Chapitre 4.2 : Topologie des espaces métriques et des espaces vectoriels normés

I Topologie sur les espaces métriques

A Ouverts et fermés

Remarque : Un evn étant un espace métrique avec la distance $d(x, y) = N(y - x)$, toutes les notions de topologie vues ici s'appliquent aux evn.

Définition : Soit (X, d) un espace métrique.
Une boule ouverte de centre $a \in X$ de rayon $r > 0$ est $B(a, r) = \{x \in X \mid d(x, a) = d(a, x) < r\}$.

Définition : Soit (X, d) un espace métrique.
Une boule fermée de centre $a \in X$ de rayon $r > 0$ est $B_F(a, r) = \{x \in X \mid d(a, x) \leq r\}$.

Définition : Soit (X, d) un espace métrique.
La sphère de centre $a \in X$ de rayon $r > 0$ est $S(a, r) = \{x \in X \mid d(a, x) = r\}$.

Exemple : Dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $B(1, 1) =]0, 2[$

Exemple : Dans $\mathbb{R}^2$ avec trois métriques :
$d_1 = \|y - x\|_1$, $d_2 = \|y - x\|_2$ et $d_\infty = \|y - x\|_\infty$.
Traçons les boules de centre 0 de rayon 1 associées à chaque distance.
$B(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x, 0) < 1\}$.
On a : $\|x\|_{1,2,\infty} < 1$.

- Pour d_1 : $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| < 1$. C'est un losange.
- Pour d_2 : $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < 1$. C'est un disque.
- Pour d_∞ : $\|x\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|) < 1$. C'est un carré.

Remarque : Les bordures correspondent aux sphères $S(0, 1)$ associées à chaque distance. Les boules fermées $B_F(0, 1)$ correspondent aux mêmes figures mais en incluant les bordures.

Définition : Une partie U de X est un ouvert de (X, d) si $\forall x \in U, \exists r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U$.

Exemple : $]0, 1[\subset \mathcal{C}(]0, 1[, \mathbb{R})$ est un ouvert : $\forall x \in]0, 1[, B(x, \min(x, 1 - x)) \subset]0, 1[$.

Définition : Une topologie sur (X, d) est l'ensemble des ouverts de (X, d). Autrement dit, $\tau = \{U \subset X \mid U \text{ est un ouvert de } (X, d)\}$.

Proposition :

1. Toute boule ouverte de (X, d) est un ouvert de (X, d).
2. Si $(U_i)_{i\in I}$ est une famille d'ouverts de (X, d), alors $\bigcup_{i\in I} U_i$ est un ouvert de (X, d). (I un ensemble quelconque)
3. Si $(U_1, U_2, \dots, U_n)$ est une famille finie d'ouverts de (X, d), alors $\bigcap_{i=1}^n U_i$ est un ouvert de (X, d).

Preuve :

1. Soit $B(a, r)$ une boule ouverte de (X, d). Soit $x \in B(a, r)$. On a $d(a, x) < r$. Posons $s = r - d(a, x) > 0$. Montrons que $B(x, s) \subset B(a, r)$.
   Soit $y \in B(x, s)$. On a $d(x, y) < s$. D'après l'inégalité triangulaire, on a $d(a, y) \leq d(a, x) + d(x, y) < d(a, x) + s = d(a, x) + (r - d(a, x)) = r$. Donc $y \in B(a, r)$. Ainsi, $B(x, s) \subset B(a, r)$ et donc $B(a, r)$ est un ouvert de (X, d).
2. Soit $x \in (U_i)_{i\in I}$. Alors $\exists i_0 \in I$ tel que $x \in U_{i_0}$. Comme U_{i_0} est un ouvert de (X, d), il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U_{i_0} \subset \bigcup_{i\in I} U_i$. Donc $\bigcup_{i\in I} U_i$ est un ouvert de (X, d).
3. Soit $x \in \bigcap_{i=1}^n U_i$, où on a écrit $I = \{1, 2, \dots, n\}, n \in \mathbb{N}^*$.
   Alors $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \exists r_i > 0$ tel que $B(x, r_i) \subset U_i$. Posons $r = \min(r_1, r_2, \dots, r_n) > 0$. Alors $B(x, r) \subset \bigcap U_i$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.
   En effet, soit $z \in B(x, r), d(z, x) < r \leq r_i$ donc $z \in B(x, r_i) \subset U_i$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Donc $z \in \bigcap_{i=1}^n U_i$.
   Ainsi, $\bigcap_{i=1}^n U_i$ est un ouvert de (X, d).

Contre-Exemple : Si I est infini, la propriété 3 n'est pas vraie en général. Par exemple, dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, considérons la famille d'ouverts $U_n =]-1/n, 1/n[$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $\bigcap_{n=1}^\infty U_n = \{0\}$ qui n'est pas un ouvert de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

Définition : Soit (X, d) un espace métrique.
Une partie F de X est un fermé de (X, d) si son complémentaire $X \setminus F$ est un ouvert de (X, d).

Proposition :

1. Toute boule fermée de (X, d) est un fermé de (X, d).
2. Si $(F_i)_{i\in I}$ est une famille de fermés de (X, d), alors $\bigcap_{i\in I} F_i$ est un fermé de (X, d). (I un ensemble quelconque)
3. Si $(F_1, F_2, \dots, F_n)$ est une famille finie de fermés de (X, d), alors $\bigcup_{i=1}^n F_i$ est un fermé de (X, d).

Preuve :

1. Soit $B_F(x, r)$ une boule fermée de (X, d). C'est un fermé $\Leftrightarrow X \setminus B_F(x, r)$ est un ouvert de (X, d).
   Soit $y \in X \setminus B_F(x, r)$. On a $d(x, y) > r$. Posons $\varrho = d(y, x) - r > 0$. Montrons que $B(y, \varrho) \subset X \setminus B_F(x, r)$.
   Soit $z \in B(y, \varrho)$. On a $d(y, z) < \varrho$.
   $d(z, y) < d(y, x) - r \Rightarrow r < d(y, x) - d(z, y) \leq d(z, x)$ (inégalité triangulaire) $\Rightarrow z \in X \setminus B_F(x, r)$.
   Ainsi, $B(y, \varrho) \subset X \setminus B_F(x, r)$ et donc $X \setminus B_F(x, r)$ est un ouvert de (X, d).
   Donc $B_F(x, r)$ est un fermé de (X, d).
2. Laissé en exercice au lecteur.
3. Laissé en exercice au lecteur.

Remarque : Dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, tout intervalle fermé est un fermé, et tout intervalle ouvert est un ouvert. ($\mathbb{R}$ est ouvert).
On a : $]a, +\infty[= \bigcup_{n=1}^\infty]a, a + n[$ est un ouvert.

Remarque : X et $\emptyset$ sont des ouverts et des fermés de (X, d) (prendre r arbitrairement grand pour X et r quelconque pour $\emptyset$).

Définition : Soit $\mathcal{V} \subset X$ une partie de l'espace métrique (X, d).
On dit que $\mathcal{V}$ est un voisinage de $a \in X$ si $\exists r > 0$ tel que $B(a, r) \subset \mathcal{V}$.

Proposition :

On dit aussi que U est un ouvert de (X, d) si et seulement si U est un voisinage de chacun de ses points.

B Intérieur et adhérence

Soit (X, d) un espace métrique.

Définition : Soit $A \subset X$ une partie de l'espace métrique (X, d).
On appelle intérieur de A l'ensemble des points $a \in A$ tels que A est un voisinage de a. On le note : $\overset{\circ}{A}$.
On a :

$$\overset{\circ}{A} = \bigcup \{U \subset A \mid U \text{ est un ouvert de } (X, d)\}$$

Définition : Soit $A \subset X$ une partie de l'espace métrique (X, d).
On appelle adhérence de A l'ensemble des points $x \in X$ tels que $\forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset$. On le note : $\overline{A}$.
On a :

$$\overline{A} = \bigcap_{F \supset A, F \text{ fermé de } (X,d)} F$$

Proposition : Lien avec les ouverts

Soit $A \subset X$ une partie de l'espace métrique (X, d).

1. $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert contenu dans A.
2. Si $U \subset A$ est un ouvert de (X, d), alors $U \subset \overset{\circ}{A}$.
   Autrement dit, $\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A.

Preuve :

1. C'est une union quelconque d'ouverts indus dans A, donc $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert. De plus, par définition, $\overset{\circ}{A} \subset A$.
2. Par définition $\overset{\circ}{A} = \bigcup \{U \subset A \mid U \text{ est un ouvert de } (X, d)\}$. Donc si $U \subset A$ est un ouvert de (X, d), alors U est dans la famille indexée par l'union, donc $U \subset \overset{\circ}{A}$.

Proposition : Lien avec les fermés

Soit $A \subset X$ une partie de l'espace métrique (X, d).

1. $\overline{A}$ est un fermé contenant A.
2. Si $F \supset A$ est un fermé de (X, d), alors $\overline{A} \subset F$.
   Autrement dit, $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A.

Preuve :

1. C'est une intersection quelconque de fermés contenant A, donc $\overline{A}$ est un fermé. De plus, par définition, $A \subset \overline{A}$.
2. Par définition $\overline{A} = \bigcap_{F \supset A, F \text{ fermé de } (X,d)} F$. Donc si $F \supset A$ est un fermé de (X, d), alors F est dans la famille indexée par l'intersection, donc $\overline{A} \subset F$.

Proposition :

1. $\mathring{A} = X \setminus \overline{(X \setminus A)}$
2. $\overline{A} = X \setminus (X \overset{\circ}{\setminus} A)$
3. $x \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall r > 0, B(x,r) \cap A \neq \emptyset$

Preuve :

1. ($\Rightarrow$) $x \in \mathring{A}$. Par définition d'un ouvert, $\exists r > 0$ tel que $B(x,r) \subset \mathring{A} \subset A$.
   ($\Leftarrow$) On a $B(x,r) \subset A$ qui est un ouvert.
   Donc $B(x,r) \subset \mathring{A}$ car $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A. Donc $x \in \mathring{A}$, donc $x \in \mathring{A}$.

2. $\mathring{A} \Leftrightarrow X \setminus \mathring{A} = \overline{(X \setminus A)}$.
   Or $\mathring{A} = \bigcup\{U \subset A \mid U$ est un ouvert de $(X,d)\}$.
   Donc $X \setminus \mathring{A} = X \setminus \bigcup\{U \subset A \mid U$ est un ouvert de $(X,d)\} = \bigcap_{F \supset X \setminus A, F \text{ fermé de } (X,d)} F = \overline{(X \setminus A)}$.
   Faire de même avec $\overline{A} = X \setminus (X \overset{\circ}{\setminus} A)$.

3. $x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \in X \setminus (X \overset{\circ}{\setminus} A)$ (d'après 2) $\Leftrightarrow x \notin (X \overset{\circ}{\setminus} A) \Leftrightarrow$ pour tout $r > 0$, $B(x,r) \not\subset X \setminus A \Leftrightarrow$ pour tout $r > 0$. $\Leftarrow B(x,r) \cap A \neq \emptyset$.

Proposition :

- U est ouvert $\Leftrightarrow \mathring{U} = U$.
- F est fermé $\Leftrightarrow \overline{F} = F$.

C Suites dans un espace métrique

1 Définitions

Définition : On dit qu'une suite (x_n), $x_n \in X$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, converge si $\exists x \in X$ tel que $d(x_n, x) \to 0$ quand $n \to +\infty$.
Autrement dit,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, d(x_n, x) < \varepsilon$$

Remarque : Si $(X,d) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$, on retrouve la définition usuelle de la convergence des suites réelles.

Définition : On dit que $x \in X$ est une valeur d'adhérence d'une suite (x_n) si il existe une sous suite qui converge vers x. i.e. $\exists (n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ strictement croissante telle que $d(x_{n_k}, x) \to 0$ quand $k \to +\infty$.

Proposition :

Soit (x_n) une suite de (X,d) qui converge vers x.
Alors x est la seule valeur d'adhérence de (x_n). En particulier, la limite de (x_n) est unique.

