Chapitre 3 : Intégrales impropres

✖ **Attention** ✖ Tous les exemples de calculs d'intégrales dans ce chapitre sont à connaître par cœur (il s'agit d'intégrales de référence), et peuvent être utilisés dans des exercices.

I Généralités sur les intégrales impropres

A Sur un intervalle du type $[a, +\infty[, a \in \mathbb{R}$

Définition : Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ une fonction continue.
On dit que l'intégrale impropre *(ou généralisée)* au voisiage de $+\infty$ converge (ou existe) si $\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)dt$ existe et est finie.

Dans ce cas, on note: $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ l'intégrale impropre. Si une telle limite n'existe pas, on dit que l'intégrale diverge.

Remarque : On utilisera la notation $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ pour l'intégrale impropre qui converge ou diverge (on précise toujours si elle converge ou diverge).

Propriété :

Supposons que $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.
Alors, $\lim_{A\to+\infty} \int_A^{+\infty} f(t)\,dt = 0$ converge. C'est le reste de l'intégrale impropre.

Preuve:
Soit $x > A > a$.
On a : $\int_a^x f(t)\,dt = \int_a^A f(t)\,dt + \int_A^x f(t)\,dt$.
En faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient : $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt = \int_a^A f(t)\,dt + \int_A^{+\infty} f(t)\,dt$.
On passe à la limite sur A, $A \to +\infty$ et on obtient :
$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt = \int_a^{+\infty} f(t)\,dt + \lim_{A\to+\infty} \int_A^{+\infty} f(t)\,dt$.
Donc $\lim_{A\to+\infty} \int_A^{+\infty} f(t)\,dt = 0$ $\square$.

Remarque : Si on continue f continue de $]-\infty, a]$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on peut définir l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^a f(t)\,dt$ par $\lim_{x\to-\infty} \int_x^a f(t)\,dt$.

Exemple : $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt$ converge-t-elle?

1. D'abord, $t \mapsto \frac{1}{t}$ est continue sur $[1, +\infty[$.
2. Soit $x > 1$, $\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = [\ln(t)]_1^x = \ln(x)$.
   Donc, $\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.
   Donc $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt$ diverge.

Exemple : $\int_0^{+\infty} cos(t)\,dt$ converge-t-elle?

1. D'abord, $t \mapsto cos(t)$ est continue sur $[0, +\infty[$.
2. Soit $x > 0$, $\int_0^x cos(t)\,dt = [sin(t)]_0^x = sin(x)$.
   Donc, $\lim_{x\to+\infty} \int_0^x cos(t)\,dt = \lim_{x\to+\infty} sin(x)$ n'existe pas.
   Donc $\int_0^{+\infty} cos(t)\,dt$ diverge.

Exemple : $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ converge-t-elle? ($\alpha \in \mathbb{R}$)

1. D'abord, $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est continue sur $[0, +\infty[$ pour $\alpha > 0$.

2. Soit $x > 0$, $\int_0^x \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_0^x = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.
   Donc, $\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.

   - Si $\alpha < 1$, alors $1-\alpha > 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} = +\infty$.
   - Si $\alpha = 1$, alors $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ est indéfini.
   - Si $\alpha > 1$, alors $1-\alpha < 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} = 0$.

   Donc $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Proposition : Convergence des intégrales de Riemann

Les intégrales de la forme $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ sont appelées des intégrales de Riemann et convergent si et seulement si $\alpha > 1$, et on a :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{si } \alpha > 1 \\ \text{indéterminée} & \text{si } \alpha = 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha < 1 \end{cases}$$

Exemple : $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,dt$ converge-t-elle?

1. D'abord, $t \mapsto e^{-\alpha t}$ est continue sur $[0, +\infty[$ pour $\alpha > 0$.

2. Soit $x > 0$, $\int_0^x e^{-\alpha t}\,dt = \left[-\frac{e^{-\alpha t}}{\alpha}\right]_0^x = \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha x})$.
   La convergence de $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,dt$ est la même que $\frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha x})$, quand $x \to +\infty$.
   Donc, $\lim_{x\to+\infty} \int_0^x e^{-\alpha t}\,dt = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha x}) = \frac{1}{\alpha}$.
   Donc $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,dt$ converge si, et seulement si, $\alpha > 0$, et vaut $\frac{1}{\alpha}$.

