Chapitre 5 : Fonctions de plusieurs variables

Cadre de travail :

- $p, q \in \mathbb{N}^*$
- U ouvert de $\mathbb{R}^n$
- $f : U \to \mathbb{R}^m$
- $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$ sont des espaces vectoriels qui peuvent être normés, donc des espaces métriques. Ainsi, toutes les propriétés et des notions des espaces métriques s'appliquent.

I Continuité

Rappel : Une suite (X_n) de composante $\begin{pmatrix} x_1^{(n)} \\ x_2^{(n)} \\ \vdots \\ x_p^{(n)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$ tend vers $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$ si et seulement si chacune de ses composantes converge, c'est-à-dire :

$$\forall i \in \{1, \dots, p\}, \quad x_i^{(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x_i$$

Proposition :

Soit $f : U \to \mathbb{R}^q$ et $a \in U$. On écrit $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_q(x)), x \in U$.
On a : f est continue en $a \Leftrightarrow \forall i = 1, \dots, q, f_i(x)$ est continue en a.

Remarque : $\forall i = 1, \dots, q$, les fonctions $x \mapsto f_i(x)$ sont à valeur dans $\mathbb{R}$, donc on peut utiliser les résultats de la continuité pour les fonctions à valeur réelle.

Vocabulaire : On appelle les f_i les **fonctions composantes** de f.

Preuve :
On rappelle que f est continue en a ssi par toute suite (x_n) qui converge vers a, la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(a)$.
On a donc $f(x_n) = (f_1(x_n), f_2(x_n), \dots, f_q(x_n)) \to f(a) = (f_1(a), f_2(a), \dots, f_q(a))$ ssi $\forall i = 1, \dots, q, f_i(x_n) \to f_i(a)$.
Donc f est continue en a ssi $\forall i = 1, \dots, q, f_i$ est continue en a.

Pour comprendre la continuité, il suffit de se restreindre aux fonctions $f : U \to \mathbb{R}$.

Exemple :

1. $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$ et $f(0,0) = 0$.
   On a $U = \mathbb{R}^2$, $p = 2$ et $q = 1$.
   Montrons que f est continue.

   f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ car c'est un quotient de fonctions continues (polynômes) dont le dénominateur ne s'annule pas.
   Montrons que f est continue en $(0,0)$.
   On doit montrer que si $(x,y) \to (0,0)$, alors $f(x,y) \to 0$.
   $|f(x,y)| = \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| = \frac{x^2|y|}{x^2+y^2} \leq \frac{x^2|y|}{y^2} = |y|$.
   Donc si $(x,y) \to (0,0)$, alors $|y| \to 0$ et donc $f(x,y) \to 0$.
   Ainsi, f est continue en $(0,0)$.
   Donc f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$.
   f peut-elle être continue sur $\mathbb{R}^2$?
   Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, f est continue (même raison).
   Problème en $(0,0)$.
   Montrons que $f(x,y)$ n'a pas de limite en $(0,0)$.
   Trouvons $(x_n, y_n) \to (0,0)$ et $(a_n, b_n) \to (0,0)$ tels que $f(x_n, y_n)$ et $f(a_n, b_n)$ aient des limites différentes.
   Prenons $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$. On a : $f(x_n, y_n) = \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2}$.
   De plus, prenons $(a_n, b_n) = \left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right)$. On a : $f(a_n, b_n) = \frac{\frac{2}{n} \cdot \frac{1}{n}}{\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{\frac{2}{n^2}}{\frac{4}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \frac{2}{5}$.
   Ainsi, $f(x_n, y_n) \to \frac{1}{2}$ et $f(a_n, b_n) \to \frac{2}{5}$.
   Donc f n'a pas de limite en $(0,0)$ et donc f n'est pas continue en $(0,0)$. Ainsi, f n'est pas continue sur $\mathbb{R}^2$.