Preuve :
Soit x la limite de (x_n). Suppons qu'il existe une sous-suite (x_{n_k}) qui converge vers une autre valeur $y \neq x$.
On a $d(x,y) > 0$. Posons $\varepsilon = \frac{d(x,y)}{2} > 0$.
$\exists k_1, (\varepsilon, y) \in \mathbb{N}, \forall k \geq k_1, d(x_{n_k}, y) < \varepsilon$. (convergence de la sous-suite)
Et comme $x_n \to x$, alors $x_{n_k} \to x$ aussi.
Donc $\exists k_2, (\varepsilon, x) \in \mathbb{N}, \forall k \geq k_2, d(x_{n_k}, x) < \varepsilon$.
Alors on a pour $k \geq \max(k_1, k_2)$:

$d(x,y) \leq d(x,x_{n_k}) + d(x_{n_k},y) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = d(x,y)$, ce qui est absurde. Donc x est la seule valeur d'adhérence de (x_n).

Fermés
Soit A une partie quelconque de l'espace métrique (X,d).

Proposition : Caractérisation de l'adhérence par des suites

$\overline{A} = \{x \in X \mid \exists (x_n) \text{ suite de } A, x_n \to x\}$.

Preuve :
($\subset$) Soit $x \in X$ tq $\exists (x_n) \in A$ avec $d(x_n,x) \to 0$.
On veut montrer que $x \in \overline{A} \Rightarrow$ pour tout $r > 0, B(x,r) \cap A \neq \emptyset$.
Soit $r > 0$. Comme $d(x_n,x) \to 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, d(x_n,x) < r$.
On a $x_n \in A$ donc $x_n \in B(x,r) \cap A \neq \emptyset \forall n \geq N$. Donc $x \in \overline{A}$. □
($\supset$) Soit $x \in \overline{A} \Rightarrow$ pour tout $r > 0, B(x,r) \cap A \neq \emptyset$.
Prenons, $n \in \mathbb{N}$, $r = \frac{1}{n+1} > 0$.
Alors $B(x, \frac{1}{n+1}) \cap A \neq \emptyset$.
Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, choisissons $x_n \in B(x, \frac{1}{n+1}) \cap A$.
On a alors construit une suite (x_n) qui vérifie $d(x_n,x) < \frac{1}{n+1}$.
Ainsi, x est bien la limite d'une suite d'éléments de A. □

Proposition : Caractérisation des fermés par des suites

Une partie F de (X,d) est fermée si et seulement si pour toute suite (x_n) d'éléments de F qui converge vers $x \in X$, on a $x \in F$.

Preuve :
On a $\overline{F} = \{x \in X \mid \exists (x_n) \text{ suite de } F, x_n \to x\}$.
Or $\overline{F} = F$. On a donc le résultat.

D Continuité

1 Définitions

Définition : Soit $f\colon (X,d_X) \to (Y,d_Y)$ une application entre deux espaces métriques.

- f est continue en $a \in X$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 \colon x \in B(a,\delta_\varepsilon)$, alors $f(x) \in B(f(a),\varepsilon)$.
  Autrement dit, pour tout $\varepsilon \exists \delta_\varepsilon$ *tel que* $d_X(x,a) < \delta_\varepsilon \Rightarrow d_Y(f(x),f(a)) < \varepsilon$.
- f est continue sur X si f est continue en tout point de X.

Remarque : Si $f\colon (\mathbb{R}, |\cdot|) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$, on retrouve la définition usuelle de la continuité des fonctions réelles.

Définition : Soit $k \geq 0$ un réel.
On dit que $f\colon (X,d_X) \to (Y,d_Y)$ est k-lipschitzienne si $\forall x,y \in X, d_Y(f(x),f(y)) \leq k d_X(x,y)$.

Définition : Si $f\colon (X,d_X) \to (Y,d_Y)$ est une application k-lipschitzienne, alors f est continue sur X.

Preuve :
Montrons que f est continue.
Soit $a \in X$ et soit $\varepsilon > 0$. Posons $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2k} > 0$.
$\forall x \in B(a,\delta_\varepsilon)$, on a $d_Y(f(a),f(x)) \leq k d_X(a,x) \leq k\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.
Ainsi, f est continue.
Remarquons de plus que δ_ε ne dépend pas de a, donc f est uniformément continue sur X. (HP)

Exemple : Exemple d'une fonction 1-lipschitzienne : $f : \substack{(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|) \to (\mathbb{R}, |\cdot|) \\ x \mapsto \|x\|}$.
En effet, $|f(x) - f(y)| = ||x| - |y|| \leq \|x - y\| = d(x,y)$ (inégalité triangulaire renversée).

2 Caractérisation de la continuité

Proposition : Caractérisation de la continuité par des suites

Soit $f\colon (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ une application entre deux espaces métriques.
Alors f est continue en $a \in X$ si et seulement si pour toute suite (x_n) de X qui converge vers a, la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(a)$.

Preuve :
$(\Rightarrow)$ Soit (x_n) une suite de X qui converge vers a.
Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue en a, il existe $\delta_\varepsilon > 0$ tel que $d_X(x, a) < \delta_\varepsilon \Rightarrow d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$.
Comme $x_n \to a$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, d_X(x_n, a) < \delta_\varepsilon$.
Donc $\forall n \geq N, d_Y(f(x_n), f(a)) < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$.
Ainsi $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, d_Y(f(x_n), f(a)) < \varepsilon$. Donc $f(x_n) \to f(a)$.
$(\Leftarrow)$ Par l'absurde, supposons que f n'est pas continue en a.
C'est-à-dire qu'il existe $\varepsilon_0 > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in X$ tel que $d_X(x, a) < \delta$ mais $d_Y(f(x), f(a)) > \varepsilon_0$.
$\forall n \in \mathbb{N}$, posons $\delta = \frac{1}{n+1} > 0$.
On construit une suite (x_n) de X telle que $d_X(x_n, a) < \frac{1}{n+1}$, $d_Y(f(x_n), f(a)) > \varepsilon_0$.
On a $x_n \to a$ mais $f(x_n) \not\to f(a)$ (car $d_Y(f(x_n), f(a)) > \varepsilon_0$ pour tout n).
Absurde. Donc f est continue en a.

