Chapitre 3 : Intégrales impropres

✖ Attention ✖ Tous les exemples de calculs d'intégrales dans ce chapitre sont à connaître par cœur (il s'agit d'intégrales de référence), et peuvent être utilisés dans des exercices.

I Généralités sur les intégrales impropres

A Sur un intervalle du type $[a, +\infty[, a \in \mathbb{R}$

Définition : Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ une fonction continue.
On dit que l'intégrale impropre *(ou généralisée)* au voisiage de $+\infty$ converge (ou existe) si $\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)dt$ existe et est finie.

Dans ce cas, on note: $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ l'intégrale impropre. Si une telle limite n'existe pas, on dit que l'intégrale diverge.

Remarque : On utilisera la notation $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ pour l'intégrale impropre qui converge ou diverge (on précise toujours si elle converge ou diverge).

Propriété :

Supposons que $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.
Alors, $\lim_{A\to+\infty} \int_A^{+\infty} f(t)\,dt = 0$ converge. C'est le reste de l'intégrale impropre.

Preuve:
Soit $x > A > a$.
On a : $\int_a^x f(t)\,dt = \int_a^A f(t)\,dt + \int_A^x f(t)\,dt$.
En faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient : $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt = \int_a^A f(t)\,dt + \int_A^{+\infty} f(t)\,dt$.
On passe à la limite sur A, $A \to +\infty$ et on obtient :
$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt = \int_a^{+\infty} f(t)\,dt + \lim_{A\to+\infty} \int_A^{+\infty} f(t)\,dt$.
Donc $\lim_{A\to+\infty} \int_A^{+\infty} f(t)\,dt = 0$ $\square$.

Remarque : Si on continue f continue de $]-\infty, a]$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on peut définir l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^a f(t)\,dt$ par $\lim_{x\to-\infty} \int_x^a f(t)\,dt$.

Exemple : $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt$ converge-t-elle?

1. D'abord, $t \mapsto \frac{1}{t}$ est continue sur $[1, +\infty[$.
2. Soit $x > 1$, $\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = [\ln(t)]_1^x = \ln(x)$.
   Donc, $\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.
   Donc $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt$ diverge.

Exemple : $\int_0^{+\infty} cos(t)\,dt$ converge-t-elle?

1. D'abord, $t \mapsto cos(t)$ est continue sur $[0, +\infty[$.
2. Soit $x > 0$, $\int_0^x cos(t)\,dt = [sin(t)]_0^x = sin(x)$.
   Donc, $\lim_{x\to+\infty} \int_0^x cos(t)\,dt = \lim_{x\to+\infty} sin(x)$ n'existe pas.
   Donc $\int_0^{+\infty} cos(t)\,dt$ diverge.

Exemple : $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ converge-t-elle? ($\alpha \in \mathbb{R}$)

1. D'abord, $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est continue sur $[0, +\infty[$ pour $\alpha > 0$.

2. Soit $x > 0$, $\int_0^x \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_0^x = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.
   Donc, $\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.

   - Si $\alpha < 1$, alors $1-\alpha > 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} = +\infty$.
   - Si $\alpha = 1$, alors $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ est indéfini.
   - Si $\alpha > 1$, alors $1-\alpha < 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} = 0$.

   Donc $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Proposition : Convergence des intégrales de Riemann

Les intégrales de la forme $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ sont appelées des intégrales de Riemann et convergent si et seulement si $\alpha > 1$, et on a :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{si } \alpha > 1 \\ \text{indéterminée} & \text{si } \alpha = 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha < 1 \end{cases}$$

Exemple : $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,dt$ converge-t-elle?

1. D'abord, $t \mapsto e^{-\alpha t}$ est continue sur $[0, +\infty[$ pour $\alpha > 0$.

2. Soit $x > 0$, $\int_0^x e^{-\alpha t}\,dt = \left[-\frac{e^{-\alpha t}}{\alpha}\right]_0^x = \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha x})$.
   La convergence de $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,dt$ est la même que $\frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha x})$, quand $x \to +\infty$.
   Donc, $\lim_{x\to+\infty} \int_0^x e^{-\alpha t}\,dt = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha x}) = \frac{1}{\alpha}$.
   Donc $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,dt$ converge si, et seulement si, $\alpha > 0$, et vaut $\frac{1}{\alpha}$.

✖ Attention ✖ Si $\alpha \leq 0$, l'intégrale diverge.

Vocabulaire : La nature de l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ est la convergence ou la divergence de cette intégrale.

Application : Déterminer la nature de l'intégrale impropre suivante : $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+1}\,dt$.

B Sur un intervalle du type $]-\infty, +\infty[$

Définition : Soit $f :]-\infty, +\infty[\to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ une fonction continue.
On dit que l'intégrale impropre (ou généralisée) sur $]-\infty, +\infty[$ converge si pour $a \in \mathbb{R}$, les deux intégrales $\int_{-\infty}^a f(t)\,dt$ et $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ convergent.

Exemple : $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt$ converge-t-elle?

1. D'abord, $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue sur $]-\infty, +\infty[$.

2. On a $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \lim_{x\to+\infty} [\arctan(t)]_0^x = \frac{\pi}{2}$ (converge).

3. On a $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+t^2}\,dt = \lim_{y\to-\infty} [\arctan(t)]_y^0 = \frac{\pi}{2}$ (converge).

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt$ converge et vaut π.

II Intégrales impropres sur des intervalles $[a, b[, b < +\infty[$

Définition : Soient $a < b \in \mathbb{R}$. Considérons une fonction continue sur $[a, b[$ *(a priori, f n'est pas continue en b car sinon* $\int_a^b f(t)\,dt$ *n'est pas impropre)*.

On définit l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)\,dt$ comme la limite $\lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)\,dt$, si cette limite existe et est finie.
Si cette limite n'existe pas, on dit que l'intégrale diverge.

Remarque : Si $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ est continue, on peut définir l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)\,dt$ par $\lim_{x\to a^+} \int_x^b f(t)\,dt$.

Exemple : $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ converge-t-elle? $\int_0^1 \ln(t)\,dt$ converge-t-elle?