



# Chapitre 2 : Séries numériques


## I Séries et sommes d'une série

**Définition :** Soit  $(u_n)$  une suite dans  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .  
On considère  $\forall N \in \mathbb{N}, S_N = \sum_{n=0}^N u_n \in \mathbb{K}$ .  
On a donc une suite  $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$  associée à la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Définition :** On appelle **série de terme général**  $u_n$  que l'on note  $\sum_{n \geq 0} u_n$  la suite  $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$ .

 **Note de rédaction :** Les deux définitions précédentes gagneraient à être fusionnées.


 **Vocabulaire :** On dit que  $(S_N)$  est la suite des sommes partielles de la série.

 **Remarque :**  $(S_N)$  correspond aux  $N + 1$  premiers termes de la suite.

## A Correspondance suite - série

**Raisonnement :** Par définition une série est une suite. Expliquons comment une suite peut-être vue comme une série.

Si  $(u_n)$  est une suite, considérons la série de terme général  $v_n = u_n - u_{n-1} \forall n \in \mathbb{N}$  (avec la convention  $v_0 = u_0$ ).  
Ainsi,  $u_n = \sum_{k=0}^n v_k$ .


 **Remarque :** Cependant la série associée à une suite  $(u_n)$  va s'étudier en tant que telle (que série) grâce à  $u_n$ .

## B Opérations sur les séries

**Propriété : Opérations sur les séries (admise)**

Soient  $\sum_{n \geq 0} u_n$  et  $\sum_{n \geq 0} v_n$  deux séries.  
Alors, pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$  :

- **Somme :**  $\sum_{n \geq 0} (u_n + v_n) = \sum_{n \geq 0} u_n + \sum_{n \geq 0} v_n$  définie comme  $(S_N + S'_N)$
- **Produit par un scalaire :**  $\sum_{n \geq 0} \lambda u_n = \lambda \sum_{n \geq 0} u_n$  définie comme  $(\lambda S_N)$

 **Exemple :** Si  $u_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$ , alors  $\sum_{n \geq 0} u_n = 0$  est la série nulle.

## C Troncature d'une série

**Définition :** Si  $(u_n)$  est une suite définie pour  $n \geq n_0 \mid n_0 \in \mathbb{N}$ . On peut considérer la série  $\sum_{n \geq n_0} u_n$  où  $u_0 = u_1 = \dots = u_{n_0-1} = 0$ , ou bien on peut écrire  $\sum_{n \geq n_0} u_n$ .  
Si  $\sum_{n \geq 0} u_n$  est une série de terme général  $u_n$ , une **troncature** de la série est  $\sum_{n \geq n_0} u_n$ . C'est la suite  $(S_N)$  où  $S_N = \sum_{n=n_0}^N u_n$ .

 **Note de rédaction :** Cette définition pourrait être synthétisée.

 **Exemple :**

- la série nulle
- la série géométrique de raison  $q \in \mathbb{C}^*$  :  $\sum_{n \geq 0} q^n$  de terme général  $q^n$  ;
- la série harmonique :  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  de terme général  $\frac{1}{n}$  ;
- la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

## II Convergence d'une série

### A Définitions et nature d'une série

**Définition :** Soit  $\sum_{n \geq 0} u_n$  une série.

On dit que la série converge, si la suite  $(S_N)$  converge, et on note  $S$  la limite de  $S_N$ .  
S s'appelle la somme de la série.

Dans ce cas, on écrit :  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = S \in \mathbb{R}$  (c'est une "somme infinie", un objet-limite).

💬 **Vocabulaire :** Si  $(S_N)$  diverge, alors on dit que la série  $\sum_{n \geq 0} u_n$  diverge.

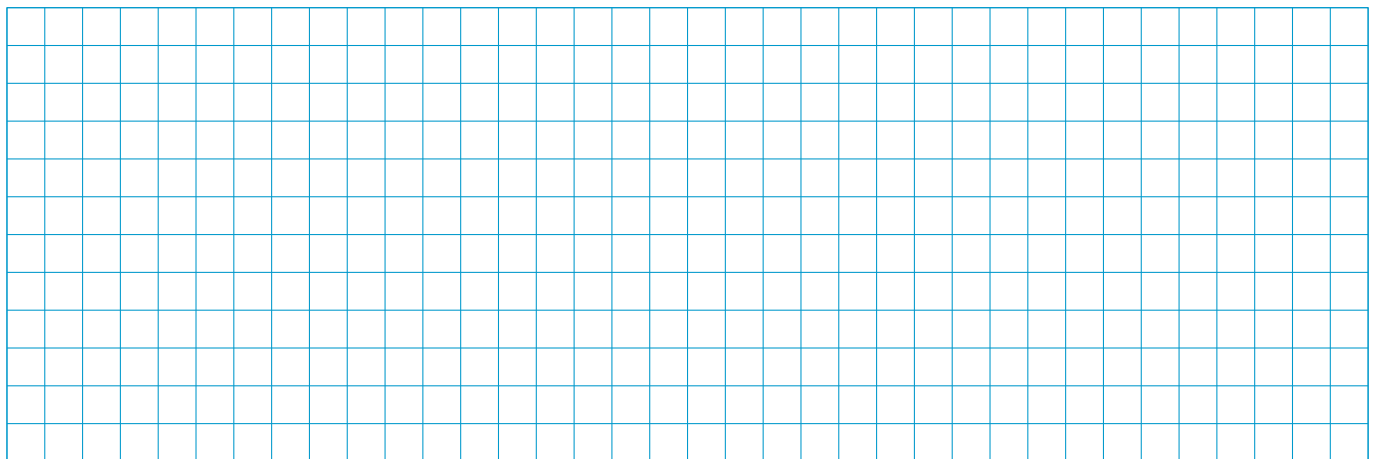
✗ **Attention** ✗ Si  $S$  n'existe pas, alors on écrit **jamais** la notation avec  $\infty$

💬 **Vocabulaire :** La convergence ou la divergence d'une série s'appelle la **nature** de la série.

**Proposition : Stabilité de la limite par troncature** (admis)

La nature d'une série n'est pas modifiée par troncature.

**Preuve:**



💬 **Note de rédaction :** Indication : les premiers termes n'influencent pas la convergence.

### B Quelques applications...

💡 **Exemple :**

- Si  $(u_n)$  est nulle à partir d'un rang  $N_0$  alors la série  $\sum_{n \geq 0} u_n$  est convergente, et  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{N_0} u_n$ .

- Série géométrique  $\sum_{n \geq 0} q^n$  :

On considère la suite des sommes partielles  $(S_N)$  où  $S_N = \sum_{n=0}^N q^n = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}$  avec  $q \neq 1$ . On a plusieurs cas :

- Si  $|q| < 1$ ,  $q^{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$  donc  $S_N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{1-q} \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ .  
La série  $\sum_{n \geq 0} q^n$  converge et on arrive à trouver S !
- Si  $|q| > 1$ , alors  $\sum_{n \geq 0} q^n$  diverge.
- Si  $q = 1$ , alors  $\sum_{n \geq 0} q^n = N + 1 \Rightarrow \sum_{n \geq 0} q^n$  diverge.

- $\sum_{n \geq 1} \log(1 + 1/n)$  :

On a  $\forall N \geq 1$ ,  $S_N = \sum_{n=1}^N \log(\frac{n+1}{n}) = \log(N+1)$  (télescopage).

Or  $\log(N+1) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} +\infty$ , donc la série  $\sum_{n \geq 1} \log(1 + 1/n)$  diverge.


- $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$  :

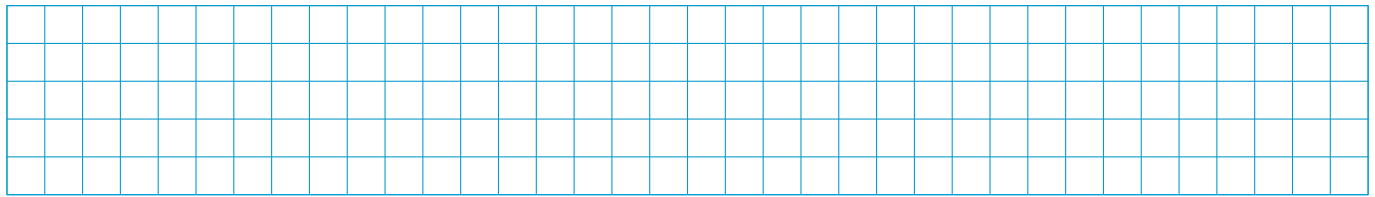
On a  $\forall N \geq 1$ ,  $S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^N (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{N+1}$  (télescopage).

Or  $1 - \frac{1}{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1$ , donc la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$  converge et  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ .

- Important, démontré plus tard :  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  (série harmonique) diverge.
- $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$  converge. (idée : montrer que  $S_N$  converge en montrant  $A_N = S_{2N}$  et  $B_N = S_{2N+1}$  sont adjacentes)

✗ **Attention** ✗ Ces six exemples sont à connaître et comprendre parfaitement.

 **Application** : Étudier la convergence de la série géométrique pour  $|q| = 1$  et  $q = -1$  ( $q \in \mathbb{C}$ ).



## C Propriétés des séries convergentes

### Propriété : Convergence de la combinaison linéaire (admise)

Soient  $\sum_{n \geq 0} u_n$  et  $\sum_{n \geq 0} v_n$  deux séries convergentes.

Alors  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$  :  $\sum_{n \geq 0} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n \geq 0} u_n + \mu \sum_{n \geq 0} v_n$ , cette série converge (vers la combinaison linéaire des limites).

 **Remarque** : En d'autres termes, la somme de deux séries convergentes est une série  $\sum_{n \geq 0} (u_n + v_n)$  qui converge.

#### Preuve :

La suite de sommes partielles associée à  $\sum_{n \geq 0} (u_n + v_n)$  est  $\sum_{n=0}^N (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^N u_n + \sum_{n=0}^N v_n$

Comme  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$  et  $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$  sont convergentes, on a  $\sum_{n=0}^{\infty} (u_n + v_n)$  est convergente et sa limite est  $\sum_{n=0}^{\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \sum_{n=0}^{\infty} v_n$ .

 **Exemple** : Retour : Divergence de la série harmonique  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$

But : minorer  $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \forall N \in \mathbb{N}$ .

$$n \leq t \in \mathbb{R} \leq n+1 \Rightarrow \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{n}$$

Intégrons entre  $n$  et  $n+1$  :  $\int_n^{n+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{n}$

Donc en sommant :  $\sum_{n=1}^N \int_n^{n+1} \frac{1}{t} dt \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$

donc par Chasles :  $\int_1^{N+1} \frac{1}{t} dt \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \forall n \in \mathbb{N}$

Or  $\int_1^{N+1} \frac{1}{t} dt = \ln(N+1) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} +\infty$  donc  $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} +\infty$ .

Donc la série harmonique diverge.

**Propriété : Divergence de la combinaison linéaire** (*admise*)

Soient  $\sum_{n \geq 0} u_n$  une série convergente et  $\sum_{n \geq 0} v_n$  une série divergente.  
Alors  $\sum_{n \geq 0} (u_n + v_n)$  diverge.

**Preuve :**

$\sum_{n=0}^N (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^N u_n + \sum_{n=0}^N v_n$   
Comme  $\sum_{n=0}^N u_n$  est convergente et  $\sum_{n=0}^N v_n$  est divergente, on a  $\sum_{n=0}^N (u_n + v_n)$  est divergente.

✗ **Attention** ✗ Quand on considère deux séries divergentes, la situation est à étudier au cas par cas.

💡 **Exemple :** Considérons  $\sum_{n \geq 1} u_n$  avec  $u_n = 1 \forall n \in \mathbb{N}$  et  $\sum_{n \geq 1} v_n$  avec  $v_n = -1 \forall n \in \mathbb{N}$ .

D'une part  $\sum_{n \geq 1} u_n$  diverge, et  $\sum_{n \geq 1} v_n$  diverge aussi.

Mais  $\sum_{n \geq 1} (u_n + v_n) = \sum_{n \geq 1} 0 = 0$  converge.

Mais si on considère  $v_n = u_n$ , alors  $\sum_{n \geq 1} (u_n + v_n) = \sum_{n \geq 1} 2u_n$  diverge.

✗ **Attention** ✗ **Source d'erreur classique :** Si  $\sum_{n \geq 0} u_n + v_n$  est convergente, *a priori* on ne peut pas écrire que  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n + v_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \sum_{n=0}^{\infty} v_n$  car les séries de termes généraux  $u_n$  et  $v_n$  peuvent être divergentes (il faut donc vérifier leur convergence).

**Proposition :** (*admis*)

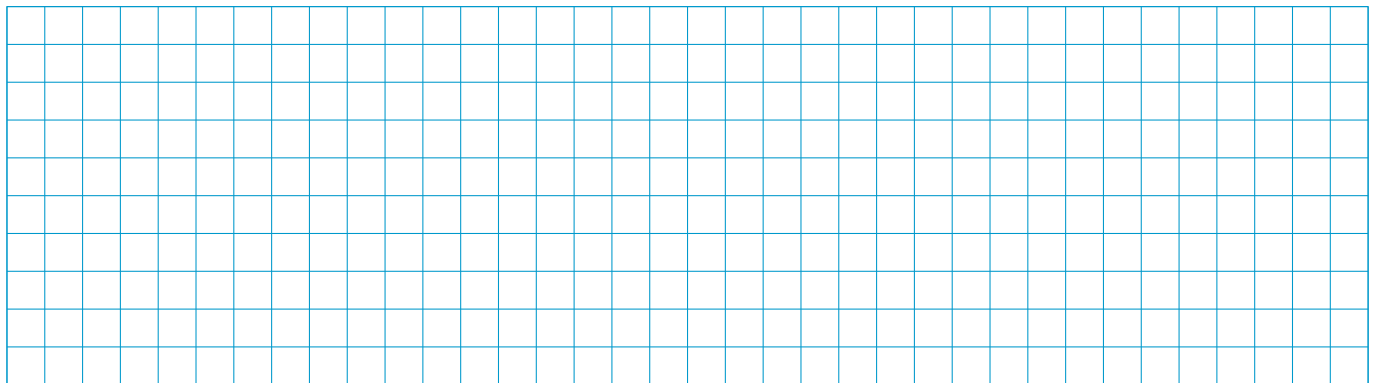
Soit  $\sum_{n \geq 0} u_n$  une série numérique où  $u_n \in \mathbb{C} \forall n \in \mathbb{N}$ .

On a  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge  $\Leftrightarrow$  les suites  $(\operatorname{Re}(u_n))$  et  $(\operatorname{Im}(u_n))$  sont convergentes.

🛠 **Application :** Montrer la proposition précédente.

**Indication pour la preuve:**

écrire  $u_n = \operatorname{Re}(u_n) + i\operatorname{Im}(u_n)$  et utiliser la propriété sur les combinaisons linéaires.

**Théorème : Lien entre convergence et limite des termes**

Si  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge, alors  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

**Preuve:**

Considérons  $(S_N)$  la suite des sommes partielles associée à  $\sum_{n \geq 0} u_n$ .

On a  $S_{N+1} - S_N = u_{N+1} \forall N \in \mathbb{N}$ .

Or  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge  $\Rightarrow (S_N)$  converge. Donc  $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N - \lim_{N \rightarrow \infty} S_{N+1} = 0 \Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} u_N = 0$ .

✗ **Attention** ✗ La réciproque est fausse. Par exemple la série harmonique  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  diverge mais  $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

💬 **Vocabulaire :** Si  $u_n \not\rightarrow 0$ , on dit que la série  $\sum_{n \geq 0} u_n$  **diverge grossièrement**.

## D Reste d'une série

**Définition :** On suppose que  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge. On note  $S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$  sa somme et  $(S_N)$  la suite des sommes partielles.

Le **reste** de la série au rang  $N$  est  $R_N = S - S_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} u_n$ .

### Proposition : Comportement du reste

Si  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge, alors  $R_N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$ .

**Preuve:**

Par définition,  $R_N = S - S_N$ . Or  $S_N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} S$ . Donc  $R_N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$ .

## III Série absolument convergente (ACV)

### A Critère de Cauchy pour les séries numériques

Ce qui a été fait dans le **Chapitre 1 - Suites de Cauchy** sur les suites réelles reste valable si on considère des suites complexes.

**Définition :** On dit que la série  $\sum_{n \geq 0} u_n$  vérifie le **critère de Cauchy** si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall N \geq N_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}, \left| \sum_{k=N}^{N+p} u_k \right| < \varepsilon$$

### Proposition : Convergence et critère de Cauchy

$\sum_{n \geq 0} u_n$  vérifie le critère de Cauchy  $\Leftrightarrow \sum_{n \geq 0} u_n$  converge.

**Preuve: (par équivalence)**

$\sum_{n \geq 0} u_n$  converge  $\Leftrightarrow (S_N)$  converge  $\Leftrightarrow (S_N)$  est une suite de Cauchy (car l'espace est complet)  $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall N \geq N_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}, |S_{N+p} - S_N| < \varepsilon \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall N \geq N_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}, \left| \sum_{n=N}^{N+p} u_n \right| < \varepsilon$

**Remarque :** Autre preuve de la divergence de la série harmonique :

Soit  $\varepsilon = 1/2$ . Pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , on peut choisir  $p = N$  et on a :  $\left| \sum_{k=N}^{2N} \frac{1}{k} \right| \geq \sum_{k=N}^{2N} \frac{1}{2N} = \frac{1}{2}$ .  
Donc la série harmonique ne vérifie pas le critère de Cauchy, donc elle diverge.

### B Définitions et propriétés

**Définition :** On dit que la série  $\sum_{n \geq 0} u_n$  est absolument convergente (ACV) si la série  $\sum_{n \geq 0} |u_n|$  converge.

### Théorème : Série ACV et convergence

Série ACV  $\Rightarrow$  série convergente et  $\left| \sum_{n=0}^{\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$ .

**Preuve:**

Soit  $\sum_{n \geq 0} u_n$  une série ACV.

Donc  $\sum_{n \geq 0} |u_n|$  converge.

Donc  $\sum_{n \geq 0} |u_n|$  vérifie le critère de Cauchy :  $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall N \geq N_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}, \left| \sum_{k=N}^{N+p} |u_k| \right| < \varepsilon$

Donc  $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall N \geq N_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}, \left| \sum_{k=N}^{N+p} u_k \right| \leq \sum_{k=N}^{N+p} |u_k| < \varepsilon$

Ainsi  $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall N \geq N_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}, \left| \sum_{k=N}^{N+p} u_k \right| < \varepsilon$

Donc  $\sum_{n \geq 0} u_n$  vérifie le critère de Cauchy.

Donc  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge et on a  $|\sum_{n=0}^N u_n| \leq \sum_{n=0}^N |u_n| \implies |\sum_{n=0}^{\infty} u_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$ .

✗ **Attention** ✗ La réciproque est fautive.

💡 **Exemple** : La série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  est convergente, mais elle n'est pas absolument convergente car  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  diverge.

## IV Convergence absolue d'une série

💬 **Note de rédaction** : Correspond à II. dans le plan de cours du prof.

### A Séries à termes positifs

#### Théorème :

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$ .

Alors la série  $\sum_{n \geq 0} u_n$  ( $u_n \geq 0$ ) converge  $\Leftrightarrow$  la suite  $(S_N)$  des sommes partielles est bornée.

#### Preuve:

En effet,  $S_{N+1} - S_N = u_{N+1} \geq 0$  donc  $(S_N)$  est croissante (à termes positifs).

Ainsi  $(S_N)$  converge  $\Leftrightarrow (S_N)$  est bornée (*théorème de convergence monotone*).

Or  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge  $\Leftrightarrow (S_N)$  converge.

Donc  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge  $\Leftrightarrow (S_N)$  est bornée.

📌 **Remarque** : Si  $(S_N)$  n'est pas bornée, alors  $S_N \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} +\infty$ . On tolère la notation  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = +\infty$ .

#### 📌 Application : Application du théorème.

Soit  $\sum_{n \geq 0} u_n$  et  $\sum_{n \geq 0} v_n$  deux séries à termes positifs.

Montrons que la série  $\sum_{n \geq 0} \sqrt{u_n v_n}$  converge.

En effet, utilisons l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

$$\forall N \in \mathbb{N}, \sum_{n=0}^N \sqrt{u_n v_n} \leq \sqrt{\sum_{n=0}^N u_n} \sqrt{\sum_{n=0}^N v_n}.$$

Or les deux termes de droite sont bornés, donc  $\forall N \in \mathbb{N}, \sum_{n=0}^N \sqrt{u_n v_n}$  est bornée.

Donc  $\sum_{n \geq 0} \sqrt{u_n v_n}$  converge.

#### Autre preuve (sans Cauchy-Schwarz) :

$$(a - b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2} \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Donc } \sum_{n=0}^N \sqrt{u_n v_n} \leq \frac{1}{2} (\sum_{n=0}^N u_n + \sum_{n=0}^N v_n).$$

Or les deux termes de droite sont bornés, donc  $\forall N \in \mathbb{N}, \sum_{n=0}^N \sqrt{u_n v_n}$  est bornée.

Donc  $\sum_{n \geq 0} \sqrt{u_n v_n}$  converge.

💬 **Note de rédaction** : On a pas encore abordé Cauchy-Schwarz.

#### Proposition :

Soient  $\sum_{n \geq 0} u_n$  et  $\sum_{n \geq 0} v_n$  deux séries convergentes (*pas forcément à termes positifs mais réels*).

Si  $u_n \leq v_n \forall n \in \mathbb{N}$ , alors  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} v_n$ .

#### Preuve:

On considère la série à termes positifs  $\sum_{n \geq 0} (v_n - u_n)$ . C'est une série convergente.

On a  $\sum_{n=0}^{\infty} (v_n - u_n) \geq 0$ .

Or  $\sum_{n \geq 0} v_n$  et  $\sum_{n \geq 0} u_n$  sont convergentes.

Donc on peut écrire :  $\sum_{n=0}^{\infty} v_n - \sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} (v_n - u_n) \geq 0$ .  
 Donc  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} v_n$ .

## B Critère de comparaison

Tout cela est fait pour des séries à termes positifs.

### Théorème : Critère de comparaison ("Hyper important")

Soit  $\sum_{n \geq 0} u_n$  et  $\sum_{n \geq 0} v_n$  deux séries à termes positifs.

Supposons que  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq v_n$ .

Alors :

- Si  $\sum_{n \geq 0} v_n$  converge, alors  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge.
- Si  $\sum_{n \geq 0} u_n$  diverge, alors  $\sum_{n \geq 0} v_n$  diverge.

**Preuve:**

- On a  $\forall N \in \mathbb{N}, 0 \leq \sum_{n=0}^N u_n \leq \sum_{n=0}^N v_n$ .  
 Or  $\sum_{n \geq 0} v_n$  converge, donc la suite des sommes partielles  $(\sum_{n=0}^N v_n)$  est bornée.  
 Donc la suite des sommes partielles  $(\sum_{n=0}^N u_n)$  est bornée et donc  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge.
- Comme  $\sum_{n \geq 0} u_n$  diverge, la suite des sommes partielles  $(\sum_{n=0}^N u_n)$  n'est pas bornée.  
 Et comme  $\forall N \in \mathbb{N}, 0 \leq \sum_{n=0}^N u_n \leq \sum_{n=0}^N v_n$ , la suite des sommes partielles  $(\sum_{n=0}^N v_n)$  n'est pas bornée.  
 Et donc par le théorème de convergence des séries à termes positifs on a que  $\sum_{n \geq 0} v_n$  diverge.

### Corollaire :

Soient  $\sum_{n \geq 0} u_n$  et  $\sum_{n \geq 0} v_n$  deux séries à termes positifs.

$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$ .

Alors :

- Si  $\sum_{n \geq 0} v_n$  converge, alors  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge.
- Si  $\sum_{n \geq 0} u_n$  diverge, alors  $\sum_{n \geq 0} v_n$  diverge.

**Preuve:**

Pour  $n \geq n_0$ ,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \times \frac{u_n}{u_{n-1}} \times \dots \times \frac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n} \times \frac{v_n}{v_{n-1}} \times \dots \times \frac{v_{n_0+1}}{v_{n_0}}$$

$$\Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_{n_0}} \leq \frac{v_{n+1}}{v_{n_0}} \Rightarrow u_{n+1} \leq k v_{n+1} \text{ avec } k = \frac{u_{n_0}}{v_{n_0}} \in \mathbb{R}_+^*$$

- On suppose que  $\sum_{n \geq 0} v_n$  converge.  
 Donc  $\sum_{n \geq 0} k v_n$  converge.  
 Donc par le théorème précédent, comme  $\forall n \geq n_0, 0 \leq u_n \leq k v_n$ , on a que  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge.
- (non démontré en cours)

 **Application :** applications aux séries absolument convergentes

### Proposition :

Soit  $\sum_{n \geq 0} u_n$  une série à termes réels.

Définissons  $u_n^+ = \max(u_n, 0) \geq 0$  et  $u_n^- = \max(-u_n, 0) \geq 0$ .

On a  $\sum_{n \geq 0} u_n$  est ACV.

$\sum_{n \geq 0} |u_n|$  converge  $\Leftrightarrow \sum_{n \geq 0} u_n^+$  et  $\sum_{n \geq 0} u_n^-$  convergent.

**Preuve:**

$\Rightarrow$  On a  $\forall n \in \mathbb{N} \ 0 \leq u_n^+ \leq |u_n|$  et  $0 \leq u_n^- \leq |u_n|$ .

Donc par le théorème de comparaison,  $\sum_{n \geq 0} u_n^+$  et  $\sum_{n \geq 0} u_n^-$  convergent.


$\Leftarrow$  On remarque que  $|u_n| = u_n^+ + u_n^-$ .

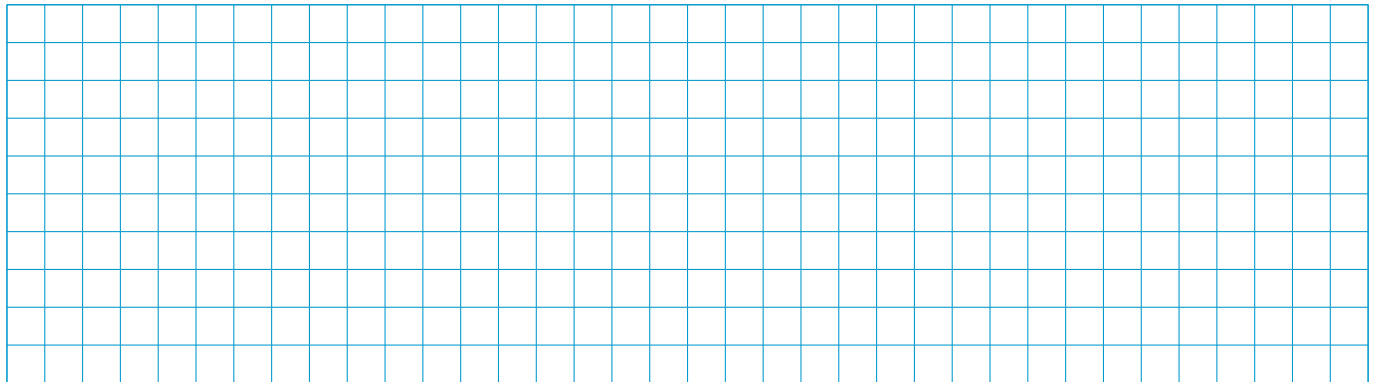
Si  $\sum_{n \geq 0} u_n^+$  et  $\sum_{n \geq 0} u_n^-$  convergent, alors  $\sum_{n \geq 0} |u_n|$  converge  $\Rightarrow \sum_{n \geq 0} u_n$  est ACV.


**Proposition :**

Soit  $\sum_{n \geq 0} u_n$  une série à termes complexes.

On a  $\sum_{n \geq 0} u_n$  est ACV  $\Leftrightarrow \sum_{n \geq 0} \operatorname{Re}(u_n)$  et  $\sum_{n \geq 0} \operatorname{Im}(u_n)$  sont ACV.

 **Application :** Montrer la proposition précédente.

**C Domination, convergence et équivalence**

 **Rappel :** Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites.

- $u_n = O(v_n)$  ssi  $\exists M > 0, |u_n| \leq M|v_n|$  au voisinage de l'infini ( $n$  assez grand)  $\Leftrightarrow \left| \frac{u_n}{v_n} \right|$  est bornée.
- $u_n = o(v_n)$  ssi  $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ . ( $u_n$  est négligeable devant  $v_n$ )
- $u_n = o(v_n) \Rightarrow u_n = O(v_n)$
- $u_n \sim v_n$  ssi  $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$ . ( $u_n$  est équivalent à  $v_n$ )

**Proposition :** (admis)

Soient  $\sum_{n \geq 0} u_n$  et  $\sum_{n \geq 0} v_n$  deux séries à termes positifs.

On suppose  $u_n = O_{+\infty}(v_n)$ .

- Si  $\sum_{n \geq 0} v_n$  converge, alors  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge.
- Si  $\sum_{n \geq 0} u_n$  diverge, alors  $\sum_{n \geq 0} v_n$  diverge.

**Indication pour la preuve:**

Il suffit de remarquer que  $\sum_{n \geq 0} u_n$  et  $\sum_{n \geq 0} Mv_n$  sont de même nature ; et  $M$  est tel que  $u_n \leq Mv_n$

**✗ Attention ✗** Si on sait que  $\sum_{n \geq 0} v_n$  alors pour montrer que  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge, il suffit de montrer que  $u_n = o_{+\infty}(v_n)$ .

(en réalité il faudrait montrer grand O, mais  $o \Rightarrow O$  donc c'est plus fort et plus simple à montrer)

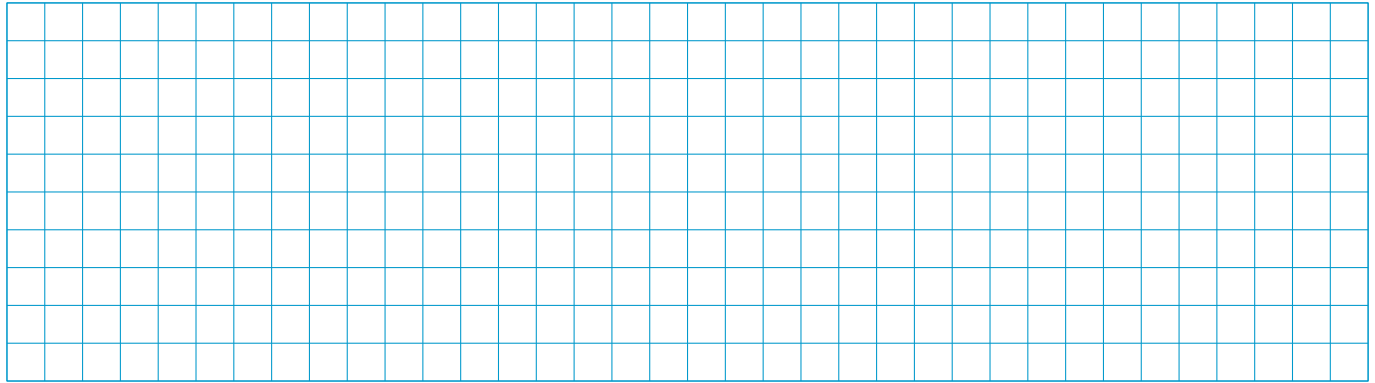


**Corollaire :** (admis)

Soit  $\sum_{n \geq 0} u_n$  une série à terme général dans  $\mathbb{C}$  et soit  $\sum_{n \geq 0} v_n$  une série à terme général positif tel que  $\sum_{n \geq 0} v_n$  converge.

Si  $u_n = O_{+\infty}(v_n)$ , alors  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge absolument (ACV).

 **Application :** Montrer le corollaire précédent.

**Théorème : "Hyper<sup>2</sup> important"**


Soit  $\sum_{n \geq 0} u_n$  une série à terme général dans  $\mathbb{C}$  et soit  $\sum_{n \geq 0} v_n$  une série à termes positifs.

On suppose  $u_n \sim_{+\infty} v_n$ .

(on pourrait mettre une constante)

On a :

- Si  $\sum_{n \geq 0} v_n$  converge alors  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge absolument (ACV).
- Si  $\sum_{n \geq 0} v_n$  diverge alors  $\sum_{n \geq 0} u_n$  diverge.

 **Remarque :** Si  $u_n \geq 0$  alors  $\sum_{n \geq 0} u_n$  et  $\sum_{n \geq 0} v_n$  sont de même nature.

## V Séries de références

### A Série de Riemann

**Théorème :**

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Soit la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ , dite **série de Riemann**.

La série converge  $\Leftrightarrow \alpha > 1$ .

**Preuve:**

On a vu que pour  $\alpha = 1$ , la série diverge (série harmonique).

- Si  $\alpha \leq 1$ ,  $\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n}$ . Donc par le théorème de comparaison,  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$  diverge.

- $\Leftarrow$  / Supposons  $\alpha > 1$ .

Considérons la série  $\sum_{n \geq 1} u_n$  de terme général  $u_n = \frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$ .

**Observation 1 :**  $\forall N \in \mathbb{N}^*$ ,  $\sum_{n=1}^N u_n = 1 - \frac{1}{(N+1)^{\alpha-1}}$  donc  $\sum_{n \geq 1} u_n$  converge (car  $\alpha - 1 > 0$ ). (téléscopage)

**Observation 2 :** Déterminons un équivalent de  $u_n$ .

$$u_n = \frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} = \frac{1}{n^{\alpha-1}} \left( 1 - \left( \frac{n}{n+1} \right)^{\alpha-1} \right).$$

On a  $\left( \frac{n}{n+1} \right)^{\alpha-1} = \left( \frac{n+1-1}{n+1} \right)^{\alpha-1} = \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right)^{\alpha-1} = 1 - \frac{\alpha-1}{n} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$  (DL ordre 1).

$$\Rightarrow 1 - \left( \frac{n}{n+1} \right)^{\alpha-1} = \frac{\alpha-1}{n} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right) \sim_{+\infty} \frac{\alpha-1}{n}.$$

$$\text{Donc } u_n \sim_{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha-1}} \times \frac{\alpha-1}{n} = \frac{\alpha-1}{n^\alpha} > 0.$$

On a deux séries à termes positifs  $\sum_{n \geq 1} u_n$  et  $\sum_{n \geq 1} \frac{\alpha-1}{n^\alpha}$  qui sont de même nature car équivalentes ( $u_n \sim_{+\infty} \frac{\alpha-1}{n^\alpha}$ ).

On en déduit que  $\sum_{n \geq 1} \frac{\alpha-1}{n^\alpha}$  converge pour  $\alpha > 1$  par le théorème sur les équivalents.

De plus la nature d'une série n'est pas modifiée quand le terme général est multiplié par un scalaire non nul.

Donc  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$  est de même nature que  $\sum_{n \geq 1} \frac{\alpha-1}{n^\alpha}$ .

Donc  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$  converge.

✗ **Attention** ✗ Démonstration probablement en question de cours au partiel/CC :)

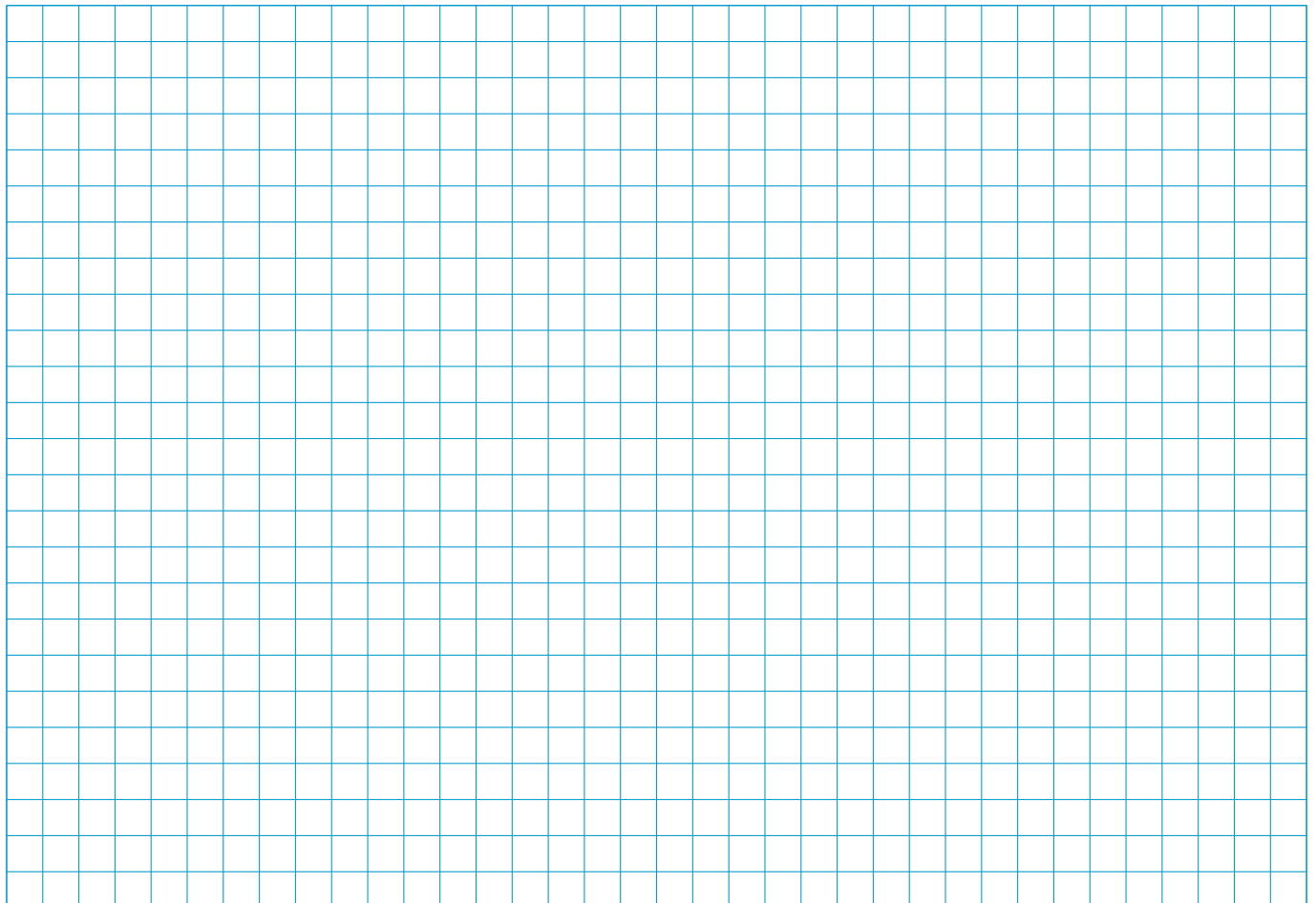
### Règles de comparaisons avec les séries de Riemann :


Soient  $\sum u_n$  une série de terme général dans  $\mathbb{C}$ .

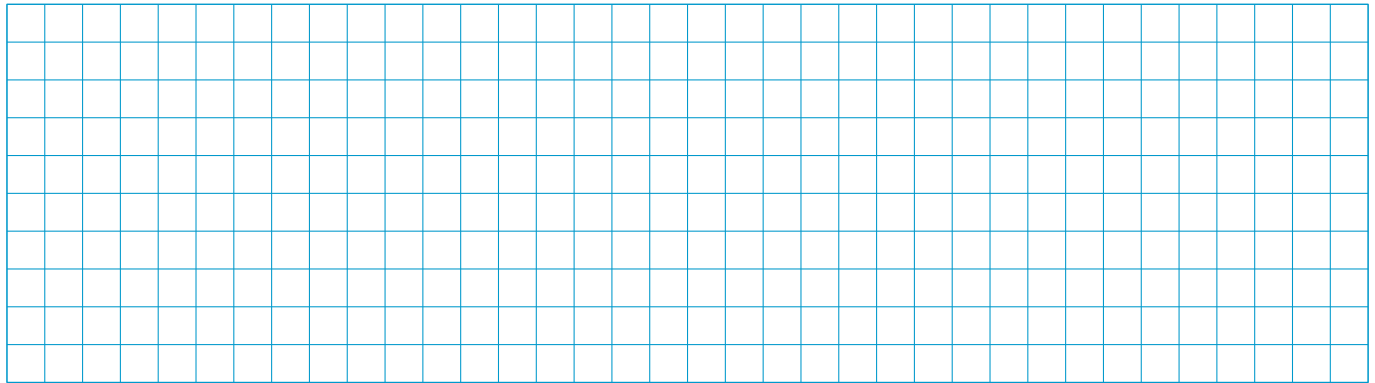
1. Si  $u_n \sim_{+\infty} k \frac{1}{n^\alpha}$  avec  $k \in \mathbb{C}^*$ .
  - Si  $\alpha > 1$  alors  $\sum_{n \geq 1} u_n$  converge absolument (ACV).
  - Si  $\alpha \leq 1$  alors  $\sum_{n \geq 1} u_n$  diverge.
2. Si  $\exists \alpha > 1, n^\alpha |u_n|$  bornée (i.e.  $u_n = O(\frac{1}{n^\alpha})$ ), alors  $\sum u_n$  converge absolument (ACV).  
*il suffit de montrer que  $u_n = o(\frac{1}{n^\alpha})$*
3. On se restreint à  $u_n \in \mathbb{R}$ . Si  $\exists \alpha \leq 1, n^\alpha u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ , alors  $\sum u_n$  diverge.

**Remarque :** Penser  $u_n$  à terme réel positif et  $k \in \mathbb{R}_+^*$  pour la compréhension. (suffisant pour la compréhension et la plupart des exercices)

**Application :** Montrer les règles de comparaison avec les séries de Riemann.



 **Application :** Etudier la nature de la série de terme général  $u_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt[3]{n^3 + an^2 + bn + c}$  avec  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .



## B Série géométrique

 **Rappel :** La série  $\sum_{n \geq 0} q^n$  converge  $\Leftrightarrow |q| < 1$  et dans ce cas  $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ .

**Preuve:**

$\Leftarrow$  Si  $|q| < 1$ , alors  $S_N = \sum_{n=0}^N q^n = \frac{1-q^{N+1}}{1-q} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \frac{1}{1-q}$ .

$\Rightarrow$  Si  $|q| \geq 1$ , alors  $q^n \not\rightarrow 0$  donc la série diverge (grossièrement).

### Règle de Cauchy :

Soit  $\sum_{n \geq 0} u_n$  une série à terme général dans  $\mathbb{C}$ .

On suppose que  $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n|^{\frac{1}{n}} = l$  (existe et égale à  $l \in [0, +\infty]$ ,  $+\infty$  autorisé).

1. Si  $l < 1$ , alors  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge absolument (ACV).
2. Si  $l > 1$ , alors  $\sum_{n \geq 0} u_n$  diverge.
3. Si  $l = 1$ , on ne peut rien conclure.

 **Remarque :** Comprendre la règle précédente dans le cas réel, terme positif.

**Preuve:**

1. Si  $l < 1$ , prenons  $\varepsilon > 0$  tel que  $l + \varepsilon < 1$ .

Or  $|u_n|^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l$ , donc  $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n|^{\frac{1}{n}} \leq l + \varepsilon$ .

Donc  $|u_n| \leq (l + \varepsilon)^n$  pour  $n \geq N$ .

Or la série de terme général  $(l + \varepsilon)^n$  est une série géométrique de raison  $l + \varepsilon < 1$ , donc elle converge.


Donc  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge.

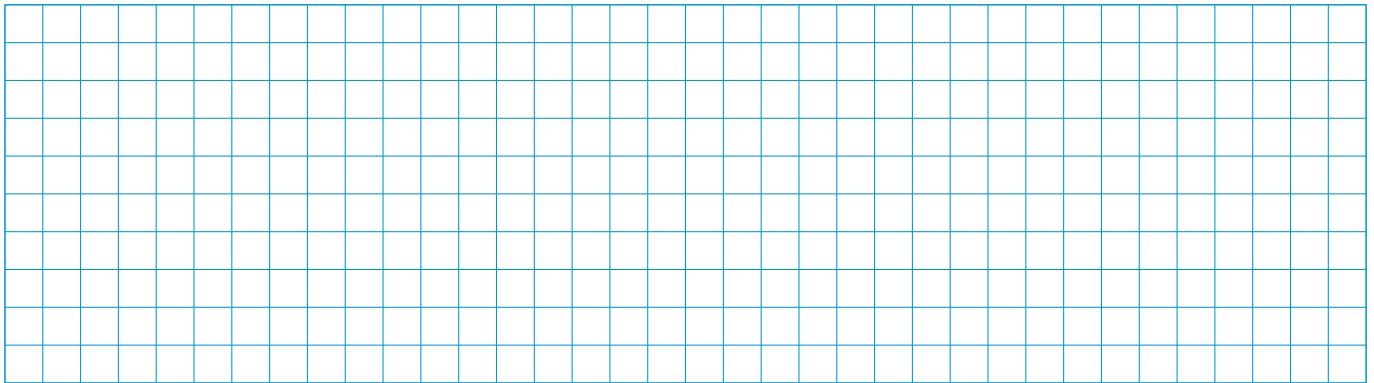
2. Laissez à la douce appréciation du lecteur.

3. Trouvons une série  $\sum_{n \geq 0} u_n$  où  $|u_n|^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$  et où on ne peut rien conclure sur la nature de la série.

Si on prend  $u_n = \frac{1}{n^\alpha} = e^{-\alpha \ln(n)}$ , on a bien  $u_n^{\frac{1}{n}} = e^{-\alpha \frac{\ln(n)}{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1 \forall \alpha$ .

Or on a convergence pour  $\alpha > 1$  et divergence pour  $\alpha \leq 1$ , on ne peut rien conclure.

 **Application :** Etudier la nature de la série de terme général  $u_n = \cosh\left(\frac{1}{n}\right)^{-n^3}$ .



### Règle de d'Alembert :


Soit  $\sum u_n$  une série à terme général dans  $\mathbb{C}$ .

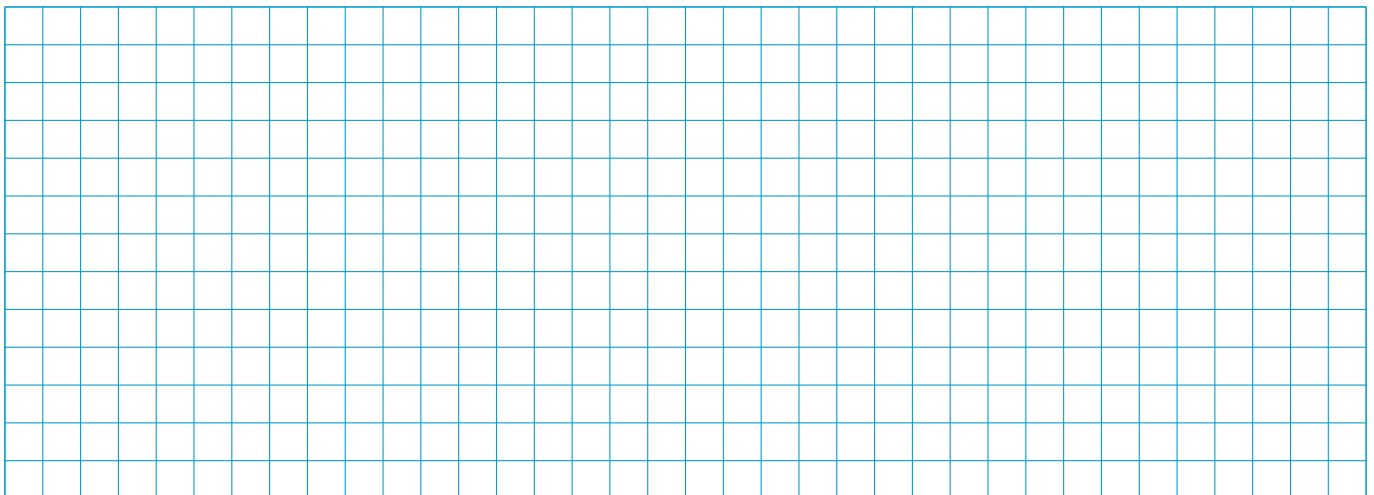
On suppose que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = l$  (existe et égale à  $l \in [0, +\infty]$ ,  $+\infty$  autorisé).

1. Si  $l < 1$ , alors  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge absolument (ACV).
2. Si  $l > 1$ , alors  $\sum_{n \geq 0} u_n$  diverge.
3. Si  $l = 1$ , on ne peut rien conclure.

### Preuve:

1. Si  $l < 1$ , prenons  $\varepsilon > 0$  tel que  $l + \varepsilon < 1$ .  
Or  $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l$ , donc  $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \leq l + \varepsilon$ .  
Posons  $q = l + \varepsilon < 1$ .  
Ainsi,  $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \leq \frac{q^{n+1}}{q^n}$  pour  $n \geq N$ .  
On a une comparaison du type  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ .  
On a vu que dans ce cas,  $\sum b_n$  converge  $\Rightarrow \sum a_n$  converge.  
Or  $\sum q^n$  converge (série géométrique de raison  $q < 1$ ) donc  $\sum u_n$  converge (ACV).
2. Comme  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = l > 1, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \geq 1 \Rightarrow |u_n|$  est minorée par  $n$  assez grand.  
Donc  $\sum u_n$  diverge.
3. Prendre  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ . On a bien  $\frac{(n+1)^\alpha}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$  et la nature dépend de  $\alpha$ .

 **Application :** Etudier la nature de la série de terme général  $u_n = \frac{n!}{n^n}$ .



🗣 **Note de rédaction** : On a évoqué en cours la formule de Stirling pour la culture, mais elle est hors programme :  $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ .

### Proposition : Comparaison des règles de d'Alembert et de Cauchy

Soit  $\sum u_n$  une série à terme général positif ou nul.

On suppose que  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l \in [0, +\infty]$ .

Alors  $u_n^{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l$ .

#### Preuve:

On suppose  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l, l > 0, l \neq +\infty$ .

On a  $\forall l_1, 0 < l_1 < l, \sum_{n \geq 0} \frac{l_1^n}{u_n}$  converge par la règle de d'Alembert.

En effet,  $\frac{l_1^{n+1}}{u_{n+1}} \times \frac{u_n}{l_1^n} = l_1 \times \frac{u_n}{u_{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{l_1}{l} < 1$ .

Par convergence de la série on a que  $\frac{l_1^n}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

À partir d'un certain rang,  $\frac{l_1^n}{u_n} \leq 1 \Rightarrow l_1^n \leq u_n \Rightarrow l_1 \leq u_n^{\frac{1}{n}}$ .

On a  $\forall l_2, 0 < l < l_2, \sum_{n \geq 0} \frac{u_n}{l_2^n}$  converge par la règle de d'Alembert.

À partir d'un certain rang (même argument que pour  $l_1$ ),  $u_n \leq l_2^n \Rightarrow u_n^{\frac{1}{n}} \leq l_2$ .

Donc  $l_1 \leq u_n^{\frac{1}{n}} \leq l_2, \forall l_1 < l < l_2$  pour un  $n$  assez grand.

On fait tendre  $n$  vers  $\infty$  puis  $l_1$  et  $l_2$  vers  $l$  et on en déduit que  $u_n^{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l$ .

✗ **Attention** ✗ La réciproque est fausse.

#### 💡 Exemple : Contre-exemple.

Soit  $0 < a < b$ . Posons :

$$u_n = \begin{cases} a^p b^p & \text{si } n = 2p \\ a^{p+1} b^p & \text{si } n = 2p + 1 \end{cases}$$

On a  $u_n^{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} ab$  (peu importe la parité de  $n$ ).

Mais  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  dépend de la parité de  $n$ .

📌 **Remarque** : Donc on préfère la règle de d'Alembert à celle de Cauchy. Mais si la règle d'Alembert ne donne rien, la règle de Cauchy ne donnera rien non plus.

## VI Séries semi-convergentes

💡 **Exemple** :  $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n}$ , on voit qu'elle n'est pas ACV, mais  $|\frac{e^{in\theta}}{n}| = \frac{1}{n} \forall \theta \in \mathbb{R}$ .

Mais on a pas les outils pour voir si elle est "seulement" convergente. *Idem* pour la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ .

Donc le but ici, c'est de trouver des critères de convergence pour des séries qui ne sont pas ACV.

### A Définitions et premières propriétés

**Définition** : Une série est dite **semi-convergente** (SCV) si elle est convergente mais pas absolument convergente.

📌 **Remarque** : On considère ici les séries à terme général  $u_n \in \mathbb{C}$  ou  $\mathbb{R}$  (on a pas  $u_n \geq 0$ ).

**Proposition : "étrange"**

Soit  $\sum_{n \geq 0} u_n$  une série à terme général dans  $\mathbb{R}$ .

On considère la série  $\sum_{n \geq 0} u_n^+$  et  $\sum_{n \geq 0} u_n^-$ .

On a  $\sum_{n \geq 0} u_n$  est SCV  $\Rightarrow \sum_{n \geq 0} u_n^+$  et  $\sum_{n \geq 0} u_n^-$  divergent.

**Preuve:**

On rappelle que  $u_n^+ = \max(u_n, 0)$  et  $u_n^- = \max(-u_n, 0)$  et donc  $u_n = u_n^+ - u_n^-$  (2) et  $|u_n| = u_n^+ + u_n^-$  (1).

- Si  $\sum_{n \geq 0} u_n^+$  et  $\sum_{n \geq 0} u_n^-$  convergent, alors  $\sum_{n \geq 0} u_n$  ACV par (1) : **absurde**.
- Si l'une des séries converge et l'autre diverge, alors  $\sum_{n \geq 0} u_n$  diverge par (2).
- Seule possibilité donc :  $\sum_{n \geq 0} u_n^+$  et  $\sum_{n \geq 0} u_n^-$  divergent.

**Proposition :**

Considérons  $\sum_{n \geq 0} u_n$  une série à terme général dans  $\mathbb{C}$ .

Alors on a :

$\sum_{n \geq 0} u_n$  est SCV  $\Leftrightarrow \sum_{n \geq 0} \operatorname{Re}(u_n)$  et  $\sum_{n \geq 0} \operatorname{Im}(u_n)$  sont CV et l'une d'entre elles est SCV.

**Preuve:**

$\Rightarrow$  / Si  $\sum_{n \geq 0} u_n$  est CV, alors  $\sum_{n=0}^N u_n = \sum_{n=0}^N \operatorname{Re}(u_n) + i \sum_{n=0}^N \operatorname{Im}(u_n)$ .

Donc on a la CV des séries  $\sum_{n \geq 0} \operatorname{Re}(u_n)$  et  $\sum_{n \geq 0} \operatorname{Im}(u_n)$ .

Montrons que l'une des deux séries n'est pas ACV.

En effet on a  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq |\operatorname{Re}(u_n)| + |\operatorname{Im}(u_n)|$  si  $\sum_{n \geq 0} |\operatorname{Re}(u_n)|$  et  $\sum_{n \geq 0} |\operatorname{Im}(u_n)|$  ACV.

$\Rightarrow$  une des deux séries n'est pas ACV.

$\Rightarrow$  une des deux séries est ACV.

$\Leftarrow$  / On a que  $\sum_{n \geq 0} \operatorname{Re}(u_n)$  et  $\sum_{n \geq 0} \operatorname{Im}(u_n)$  sont CV.


Donc  $\sum_{n \geq 0} u_n$  est CV.

Montrons que  $\sum_{n \geq 0} u_n$  est SCV.

On a :  $|\operatorname{Re}(u_n)| \leq |u_n|$  et  $|\operatorname{Im}(u_n)| \leq |u_n|, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Si  $\sum_{n \geq 0} u_n$  était ACV, alors  $\sum_{n \geq 0} \operatorname{Re}(u_n)$  et  $\sum_{n \geq 0} \operatorname{Im}(u_n)$  seraient ACV ce qui est contraire à l'hypothèse "l'une d'entre elles est SCV".

**B Critère d'Abel**


 **Application :** On veut donner un critère pour la convergence d'une série du type  $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n} = a_n b_n$  avec  $a_n = e^{in\theta}$  et  $b_n = \frac{1}{n}$ .

**Théorème : Critère d'Abel**

On considère la série  $\sum_{n \geq 0} u_n$  où  $\sum_{n \geq 0} u_n \in \mathbb{C}$ , avec  $u_n = a_n b_n$  tels quels :

1.  $(a_n)$  est **réelle, décroissante**, et  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .
2.  $(b_n)$  est **complexe** telle que  $B_N = \sum_{n=0}^N b_n$ , i.e.  $(B_N)$  est **bornée**.

Alors la série  $\sum_{n \geq 0} a_n b_n$  converge.

 **Rappel :** Une suite complexe est bornée :  $\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |z_n| \leq M$ , où  $|z_n| = \sqrt{\operatorname{Re}(z_n)^2 + \operatorname{Im}(z_n)^2}$ .

**Preuve:**

On va utiliser la "transformation d'Abel".

On a  $B_N = \sum_{n=0}^N b_n$ .

Alors  $B_k - B_{k-1} = b_k, \forall k \geq 1$  et  $B_0 = b_0$ .

On part de la somme partielle de la série :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^N a_k b_k &= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^N a_k (B_k - B_{k-1}) \\ &= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^N a_k B_k - \sum_{k=1}^N a_k B_{k-1} \\ &= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^N a_k B_k - \sum_{k=0}^{N-1} a_{k+1} B_k \\ &= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{N-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_N B_N - a_1 b_0 = \sum_{k=0}^N (a_k - a_{k+1}) B_k + a_N B_N \text{ avec } a_n \text{ tend vers } 0 \text{ et } B_n \text{ bornée} \end{aligned}$$

Etude de  $\sum_{k=0}^N (a_k - a_{k+1}) B_k$ , séries à termes dans  $\mathbb{C}$ .

Etudions donc l'ACV :

$$|a_k - a_{k+1} B_k| |a_k - a_{k+1}| |B_k| \leq (a_k - a_{k+1}) M \text{ car } |B_k| \leq M$$

Or la série  $\sum_{k=0}^N (a_k - a_{k+1}) M$  est de même nature que  $\sum_{k=0}^N a_k - a_{k+1}$  (car  $M$  est un scalaire non nul).

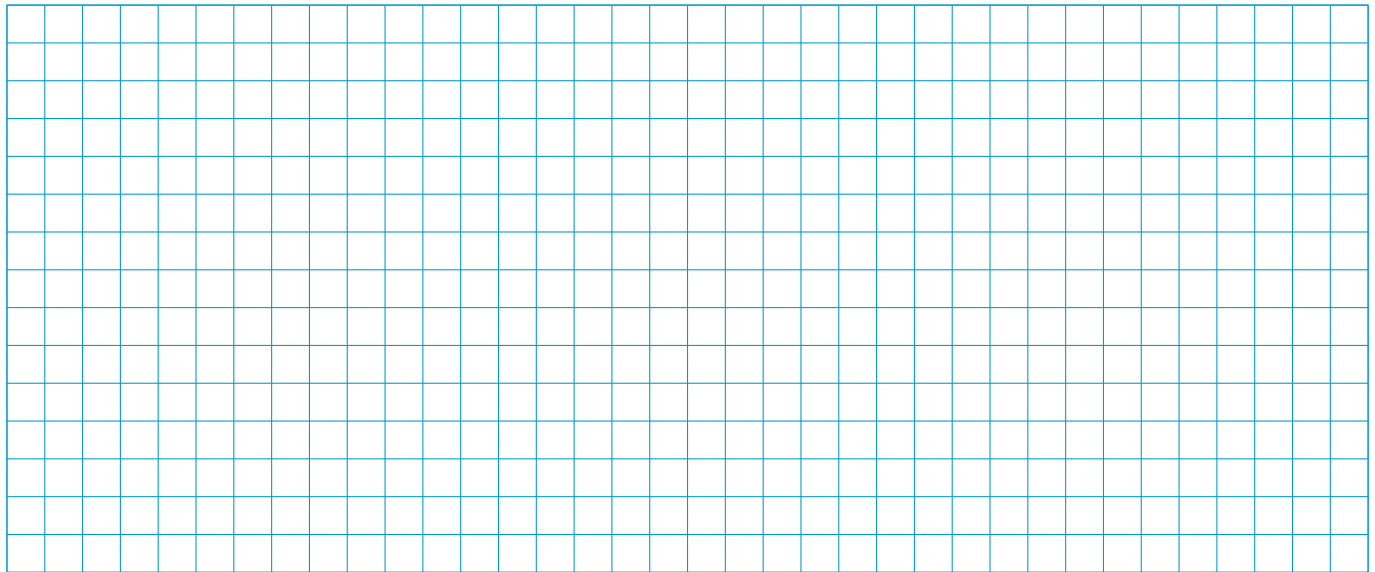
Et la CV de cette série télescopique est évidente.

**Note de rédaction :** Il y avait beaucoup d'indices et d'infos, j'attends la vérification de Laurent pour être sûr que c'est correct (j'ai un doute sur la fin).

**Application :** Pour  $\theta \neq 2\pi k, \sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n}$  converge par le critère d'Abel,  $a_n = \frac{1}{n}$  et  $b_n = e^{in\theta}$  et  $\sum_{n \geq 1} b_n = \frac{1 - e^{i(N+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}$  et  $|B_N| = \left| \frac{1 - e^{i(N+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} \right| \leq \frac{|1| + |e^{i(N+1)\theta}|}{|1 - e^{i\theta}|} = \frac{2}{|1 - e^{i\theta}|}$ .

Donc la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n}$  converge, mais pas ACV, donc elle est SCV.

**Application :** Etudier la convergence, l'absolue convergence et la semi-convergence de la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$  avec  $\theta \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}_+^*$ .



**Remarque :** Dans le critère d'Abel, comme  $(a_n)$  est décroissante et  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, a_n \geq 0$  (car  $a_n \in \mathbb{R}$ ).

## C Séries alternées

**Définition :** Une série  $\sum_{n \geq 0} u_n$  est dite **alternée** si  $u_n = (-1)^n a_n$  ou  $u_n = (-1)^{n+1} a_n$  avec  $a_n \geq 0$ .

**Exemple :**  $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n}, \sum_{n \geq 0} (-1)^n$  sont des séries alternées.

**Remarque :**  $(-1)^n \cdot u_n = (-1)^{2n} a_n = a_n$  ou  $u_n = -a_n \Rightarrow (-1)^n u_n$  est de signe constant

**Remarque :** Une définition équivalente est : une série est alternée si le signe de  $(-1)^n \cdot u_n$  est constant.

**Théorème : Critère spécial des séries alternées (CSSA)**

Soit  $\sum_{n \geq 0} u_n$  une série de terme général  $u_n = (-1)^n a_n$ , avec  $a_n \geq 0$ .

Si :

1.  $(a_n)$  est décroissante.
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

Alors la série  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge.