Chapitre 2 : Formes linéaires et dualité

I Formes linéaires et hyperplan

Rappel : E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Remarque : On note $dim_{\mathbb{K}}(E)$ la dimension de E en tant qu'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. C'est utile, car par exemple $dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$ mais $dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$.

Définition : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
On appelle **forme linéaire** sur E toute application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

On appelle l'espace dual de E et on note E^* l'ensemble des formes linéaires sur E :

$$E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$$

Remarque : Si $\varphi \in E^*$ et $x \in E$, on peut noter $\varphi(x) = \langle \varphi, x \rangle$.

Vocabulaire : On appelle $\langle , \rangle$ le crochet de dualité.

Exemple : $E = \mathbb{R}^3$.
On pose $f(x,y,z) = 3x + 2y - z$. Alors $f \in E^*$.

Proposition :

L'image d'un élément de E^* est $\mathbb{K}$ ou $\{0\}$ et $dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}) = 1$.

$Im(f) = \{0\} \Leftrightarrow f = 0$.

Preuve : Appliquer le théorème du rang.

Définition : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
On appelle **hyperplan** de E le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E.

Proposition :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit H un sous-espace vectoriel de E.
H est un hyperplan de $E \Leftrightarrow \exists x_0 \in E \setminus \{0\}$ tel que $E = H \oplus Vect(x_0)$.

De plus, si $dim(E) = n$, H est un hyperplan de $E \Leftrightarrow dim(H) = n - 1$.

Remarque : Le prof a noté $\mathbb{K}x_0$ au lieu de $Vect(x_0)$.

Démonstration :
Supposons que H est un hyperplan de E.
Par définition, il existe $f \in E^* \setminus \{0\}$ tel que $H = Ker(f)$.

Soit $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) \neq 0$. En particulier, $f(x_0) \neq 0$ (car f est non nulle).
Montrons que $E = H \oplus Vect(x_0)$.
Soit $x \in H \cup Vect(x_0)$.
Comme $x \in Vect(x_0)$, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $x = x_0 * \lambda$.

Or $x \in H \Rightarrow 0 = f(x) = f(x_0 * \lambda) = \lambda f(x_0)$.
Comme $f(x_0) \neq 0$, on en déduit que $\lambda = 0$ et donc $x = 0$ et $H \cap Vect(x_0) = \{0\}$.

Montrons que $E = H + Vect(x_0)$.
Soit $x \in E$.
On a $x = \underbrace{x - \frac{f(x)}{f(x_0)}x_0}_{\in H} + \underbrace{\frac{f(x)}{f(x_0)}x_0}_{\in Vect(x_0)}$.
Donc $E = H + Vect(x_0)$ et finalement $E = H \oplus Vect(x_0)$.

Réciproquement, supposons qu'il existe $x_0 \in E \setminus \{0\}$ tel que $E = H \oplus Vect(x_0)$.
Soit p la projection sur $Vect(x_0)$ parallèlement à H. *(ie. pour $x \in E$, $p(x)$ est l'unique élément λx_0 dans la décomposition $x = h + \lambda x_0$ avec $h \in H$ et $\lambda \in \mathbb{K}$).*
Pour $x \in E$, on note $\lambda(x) \in \mathbb{K}$ tel que $p(x) = \lambda(x)x_0$.
On a $\lambda : E \to \mathbb{K} \in E^*$ (il suffit de montrer que λ est linéaire).
De plus, $\lambda(x_0) = 1$ par définition donc $\lambda \in E^* \setminus \{0\}$ et $\forall h \in H, \lambda(h) = 0$ (car $p(h) = 0$).
Doc $H = Ker(\lambda)$, c'est-à-dire que H est un hyperplan de E. $\square$

Proposition :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soient $f, g \in E^*$.

$$ker(f) = ker(g) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}, g = \lambda f$$

(ie. f et g sont proportionnelles).

Démonstration :
Comme f et g sont non nulles, $ker(f) = ker(g)$ est un hyperplan de E.
Donc E s'écrit comme $E = H \oplus Vect(x_0)$ avec $H = ker(f) = ker(g)$ et $x_0 \in E \setminus \{0\}$.

En particulier, $x_0 \notin ker(f)$ et $x_0 \notin ker(g)$. (car sinon $E = ker(f)$ ou $E = ker(g)$ et donc $f = 0$ ou $g = 0$).

Donc posons $\lambda = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$.
Montrons que $f = \lambda g$.
Soit $x \in E$.
On écrit $x = h + \mu x_0$ avec $h \in H$ et $\mu \in \mathbb{K}$.
Alors $f(x) = f(h + \mu x_0) = f(h) + \mu f(x_0) = \mu f(x_0)$ (car $h \in H = ker(f)$).
Et de même $g(x) = g(h + \mu x_0) = g(h) + \mu g(x_0) = \mu g(x_0) = \mu \frac{f(x_0)}{\lambda}$.

Donc $f = \lambda g$. $\square$

II Bases duales

Proposition : Dimension de l'espace dual *(admis)*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Alors $dim(E^*) = dim_{\mathbb{K}}(E) \cdot dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}) = n \cdot 1 = n$.

Définition : Soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E.
On appelle $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ la base duale de E définie par :

$$\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\},\ \langle e_i^*, e_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

De manière équivalente, si $x \in E$ s'écrit $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$ (coordonnées de x dans la base $(e_1, \dots, e_n)$), alors : $\langle e_i^*, x \rangle = x_i$. (car $\langle e_i^*, \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \langle e_i^*, e_j \rangle = x_i$)

Ou encore $x = \sum_{j=1}^{n} \langle e_j^*, x \rangle e_j$.

Preuve de pourquoi est-ce une base :

Montrons que $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ est une base de E^*.
Comme il y a n vecteurs dans cette famille, il suffit de montrer que cette famille est libre.

Soit $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i^* = 0_{E^*}$.
Montrons que tous les λ_i sont nuls.

On applique en e_j l'application linéaire $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i^*$:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i^* \right) (e_j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle e_i^*, e_j \rangle = \lambda_j = 0$$