  $J_f(a) = {}^t(\nabla f(a))$

**Définition :** Si  $p = q$ , alors  $J_f(a) \in M_p(\mathbb{R})$ .

On définit le déterminant jacobien de  $f$  en  $a$  comme étant :  $\det J_f(a)$ .

## III Fonctions $C^1, C^2$

Supposons  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  (vrai pour  $\mathbb{R}^q$ )

**Définition :** On dit que  $f$  est continuellement différentiable sur  $U$  si :  $a \in U \mapsto Df(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  est continue sur  $U$ .  
 Ce qui est équivalent à :  $\forall h \in \mathbb{R}^2, a \mapsto Df(a) \cdot h$  est continue sur  $U$ .

### Théorème :

$f$  est différentiable sur  $U \Leftrightarrow$  les dérivées partielles sont continues sur  $U$ .

C'est à dire,  $a \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(a)$  et  $a \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(a)$  sont continues sur  $U$ .

**Définition :**  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est de classe  $C^1$  sur  $U$  si  $f$  est différentiable sur  $U$  et si les dérivées partielles de  $f$  sont continues sur  $U$ .

Etant donnée  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  sur  $U$ , on peut se demander si  $f$  est plus régulière : est-elle de classe  $C^2$  ?

Considérons la fonction qui  $a \in U \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(a)$ . (de même en remplaçant  $x$  par  $y$ )

On peut se demander si les dérivées partielles des dérivées partielles existent et sont continues.

**Définition :**  $f$  est de classe  $C^2$  sur  $U$  si  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $U$  et si les dérivées partielles de  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  existent et sont continues sur  $U$ .  
On note :  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ .

**Théorème de Schwarz :** (admis)

Si  $f$  est de classe  $C^2$  sur  $U$ , alors :

$$\forall (x, y) \in U, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$$

On a la commutativité des dérivées partielles d'ordre 2.

Il est alors naturel de considérer la matrice  $Hf(a) \in M_2(\mathbb{R})$  définie par :

$$Hf(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \end{pmatrix}$$

Le Théorème de Schwarz assure que  $Hf(a)$  est une matrice symétrique (i.e.  $Hf(a) = {}^t Hf(a)$ ).

Cela nous permet d'écrire deux développements de Taylor d'ordre 1 et 2 pour  $f$  en  $a$  :

Si  $f$  est  $C^1$ ,  $f(a + (h, k)) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a)k + o(\|(h, k)\|)$  quand  $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ .

Et à l'ordre 2, si  $f$  est  $C^2$ ,

$f(a + (h, k)) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a)k + \frac{1}{2}(h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)) + o(\|(h, k)\|^2)$  quand  $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ .

Bonnes vacances et bonnes révisions ! :)