Chapitre 5 : Fonctions de plusieurs variables

Cadre de travail :

- $p, q \in \mathbb{N}^*$
- U ouvert de $\mathbb{R}^n$
- $f : U \to \mathbb{R}^m$
- $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$ sont des espaces vectoriels qui peuvent être normés, donc des espaces métriques. Ainsi, toutes les propriétés et des notions des espaces métriques s'appliquent.

I Continuité

Rappel : Une suite (X_n) de composante $\begin{pmatrix} x_1^{(n)} \\ x_2^{(n)} \\ \vdots \\ x_p^{(n)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$ tend vers $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$ si et seulement si chacune de ses composantes converge, c'est-à-dire :

$$\forall i \in \{1, \dots, p\}, \quad x_i^{(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} x_i$$

Proposition :

Soit $f : U \to \mathbb{R}^q$ et $a \in U$. On écrit $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_q(x)), x \in U$.
On a : f est continue en $a \Leftrightarrow \forall i = 1, \dots, q, f_i(x)$ est continue en a.

Remarque : $\forall i = 1, \dots, q$, les fonctions $x \mapsto f_i(x)$ sont à valeur dans $\mathbb{R}$, donc on peut utiliser les résultats de la continuité pour les fonctions à valeur réelle.

Vocabulaire : On appelle les f_i les **fonctions composantes** de f.

Preuve :
On rappelle que f est continue en a ssi par toute suite (x_n) qui converge vers a, la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(a)$.
On a donc $f(x_n) = (f_1(x_n), f_2(x_n), \dots, f_q(x_n)) \to f(a) = (f_1(a), f_2(a), \dots, f_q(a))$ ssi $\forall i = 1, \dots, q, f_i(x_n) \to f_i(a)$.
Donc f est continue en a ssi $\forall i = 1, \dots, q, f_i$ est continue en a.

Pour comprendre la continuité, il suffit de se restreindre aux fonctions $f : U \to \mathbb{R}$.

Exemple :

1. $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$ et $f(0, 0) = 0$.
   On a $U = \mathbb{R}^2$, $p = 2$ et $q = 1$.
   Montrons que f est continue.

   f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ car c'est un quotient de fonctions continues (polynômes) dont le dénominateur ne s'annule pas.
   Montrons que f est continue en $(0, 0)$.
   On doit montrer que si $(x, y) \to (0, 0)$, alors $f(x, y) \to 0$.
   $|f(x, y)| = \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| = \frac{x^2 |y|}{x^2 + y^2} \leq \frac{x^2 |y|}{y^2} = |y|$.
   Donc si $(x, y) \to (0, 0)$, alors $|y| \to 0$ et donc $f(x, y) \to 0$.
   Ainsi, f est continue en $(0, 0)$.
   Donc f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$.
   f peut-elle être continue sur $\mathbb{R}^2$?
   Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, f est continue (même raison).
   Problème en $(0,0)$.
   Montrons que $f(x,y)$ n'a pas de limite en $(0,0)$.
   Trouvons $(x_n,y_n) \to (0,0)$ et $(a_n,b_n) \to (0,0)$ tels que $f(x_n,y_n)$ et $f(a_n,b_n)$ aient des limites différentes.
   Prenons $(x_n,y_n) = \left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$. On a : $f(x_n,y_n) = \frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2}$.
   De plus, prenons $(a_n,b_n) = \left(\frac{2}{n},\frac{1}{n}\right)$. On a : $f(a_n,b_n) = \frac{\frac{2}{n}\cdot\frac{1}{n}}{\left(\frac{2}{n}\right)^2+\left(\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{\frac{2}{n^2}}{\frac{4}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \frac{2}{5}$.
   Ainsi, $f(x_n,y_n) \to \frac{1}{2}$ et $f(a_n,b_n) \to \frac{2}{5}$.
   Donc f n'a pas de limite en $(0,0)$ et donc f n'est pas continue en $(0,0)$. Ainsi, f n'est pas continue sur $\mathbb{R}^2$.

II Vers une bonne notion de dérivée pour les fonctions à plusieurs variables

Introduction : Soit $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ où $]a,b[\subset \mathbb{R}$. On dit que f est dérivable en $x \in]a,b[$ si il existe un réel $f'(x)$ tel que :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + o(h)$$

Ce qui équivaut à : $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ existe.
Si f est dérivable en x alors on sait que f est continue en x.
$|f(x+h)-f(x)| \to 0$ quand $h \to 0$.

A Rappels : fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^q, q \geq 1$

Soit $f : \substack{]a,b[\to\mathbb{R}^q \\ x\mapsto(f_1(x),f_2(x),\ldots,f_q(x))}$. (fonction coordonnées)

Définition : On dit que f est dérivable en $x \in]a,b[$ si $\lim_{h\to 0} \frac{f(x)-f(x+h)}{h}$ existe. (avec $\frac{f(x)-f(x+h)}{h} \in \mathbb{R}^q$).
i.e. $\exists L \in \mathbb{R}^q$ tel que $\|\frac{f(x)-f(x+h)}{h} - L\| \to 0$ quand $h \to 0$ où $\|.\|$ est une norme $\mathbb{R}^q$ (elles sont équivalentes).

Proposition : Dérivabilité

f est dérivable en $x \Leftrightarrow \forall i = 1,\ldots,q, f_i$ est dérivable en x et on a : $f'(x) = (f_1'(x), f_2'(x), \ldots, f_q'(x))$.
Autrement dit, f est dérivable en x si et seulement si chacune de ses composantes est dérivable en x.

Preuve :
$\Rightarrow$ / Supposons f dérivable en x.
$\exists L = (L_1, L_2, \ldots, L_q) \in \mathbb{R}^q$ tel que $\|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - L\| \to 0$ quand $h \to 0$.
On a le choix de $\|.\|$ car les normes sont toutes équivalentes (en dimension finie). Prenons la norme infinie.
Alors $\forall i \in \{1,\ldots,q\}, |\frac{f_i(x+h)-f_i(x)}{h} - L_i| \leq \|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - L\|_{+\infty} \to 0$ quand $h \to 0$.
Ainsi, $\forall i \in \{1,\ldots,q\}, f_i$ est dérivable en x et $f_i'(x) = L_i$.
Et donc $f'(x) = (f_1'(x), f_2'(x), \ldots, f_q'(x))$.
$\Leftarrow$ / Supposons que $\forall i = 1,\ldots,q, f_i$ est dérivable en x.
Donc $\forall i \in \{1,\ldots,q\}, \frac{f_i(x+h)-f_i(x)}{h} \to f_i'(x)$ quand $h \to 0$.
Montrons que $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ existe.
Posons $L = (f_1'(x), f_2'(x), \ldots, f_q'(x)) \in \mathbb{R}^q$.
On veut $\|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - L\| \to 0$ quand $h \to 0$.
Prenons $\|.\|_1$ la norme 1.
On a :

$$\left\|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - L\right\|_1 = \sum_{i=1}^{q} \left|\frac{f_i(x+h)-f_i(x)}{h} - L_i\right|$$

On a une somme finie donc chaque terme (par hypothèse) tend vers 0 quand $h \to 0$.
En passant à la limite on obtient : $\|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - L\|_1 \to 0$ quand $h \to 0$.
Donc f est dérivable en x et $f'(x) = L = (f_1'(x), f_2'(x), \ldots, f_q'(x))$.

B Dérivées partielles

Soit $U \subset \mathbb{R}^p$ ouvert et $p \in \mathbb{N}^*$. On considère $f : U \to \mathbb{R}^q$.

Remarque : Penser à une fonction f définie de $U = \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, donc $p = 2$ et $q = 1$. (tous les problèmes se posent déjà dans ce cas)

On veut définir la notion de dérivées partielles en un point $a = (a_1, a_2, \ldots, a_p) \in U$.
Il y a p dérivées partielles (car p variables). Prenons $k \in \{1, \ldots, p\}$ et définissons la k-ième dérivée partielle de f en $a = (a_1, a_2, \ldots, a_p)$.
Considérons la k-ième fonction partielle d'une variable réelle $g_k : x_k \mapsto f(a_1, \ldots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \ldots, a_p)$.
Les points $a_1, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}, \ldots, a_p$ sont fixés dans $\mathbb{R}$ et x_k varie dans un voisinage de a_k.

On dit que f admet une k-ième dérivée partielle en a si g_k est dérivable en a_k et on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = g_k'(a_k)$$

Exemple : Soit $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$.
Prenons $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = 2a_1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a) = 2a_2$$

On utilise plutôt les notations suivantes :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y$$

✕ Attention ✕ Avant de calculer une dérivée partielle en un point, il faut justifier qu'elles existent (i.e. que les fonctions partielles sont dérivables en les points correspondants).

Exemple : (suite) Ici, il faut dire :
$\forall y$ fixé dans $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(x, y) = x^2 + y^2$ avec y constant est dérivable en tout $x \in \mathbb{R}$ (c'est un polynôme). Donc $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ existe pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
De même, $\forall x$ fixé dans $\mathbb{R}$, la fonction $y \mapsto f(x, y) = x^2 + y^2$ avec x constant est dérivable en tout $y \in \mathbb{R}$. Donc $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ existe pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Remarque : f admet une k-ième dérivée partielle en $a \Leftrightarrow$ la fonction $t \mapsto f(a + te_k)$ (où e_k est le k-ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^p$) est dérivable en 0.

> **Définition :** On dit que f admet des dérivées partielles en a si $\forall k \in \{1, \ldots, p\}$, $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$ existe. (*i.e.* toutes les dérivées partielles existent en a)

✕ Attention ✕ Problème : Malheureusement, ce n'est pas parce que f admet des dérivées partielles en a que f est continue en a. (d'où le fait de chercher une meilleure notion de dérivabilité)

Contre-Exemple : Soit $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.
On a $U \subset \mathbb{R}^2$ ouvert, $p = 2$ et $q = 1$.
Montrons que f admet des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$ mais que f n'est pas continue en $(0, 0)$.
Montrons que $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ existe pour tout y.
Fixons $y \in \mathbb{R}$.
Considérons $x \mapsto f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ est dérivée en tout $x \in \mathbb{R}$.
Ainsi $\forall y \in \mathbb{R} x \mapsto f(x, y)$ est dérivable en tout $x \in \mathbb{R}$. Donc $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ existe pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

De même, par symétrie on montre que $y \mapsto f(x,y)$ est dérivable en tout $y \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Ainsi f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.
En particulier, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existent.
Pourtant, on a vu que f n'est pas continue en $(0,0)$.

Transition : On peut voir le problème de continuité en $(0,0)$ comme le fait que $f(x,x) = \frac{1}{2}$ qui ne tend pas vers 0 quand $x \to 0$.
En fait, on regarde la trajectoire $t \mapsto (t,t)$ qui n'est pas alignée avec les axes.
Une notion plus forte que la dérivée partielle est la dérivée directionnelle.

C Dérivées directionnelles

Soit $f : U \to \mathbb{R}^q$ où $U \subset \mathbb{R}^p$ ouvert.
Soit $a \in U$ et soit h un vecteur de $\mathbb{R}^p$.
Considérons la fonction d'une variable réelle $\varphi\colon t \mapsto f(a+th)$ où t varie dans un voisinage de 0 tel que $a + th \in U$.

Définition : On dit que f admet une dérivée directionnelle en a selon la direction h si φ est dérivable en 0.
On a :

$$\varphi'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t}$$

Proposition : Lien avec la dérivée partielle

Si on choisit comme direction $h = e_k$ (le k-ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^p$), alors la dérivée directionnelle de f en a selon la direction e_k est la k-ième dérivée partielle de f en a.

Preuve :
On a $\varphi(t) = f(a + te_k) = f(a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k + t, a_{k+1}, \ldots, a_p)$.
Donc φ est dérivable en 0 ssi la fonction $x_k \mapsto f(a_1, \ldots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \ldots, a_p)$ est dérivable en a_k.
Ainsi, la dérivée directionnelle de f en a selon la direction e_k est égale à la k-ième dérivée partielle de f en a.

Application : Étudier la dérivée directionnelle en toutes les directions au point $(0,0)$ de la fonction $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

✖ **Attention** ✖ Cette notion de dérivée directionnelle est encore trop faible pour garantir la continuité de f en a.

Application : Considérer $f(x,y) = \frac{y^2}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(x,y) = y$ sinon.

1. Montrer que f admet des dérivées directionnelles en tout point de $\mathbb{R}^2$ et en toute direction.
2. Montrer que f n'est pas continue sur $\mathbb{R}^2$. *Indication : Considérer le point* $(0,1)$ *et* $(\frac{1}{n}, 1) \to (0,1)$.

D Dérivées différentielles (cette fois-ci c'est la bonne !)

La dérivée différentielle est la notion qui assure que si une fonction est différentiable en un point, alors elle est continue en ce point. Soit $f\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ et $a \in U$, où $U \subset \mathbb{R}^p$ est ouvert.

Définition : On dit que f est différentiable en $a \Leftrightarrow \exists Df(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ telle que :

$$f(a+h) = f(a) + Df(a) \cdot h + o(\|h\|) \quad \text{quand } h \to 0$$

avec $\forall h \in \mathbb{R}^p, f(a) \in \mathbb{R}^q, Df(a) \cdot h \in \mathbb{R}^q$, et $o(\|h\|) = \|h\|\varepsilon(h)$ où $\varepsilon(h) \to 0$ quand $\|h\| \to 0$.

Exemple : $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f dérivable en $a \in \mathbb{R}$.
$Df(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Dans le cas d'une fonction d'une variable réelle, $Df(a)\colon h \mapsto f'(a)h$. (c'est une multiplication par un scalaire)

Exemple : Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$.
$\forall a \in \mathbb{R}^p, \forall h \in \mathbb{R}^q, f(a+h) = f(a) + f(h)$.
Ainsi, la différentielle de f en a est : $\forall h \in \mathbb{R}^p, Df(a) \cdot h = f(h)$.
Autrement dit, $Df(a) = f$, et la différentielle est indépendante de a.

Proposition : Différentiabilité implique continuité

Si f est différentiable en a, alors f est continue en a.

Preuve :
$\forall h \in \mathbb{R}^p, f(a+h) = f(a) + Df(a) \cdot h + o(\|h\|)$.
On a : $\|f(a+h) - f(a)\| \leq \|Df(a) \cdot h\| + \|o(\|h\|)\|$. (car $\|\cdot\|$ est une norme)
$= \|Df(a) \cdot h\| + \|h\|\|\varepsilon_a(h)\|$.
$\leq C_a\|h\| + \|h\|\|\varepsilon_a(h)\|$ où C_a est une constante telle que $\|Df(a) \cdot h\| \leq C_a\|h\|$ (par continuité automatique des applications linéaires en dimension finie).
Or $\|h\|\varepsilon_a(h) \to 0$ quand $\|h\| \to 0$.

Donc $\|f(a+h)-f(a)\| \to 0$ quand $\|h\| \to 0$.
Ainsi, f est continue en a.

Proposition : Lien avec les dérivées directionnelles

Si f est différentiable en a, alors f admet des dérivées directionnelles en a selon toutes les directions et on a :

$$\forall h \in \mathbb{R}^p, \quad \text{la dérivée directionnelle de } f \text{ en } a \text{ selon la direction } h \text{ est } Df(a) \cdot h$$

Preuve :
On a $\forall t \in \mathbb{R}, \forall h \in \mathbb{R}^p, f(a+th) = f(a) + Df(a)\cdot(th) + \|th\|\varepsilon_a(th)$. (car f est différentiable en a)
$= f(a) + t(Df(a)\cdot h) + |t|\|h\|\varepsilon_a(th)$.
On veut montrer que $t \mapsto f(a+th)$ est dérivable en 0.
Par ce qui précède, on a :
$f(a+h) - f(a) = t(Df(a)\cdot h) + |t|\|h\|\varepsilon_a(th)$.
$\Rightarrow \frac{f(a+th)-f(a)}{t} = Df(a)\cdot h + \frac{|t|}{t}\|h\|\varepsilon_a(th)$.
En passant à la limite quand $t \to 0$, on obtient : $\lim_{t\to 0} \frac{f(a+th)-f(a)}{t} = Df(a)\cdot h$.
Donc $t \mapsto f(a+th)$ est dérivable en 0 et sa dérivée en 0 est $Df(a)\cdot h$.
Ainsi, f admet une dérivée directionnelle en a selon la direction h.

Proposition : Lien avec le gradient *(admis)*

On a que la dérivée directionnelle de f en a selon la direction h est donnée par $Df(a)\cdot h =< \nabla f(a), h >$ où $\nabla f(a)$ est le gradient de f en a.

Exemple : Posons $f(x,y,z) = x^2 \cdot (1 + z\cdot cos(y))$.
On admet que $\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x(1+z\cdot cos(y)) \\ -x^2 z \cdot sin(y) \\ x^2 \cdot cos(y) \end{pmatrix}$.

Donc la dérivée directionnelle de f le long du vecteur $(1,1,1)$ au point $(1,\pi,1)$ est :

$$Df(1,\pi,1)\cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} =< \nabla f(1,\pi,1), (1,1,1) >$$

Or $\nabla f(1,\pi,1) = \begin{pmatrix} 2(1+1\cdot cos(\pi)) \\ -1^2 \cdot 1 \cdot sin(\pi) \\ 1^2 \cdot cos(\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Donc la dérivée directionnelle de f le long du vecteur $(1,1,1)$ au point $(1,\pi,1)$ est $< (0,0,-1),(1,1,1) >= -1$.

Remarque : Il existe des fonctions qui admettent des dérivées directionnelles en un point selon toutes les directions mais qui ne sont pas différentiables en ce point.

Contre-Exemple : Considérons $\|\cdot\| : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ une norme quelconque. C'est une fonction à plusieurs variables.
Montrons que $\|\cdot\|$ n'est pas différentiable en $a = 0$ (si elle l'était, par la proposition précédente, elle serait dérivable dans toutes les directions en a).
On a $\forall t \in \mathbb{R}, \forall h \in \mathbb{R}^p, \|th\| = |t|\|h\|$.
On a $\frac{\|0+th\|-\|0\|}{t} = \frac{\|th\|}{t} = \frac{|t|}{t}\|h\|$.
En passant à la limite quand $t \to 0$, on constate que la limite n'existe pas (car $\frac{|t|}{t}$ n'a pas de limite quand $t \to 0$).
Ainsi, $\|\cdot\|$ n'admet pas de dérivée directionnelle en 0 selon la direction h.
Donc $\|\cdot\|$ n'est pas différentiable en 0.

Note de rédaction : Les prochains théorèmes sont compliqués et leur preuve dépasse le cadre de ce cours. Ils seront donnés dans un cadre réduit et admis sans preuve.

Gradient d'une fonction numérique

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ où $U \subset \mathbb{R}^p$ est ouvert.
On a définir le gradient de f.

Supposons f différentiable en $a \in U$.
On a $Df(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$ (la différentielle est une forme linéaire).
Prenons $h, k \in \mathbb{R}^p$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$.
Donc $h = (h_1, h_2, \dots, h_p)$ et $k = (k_1, k_2, \dots, k_p)$ (considérer plutôt des vecteurs colonnes, mais pas évident à écrire ici).
On note : $< h, k >= \sum_{i=1}^p h_i k_i$ (HP : produit scalaire).
On veut $Df(a) \cdot h =< *, h >$ pour un certain $* \in \mathbb{R}^p$.
Si $h = \sum_{i=1}^p h_i e_i$ où e_i est le i-ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^p$, on a :
$Df(a)h = \sum_{i=1}^p Df(a)(h_i e_i) = \sum_{i=1}^p h_i Df(a) e_i$.
On note : $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = Df(a)e_i$ (la i-ième dérivée partielle de f en a).
Donc : $Df(a)h = \sum_{i=1}^p h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.
Pour écrire cela sous la forme $< *, h >$, on pose :

$$\nabla f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_p}(a) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$$

(On appelle $\nabla f(a)$ le gradient de f en a)
On a donc : $Df(a)h =< \nabla f(a), h >$.

Définition : Un point critique de f est un point x où $\nabla f(x) = 0$.

Si $f : U \to \mathbb{R}^q$ alors on a $\forall h \in \mathbb{R}^p, Df(a)h = Df(a) \cdot \sum_{i=1}^p h_i e_i = \sum_{i=1}^p h_i Df(a) e_i$.
$= \sum_{i=1}^p h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ où $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \in \mathbb{R}^q$ est la i-ième dérivée partielle de f en a.
$= \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) e_i^*$.
En notant $e_i^* = dx_i$ (forme linéaire sur $\mathbb{R}^p$), on a : $Df(a) = \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) dx_i$.

Matrice jacobienne
Soit $f : U \to \mathbb{R}^q$ où $U \subset \mathbb{R}^p$ est ouvert.
Supposons f différentiable en $a \in U$.

Définition : La jacobienne est la matrice de $Df(a)$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$.
Elle est notée $J_f(a) \in M_{q,p}(\mathbb{R})$.
On a :

$$Jf(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_p}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_q}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_q}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_q}{\partial x_p}(a) \end{pmatrix} = (\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a))_{1 \le i \le q, 1 \le j \le p}$$

Remarque : On remarque que $J_f(a) = {}^t(\nabla f(a))$

Exemple : $f : (r, \theta) \mapsto (x, y) = (r \cos\theta, r \sin\theta)$. (coordonnées polaires vers cartésiennes)
$J_f(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$ (cas où $p = q = 2$)

Définition : Si $p = q$, alors $J_f(a) \in M_p(\mathbb{R})$.
On définit le déterminant jacobien de f en a comme étant : $\det J_f(a)$.

III Fonctions C^1, C^2

Supposons $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (vrai pour $\mathbb{R}^q$)

Définition : On dit que f est continuement différentiable sur U si : $a \in U \mapsto Df(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ est continue sur U.
Ce qui est équivalent à : $\forall h \in \mathbb{R}^2, a \mapsto Df(a) \cdot h$ est continue sur U.

Théorème :

f est différentiable sur $U \Leftrightarrow$ les dérivées partielles sont continues sur U.

C'est à dire, $a \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(a)$ et $a \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(a)$ sont continues sur U.

Exemple : Dans le cas de notre example précédent, le jacobien est : $det J_f(r, \theta) = r$.
Donc f est différentiable en tout point (r, θ) avec $r \neq 0$.

Définition : $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est de classe C^1 sur U si f est différentiable sur U et si les dérivées partielles de f sont continues sur U.

Etant donnée $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur U, on peut se demander si f est plus régulière : est-elle de classe C^2 ?
Considérons la fonction qui $a \in U \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(a)$. (de même en remplaçant x par y)
On peut se demander si les dérivées partielles des dérivées partielles existent et sont continues.

Définition : f est de classe C^2 sur U si f est de classe C^1 sur U et si les dérivées partielles de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont continues sur U.
On note : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Exemple : $f(x, y) = x^2 y + y^2$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ car toutes ses dérivées partielles d'ordre 1 et 2 existent et sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

Théorème de Schwarz : *(admis)*

Si f est de classe C^2 sur U, alors :

$$\forall (x, y) \in U, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$$

On a la commutativité des dérivées partielles d'ordre 2.

Il est alors naturel de considérer la matrice $Hf(a) \in M_2(\mathbb{R})$ définie par :

$$Hf(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \end{pmatrix}$$

Le Théorème de Schwarz assure que $Hf(a)$ est une matrice symétrique (i.e. $Hf(a) = {}^t Hf(a)$).
Cela nous permet d'écrire deux développements de Taylor d'ordre 1 et 2 pour f en a :
Si f est C^1, $f(a + (h, k)) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a)k + o(\|(h, k)\|)$ quand $(h, k) \to (0, 0)$.
Et à l'ordre 2, si f est C^2,
$f(a + (h, k)) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a)k + \frac{1}{2}(h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)) + o(\|(h, k)\|^2)$ quand $(h, k) \to (0, 0)$.

Bonnes vacances et bonnes révisions ! :)