

# Chapitre 4 : Espaces euclidiens

## I Produit scalaire et norme

### A Produit scalaire

On ne rappellera pas les définitions de normes et distances ici et les propositions qui s'ensuivent. Le lecteur est invité à se référer au chapitre 4 du cours AN3.

**Définition :** Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Un **produit scalaire** sur  $E$  est une application  $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  qui vérifie les propriétés suivantes :

1.  $\forall x, y \in E, \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$  (symétrie)
2.  $\forall x, x', y \forall \lambda \in \mathbb{R}, \langle \lambda x + x', y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle$  (linéarité en la première variable)
3.  $\forall x \in E, \langle x, x \rangle \geq 0$  et  $\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$  (positivité)

En résumé, un produit scalaire est une forme bilinéaire, symétrique et définie positive.

**Exemple :** Dans  $\mathbb{R}^n, \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$  est un produit scalaire.

Dans  $C^0([0, 1], \mathbb{R}), \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$  est un produit scalaire.

**Remarque :** Si  $E$  est un espace vectoriel normé de dimension finie, il n'y a pas de produit scalaire canonique *a priori*. (On a vu néanmoins que dans  $\mathbb{R}^n$ , il existe un produit scalaire canonique.)

**Définition :** Un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie muni d'un produit scalaire est appelé un **espace euclidien**.

On le note  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ .

#### Identités remarquables :

$$\begin{aligned}\langle x + y, x + y \rangle &= \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \\ \langle x + y, x - y \rangle &= \langle x, x \rangle - \langle y, y \rangle\end{aligned}$$

#### Théorème : Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien.

Alors, pour tous  $x, y \in E$ , on a :

$$|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}$$

De plus, l'égalité a lieu si et seulement si  $x$  et  $y$  sont colinéaires.

#### Démonstration :

- Soit  $t \in \mathbb{R}$ . On pose  $P(t) = \langle x + ty, x + ty \rangle$ . Supposons  $y \neq 0$ .  
 $P(t) = \langle x, x \rangle + 2t\langle x, y \rangle + t^2\langle y, y \rangle \geq 0$  est polynomiale de degré 2 si  $y \neq 0$ . Ainsi  $\Delta \leq 0$ .  
 $\Delta = (2\langle x, y \rangle)^2 - 4\langle x, x \rangle\langle y, y \rangle = 4(\langle x, y \rangle^2 - \langle x, x \rangle\langle y, y \rangle)$ . Donc  $\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle\langle y, y \rangle$ .
- Supposons l'égalité. Alors  $\Delta = 0$ . Soit  $t_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $P(t_0) = 0$ .  
On obtient  $\langle x + t_0 y, x + t_0 y \rangle = 0$ , c'est-à-dire que  $x + t_0 y = 0$ . Donc  $x$  et  $y$  sont colinéaires.
- Réciproquement, si  $x$  et  $y$  sont colinéaires.  
Si  $y \neq 0$ , on peut écrire  $x = \lambda y$  et  $|\langle x, y \rangle| = |\langle \lambda y, y \rangle| = |\lambda| \langle y, y \rangle$ .  
 $\sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\langle \lambda y, \lambda y \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle y, y \rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle y, y \rangle} = \lambda \sqrt{\langle y, y \rangle}$ . D'où l'égalité.  $\square$

## B Normes

**Rappel :** On rappelle qu'une norme est une application  $N: E \rightarrow \mathbb{R}_+$  qui vérifie l'homogénéité, l'inégalité triangulaire et la séparation.

### Proposition :

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

On pose  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ .

Alors  $\|\cdot\|$  est une norme sur  $E$ , appelée la norme associée au produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

### Démonstration :

**Homogénéité :** Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $x \in E$ .

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle x, x \rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle x, x \rangle} = |\lambda| \|x\|$$

**Inégalité triangulaire :** Soit  $x, y \in E$ .

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \leq \langle x, x \rangle + 2|\langle x, y \rangle| + \langle y, y \rangle$$

$$\leq \langle x, x \rangle + 2\sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle} + \langle y, y \rangle = (\sqrt{\langle x, x \rangle} + \sqrt{\langle y, y \rangle})^2$$

$$\Rightarrow \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

**Séparation :** Soit  $x \in E$  tel que  $\|x\| = 0$ .

$$\text{Alors } \sqrt{\langle x, x \rangle} = 0 \Rightarrow \langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$$

**Remarque :**  $x \mapsto |x|$  est une norme sur  $\mathbb{R}$ , associée au produit scalaire  $\langle x, y \rangle = xy$ .

**Rappel :** Une distance sur un ensemble  $X$  est une application  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$  qui vérifie la séparation, la symétrie et l'inégalité triangulaire.

### Proposition : Lien entre norme et distance

Soit  $N$  une norme sur un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$ .

Alors  $d(x, y) = N(x - y)$  est une distance sur  $E$ .

**Remarque :** En géométrie affine, si  $A$  et  $B$  sont deux points, le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  est défini par  $\overrightarrow{AB} = B - A$ , et  $d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\|$ .

**Remarque :** Un produit scalaire donne une norme ( $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ ) et une norme donne une distance ( $d(x, y) = \|x - y\|$ ).

### Propriété : Norme associée au produit scalaire (identité du parallélogramme)

$$\forall x, y \in E, \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

On peut le vérifier avec  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$  et les identités remarquables.

D'où si une norme ne vérifie pas l'identité du parallélogramme, elle n'est pas associée à un produit scalaire.

### Démonstration :

Vérifions avec  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ .

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \text{ et } \|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2.$$

$$\text{Donc, } \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

**Définition :** Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

L'angle non-orienté entre  $x, y \in E \setminus \{0\}$  est défini par  $\theta = \arccos \left( \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|} \right) \in [0, \pi]$ .

**Remarque :** Cette définition est basée sur la propriété en géométrie euclidienne classique (angle où la direction

n'a pas d'importance), et on a :  $\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \cos(\theta)$ .

**Remarque :** Le vecteur normé associé à  $x \in E \setminus \{0\}$  est  $\frac{x}{\|x\|}$ . C'est utile pour calculer des vecteurs unitaires.

## II Orthogonalité

### A Vecteurs orthogonaux, familles orthogonales et orthonormées

**Définition :** Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .  
Deux vecteurs  $x, y \in E$  sont dits **orthogonaux** si  $\langle x, y \rangle = 0$ .

On note  $x \perp y$ . De même, si  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , on dit que  $x \perp F$  si  $\forall y \in F, x \perp y$ .

**Remarque :** L'angle entre deux vecteurs orthogonaux non nuls est  $\frac{\pi}{2}$ , et tout vecteur est orthogonal au vecteur nul.

**Définition :** Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .  
Une famille de vecteurs  $(x_i)_{i \in I}$  est dite **orthogonale** si  $x_i \perp x_j$  pour tous  $i \neq j$ , i.e. si ses vecteurs sont deux à deux orthogonaux.

#### Théorème de Pythagore :

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

Soit  $(x_1, \dots, x_k)$  une famille orthogonale (finie) de  $E$ .

Alors :

$$\|x_1 + \dots + x_k\|^2 = \|x_1\|^2 + \dots + \|x_k\|^2.$$

De plus, si  $k = 2$ , alors  $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \Rightarrow x \perp y$ .

#### Démonstration :

$$\|\sum_{i=1}^k x_i\|^2 = \langle \sum_{i=1}^k x_i, \sum_{j=1}^k x_j \rangle = (\text{bilinéarité}) \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \langle x_i, x_j \rangle = \sum_{i=1}^k \langle x_i, x_i \rangle = \sum_{i=1}^k \|x_i\|^2.$$

Pour  $k = 2$ ,  $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$ .

Donc si  $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ , alors  $2\langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow x \perp y$ .  $\square$

**Définition :** Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

Une famille de vecteurs  $(x_i)_{i \in I}$  est dite **orthonormée** si elle est orthogonale et que  $\|x_i\| = 1$  pour tout  $i \in I$ .

Autrement dit,  $\forall i, j \in I, \langle x_i, x_j \rangle = \delta_{ij}$ .

#### Proposition :

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

Alors une famille orthogonale dont chacun des vecteurs est non nul est libre.

En particulier, une famille orthonormée est libre.

**Remarque :** Si  $E$  est de dimension finie, toute famille orthonormée admet au plus  $\dim(E)$  vecteurs.

#### Démonstration :

Soit  $\sum_{i \in J} \lambda_i x_i = 0$  une combinaison linéaire nulle de vecteur de la famille  $J$ , avec  $J \subset I$  un ensemble fini.

Soit  $j \in J, \langle x_j, \sum_{i \in J} \lambda_i x_i \rangle = 0$ .

D'où  $\sum_{i \in J} \lambda_i \langle x_j, x_i \rangle = 0$  car  $\langle x_j, x_i \rangle = 0$  si  $i \neq j$ .

D'où  $\lambda_j \langle x_j, x_j \rangle = 0; \langle x_j, x_j \rangle > 0$  car  $x_j \neq 0$ . D'où  $\lambda_j = 0$ . D'où  $\forall j \in J, \lambda_j = 0$ .

Donc  $(x_i)_{i \in I}$  est libre.

**Définition :** Soit  $E$  un espace euclidien.

Une **base orthonormée** de  $E$  est une famille orthonormée qui est une base de  $E$ .

**Parenthèse : avantages d'une base orthonormée :**

Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormée de  $E$ .

Soit  $x \in E$ .

Alors :  $x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i$ . (on remarque que ça ressemble à la dualité !)

La  $i^{me}$  coordonnée de  $x$  dans la base  $(e_1, \dots, e_n)$  est  $\langle x, e_i \rangle$ .

## B Procédé d'orthonormalisation Gram-Schmidt

Voir cette vidéo pour une explication du procédé d'orthonormalisation Gram-Schmidt.

**Théorème :**

Soit  $E$  un espace euclidien de dimension finie et soit  $(e_1, \dots, e_k)$  une famille libre de  $E$ .

Il existe une famille  $(u_1, \dots, u_k)$  orthonormée de  $E$  telle que  $\forall i \in S_k, \text{Vect}(u_1, \dots, u_i) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_i)$ .

En particulier, si  $k = \dim(E)$ , alors  $(u_1, \dots, u_k = u_n)$  est une base orthonormée de  $E$ .

**Démonstration :**

On procède par récurrence sur  $k$ .

**Initialisation :**  $k = 1$ .

Alors  $(e_1)$  est une famille libre de  $E$  si et seulement si  $e_1 \neq 0$ .

Dans ce cas, on pose  $u_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$ , qui est un vecteur de norme 1.

**Hérédité :** Supposons que la propriété est vérifiée pour  $k \leq n - 1$ .

Soit  $(e_1, \dots, e_{k+1})$  une famille libre de  $E$ .

Par hypothèse de récurrence, il existe une famille  $(u_1, \dots, u_k)$  orthonormée de  $E$  telle que  $\forall i \in S_k, \text{Vect}(u_1, \dots, u_i) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_i)$ .

On pose :  $\overline{u_{k+1}} = e_{k+1} - \sum_{i=1}^k \langle e_{k+1}, u_i \rangle u_i$ .

Soit  $1 \leq i \leq k$ .

On a :  $\langle \overline{u_{k+1}}, u_i \rangle = \langle e_{k+1}, u_i \rangle - \sum_{j=1}^k \langle e_{k+1}, u_j \rangle \underbrace{\langle u_j, u_i \rangle}_{\delta_{ij}}$ . (car  $(u_1, \dots, u_k)$  est orthonormée)

$\langle \overline{u_{k+1}}, u_j \rangle = \langle e_{k+1}, u_j \rangle - \langle e_{k+1}, u_j \rangle = 0$ .

De plus,  $\overline{u_{k+1}} \neq 0$  car  $e_{k+1} \notin \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_k)$ .

On pose alors  $u_{k+1} = \frac{\overline{u_{k+1}}}{\|\overline{u_{k+1}}\|}$ , qui est un vecteur de norme 1.

On a :  $(u_1, \dots, u_{k+1})$  est une famille orthonormée de  $E$  qui vérifie  $\forall i \in S_{k+1}, \text{Vect}(u_1, \dots, u_i) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_i)$ .  $\square$

**Corollaire :**

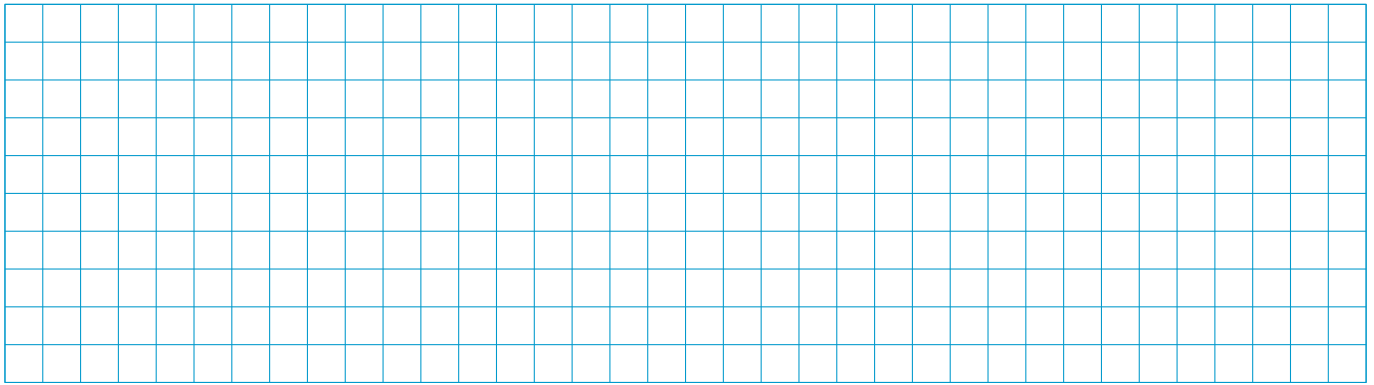
Tout espace euclidien de dimension finie admet une base orthonormée.

**Définition :** Soient  $E, F$  deux espaces euclidiens.

On appelle **isométrie** de  $E$  dans  $F$  toute application  $f : E \rightarrow F$  qui est un isomorphisme d'espace vectoriel et  $\forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\|$ .

**Remarque :**  $\forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\| \Leftrightarrow \forall x, y \in E, \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ .

**Application :** Démontrer la remarque précédente.



**Définition :** Deux espaces euclidiens  $E$  et  $F$  sont dits **isométriques** s'il existe une isométrie de  $E$  dans  $F$ .

**Théorème :**

Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n$ .

Alors  $E$  est isométrique à  $\mathbb{R}^n$  muni du produit scalaire canonique.

**Démonstration :**

Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormée de  $E$ .

Soit  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .

On définit l'application linéaire  $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$  par  $f(e_i) = \varepsilon_i$  pour tout  $i \in S_n$ .

Alors  $f$  est un isomorphisme d'espace vectoriel (car l'image d'une base est une base).

Soit  $x, y \in E$ .

$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$  et  $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$  avec  $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ .

$\langle x, y \rangle = \langle \sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \langle e_i, e_j \rangle$  (bilinéarité)

$= \sum_{i=1}^n x_i y_i$  (car  $(e_1, \dots, e_n)$  est orthonormée) qui est le produit scalaire canonique de  $f(x) = \sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i$  et  $f(y) = \sum_{i=1}^n y_i \varepsilon_i$ .

$= \langle f(x), f(y) \rangle$  (car  $f(x) = \sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i$  et  $f(y) = \sum_{i=1}^n y_i \varepsilon_i$ )

$\Rightarrow f$  est une isométrie de  $E$  dans  $\mathbb{R}^n$ .  $\square$

## C Projections orthogonales

**Définition :** Soit  $E$  un espace euclidien et soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ .

Alors :

1.  $\forall x \in E \exists ! y \in F : (x - y) \perp F$ . On dit que  $y$  est le **projeté orthogonal** de  $x$  sur  $F$ .
2. L'application  $p : E \rightarrow F$  qui à  $x$  associe son projeté orthogonal sur  $F$  est appelée **projection orthogonale** de  $E$  sur  $F$  et  $\ker(p) = \{z \in E : z \perp F\} = F^\perp$ . On a de plus que  $p$  est un projecteur (i.e.  $p^2 = p$ ).

**Démonstration de l'unicité du projeté orthogonal :**

Soit  $y$  tel que  $y \in F$  et  $x - y \perp F$ .

$F$  est un espace euclidien en posant comme produit scalaire sur  $F$  la restriction à  $F \times F$  du produit scalaire de  $E$ .

Soit  $(e_1, \dots, e_k)$  une base orthonormée de  $F$ .

Alors :  $y = \sum_{i=1}^k \langle y, e_i \rangle e_i$  et on a de plus  $\forall i \in S_n \ e_i \perp x - y$ .

Donc  $0 = \langle x - y, e_i \rangle = \langle x, e_i \rangle - \langle y, e_i \rangle$  donc  $y = \sum_{i=1}^k \langle x, e_i \rangle e_i$ .  $\square$

**Démonstration de l'existence du projeté orthogonal :**

Le vecteur  $y = \sum_{i=1}^k \langle x, e_i \rangle e_i$  vérifie bien  $y \in F$  et  $x - y \perp F$ .  $\square$

**Démonstration de  $\ker(p)$  :**

$\ker p = \{z \in E : p(z) = 0\} = \{z \in E : z \perp F\} = F^\perp$ .  $\square$


**Remarque :** Soit  $p$  la projection orthogonale sur  $F$ . Alors pour  $x \in E$ ,  $p(x)$  est l'unique vecteur de  $F$  tel que  $\|x - p(x)\| = \min_{z \in F} \|x - z\|$ . Autrement dit,  $p(x)$  est le point de  $F$  le plus proche de  $x$ .


**Démonstration :**


On a  $\|x - z\|^2 = \|x - p(x) + p(x) - z\|^2 = \|x - p(x)\|^2 + \|p(x) - z\|^2$  par Pythagore.

$\geq \|x - p(x)\|^2$ . Donc  $p(x)$  atteint le  $\min_{z \in F} \|x - z\|$ .

De plus, le minimum est unique car  $\|x - z\| = \min_{z \in F} \|x - z\| \Rightarrow \|p(x) - z\| = 0 \Rightarrow p(x) = z$ .

 **Note de rédaction** : cf. Laurent pour ce qui s'ensuit (fait). cf. OneNote pour le schéma.

 **Remarque** : On peut retrouver la formule de la distance d'un point à une droite / plan dans  $\mathbb{R}^3$ . Prendre une base orthonormée du plan  $P$  et  $d(x, P) = \|x - \sum_{i=1}^2 \langle x, e_i \rangle e_i\|$  où  $d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|$ .

 **Remarque** : Si  $(e_1, \dots, e_k)$  est une famille libre de  $E$ . Gram-Schmit définit par récurrence  $u_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$  et  $u_{k+1} = \frac{e_{k+1} - p_i(e_{k+1})}{\|e_{k+1} - p_i(e_{k+1})\|}$ , où  $p_i$  est la projection orthogonale sur  $\text{Vect}(u_1, \dots, u_k)$ .


## D Suppléments orthogonaux

**Définition** : Soit  $E$  un espace euclidien. Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ .

On note

$$F^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in F, \langle x, y \rangle = 0\} = \bigcap_{y \in F} \ker(x \mapsto \langle x, y \rangle) = \bigcap_{i \in S_k} \ker(x \mapsto \langle x, e_i \rangle)$$

où  $(e_1, \dots, e_k)$  est une base de  $F$ .  $F^\perp$  est appelé l'**espace orthogonal** de  $F$  dans  $E$ .

 **Remarque** :  $x \perp F \Leftrightarrow x \in F^\perp$ .

### Théorème :

Soit  $E$  un espace euclidien de dimension finie et soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ .

Alors  $E = F \oplus F^\perp$  (c'est même une somme directe orthogonale) et  $F = (F^\perp)^\perp$ .

### Démonstration :

$F^\perp = \ker p$  et  $F = \text{Im } p$  où  $p$  est la projection orthogonale de  $E$  sur  $F$ .

D'où  $F^\perp \oplus F = \ker p \oplus \text{Im } p = E$ .

On a  $\dim(F^\perp)^\perp = \dim(E) - \dim(F^\perp) = \dim(F)$  donc il suffit de montrer une inclusion.

Soit  $y \in F^\perp$ .

Alors  $\forall x \in F, \langle y, x \rangle = 0$  (en effet, si  $x \in F$  alors  $\forall y \in F^\perp, \langle y, x \rangle = 0$ )

D'où  $F \subset (F^\perp)^\perp$ , d'où  $F^\perp \supset (F^\perp)^\perp$ .  $\square$

### Corollaire :

Soit  $H$  un hyperplan de  $E$ . Alors il existe  $x_0 \in E$  tel que  $H = (\text{Vect}(x_0))^\perp$ .


### Démonstration :

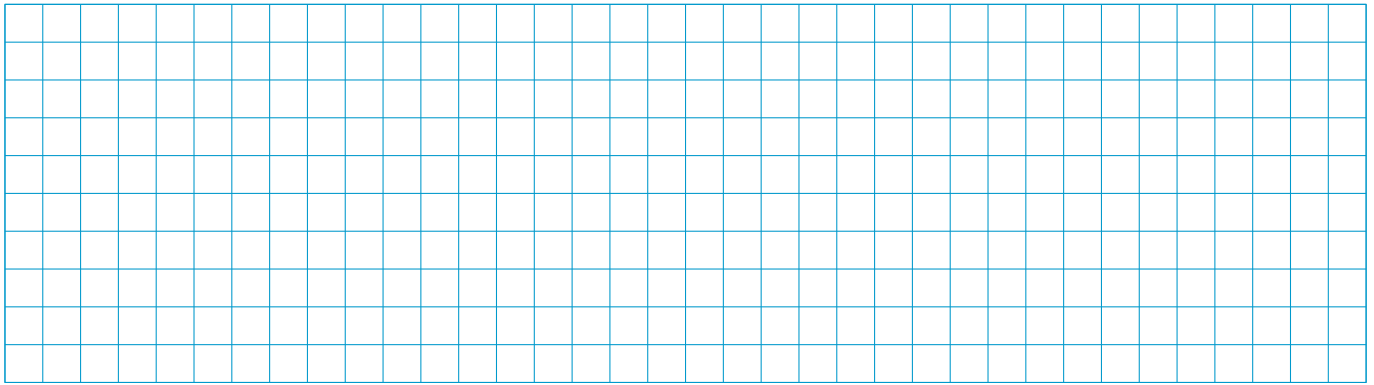
Par définition d'un hyperplan, et comme  $H^\perp$  est un supplémentaire de  $H$ , il existe  $x_0 \in H^\perp$  tel que  $H^\perp = \text{Vect}(x_0)$ .

Et donc  $H = (H^\perp)^\perp = (\text{Vect}(x_0))^\perp$ .  $\square$

 **Remarque** : Si  $A \subset E$ , on définit  $A^\perp = \{x \in E : \forall a \in A, \langle x, a \rangle = 0\}$ .

Alors  $A^\perp$  est un sev de  $E$  et  $A^\perp = (\text{Vect}(A))^\perp$ .

 **Application** : Montrer que  $F_1 \subset F_2 \Rightarrow F_2^\perp \subset F_1^\perp$ .



### III Dual d'espace euclidien

#### Théorème : Représentation des formes linéaires

Soit  $E$  un espace euclidien. On note  $j_E : E \rightarrow E^*$  l'application qui à  $x$  associe  $j_E(x) : y \mapsto \langle x, y \rangle$ . Alors  $j_E$  est un isomorphisme d'espace vectoriel de  $E$  dans  $E^*$ .

Autrement dit,  $\forall \varphi \in E^*, \exists x \in E : \varphi = \langle x, \cdot \rangle$ .

#### Démonstration :

$j_E$  est linéaire et  $\dim E = \dim E^*$  et  $x \in \ker(j_E) \Leftrightarrow \forall y \in E, \langle x, y \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .  $\square$

**Remarque :** Si  $\varphi \in E^*, y \in E$  on a le crochet de dualité  $\langle \varphi, y \rangle$ . Mais aussi si  $x$  est tel que  $\varphi = \langle x, \cdot \rangle$ , on a aussi  $\langle x, y \rangle = \langle \varphi, y \rangle$ . Donc on peut confondre les deux crochets de dualité. Autrement dit,  $\langle j_E(x), y \rangle_{E^* \times E} = \langle x, y \rangle_{E \times E}$  et  $j_E$  permet de dire que le crochet de dualité est la même chose que le produit scalaire en identifiant  $E$  et  $E^*$  de manière canonique.

### IV Cas des $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels : espaces hermitiens

**Définition :** Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.

Soit  $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$  une application.

On dit que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un **produit scalaire** sur  $E$  si :

1.  $\forall x, y \in E, \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$  (hermitianité)
2.  $\forall x \in E, y \mapsto \langle x, y \rangle$  est  $\mathbb{C}$ -linéaire (linéarité en la seconde variable)
3.  $\forall x \in E, \langle x, x \rangle > 0$  si  $x \neq 0$  et  $\langle x, x \rangle = 0$  si  $x = 0$  (positivité)

**Remarque :** Sesquilinéaire :  $\forall y \in E \forall x, x' \in E \lambda \in \mathbb{C} \langle \lambda x + x', y \rangle = \bar{\lambda} \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle. \forall x \in E \forall y, y' \in E \forall \lambda \in \mathbb{C} \langle x, \lambda y + y' \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle$ .

**Exemple :** Dans  $\mathbb{C}^n, x = (x_i)$  et  $y = (y_i), \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i y_i$  est un produit scalaire (canonique).

**Remarque :** Pour  $n = 1, x, y \in \mathbb{C}, \langle x, y \rangle = \bar{x}y$  est un produit scalaire, et  $\langle x, x \rangle = |x|^2$  (module au carré).

**Remarque :**

$\begin{cases} y \mapsto \langle x, y \rangle \text{ est } \mathbb{C}\text{-linéaire} \\ \forall x, y \in E, \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \text{ (hermitianité)} \end{cases} \text{ implique que } (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle \text{ est sesquilinéaire.}$

**Remarque :** Dans  $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{C})$ ,  $\langle f, g \rangle = \int_a^b \overline{f(t)}g(t)dt$  est un produit scalaire.

**Définition :** On appelle **espace hermitien** un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire (complexe/hermitien).

**Définition :** Soit  $E$  un espace hermitien.

On appelle **famille orthonormée** de  $E$  une famille de vecteurs normés qui sont deux à deux orthogonaux, c'est à dire  $(e_1, \dots, e_k)$  telle que  $\forall i, j \in S_k, \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ .

**Remarque :** Le théorème de Pythagore reste vérifié dans les espaces hermitiens.

**Attention** La réciproque du même théorème ( $\langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ ) n'est pas vérifiée dans les espaces hermitiens.

**Proposition :**

Si  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base orthonormée de  $E$  un espace hermitien, et on a  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$  et  $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$ , alors :

$$x_i = \langle x, e_i \rangle \text{ et } y_j = \langle y, e_j \rangle \text{ et } \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \overline{x_i} y_i$$

**Théorème : Inégalité de Cauchy-Schwarz dans les espaces hermitiens**

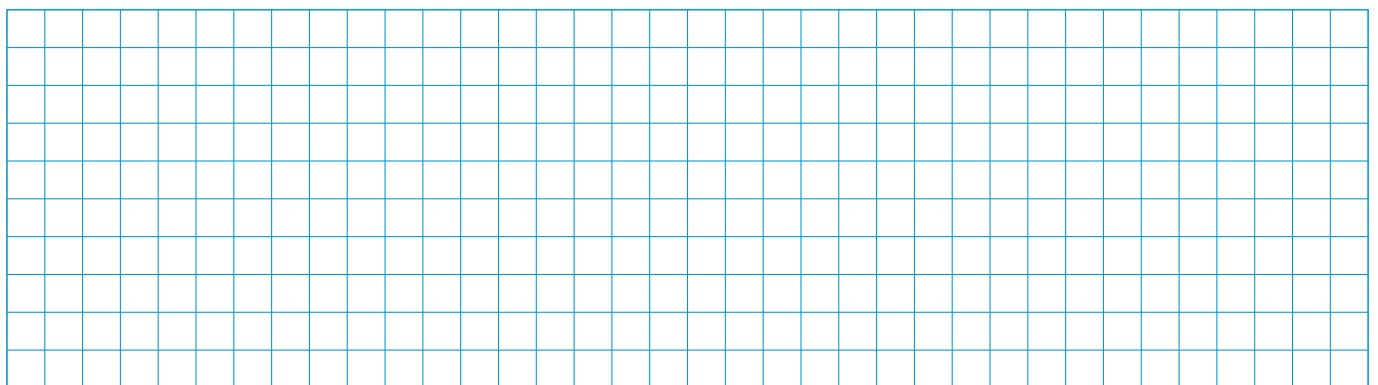
Soit  $E$  un espace hermitien de dimension finie (et son produit scalaire complexe).

Alors  $\forall x, y \in E, |\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}$

**Corollaire :**

Si  $E$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire complexe, alors  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$  est une norme sur  $E$ .

**Application :** Proposer une démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans les espaces hermitiens.





## Contents

<b>I</b>	<b>Produit scalaire et norme</b>	<b>1</b>
A	Produit scalaire . . . . .	1
B	Normes . . . . .	2
<b>II</b>	<b>Orthogonalité</b>	<b>3</b>
A	Vecteurs orthogonaux, familles orthogonales et orthonormées . . . . .	3
B	Procédé d'orthonormalisation Gram-Schmidt . . . . .	4
C	Projections orthogonales . . . . .	5
D	Suppléments orthogonaux . . . . .	6
<b>III</b>	<b>Dual d'espace euclidien</b>	<b>7</b>
<b>IV</b>	<b>Cas des <math>\mathbb{C}</math>-espaces vectoriels : espaces hermitiens</b>	<b>7</b>