Chapitre 4 : Espaces euclidiens

I Produit scalaire et norme

A Produit scalaire

On ne rappelera pas les définitions de normes et distances ici et les propositions qui s'ensuivent. Le lecteur est invité à se référer au chapitre 4 du cours AN3.

Définition : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Un **produit scalaire** sur E est une application $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ qui vérifie les propriétés suivantes :

1. $\forall x, y \in E,\ \langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ (symétrie)
2. $\forall x, x', y \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \langle \lambda x + x', y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle + \langle x', y\rangle$ (linéarité en la première variable)
3. $\forall x \in E,\ \langle x, x\rangle \geq 0$ et $\langle x, x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0$ (positivité)

En résumé, un produit scalaire est une forme bilinéaire, symétrique et définie positive.

Exemple : Dans $\mathbb{R}^n$,$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ est un produit scalaire.
Dans $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ est un produit scalaire.

Remarque : Si E est un espace vectoriel normé de dimension finie, il n'y a pas de produit scalaire canonique *a priori*. (On a vu néanmoins que dans $\mathbb{R}^n$, il existe un produit scalaire canonique.

Définition : Un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E muni d'un produit scalaire est appelé un **espace euclidien**.
On le note $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Identités remarquables :

$\langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle$
$\langle x + y, x - y\rangle = \langle x, x\rangle - \langle y, y\rangle$

Théorème : Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.
Alors, pour tous $x, y \in E$, on a :

$$|\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle}$$

De plus, l'égalité a lieu si et seulement si x et y sont colinéaires.

Note de rédaction : cf. Laurent.

B Normes

Rappel : On rappelle qu'une norme est une application $N \colon E \to \mathbb{R}_+$ qui vérifie l'homogénéité, l'inégalité triangulaire et la séparation.

Proposition :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
On pose $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.
Alors $\| \cdot \|$ est une norme sur E, appelée la norme associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Démonstration :
Homogénéité : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in E$.
$\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle x, x \rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle x, x \rangle} = |\lambda| \|x\|$
Inégalité triangulaire : Soit $x, y \in E$.
$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \leq \langle x, x \rangle + 2|\langle x, y \rangle| + \langle y, y \rangle$
$\leq \langle x, x \rangle + 2\sqrt{\langle x, x \rangle}\sqrt{\langle y, y \rangle} + \langle y, y \rangle = (\sqrt{\langle x, x \rangle} + \sqrt{\langle y, y \rangle})^2$
$\Rightarrow \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
Séparation : Soit $x \in E$ tel que $\|x\| = 0$.
Alors $\sqrt{\langle x, x \rangle} = 0 \Rightarrow \langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$

Remarque : $x \mapsto |x|$ est une norme sur $\mathbb{R}$, associée au produit scalaire $\langle x, y \rangle = xy$.

Rappel : Une distance sur un ensemble X est une application $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ qui vérifie la séparation, la symétrie et l'inégalité triangulaire.

Proposition : Lien entre norme et distance

Soit N une norme sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.
Alors $d(x, y) = N(x - y)$ est une distance sur E.

Remarque : En géométrie affine, si A et B sont deux points, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est défini par $\overrightarrow{AB} = B - A$, et $d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\|$.

Remarque : Un produit scalaire donne une norme ($\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$) et une norme donne une distance ($d(x, y) = \|x - y\|$).

Propriété : Norme associée au produit scalaire (identité du parallélogramme)

$\forall x, y \in E,\ \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.
On peut le vérifier avec $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ et les identités remarquables.

D'où si une norme ne vérifie pas l'identité du parallélogramme, elle n'est pas associée à un produit scalaire.

Définition : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
L'**angle non-orienté** entre $x, y \in E \setminus \{0\}$ est défini par $\theta = \arccos\left(\frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|\|y\|}\right) \in [0, \pi]$.

Remarque : Cette définition est basée sur la propriété en géométrie euclidienne classique (angle où la direction n'a pas d'importance), et on a : $\langle x, y \rangle = \|x\|\|y\| \cos(\theta)$.

Remarque : Le vecteur normé associé à $x \in E \setminus \{0\}$ est $\frac{x}{\|x\|}$. C'est utile pour calculer des vecteurs unitaires.

II Orthogonalité

Définition : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, muni d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$.
Deux vecteurs $x, y \in E$ sont dits **orthogonaux** si $\langle x, y\rangle = 0$.

On note $x \perp y$.

Remarque : L'angle entre deux vecteurs orthogonaux non nuls est $\frac{\pi}{2}$, et tout vecteur est orthogonal au vecteur nul.

