

# Chapitre 6 : Théorie spectrale

## I Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres

On se donne  $E$  un  $K$ -espace vectoriel et  $u \in End(E)$  un endomorphisme de  $E$ .

**Définition :** Soit  $\lambda \in K$ . On dit que  $\lambda$  est une **valeur propre (vp)** de  $u$  s'il existe un vecteur  $x \in E \setminus \{0_E\}$  tel que  $u(x) = \lambda x$ . Un tel vecteur  $x$  est appelé un **vecteur propre (vp)** associé à la valeur propre  $\lambda$  de  $u$ .

**Définition :** On note  $E_\lambda$  le **sous-espace propre** de  $u$  associé à la valeur propre  $\lambda$  :

$$E_\lambda = \{x \in E \mid u(x) = \lambda x\} = Ker(u - \lambda Id_E)$$

**Propriété :** (admise)

On a  $\lambda$  est une valeur propre de  $u$  si et seulement si  $E_\lambda \neq \{0_E\}$ .

Ce qui est vrai si et seulement si  $u - \lambda Id_E$  n'est pas inversible (autrement dit,  $\det(u - \lambda Id_E) = 0$ ).

**Vocabulaire :** On dit que  $u$  est **diagonalisable** s'il existe une base de  $E$  formée de  $\vec{vp}$  de  $u$ . (vecteurs propres)

**Proposition :**

$u$  est diagonalisable si et seulement si  $Mat_B(u)$  est diagonale pour une certaine base  $B$  de  $E$ . ( $E$  de dimension finie)

**Preuve :**

Soient  $(x_1, \dots, x_n)$  une base de  $E$  formée de  $\vec{vp}$  de  $u$  avec  $u(x_i) = \lambda_i x_i$ . On a donc :

$$Mat_B(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

□

**Vocabulaire :** On dit que  $u$  est **trigonalisable** s'il existe une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est triangulaire supérieure. (vecteurs propres)

**Remarque :** Alors  $x$  est un  $\vec{vp}$  de  $u$ . Un endomorphisme sans  $\vec{vp}$  n'est pas diagonalisable.

**Exemple :** Si  $E = K^2$  et  $Mat_B(u) = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$  ( $B$  = canonique), alors  $u$  est trigonalisable pour la base  $B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ . En effet, on a :  $u\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

**Exemple :** Si  $Mat_B(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ , alors  $u$  est diagonalisable.

**Exemple :** Si  $Mat_B(u) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , n'est pas diagonalisable si  $K = \mathbb{R}$  (pas de  $\vec{vp}$ ), mais est diagonalisable si  $K = \mathbb{C}$  (car  $\lambda = i$  et  $\lambda = -i$  sont des vp).

## II Projections, symétries et rotations

Posons  $E = F \oplus G$  avec  $F, G$  sous-espaces vectoriels de  $E$ .

**Proposition :** (admis)

Soit  $p \in \mathcal{L}(E)$  la projection sur  $F$  parallèlement à  $G$  (i.e.  $p(x+y) = x$  pour tout  $(x,y) \in F \times G$ ).

Alors les valeurs propres de  $p$  sont contenues dans  $\{0, 1\}$ . De plus,  $F = E_1$  et  $G = E_0$  et  $p$  est diagonalisable.

>Note de rédaction : cf. Laurent pour la démonstration

**Proposition :** (admis)

Soit  $s \in \mathcal{L}(E)$  la symétrie par rapport à  $F$  parallèlement à  $G$  (i.e.  $s(x+y) = x - y$  pour tout  $(x,y) \in F \times G$ ).

Alors les valeurs propres de  $s$  sont contenues dans  $\{-1, 1\}$ . De plus,  $F = E_1$  et  $G = E_{-1}$  et  $s$  est diagonalisable.

Supposons  $E = \mathbb{K}^2, K = \mathbb{R}$ .

Considérons  $u$  tel que  $\text{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  dans la base canonique  $B$  de  $\mathbb{R}^2$  avec  $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ .

**Proposition :** (admis)

$u$  n'est pas diagonalisable si  $K = \mathbb{R}$  (pas de  $\vec{v}\vec{p}$ ), mais est diagonalisable si  $K = \mathbb{C}$  (car  $\lambda = \cos \theta + i \sin \theta$  et  $\lambda = \cos \theta - i \sin \theta$  sont des vp).

## III Rappels sur les polynômes

Note de rédaction : cf. AL2

**Définition :** Un polynôme  $P$  est irréductible sur  $K$  si  $P = QR$  entraîne que  $Q$  ou  $R$  est de degré 0 (c'est-à-dire une constante).

Cela dépend du corps  $K$ .

**Définition :**  $P$  est scindé sur  $K$  si  $P$  est produit de polynômes de degré 1 sur  $K$ .

**Exemple :** Sur  $\mathbb{R}$ ,  $X^2 + 1$  est irréductible. Sur  $\mathbb{C}$ ,  $X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$  est scindé.

**Vocabulaire :**  $P$  est scindé à racines simples si  $P$  est scindé et si toutes ses racines sont de multiplicité 1, i.e.  $P = c(X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \dots (X - \alpha_n)$  avec  $\alpha_i$  distincts.

**Théorème d'Alembert-Gauss :** (admis)

1. Si  $K = \mathbb{C}$ , tout polynôme de degré  $\geq 1$  est scindé. (i.e.  $\mathbb{C}$  est un corps algébriquement clos)
2. Si  $K = \mathbb{R}$ , tout polynôme de degré  $\geq 1$  est produit de polynômes irréductibles de degré 1 ou 2.

## IV Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$  et  $u \in \text{End}(E)$ .

**Rappel :** Soit  $\lambda \in K$ . C'est une valeur propre de  $u$  si et seulement si  $\det(u - \lambda \text{Id}_E) = 0$ .

💡 **Exemple :**  $\text{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ .  $E = \mathbb{R}^2$ ,  $K = \mathbb{R}$  et  $B$  la base canonique.

On a :

$$\det(u - \lambda \text{Id}_E) = \det \begin{pmatrix} 5 - \lambda & 1 \\ 2 & 4 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 9\lambda + 18 = (\lambda - 6)(\lambda - 3)$$

Donc les valeurs propres de  $u$  sont 3 et 6.

**Théorème :** (admis)

Posons  $P_u(\lambda) = \det(\lambda \text{Id}_E - u)$ . C'est un polynôme de  $K[\lambda]$  de degré  $n$  appelé **polynôme caractéristique** de  $u$ .

Plus précisément, on a  $P_u(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \text{tr}(u) \lambda^{n-1} + \dots + \det(u)$ .

💡 **Exemple :** Pour  $n = 2$ , on a  $P_u(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(u)\lambda + \det(u)$ .

**Corollaire :** (admis)

L'endomorphisme  $u$  admet au plus  $n$  valeurs propres (distinctes).

## V Polynôme caractéristique d'une matrice

Soit  $A \in M_n(K)$  une matrice carrée, soit  $\lambda \in K$ . On dit que  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$  s'il existe un vecteur  $X \in K^n \setminus \{0\}$  tel que  $AX = \lambda X$ . On pose  $E_\lambda(A) = \text{Ker}(A - \lambda I_n)$  le sous-espace propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda$ . Et on pose  $P_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$  le polynôme caractéristique de  $A$ .

**Proposition :** (admis)

Soit  $AB \in M_n(K)$  tel que  $B$  sont semblables  $A$  (i.e. il existe  $P \in GL_n(K)$  tel que  $B = P^{-1}AP$ ). Alors  $A$  et  $B$  ont même polynôme caractéristique ( $P_A = P_B$ ) et donc les mêmes valeurs propres.

**Proposition :** (admis)

Supposons  $A$  triangonalisable (i.e. semblable à une matrice triangulaire).

Alors  $P_A$  est scindé sur  $K$ .

❶ **Remarque :** La réciproque est vraie (vu plus tard),  $P_A$  scindé  $\implies A$  triangonalisable.

✖ **Attention** ✖ Retenir que  $P_A$  non scindé  $\implies A$  non triangonalisable.

💡 **Exemple :** Si  $K = \mathbb{R}$  et  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . On a  $P_A(\lambda) = \lambda^2$ . Mais  $A$  n'est pas diagonalisable.

## VI Étude des sous-espaces propres (sep)

Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$  et  $u \in \text{End}(E)$ . Soit  $F$  un sev de  $E$ .

**Définition :** On dit que  $F$  est **stable** par  $u$  si  $u(F) \subset F$ . Alors  $u|_F \in \text{End}(F)$  est la restriction de  $u$  à  $F$ .

**Proposition :** (admis)

Le polynôme caractéristique de  $u|_F$  divise celui de  $u$ . Autrement dit :  $P_{u|_F}(\lambda) | P_u(\lambda)$ . Autrement dit :  $\exists Q \in K[\lambda], P_u(\lambda) = P_{u|_F}(\lambda)Q(\lambda)$ .

La preuve utilise le déterminant par blocs.

**Proposition :** (admis)

Soit  $k \leq n$  et soient  $A \in M_k(K)$  et  $B \in M_{k,n-k}(K)$  et  $D \in M_{n-k}(K)$ .

$$\text{On a : } \det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(D).$$

**Proposition :** (admis)

Soit  $\lambda \in K$ . Alors  $E_\lambda$  est stable par  $u$ .

En effet, si  $u(x) = \lambda x$ , alors  $u(u(x)) = u(\lambda x) = \lambda u(x)$ , donc  $u(x) \in E_\lambda$ .

**Corollaire :** (admis)

Soit  $\lambda \in K$ , et soit  $X \in E_\lambda \setminus \{0_E\}$ .

On a que  $u|_{E_\lambda}$  est une homothétie de rapport  $\lambda$ .

Donc  $P_{u|_{E_\lambda}}(\lambda) = (\lambda - X)^{\dim(E_\lambda)}$

. En particulier,  $P_{u|_{E_\lambda}}$  divise  $P_u$ .

**Vocabulaire :** On appelle la **multiplicité** de la valeur propre  $\lambda$  pour  $u$  le plus grand entier  $m$  tel que  $(\lambda - X)^m$  divise  $P_u(X)$ . On la note  $m_a(\lambda)$ .

**Vocabulaire :** On appelle la **multiplicité géométrique** de la valeur propre  $\lambda$  pour  $u$  l'entier  $\dim(E_\lambda)$ . On la note  $m_g(\lambda)$ .

**Proposition :** (admis)

On a  $1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$  si  $\lambda$  est une valeur propre de  $u$ .

**Exemple :** Soit  $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ . On a  $P_A(\lambda) = (3 - \lambda)^3$ . Donc  $m_a(3) = 3$ .

On a  $E_3 = \text{Ker}(A - 3I_3) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \mid (x, y) \in K^2 \right\}$ . Donc  $\dim(E_3) = 2$ . Donc  $m_g(3) = 2$ .

**Proposition : Somme directe des sep** (admis)

Soit  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  des valeurs propres distinctes de  $u$ .

Alors  $E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2} + \dots + E_{\lambda_k}$  est une somme directe.

i.e.  $\sum_{i=1}^k E_{\lambda_i} = \bigoplus_{i=1}^k E_{\lambda_i}$ .

Autrement dit, les sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe.

**Corollaire :** (admis)

Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

**Corollaire :** (admis)

Si  $u$  admet  $n$  valeurs propres distinctes (avec  $n = \dim(E)$ ), alors  $u$  est diagonalisable.

💡 **Exemple :** Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ . On a  $P_A(\lambda) = -\lambda(\lambda^2 - 15\lambda - 18)$  qui est scindé sur  $\mathbb{R}$  à racines simples. Les valeurs propres sont  $0, \frac{15+\sqrt{297}}{2}, \frac{15-\sqrt{297}}{2}$ , donc distinctes. Donc  $A$  est diagonalisable.

## VII Diagonalisabilité

Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$  et  $u \in End(E)$ . Soit  $F$  un sev de  $E$ .

**Théorème :** (admis)

$u$  est diagonalisable si et seulement si  $E = \bigoplus_{\lambda \text{ vp de } u} E_\lambda$ .

Autrement dit,  $u$  est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions des sous-espaces propres de  $u$  est égale à  $\dim(E)$ .

**Théorème :** (admis)

$u$  est diagonalisable si et seulement si le polynôme caractéristique de  $u$  est scindé et on a  $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$  pour toute valeur propre  $\lambda$  de  $u$ .

**Proposition :** (admis)

Supposons  $u$  diagonalisable. Soit  $F$  un sev de  $E$  stable par  $u$ .

Alors la restriction  $u|_F \in \mathcal{L}(F)$  est diagonalisable.

**Lemme :** (admis)

On a  $F = \bigoplus_{\lambda \text{ vp de } u} (F \cap E_\lambda)$ .

**Théorème :** (admis)

Soit  $v \in End(E)$  tel que  $u \circ v = v \circ u$  (i.e.  $u$  et  $v$  commutent).

Supposons que  $u$  et  $v$  sont diagonalisables.

Alors il existe une base  $B$  de  $E$  telle que les matrices de  $u$  et  $v$  dans cette base sont diagonales.

💬 **Vocabulaire :** On dit que  $u$  et  $v$  sont **simultanément diagonalisables**.

**Corollaire :** (admis)

Soit  $v \in End(E)$  tel que  $u \circ v = v \circ u$  (i.e.  $u$  et  $v$  commutent).

Alors toute combinaison linéaire de  $u$  et  $v$  est diagonalisable.

De plus,  $u \circ v$  et  $v \circ u$  sont diagonalisables.

## VIII Trigonalisation

**Théorème :** (admis)

$u$  est trigonalisable si et seulement si le polynôme caractéristique de  $u$  est scindé.

**Corollaire :** (admis)

Si  $K = \mathbb{C}$ , tout endomorphisme de  $E$  est trigonalisable.

💡 **Exemple :** Soit  $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$  et  $u$  tel que  $Mat_B(u) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  dans la base canonique  $B$  de  $\mathbb{R}^2$ .

On a  $P_u(\lambda) = \lambda^2 - 2\cos \theta \lambda + 1$ . Ce polynôme n'est pas scindé sur  $\mathbb{R}$  car ses racines sont  $\cos \theta \pm i \sin \theta$ . Donc  $u$  n'est pas trigonalisable sur  $\mathbb{R}$ . Cependant,  $P_u$  est scindé sur  $\mathbb{C}$ , donc  $u$  est trigonalisable sur  $\mathbb{C}$ .

## IX Polynômes d'endomorphismes (et de matrices)

Soit  $K$  un corps. Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel. Soit  $P \in K[X]$ ,  $P = P(X) = \sum_{k=0}^d a_k X^k$  (où  $d$  est le degré de  $P$ ). Soit  $u \in End(E)$  un endomorphisme de  $E$ , et  $u \circ u = u^2$ . En particulier, on a  $u \circ u \circ \dots \circ u = u^k$  ( $k$  fois),  $u^0 = Id_E$  et  $u^1 = u$ .

**Définition :** On pose  $P(u) = \sum_{k=0}^d a_k u^k \in End(E)$ . C'est un polynôme en  $u$ .

L'application  $\varphi_u : \begin{matrix} K[X] \rightarrow End(E) \\ P \mapsto P(u) \end{matrix}$  est linéaire.

On note  $\mathbb{K}[u] = Im(\varphi_u) = \{P(u) \mid P \in K[X]\}$ . C'est un sous-espace vectoriel de  $End(E)$ .

**Définition :** Soit  $A \in M_n(K)$ . On définit de même  $P(A) = a_0 I_n + a_1 A + \dots + a_d A^d = \sum_{k=0}^d a_k A^k \in M_n(K)$ . L'application  $\psi_A : \begin{matrix} K[X] \rightarrow M_n(K) \\ P \mapsto P(A) \end{matrix}$  est linéaire.

Si  $A = Mat_B(u)$ , alors  $P(A) = Mat_B(P(u))$ .

On note  $\mathbb{K}[A] = Im(\psi_A) = \{P(A) \mid P \in K[X]\}$ . C'est un sous-espace vectoriel de  $M_n(K)$ .

**Proposition : Stabilité du noyau (admis)**

Le sous-espace vectoriel  $Ker(P(u))$  est stable par  $u$ .

💡 **Remarque :** Si  $u, v \in End(E)$ , on a  $Ker(v)$  est stable par  $u$ . Or  $P(u)$  et  $u$  commutent.

💡 **Remarque :** Plus généralement, pour  $P, Q \in K[X]$ , on a  $P(u)$  et  $Q(u)$  commutent.

**Preuve :**

Si  $Q = b_0 + b_1 X + \dots + b_e X^e$ , alors  $P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$  car :

$$\begin{aligned} P(u) \circ Q(u) &= \left( \sum_{k=0}^d a_k u^k \right) \circ \left( \sum_{l=0}^e b_l u^l \right) \\ &= \sum_{k=0}^d \sum_{l=0}^e a_k b_l u^{k+l} \\ &= \sum_{l=0}^e \sum_{k=0}^d b_l a_k u^{l+k} \\ &= Q(u) \circ P(u) \end{aligned}$$

□

**Proposition :** (admis)

Si  $\lambda \in Sp(u)$ , alors  $P(\lambda) \in Sp(P(u))$ .

💡 **Remarque :** Il peut exister  $\lambda \in K$  tq  $P(\lambda) \in Sp(P(u))$  mais  $\lambda \notin Sp(u)$ .

💡 **Contre-Exemple :**  $u = id_E, P(X) = X^2 - 1, \lambda = -1$ . On a  $Sp(u) = \{1\}$ , mais  $P(-1) = 0 \in Sp(P(u))$ . Mais  $-1 \notin Sp(u)$ .

**Vocabulaire :** On dit que  $P$  est un polynôme annulateur de  $u$  si  $P(u) = 0_{End(E)}$ .

**Proposition : Sous-groupe des polynômes annulateurs (admis)**

Considérons  $Ann_{\mathbb{K}[X]}(u) = \{P \in K[X] \mid P(u) = 0\}$  l'ensemble des polynômes annulateurs de  $u$ . C'est un sous-groupe de  $(K[X], +)$ .

De plus, pour  $Q \in K[X]$  et  $P \in Ann_{\mathbb{K}[X]}(u)$ , on a  $QP \in Ann_{\mathbb{K}[X]}(u)$ .

**Vocabulaire :** On dit que  $Ann_{\mathbb{K}[X]}(u)$  est un idéal de l'anneau  $K[X]$ . (HP)

**Preuve du sous groupe :**

Soient  $P, Q \in Ann_{\mathbb{K}[X]}(u)$ . On a :

- $P + Q \in Ann_{\mathbb{K}[X]}(u)$  car  $(P + Q)(u) = P(u) + Q(u) = 0 + 0 = 0$ .
- $-P \in Ann_{\mathbb{K}[X]}(u)$  car  $(-P)(u) = -P(u) = -0 = 0$ .
- $0 \in Ann_{\mathbb{K}[X]}(u)$  car  $0(u) = 0$ .

□

**Preuve de la stabilité par multiplication :**

Soit  $P \in Ann_{\mathbb{K}[X]}(u)$  et  $Q \in K[X]$ . On a :

$$(QP)(u) = Q(u) \circ P(u) = Q(u) \circ 0 = 0$$

□

**Proposition : Unicité du polynôme (admis)**

Il existe un unique  $P_0 \in \mathbb{K}[X]$  unitaire (i.e. de coefficient dominant  $a_d = 1$ ) tel que  $P \in Ann_{\mathbb{K}[X]}(u) \Leftrightarrow \exists Q : P = QP_0$ .

En particulier,  $P_0 \in Ann_{\mathbb{K}[X]}(u)$  et  $P_0$  divise tout polynôme annulateur de  $u$ .

**Vocabulaire :**  $P_0$  est appelé le **polynôme minimal** de  $u$ . C'est le polynôme annulateur de  $u$  unitaire de plus petit degré.

**Proposition : (admis)**

Si  $\lambda$  est une valeur propre de  $u$  et  $P \in Ann_{\mathbb{K}[X]}(u)$ , alors  $P(\lambda) = 0$ .

Autrement dit, toute valeur propre de  $u$  est racine de son polynôme minimal.

**Exemple :** Soit  $u$  une homothétie de rapport  $\lambda \in K$ .

On a  $P(u) = 0 \Leftrightarrow a_0 I_E + a_1 u + \dots + a_d u^d = 0 \Leftrightarrow P(\lambda) id_E = 0 \Leftrightarrow P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (X - \lambda) | P$ .  
Donc le polynôme minimal de  $u$  est  $P_0(X) = X - \lambda$ .

**Exemple :**  $E = \mathbb{R}^3$   $Mat_{B,C}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  dans les bases  $B, C$  canoniques.

$(X - 1)^2$  annule  $u$  car  $Mat_{B,C}(u - Id_E) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et donc  $(u - Id_E)^2 = 0$ .

Donc le polynôme minimal de  $u$  divise  $(X - 1)^2$  ou  $(X - 1)$ .

Or  $u \neq Id_E$ , donc le polynôme minimal de  $u$  est  $P_0(X) = (X - 1)^2$ .

Pour  $A \in M_n(K)$ , on définit de même le polynôme minimal de  $A$ .

**Définition :** Soient  $P_1, P_2 \in K[X]$ . On dit que  $P_1$  et  $P_2$  sont **premiers entre eux** s'il existe  $Q_1, Q_2 \in K[X]$  tels que  $Q_1P_1 + Q_2P_2 = 1$ .

De même, pour  $m$  polynômes, on a :  $P_1, P_2, \dots, P_m$  sont premiers entre eux s'il existe  $Q_1, Q_2, \dots, Q_m \in K[X]$  tels que  $\sum_{i=1}^m Q_i P_i = 1$ .

Cela entraîne qu'ils n'ont pas de facteur commun non constant (i.e. de degré  $\geq 1$ ).

**Définition :** Soit  $P_1, \dots, P_m \in K[X]$ . On dit que  $P_1, \dots, P_m$  sont **premiers entre eux deux à deux** si pour tout  $i \neq j$ ,  $P_i$  et  $P_j$  sont premiers entre eux.

**Théorème : Lemme des noyaux (admis)**

Soit  $u \in End(E)$  et soient  $P_1, P_2, \dots, P_m \in K[X]$  des polynômes deux à deux premiers entre eux et tous non nuls.

Posons  $P = \prod_{i=1}^m P_i$ . Alors on a :

$$Ker(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^m Ker(P_i(u))$$

En particulier, si  $P \in Ann_{K[X]}(u)$  on a  $E = \bigoplus_{i=1}^m Ker(P_i(u))$ . Si  $\pi_i$  est la projection de  $E$  sur  $Ker(P_i(u))$  parallèlement aux autres  $Ker(P_j(u))$  ( $j \neq i$ ), alors  $\pi_i \in \mathbb{K}[u]$  et  $\sum_{i=1}^m \pi_i = Id_E$ .

**Théorème :** (admis)

$u$  est diagonalisable ssi.  $u$  admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.

## X Matrices compagnons et théorème de Cayley-Hamilton

Soit  $P \in K[X]$  unitaire. Posons  $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_{n-1}X^{n-1} + X^n$ .

**Définition :** On appelle **matrice compagnon** de  $P$  la matrice :

$$C(P) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

**Proposition :** (admis)

Le polynôme caractéristique de  $A$  est  $(-1)^n P(X)$ .

Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension  $n$ . Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Notons  $P_u$  son polynôme caractéristique.

**Théorème de Cayley-Hamilton :** (admis)

On a  $P_u(u) = 0$ .

Autrement dit, le polynôme minimal de  $u$  divise  $P_u$ .

**Exemple :** On prend  $n = 2$ . Alors  $P_u(X) = X^2 - Tr(u)X + det(u)$ . Donc  $u^2 - Tr(u) \cdot u + detu = 0$ .

**Corollaire :** (*admis*)

$u \in GL(E) \Leftrightarrow \det(u) \neq 0$ .

Dans ce cas, on a  $u^{-1} \in K[u]$ .

## XI Sous espaces caractéristiques

Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ .

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme de  $E$ .

Soit  $\lambda \in K$  une valeur propre de  $u$ .

**i Rappel :** On appelle  $m_a(\lambda)$  la multiplicité algébrique de  $\lambda$ , c'est-à-dire la multiplicité de  $\lambda$  comme racine du polynôme caractéristique de  $u$ .

**i Rappel :** On appelle  $m_g(\lambda)$  la multiplicité géométrique de  $\lambda$ , c'est-à-dire la dimension du sous-espace propre  $E_\lambda = \text{Ker}(u - \lambda I_E)$ .

**Définition :** On pose  $N_\lambda = \text{Ker}((u - \lambda I_E)^{m_a(\lambda)})$ .

Il s'agit du **sous-espace caractéristique** de  $u$  associé à la valeur propre  $\lambda$ .

**Théorème :** (*admis*)

On suppose  $P_u$  scindé (i.e. trigonalisable).

Alors :

1.  $N_\lambda$  est un sev stable par  $u$  de dimension  $m_a(\lambda)$ .
2.  $E_\lambda \subset N_\lambda$ .
3.  $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} N_\lambda$ .
4. Soit  $\pi_\lambda$  la projection de  $E$  sur  $N_\lambda$  parallèlement à  $\bigoplus_{\mu \in Sp(u), \mu \neq \lambda} N_\mu$ .  
Alors  $\pi_\lambda \in K[u]$ .
5. Si  $\lambda \neq \mu$ ,  $\pi_\lambda \circ \pi_\mu = 0$

**Exemple :**  $\text{Mat}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ . Les valeurs propres sont 1 et 2.  $P_u(X) = -(X-1)^2(X-2)$ .

Donc :

- $\lambda = 2$ ,  $m_a(2) = m_g(1) = 1$  donc  $E_2 = Ke_3 = N_2$ .
- $\lambda = 1$ ,  $m_a(1) = 2$  et  $m_g(1) = 1$  donc  $E_1 = Ke_1$  et  $N_1 = Ke_1 \oplus Ke_2$ .

**Théorème :** (*admis*)

$N_\lambda$  est stable par  $u$  et posons  $u_\lambda = u|_{N_\lambda}$ .

Alors :

1.  $u_\lambda$  a une seule valeur propre qui est  $\lambda$ .
2. On a  $P_u = \pm(X - \lambda)^{m_a(\lambda)}$ .
3. On a  $\dim N_\lambda = m_a(\lambda)$ .
4.  $\exists B_\lambda$  une base de  $N_\lambda$  telle que  $\text{Mat}_{B_\lambda}(u_\lambda) = \lambda I_{m_a(\lambda)}$ .

**Corollaire :** (*admis*)

On suppose  $P_u$  scindé.

Il existe une base  $B$  de trigonalisation de  $u$  telle que la  $\text{Mat}_B(u)$  est de la forme suivante :

$$\text{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} A_{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_{\lambda_k} \end{pmatrix},$$

avec       $A_{\lambda_i} = \begin{pmatrix} \lambda_i & * & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_i & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$

**Exemple :**  $E = \mathbb{R}^3$  et  $u$  tel que  $\text{Mat}(u) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 6 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ .

$$P_u(X) = -(X - 1)^3.$$

Donc 1 est la seule valeur propre de  $u$  avec  $m_a(1) = 3$ .

Or  $u$  n'est pas diagonalisable car si  $u$  diagonalisable dans  $B$ , on a  $\text{Mat}_B(u) = I_3$ . Donc  $u = Id_E$ . Absurde.

$u$  est scindé, donc trigonalisable.

## XII Nilpotence

**Définition :** On dit que  $u \in End(E)$  est **nilpotent** s'il existe  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $u^k = 0_{End(E)}$ .

**Vocabulaire :** On appelle l'indice de nilpotence le plus petit entier  $k$  tel que  $u^k = 0$ .

**Proposition :** (*admis*)

L'endomorphisme  $u$  est nilpotent si et seulement si  $P_u$  est scindé avec pour seule racine 0 (c'est à dire que sa seule valeur propre est 0).

En particulier,  $u$  est trigonalisable strictement avec des 0 sur la diagonale. On a que l'indice de nilpotence de  $u$  est inférieur ou égal à  $\dim(E)$ .

**Corollaire :** (*admis*)

$u$  nilpotent et diagonalisable  $\Rightarrow u = 0_{End(E)}$ .

**Proposition :** (*admis*)

Si  $u$  est nilpotent d'indice  $k$  et  $x \in E$  avec  $u^{k-1}(x) \neq 0$ , alors la famille  $\{x, u(x), u^2(x), \dots, u^{k-1}(x)\}$  est libre.  
Ainsi, on a  $k \leq \dim(E)$ .

**Proposition :** (*admis*)

Si  $u$  est nilpotent d'indice  $n = \dim(E)$ , alors il existe une base  $B$  de  $E$  telle que :

$$\text{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Remarque :** La matrice ci-dessus est un cas particulier de forme de Jordan.

**Remarque :** Comment trouver une base de trigonalisation de  $u$  lorsque  $u$  est nilpotent d'indice  $k \leq n = \dim(E)$  ?

On a  $\text{Ker}(u) \subset \text{Ker}(u^2) \subset \cdots \subset \text{Ker}(u^{k-1}) \subsetneq \text{Ker}(u^k) = E$ .

On considère  $B_1$  une base de  $\text{Ker}(u)$ , que l'on complète en une base  $B_2$  de  $\text{Ker}(u^2)$ , que l'on complète en une base  $B_3$  de  $\text{Ker}(u^3)$ , et ainsi de suite jusqu'à obtenir une base  $B_k$  de  $E$ .

On a ainsi construit une base  $B_k$  de  $E$  telle que  $\text{Mat}_{B_k}(u)$  est triangulaire supérieure avec des 0 sur la diagonale.

**Proposition : Combinaison linéaire** (*admis*)

Soient  $u, v \in \text{End}(E)$  deux endomorphismes nilpotents qui commutent.

Alors toute combinaison linéaire  $au + bv$  avec  $a, b \in K$  est nilpotente.

## XIII Décomposition de Jordan Chévalley (ou Dunford)

**Théorème :** (*admis*)

Soit  $u \in \text{End}(E)$  tel que  $P_u$  est scindé.

Il existe un unique  $(d, e) \in \text{End}(E)^2$  tel que :

- $u = d + e$ ,
- $d$  est diagonalisable,
- $e$  est nilpotent,
- $d$  et  $e$  commutent.
- $d, e \in K[u]$  (polynômes en  $u$ ).

C'est la **décomposition de Jordan Chévalley** (ou Dunford) de  $u$ .

**Définition :** Soit  $A \in M_n(K)$ .

On dit que  $A$  est nilpotente si il existe  $k \geq 1$  tel que  $A^k = 0$  (matrice nulle).

**Théorème : Décomposition de Jordan Chévalley matricielle (*admis*)**

Soit  $A \in M_n(K)$  tel que son polynôme caractéristique est scindé.

Il existe un unique couple  $(D, N) \in M_n(K)^2$  tel que :

- $A = D + N$ ,
- $D$  est diagonalisable,
- $N$  est nilpotente,
- $D$  et  $N$  commutent,
- $D, N$  sont des polynômes en  $A$ .