Chapitre 3 : Probabilités conditionnelles et indépendance

Définition : Soit $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(B) > 0$.
La **probabilité conditionnelle** de A sachant B est définie par :

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \quad \mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Exemple : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (lancer de dé équilibré).
$B = \{2, 4, 6\}$ (obtenir un nombre pair). $A = \{2\}$.
On se muni de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$ définie par $\mathbb{P}(\{i\}) = \frac{1}{6}$ pour tout $i \in \Omega$.
La probabilité que si on obtient un nombre pair, ce soit un 2 est :

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$$

Remarque : On a que $\mathbb{P}(A \mid \Omega) = \mathbb{P}(A)$.

Proposition :

Soit $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(B) > 0$.
Alors $\mathbb{P}_B = \mathbb{P}(\cdot \mid B)$ est une probabilité sur Ω où pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A \mid B)$.

Démonstration :
Vérifions les axiomes de la probabilité :

1. $\mathbb{P}_B(\emptyset) = \mathbb{P}(\emptyset \mid B) = \frac{\mathbb{P}(\emptyset \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{0}{\mathbb{P}(B)} = 0$ et $\mathbb{P}_B(\Omega) = \mathbb{P}(\Omega \mid B) = \frac{\mathbb{P}(\Omega \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = 1$.

2. On a que $\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(B)$ donc $\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \leq 1$.

3. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite finie ou dénombrable de parties de Ω telles que $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour $i \neq j$.
   Alors :
   $$\mathbb{P}_B\left(\bigcup_n A_n\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_n A_n \mid B\right) = \frac{\mathbb{P}\left(\left(\bigcup_n A_n\right) \cap B\right)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}\left(\bigcup_n (A_n \cap B)\right)}{\mathbb{P}(B)}$$
   Or, comme les A_n sont disjoints, les $A_n \cap B$ le sont aussi. Donc :
   $$\mathbb{P}_B\left(\bigcup_n A_n\right) = \frac{\sum_n \mathbb{P}(A_n \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \sum_n \frac{\mathbb{P}(A_n \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \sum_n \mathbb{P}_B(A_n)$$

$\square$

Proposition : Formule des probabilités totales

Soit $(B_n)_n$ une suite de parties dénombrable de Ω telles que :

1. $\forall i \neq j, B_i \cap B_j = \emptyset$
2. $\bigcup_n B_n = \Omega$
3. $\forall n, \mathbb{P}(B_n) > 0$

Alors, pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, on a :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_n \mathbb{P}(A \mid B_n) \cdot \mathbb{P}(B_n)$$

Démonstration :
$E = \bigcup_n \underbrace{(E \cap B_n)}_{F_n}$ car $\bigcup_n B_n = \Omega$. De plus, $F_i \cap F_j = \emptyset$ pour $i \neq j$.
Donc :

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}\left(\bigcup_n F_n\right) = \sum_n \mathbb{P}(F_n) = \sum_n \mathbb{P}(E \cap B_n)$$

Or, $\mathbb{P}(E \cap B_n) = \mathbb{P}(E \mid B_n) \cdot \mathbb{P}(B_n)$.
D'où le résultat. □

Proposition : Formule de Bayes

Soit $(B_n)_n$ une suite de parties dénombrable de Ω telles que :

1. $\forall i \neq j, B_i \cap B_j = \emptyset$
2. $\bigcup_n B_n = \Omega$
3. $\forall n, \mathbb{P}(B_n) > 0$

Alors, pour tout $E \in \mathcal{P}(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(E) > 0$, on a :

$$\forall k, \quad \mathbb{P}(B_k \mid E) = \frac{\mathbb{P}(E \mid B_k) \cdot \mathbb{P}(B_k)}{\sum_n \mathbb{P}(E \mid B_n) \cdot \mathbb{P}(B_n)}$$

Démonstration :
Par définition de la probabilité conditionnelle, on a : $\mathbb{P}(B_k \mid E) = \frac{\mathbb{P}(E \cap B_k)}{\mathbb{P}(E)} = \frac{\mathbb{P}(E|B_k) \cdot \mathbb{P}(B_k)}{\mathbb{P}(E)}$.
Or, par la formule des probabilités totales, on a : $\mathbb{P}(E) = \sum_n \mathbb{P}(E \mid B_n) \cdot \mathbb{P}(B_n)$.
D'où le résultat. □

Exemple : Imaginons qu'on ait une maladie rare qui touche 1 personne sur 100.
ie $\mathbb{P}(M) = 0.01$ où M est l'événement "la personne est malade" (prévalence).
De plus, $\mathbb{P}(T+ \mid M) = 0.99$ où $T+$ est l'événement "le test est positif" (sensibilité).
Cependant, le test n'est pas parfait et on a $\mathbb{P}(T- \mid M^c) = 0.95$ où $T-$ est l'événement "le test est négatif" (spécificité).
Question : Quelle est la probabilité qu'une personne soit malade sachant que son test est positif ?
On cherche donc $\mathbb{P}(M \mid T+)$. Par la formule de Bayes, on a :

$$\mathbb{P}(M \mid T+) = \frac{\mathbb{P}(T+ \mid M) \cdot \mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(T+ \mid M) \cdot \mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(T+ \mid M^c) \cdot \mathbb{P}(M^c)}$$

Or, $\mathbb{P}(T+ \mid M^c) = 1 - \mathbb{P}(T- \mid M^c) = 1 - 0.95 = 0.05$ et $\mathbb{P}(M^c) = 1 - \mathbb{P}(M) = 0.99$.
Donc :

$$\mathbb{P}(M \mid T+) = \frac{0.99 \cdot 0.01}{0.99 \cdot 0.01 + 0.05 \cdot 0.99} \approx 0.166$$

Ainsi, même si le test est positif, la probabilité que la personne soit réellement malade n'est qu'environ de 16.6%.

Contents