Définition : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, muni d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$.
Une famille de vecteurs $(x_i)_{i\in I}$ est dite **orthogonale** si $x_i \perp x_j$ pour tous $i \neq j$, *i.e.* si ses vecteurs sont deux à deux orthogonaux.

Théorème de Pythagore :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, muni d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$.
Soit $(x_1, \dots, x_k)$ une famille orthogonale (finie) de E.
Alors :

$$\|x_1 + \ldots + x_k\|^2 = \|x_1\|^2 + \ldots + \|x_k\|^2.$$

De plus, si $k = 2$, alors $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \Rightarrow x \perp y$.

Démonstration :
$\|\sum_{i=1}^k x_i\|^2 = \langle \sum_{i=1}^k x_i, \sum_{j=1}^k x_j\rangle =$ (bilinéarité) $\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \langle x_i, x_j\rangle = \sum_{i=1}^k \langle x_i, x_i\rangle = \sum_{i=1}^k \|x_i\|^2$.

Pour $k = 2$, $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$.
Donc si $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$, alors $2\langle x, y\rangle = 0 \Rightarrow x \perp y$. $\square$

Définition : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, muni d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$.
Une famille de vecteurs $(x_i)_{i\in I}$ est dite **orthonormée** si elle est orthogonale et que $\|x_i\| = 1$ pour tout $i \in I$.

Autrement dit, $\forall i, j \in I,\ \langle x_i, x_j\rangle = \delta_{ij}$.

Proposition :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, muni d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$.
Alors une famille orthogonale dont chacun des vecteurs est non nul est libre.

En particulier, une famille orthonormée est libre.

Remarque : Si E est de dimension finie, toute famille orthonormée admet au plus $\dim(E)$ vecteurs.

Note de rédaction : cf. Laurent pour les preuves de ces deux dernières propriétés.

Définition : Soit E un espace euclidien.
Une **base orthonormée** de E est une famille orthonormée qui est une base de E.

Parenthèse : avantages d'une base orthonormée :
Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E.
Soit $x \in E$.

Alors : $x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i\rangle e_i$. (on remarque que ça ressemble à la dualité !)
La i^{me} coordonnée de x dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ est $\langle x, e_i\rangle$.

III Procédé d'orthonormalisation Gram-Schmidt

Voir cette vidéo pour une explication du procédé d'orthonormalisation Gram-Schmidt.

Théorème :

Soit E un espace euclidien de dimension finie et soit $(e_1, \dots, e_k)$ une famille libre de E.
Il existe une famille $(u_1, \dots, u_k)$ orthonormée de E telle que $\forall i \in S_k,\ \text{Vect}(u_1, \dots, u_i) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_i)$.
En particulier, si $k = \dim(E)$, alors $(u_1, \dots, u_k = u_n)$ est une base orthonormée de E.

Démonstration :
On procède par récurrence sur k.
Initialisation : $k = 1$.
Alors (e_1) est une famille libre de E si et seulement si $e_1 \neq 0$.
Dans ce cas, on pose $u_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$, qui est un vecteur de norme 1.
Hérédité : Supposons que la propriété est vérifiée pour $k \leq n - 1$.
Soit $(e_1, \dots, e_{k+1})$ une famille libre de E.
Par hypothèse de récurrence, il existe une famille $(u_1, \dots, u_k)$ orthonormée de E telle que $\forall i \in S_k,\ \text{Vect}(u_1, \dots, u_i) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_i)$.
On pose : $\overline{u_{k+1}} = e_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle e_{k+1}, u_i \rangle u_i$.

Soit $1 \leq i \leq k$.
On a : $\langle \overline{u_{k+1}}, u_i \rangle = \langle e_{k+1}, u_i \rangle - \sum_{j=1}^{k} \langle e_{k+1}, u_j \rangle \underbrace{\langle u_j, u_i \rangle}_{\delta ij}$. (car $(u_1, \dots, u_k)$ est orthonormée)

$\langle \overline{u_{k+1}}, u_j \rangle = \langle e_{k+1}, u_i \rangle - \langle e_{k+1}, u_i \rangle = 0$.
De plus, $\overline{u_{k+1}} \neq 0$ car $e_{k+1} \notin \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_k)$.
On pose alors $u_{k+1} = \frac{\overline{u_{k+1}}}{\|\overline{u_{k+1}}\|}$, qui est un vecteur de norme 1.
On a : $(u_1, \dots, u_{k+1})$ est une famille orthonormée de E qui vérifie $\forall i \in S_{k+1},\ \text{Vect}(u_1, \dots, u_i) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_i)$. $\square$

Corollaire :

Tout espace euclidien de dimension finie admet une base orthonormée.

Définition : Soient E, F deux espaces euclidiens.
On appelle **isométrie** de E dans F toute application $f : E \to F$ qui est un isomorphisme d'espace vectoriel et $\forall x \in E,\ \|f(x)\| = \|x\|$.

Remarque : $\forall x \in E\ \|f(x)\| = \|x\| \Leftrightarrow \forall x, y \in E,\ \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$.

Application : Démontrer la remarque précédente.

Définition : Deux espaces euclidiens E et F sont dits **isométriques** s'il existe une isométrie de E dans F.

Théorème :

Soit E un espace euclidien de dimension n.
Alors E est isométrique à $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique.

Démonstration :
Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E.
Soit $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
On définie l'application linéaire $f : E \to \mathbb{R}^n$ par $f(e_i) = \varepsilon_i$ pour tout $i \in S_n$.
Alors f est un isomorphisme d'espace vectoriel (car l'image d'une base est une base).

Soit $x, y \in E$.
$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$ avec $x_i, y_i \in \mathbb{R}$.
$\langle x, y \rangle = \langle \sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \langle e_i, e_j \rangle$ (bilinéarité)
$= \sum_{i=1}^n x_i y_i$ (car $(e_1, \dots, e_n)$ est orthonormée) qui est le produit scalaire canonique de $f(x) = \sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i$ et $f(y) = \sum_{i=1}^n y_i \varepsilon_i$.
$= \langle f(x), f(y) \rangle$ (car $f(x) = \sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i$ et $f(y) = \sum_{i=1}^n y_i \varepsilon_i$)
$\Rightarrow f$ est une isométrie de E dans $\mathbb{R}^n$. $\square$

IV Projections orthogonales

Définition : Soit E un espace euclidien et soit F un sous-espace vectoriel de E.
Alors :

1. $\forall x \in E \ \exists! y \in F : (x - y) \perp F$. On dit que y est le **projeté orthogonal** de x sur F.
2. L'application $p : E \to F$ qui à x associe son projeté orthogonal sur F est appelée **projection orthogonale** de E sur F et $ker(p) = \{z \in E : z \perp F\} = F^\perp$. On a de plus que p est un projecteur (*i.e.* $p^2 = p$).

Démonstration de l'unicité du projeté orthogonal :
Soit y tel que $y \in F$ et $x - y \perp F$.
F est un espace euclidien en posant comme produit scalaire sur F la restriction à $F \times F$ du produit scalaire de E.
Soit $(e_1, \dots, e_k)$ une base orthonormée de F.
Alors : $y = \sum_{i=1}^k \langle y, e_i \rangle e_i$ et on a de plus $\forall i \in S_n \ e_i \perp x - y$.
Donc $0 = \langle x - y, e_i \rangle = \langle x, e_i \rangle - \langle y, e_i \rangle$ donc $y = \sum_{i=1}^k \langle x, e_i \rangle e_i$. $\square$
Démonstration de l'existence du projeté orthogonal :
Le vecteur $y = \sum_{i=1}^k \langle x, e_i \rangle e_i$ vérifie bien $y \in F$ et $x - y \perp F$. $\square$
Démonstration de $ker(p)$ **:**
$kerp = \{z \in E : p(z) = 0\} = \{z \in E : z \perp F\} = F^\perp$. $\square$

Remarque : Soit p la projection orthogonale sur F. Alors pour $x \in E$, $p(x)$ est l'unique vecteur de F tel que $\|x - p(x)\| = \min_{z \in F} \|x - z\|$. Autrement dit, $p(x)$ est le point de F le plus proche de x.

Note de rédaction : cf. Laurent pour ce qui s'ensuit. cf. OneNote pour le schéma.

Remarque : On peut retrouver la formule de la distance d'un point à une droite / plan dans $\mathbb{R}^3$. Prendre une base orthonormée du plan P et $d(x, P) = \|x - \sum_{i=1}^2 \langle x, e_i \rangle e_i\|$ où $d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|$.

Remarque : Si $(e_1, \dots, e_k)$ est une famille libre de E. Gram-Schmit définit par récurrence $u_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$ et $u_{k+1} = \frac{e_{k+1} - p_i(e_{k+1})}{\|e_{k+1} - p_i(e_{k+1})\|}$, où p_i est la projection orthogonale sur Vect$(u_1, \dots, u_k)$.

V Suppléments orthogonaux

Définition : Soit E un espace euclidien. Soit F un sous-espace vectoriel de E.
On note

$$F^{\perp} = \{x \in E \mid \forall y \in F,\ \langle x, y\rangle = 0\} = \bigcap_{y \in F} ker(x \mapsto \langle x, y\rangle) = \bigcap_{i \in S_k} ker(x \mapsto \langle x, e_i\rangle)$$

où $(e_1, \dots, e_k)$ est une base de F. $F^{\perp}$ est appelé l'**espace orthogonal** de F dans E.

Remarque : $x \perp F \Leftrightarrow x \in F^{\perp}$.

Théorème :

Soit E un espace euclidien de dimension finie et soit F un sous-espace vectoriel de E.
Alors $E = F \oplus F^{\perp}$ (c'est même une somme directe orthogonale) et $F^{\perp} = (F^{\perp})^{\perp}$.

Démonstration :
$F^{\perp} = kerp$ et $F = Imp$ où p est la projection orthogonale de E sur F.
D'où $F^{\perp} \oplus F = kerp \oplus Imp = E$.
On a $dim(F^{\perp})^{\perp} = dim(E) - dim(F^{\perp}) = dim(F)$ donc il suffit de montrer une inclusion.
Soit $y \in F^{\perp}$.
Alors $\forall x \in F,\ \langle y, x\rangle = 0$ (en effet, si $x \in F$ alors $\forall y \in F^{\perp},\ \langle y, x\rangle = 0$)
D'où $F \subset (F^{\perp})^{\perp}$, d'où $F^{\perp} \supset (F^{\perp})^{\perp}$. $\square$

Corollaire :

Soit H un hyperplan de E. Alors il existe $x_0 \in E$ tel que $H = (Vect(x_0))^{\perp}$.

Démonstration :
Par définition d'un hyperplan, et comme $H^{\perp}$ est un supplémentaire de H, il existe $x_0 \in H^{\perp}$ tel que $H^{\perp} = Vect(x_0)$.
Et donc $H = (H^{\perp})^{\perp} = (Vect(x_0))^{\perp}$. $\square$

Remarque : Si $A \subset E$, on définit $A^{\perp} = \{x \in E : \forall a \in A,\ \langle x, a\rangle = 0\}$.
Alors $A^{\perp}$ est un sev de E et $A^{\perp} = (Vect(A))^{\perp}$.

Application : Montrer que $F_1 \subset F2 \Rightarrow F_2^{\perp} \subset F_1^{\perp}$.

VI Dual d'espace euclidien

Théorème : Représentation des formes linéaires

Soit E un espace euclidien. On note $j_E : E \to E^*$ l'application qui à x associe $j_E(x) : y \mapsto \langle x, y \rangle$.
Alors j_E est un isomorphisme d'espace vectoriel de E dans E^*.

Autrement dit, $\forall \varphi \in E^*,\ \exists x \in E : \varphi = \langle x, \cdot \rangle$.

Démonstration :
j_E est linéaire et $dimE = dimE^*$ et $x \in ker(j_E) \Leftrightarrow \forall y \in E,\ \langle x, y \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$. $\square$

Remarque : Si $\varphi \in E^*, y \in E$ on a le crochet de dualité $\langle \varphi, y \rangle$. Mais aussi si x est tel que $\varphi = \langle x, \cdot \rangle$, on a aussi $\langle x, y \rangle = \langle \varphi, y \rangle$. Donc on peut confondre les deux crochets de dualité. Autrement dit, $\langle j_E(x), y \rangle_{E^* \times E} = \langle x, y \rangle_{E \times E}$ et j_E permet de dire que le crochet de dualité est la même chose que le produit scalaire en identifiant E et E^* de manière canonique.

VII Cas des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels : espaces hermitiens

Définition : Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{C}$ une application.
On dit que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un **produit scalaire** sur E si :

1. $\forall x, y \in E,\ \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ (hermitianité)
2. $\forall x \in E\ y \mapsto \langle x, y \rangle$ est $\mathbb{C}$-linéaire (linéarité en la seconde variable)
3. $\forall x \in E,\ \langle x, x \rangle > 0$ si $x \neq 0$ et $\langle x, x \rangle = 0$ si $x = 0$ (positivité)

Remarque : Sesquilinéaire : $\forall y \in E \forall x, x' \in E \lambda \in \mathbb{C}\ \langle \lambda x + x', y \rangle = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle$. $\forall x \in E \forall y, y' \in E \forall \lambda \in \mathbb{C}\ \langle x, \lambda y + y' \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle$.

Exemple : Dans $\mathbb{C}^n$, $x = (x_i)$ et $y = (y_i)$, $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} y_i$ est un produit scalaire (canonique).

Remarque : Pour $n = 1$, $x, y \in \mathbb{C}$, $\langle x, y \rangle = \overline{x} y$ est un produit scalaire, et $\langle x, x \rangle = |x|^2$ (module au carré).

Contents