

Chapitre 5 : Déterminants

I Aire algébrique dans le plan

Soit E un plan sur un corps K . Soient $u, v \in E$. Comment définir $\mathcal{A}(u, v)$, l'aire algébrique du parallélogramme construit sur les vecteurs u et v ? Propriétés attendues :

- $\mathcal{A}(\lambda u, v) = \lambda \mathcal{A}(u, v)$ pour tout $\lambda \in K$ (linéarité par rapport au premier argument) ;
- $\mathcal{A}(u, \lambda v) = \lambda \mathcal{A}(u, v)$ pour tout $\lambda \in K$ (linéarité par rapport au premier argument) ;
- $\mathcal{A}(u_1 + u_2, v) = \mathcal{A}(u_1, v) + \mathcal{A}(u_2, v)$ (additivité par rapport au premier argument) ;
- $\mathcal{A}(u, v_1 + v_2) = \mathcal{A}(u, v_1) + \mathcal{A}(u, v_2)$ (additivité par rapport au second argument) ;

Donc les applications $u \mapsto \mathcal{A}(u, v)$ et $v \mapsto \mathcal{A}(u, v)$ sont linéaires. De plus, $\mathcal{A}(u, u) = 0$ pour tout $u \in E$. Cela entraîne : $(u + v, u + v) = 0$

et donc : $\mathcal{A}(u, u + v) + \mathcal{A}(v, u + v) = 0$

et donc : $\mathcal{A}(u, u) + \mathcal{A}(u, v) + \mathcal{A}(v, u) + \mathcal{A}(v, v) = 0$

et donc : $\mathcal{A}(v, u) = -\mathcal{A}(u, v)$ (antisymétrie/alternée).

Soit (e_1, e_2) une base de E .

Soient $u = ae_1 + be_2$ et $v = ce_1 + de_2$, avec $a, b, c, d \in K$.

On a : $\mathcal{A}(u, v) = \mathcal{A}(ae_1 + be_2, ce_1 + de_2)$

$$= ac\mathcal{A}(e_1, e_1) + ad\mathcal{A}(e_1, e_2) + bc\mathcal{A}(e_2, e_1) + bd\mathcal{A}(e_2, e_2)$$

$= (ad - bc)\mathcal{A}(e_1, e_2)$ = déterminant de u et v dans la base (e_1, e_2) multiplié par $\mathcal{A}(e_1, e_2)$.

Attention Pour avoir une meilleure idée que le ramassis de maths crachées au tableau, voir cette vidéo (en anglais).

II Formes multilinéaires

Définition : Soit E un espace vectoriel sur un corps K , soit p un entier naturel non nul.

Soit $f : E_K^p \rightarrow K$ une application.

On dit que f est une **forme multilinéaire** si pour tout i et $(u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_p) \in E^p$, $u \mapsto f(u_1, \dots, u_{i-1}, u, u_{i+1}, \dots, u_p)$ est une application linéaire de E dans K .

Autrement dit, f est linéaire par rapport à chacun de ses variables.

Vocabulaire : On dit que f est p -linéaire. C'est une forme linéaire si $p = 1$, une forme bilinéaire si $p = 2$.

Définition : On dit que f est **alternée** si pour tout $(u_1, \dots, u_p) \in E^p$ et pour tout $i \neq j$, $f(u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_p) = 0_K$ dès que $u_i = u_j$.

Autrement dit, f s'annule si deux de ses arguments sont égaux.

Définition : On dit que f est **antisymétrique** si pour tous $i, j, i \neq j$ on a $f(u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_p) = -f(u_1, \dots, u_j, \dots, u_i, \dots, u_p)$.

Autrement dit, permuter deux arguments de f change le signe de son image.

Proposition :

Soit $\sigma \in S_p$ une permutation et soit $f : E^p \rightarrow K$ une forme p -linéaire.

L'application $(u_1, \dots, u_p) \mapsto f(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(p)})$ est une forme p -linéaire notée f^σ .

De plus, si f est antisymétrique, on a $f^\sigma = \varepsilon(\sigma)f$ où $\varepsilon(\sigma)$ est la signature de la permutation σ .

💬 Note de rédaction : cf. Laurent pour la preuve

Théorème : Relation entre alternance et antisymétrie

Toute forme p -linéaire alternée est antisymétrique.

De plus, si $2 \neq 0$ (i.e. 2 est inversible dans K), toute forme p -linéaire antisymétrique est alternée.

ⓘ Remarque : Si $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} := \mathbb{F}_2$ et $E = \mathbb{K}$, alors : $(u = (x, y), v = (z, t)) \mapsto xz + yt$ n'est pas alternée car $(1, 0)$ et $(0, 1)$ sont distincts mais l'image est 1. Cependant, cette application est antisymétrique car $1 = -1$ dans \mathbb{F}_2 .

Proposition :

Soit f une forme p -linéaire alternée.

Soit $(u_1, \dots, u_p) \in E^p$ et soit $i \in \{1, \dots, p\}$.

Soit $v_i = u_i + \text{combinaison linéaire de } u_1, \dots, \hat{u}_i, \dots, u_p$ (c'est-à-dire des u_j avec $j \neq i$).

