# Chapitre 2 : Séries numériques

## Séries et sommes d'une série

**Définition :** Soit  $(u_n)$  une suite dans  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

On considère  $\forall N \in \mathbb{N}, S_N = \sum_{n=0}^N u_n \in \mathbb{K}.$ 

On a donc une suite  $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$  associée à la suite  $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ .

**Définition**: On appelle série de terme général  $u_n$  que l'on note  $\sum_{n>0} u_n$  la suite  $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ .

- 💬 Note de rédaction : Les deux définitions précédentes gagneraient à être fusionnées.
- $\bigcirc$  Vocabulaire : On dit que  $(S_N)$  est la suite des sommes partielles de la série.
- **1** Remarque:  $(S_N)$  correspond aux N+1 premiers termes de la suite.

## Correspondance suite - série

Raisonnement : Par définition une série est une suite. Expliquons comment une suite peut-être vue comme une

Si  $(u_n)$  est une suite, considérons la série de terme général  $v_n = u_n - u_{n-1} \forall n \in \mathbb{N}$  (avec la convention  $v_0 = u_0$ ). Ainsi,  $u_n = \sum_{k=0}^n v_k$ .

 $oldsymbol{0}$  Remarque : Cependant la série associée à une suite  $(u_n)$  va s'étudier en tant que telle (que série) grâce à  $u_n$ .

## **Opérations sur les séries**

Propriété: Opérations sur les séries (admise)

Soient  $\sum_{n\geq 0}u_n$  et  $\sum_{n\geq 0}v_n$  deux séries. Alors, pour tout  $\lambda\in\mathbb{K}$  :

- Somme :  $\sum_{n\geq 0}(u_n+v_n)=\sum_{n\geq 0}u_n+\sum_{n\geq 0}v_n$  définie comme  $(S_N+S_N')$
- Produit par un scalaire :  $\sum_{n\geq 0} \lambda u_n = \lambda \sum_{n\geq 0} u_n$  définie comme  $(\lambda S_N)$
- **?** Exemple: Si  $u_n=0, \forall n\in\mathbb{N}$ , alors  $\sum_{n>0}u_n=0$  est la série nulle.

## Troncature d'une série

**Définition :** Si  $(u_n)$  est une suite définie pour  $n \geq n_0 \mid n_0 \in \mathbb{N}$ . On peut considérer la série  $\sum_{n \geq n_0} u_n$  où  $u_0=u_1=...=u_{n_0-1}=0$ , ou bien on peut écrire  $\sum_{n\geq n_0}u_n$ . Si  $\sum_{n\geq 0}u_n$  est une série de terme général  $u_n$ , une **troncature** de la série est  $\sum_{n\geq n_0}u_n$ . C'est la suite  $(S_N)$  où  $S_N = \sum_{n=n_0}^N u_n.$ 

- Note de rédaction : Cette définition pourraît être synthétisée.
- Exemple :

- · la série nulle
- la série géométrique de raison  $q\in\mathbb{C}^*$  :  $\sum_{n\geq 0}q^n$  de terme général  $q^n$  ;
- la série harmonique :  $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$  de terme général  $\frac{1}{n}$  ;
- la série  $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\alpha}}, \alpha \in \mathbb{R}$ .

## Il Convergence d'une série

## A Définitions et nature d'une série

**Définition :** Soit  $\sum_{n\geq 0} u_n$  une série.

On dit que la série converge, si la suite  $(S_N)$  converge, et on note S la limite de  $S_N$ .

S s'appelle la somme de la série.

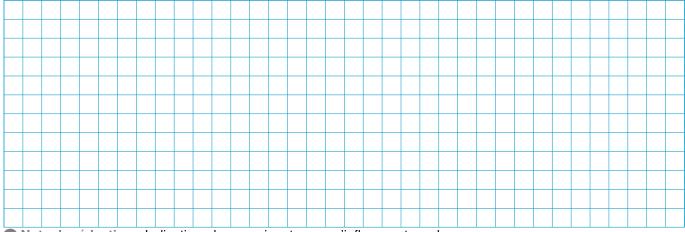
Dans ce cas, on écrit :  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = S \in \mathbb{R}$  (c'est une "somme infinie", un objet-limite).

- $igoplus extsf{Vocabulaire}: extsf{Si} \ (S_N) \ ext{diverge}, \ ext{alors on dit que la série} \ \sum_{n\geq 0} u_n \ ext{diverge}.$
- **X** Attention **X** Si S n'existe pas, alors on écrit **jamais** la notation avec  $\infty$
- De Vocabulaire : La convergence ou la divergence d'une série s'appelle la nature de la série.

Proposition : Stabilité de la limite par troncature (admis)

La nature d'une série n'est pas modifée par troncature.

## Preuve:



🗭 Note de rédaction : Indication : les premiers termes n'influencent pas la convergence.

## B Quelques applications...

## **©** Exemple :

• Si  $(u_n)$  est nulle à partir d'un rang  $N_0$  alors la série  $\sum_{n\geq 0} u_n$  est converge, et  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{N_0} u_n$ .

