Chapitre 6 : Théorie spectrale

I Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres

On se donne E un K-espace vectoriel et $u \in End(E)$ un endomorphisme de E.

Définition : Soit $\lambda \in K$. On dit que λ est une **valeur propre (vp)** de u s'il existe un vecteur $x \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $u(x) = \lambda x$. Un tel vecteur x est appelé un **vecteur propre ($\overrightarrow{vp}$)** associé à la valeur propre λ de u.

Définition : On note E_λ le **sous-espace propre** de u associé à la valeur propre λ :

$$E_\lambda = \{x \in E \mid u(x) = \lambda x\} = Ker(u - \lambda Id_E)$$

Propriété : *(admise)*

On a λ est une valeur propre de u si et seulement si $E_\lambda \neq \{0_E\}$.
Ce qui est vrai si et seulement si $u - \lambda Id_E$ n'est pas inversible (autrement dit, $det(u - \lambda Id_E) = 0$).

Vocabulaire : On dit que u est **diagonalisable** s'il existe une base de E formée de $\overrightarrow{vp}$ de u. (vecteurs propres)

Proposition :

u est diagonalisable si et seulement si $Mat_B(u)$ est diagonale pour une certaine base B de E. (E de dimension finie)

Preuve :
Soient $(x_1, \dots, x_n)$ une base de E formée de $\overrightarrow{vp}$ de u avec $u(x_i) = \lambda_i x_i$. On a donc :

$$Mat_B(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

□

Vocabulaire : On dit que u est **trigonalisable** s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure. (vecteurs propres)

Remarque : Alors x est un $\overrightarrow{vp}$ de u. Un endomorphisme sans $\overrightarrow{vp}$ n'est pas diagonalisable.

Exemple : Si $E = K^2$ et $Mat_B(u) = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ (B = canonique), alors u est trigonalisable pour la base $B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$. En effet, on a : $u(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Exemple : Si $Mat_B(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, alors u est diagonalisable.

Exemple : Si $Mat_B(u) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, n'est pas diagonalisable si $K = \mathbb{R}$ (pas de $\overrightarrow{vp}$), mais est diagonalisable si $K = \mathbb{C}$ (car $\lambda = i$ et $\lambda = -i$ sont des vp).

II Projections, symétries et rotations

Posons $E = F \oplus G$ avec F, G sous-espaces vectoriels de E.

Proposition : *(admis)*

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ la projection sur F parallèlement à G (i.e. $p(x+y) = x$ pour tout $(x, y) \in F \times G$).
Alors les valeurs propres de p sont contenues dans $\{0, 1\}$. De plus, $F = E_1$ et $G = E_0$ et p est diagonalisable.

💬 **Note de rédaction :** cf. Laurent pour la démonstration

Proposition : *(admis)*

Soit $s \in \mathcal{L}(E)$ la symétrie par rapport à F parallèlement à G (i.e. $s(x+y) = x - y$ pour tout $(x, y) \in F \times G$).
Alors les valeurs propres de s sont contenues dans $\{-1, 1\}$. De plus, $F = E_1$ et $G = E_{-1}$ et s est diagonalisable.

Supposons $E = \mathbb{K}^2, K = \mathbb{R}$.
Considérons u tel que $Mat_B(u) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ dans la base canonique B de $\mathbb{R}^2$ avec $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.

Proposition : *(admis)*

u n'est pas diagonalisable si $K = \mathbb{R}$ (pas de $\overrightarrow{vp}$), mais est diagonalisable si $K = \mathbb{C}$ (car $\lambda = \cos\theta + i\sin\theta$ et $\lambda = \cos\theta - i\sin\theta$ sont des vp).

III Rappels sur les polynômes

💬 **Note de rédaction :** cf. AL2