Chapitre 4 : Topologie des espaces métriques et des espaces vectoriels normés

I Distances et normes

Soit X un ensemble quelconque (dans la suite supposé non nul).

Définition : Une distance d sur X est une application $d\colon X \times X \to \mathbb{R}^+$ qui vérifie les axiomes suivants :

1. $\forall (x, y) \in X^2, d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie)
2. $\forall x, y, z \in X, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire)
3. $\forall (x, y) \in X^2, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (séparation)

Vocabulaire : On appelle **espace métrique** un couple (X, d) où X est un ensemble et d une distance sur X.

Exemple :

- $\mathbb{R}$ muni de la distance $d(x, y) = |x - y|$, où $|\cdot|$ est la valeur absolue.
- $\mathbb{C}$ muni de la distance $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$, où $|\cdot|$ est le module.