• Série géométrique  $\sum_{n\geq 0}q^n$  :

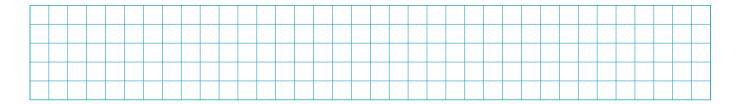
On considère la suite des sommes partielles  $(S_N)$  où  $S_N=\sum_{n=0}^N q^n$  =  $\frac{1-q^{N+1}}{1-q}$  avec  $q\neq 1$ . On a plusieurs cas :

- Si |q| < 1,  $q^{N+1} \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$  donc  $S_N \xrightarrow[N \to \infty]{} \frac{1}{1-q} \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ . La série  $\sum_{n>0} q^n$  converge et on arrive à trouver S!
- Si |q| > 1, alors  $\sum_{n>0} q^n$  diverge.
- Si q=1, alors  $\sum_{n\geq 0}q^n=N+1\Rightarrow \sum_{n\geq 0}q^n$  diverge.
- $\sum_{n>1} log(1+1/n)$ :

On a  $\forall N \geq 1, S_N = \sum_{n=1}^N log(\frac{n+1}{n}) = log(N+1)$  (télescopage). Or  $log(N+1) \xrightarrow[N \to \infty]{} +\infty$ , donc la série  $\sum_{n\geq 1} log(1+1/n)$  diverge.

On a 
$$\forall N \geq 1, S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^N (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{N+1}$$
 (télescopage). Or  $1 - \frac{1}{N+1} \xrightarrow[N \to \infty]{} 1$ , donc la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$  converge et  $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n(n+1)} = 1$ .

- Important, démontré plus tard :  $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$  (série harmonique) diverge.
- $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$  converge. (idée : montrer que  $S_N$  converge en montant  $A_N=S_{2N}$  et  $B_N=S_{2N+1}$  sont adjacentes)
- **X** Attention **X** Ces six exemples sont à connaître et comprendre parfaitement.
- **Application**: Étudier la convergence de la série géométrique pour |q|=1 et q=-1  $(q\in\mathbb{C})$ .



## Propriétés des séries convergentes

Propriété: Convergence de la combinaison linéaire (admise)

Soient  $\sum_{n\geq 0} u_n$  et  $\sum_{n\geq 0} v_n$  deux séries convergentes. Alors  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}: \sum_{n\geq 0} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n\geq 0} u_n + \mu \sum_{n\geq 0} v_n$ , cette série converge (vers la combinaison linéaire des limites).

**1** Remarque: En d'autres termes, la somme de deux séries convergentes est une série  $\sum_{n\geq 0}(u_n+v_n)$  qui converge.

## Preuve:

La suite de sommes partielles associée à  $\sum_{n\geq }(u_n+v_n)$  est  $\sum_{n=0}^N(u_n+v_n)=\sum_{n=0}^N(u_n)+\sum_{n=0}^N(v_n)$  Comme  $\sum_{n=0}^N(u_n)$  et  $\sum_{n=0}^N(v_n)$  sont convergentes, on a  $\sum_{n=0}^N(u_n+v_n)$  est convergente et sa limite est  $\sum_{n=0}^\infty(u_n+v_n)=\sum_{n=0}^\infty(u_n)+\sum_{n=0}^\infty(v_n)$ .

 $\P$  Exemple: Retour: Divergence de la série harmonique  $\sum_{n\geq 1}rac{1}{n}$ 

But : minorer  $\sum_{n\geq 1}^{N} \frac{1}{n} \forall N \in \mathbb{N}$ .

$$n \le t \in \mathbb{R} \le n+1 \Rightarrow \frac{1}{n+1} \le \frac{1}{t} \le \frac{1}{n}$$

But : minorer  $\sum_{n\geq 1}^{N} \frac{1}{n} \forall N \in \mathbb{N}$ .  $n \leq t \in \mathbb{R} \leq n+1 \Rightarrow \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{n}$  Intégrons entre n et  $n+1: \int_{n}^{n+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{n}$  Donc en sommant :  $\sum_{n=1}^{N} \int_{n}^{n+1} \frac{1}{t} dt \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$  donc par Chasles :  $\int_{1}^{N+1} \frac{1}{t} dt \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \forall n \in \mathbb{N}$  Or  $\int_{1}^{N+1} \frac{1}{t} dt = \ln(N+1) \xrightarrow[N \to \infty]{N \to \infty} + \infty$  donc  $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \xrightarrow[N \to \infty]{N \to \infty} + \infty$ .

Donc la série harmonique diverge.

## Propriété : Divergence de la combinaison linéaire (admise)

Soient  $\sum_{n\geq 0} u_n$  une série convergente et  $\sum_{n\geq 0} v_n$  une série divergente. Alors  $\sum_{n>0}^{-} (u_n + v_n)$  diverge.

Preuve:

$$\sum_{n=0}^{N} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{N} (u_n) + \sum_{n=0}^{N} (v_n)$$

 $\begin{array}{l} \sum_{n=0}^N (u_n+v_n) = \sum_{n=0}^N (u_n) + \sum_{n=0}^N (v_n) \\ \text{Comme } \sum_{n=0}^N (u_n) \text{ est convergente et } \sum_{n=0}^N (v_n) \text{ est divergente, on a } \sum_{n=0}^N (u_n+v_n) \text{ est divergente.} \end{array}$ 

X Attention X Quand on considère deux séries divergentes, la situation est à étudier au cas par cas.

**© Exemple :** Considérons  $\sum_{n\geq 1}u_n$  avec  $u_n=1\forall n\in\mathbb{N}$  et  $\sum_{n\geq 1}v_n$  avec  $v_n=-1\forall n\in\mathbb{N}$ . D'une part  $\sum_{n\geq 1}u_n$  diverge, et  $\sum_{n\geq 1}v_n$  diverge aussi. Mais  $\sum_{n\geq 1}(u_n+v_n)=\sum_{n\geq 1}0=0$  converge.

Mais si on considère  $v_n = u_n$ , alors  $\sum_{n \ge 1} (u_n + v_n) = \sum_{n \ge 1} 2u_n$  diverge.

**X** Attention **X** Source d'erreur classique : Si  $\sum_{n\geq 0} u_n + v_n$  est convergente, **a** priori on ne peut pas écrire que  $\sum_{n=0}^{\infty}u_n+v_n=\sum_{n=0}^{\infty}u_n+\sum_{n=0}^{\infty}v_n$  car les séries de termes généraux  $u_n$  et  $v_n$  peuvent être divergentes (il faut donc vérifier leur convergence).

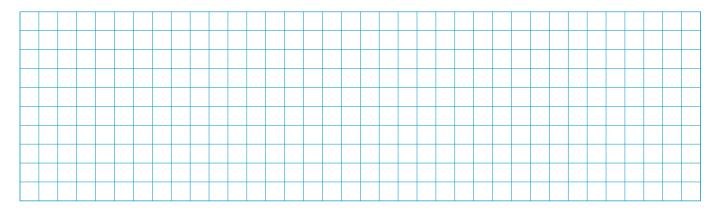
**Proposition:** (admis)

Soit  $\sum_{n\geq 0}u_n$  une série numérique où  $u_n\in\mathbb{C}\ \forall n\in\mathbb{N}.$  On a  $\sum_{n\geq 0}u_n$  converge  $\Leftrightarrow$  les suites  $(Re(u_n))$  et  $(Im(u_n))$  sont convergentes.

Application : Montrer la proposition précédente.

#### Indication pour la preuve:

écrire  $u_n = Re(u_n) + iIm(u_n)$  et utiliser la propriété sur les combinaisons linéaires.



Théorème : Lien entre convergence et limite des termes

Si  $\sum_{n\geq 0} u_n$  converge, alors  $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ .

Preuve:

Considérons  $(S_N)$  la suite des sommes partielles associée à  $\sum_{n\geq 0} u_n$ .

On a  $S_{N+1} - S_N = u_{N+1} \ \forall N \in \mathbb{N}$ .

Or  $\sum_{n>0} u_n$  converge  $\Rightarrow$   $(S_N)$  converge. Donc  $\lim_{N\to\infty} S_N - \lim_{N\to\infty} S_{N+1} = 0 \Rightarrow \lim_{N\to\infty} u_N = 0$ .

**X** Attention X La réciproque est fausse. Par exemple la série harmonique  $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$  diverge mais  $\frac{1}{n}$   $\longrightarrow 0$ .

**Description** Vocabulaire: Si  $u_n \nrightarrow 0$ , on dit que la série  $\sum_{n>0} u_n$  diverge grossièrement.

## Reste d'une série

**Définition :** On suppose que  $\sum_{n>0}u_n$  converge. On note  $S=\sum_{n=0}^\infty u_n$  sa somme et  $(S_N)$  la suite des sommes partielles.

Le **reste** de la série au rang N est  $R_N = S - S_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} u_n$ .

## **Proposition: Comportement du reste**

Si  $\sum_{n\geq 0} u_n$  converge, alors  $R_N \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$ .

#### Preuve:

Par définition,  $R_N = S - S_N$ . Or  $S_N \xrightarrow[N \to \infty]{} S$ . Donc  $R_N \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$ .

## Série absolument convergente (ACV)

## Critère de Cauchy pour les séries numériques

Ce qui a été fait dans le Chapitre 1 - Suites de Cauchy sur les suites réelles reste valable si on considère des suites complexes.

**Définition :** On dit que la série  $\sum_{n>0} u_n$  vérifie le **critère de Cauchy** si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall N \geq N_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}, |\sum_{k=N}^{N+p} u_k| < \varepsilon$$

## Proposition : Convergence et critère de Cauchy

 $\sum_{n\geq 0} u_n$  vérifie le critère de Cauchy  $\Leftrightarrow \sum_{n\geq 0} u_n$  converge.

#### Preuve: (par équivalence)

 $\sum_{n\geq 0}u_n$  converge  $\Leftrightarrow (S_N)$  converge  $\Leftrightarrow (S_N)$  est une suite de Cauchy (car l'espace est complet)  $\Leftrightarrow orall arepsilon > 0, \exists N_arepsilon \in S_N$  $\mathbb{N}, \forall N \geq N_{\varepsilon}, \forall p \in \mathbb{N}, |S_{N+p} - S_N| < \varepsilon \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_{\varepsilon} \in \mathbb{N}, \forall N \geq N_{\varepsilon}, \forall p \in \mathbb{N}, |\sum_{n=N}^{N+p} u_n| < \varepsilon$ 

## Remarque : Autre preuve de la divergence de la série harmonique :

Soit  $\varepsilon=1/2$ . Pour tout  $N\in\mathbb{N}$ , on peut choisir p=N et on a :  $|\sum_{k=N}^{2N}\frac{1}{k}|\geq\sum_{k=N}^{2N}\frac{1}{2N}=\frac{1}{2}$ . Donc la série harmonique ne vérifie pas le critère de Cauchy, donc elle diverge.

#### Définitions et propriétés В

**Définition**: On dit que la série  $\sum_{n>0} u_n$  est absolument convergente (ACV) si la série  $\sum_{n>0} |u_n|$  converge.

## Théorème : Série ACV et convergence

Série ACV  $\Rightarrow$  série convergente et  $|\sum_{n=0}^{\infty} u_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$ .

#### Preuve:

Soit  $\sum_{n\geq 0} u_n$  une série ACV. Donc  $\sum_{n\geq 0} |u_n|$  converge.

Donc  $\sum_{n\geq 0}|u_n|$  vérifie le critère de Cauchy :  $\forall \varepsilon>0, \exists N_\varepsilon\in\mathbb{N}, \forall N\geq N_\varepsilon, \forall p\in\mathbb{N}, |\sum_{k=N+1}^{N+p}|u_k||<\varepsilon$ 

 $\begin{array}{l} \sum_{k=0}^{N-p} |u_k| \leq \sum_{k=N+1}^{N+p} |u_k| \leq \sum_{k=N+1}^{N+p} |u_k| < \varepsilon \\ \text{Ainsi } \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall N \geq N_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}, |\sum_{k=N}^{N+p} u_k| < \varepsilon \\ \text{Page } \sum_{k=N}^{N-p} |u_k| \leq \varepsilon \end{array}$ 

Donc  $\sum_{n>0} u_n$  vérifie le critère de Cauchy.

Donc  $\sum_{n>0} u_n$  converge et on a  $|\sum_{n=0}^N u_n| \le \sum_{n=0}^N |u_n| \implies |\sum_{n=0}^\infty u_n| \le \sum_{n=0}^\infty |u_n|$ .

**X** Attention **X** La réciproque est fausse.

**Exemple**: La série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  est convergente, mais elle n'est pas absolument convergente car  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  diverge.

#### Convergence absolue d'une série IV

Note de rédaction : Correspond à II. dans le plan de cours du prof.

## Séries à termes positifs

## Théorème:

Soit  $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$  une suite à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$ .

Alors la série  $\sum_{n\geq 0} u_n$  ( $u_n\geq 0$ ) converge  $\Leftrightarrow$  la suite  $(S_N)$  des sommes partielles est bornée.

En effet,  $S_{N+1} - S_N = u_{N+1} \ge 0$  donc  $(S_N)$  est croissante (à termes positifs).

Ainsi  $(S_N)$  converge  $\Leftrightarrow (S_N)$  est bornée (théorème de convergence monotone).

Or  $\sum_{n\geq 0} u_n$  converge  $\Leftrightarrow (S_N)$  converge.

Donc  $\sum_{n>0} u_n$  converge  $\Leftrightarrow (S_N)$  est bornée.

**1** Remarque : Si  $(S_N)$  n'est pas bornée, alors  $S_N \xrightarrow[N \to \infty]{} +\infty$ . On tolère la notation  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = +\infty$ .

## Application : Application du théorème.

Soit  $\sum_{n\geq 0} u_n$  et  $\sum_{n\geq 0} v_n$  deux séries à termes positifs. Montrons que la série  $\sum_{n\geq 0} \sqrt{u_n v_n}$  converge. En effet, utilisons l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

$$\forall N \in \mathbb{N}, \sum_{n=0}^{N} \sqrt{u_n v_n} \le \sqrt{\sum_{n=0}^{N} u_n} \sqrt{\sum_{n=0}^{N} v_n}.$$

Or les deux termes de droite sont bornés, donc  $\forall N \in \mathbb{N}, \sum_{n=0}^{N} \sqrt{u_n v_n}$  est bornée.

Donc  $\sum_{n\geq 0} \sqrt{u_n v_n}$  converge.

## Autre preuve (sans Cauchy-Schwarz):

$$(a-b)^2 \ge 0 \Leftrightarrow ab \le \frac{a^2+b^2}{2} \forall a, b \in \mathbb{R}$$

Latter precise (sails Catterly-Schwarz): 
$$(a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow ab \leq \frac{a^2+b^2}{2} \forall a,b \in \mathbb{R}.$$
 Donc 
$$\sum_{n=0}^{N} \sqrt{u_n v_n} \leq \frac{1}{2} (\sum_{n=0}^{N} u_n + \sum_{n=0}^{N} v_n).$$

Or les deux termes de droite sont bornés, donc  $\forall N \in \mathbb{N}, \sum_{n=0}^{N} \sqrt{u_n v_n}$  est bornée.

Donc  $\sum_{n>0} \sqrt{u_n v_n}$  converge.

Note de rédaction : On a pas encore abordé Cauchy-Schwarz.

#### **Proposition:**

Soient  $\sum_{n\geq 0} u_n$  et  $\sum_{n\geq 0} v_n$  deux séries convergentes (pas forcément à termes positifs mais réels). Si  $u_n\leq v_n \forall n\in\mathbb{N}$ , alors  $\sum_{n=0}^\infty u_n\leq \sum_{n=0}^\infty v_n$ .

## Preuve:

On considère la série à termes positifs  $\sum_{n\geq 0}(v_n-u_n)$ . C'est une série convergente.

On a  $\sum_{n=0}^{\infty}(v_n-u_n)\geq 0$ . Or  $\sum_{n\geq 0}v_n$  et  $\sum_{n\geq 0}u_n$  sont convergentes.

Donc on peut écrire : 
$$\sum_{n=0}^{\infty}v_n-\sum_{n=0}^{\infty}u_n=\sum_{n=0}^{\infty}(v_n-u_n)\geq 0$$
. Donc  $\sum_{n=0}^{\infty}u_n\leq\sum_{n=0}^{\infty}v_n$ .

## Critère de comparaison

Tout cela est fait pour des séries à termes positifs.

## Théorème : Critère de comparaison ("Hyper important")

Soit  $\sum_{n\geq 0} u_n$  et  $\sum_{n\geq 0} v_n$  deux séries à termes positifs.

Supposons que  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq v_n$ .

- Si  $\sum_{n>0} v_n$  converge, alors  $\sum_{n>0} u_n$  converge.
- Si  $\sum_{n\geq 0} u_n$  diverge, alors  $\sum_{n\geq 0} v_n$  diverge.

#### Preuve:

- On a  $\forall N \in \mathbb{N}, 0 \leq \sum_{n=0}^N u_n \leq \sum_{n=0}^N v_n$ . Or  $\sum_{n\geq 0} v_n$  converge, donc la suite des sommes partielles $(\sum_{n=0}^N v_n)$  est bornée. Donc la suite des sommes partielles  $(\sum_{n=0}^{N} u_n)$  est bornée et donc  $\sum_{n>0} u_n$  converge.
- Comme  $\sum_{n>0} u_n$  diverge, la suite des sommes partielles  $(\sum_{n=0}^N u_n)$  n'est pas bornée. Et comme  $\forall N \in \mathbb{N}, 0 \leq \sum_{n=0}^N u_n \leq \sum_{n=0}^N v_n$ , la suite des sommes partielles  $(\sum_{n=0}^N v_n)$  n'est pas bornée. Et donc par le théorème de convergence des séries à termes positifs on a que  $\sum_{n\geq 0} v_n$  diverge.

## Corollaire:

Soient  $\sum_{n\geq 0} u_n$  et  $\sum_{n\geq 0} v_n$  deux séries à termes positifs.  $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n\geq n_0, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$ .

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

- Si  $\sum_{n\geq 0} v_n$  converge, alors  $\sum_{n\geq 0} u_n$  converge.
- Si  $\sum_{n\geq 0} u_n$  diverge, alors  $\sum_{n\geq 0} v_n$  diverge.

#### Preuve:

$$\begin{array}{l} \frac{u_{n+1}}{u_n} \times \frac{u_n}{u_{n-1}} \times \ldots \times \frac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n} \times \frac{v_n}{v_{n-1}} \times \ldots \times \frac{v_{n_0+1}}{v_{n_0}} \\ \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_{n_0}} \leq \frac{v_{n+1}}{v_{n_0}} \Rightarrow u_{n+1} \leq k v_{n+1} \text{ avec } k = \frac{u_{n_0}}{v_{n_0}} \in \mathbb{R}_+^* \end{array}$$

- On suppose que  $\sum_{n\geq 0} v_n$  converge.

Donc  $\sum_{n\geq 0} kv_n$  converge. Donc par le théorème précédent, comme  $\forall n\geq n_0, 0\leq u_n\leq kv_n$ , on a que  $\sum_{n\geq 0} u_n$  converge.

- (non démontré en cours)
- Application : applications aux séries absolument convergentes

#### **Proposition:**

Soit  $\sum_{n\geq 0} u_n$  une série à termes réels.

Définissons  $u_n^+ = \max(u_n, 0) \ge 0$  et  $u_n^- = \max(-u_n, 0) \ge 0$ .

On a  $\sum_{n>0} u_n$  est ACV.

 $\sum_{n\geq 0} |u_n|$  converge  $\Leftrightarrow \sum_{n\geq 0} u_n^+$  et  $\sum_{n\geq 0} u_n^-$  convergent.

#### Preuve:

 $\Rightarrow$ / On a  $\forall n \in \mathbb{N}0 \leq u_n^+ \leq |u_n|$  et  $0 \leq u_n^- \leq |u_n|$ . Donc par le théorème de comparaison,  $\sum_{n \geq 0} u_n^+$  et  $\sum_{n \geq 0} u_n^-$  convergent.

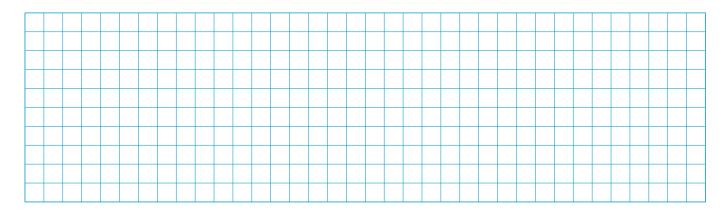
 $\Leftarrow$ / On remarque que  $|u_n| = u_n^+ + u_n^-$ .

Si  $\sum_{n\geq 0} u_n^+$  et  $\sum_{n\geq 0} u_n^-$  convergent, alors  $\sum_{n\geq 0} |u_n|$  converge  $\Rightarrow \sum_{n\geq 0} u_n$  est ACV.

## **Proposition:**

Soit  $\sum_{n\geq 0} u_n$  une série à termes complexes. On a  $\sum_{n\geq 0} u_n$  est ACV  $\Leftrightarrow \sum_{n\geq 0} Re(u_n)$  et  $\sum_{n\geq 0} Im(u_n)$  sont ACV.

Application : Montrer la proposition précédente.



## Domination, convergence et équivalence

• Rappel: Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites.

- $u_n = O(v_n)$  ssi  $\exists M > 0, |u_n| \leq M|v_n|$  au voisinage de l'infini (n assez grand)  $\Leftrightarrow |\frac{u_n}{v_n}|$  est bornée.
- $u_n = o(v_n)$  ssi  $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ .  $(u_n \text{ est n\'egligeable devant } v_n)$
- $u_n = o(v_n) \Rightarrow u_n = O(v_n)$
- $u_n \sim v_n$  ssi  $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$ .  $(u_n \text{ est équivalent à } v_n)$

#### **Proposition:** (admis)

Soient  $\sum_{n\geq 0}u_n$  et  $\sum_{n\geq 0}v_n$  deux séries à termes positifs. On suppose  $u_n=O_{+\infty}(v_n)$ .

- Si  $\sum_{n\geq 0} v_n$  converge, alors  $\sum_{n\geq 0} u_n$  converge.
- Si  $\sum_{n\geq 0} u_n$  diverge, alors  $\sum_{n\geq 0} v_n$  diverge.

## Indication pour la preuve:

Il suffit de remarquer que  $\sum_{n\geq 0} u_n$  et  $\sum_{n\geq 0} Mv_n$  sont de même nature ; et M est tel que  $u_n\leq Mv_n$ 

**X** Attention **X** Si on sait que  $\sum_{n\geq 0} v_n$  alors pour montrer que  $\sum_{n\geq 0} u_n$  converge, il suffit de montrer que  $u_n=0$ 

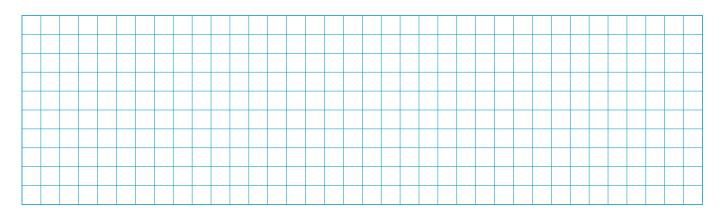
(en réalité il faudrait montrer grand O, mais  $o \Rightarrow O$  donc c'est plus fort et plus simple à montrer)

## Corollaire: (admis)

Soit  $\sum_{n\geq 0} u_n$  une série à terme général dans  $\mathbb C$  et soit  $\sum_{n\geq 0} v_n$  une série à terme général positif tel que  $\sum_{n\geq 0} v_n$ 

Si  $u_n = O_{+\infty}(v_n)$ , alors  $\sum_{n>0} u_n$  converge absolument (ACV).

Application : Montrer le corollaire précédent.



## Théorème: "Hyper<sup>2</sup> important"

Soit  $\sum_{n\geq 0} u_n$  une série à terme général dans  $\mathbb C$  et soit  $\sum_{n\geq 0} v_n$  une série à termes positifs.

On suppose  $u_n \sim_{+\infty} v_n$ .

(on pourrait mettre une constante)

On a:

- Si  $\sum_{n\geq 0} v_n$  converge alors  $\sum_{n\geq 0} u_n$  converge absolument (ACV).
- Si  $\sum_{n\geq 0} v_n$  diverge alors  $\sum_{n\geq 0} u_n$  diverge.

**1** Remarque : Si  $u_n \geq 0$  alors  $\sum_{n \geq 0} u_n$  et  $\sum_{n \geq 0} v_n$  sont de même nature.

## Séries de références

#### Série de Riemann

## Théorème:

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Soit la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\alpha}}$ , dite série de Riemann.

#### Preuve:

On a vu que pour  $\alpha = 1$ , la série diverge (série harmonique).

- Si  $\alpha \leq 1, \frac{1}{n^{\alpha}} \geq \frac{1}{n}$ . Donc par le théorème de comparaison,  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\alpha}}$  diverge.
- $\Leftarrow$  / Supposons  $\alpha > 1$ .

Considérons la série  $\sum_{n>1} u_n$  de terme général  $u_n = \frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$ .

**Observation 1:**  $\forall N \in \mathbb{N}^*, \sum_{n=1}^N u_n = 1 - \frac{1}{(N+1)^{\alpha-1}} \text{ donc } \sum_{n\geq 1} u_n \text{ converge (car } \alpha-1>0).$  (téléscopage)

**Observation 2 :** Déterminons un équivalent de  $u_n$ .

$$\begin{array}{l} \text{Observation 2: Determinons un equivalent de $u_n$.} \\ u_n = \frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} = \frac{1}{n^{\alpha-1}} \big(1 - \big(\frac{n}{n+1}\big)^{\alpha-1}\big). \\ \text{On a } \big(\frac{n}{n+1}\big)^{\alpha-1} = \big(\frac{n+1-1}{n+1}\big)^{\alpha-1} = \big(1 - \frac{1}{n+1}\big)^{\alpha-1} = 1 - \frac{\alpha-1}{n} + o_{+\infty}\big(\frac{1}{n}\big) \text{ (DL ordre 1).} \\ \Rightarrow 1 - \big(\frac{n}{n+1}\big)^{\alpha-1} = \frac{\alpha-1}{n} + o_{+\infty}\big(\frac{1}{n}\big) \sim_{+\infty} \frac{\alpha-1}{n}. \\ \text{Donc } u_n \sim_{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha-1}} \times \frac{\alpha-1}{n} = \frac{\alpha-1}{n^{\alpha}} > 0. \end{array}$$

On a deux séries à termes positifs  $\sum_{n>1}u_n$  et  $\sum_{n>1}rac{\alpha-1}{n^{\alpha}}$  qui sont de même nature car équivalentes ( $u_n\sim_{+\infty}$  $\frac{\alpha-1}{n^{\alpha}}).$  On en déduit que  $\sum_{n\geq 1}\frac{\alpha-1}{n^{\alpha}}$  converge pour  $\alpha>1$  par le théorème sur les équivalents. De plus la nature d'une série n'est pas modifiée quand le terme général est multiplié par un scalaire non nul. Donc  $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{\alpha}}$  est de même nature que  $\sum_{n\geq 1}\frac{\alpha-1}{n^{\alpha}}$ . Donc  $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{\alpha}}$  converge.

★ Attention ★ Démonstration probablement en question de cours au partiel/CC:)

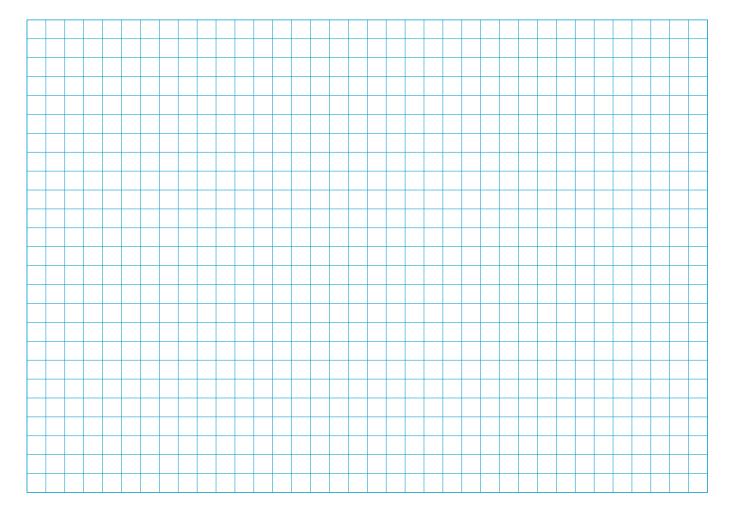
## Règles de comparaisons avec les séries de Riemann :

Soient  $\sum u_n$  une série de terme général dans  $\mathbb{C}$ .

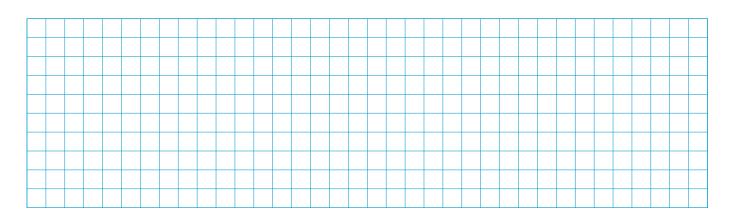
- 1. Si  $u_n \sim_{+\infty} k \frac{1}{n^{\alpha}}$  avec  $k \in \mathbb{C}^*$ .
  - Si  $\alpha>1$  alors  $\sum_{n\geq 1}u_n$  converge absolument (ACV).
  - Si  $\alpha \leq 1$  alors  $\sum_{n \geq 1} u_n$  diverge.
- 2. Si  $\exists \alpha>1, n^{\alpha}|u_n|$  bornée (i.e.  $u_n=O(\frac{1}{n^{\alpha}})$ ), alors  $\sum u_n$  converge absolument (ACV). Il suffit de montrer que  $u_n=o(\frac{1}{n^{\alpha}})$
- 3. On se restreint à  $u_n \in \mathbb{R}$ . Si  $\exists \alpha \leq 1, n^{\alpha}u_n \xrightarrow[n \to \infty]{} +\infty$ , alors  $\sum u_n$  diverge.

 $oldsymbol{0}$  Remarque : Penser  $u_n$  à terme réel positif et  $k \in \mathbb{R}_+^*$  pour la compréhension. (suffisant pour la compréhension et la plupart des exercices)

Application: Montrer les règles de comparaison avec les séries de Riemann.



**Application**: Etudier la nature de la série de terme général  $u_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt[3]{n^3 + an^2 + bn + c}$  avec  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .



## Série géométrique

① Rappel : La série  $\sum_{n\geq 0}q^n$  converge  $\Leftrightarrow |q|<1$  et dans ce cas  $\sum_{n=0}^{\infty}q^n=rac{1}{1-q}$ .

Preuve: 
$$\Leftarrow \operatorname{Si} |q| < 1$$
, alors  $S_N = \sum_{n=0}^N q^n = \frac{1-q^{N+1}}{1-q} \xrightarrow[N \to \infty]{} \frac{1}{1-q}$ .

 $\Rightarrow$  Si  $|q| \ge 1$ , alors  $q^n \ne 0$  donc la série diverge (grossièrement).

## Règle de Cauchy:

Soit  $\sum_{n\geq 0} u_n$  une série à terme général dans  $\mathbb C.$ 

On suppose que  $\lim_{n\to\infty} |u_n|^{\frac{1}{n}} = l$  (existe et égale à  $l \in [0,+\infty]$ ,  $+\infty$  autorisé).

- 1. Si l < 1, alors  $\sum_{n > 0} u_n$  converge absolument (ACV).
- 2. Si l > 1, alors  $\sum_{n>0} u_n$  diverge.
- 3. Si l=1, on ne peut rien conclure.

Remarque : Comprendre la règle précédente dans le cas réel, terme positif.

## Preuve:

1. Si l < 1, prenons  $\varepsilon > 0$  tel que  $l + \varepsilon < 1$ .

$$\text{Or } |u_n|^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n \to \infty]{} l \text{, donc } \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n|^{\frac{1}{n}} \leq l + \varepsilon.$$

Donc 
$$|u_n| \leq (l+\varepsilon)^n$$
 pour  $n \geq N$ .

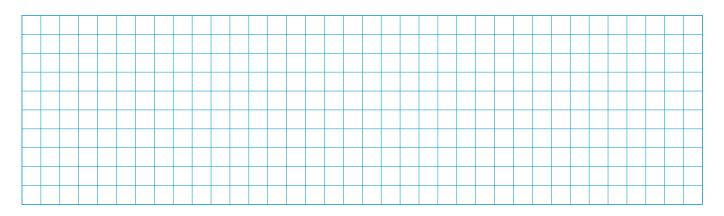
Or la série de terme général  $(l+\varepsilon)^n$  est une série géométrique de raison  $l+\varepsilon<1$ , donc elle converge. Donc  $\sum_{n\geq 0} u_n$  converge.

- 2. Laissée à la douce appréciation du lecteur.
- 3. Trouvons une série  $\sum_{n\geq 0} u_n$  où  $|u_n|^{\frac{1}{n}}\xrightarrow[n\to\infty]{} 1$  et où on ne peut rien conclure sur la nature de la série.

