Chapitre 1 : Suites de Cauchy

I Rappels sur les suites

A Définitions générales

On ne rappelera que ce qui n'est pas "évident" dans le cours de L1.

Définition : Une sous-suite (ou suite extraite) d'une suite (u_n) est une suite (v_n) : $\exists \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N},$ strictement croissante tq $v_n = u_{\varphi(n)}$

Vocabulaire : Une sous-suite de (u_n) est aussi notée (u_{n_k}).

Définition : Une suite (u_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$ si : $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\varepsilon, |u_n - l| < \varepsilon$

Vocabulaire : Si elle ne converge pas on dit qu'elle diverge.
Attention : une suite peut diverger mais avoir une limite (une suite qui tend vers l'infini).

Propriété : Bornes *(admise)*

Si une suite (u_n) converge, alors elle est bornée : $\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$.

Propriété : Convergence des sous-suites *(admise)*

Si une suite (u_n) converge vers l, alors toute sous-suite (u_{n_k}) converge aussi vers l.

B Propriétés et théorèmes fondamentaux

Propriété : Espace-vectoriel *(admise)*

L'ensemble des suites réelles convergentes est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Théorème : Suites adjacentes *(admis)*

Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes si :

- (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante
- $u_n \leq v_n, \forall n \in \mathbb{N}$
- $v_n - u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Si deux suites sont adjacentes, alors elles convergent vers la même limite.

Théorème : Bolzano-Weierstrass *(admis)*

Toute suite réelle bornée admet une sous-suite convergente.

II Suites de Cauchy

Définition : Une suite (u_n) est une suite de Cauchy si : $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N_\varepsilon, |u_p - u_q| < \varepsilon$

Définition : autre formulation utile
Soit (u_n) une suite à valeur dans $(K, |\cdot|)$.
(u_n) est une suite de Cauchy si : $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}, |u_{n+p} - u_n| < \varepsilon$

Propriété : Convergence

Toute suite convergente est une suite de Cauchy.

Preuve:

Proposition : Bornes

Toute suite de Cauchy est bornée.

Preuve:

Théorème :

Toute suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ converge dans $\mathbb{R}$.

Preuve:

Remarque : On dit que $\mathbb{R}$ est complet.

Définition : On dit que $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est complet.

Exemple : Notion de complétude

$(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ n'est pas complet : la suite définie par $u_n =$ la partie décimale de $\sqrt{2}$ à la n-ième décimale est une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ qui ne converge pas dans $\mathbb{Q}$ (car $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).
Par contre, elle converge dans $\mathbb{R}$.

III Topologie de $\mathbb{R}$

A Rappels

a) Ouvert

Définition : Soit $x \in \mathbb{R}$ et $V \subset \mathbb{R}$. On dit que V est un voisinage de x si : $\exists \varepsilon > 0,]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset V$

Définition : $U \subset \mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ si : $\forall x \in U, U$ est un voisinage de x

Exemple :

- $\mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.
- $]a, b[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$
- $]a, +\infty[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$
- $]-\infty, a[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$
- L'ensemble vide est un ouvert de $\mathbb{R}$.

Propriété : Opérations sur les ouverts *(admise)*

- L'intersection finie d'ouverts est un ouvert.
- L'union quelconque d'ouverts est un ouvert.

Remarque : L'intersection infinie d'ouverts n'est pas forcément un ouvert : $\bigcap_{n=1}^{\infty}]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[= \{0\}$ qui n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$.
Toutefois, pour un n_{max} donné l'intersection de n_{max} ouverts est un ouvert.

b) Fermé

Définition : $F \subset \mathbb{R}$ est un fermé de $\mathbb{R}$ si : $\mathbb{R} \setminus F$ est un ouvert de $\mathbb{R}$

Exemple :

- $\mathbb{R}$ est un fermé de $\mathbb{R}$.
- $[a, b]$ est un fermé de $\mathbb{R}$
- Toute famille finie d'éléments de $\mathbb{R}$ est un fermé de $\mathbb{R}$.
- L'ensemble vide est un fermé de $\mathbb{R}$.

Remarque : $\mathbb{Q}$ n'est ni ouvert ni fermé dans $\mathbb{R}$.

Propriété : Opérations sur les fermés *(admise)*

- L'union finie de fermés est un fermé.
- L'intersection quelconque de fermés est un fermé.

Théorème : Caractérisation séquentielle des fermés

$F \subset \mathbb{R}$ fermé $\Leftrightarrow$ toute suite (u_n) d'éléments de F qui converge dans $\mathbb{R}$ a sa limite dans F.

Preuve:
$\Rightarrow$/ Supposons F fermé, on a $\mathbb{R} \setminus F$ ouvert.
Par l'absurde, on suppose qu'il existe une suite (u_n) d'éléments de F qui converge vers $l \in \mathbb{R} \setminus F$.
Comme $\mathbb{R} \setminus F$ est un ouvert, $\exists \varepsilon > 0,]l - \varepsilon, l + \varepsilon[\subset \mathbb{R} \setminus F$.
Par convergence de (u_n), $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\varepsilon, |u_n - l| < \varepsilon \Rightarrow u_n \in]l - \varepsilon, l + \varepsilon[\subset \mathbb{R} \setminus F$ ce qui est absurde car (u_n) est une suite d'éléments de F.

$\Leftarrow$/ On raisonne par contraposée.
Si $\mathbb{R} \setminus F$ n'est pas un ouvert, $\exists l \in \mathbb{R} \setminus F$ tel que $\forall r > 0,]l - r, l + r[\cap F \neq \mathbb{R} \setminus F$ car $\mathbb{R} \setminus F$ est au voisinage de l.
Supposons qu'il existe une suite (u_n) d'éléments de F.
En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in]l - \frac{1}{n}, l + \frac{1}{n}[\cap F \implies u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l$ et $(u_n) \in F$.

Remarque : Ce théorème est utile pour montrer qu'on a un ensemble fermé.

Définition : Soit $A \subset \mathbb{R}$.
On définit l'adhérence de A, notée $\overline{A}$, comme suit : $\overline{A} = \bigcap_{F \text{ fermé}, A \subset F} F$.
C'est le plus petit fermé contenant A.

Lemme :

Soit $A \subset \mathbb{R}$.
$x \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap A \neq \emptyset$.

Preuve:

Théorème :

Soit $A \subset \mathbb{R}$.
Alors $\overline{A} = \{x \in \mathbb{R}, \exists (u_n)$ suite d'éléments de $A, u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x\}$.

Remarque : Autrement dit, l'adhérence de A est l'ensemble des limites de suites d'éléments de A.

Preuve:

B Complétude

Définition : $F \subset \mathbb{R}$ est complet si toute suite de Cauchy d'éléments de F converge dans F.

Exemple : $\mathbb{R}$ est complet.

Théorème : Caractérisation des parties complètes de $\mathbb{R}$

$F \subset \mathbb{R}$ est complet $\Leftrightarrow$ F est fermé.

Preuve: