Chapitre 3 : Probabilités conditionnelles et indépendance

I Définitions

Définition : Soit $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(B) > 0$.
La **probabilité conditionnelle** de A sachant B est définie par :

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \quad \mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Exemple : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (lancer de dé équilibré).
$B = \{2, 4, 6\}$ (obtenir un nombre pair). $A = \{2\}$.
On se muni de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$ définie par $\mathbb{P}(\{i\}) = \frac{1}{6}$ pour tout $i \in \Omega$.
La probabilité que si on obtient un nombre pair, ce soit un 2 est :

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$$

Remarque : On a que $\mathbb{P}(A \mid \Omega) = \mathbb{P}(A)$.

II Propriétés des probabilités conditionnelles

Proposition :

Soit $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(B) > 0$.
Alors $\mathbb{P}_B = \mathbb{P}(\cdot \mid B)$ est une probabilité sur Ω où pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A \mid B)$.

Démonstration :
Vérifions les axiomes de la probabilité :

1. $\mathbb{P}_B(\emptyset) = \mathbb{P}(\emptyset \mid B) = \frac{\mathbb{P}(\emptyset \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{0}{\mathbb{P}(B)} = 0$ et $\mathbb{P}_B(\Omega) = \mathbb{P}(\Omega \mid B) = \frac{\mathbb{P}(\Omega \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = 1$.

2. On a que $\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(B)$ donc $\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \leq 1$.

3. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite finie ou dénombrable de parties de Ω telles que $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour $i \neq j$.
   Alors :
   $$\mathbb{P}_B\left(\bigcup_n A_n\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_n A_n \mid B\right) = \frac{\mathbb{P}\left(\left(\bigcup_n A_n\right) \cap B\right)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}\left(\bigcup_n (A_n \cap B)\right)}{\mathbb{P}(B)}$$
   Or, comme les A_n sont disjoints, les $A_n \cap B$ le sont aussi. Donc :
   $$\mathbb{P}_B\left(\bigcup_n A_n\right) = \frac{\sum_n \mathbb{P}(A_n \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \sum_n \frac{\mathbb{P}(A_n \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \sum_n \mathbb{P}_B(A_n)$$

□

Proposition : Formule des probabilités totales

Soit $(B_n)_n$ une suite de parties dénombrable de Ω telles que :

1. $\forall i \neq j, B_i \cap B_j = \emptyset$
2. $\bigcup_n B_n = \Omega$
3. $\forall n, \mathbb{P}(B_n) > 0$

Alors, pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, on a :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_n \mathbb{P}(A \mid B_n) \cdot \mathbb{P}(B_n)$$

Démonstration :
$E = \bigcup_n \underbrace{(E \cap B_n)}_{F_n}$ car $\bigcup_n B_n = \Omega$. De plus, $F_i \cap F_j = \emptyset$ pour $i \neq j$.
Donc :

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}\left(\bigcup_n F_n\right) = \sum_n \mathbb{P}(F_n) = \sum_n \mathbb{P}(E \cap B_n)$$

Or, $\mathbb{P}(E \cap B_n) = \mathbb{P}(E \mid B_n) \cdot \mathbb{P}(B_n)$.
D'où le résultat. □

Proposition : Formule de Bayes

Soit $(B_n)_n$ une suite de parties dénombrable de Ω telles que :

1. $\forall i \neq j, B_i \cap B_j = \emptyset$
2. $\bigcup_n B_n = \Omega$
3. $\forall n, \mathbb{P}(B_n) > 0$

Alors, pour tout $E \in \mathcal{P}(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(E) > 0$, on a :

$$\forall k, \quad \mathbb{P}(B_k \mid E) = \frac{\mathbb{P}(E \mid B_k) \cdot \mathbb{P}(B_k)}{\sum_n \mathbb{P}(E \mid B_n) \cdot \mathbb{P}(B_n)}$$

Démonstration :
Par définition de la probabilité conditionnelle, on a : $\mathbb{P}(B_k \mid E) = \frac{\mathbb{P}(E \cap B_k)}{\mathbb{P}(E)} = \frac{\mathbb{P}(E \mid B_k) \cdot \mathbb{P}(B_k)}{\mathbb{P}(E)}$.
Or, par la formule des probabilités totales, on a : $\mathbb{P}(E) = \sum_n \mathbb{P}(E \mid B_n) \cdot \mathbb{P}(B_n)$.
D'où le résultat. □

Exemple : Imaginons qu'on ait une maladie rare qui touche 1 personne sur 100.
ie $\mathbb{P}(M) = 0.01$ où M est l'événement "la personne est malade" (prévalence).
De plus, $\mathbb{P}(T+ \mid M) = 0.99$ où $T+$ est l'événement "le test est positif" (sensibilité).
Cependant, le test n'est pas parfait et on a $\mathbb{P}(T- \mid M^c) = 0.95$ où $T-$ est l'événement "le test est négatif" (spécificité).

Question : Quelle est la probabilité qu'une personne soit malade sachant que son test est positif ?

On cherche donc $\mathbb{P}(M \mid T+)$. Par la formule de Bayes, on a :

$$\mathbb{P}(M \mid T+) = \frac{\mathbb{P}(T+ \mid M) \cdot \mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(T+ \mid M) \cdot \mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(T+ \mid M^c) \cdot \mathbb{P}(M^c)}$$

Or, $\mathbb{P}(T+ \mid M^c) = 1 - \mathbb{P}(T- \mid M^c) = 1 - 0.95 = 0.05$ et $\mathbb{P}(M^c) = 1 - \mathbb{P}(M) = 0.99$.
Donc :

$$\mathbb{P}(M \mid T+) = \frac{0.99 \cdot 0.01}{0.99 \cdot 0.01 + 0.05 \cdot 0.99} \approx 0.166$$

Ainsi, même si le test est positif, la probabilité que la personne soit réellement malade n'est qu'environ de 16.6%.

III Indépendance

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Définition : Soient $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$.
On dit que A et B sont **indépendants** si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$.

Exemple : $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ et $\mathbb{P}(\{i\}) = \frac{1}{6}$ pour tout $i \in \Omega$.
$A =$"obtenir un nombre pair" = $\{2,4,6\}$ et $B =$ "obtenir un nombre multiple de 3" = $\{3,6\}$.
On a : $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
De plus, $A \cap B = \{6\}$ donc $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{6} = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$.
Ainsi, A et B sont indépendants pour la probabilité $\mathbb{P}$.

Regardons maintenant les cas avec un dé truqué où $\mathbb{T}(\{1\}) = 0$ et donc $\mathbb{T}(\{\omega\}) = \frac{1}{5}$ pour tout $\omega \in \{2,3,4,5,6\}$.
On a : $\mathbb{T}(A) = \frac{3}{5}$ et $\mathbb{T}(B) = \frac{2}{5}$.
De plus, $A \cap B = \{6\}$ donc $\mathbb{T}(A \cap B) = \frac{1}{5} \neq \mathbb{T}(A) \cdot \mathbb{T}(B) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{25}$.
Ainsi, A et B ne sont pas indépendants pour la probabilité $\mathbb{T}$.

Proposition :

Soient $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ tels que $\mathbb{P}(B) > 0$.
Alors, A et B sont indépendants si et seulement si $\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A)$.

Démonstration : $\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A)$ $\square$

Remarque : Autrement dit, la réalisation de B n'apporte aucune information sur la réalisation de A.

Remarque : Si A est tel que $\mathbb{P}(A) = 0$, alors A est indépendant de tout événement B.
Tout $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ est indépendant de Ω et de $\emptyset$.

Proposition :

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. A et B sont indépendants
2. A et B^c sont indépendants
3. A^c et B sont indépendants
4. A^c et B^c sont indépendants

Application : Démontrer l'équivalence de ces assertions.

Définition : Soient $E_1, E_2, \ldots, E_n \in \mathcal{P}(\Omega)$.
On dit que $E_1, E_2, \ldots, E_n$ sont **indépendants** *(ou que la famille $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$ est indépendante)* si :

$$\forall k \in S_n, \forall 1 \leq_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n, \quad \mathbb{P}(\bigcap_{l=1}^{k} E_{i_l}) = \prod_{l=1}^{k} \mathbb{P}(E_{i_l})$$

Exemple : On pose $n = 2$, on a (E_1, E_2) et donc la définition usuelle de l'indépendance.
Si $n = 3$, on a (E_1, E_2, E_3) et la famille est indépendante si :

$$\begin{aligned}
&k = 2 : \\
&\mathbb{P}(E_1 \cap E_2) = \mathbb{P}(E_1) \cdot \mathbb{P}(E_2) \\
&\mathbb{P}(E_1 \cap E_3) = \mathbb{P}(E_1) \cdot \mathbb{P}(E_3) \\
&\mathbb{P}(E_2 \cap E_3) = \mathbb{P}(E_2) \cdot \mathbb{P}(E_3) \\
&k = 3 : \\
&\mathbb{P}(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \mathbb{P}(E_1) \cdot \mathbb{P}(E_2) \cdot \mathbb{P}(E_3)
\end{aligned}$$

Exemple : On lance deux pièces équilibrées.
$\Omega = \{P, F\}^2$ et $\mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{4}$ pour tout $\omega \in \Omega$.
On pose : $A = \{PF, PP\}$, $B = \{FP, PP\}$ et $C = \{FF, PP\}$.
On a : $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{1}{2}$.
De plus, $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(B \cap C) = \frac{1}{4}$.
Cependant, $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(\{PP\}) = \frac{1}{4} \neq \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C) = \frac{1}{8}$.
Ainsi, A, B et C sont deux à deux indépendants mais pas indépendants en famille.

Proposition : *(admis)*

Soit $(E_1, E_2, \ldots, E_n)$ une famille d'événements indépendants et soit $\forall i \in S_n, F_i \in \{E_i, E_i^c\}$.
Alors, la famille $(F_1, F_2, \ldots, F_n)$ est indépendante.

Exemple : On prend (E_1, E_2, E_3) une famille d'événements indépendants.
Alors par exemple (E_1^c, E_2^c, E_3) est aussi une famille d'événements indépendants.

Définition : Soit $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dénombrable d'événements.
On dit que cette suite est **indépendante** si :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k, \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{l=1}^{k} E_{i_l}\right) = \prod_{l=1}^{k} \mathbb{P}(E_{i_l})$$

Autrement dit, cette suite est indépendante si toute famille finie d'événements de cette suite est indépendante.

Proposition : *(admis)*

Soit $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements indépendants.
Si (E_n) est indépendante, alors pour toute sous-suite (E_{n_i}) on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{+\infty} E_{n_i}\right) = \prod_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(E_{n_i}) := \lim_{N \to +\infty} \prod_{i=1}^{N} \mathbb{P}(E_{n_i})$$

Démonstration :
$C_N = \bigcap_{i=1}^{N} E_{n_i}$.
D'où $C_{N+1} \subset C_N$. $\mathbb{P}(\bigcap_N C_N) = \lim_{N \to +\infty} \mathbb{P}(C_N)$.
$\Leftrightarrow \mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{+\infty} E_{n_i}) = \lim_{N \to +\infty} \prod_{i=1}^{N} \mathbb{P}(E_{n_i})$ (par indépendance). $\square$

Contents