

Chapitre 1 : Suites de Cauchy

✗ **Attention** ✗ Certaines démonstrations ont été omises dans ce cours. Je les ai en format papier, n'hésitez pas à me demander à e.rodriguesdeoliveir@gmail.com.

I Rappels sur les suites

A Définitions générales

On ne rappellera que ce qui n'est pas "évident" dans le cours de L1.

Définition : Une sous-suite (ou suite extraite) d'une suite (u_n) est une suite (v_n) : $\exists \varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, strictement croissante tq $v_n = u_{\varphi(n)}$

💬 **Vocabulaire :** Une sous-suite de (u_n) est aussi notée (u_{n_k}) .

Définition : Une suite (u_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$ si : $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\varepsilon, |u_n - l| < \varepsilon$

💬 **Vocabulaire :** Si elle ne converge pas on dit qu'elle diverge.

Attention : une suite peut diverger mais avoir une limite (une suite qui tend vers l'infini).

Propriété : Bornes (*admise*)

Si une suite (u_n) converge, alors elle est bornée : $\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$.

Propriété : Convergence des sous-suites (*admise*)

Si une suite (u_n) converge vers l , alors toute sous-suite (u_{n_k}) converge aussi vers l .

B Propriétés et théorèmes fondamentaux

Propriété : Espace-vectoriel (*admise*)

L'ensemble des suites réelles convergentes est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

Théorème : Suites adjacentes (*admis*)

Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes si :

- (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante
- $u_n \leq v_n, \forall n \in \mathbb{N}$
- $v_n - u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$

Si deux suites sont adjacentes, alors elles convergent vers la même limite.

Théorème : Bolzano-Weierstrass (*admis*)

Toute suite réelle bornée admet une sous-suite convergente.

II Suites de Cauchy

Définition : Une suite (u_n) est une suite de Cauchy si : $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N_\varepsilon, |u_p - u_q| < \varepsilon$

Définition : autre formulation utile

Soit (u_n) une suite à valeur dans $(K, |\cdot|)$.

(u_n) est une suite de Cauchy si : $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}, |u_{n+p} - u_n| < \varepsilon$

Propriété : Convergence

Toute suite convergente est une suite de Cauchy.

Preuve: Soit $\varepsilon > 0$

Comme (u_n) est convergente, $\forall N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - \ell| < \varepsilon/2, \forall n \geq N_\varepsilon$

$\forall p, q \geq N_\varepsilon, |u_p - u_q| = |u_p - \ell + \ell - u_q| \leq |u_p - \ell| + |\ell - u_q| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$

Ainsi, $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p, q \geq N_\varepsilon$ on a $|u_p - u_q| < \varepsilon$

Proposition : Bornes

Toute suite de Cauchy est bornée.

Preuve:

Prenons $\varepsilon = 1, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p, q \geq N$, on a $|u_p - u_q| < 1 \Rightarrow |u_p - u_q| < 1 \Rightarrow |u_p| < 1 + |u_q|$.

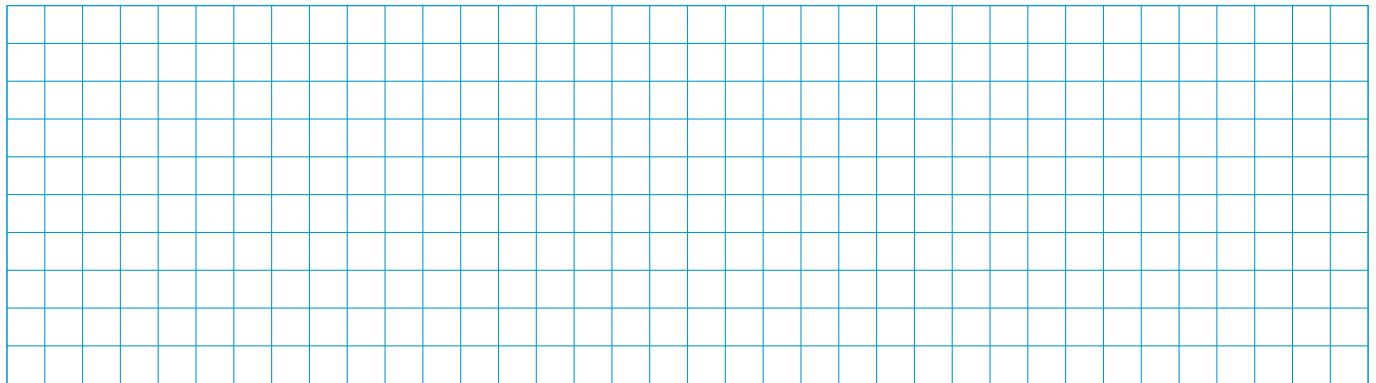
On a $\forall p \geq N$, on a $|u_p| < 1 + |u_q|$. Posons $M \in \mathbb{R}_+ := \max\{|u_0|, |u_1|, \dots, |u_{N-1}|, |u_N|\}$

Alors $|u_p| \leq M, \forall p \in \mathbb{N}$

Théorème :

Toute suite de Cauchy dans \mathbb{R} converge dans \mathbb{R} .

Preuve:



Remarque : On dit que \mathbb{R} est complet.

Définition : On dit que $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est complet.

Exemple : Notion de complétude

$(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ n'est pas complet : la suite définie par $u_n =$ la partie décimale de $\sqrt{2}$ à la n -ième décimale est une suite de Cauchy dans \mathbb{Q} qui ne converge pas dans \mathbb{Q} (car $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).

Par contre, elle converge dans \mathbb{R} .

III Topologie de \mathbb{R}

A Rappels

a) Ouvert

Définition : Soit $x \in \mathbb{R}$ et $V \subset \mathbb{R}$. On dit que V est un voisinage de x si : $\exists \varepsilon > 0,]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset V$

Définition : $U \subset \mathbb{R}$ est un ouvert de \mathbb{R} si : $\forall x \in U, U$ est un voisinage de x

💡 Exemple :

- \mathbb{R} est un ouvert de \mathbb{R} .
- $]a, b[$ est un ouvert de \mathbb{R}
- $]a, +\infty[$ est un ouvert de \mathbb{R}
- $] - \infty, a[$ est un ouvert de \mathbb{R}
- L'ensemble vide est un ouvert de \mathbb{R} .

Propriété : Opérations sur les ouverts (admise)

- L'intersection finie d'ouverts est un ouvert.
- L'union quelconque d'ouverts est un ouvert.

❗ Remarque : L'intersection infinie d'ouverts n'est pas forcément un ouvert : $\bigcap_{n=1}^{\infty}]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[= \{0\}$ qui n'est pas un ouvert de \mathbb{R} .

Toutefois, pour un n_{max} donné l'intersection de n_{max} ouverts est un ouvert.

b) Fermé

Définition : $F \subset \mathbb{R}$ est un fermé de \mathbb{R} si : $\mathbb{R} \setminus F$ est un ouvert de \mathbb{R}

💡 Exemple :

- \mathbb{R} est un fermé de \mathbb{R} .
- $[a, b]$ est un fermé de \mathbb{R}
- Toute famille finie d'éléments de \mathbb{R} est un fermé de \mathbb{R} .
- L'ensemble vide est un fermé de \mathbb{R} .

❗ Remarque : \mathbb{Q} n'est ni ouvert ni fermé dans \mathbb{R} .

Propriété : Opérations sur les fermés (admise)

- L'union finie de fermés est un fermé.
- L'intersection quelconque de fermés est un fermé.

Théorème : Caractérisation séquentielle des fermés

$F \subset \mathbb{R}$ fermé \Leftrightarrow toute suite (u_n) d'éléments de F qui converge dans \mathbb{R} a sa limite dans F .

Preuve:

\Rightarrow / Supposons F fermé, on a $\mathbb{R} \setminus F$ ouvert.

Par l'absurde, on suppose qu'il existe une suite (u_n) d'éléments de F qui converge vers $l \in \mathbb{R} \setminus F$.

Comme $\mathbb{R} \setminus F$ est un ouvert, $\exists \varepsilon > 0,]l - \varepsilon, l + \varepsilon[\subset \mathbb{R} \setminus F$.

Par convergence de (u_n) , $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\varepsilon, |u_n - l| < \varepsilon \Rightarrow u_n \in]l - \varepsilon, l + \varepsilon[\subset \mathbb{R} \setminus F$ ce qui est absurde car (u_n) est une suite d'éléments de F .

\Leftarrow / On raisonne par contraposée.

Si $\mathbb{R} \setminus F$ n'est pas un ouvert, $\exists l \in \mathbb{R} \setminus F$ tel que $\forall r > 0,]l - r, l + r[\cap F \neq \emptyset$ car $\mathbb{R} \setminus F$ est au voisinage de l .

Supposons qu'il existe une suite (u_n) d'éléments de F .

En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in]l - \frac{1}{n}, l + \frac{1}{n}[\cap F \Rightarrow u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l$ et $(u_n) \in F$.

Remarque : Ce théorème est utile pour montrer qu'on a un ensemble fermé.

