Chapitre 2 : Formes linéaires et dualité

I Formes linéaires et hyperplan

Rappel : E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Remarque : On note $dim_{\mathbb{K}}(E)$ la dimension de E en tant qu'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. C'est utile, car par exemple $dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$ mais $dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$.

Définition : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
On appelle **forme linéaire** sur E toute application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

On appelle l'espace dual de E et on note E^* l'ensemble des formes linéaires sur E :

$$E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$$

Remarque : Si $\varphi \in E^*$ et $x \in E$, on peut noter $\varphi(x) = \langle \varphi, x \rangle$.

Vocabulaire : On appelle $\langle , \rangle$ le crochet de dualité.

Exemple : $E = \mathbb{R}^3$.
On pose $f(x, y, z) = 3x + 2y - z$. Alors $f \in E^*$.

Proposition :

L'image d'un élément de E^* est $\mathbb{K}$ ou $\{0\}$ et $dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}) = 1$.

$Im(f) = \{0\} \Leftrightarrow f = 0.$

Preuve : Appliquer le théorème du rang.

Définition : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
On appelle **hyperplan** de E le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E.

Proposition :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit H un sous-espace vectoriel de E.
H est un hyperplan de $E \Leftrightarrow \exists x_0 \in E \setminus \{0\}$ tel que $E = H \oplus Vect(x_0)$.

De plus, si $dim(E) = n$, H est un hyperplan de $E \Leftrightarrow dim(H) = n - 1$.

Remarque : Le prof a noté $\mathbb{K}x_0$ au lieu de $Vect(x_0)$.

Note de rédaction : On pourrait avoir aussi : $\forall x \in E \setminus H, E = H \oplus Vect(x)$.

Démonstration :
Supposons que H est un hyperplan de E.
Par définition, il existe $f \in E^* \setminus \{0\}$ tel que $H = Ker(f)$.

Soit $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) \neq 0$. En particulier, $f(x_0) \neq 0$ (car f est non nulle).
Montrons que $E = H \oplus Vect(x_0)$.

Soit $x \in H \cup Vect(x_0)$.
Comme $x \in Vect(x_0)$, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $x = x_0 * \lambda$.
Or $x \in H \Rightarrow 0 = f(x) = f(x_0 * \lambda) = \lambda f(x_0)$.
Comme $f(x_0) \neq 0$, on en déduit que $\lambda = 0$ et donc $x = 0$ et $H \cap Vect(x_0) = \{0\}$.

Montrons que $E = H + Vect(x_0)$.
Soit $x \in E$.
On a $x = \underbrace{x - \frac{f(x)}{f(x_0)}x_0}_{\in H} + \underbrace{\frac{f(x)}{f(x_0)}x_0}_{\in Vect(x_0)}$.
Donc $E = H + Vect(x_0)$ et finalement $E = H \oplus Vect(x_0)$.

Réciproquement, supposons qu'il existe $x_0 \in E \setminus \{0\}$ tel que $E = H \oplus Vect(x_0)$.
Soit p la projection sur $Vect(x_0)$ parallèlement à H. *(ie. pour $x \in E$, $p(x)$ est l'unique élément λx_0 dans la décomposition $x = h + \lambda x_0$ avec $h \in H$ et $\lambda \in \mathbb{K}$).*
Pour $x \in E$, on note $\lambda(x) \in \mathbb{K}$ tel que $p(x) = \lambda(x)x_0$.
On a $\lambda : E \to \mathbb{K} \in E^*$ (il suffit de montrer que λ est linéaire).
De plus, $\lambda(x_0) = 1$ par définition donc $\lambda \in E^* \setminus \{0\}$ et $\forall h \in H, \lambda(h) = 0$ (car $p(h) = 0$).
Doc $H = Ker(\lambda)$, c'est-à-dire que H est un hyperplan de E. $\square$

Proposition :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soient $f, g \in E^*$.

$$ker(f) = ker(g) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}, g = \lambda f$$

(ie. f et g sont proportionnelles).

Démonstration :
Comme f et g sont non nulles, $ker(f) = ker(g)$ est un hyperplan de E.
Donc E s'écrit comme $E = H \oplus Vect(x_0)$ avec $H = ker(f) = ker(g)$ et $x_0 \in E \setminus \{0\}$.

En particulier, $x_0 \notin ker(f)$ et $x_0 \notin ker(g)$. (car sinon $E = ker(f)$ ou $E = ker(g)$ et donc $f = 0$ ou $g = 0$).