✕ Attention ✕ Si $\alpha \leq 0$, l'intégrale diverge.

Vocabulaire : La nature de l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ est la convergence ou la divergence de cette intégrale.

Application : Déterminer la nature de l'intégrale impropre suivante : $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+1}\,dt$.

B Sur un intervalle du type $]-\infty, +\infty[$

Définition : Soit $f :]-\infty, +\infty[\to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ une fonction continue.
On dit que l'intégrale impropre (ou généralisée) sur $]-\infty, +\infty[$ converge si pour $a \in \mathbb{R}$, les deux intégrales $\int_{-\infty}^a f(t)\,dt$ et $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ convergent.

Exemple : $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt$ converge-t-elle?

1. D'abord, $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue sur $]-\infty, +\infty[$.

2. On a $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \lim_{x\to+\infty} [\arctan(t)]_0^x = \frac{\pi}{2}$ (converge).

3. On a $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+t^2}\,dt = \lim_{y\to-\infty} [\arctan(t)]_y^0 = \frac{\pi}{2}$ (converge).

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt$ converge et vaut π.

C Intégrales impropres sur des intervalles $[a, b[, b < +\infty$

Définition : Soient $a < b \in \mathbb{R}$. Considérons une fonction continue sur $[a, b[$ *(a priori, f n'est pas continue en b car sinon $\int_a^b f(t)\,dt$ n'est pas impropre).*

On définit l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)\,dt$ comme la limite $\lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)\,dt$, si cette limite existe et est finie.
Si cette limite n'existe pas, on dit que l'intégrale diverge.

Remarque : Si $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ est continue, on peut définir l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)\,dt$ par $\lim_{x\to a^+} \int_x^b f(t)\,dt$.

Exemple : $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ converge-t-elle? $\int_0^1 \ln(t)\,dt$ converge-t-elle?

Remarque : Il se peut qu'on rencontre des intégrales impropres aux deux bornes a et b avec $f :]a, b[\to \mathbb{R}$. Pour étudier $\int_a^b f(t)\,dt$ on peut utiliser la relation de Chasles ($c \in]a, b[$), ce qui nous ramène à des intégrales impropres à une seule borne : $\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$.

Application : Résolution d'un faux problème aux bornes par prolongement par continuité. Prenons $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}\,dt$.

- $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ est $\mathcal{C}^0(]0, 1], \mathbb{R}$ (i.e. continue sur $]0, 1]$). *A priori*, on a une intégrale impropre en 0.
- On remarque que $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ peut être prolongée par continuité en 0 par la valeur 1 (car $\lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$). Donc on définit $\tilde{f}(t) :]0, 1] \to \mathbb{R}, t \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(t)}{t} & \text{si } t \in]0, 1] \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$.
- Maintenant, $\tilde{f}$ est continue sur $[0, 1]$, donc l'intégrale $\int_0^1 \tilde{f}(t)\,dt$ est une intégrale de Riemann classique. Et en fait, $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}\,dt = \int_0^1 \tilde{f}(t)\,dt$. (ne dépend pas des points clés)

Proposition : Prolongement par continuité

Soient $a < b \in \mathbb{R}$ et $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Si f peut être prolongée par continuité en a (resp. en b), alors l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)\,dt$ converge si et seulement si l'intégrale de Riemann $\int_a^b \tilde{f}(t)\,dt$ converge, où $\tilde{f}$ est le prolongement par continuité de f en a (resp. en b).

Dans ce cas, on a : $\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b \tilde{f}(t)\,dt$.