Si on prend 
$$u_n=\frac{1}{n^{\alpha}}=e^{-\alpha\ln(n)},$$
 on a bien  $u_n^{\frac{1}{n}}=e^{-\alpha\frac{\ln(n)}{n}}\xrightarrow{n\to\infty}1\forall\alpha.$ 

Or on a convergence pour  $\alpha > 1$  et divergence pour  $\alpha \le 1$ , on ne peut rien conclure.

**Application**: Etudier la nature de la série de terme général  $u_n = \cosh(\frac{1}{n})^{-n^3}$ .



## Règle de d'Alembert :

Soit  $\sum u_n$  une série à terme général dans  $\mathbb C$ . On suppose que  $\lim_{n \to \infty} |\frac{u_{n+1}}{u_n}| = l$  (existe et égale à  $l \in [0,+\infty]$ ,  $+\infty$  autorisé).

- 1. Si l < 1, alors  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge absolument (ACV).
- 2. Si l > 1, alors  $\sum_{n>0} u_n$  diverge.
- 3. Si l=1, on ne peut rien conclure.

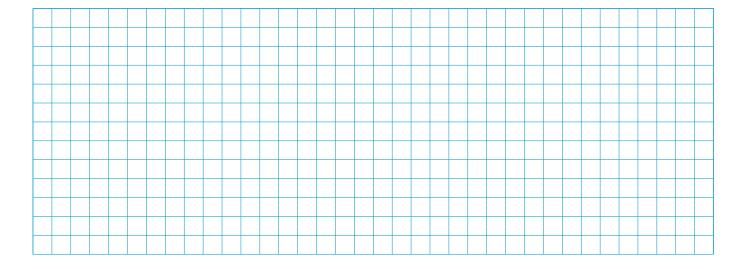
#### Preuve:

 $\begin{array}{l} \text{1. Si } l<1, \text{ prenons } \varepsilon>0 \text{ tel que } l+\varepsilon<1. \\ \text{Or } |\frac{u_{n+1}}{u_n}| \xrightarrow[n \to \infty]{} l, \text{ donc } \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |\frac{u_{n+1}}{u_n}| \leq l+\varepsilon. \\ \text{Posons } q=l+\varepsilon<1. \\ \text{Ainsi, } |\frac{u_{n+1}}{u_n}| \leq \frac{q^{n+1}}{q^n} \text{ pour } n \geq N. \end{array}$ 

On a une comparaison du type  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ . On a vu que dans ce cas,  $sumb_n$  converge  $\Rightarrow \sum a_n$  converge.

Or  $\sum q^n$  converge (série géométrique de raison q < 1) donc  $\sum u_n$  converge (ACV).

- 2. Comme  $\lim_{n\to\infty}|\frac{u_{n+1}}{u_n}|=l>1, \exists N\in\mathbb{N}, \forall n\geq N, |\frac{u_{n+1}}{u_n}|\geq 1\Rightarrow |u_n|$  est minorée par n assez grand. Donc  $\sum u_n$  diverge.
- 3. Prendre  $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\alpha}}$ . On a bien  $\frac{(n+1)^{\alpha}}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$  et la nature dépend de  $\alpha$ .
- **Application**: Etudier la nature de la série de terme général  $u_n = \frac{n!}{n^n}$ .



💬 Note de rédaction : On a évoqué en cours la formule de Stirling pour la culture, mais elle est hors programme :  $n! \sim \sqrt{2\pi n} (\frac{n}{e})^n$ .

## Proposition: Comparaison des règles de d'Alembert et de Cauchy

Soit  $\sum u_n$  une série à terme général positif ou nul. On suppose que  $\frac{u_{n+1}}{u_n}\xrightarrow[n\to\infty]{}l\in[0,+\infty].$ 

Alors  $u_n^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n \to \infty]{} l$ .

#### Preuve:

On suppose  $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l, l>0, l\neq +\infty$ .

On a  $\forall l_1, 0 < l_1 < l, \sum_{n \geq 0} \frac{l_1^n}{u_n}$  converge par la règle de d'Alembert. En effet,  $\frac{l_1^{n+1}}{u_{n+1}} \times \frac{u_n}{l_1^n} = l_1 \times \frac{u_n}{u_{n+1}} \xrightarrow[n \to \infty]{l_1} < 1.$  Par convergence de la série on a que  $\frac{l_1^n}{u_n} \xrightarrow[n \to \infty]{0}$ .

À partir d'un certain rang,  $\frac{l_1^n}{u_n} \leq 1 \Rightarrow l_1^n \leq u_n \Rightarrow l_1 \leq u_n^{\frac{1}{n}}$ .

On a  $\forall l_2, 0 < l < l_2, \sum_{n \geq 0} \frac{u_n}{l_n^n}$  converge par la règle de d'Alembert.

À partir d'un certain rang (même argument que pour  $l_1$ ),  $u_n \leq l_2^n \Rightarrow u_n^{\frac{1}{n}} \leq l_2$ .

Donc  $l_1 \le u_n^{\frac{1}{n}} \le l_2$ ,  $\forall l_1 < l < l_2$  pour un n assez grand.

On fait tendre n vers  $\infty$  puis  $l_1$  et  $l_2$  vers l et on en déduit que  $u_n^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n \to \infty]{} l$ .

## **X** Attention **X** La réciproque est fausse.

**Exemple**: Contre-exemple.

Soit 0 < a < b. Posons :

$$u_n = \begin{cases} a^p b^p & \text{si n = 2p} \\ a^{p+1} b^p & \text{si n = 2p + 1} \end{cases}$$

On a  $u_n^{\frac{1}{n}}\xrightarrow[n\to\infty]{}ab$  (peu importe la parité de n). Mais  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  dépend de la parité de n.

1 Remarque: Donc on préfère la règle de d'Alembert à celle de Cauchy.