Donc posons $\lambda = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$.
Montrons que $f = \lambda g$.
Soit $x \in E$.
On écrit $x = h + \mu x_0$ avec $h \in H$ et $\mu \in \mathbb{K}$.
Alors $f(x) = f(h + \mu x_0) = f(h) + \mu f(x_0) = \mu f(x_0)$ (car $h \in H = ker(f)$).
Et de même $g(x) = g(h + \mu x_0) = g(h) + \mu g(x_0) = \mu g(x_0) = \mu \frac{f(x_0)}{\lambda}$.

Donc $f = \lambda g$. $\square$

II Bases duales

A Définition et exemples

Proposition : Dimension de l'espace dual *(admis)*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Alors $dim(E^*) = dim_{\mathbb{K}}(E) \cdot dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}) = n \cdot 1 = n$.

Définition : Soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E.
On appelle $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ la base duale de E définie par :

$$\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\},\ \langle e_i^*, e_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

De manière équivalente, si $x \in E$ s'écrit $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$ (coordonnées de x dans la base $(e_1, \dots, e_n)$), alors : $\langle e_i^*, x\rangle = x_i$. (car $\langle e_i^*, \sum_{j=1}^{n} x_j e_j\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \langle e_i^*, e_j\rangle = x_i$)

Ou encore $x = \sum_{j=1}^{n} \langle e_j^*, x\rangle e_j$.

Preuve de pourquoi est-ce une base :

Montrons que $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ est une base de E^*.
Comme il y a n vecteurs dans cette famille, il suffit de montrer que cette famille est libre.

Soit $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i^* = 0_{E^*}$.
Montrons que tous les λ_i sont nuls.

On applique en e_j l'application linéaire $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i^*$:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i^*\right)(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle e_i^*, e_j\rangle = \lambda_j = 0$$

Donc la famille est libre et c'est bien une base de E^*. $\square$

Exemple : Dans $\mathbb{R}^n$, soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique.
Notons $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ sa base duale (canonique).
On a : $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \langle e_i^*, (x_1, \dots, x_n)\rangle = x_i$.
C'est à dire, $e_i^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$.

Remarque : C'est un fait général, $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ est la base de E^* telle que chaque e_i^* extrait la i-ième coordonnée dans la base $(e_1, \dots, e_n)$.

B Représentation matricielle

Proposition : Couplage en base et lien avec les matrices *(admis)*

Soit E un espace vectoriel de dimension n sur un corps $\mathbb{K}$. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ sa base duale.

Soit $x \in E$ et $\varphi \in E^*$ écrits sous la forme

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \qquad \text{et} \qquad \varphi = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i^*.$$

Alors

$$\langle \varphi, x\rangle = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i.$$

De plus, si l'on pose

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

on obtient

$$\langle \varphi, x\rangle = {}^tY\, X.$$

Démonstration :

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ sa base duale.
Soit $x \in E$ et $\varphi \in E^*$.
On écrit $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $\varphi = \sum_{i=1}^n y_i e_i^*$.

Alors : $\langle \varphi, x\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n y_i e_i^*, \sum_{j=1}^n x_j e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n y_i \langle e_i^*, \sum_{j=1}^n x_j e_j\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n y_i x_j \langle e_i^*, e_j\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n y_i x_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^n y_i x_i$.

Autrement dit, si on pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, on a :

$$\langle \varphi, x\rangle = {}^tYX$$

□

C Pratique : Calcul de bases duales

Définition : On appelle **matrice de passage de** B **vers** C la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de la base C dans la base B.
On la note $P_{B\to C}$.

Rappel : A est la matrice de passage de B à B' si $e'_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot e_i$.

Rappel : On a la relation suivante par rapport aux coordonnées : $X_B = P_{B\to C} X_C$.

Proposition : Relation entre matrices de passage

On a $({}^tP_{B_C^*\to B^*})P_{B_C\to B} = I_n$ et donc $P_{B_C^*\to B^*} = ({}^tP_{B_C\to B})^{-1}$.

Avec les notations de la démonstration : ${}^tPA = I_n$ *c'est-à-dire* $P = ({}^tA)^{-1}$.

Démonstration :
Soit $B = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$ et $B_C = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
Soit $B^* = (u_1^*, u_2^*, \dots, u_n^*)$ la base duale de $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ et $B_C^*(e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ la base duale de $(e_1, e_2, \dots, e_n)$.

Notons A la matrice des coefficients de la base $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ dans la base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$.
On écrit $u_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ pour $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.
Alors A est la matrice de passage de la base B_C à la base B.
On note également P la matrice de passage de la base B_C^* à la base B^*.
ie $u_i^* = \sum_{j=1}^n p_{ji} e_j^*$ pour $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. ($= (p_{1i}, p_{2i}, \dots, p_{ni})$ dans la base canonique de $(\mathbb{R}^n)^*$).

Question : peut-on calculer P à partir de A ?
$\delta_i j = \langle u_i^*, u_j\rangle$ (par définition de la base duale). $= \langle \sum_{k=1}^n p_{ki} e_k^*, \sum_{l=1}^n a_{lj} e_l\rangle = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n p_{ki} a_{lj} \langle e_k^*, e_l\rangle = \sum_{k=1}^n p_{ki} a_{kj}$.

Donc la matrice I_n est égale à la matrice produit ${}^tPA$.
Donc ${}^tPA = I_n$ c'est-à-dire $P = ({}^tA)^{-1}$. □

Exemple : Soit $u_1 = {}^t(1\ 1)$ et $u_2 = {}^t(-1\ 2)$.
La matrice de passage de la base canonique à (u_1, u_2) est $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Donc la matrice de passage de la base duale canonique à la base duale de (u_1, u_2) est $P = {}^t(A^{-1}) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Donc $u_1^* = \frac{1}{3}(2e_1^* + e_2^*)$ et $u_2^* = \frac{1}{3}(-e_1^* + e_2^*)$. Donc $\langle u_1^*, {}^t(xy)\rangle = \frac{2x+y}{3}$ et $\langle u_2^*, {}^t(xy)\rangle = \frac{-x+y}{3}$.

III Bases antéduales

Définition : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.
Soit f une base de E^*.
Une **base antéduale** notée e de E est telle que $e^* = f$.

Théorème :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.
Soit $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ une base de E^*.
Il existe une unique base antéduale de f.

Lemme de séparation :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.
On a que $\forall \varphi \in E^*, \langle \varphi, x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0$.

En particulier, soit $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ une base de E^* et $x \in E$. Alors, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \langle f_i, x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0$.

Démonstration du lemme de séparation :
On suppose que $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \langle f_i, x\rangle = 0$.
Comme f base de E^*, on a $\forall \varphi \in E^*, \langle \varphi, x\rangle = 0$.
Supposons par l'absurde que $x \neq 0$.
Soit H un supplémentaire de $Vect(x)$ dans E.
Alors $E = H \oplus Vect(x)$ et H est un hyperplan de E (*ie* $dim(H) = n - 1$).
$\exists \varphi \in E^* \setminus \{0\}$ tel que $H = Ker(\varphi)$.

Comme $E = H \oplus Vect(x)$, $x \notin H$ donc $\langle \varphi, x\rangle \neq 0$.
Contradiction. Donc $x = 0$. $\square$

Démonstration du théorème :

Unicité :
Soient $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ et $e' = (e_1', e_2', \ldots, e_n')$ deux bases antéduales de f.
Montrons que $e = e'$.

On a $e^* = (e')^* = f$.
En particulier, $f_i(e_j) = \delta_{ij} = f_i(e_j')$ pour tous $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
Soit $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
On a $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}, f_i(e_j - e_j') = 0$.
Donc par le lemme de séparation, $e_j - e_j' = 0$ c'est-à-dire $e_j = e_j'$.

Existence :
Notons $E^{**} = (E^*)^*$ (l'espace bidual de E).
Soit $J : E \to E^{**}$ l'application définie par : $J\colon x \mapsto \underbrace{(\varphi \mapsto \langle \varphi, x\rangle)}_{ev_x \in E^{**}}$.

J est linéaire, montrons qu'elle est injective.

Soit $x \in ker(J)$, donc $ev_x = 0_{E^{**}}$.
Alors $\forall \varphi \in E^*, \langle \varphi, x\rangle = 0$.
Donc par le lemme de séparation, $x = 0$.
Donc $ker(J) = \{0\}$ et J est injective.

Comme $dim(E) = dim(E^{**}) = n < +\infty$ et que J est injective, J est un isomorphisme *(théorème du rang)*. On pose $e_i = J^{-1}(f_i^*)$ où $\underbrace{(f_1^*, f_2^*, \dots, f_n^*)}_{\text{base de } E^{**}}$ est la base duale de $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$.

Montrons que $e^* = f$.

Soit $1 \leq i, j \leq n$.
On a $\langle f_i, e_j \rangle = ev_{e_j}(f_i) = \langle J(e_j), f_i \rangle = \langle J(J^{-1}(f_j^*)), f_i \rangle = \langle f_j^*, f_i \rangle = \delta_{ij}$.

Donc f est la base duale de e, *i.e.* $e^* = f$. $\square$

Remarque : On a déjà vu qu'en pratique on peut calculer des bases duales. On suppose qu'on connaît B (base de E) et B^* (base de E^*) et on veut calculer la base duale de B'. On note $A = P_{B \to B'}$ la matrice de passage de B à B'. Et on note $P = P_{B^* \to (B')^*}$ la matrice de passage de B^* à $(B')^*$.
On a vu que $P = ({}^tA)^{-1}$.

Une autre preuve de l'existence des bases antéduales est la suivante :
Étant donné une base f de E^*, on veut construire sa base antéduale e.

Soit B une base quelconque de E et B^* sa base duale.
Soit P la matrice de passage de B^* à f.
On pose $e_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} \cdot \varepsilon_i$ où ε_i sont les vecteurs de la base B et $C = (c_{ij})$ la matrice de passage de B à e.

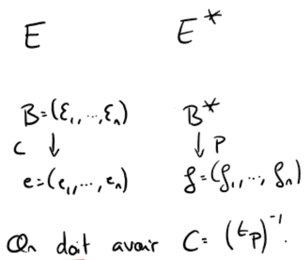

Figure 1: Construction d'une base antéduale.

Synthèse : Montrons que $\langle f_j, e_i \rangle = \delta_{ij}$.
On a $f_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} \cdot \varepsilon_i^*$ où ε_i^* sont les vecteurs de la base B^*.
De plus, on a $e_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} \cdot \varepsilon_i$.

D'où : $\langle f_j, e_i \rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} p_{kj} \cdot \varepsilon_k^*, \sum_{l=1}^{n} c_{li} \cdot \varepsilon_l \rangle = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} p_{kj} c_{li} \langle \varepsilon_k^*, \varepsilon_l \rangle = \sum_{k=1}^{n} p_{kj} c_{ki} = \delta_{ij}$ car ${}^tPC = I_n$.
Donc e est bien la base antéduale de f. Box

Exemple : On pose $f_1(x, y) = 3x - y$ et $f_2(x, y) = x + 2y$.
Déterminons la base antéduale de (f_1, f_2) dans $\mathbb{R}^2$.

On pose $A := P_{B_C^* \to f} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ la matrice dont les colonnes sont les coordonnées de f_1 et f_2 dans la base duale canonique. (ie. la matrice de passage de la base duale canonique à la base (f_1, f_2)).

On a : $A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
On a que $({}^tA)^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Donc la base antéduale de (f_1, f_2) est donnée par : $(\begin{pmatrix} 2/7 \\ -1/7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/7 \\ 3/7 \end{pmatrix})$.

IV Application aux systèmes linéaires

Remarque : Le système linéaire suivant est une droite en tant qu'intersection d'hyperplans qui sont des noyaux de formes linéaires indépendantes :

$$(d_1) : \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$$

Proposition :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.
Soient $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k)$ des formes linéaires sur E.
Soit $V = \bigcap_{i=1}^{k} Ker(\varphi_i)$.

Si $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k)$ est une famille libre dans E^*, alors $dim(V) = n - k$.
Plus généralement, si $k' = dim(Vect(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k))$, alors $dim(V) = n - k'$.

Démonstration :
On suppose que $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k)$ est une famille libre dans E^*.
Par le théorème de la base incomplète, soit $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k, \varphi_{k+1}, \dots, \varphi_n)$ une base de E^*.

On pose $F : E \to \mathbb{K}^n, x \mapsto \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \\ \vdots \\ \varphi_n(x) \end{pmatrix}$.

Montrons que F est un isomorphisme.
Il suffit de montrer que F est injective (car $dim(E) = dim(\mathbb{K}^n) = n < +\infty$).

Soit $x \in E$ tel que $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \varphi_i(x) = 0$.
Par le lemme de séparation, $x = 0$.
Donc $ker(F) = \{0\}$ et F est injective.

Donc F est un isomorphisme.

On a $V = \bigcap_{i=1}^{k} Ker(\varphi_i) = F^{-1}(\{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \mid \forall 1 \leq i \leq k, y_i = 0\}) = F^{-1}(Vect(\underbrace{e_{k+1}, e_{k+2}, \dots, e_n}_{\text{de dim } n-k}))$ où $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
Comme F est un isomorphisme, $dim(V) = dim(Vect(e_{k+1}, e_{k+2}, \dots, e_n)) = n - k$.

Pour le cas général.
Soit $(\varphi'_1, \varphi'_2, \dots, \varphi'_{k'})$ une base de $Vect(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k)$.
Alors $V = \bigcap_{i=1}^{k} Ker(\varphi_i) = \bigcap_{j=1}^{k'} Ker(\varphi'_j)$.
En effet, $x \in V \Leftrightarrow \forall i \in \{1, 2, \dots, k\}, \varphi_i(x) = 0 \Leftrightarrow \forall \varphi \in Vect(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k), \varphi(x) = 0 \Leftrightarrow \forall \varphi \in \{\varphi'_1, \varphi'_2, \dots, \varphi'_{k'}\}, \varphi(x) = 0 \Leftrightarrow \forall i \in \{1, 2, \dots, k'\}, \varphi'_i(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \bigcap_{i=1}^{k'} Ker(\varphi'_i)$.

En appliquant la preuve précédente, on a $dim(V) = n - k'$. □

Exemple : Reprenons (d_1).
On a $E = \mathbb{R}^3$ et $n = 3$.
On note $\varphi_1(x, y, z) = x + 2y - z$ et $\varphi_2(x, y, z) = 2x - y + z$.
On a $V = Ker(\varphi_1) \cap Ker(\varphi_2)$.
On admet que (φ_1, φ_2) est une famille libre dans E^*.

Donc $dim(V) = 3 - 2 = 1$.
Donc (d_1) est une droite dans $\mathbb{R}^3$.

Application : On peut montrer plus facilement que le rang des colonnes est égal au rang des lignes en utilisant les formes linéaires.

Théorème : Rang des lignes et des colonnes *(admis)*

Soit $M \in M_{m,n}(\mathbb{K})$.
Soit p le rang de la famille des vecteurs lignes de M et soit q le rang de la famille des vecteurs colonnes de M.
Alors $p = q$.

Démonstration :
Posons $E = \mathbb{R}^n$.
Soit $(f_1, \dots, f_m)$ les formes linéaires sur E qui correspondent aux vecteurs lignes de M.
On pose $F : E \to \mathbb{R}^m, x \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix}$.
Posons $V = ker(F) = \bigcap_{i=1}^{m} Ker(f_i)$.
On a par définition $q = rg(F)$.
La proposition précédente donne $dim(V) = n - dim(Vect(f_1, \dots, f_m)) = n - p$.

Par le théorème du rang, on a $dim(E) = dim(ker(F)) + rg(F)$, c'est-à-dire $n = dim(V) + q$.

Donc $n = n - p + q$ et finalement $p = q$. $\square$

V Application linéaire transposée

Définition : Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
On appelle **application linéaire transposée** de f notée ${}^t f$ ou f^* l'application linéaire $f^t : F^* \to E^*$ définie par :

$$\forall \varphi \in F^*, f^t(\varphi) = \varphi \circ f$$

De manière équivalente, f^* est l'application qui vérifie $\forall x \in E, \forall \varphi \in F^*, \langle f^*(\varphi), x \rangle = \langle \varphi, f(x) \rangle$.

Proposition :

Soient E, F, G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.
Alors :

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$$

et : $id_E^* = id_{E^*}$.

Démonstration :
On rappelle que $(g \circ f)^* : G^* \to E^*$.
Soit $\varphi \in G^*$.
On a : $(g \circ f)^*(\varphi) = \varphi \circ (g \circ f) = (\varphi \circ g) \circ f = f^*(\varphi \circ g) = f^*(g^*(\varphi)) = (f^* \circ g^*)(\varphi)$.
Donc $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

Pour l'identité, soit $\varphi \in E^*$.
On a : $id_E^*(\varphi) = \varphi \circ id_E = \varphi = id_{E^*}(\varphi)$.
Donc $id_E^* = id_{E^*}$. $\square$

Proposition :

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
Soient e une base de E et f une base de F et soient e^* et f^* leurs bases duales respectives.
Soit $g \in \mathcal{L}(E, F)$ (alors $g^* \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$).
Alors :

$$Mat_{f^*,e^*}(g^*) = {}^t(Mat_{e,f}(g))$$