Preuve:
C'est par définition de l'intégrale de Riemann : retirer un nombre fini de points d'un intervalle n'affecte pas la valeur de l'intégrale (de l'aire sous la courbe).
En réalité, ça se démontre via les intégrales de Lebesgue et la mesure, mais ce n'est pas au programme ici. □

Remarque : Toutes les propositions évoquées jusqu'ici restent valables pour une fonction continue par morceaux.

Application : Etudier la convergence de $\int_1^2 \frac{\ln(t)}{t-1}\,dt$.

Indication: On peut élargir la classe de fonctions que l'on intègre (fonctions continues) en considérant la classe des fonctions continues par morceaux.

Rappel : Fonctions continues par morceaux

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^0 p.m$ (par morceaux) sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision de $[a,b]$ donnée par $a = a_0 < a_1 < ... < a_n = b$ telle que :

- f restreinte à chaque intervalle $]a_{i-1}, a_i[$ est continue.
- Pour tout $i \in [|1, n-1|]$, les limites $\lim_{x \to a_i^-} f(x)$ et $\lim_{x \to a_i^+} f(x)$ existent et sont finies.

Exemple : La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est continue par morceaux sur tout intervalle $[a,b]$.

Contre-Exemple : Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$ n'est pas continue par morceaux sur $[0,1]$ car $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.

D Propriétés des intégrales convergences

Ici, on va considérer $[a,b[$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Propriété : Linéarité des intégrales impropres

Soient $f, g \in \mathcal{C}^0([a,b[, \mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ telles que les intégrales impropres $\int_a^b f(t)\,dt$ et $\int_a^b g(t)\,dt$ convergent.
Alors l'intégrale impropre $\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))\,dt = \lambda \int_a^b f(t)\,dt + \mu \int_a^b g(t)\,dt$ converge.

Propriété : Positivité

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b[, \mathbb{R})$ telle que $f(t) \geq 0$ pour tout $t \in [a,b[$ et que l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)\,dt$ converge.
Alors, $\int_a^b f(t)\,dt \geq 0$.

De plus, si $\int_a^b f(t)\,dt = 0$, alors $f(t) = 0$ pour tout $t \in [a,b[$.

Propriété : Relation de Chasles

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b[,\mathbb{R})$ telle que l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)\,dt$ converge.
Alors $\forall c \in]a,b[$, les intégrales impropres $\int_a^c f(t)\,dt$ et $\int_c^b f(t)\,dt$ convergent et on a :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$$

Propriété : Intégration par parties

Soient $u, v \in \mathcal{C}^1([a,b[,\mathbb{R})$.
On a $\forall x \in [a,b[$, $\int_a^x u(t)v'(t)\,dt = [u(t)v(t)]_a^x - \int_a^x u'(t)v(t)\,dt$.

$= u(x)v(x) - u(a)v(a) - \int_a^x u'(t)v(t)\,dt$.

On part de $\int_a^b u(t)v'(t)\,dt$ converge.
Dans ce cas, si $\lim_{x\to b} u(x)v(x)$ et $\lim_{x\to b} \int_a^x u'(t)v(t)\,dt$ existent, alors on peut écrire :

$$\int_a^b u(t)v'(t)\,dt = \lim_{x\to b}[u(x)v(x)]_a^x - \lim_{x\to b}\int_a^x u'(t)v(t)\,dt$$

✖ **Attention** ✖ Savoir refaire ce calcul plutôt que de le réciter.

Application : Montrer que $\int_0^{+\infty} t^n e^{-\lambda t}\,dt = \frac{n!}{\lambda^{n+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Théorème : Changement de variable

Soient $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ (b peut être infini) une fonction continue et $\varphi : [\alpha,\beta[\to [a,b[$ une fonction $\mathcal{C}^1$ bijective et strictement croissante. (en fait $\varphi^{-1}(a) = \alpha$ et $\varphi^{-1}(b) = \beta$)

Alors $\int_a^b f(t)\,dt$ converge si et seulement si $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$ converge.
Et dans ce cas, on a :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

Preuve:
On considère $\int_a^A f(t)\,dt$ pour $A > a$.
On a : $\int_a^A f(t)\,dt = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(A)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$.

En fait, φ^{-1} est continue, donc $\mathcal{C}^1$.
Donc si $A \to b$, alors $\varphi^{-1}(A) \to \varphi^{-1}(b)$ et donc $\lim_{A\to+\infty} \int_a^A f(t)\,dt =$
$lim_{\varphi^{-1}(A)\to\varphi^{-1}(b)} \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(A)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$.

Et donc $\int_a^b f(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$. $\square$

Remarque : On ne change pas la nature de l'intégrale impropre avec un changement de variable.

Exemple : Convergence et calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{e^t}{1+e^{2t}}\,dt$.
En pratique, on note $\varphi = u$. Ici, posons $u(t) = e^t$, donc $du = e^t dt$.
Alors $\int_0^{+\infty} \frac{e^t}{1+e^{2t}}\,dt = \int_{u(0)}^{u(+\infty)} \frac{1}{1+u^2}\,du = \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+u^2}\,du$.
On sait que cette intégrale converge et vaut $\frac{\pi}{4}$ (arctan).

II Fonctions positives

On se donne $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue.

Remarque : Toutes les propositions qui suivent sont analogues aux séries numériques à termes positifs.

Proposition :

$\int_a^b f(t)\,dt$ converge si et seulement si la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est bornée.

Remarque : Ici, c'est une série converge ssi la suite des sommes partielles est bornée.

Preuve:
La fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est croissante.
Si $x' > x$ alors $F(x') - F(x) = \int_a^{x'} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_x^{x'} f(t)\,dt \geq 0$ (car f positive).

Théorème : Comparaison

Soient $f, g \in \mathcal{C}^0([a,b[, \mathbb{R})$. Supposons $0 \leq f(t) \leq g(t)$ pour tout $t \in [a,b[$.
Alors :

- Si $\int_a^b g(t)\,dt$ converge, alors $\int_a^b f(t)\,dt$ converge.
- Si $\int_a^b f(t)\,dt$ diverge, alors $\int_a^b g(t)\,dt$ diverge.

Théorème : Comparaison par équivalences

Soient $f, g \in \mathcal{C}^0([a,b[, \mathbb{R})$. On suppose f positive (ou signe constant) au moins au voisinage de b et que $f(t) \sim_{t\to b} g(t)$.
Alors les intégrales impropres $\int_a^b f(t)\,dt$ et $\int_a^b g(t)\,dt$ sont de même nature.

Théorème : Comparaison avec o

Soit $I = [a,b[$ où $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
Soient $f : I \to \mathbb{R}_+$ et $g : I \to \mathbb{R}_+$ deux fonctions continues.

1. Si $f(t) = o_b(g(t))$ et si $\int_a^b g(t)\,dt$ converge, alors $\int_a^b f(t)\,dt$ converge.
2. Si $\lim_{t\to b} \frac{f(t)}{g(t)} = +\infty$ et si $\int_a^b g(t)\,dt$ diverge, alors $\int_a^b f(t)\,dt$ diverge.

Remarque : Dans le premier cas, on peut remplacer $f(t) = o_b(g(t))$ par $f(t) = O_b(g(t))$ (i.e. il existe $M > 0$ tel que $f(t) \leq Mg(t)$ au voisinage de b).

Rappel : Rappel : o $\Rightarrow$ O

Preuve de théorème de comparaison par équivalents:
On a $f, g : I \to \mathbb{R}_+, g > 0$ et $\lim_{t\to b} \frac{f(t)}{g(t)} = 1 \Leftrightarrow \lim_{t\to b} \frac{f(t)}{g(t)} - 1 = 0$.
Suppons dans un premier temps $b \in \mathbb{R}$.

Pour $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que
$\forall t \in]b-\delta, b[$ alors $|\frac{f(t)}{g(t)} - 1| < \frac{1}{2} = \varepsilon$.

On a alors $\forall t \in]b-\delta, b[$, $\frac{1}{2}g(t) < f(t) < \frac{3}{2}g(t)$.

On en déduit de cette inégalité par le théorème de comparaison que $\int_{b-\delta}^{b} f(t)\,dt$ et $\int_{b-\delta}^{b} g(t)\,dt$ sont de même nature.
Donc $\int_a^b f(t)\,dt$ et $\int_a^b g(t)\,dt$ sont de même nature. $\square$.

Application : $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^7+t^6+1}\,dt$ converge car $t \mapsto \frac{1}{t^7+t^6+1}$ est $\mathcal{C}^0([0, +\infty[)$,
et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^7+t^6+1}\,dt$ converge par comparaison avec $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^7}\,dt$: $\frac{1}{t^7+t^6+1} < \frac{1}{t^7}$ pour $t \geq 1$.
Par l'intégrale de Riemann, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^7}\,dt$ converge, donc $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^7+t^6+1}\,dt$ converge.

Application : $\int_0^{+\infty} (t^7+t^6+1)e^{-t^2}\,dt$ converge-t-elle ?
$f(t)$ est $\mathcal{C}^0([0, +\infty[)$, et $\lim_{t\to+\infty} t^2 f(t) = 0 \Leftrightarrow f(t) = o_{+\infty}(\frac{1}{t^2})$. ($f(t) > 0 et < \frac{1}{t^2}$.)
Par le théorème de comparaison avec o, comme $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ converge, alors $\int_0^{+\infty} (t^7+t^6+1)e^{-t^2}\,dt$ converge.

Proposition : Intégrales de Bertrand

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Les intégrales de la forme $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}\,dt$ convergent si et seulement si :

- soit $\alpha > 1$,
- soit $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

Preuve:
$t \in [2, +\infty[\mapsto \frac{1}{t^\alpha(\ln t)^\beta}$ est $\mathcal{C}^0([2, +\infty[)$.

1. Si $\alpha > 1$, prenons $1 < a < \alpha$.
On a $\frac{t^a}{t^\alpha(\ln t)^\beta} = \frac{1}{t^{\alpha-a}(\ln t)^\beta}$.
Or $a - \alpha < 0$ et $(\ln t)^\beta > 0$, donc $\frac{1}{t^{\alpha-a}(\ln t)^\beta} \to 0$ quand $t \to +\infty$ par croissances comparées.
Donc $\frac{1}{t^\alpha(\ln t)^\beta} = o_{+\infty}(\frac{1}{t^a}) \forall \beta \in \mathbb{R}$.
Or $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^a}\,dt$ converge (intégrale de Riemann), donc par le théorème de comparaison avec o, $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha(\ln t)^\beta}\,dt$ converge.
2. Si $\alpha < 1$, prenons a tel que $\alpha < b < 1$.
Calculons $\frac{t^b}{t^\alpha(\ln t)^\beta} = \frac{1}{t^{\alpha-b}(\ln t)^\beta} \longrightarrow_{t\to+\infty} +\infty$ par croissances comparées.
Par le (2) du théorème de comparaison avec o, comme $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^b}\,dt$ diverge (intégrale de Riemann), alors $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha(\ln t)^\beta}\,dt$ diverge pour $b < 1$.
3. Si $\alpha = 1$,
   - Si $\beta \neq 1$, on a : $\int_2^x \frac{1}{t(\ln t)^\beta}\,dt = [\frac{(\ln t)^{1-\beta}}{1-\beta}]_2^x$ = $\frac{(\ln x)^{1-\beta}}{1-\beta} - \frac{(\ln 2)^{1-\beta}}{1-\beta}$, qui CV si et seulement si $1 - \beta < 0$.
   - Si $\beta = 1$, on a : $\int_2^x \frac{1}{t\ln t}\,dt$ qui diverge.

III Absolue convergence et fonctions intégrables

Soient $I = [a, b[$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $f : I \to \mathbb{C}$.

Définition : On dit que $\int_a^b f(t)\,dt$ converge absolument si l'intégrale $\int_a^b |f(t)|\,dt$ converge.

