Chapitre 4 : Topologie des espaces métriques et des espaces vectoriels normés

I Distances et normes

Soit X un ensemble quelconque (dans la suite supposé non nul).

Définition : Une distance d sur X est une application $d\colon X \times X \to \mathbb{R}_+$ qui vérifie les axiomes suivants :

1. $\forall (x,y) \in X^2, d(x,y) = d(y,x)$ (symétrie)
2. $\forall x,y,z \in X, d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (inégalité triangulaire)
3. $\forall (x,y) \in X^2, d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (séparation)

Vocabulaire : On appelle **espace métrique** un couple (X,d) où X est un ensemble et d une distance sur X.

Exemple :

- $\mathbb{R}$ muni de la distance $d(x,y) = |x-y|$, où $|\cdot|$ est la valeur absolue.
- $\mathbb{C}$ muni de la distance $d(z_1,z_2) = |z_1 - z_2|$, où $|\cdot|$ est le module.
- Une autre façon de voir l'exemple 2, on considère l'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni de la distance suivante :
  Si $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$ sont deux points de $\mathbb{R}^2$, on définit la distance $d(A,B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$.
  On appelle cette distance la **distance euclidienne** sur $\mathbb{R}^2$.
- Prenons X = cercle unité muni de la distance $d(A,B) = arccos(cos(\theta_2 - \theta_1))$ où θ_1 et θ_2 sont les arguments des points A et B respectivement. *(voir schéma OneNote)*

Remarque : On peut voir l'exemple 1 comme un cas particulier de l'exemple 2, en identifiant $\mathbb{R}$ à l'axe des réels dans le plan complexe.

Remarque : On peut généraliser l'exemple 3 à $\mathbb{R}^n$ muni de la distance euclidienne définie par :

$$d(A,B) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_{A_i} - x_{B_i})^2}$$

où $A = (x_{A_1}, x_{A_2}, \ldots, x_{A_n})$ et $B = (x_{B_1}, x_{B_2}, \ldots, x_{B_n})$ sont deux points de $\mathbb{R}^n$.

Il se trouve que les exemples 1, 2 et 3 proviennent d'espaces vectoriels normés, qu'on verra (très) rapidement.

Proposition : Inégalités triangulaires

Soit (X,d) un espace métrique.
On a :

1. $\forall (x,y,z) \in X^3, d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (inégalité triangulaire)
2. $\forall (x,y,z) \in X^3, |d(x,y) - d(x,z)| \leq d(y,z)$ (inégalité triangulaire généralisée)

Preuve :

1. C'est l'axiome 2 de la définition d'une distance.
2. On a $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ d'après l'inégalité triangulaire.
   Donc $d(x,y) - d(x,z) \leq d(z,y)$ = $d(y,z)$.
   De plus, $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ d'après l'inégalité triangulaire.
   Donc $d(x,z) - d(x,y) \leq d(y,z)$.
   En combinant les deux, on obtient $|d(x,y) - d(x,z)| \leq d(y,z)$.

Construction d'espaces métriques : Restriction *(admis)*

On part de (X, d) un espace métrique.
Soit $Y \subset X$. Alors $(Y, d|_{Y\times Y})$ est un espace métrique.

Vocabulaire : On dit que $d|_{Y\times Y}$ est la **distance sur Y induite** par la distance sur X.

Remarque : Ainsi, tout sous-ensemble d'un espace métrique est muni d'une "structure d'espace métrique" induite : c'est la distance induite.

Exemple : $(X, d_X) = (\mathbb{C}, |\cdot|)$ un espace métrique. Alors pour $Y = \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, d_Y n'est autre que la distance usuelle sur $\mathbb{R}$.
Idem pour $\mathbb{Q}$.

Construction d'espaces métriques : Bijection *(admis)*

Soient (X, d_X) et Y un ensemble quelconque et $f : Y \to X$ bijective.
Alors (Y, d_Y) est un espace métrique, où $d_Y(y_1, y_2) = d_X(f(y_1), f(y_2))$ pour tout $y_1, y_2 \in Y$.

Autrement dit, $d_Y : \begin{array}{c} Y\times Y \to \mathbb{R}_+ \\ (y_1,y_2) \mapsto d_X(f(y_1),f(y_2)) \end{array}$.

Application : Démontrer le théorème ci-dessus. *(vérifier que d_Y satisfait bien les axiomes d'une distance.)*

A Espaces vectoriels normés

On a plus un ensemble X quelconque mais on considère E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). (a priori pas de dimension finie)

1 Définitions

Définition : Une norme N sur E est une application $N : E \to \mathbb{R}_+$ souvent notée $\|\cdot\|$ qui vérifie les axiomes suivants :

1. $\forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \|\lambda u\| = |\lambda| \cdot \|u\|$ (homogénéité)
2. $\forall (u, v) \in E^2, \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (inégalité triangulaire)
3. $\forall u \in E, \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0_E$ (séparation)

Vocabulaire : On dit que le couple $(E, N) = (E, \|\cdot\|)$ est un **espace vectoriel normé**. Il est commun d'écrire $e.v.n.$.

Remarque : $\forall x \in E, N(-x) = N(x)$ d'après l'axiome 1.

Théorème : Association norme-distance

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.
Alors c'est en particulier un espace métrique pour la distance définie par $d_N(u,v) = \|v-u\|$.

Preuve : Il suffit de vérifier les axiomes d'une distance.

1. Symétrie : $d_N(u,v) = \|v-u\| = \|-(u-v)\| = \|u-v\| = d_N(v,u)$.
2. Inégalité triangulaire : $d_N(u,w) = \|w-u\| = \|(w-v)+(v-u)\| \leq \|w-v\| + \|v-u\| = d_N(u,v) + d_N(v,w)$.
3. Séparation : $d_N(u,v) = 0 \Leftrightarrow \|v-u\| = 0 \Leftrightarrow v-u = 0_E \Leftrightarrow u = v$.