Alors $f(u_1, \dots, u_{i-1}, v_i, u_{i+1}, \dots, u_p) = f(u_1, \dots, u_p)$.

💬 Vocabulaire : On note $(u_1, \dots, \hat{u}_i, \dots, u_p)$ la famille obtenue en supprimant u_i de la famille (u_1, \dots, u_p) .

III Cas des formes n -linéaires alternées sur un espace vectoriel de dimension n

Soit E un espace vectoriel de dimension n sur un corps K , et soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . *But : déterminer les formes n -linéaires alternées sur E .*

Proposition : Formule de développement d'une forme n -linéaire alternée

Soit $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$.

Posons $u_j = \sum_{i=1}^n \lambda_{ij} e_i$ avec $\lambda_{ij} \in K$.

Soit f une forme linéaire alternée sur E .

On a : $f(u_1, \dots, u_n) = (\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \left(\prod_{j=1}^n \lambda_{\sigma(j), j} \right)) f(e_1, \dots, e_n)$.

ⓘ Remarque : Pour $n = 1$, on a : $f(u_1) = \lambda_{11} f(e_1)$ (linéarité).

Pour $n = 2$, on a : $f(u_1, u_2) = (\lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{21}\lambda_{12})f(e_1, e_2)$ (déjà vu dans le cas bilinéaire).

Pour $n = 3$, on a : $f(u_1, u_2, u_3) = (\lambda_{11}\lambda_{22}\lambda_{33} + \lambda_{21}\lambda_{32}\lambda_{13} + \lambda_{31}\lambda_{12}\lambda_{23} - \lambda_{31}\lambda_{22}\lambda_{13} - \lambda_{21}\lambda_{12}\lambda_{33} - \lambda_{11}\lambda_{32}\lambda_{23})f(e_1, e_2, e_3)$. Il y a $n!$ termes dans la formule. On a l'intuition que ça ressemble à un déterminant.

ⓘ Remarque : Le facteur de gauche dans la formule est indépendant de f . Celui de droite est indépendant des u_i .

💬 Note de rédaction : cf. Laurent pour la preuve

Théorème :

1. Il existe une unique forme linéaire alternée f_0 sur E telle que $f_0(e_1, \dots, e_n) = 1$.
Elle est donnée par : $f_0(u_1, \dots, u_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \left(\prod_{j=1}^n \lambda_{\sigma(j), j} \right)$ où $u_j = \sum_{i=1}^n \lambda_{ij} e_i$.
2. Soit une forme n -linéaire alternée f sur E .
Il existe un unique $\lambda \in K$ tel que $f = \lambda f_0$.
En particulier, on a $\lambda = f(e_1, \dots, e_n)$.

IV Déterminant d'un endomorphisme

Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie n , et soit B une base de E .

Théorème :

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.

Alors il existe un unique scalaire $\lambda \in K$ tel que pour tout $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$, on a :

$$\det_B(\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_n)) = \lambda \det_B(u_1, \dots, u_n).$$

Alors λ est indépendant de B . C'est le **déterminant** de φ , noté $\det(\varphi)$.

Note de rédaction : cf. Laurent pour la preuve

Théorème : Composition

Soient $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{L}(E)$.

On a : $\det(\varphi_1 \circ \varphi_2) = \det(\varphi_1) \times \det(\varphi_2)$.

Corollaire : Isomorphisme et déterminant

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ un isomorphisme.

Alors $\det(\varphi) \neq 0_K$ et $\det(\varphi^{-1}) = (\det(\varphi))^{-1}$.

Corollaire : Matrices

Soient $A, B \in M_n(K)$. On a :

1. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$;
2. Si A et B sont semblables, alors $\det(A) = \det(B)$.
3. Si A est inversible, alors $\det(A) \neq 0_K$ et $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$.

V Calcul de déterminants

Proposition :

Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ avec $a_{in} = 0$ si $i < n$.

$$\text{On a donc } A_{n,m} = \begin{pmatrix} & 0 \\ (*) & \vdots \\ & 0 \\ & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Posons $A_{ij} \in M_{n-1}(K)$ la matrice obtenue en supprimant la i -ème ligne et la j -ème colonne de A .

Vocabulaire :

1. Posons $\Delta_{ij} = \det(A_{ij})$ le **mineur** de A d'indices (i, j) .
2. Posons $(-1)^{i+j} \Delta_{ij}$ le **cofacteur** de A d'indices (i, j) .
3. Posons $com(A) = ((-1)^{i+j} \Delta_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(K)$ la **comatrice** de A .

Théorème :

On a $\det(A) = (-1)^{i+1} a_{i1} A + \dots + (-1)^{i+n} a_{in} A$ (développement suivant la i -ème ligne).
 $= (-1)^{1+j} a_{1j} A + \dots + (-1)^{n+j} a_{nj} A$ (développement suivant la j -ème colonne).

Théorème : Comatrice et transposée

On a $A^t com(A) = com(A)^t A = \det(A)I_n$.

Corollaire : Inversibilité

On a A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0_K$.

Dans ce cas, $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t com(A)$.