Chapitre 5 : Séries entières

I Introduction

Définition : Une **série entière** est une série de fonction dont le $n^{\text{ème}}$ terme général est un monôme de degré n.
C'est-à-dire que c'est une série de la forme $\sum_n a_n z^n$ où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes ($\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ ou $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$) et z est une variable complexe.

Remarque : Comme séries de fonctions, les propositions vues sur le chapitre sur les séries de fonctions s'appliquent aux séries entières. Exception faite sur le théorème touchant aux dérivées, car on ne sait pas encore ce qu'est la dérivée d'une fonction de variable complexe.

Exemple :

$$\sum_{n\geq 0} z^n \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!} \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n} \qquad \cdots$$

Rappel : Le sup d'une partie de $\mathbb{R}$ est défini par $sup(A) = min\{x \in \mathbb{R} : A \subset]-\infty, x]\}$ et le inf d'une partie de $\mathbb{R}$ est défini par $inf(A) = max\{x \in \mathbb{R} : A \subset [x, +\infty[\}$.

A Convergence d'une série entière

Exemple : La série $\sum_{n\geq 0} z^n$ converge si et seulement si $|z| < 1$ sur $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} = D(0,1)$

Exemple : Soit $z \in \mathbb{C}$. On pose $u_n = \frac{z^n}{n!}$. Alors on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{z^n} = \frac{z}{n+1} \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.
Par le critère de d'Alembert, la série $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$ et on dira que le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$ est $+\infty$.

Vocabulaire : On dit que 1 est le **rayon de convergence** de la série $\sum_{n\geq 0} z^n$ (et $D(0,1)$ est le **disque de convergence** de la série $\sum_{n\geq 0} z^n$).

Lemme :

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière et $z_0 \in \mathbb{C}$.

1. Si $\sum_{n\geq 0} a_n z_0^n$ converge absolument, alors la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge normalement sur $\overline{D}(0, |z_0|) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq |z_0|\}$.
2. Si $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge normalement sur $\overline{D}(0,r)$ pour tout $r < |z_0|$

Démonstration :
1. Soit $z \in \overline{D}(0, |z_0|)$ et soit $n \in \mathbb{N}$.
On a $|a_n z^n| = |a_n||z|^n \leq |a_n||z_0|^n$.
Et de plus $\sum_{n\geq 0} |a_n||z_0|^n$ converge par hypothèse et est indépendant de z.

Donc la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge normalement sur $\overline{D}(0, |z_0|)$.

2. Soit $r < |z_0|$.
Montrons que $\sum_{n\geq 0} a_n r^n$ converge absolument.

et $1 \Rightarrow 2$ et $|a_n|r^n = |a_n||z_0|^n \cdot \left(\frac{r}{|z_0|}\right)^n \leq M \cdot \left(\frac{r}{|z_0|}\right)^n$ pour un certain $M = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n||z_0|^n$.
et comme série géométrique de raison $\frac{r}{|z_0|} < 1$, la série $\sum_{n\geq 0} M \cdot \left(\frac{r}{|z_0|}\right)^n$ converge.
D'où la série $\sum_{n\geq 0} a_n r^n$ converge absolument.

Définition : On appelle **rayon de convergence** de la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ le nombre $R \in [0, +\infty]$ défini par $R = \sup\{r \in [0, +\infty[: (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée$\} = \sup\{r \in [0, +\infty[: \sum_{n\geq 0} a_n r^n$ converge$\}$.

Définition : On appelle **disque ouvert de convergence** de la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ l'ensemble $D(0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ où R est le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$.

Remarque : Si $R = 0$, $D(0, R) = \emptyset$
Si $R = +\infty$, $D(0, R) = \mathbb{C}$

Théorème :

Une série entière converge absolument en tout point du disque ouvert de convergence et converge normalement sur tout disque fermé inclus dans le disque ouvert de convergence. En particulier, la somme est continue en tout point du disque ouvert de convergence.

Note de rédaction : cf. Laurent pour la preuve

Remarque : On déduit que $\{r \in [0, +\infty[: \sum_{n\geq 0} a_n r^n$ converge$\} = [0, R[$ ou $[0, R]$.
Autrement dit, il y a convergence sur $D(0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ et il y a divergence sur $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$. Par contre, on ne peut rien dire sur le cercle $\{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$.

Exemple :

- $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$. En effet, $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ converge si et seulement si $|z| < 1$. En particulier, il y a divergence si $|z| = 1$.
- $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n^2}$ a pour rayon de convergence $R = 1$. En effet, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n^2}$ converge si et seulement si $|z| \leq 1$ (sinon, divergence grossière). En particulier, il y a divergence si $|z| > 1$.

Calculs de rayons de convergence : $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière.
Si $(a_n r^n)$ est bornée sur $R \geq r$ Si $(a_n r^n)$ est non bornée alors $R \leq r$

Théorème : Critères de d'Alembert et Cauchy

Soit R le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

1. Si $|a_n|^{\frac{1}{n}} \to l$ lorsque $n \to +\infty$, alors $R = \frac{1}{l}$
2. Si $a_n \neq 0$ à partir d'un certain rang et si $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \to l$ lorsque $n \to +\infty$, alors $R = \frac{1}{l}$.

Remarque : Lorsque $R = +\infty, l = 0$ et lorsque $R = 0, l = +\infty$.

Exemple : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n^2}$ a pour rayon de convergence $R = 1$ car $\frac{1}{n^2}^{\frac{1}{n}} \to 1$ lorsque $n \to +\infty$.

Remarque : Si f est définie sur $D(0, 1)$. Alors $z \mapsto f(az)$ est définie sur $D(0, \frac{1}{a})$.

Note de rédaction : cf. Laurent pour l'exemple

Note de rédaction : Une proposition hors programme sur la limsup a été vue en cours, mais elle n'est pas au programme, donc pas ici.

Proposition :

Soit $\frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle. Alors, pour n_0 assez grand $\sum_{n \geq n_0} \frac{P(n)}{Q(n)} a_n z^n$ est bien défini et son rayon et convergence est le même que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

Note de rédaction : cf. Laurent pour la preuve

Contents