

Chapitre 4 : Espaces euclidiens

I Produit scalaire et norme

A Produit scalaire

On ne rappellera pas les définitions de normes et distances ici et les propositions qui s'ensuivent. Le lecteur est invité à se référer au chapitre 4 du cours AN3.

Définition : Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel.

Un **produit scalaire** sur E est une application $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie les propriétés suivantes :

1. $\forall x, y \in E, \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ (symétrie)
2. $\forall x, x', y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \langle \lambda x + x', y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle$ (linéarité en la première variable)
3. $\forall x \in E, \langle x, x \rangle \geq 0$ et $\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$ (positivité)

En résumé, un produit scalaire est une forme bilinéaire, symétrique et définie positive.

Exemple : Dans $\mathbb{R}^n, \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ est un produit scalaire.

Dans $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}), \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ est un produit scalaire.

Remarque : Si E est un espace vectoriel normé de dimension finie, il n'y a pas de produit scalaire canonique *a priori*. (On a vu néanmoins que dans \mathbb{R}^n , il existe un produit scalaire canonique.)

Définition : Un \mathbb{R} -espace vectoriel E muni d'un produit scalaire est appelé un **espace euclidien**.

On le note $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Identités remarquables :

$$\begin{aligned}\langle x + y, x + y \rangle &= \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \\ \langle x + y, x - y \rangle &= \langle x, x \rangle - \langle y, y \rangle\end{aligned}$$

Théorème : Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

Alors, pour tous $x, y \in E$, on a :

$$|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}$$

De plus, l'égalité a lieu si et seulement si x et y sont colinéaires.

Note de rédaction : cf. Laurent.

B Normes

Rappel : On rappelle qu'une norme est une application $N : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ qui vérifie l'homogénéité, l'inégalité triangulaire et la séparation.

Proposition :

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel, muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

On pose $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Alors $\|\cdot\|$ est une norme sur E , appelée la norme associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Démonstration :

Homogénéité : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in E$.

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle x, x \rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle x, x \rangle} = |\lambda| \|x\|$$

Inégalité triangulaire : Soit $x, y \in E$.

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \leq \langle x, x \rangle + 2|\langle x, y \rangle| + \langle y, y \rangle \\ &\leq \langle x, x \rangle + 2\sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle} + \langle y, y \rangle = (\sqrt{\langle x, x \rangle} + \sqrt{\langle y, y \rangle})^2 \\ &\Rightarrow \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \end{aligned}$$

Séparation : Soit $x \in E$ tel que $\|x\| = 0$.

$$\text{Alors } \sqrt{\langle x, x \rangle} = 0 \Rightarrow \langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$$

Remarque : $x \mapsto |x|$ est une norme sur \mathbb{R} , associée au produit scalaire $\langle x, y \rangle = xy$.

Rappel : Une distance sur un ensemble X est une application $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ qui vérifie la séparation, la symétrie et l'inégalité triangulaire.

Proposition : Lien entre norme et distance

Soit N une norme sur un \mathbb{R} -espace vectoriel E .

Alors $d(x, y) = N(x - y)$ est une distance sur E .

Remarque : En géométrie affine, si A et B sont deux points, le vecteur \overrightarrow{AB} est défini par $\overrightarrow{AB} = B - A$, et $d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\|$.

Remarque : Un produit scalaire donne une norme ($\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$) et une norme donne une distance ($d(x, y) = \|x - y\|$).

Propriété : Norme associée au produit scalaire (identité du parallélogramme)

$$\forall x, y \in E, \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

On peut le vérifier avec $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ et les identités remarquables.

D'où si une norme ne vérifie pas l'identité du parallélogramme, elle n'est pas associée à un produit scalaire.

Définition : Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel, muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

L'angle non-orienté entre $x, y \in E \setminus \{0\}$ est défini par $\theta = \arccos \left(\frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|} \right) \in [0, \pi]$.

Remarque : Cette définition est basée sur la propriété en géométrie euclidienne classique (angle où la direction n'a pas d'importance), et on a : $\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \cos(\theta)$.

Remarque : Le vecteur normé associé à $x \in E \setminus \{0\}$ est $\frac{x}{\|x\|}$. C'est utile pour calculer des vecteurs unitaires.

II Orthogonalité

Définition : Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel, muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
Deux vecteurs $x, y \in E$ sont dits **orthogonaux** si $\langle x, y \rangle = 0$.

On note $x \perp y$.

Remarque : L'angle entre deux vecteurs orthogonaux non nuls est $\frac{\pi}{2}$, et tout vecteur est orthogonal au vecteur nul.

Définition : Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel, muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
Une famille de vecteurs $(x_i)_{i \in I}$ est dite **orthogonale** si $x_i \perp x_j$ pour tous $i \neq j$, i.e. si ses vecteurs sont deux à deux orthogonaux.

Théorème de Pythagore :

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel, muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
Soit (x_1, \dots, x_k) une famille orthogonale (finie) de E .
Alors :

$$\|x_1 + \dots + x_k\|^2 = \|x_1\|^2 + \dots + \|x_k\|^2.$$

De plus, si $k = 2$, alors $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \Rightarrow x \perp y$.

Démonstration :

$$\|\sum_{i=1}^k x_i\|^2 = \langle \sum_{i=1}^k x_i, \sum_{j=1}^k x_j \rangle = (\text{bilinéarité}) \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \langle x_i, x_j \rangle = \sum_{i=1}^k \langle x_i, x_i \rangle = \sum_{i=1}^k \|x_i\|^2.$$

Pour $k = 2$, $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$.

Donc si $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$, alors $2\langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow x \perp y$. \square

Définition : Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel, muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
Une famille de vecteurs $(x_i)_{i \in I}$ est dite **orthonormée** si elle est orthogonale et que $\|x_i\| = 1$ pour tout $i \in I$.

Autrement dit, $\forall i, j \in I$, $\langle x_i, x_j \rangle = \delta_{ij}$.

Proposition :

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel, muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
Alors une famille orthogonale dont chacun des vecteurs est non nul est libre.

En particulier, une famille orthonormée est libre.

Remarque : Si E est de dimension finie, toute famille orthonormée admet au plus $\dim(E)$ vecteurs.

Note de rédaction : cf. Laurent pour les preuves de ces deux dernières propriétés.

Définition : Soit E un espace euclidien.
Une **base orthonormée** de E est une famille orthonormée qui est une base de E .

Parenthèse : avantages d'une base orthonormée :

Soit (e_1, \dots, e_n) une base orthonormée de E .
Soit $x \in E$.

Alors : $x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i$. (on remarque que ça ressemble à la dualité !)
La i^{me} coordonnée de x dans la base (e_1, \dots, e_n) est $\langle x, e_i \rangle$.

III Procédé d'orthonormalisation Gram-Schmidt

Voir cette vidéo pour une explication du procédé d'orthonormalisation Gram-Schmidt.

On obtient l'algorithme suivant :

Soit (e_1, \dots, e_n) une base de E . On pose $u_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$.

Si (u_1, \dots, u_k) est construite pour $k \leq n - 1$, on pose $u_{k+1} = \frac{e_{k+1} - \sum_{i=1}^k \langle e_{k+1}, u_i \rangle u_i}{\|e_{k+1} - \sum_{i=1}^k \langle e_{k+1}, u_i \rangle u_i\|}$.

Contents

I	Produit scalaire et norme	1
A	Produit scalaire	1
B	Normes	1
II	Orthogonalité	3
III	Procédé d'orthonormalisation Gram-Schmidt	4