Définition : On dit que f est intégrable si $\int_a^b f(t)\,dt$ converge $\Leftrightarrow$ $\int_a^b |f(t)|\,dt$ converge.

Vocabulaire : Considérons $L^1(I) = \{f : I \to \mathbb{C} \mid f$ est continue et $\int_I |f(t)|\,dt$ converge$\}$.

Proposition :

$L^1_{\text{continue}}(I)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Preuve:
Montrons que c'est un sous-espace vectoriel des fonctions de I dans $\mathbb{C}$.
$0 \in L^1_{\text{continue}}(I)$ car $\int_a^b |0|\,dt = 0$ converge.
Soient $f, g \in L^1_{\text{continue}}(I)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, on veut montrer que $\lambda f + \mu g \in L^1(I)$.

On a que $\forall t \in I\ |\lambda f(t) + \mu g(t)| \leq |\lambda||f(t)| + |\mu||g(t)|$ (inégalité triangulaire).
Or $\int_I |\lambda||f(t)| + |\mu||g(t)|\,dt = |\lambda| \int_I |f(t)|\,dt + |\mu| \int_I |g(t)|\,dt$ converge (car $f, g \in L^1_{\text{continue}}(I)$).
Donc la fonction $t \mapsto |\lambda f(t) + \mu g(t)|$ a son intégrale $\int_I |\lambda f(t) + \mu g(t)|\,dt$ qui converge par le théorème de comparaison.
Donc $\lambda f + \mu g \in L^1_{\text{continue}}(I)$. $\square$

Théorème : Comparaison

Soient $f : I \to \mathbb{C}$ et $g : I \to \mathbb{R}_+$
Si $|f(t)| \leq g(t)$ pour tout $t \in I$ et si $\int_I g(t)\,dt$ converge, alors $\int_a^b f(t)\,dt$ converge absolument, et donc f intégrable sur I.

Preuve :
Les fonctions positives auxquelles appliquer le théorème de comparaison sont $|f(t)|$ et $g(t)$.

Théorème : Comparaison avec équivalences

Soient $f : I \to \mathbb{C}$ et $g : I \to \mathbb{R}_+$
Si $|f(t)| \sim_{t \to b} g(t)$ et si g est positive au moins au voisinage de b, alors les intégrales $\int_a^b f(t)\,dt$ et $\int_a^b g(t)\,dt$ sont de même nature.

Preuve :
Les fonctions positives auxquelles appliquer le théorème de comparaison sont $|f(t)|$ et $g(t)$.
Si $\frac{f(t)}{g(t)} \to 0$ alors $\frac{|f(t)|}{g(t)} \to 0$.

Théorème : Comparaison avec o

Soient $f : I \to \mathbb{C}$ et $g : I \to \mathbb{R}_+$

1. Si $f(t) = o_b(g(t))$ et si $\int_I g(t)\,dt$ converge, alors $\int_I f(t)\,dt$ converge absolument, et donc f est intégrable sur I.
2. Supposons que f est à valeur dans $\mathbb{R}$ (pas $\mathbb{C}$).
   Si $\lim_{t \to b} \frac{f(t)}{g(t)} = \pm\infty$ et si $\int_I g(t)\,dt$ diverge, alors $\int_I f(t)\,dt$ diverge.

Proposition : Absolue convergence et convergence

Si $\int_a^b f(t)\,dt$ converge absolument, alors $\int_a^b f(t)\,dt$ converge. (ACV $\Rightarrow$ CV)
De plus, on a la majoration : $\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt$.

Preuve dans le cas réel :
Soit $f : I \to \mathbb{R}$, on considère les fonctions $f_+(t) = \max(f(t), 0)$ et $f_-(t) = \max(-f(t), 0)$ (qui sont positives et continues).
Et $f(t) = f_+(t) - f_-(t)$ et $|f(t)| = f_+(t) + f_-(t)$.

On a $f_+(t), f_-(t) \leq |f(t)| \forall t \in I$.
Donc on peut passer à l'intégrale : $\int_a^b f_+(t)\, dt, \int_a^b f_-(t)\, dt \leq \int_a^b |f(t)|\, dt$ qui converge par hypothèse.
Donc par le théorème de comparaison, $\int_a^b f_+(t)\, dt$ et $\int_a^b f_-(t)\, dt$ convergent.
On en déduit que $\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b f_+(t)\, dt - \int_a^b f_-(t)\, dt$ converge.

De plus, on a :

$$\left|\int_a^b f(t)\, dt\right| = \left|\int_a^b f_+(t)\, dt - \int_a^b f_-(t)\, dt\right| \leq \left|\int_a^b f_+(t)\, dt\right| + \left|\int_a^b f_-(t)\, dt\right| = \int_a^b f_+(t)\, dt + \int_a^b f_-(t)\, dt = \int_a^b |f(t)|\, dt$$

Preuve dans le cas complexe :
cf. Laurent

IV Intégales SCV

Définition : Soit $f : I \to \mathbb{C}$.
On dit que $\int_a^b f(t)\, dt$ est semi-convergente si $\int_a^b f(t)\, dt$ converge mais pas absolument. Autrement dit, si f n'est pas intégrable sur I mais que $\int_a^b f(t)\, dt$ converge.

Remarque : Si f est positive sur I, alors $\int_a^b f(t)\, dt$ ne peut pas être semi-convergente.

Exemple : $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$ est SCV.
Remarquons que $\frac{\sin t}{t^2}$ et $\frac{\cos t}{t^2}$ sont ACV (montré par intégrales de riemann, et majoration par $\frac{1}{t^2}$).
Montrons que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$ converge.
Par IPP, on a :

$$\int_1^A \frac{\sin t}{t}\, dt = \left[-\frac{\cos t}{t}\right]_1^A - \int_1^A -\frac{\cos t}{t^2}\, dt$$

Et donc, en faisant tendre A vers $+\infty$, on a que $\lim_{A \to +\infty} \frac{\sin t}{t}$ existe.
Donc $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$ converge.

Montrons que $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right|\, dt$ diverge.
On a que $x >> x^2$ entre 0 et 1.
Ici, $|sint| >> \sin^2 t \forall t \in [\nVdash, +\infty[$.
Et on a : $sin^2 t = \frac{1-\cos(2t)}{2}$.
On a donc $\forall A > 1$: $\int_1^A \left|\frac{\sin t}{t}\right|\, dt \geq \int_1^A \frac{\sin^2 t}{t}\, dt = \frac{1}{2}\int_1^A \frac{1-\cos(2t)}{t}\, dt.$
$= \frac{1}{2}\left(\int_1^A \frac{1}{t}\, dt - \int_1^A \frac{\cos(2t)}{t}\, dt\right)$.
Donc ça diverge (car $\int_1^A \frac{1}{t}\, dt = \ln A$ diverge et $\int_1^A \frac{\cos(2t)}{t}\, dt$ converge par intégrale de Riemann).

V Comparaison Série - Intégrale

On prend $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ une fonction continue, décroissante.
Soit $N \in \mathbb{N}$ assez grand. Considérons $\int_1^N f(t)\, dt$.
On a : $\int_1^N f(t)\, dt = \sum_{k=1}^{N-1} \int_k^{k+1} f(t)\, dt$ par la relation de Chasles.
Or f étant décroissante, on a $\forall t \in [k, k+1], f(k+1) \leq f(t) \leq f(k)$.
Donc $f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)\, dt \leq f(k)$.
En sommant pour k de 1 à $N-1$, on a

$$\sum_{k=1}^{N-1} f(k+1) \leq \int_1^N f(t)\, dt \leq \sum_{k=1}^{N-1} f(k)$$

Théorème : Comparaison série - intégrale

Soient $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ une fonction continue, décroissante.
Alors les intégrales impropres $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ et les séries numériques $\sum_{n\geq 1} f(n)$ sont de même nature.

Application : Donner un équivalent de $\int_1^{N} f(t)\,dt$ si $f(t) = \frac{1}{t}$.