Proposition :

$f\colon (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ est continue sur X si et seulement si pour tout ouvert U de (Y, d_Y), $f^{-1}(U)$ est un ouvert de (X, d_X).

Rappel : $f^{-1}(U) = \{x \in X \mid f(x) \in U\}$.

Preuve :
$(\Rightarrow)$ Soit U un ouvert de (Y, d_Y).
Montrons que $f^{-1}(U)$ est un ouvert de (X, d_X).
Soit $a \in f^{-1}(U)$. Alors $f(a) \in U$.
Comme U est un ouvert de (Y, d_Y), il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B_Y(f(a), \varepsilon) \subset U$.
Or $\exists \delta_\varepsilon > 0$ tel que $x \in B_X(a, \delta_\varepsilon) \Rightarrow f(x) \in B_Y(f(a), \varepsilon)$.
Vérifions que $B_X(a, \delta_\varepsilon) \subset f^{-1}(U)$.
Soit $x \in B_X(a, \delta_\varepsilon)$. Alors $d_X(x, a) < \delta_\varepsilon \Rightarrow d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon \Rightarrow f(x) \in B_Y(f(a), \varepsilon) \subset U \Rightarrow x \in f^{-1}(U)$.
Donc $B_X(a, \delta_\varepsilon) \subset f^{-1}(U)$. Ainsi, $f^{-1}(U)$ est un ouvert de (X, d_X).

$(\Leftarrow)$ Soit U un ouvert de (Y, d_Y).
Alors $f^{-1}(U)$ est un ouvert de (X, d_X).
Soit $a \in f^{-1}(U)$. Alors $f(a) \in U$.
Soit $\varepsilon > 0$ tq $B(f(a), \varepsilon) \subset U$.
Montrons que $\exists \delta_\varepsilon > 0$ tel que $d_X(x, a) < \delta_\varepsilon$ et $d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$.
Comme $f^{-1}(U)$ est un ouvert de (X, d_X), il existe $\delta_\varepsilon > 0$ tel que $B_X(a, \delta_\varepsilon) \subset f^{-1}(U)$ qui est ouvert.
Alors si $x \in X$ tq $d_X(x, a) < \delta_\varepsilon$, donc $f(x) \in B(f(a), \varepsilon)$.
Donc on a $d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$ car $f(x) \in U$.
Ainsi, f est continue en a.
Interlude : Inégalité de Cauchy-Schwarz
Considérons $< \cdot, \cdot >\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $< x, y >= \sum_{i=1}^n x_i y_i$. Cette application est bilinéaire, symétrique, positive et définie ($< x, x >= 0 \Leftrightarrow x = 0$).
On observe que la norme euclidienne s'écrit $\|x\|_2 = \sqrt{< x, x >}$.

On dit que $< \cdot, \cdot >$ est un produit scalaire (forme bilinéaire symétrique définie positive), et ce produit scalaire est relié à la norme 2 (il s'agit du produit scalaire euclidien).

Théorème : Inégalité de Cauchy-Schwarz

$\forall X, Y \in \mathbb{R}^n, |< X, Y >| \leq \|X\|_2 \|Y\|_2$.

Démonstration :

- Fixons $X, Y \in \mathbb{R}^n$ $(\neq 0_{\mathbb{R}^n})$

$$P(t) = \|X + tY\|_2^2 = \langle X + tY, X + tY \rangle = \|X\|_2^2 + t^2\|Y\|_2^2 + 2t\langle X, Y\rangle \geq 0 = t^2\|Y\|_2^2 + 2t\langle X, Y\rangle + \|X\|_2^2.$$

  P est un polynôme de degré 2 en t. $P(t) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$, son discriminant est ≤ 0.

$$\Delta = 4\langle X, Y\rangle^2 - 4\|X\|_2^2\|Y\|_2^2 = 4(\langle X, Y\rangle^2 - \|X\|_2^2\|Y\|_2^2).$$

  Or, $\Delta \leq 0 \iff \langle X, Y\rangle^2 - \|X\|_2^2\|Y\|_2^2 \leq 0 \iff \langle X, Y\rangle^2 \leq \|X\|_2^2\|Y\|_2^2 \iff |\langle X, Y\rangle| \leq \|X\|_2\|Y\|_2$.

- De plus, si $\Delta = 0$, $\exists t_0 \in \mathbb{R}$ racine double, $P(t_0) = 0 = \|X + t_0Y\|_2^2$

$$\implies X + t_0Y = 0 \implies X \text{ et } Y \text{ sont colinéaires.}$$

  Et si X et Y sont colinéaires, alors

$$|\langle X, Y\rangle| = |\langle X, \lambda X\rangle| = |\lambda|\langle X, X\rangle = |\lambda|\|X\|_2^2 = |\lambda|\|X\|_2\|X\|_2 = \|X\|_2\|\lambda X\|_2 = \|X\|_2\|Y\|_2.$$

Corollaire : Égalité de Cauchy-Schwarz

L'égalité $| < X, Y > | = \|X\|_2\|Y\|_2$ est vérifiée si et seulement si X et Y sont colinéaires.

Note de rédaction : Démo à reprendre, cf. screen 2 Laurent

3 Continuité des applications linéaires dans les evn

A priori, les espaces vectoriels ne sont pas forcément de dimension finie.
Soit $f\colon (E, \|\cdot\|_E) \to (F, \|\cdot\|_F)$ une application linéaire entre deux K-espaces vectoriels normés (evn).

Proposition : Caractérisation de la continuité des applications linéaires

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est continue de $(E, \|\cdot\|_E)$ dans $(F, \|\cdot\|_F)$.
2. f est continue en 0.
3. $\exists k > 0$ tel que $\forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq k\|x\|_E$.

Démonstration :

- $i) \Rightarrow ii)$: f continue sur $E \Rightarrow f$ continue en 0, $\quad f(0_E) = 0_F$
- $ii) \Rightarrow iii)$: f continue en 0 : Soit $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que si $\|x\|_E < \delta \Rightarrow \|f(x)\|_F < \varepsilon$.
  Soit $x \in E$. Posons $y = \frac{\delta x}{2\|x\|_E}$. Alors

$$\|f(y)\|_F < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad f\left(\frac{\delta x}{2\|x\|_E}\right) < \varepsilon$$
$$\Rightarrow \frac{\delta}{2\|x\|_E}\|f(x)\|_F < \varepsilon$$
$$\Rightarrow \|f(x)\|_F < \frac{2\varepsilon}{\delta}\|x\|_E$$

  On trouve $K = \frac{2\varepsilon}{\delta}$, indépendant de $x \in E$, tel que $\forall x \in E$, $\|f(x)\|_F \leq K\|x\|_E$.

- $iii) \Rightarrow i)$: On part de $\exists K > 0$ tel que $\forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq K\|x\|_E$, on obtient $\forall x, y \in E, \|f(x-y)\|_F \leq K\|x-y\|_E$

$$\Rightarrow \exists K > 0, \forall x, y \in E, \ \|f(x) - f(y)\|_F \leq K\|x - y\|_E$$
$$\Rightarrow f \text{ est } K\text{-Lipschitz} \quad \Rightarrow f \text{ continue.}$$

E Equivalence de normes

Problème : Soit E un evn avec une normée notée $N_1 \colon E \in \mathbb{R}^+$.
On peut *a priori* mettre d'autres normes sur E, disons $N_2 \colon E \in \mathbb{R}^+$.
Si (x_n) une suite de E converge pour la norme N_1, converge-t-elle aussi pour la norme N_2 ?

Définition : N_1 et N_2 sont **équivalentes** si $\exists C, c > 0$ tels que $\forall x \in E, cN_2(x) \leq N_1(x) \leq CN_2(x)$.
On note $N_1 \sim N_2$.

Proposition :

1. $N_1 \sim N_2 \Leftrightarrow N_2 \sim N_1$.
2. Si $N_1 \sim N_2$ et $N_2 \sim N_3$, alors $N_1 \sim N_3$.

Exemple : Voir TD, normes $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^n$.

Remarque : Un des buts du cours est de montrer que sur $\mathbb{R}^n$ (+ généralement pour tout evn), toutes les normes sont équivalentes.

Proposition :

Soit (x_n) une suite de E, où E est muni de N_1 et N_2 deux normes équivalentes.
Alors (x_n) converge pour la norme N_1 si et seulement si (x_n) converge pour la norme N_2.

Démonstration :

- $\Rightarrow$: On suppose $\exists a \in X$ tel que $x_n \xrightarrow{N_1} a \Leftrightarrow N_1(x_n - a) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
  Or, $\underline{cN_2(z) \leq N_1(z)} \leq CN_2(z)$
  Cette inégalité implique $N_2(x_n - a) \leq \underline{\frac{1}{c} N_1(x_n - a)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$
  $\Rightarrow N_2(x_n - a) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$
  $\Rightarrow x_n \xrightarrow{N_2} a$.

- $\Leftarrow$: Si $x_n \xrightarrow{N_2} a \Rightarrow N_2(x_n - a) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
  On utilise $\underline{N_1(\cdot) \leq CN_2(\cdot)}$ ($C > 0$)
  $\frac{N_1}{c}(x_n - a) \to 0 \Rightarrow N_1(x_n - a) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

F Norme subordonnée

Soient $(E, \|\dot{|}\|_E)$ et $(F, \|\dot{|}\|_F)$.
Soit $f \colon E \to F$ une application linéaire continue. On a vu que la continuité d'une application linéaire entre evn se caractérisaient de la façon suivante :
$\exists K > 0 \colon \forall x \in E \|f(x)\|_F \leq K\|x\|_E$.
Si $x \neq 0$, on peut considérer $\frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \in \mathbb{R}_+$
Par continuité de f, $\forall x \in E \setminus \{0\} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq K$.

Définition : La norme subordonnée de f par rapport à $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$ est définie par $|||f||| := \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}$.

Remarque : Cette triple barre est bien définie et correspond à la meilleure constante de continuité de f.

Proposition : Espace des applications linéaires continues

Notons $\mathcal{L}_c(E,F) = \{f\colon E \to F \mid f \text{ est continue}\}$. Alors $|||\cdot|||$ est une norme sur $\mathcal{L}_c(E,F)$ et $(\mathcal{L}_c(E,F), |||\cdot|||)$ est un evn.

Vocabulaire : On dit que $|||\cdot|||$ est la "norme triple".

Démonstration :

- Séparation : Si $|||f||| = 0 \Rightarrow \sup_{x\neq 0} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = 0 \Rightarrow \forall x \neq 0 \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = 0 \Rightarrow \forall x \neq 0, \|f(x)\|_F = 0 \Rightarrow f(x) = 0_F$.
- Homogénéité : Soit $\lambda \in K$, $f \in \mathcal{L}_c(E,F)$.

$$|||\lambda f||| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|\lambda f(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{x\neq 0} \frac{|\lambda| \|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = |\lambda| \sup_{x\neq 0} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = |\lambda| |||f|||$$

- Inégalité triangulaire : Soient $f, g \in \mathcal{L}_c(E,F)$.

$$|||f+g||| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|(f+g)(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq \sup_{x\neq 0} \frac{\|f(x)\|_F + \|g(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq \sup_{x\neq 0} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} + \sup_{x\neq 0} \frac{\|g(x)\|_F}{\|x\|_E} = |||f||| + |||g|||$$

Proposition : *(admis)*

Soit $f \in \mathcal{L}_c(E,F)$. On a $|||f||| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|f(x)\|_F$ = $\sup_{\|x\|_E = 1} \|f(x)\|_F$.

Remarque : On montrera qu'en dimension finie, toute application linéaire est continue.

G Introduction à la complétude dans les espaces métriques

1 Définitions et premières propriétés

Définition : Soit (X,d) un espace métrique.
Une suite (x_n) de (X,d) est dite de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m,n \geq N, d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Remarque : Si on travaille dans (X,d) = $(E, \|\cdot\|)$ un evn, avec $d_E(x,y) = \|x-y\|$, et si on se donne une autre norme $\|\cdot\|'$ sur E équivalente à $\|\cdot\|$, alors une suite est de Cauchy pour $\|\cdot\|$ si et seulement si elle est de Cauchy pour $\|\cdot\|'$.

Note de rédaction : cf. Laurent pour la démonstration de la remarque

Proposition :

1. Soit (x_n) une suite d'éléments de (X,d) qui converge vers $x \in X$.
   Alors (x_n) est une suite de Cauchy.
2. Une suite de Cauchy a au plus une valeur d'adhérence.
3. Une suite de Cauchy qui a une valeur d'adhérence converge vers cette valeur d'adhérence.

Preuve :

1. Soit (x_n) une suite qui converge vers $a \in X$.
   Donc $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\varepsilon, d(x_n, a) < \varepsilon$.
   Montrons que (x_n) est de Cauchy. Par convergence de (x_n), on a $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\varepsilon, d(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$.
   Ainsi, $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, a) + d(a, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Donc on a : $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq N_\varepsilon, d(x_n, x_m) < \varepsilon$.
C'est-à-dire que (x_n) est de Cauchy.

2. Supposons que (x_n) est une suite de Cauchy qui admet deux valeurs d'adhérence distinctes $a \neq b \in X$.
On a $x_{\varphi(n)} \to a$ et $x_{\psi(n)} \to b$ deux sous-suites de (x_n).
Posons $\varepsilon = d(a, b) > 0$ car $a \neq b$.
Comme (x_n) est de Cauchy, $\exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq N_0, d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{3}$.
De plus, comme $x_{\varphi(n)} \to a$, $\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1, d(x_{\varphi(n)}, a) < \frac{\varepsilon}{3}$.
Et comme $x_{\psi(n)} \to b$, $\exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_2, d(x_{\psi(n)}, b) < \frac{\varepsilon}{3}$.
Comme $\varphi(n), \psi(n) \to +\infty$, on peut choisir n tel que $\varphi(n), \psi(n) \geq N_0$ avec $\varphi(n) \geq N_1$ et $\psi(n) \geq N_2$.
$\varepsilon = d(a, b) \leq d(a, x_{\varphi(n)}) + d(x_{\varphi(n)}, x_{\psi(n)}) + d(x_{\psi(n)}, b) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$.
Absurde. Donc $a = b$, donc la valeur d'adhérence est unique.

3. Soit (x_n) une suite de Cauchy et soit $(x_{\varphi(n)})$ une sous-suite de (x_n) qui converge vers a.
Soit $\varepsilon > 0$. Comme (x_n) est de Cauchy, $\exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq N_0, d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$.
De plus, comme $x_{\varphi(n)} \to a$, $\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1, d(x_{\varphi(n)}, a) < \frac{\varepsilon}{2}$.
On a alors :
$d(x_n, a) \leq d(x_n, x_{\varphi(m)}) + d(x_{\varphi(m)}, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ pour tout $\forall n, m \geq max(N_0, N_1)$ (possible car $\varphi(n) \to +\infty$).
Donc $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, d(x_n, a) < \varepsilon$.
C'est-à-dire que $x_n \to a$. $\square$

Définition : Une partie $A \in (X, d)$ est bornée si $\exists x \in X \exists r > 0$ tel que $A \subset B(x, r)$.

Illustration : Patatoïdes, une partie A dans un autre espace, avec un x dans cet autre espace, mais pas dans A.

Proposition :

Si (x_n) est une suite de Cauchy dans (X, d), alors (x_n) est bornée.

Preuve :
Posons $A = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots\} \subset X$.
On veut montrer que $\exists y \in X, r > 0$ tel que $d(x_n, y) < r, \forall n \in \mathbb{N}$.
Pour $\varepsilon = 1 \exists N \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq N, d(x_n, x_m) < 1$.
On a $\forall n \geq N, d(x_n, y) \leq d(x_n, x_N) + d(x_N, y) < 1 + d(x_N, y) \leq 1 + \max_{0 \leq k \leq N} d(x_k, y) = r$.
Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, d(x_n, y) < r$. Donc (x_n) est bornée. $\square$

Définition : Un espace métrique (X, d) est complet si toute suite de Cauchy de (X, d) converge dans X.

Exemple : $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est complet.

Théorème :

$\mathbb{R}^d$ $(d \in \mathbb{N})$ est complet pour $\|\cdot\|_\infty$. *(feuille de TD4, exercice 13)*

Preuve :
Soit (X_n) une suite de Cauchy dans $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty)$.
$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq N, \|X_m - X_n\|_\infty < \varepsilon$.

Écrivons $X_n = \begin{pmatrix} x_1^{(n)} \\ x_2^{(n)} \\ \vdots \\ x_d^{(n)} \end{pmatrix}$ où $(x_i^{(n)})$ est une suite de $\mathbb{R}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$.

Or $\forall i \in \{1, \ldots, d\}, |x_i^{(m)} - x_i^{(n)}| \leq \|X_m - X_n\|_\infty$.
Donc $\forall i \in \{1, \ldots, d\}, (x_i^{(n)})$ est une suite de Cauchy dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.
Or $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est complet, donc $\forall i \in \{1, \ldots, d\}, x_i^{(n)} \to l_i \in \mathbb{R}$.

Considérons le vecteur $X = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d$.
Alors $X_n \to X$ dans $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty)$.
Donc $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty)$ est complet. □

2 Complétude et fermeture

Proposition :

Soit (X, d) un espace métrique.
On considère $A \subset X$, et donc A devient un espace métrique pour la distance d restreinte à A.
Si (A, d) est complet, alors A est fermé dans (X, d).

Preuve :
Soit (x_n) une suite de A qui converge vers $l \in X$.
Si (x_n) est une suite convergente, alors (x_n) est de Cauchy dans (A, d).
Comme A est complet, $x_n \to l \in A$. (unicité de la limite)
Donc A est fermé dans (X, d). □

Proposition :

Soient (X, d) un espace métrique et $A \subset X$.
Si A est fermé dans (X, d) alors (A, d) est complet.

Preuve (le prof l'a effacée) :
Soit (x_n) une suite de Cauchy dans (A, d).
Mais (x_n) est aussi une suite de A qui est fermé. Alors (x_n) admet une valeur d'adhérence $l \in X$.
Or une suite de Cauchy qui admet une valeur d'adhérence converge vers cette valeur d'adhérence.
Donc $x_n \to l \in A$.
Donc toute suite de Cauchy de (A, d) converge dans A.
Ainsi, (A, d) est complet. □
Preuve plus adaptée:
Soit (x_n) une suite de Cauchy dans (A, d).
Mais (x_n) est aussi une suite de X qui est complet.
Alors (x_n) admet une limite $l \in X$ a priori.
Donc $x_n \to l \in A$ et $l \in A$ car A est fermé dans (X, d).
Donc toute suite de Cauchy de (A, d) converge dans A.
Ainsi, (A, d) est complet. □

Remarque : Comme dans $\mathbb{R}$ on a la Caractérisation suivante : pour (X, d) complet, alors $(A, d) \subset (X, d)$ est complet si et seulement si A est fermé dans (X, d).

H Compacité

1 Définitions et premières propriétés

Définition : On dit qu'un espace métrique (X, d) est compact si toute suite de (X, d) admet une sous-suite convergente dans (X, d).

Remarque : On sait que si (x_n) est une suite bornée (*i.e.* $\exists a < b \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, a \leq x_n \leq b$) dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, alors par le théorème de Bolzano-Weierstrass, $\exists$ une sous-suite de (x_n) qui converge.
Autrement dit, tout segment fermé $[a, b]$ est compact avec la définition. On peut dire qu'on a choisi une définition qui "généralise" Bolzano-Weierstrass.

Proposition :

(X, d) est compact $\Rightarrow (X, d)$ est complet.

Preuve :
Soit (x_n) une suite de Cauchy dans (X, d).
Comme (X, d) est compact, (x_n) admet une sous-suite convergente.
Autrement dit, (x_n) est de Cauchy et admet une valeur d'adhérence.
Donc (x_n) converge vers cette valeur d'adhérence.
(suite de Cauchy qui admet une valeur d'adhérence converge vers cette valeur d'adhérence)
Ainsi, (X, d) est complet. □

Proposition :

Soit (X, d) compact. Soit $F \subset X$ (on pense (F, d)).
Alors F est fermé $\Leftrightarrow (F, d)$ est compact.

Preuve :

- ($\Rightarrow$) On suppose F fermé. Soit (x_n) une suite de F.
  (x_n) est aussi une suite de X qui est compact.
  Il existe donc $(x_{\varphi(n)})$ une sous-suite de (x_n) qui converge vers $l \in X$.
  Or $(x_{\varphi(n)})$ est une suite convergente de F qui est fermé.
  Donc $l \in F$.
  Donc (x_n) suite de F admet une sous-suite convergente dans F.
  Ainsi, (F, d) est compact. □
- ($\Leftarrow$) On suppose (F, d) compact. Soit (x_n) une suite de F qui converge vers $l \in X$.
  Or comme F est compact, (x_n) admet une sous-suite convergente dans F.
  Comme (x_n) converge vers $l \in X$, cette sous-suite converge aussi vers l. (unicité de la limite + une suite convergente a une seule valeur d'adhérence)
  Donc $l \in F$.
  Ainsi, F est fermé. □

Remarque : Dans le cas $(A, d) \subset (X, d)$:

- La définition de compacité est : toute suite (x_n) de A admet une sous-suite convergente dans A.
- La défintiion de la complétude est : toute suite de Cauchy (x_n) de A converge dans A.

Proposition :

Soit (X, d) et (Y, d') deux espaces compacts.
Alors $X \times Y$ est compact.

Autrement dit le produit d'espaces compacts est compact.

Remarque : D'abord, mussions $X \times Y$ d'une distance.
Soit $\delta \colon ((x, y), (x', y')) \in (X \times Y)^2 \mapsto d(x, x') + d'(y, y')$.

Application : Montrer que δ est une distance sur $X \times Y$.

On aurait pu considérer aussi $\delta_\infty \colon ((x, y), (x', y')) \mapsto \max(d(x, x'), d'(y, y'))$.

Preuve (de la proposition) :
Montrons que $(X \times Y, \delta)$ est compact.
Soit $((x_n, y_n))$ une suite de $X \times Y$.
Or (x_n) est une suite de X qui est compact.
Et (y_n) est une suite de Y qui est compact.
Donc par compacité, (x_n) admet une sous-suite convergente $(x_{\varphi(n)})$ vers a dans X.
Et (y_n) admet une sous-suite convergente $(y_{\psi(n)})$ vers b dans Y.
Considérons alors la sous-suite $((x_{\varphi(\psi(n))}, y_{\psi(\varphi(n))}))$ de $((x_n, y_n))$.
Alors $(x_{\varphi(\psi(n))})$ converge vers a dans X et $(y_{\psi(\varphi(n))})$ converge vers b dans Y.
Donc $((x_{\varphi(\psi(n))}, y_{\psi(\varphi(n))}))$ converge vers (a, b).
Ainsi, $(X \times Y, \delta)$ est compact. $\square$

Remarque : Plus généralement, le produit fini d'espaces compacts est compact.

2 Fonctions continues sur un compact

Propriété fondamentale :

Soit f continue de (X, d) (compact) dans $\mathbb{R}$.
Alors f est bornée et atteint ses bornes.

Autrement dit, $m = inf_{x \in X} f(x) \leq f(x) \leq sup_{x \in X} f(x) = M$ pour tout $x \in X$, et $\exists a, b \in X$ tels que $f(a) = m$ et $f(b) = M$.

Preuve :
(Pour le sup, le inf est similaire)
Par définition de sup, $\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in X$ tel que $sup_{x \in X} f(x) - \varepsilon \leq f(x_\varepsilon) \leq sup_{x \in X} f(x)$.
En discrétisant, $\varepsilon = \frac{1}{n+1}$, on obtient une suite (x_n) de X telle que $f(x_n) \to sup_{x \in X} f(x)$.
Or (x_n) est une suite du compact (X, d), donc (x_n) admet une sous-suite convergente $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers $b \in X$.
Par continuité de f, $f(x_{\varphi(n)}) \to f(b)$.
Donc $f(b) = sup_{x \in X} f(x) < +\infty$ et b réalise le sup. $\square$ *faire de même pour l'inf*

Proposition :

Soit $K \subset (X, d)$ et K compact. Alors K est borné.

Preuve :
Soit $a \in X$. Considérons la fonction $f \colon X \in \mathbb{R}^+, x \mapsto d(x, a)$.
$|f(x) - f(y)| = |d(x, a) - d(y, a)| \leq d(x, y)$ par inégalité triangulaire.
Donc f est 1-Lipschitz, donc continue.
Regardons f restreinte à K, qui est compact.
Donc par la propriété fondamentale, f est bornée sur K et atteint ses bornes sur K.
Donc $\exists M > 0, \forall x \in K, d(x, a) \leq M$.
Ainsi, $K \subset B(a, M)$, donc K est borné. $\square$

Proposition HP : *(admis)*

Soit (K, d) compact. Soit $f : (K, d) \to (Y, d')$ continue.
Alors $f(K)$ est compact dans (Y, d').

Preuve : *Laissée à l'appréciation du lecteur.*

3 Compacité dans un evn de dimension finie

Théorème :

Les compacts de $\mathbb{R}^n$ sont les fermés et bornés.

Autrement dit, $K \subset \mathbb{R}^n$ est compact $\Leftrightarrow$ K est fermé et borné.

Preuve :

- ($\Rightarrow$) Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$.
  Alors K est borné (proposition vue plus haut dans le cadre d'espaces métriques).
  Or $\mathbb{R}^n$ est complet (avec par exemple la norme $\| \cdot \|_\infty$).
  Et comme K est un compact de $\mathbb{R}^n$, K est complet donc K est fermé dans $\mathbb{R}^n$ (proposition vue plus haut).
- ($\Leftarrow$) Soit K un fermé et borné de $\mathbb{R}^n$.
  Comme K est borné, $\exists R > 0$ tel que $K \subset B(0, R)$ pour la norme $\| \cdot \|_\infty$.
  Ainsi $K \subset B(0, R) \subset [-R, R]^n$ qui est un compact de $\mathbb{R}^n$.
  Or K est fermé dans $\mathbb{R}^n$, donc K est fermé dans $[-R, R]^n$ (car $[-R, R]^n$ est fermé dans $\mathbb{R}^n$).
  Donc K est un fermé d'un compact, donc K est compact. $\square$

✘ **Attention** ✘ Cette caractérisation est fausse en dimension infinie.

Contre-Exemple : Pour fixer les idées, les boules unités (par exemple) sont des compacts en dimension finie, mais pas en dimension infinie.

Théorème : Equivalence des normes

Toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes.

Preuve : On va montrer que toute norme est équivalente à la norme 1 notée $\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\|_1 = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$.

Ainsi, par transitivité, toutes les normes seront équivalentes.
Considérons $f : \substack{\mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ X \mapsto N(X)}$ avec N une norme quelconque sur $\mathbb{R}^n$.
Montrons que f est lipschitzienne de $(\mathbb{R}^n, \| \cdot \|_1)$ dans $(\mathbb{R}, | \cdot |)$.

Notons $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
$|f(X) - f(Y)| = |N(X) - N(Y)| \leq N(X - Y)$ par inégalité triangulaire reversée.
$= N(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)e_i) \leq \sum_{i=1}^n N((x_i - y_i)e_i) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| N(e_i) \leq (\max_{1 \leq i \leq n} N(e_i)) \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| = K\|X - Y\|_1$
où $K = \max_{1 \leq i \leq n} N(e_i)$.
Donc f est K-lipschitzienne.
Donc f est donc continue.
Considérons $S(0, 1) = \{X \in \mathbb{R}^n \mid \|X\|_1 = 1\}$ le bord de la boule unité pour la norme 1.
Or $S(0, 1)$ est compact (fermé et borné dans $\mathbb{R}^n$).
f sur $S(0, 1)$ est bornée et atteint ses bornes car f est continue (propriété fondamentale).
Donc $\exists m, M > 0, \forall X \in S(0, 1), m \leq N(X) \leq M$.
En effet $m > 0$ car $\exists x_0 \in S(0, 1)$ (qui réalise l'inf) tel que $0 \leq f(x_0) = m$, qui est différent de 0 car N est une norme.
Prenons $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
Considérons $\frac{y}{\|y\|_1} \in S(0, 1)$.
On a alors $m \leq f(\frac{y}{\|y\|_1}) \leq M$.

i.e. $m \leq N(\frac{y}{\|y\|_1}) \leq M$.
i.e. $m\|y\|_1 \leq N(y) \leq M\|y\|_1$.
Ce qui est vrai pour $y \neq 0$. Mais l'équivalence des normes est toujours vraie pour $y = 0$.
Ainsi, N est équivalente à la norme 1.

Donc par transitivité, toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes.
(car deux normes équivalentes à une troisième sont équivalentes entre elles) $\square$

Théorème : Continuité automatique des applications linéaires de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$

$f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q) \Rightarrow f$ est continue.

Preuve :
On va choisir la norme 1 sur $\mathbb{R}^p$ et $\|\cdot\|$ une norme quelconque sur $\mathbb{R}^q$.
Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^q$.
$\forall x \in \mathbb{R}^q, \|f(x)\| = \|f(\sum_{i=1}^p x_i e_i)\| = \|\sum_{i=1}^p x_i f(e_i)\| \leq \sum_{i=1}^p |x_i|\|f(e_i)\| \leq (\max_{1\leq i\leq p} \|f(e_i)\|) \sum_{i=1}^p |x_i| = K\|x\|_1$ où $K = \max_{1\leq i\leq p} \|f(e_i)\|$.
Ainsi, f est bien continue. $\square$