Définition : Soit $A \subset \mathbb{R}$.

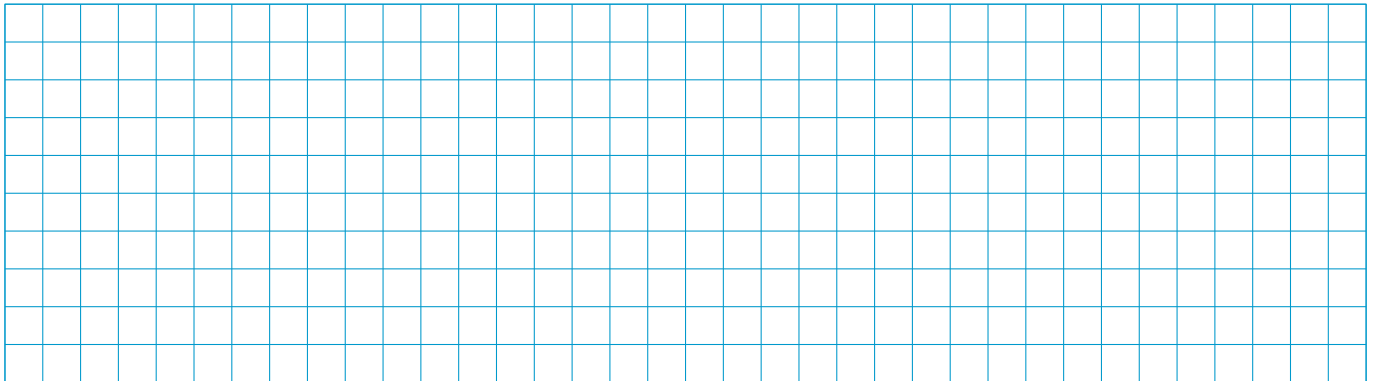
On définit l'adhérence de A , notée \overline{A} , comme suit : $\overline{A} = \bigcap_{F \text{ fermé}, A \subset F} F$.

C'est le plus petit fermé contenant A .

Lemme :

Soit $A \subset \mathbb{R}$.

$x \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap A \neq \emptyset$.

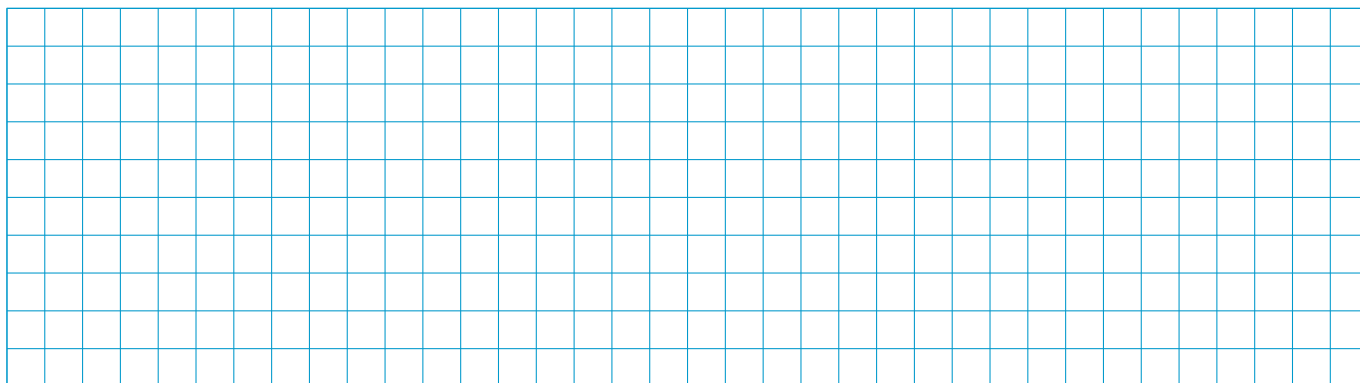
Preuve:**Théorème :**

Soit $A \subset \mathbb{R}$.

Alors $\overline{A} = \{x \in \mathbb{R}, \exists (u_n) \text{ suite d'éléments de } A, u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x\}$.

Remarque : Autrement dit, l'adhérence de A est l'ensemble des limites de suites d'éléments de A .

Preuve:



B Complétude

Définition : $F \subset \mathbb{R}$ est complet si toute suite de Cauchy d'éléments de F converge dans F .

💡 **Exemple :** \mathbb{R} est complet.

Théorème : Caractérisation des parties complètes de \mathbb{R}

$F \subset \mathbb{R}$ est complet $\Leftrightarrow F$ est fermé.

Preuve:

