

Chapitre 4 : Topologie des espaces métriques et des espaces vectoriels normés

I Distances et normes

Soit X un ensemble quelconque (dans la suite supposé non nul).

Définition : Une distance d sur X est une application $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ qui vérifie les axiomes suivants :

1. $\forall (x, y) \in X^2, d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie)
2. $\forall x, y, z \in X, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire)
3. $\forall (x, y) \in X^2, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (séparation)

Vocabulaire : On appelle **espace métrique** un couple (X, d) où X est un ensemble et d une distance sur X .

Exemple :

- \mathbb{R} muni de la distance $d(x, y) = |x - y|$, où $|\cdot|$ est la valeur absolue.
- \mathbb{C} muni de la distance $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$, où $|\cdot|$ est le module.
- Une autre façon de voir l'exemple 2, on considère l'ensemble \mathbb{R}^2 muni de la distance suivante : Si $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$ sont deux points de \mathbb{R}^2 , on définit la distance $d(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$. On appelle cette distance la **distance euclidienne** sur \mathbb{R}^2 .
- Prenons $X = \text{ cercle unité}$ muni de la distance $d(A, B) = \arccos(\cos(\theta_2 - \theta_1))$ où θ_1 et θ_2 sont les arguments des points A et B respectivement. (voir schéma OneNote)

Remarque : On peut voir l'exemple 1 comme un cas particulier de l'exemple 2, en identifiant \mathbb{R} à l'axe des réels dans le plan complexe.

Remarque : On peut généraliser l'exemple 3 à \mathbb{R}^n muni de la distance euclidienne définie par :

$$d(A, B) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_{A_i} - x_{B_i})^2}$$

où $A = (x_{A_1}, x_{A_2}, \dots, x_{A_n})$ et $B = (x_{B_1}, x_{B_2}, \dots, x_{B_n})$ sont deux points de \mathbb{R}^n .

Il se trouve que les exemples 1, 2 et 3 proviennent d'espaces vectoriels normés, qu'on verra (très) rapidement.

Proposition : Inégalités triangulaires

Soit (X, d) un espace métrique.

On a :

1. $\forall (x, y, z) \in X^3, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire)
2. $\forall (x, y, z) \in X^3, |d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z)$ (inégalité triangulaire généralisée)

Preuve :

1. C'est l'axiome 2 de la définition d'une distance.
2. On a $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ d'après l'inégalité triangulaire.
Donc $d(x, y) - d(x, z) \leq d(z, y) = d(y, z)$.
De plus, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ d'après l'inégalité triangulaire.
Donc $d(x, z) - d(x, y) \leq d(y, z)$.
En combinant les deux, on obtient $|d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z)$.

Construction d'espaces métriques : Restriction (admis)

On part de (X, d) un espace métrique.

Soit $Y \subset X$. Alors $(Y, d|_{Y \times Y})$ est un espace métrique.

Vocabulaire : On dit que $d|_{Y \times Y}$ est la **distance sur Y** induite par la distance sur X .

i Remarque : Ainsi, tout sous-ensemble d'un espace métrique est muni d'une "structure d'espace métrique" induite : c'est la distance induite.

Exemple : $(X, d_X) = (\mathbb{C}, |\cdot|)$ un espace métrique. Alors pour $Y = \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, d_Y n'est autre que la distance usuelle sur \mathbb{R} .
Idem pour \mathbb{Q} .

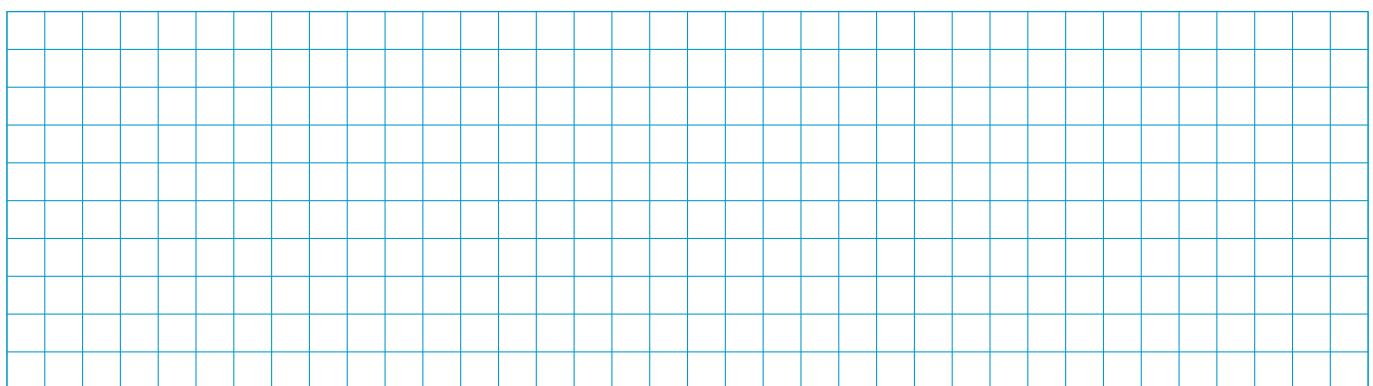
Construction d'espaces métriques : Bijections (admis)

Soient (X, d_X) et Y un ensemble quelconque et $f : Y \rightarrow X$ bijective.

Alors (Y, d_Y) est un espace métrique, où $d_Y(y_1, y_2) = d_X(f(y_1), f(y_2))$ pour tout $y_1, y_2 \in Y$.

Autrement dit, $d_Y : (y_1, y_2) \mapsto d_X(f(y_1), f(y_2))$.

 Application : Démontrer le théorème ci-dessus. (vérifier que d_Y satisfait bien les axiomes d'une distance.)



A Espaces vectoriels normés

On a plus un ensemble X quelconque mais on considère E un \mathbb{K} -espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}). (a priori pas de dimension finie)

1 Définitions

Définition : Une norme N sur E est une application $N: E \rightarrow \mathbb{R}_+$ souvent notée $\|\cdot\|$ qui vérifie les axiomes suivants :

- $\forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \|\lambda u\| = |\lambda| \cdot \|u\|$ (homogénéité)
 - $\forall (u, v) \in E^2, \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (inégalité triangulaire)
 - $\forall u \in E, \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0_E$ (séparation)

Vocabulaire : On dit que le couple $(E, N) = (E, \|\cdot\|)$ est un **espace vectoriel normé**. Il est commun d'écrire e_v, n_v .

Remarque : $\forall x \in E, N(-x) = N(x)$ d'après l'axiome 1.

Théorème : Association norme-distance

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

Alors c'est en particulier un espace métrique pour la distance définie par $d_N(u, v) = \|v - u\|$.

Preuve : Il suffit de vérifier les axiomes d'une distance.

1. Symétrie : $d_N(u, v) = \|v - u\| = \|-(u - v)\| = \|u - v\| = d_N(v, u)$.
2. Inégalité triangulaire : $d_N(u, w) = \|w - u\| = \|(w - v) + (v - u)\| \leq \|w - v\| + \|v - u\| = d_N(u, v) + d_N(v, w)$.
3. Séparation : $d_N(u, v) = 0 \Leftrightarrow \|v - u\| = 0 \Leftrightarrow v - u = 0_E \Leftrightarrow u = v$.

Remarque : Hors programme : espaces euclidiens \subset espaces vectoriels normés \subset espaces métriques.

Exemple : En fait, les exemples 1, 2 et 3 dans "Espaces métriques" sont des evn : $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ et $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ où $\|(x_1, \dots, x_n)\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \|\cdot\|_{\text{euclidienne}}$.

Application : Définissons $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto \|X\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)$.

Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur \mathbb{R}^n .

Observation : $\|X\|_\infty = |x_{i_0}|$ où $i_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$ réalise le maximum.

Homogénéité : $\forall i \in \{1, \dots, n\}, |x_i| \leq |x_{i_0}|$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}, |\lambda| \cdot |x_i| \leq |\lambda| \cdot |x_{i_0}| \forall i \in \{1, \dots, n\}$

D'où $\forall \lambda \in \mathbb{R}, |\lambda x_i| \leq |\lambda| \cdot |x_{i_0}| \forall i \in \{1, \dots, n\}$

Or $\lambda X = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$, i_0 réalise le maximum de $(|\lambda x_1|, \dots, |\lambda x_n|)$

Donc $\|\lambda X\|_\infty = |\lambda| \cdot |x_{i_0}| = |\lambda| \cdot \|X\|_\infty$.

Inégalité triangulaire : Soient $X = (x_1, \dots, x_n)$ et $Y = (y_1, \dots, y_n)$ dans \mathbb{R}^n .

$\|X + Y\|_\infty = \max(|x_1 + y_1|, \dots, |x_n + y_n|)$.

On a $\forall i \in \{1, \dots, n\}, |x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i| \leq \|X\|_\infty + \|Y\|_\infty$.

En prenant le max sur i , on obtient $\|X + Y\|_\infty \leq \|X\|_\infty + \|Y\|_\infty$.

Séparation : Soit $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

$\|X\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \max(|x_1|, \dots, |x_n|) = 0$.

Or $\forall k \in \{1, \dots, n\}, |x_k| \leq \max(|x_1|, \dots, |x_n|) = 0 \Rightarrow x_k = 0 \Rightarrow X = 0_{\mathbb{R}^n}$.

Application :

1. Montrer que $\|\cdot\|_1 : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+} \sum_{i=1}^n |x_i|$ est une norme sur \mathbb{R}^n .

2. **Plus difficile.** Plus généralement, montrer que pour $p \in \mathbb{R}_+$, $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+} (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p}$ est une norme sur \mathbb{R}^n .

Exemple : Exemples de normes sur des espaces de dimension infinie :

- Considérons $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} . On définit la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$ pour $f \in E$. En effet,

Homogénéité : Soit $f \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On a $\|\lambda f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |\lambda f(x)| = |\lambda| \cdot \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| = |\lambda| \cdot \|f\|_\infty$.

Inégalité triangulaire : Soient $f, g \in E$.

On a $\|f + g\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) + g(x)|$.

Or $\forall x \in [0, 1], |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

En prenant le supremum sur x , on obtient $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

Séparation : Soit $f \in E$.

On a $\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| = 0$.

Or $\forall x \in [0, 1], |f(x)| \leq \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| = 0 \Rightarrow f(x) = 0$ pour tout x dans $[0, 1] \Rightarrow f = 0_E$.

- Considérons $E = \{f: I \rightarrow \mathbb{R}, f \in \mathcal{C}^0(I) \mid \int_I |f|(t)dt \text{ converge}\} = L_1$ où I est un intervalle de \mathbb{R} . On définit la norme $\|f\|_1 = \int_I |f(t)|dt$ pour $f \in E$.

✖ Attention ✖ $\|f\|_\infty$ existe car $\sup |f(t)| < +\infty$ pour f continue sur le compact $[0, 1]$.

💡 Contre-Exemple : $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ définie par $f(x) = \frac{1}{x}$. Alors $\|f\|_\infty$ n'existe pas car $\sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| = +\infty$.

2 Propriétés

Propriété : Vecteurs unitaires (*admise*)

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel non nul, soit $x \in E \setminus \{0_E\}$ et soit N une norme sur E .

Alors $\frac{x}{N(x)}$ est un vecteur unitaire (ou vecteur normé), c'est-à-dire $N\left(\frac{x}{N(x)}\right) = 1$. (existe car $N(x) \neq 0$ par séparation)