Chapitre 2.2 : Séries absolument convergentes et critères de convergence

Série absolument convergente (ACV)

Critère de Cauchy pour les séries numériques

Ce qui a été fait dans le Chapitre 1 - Suites de Cauchy sur les suites réelles reste valable si on considère des suites complexes.

Définition : On dit que la série $\sum_{n>0} u_n$ vérifie le **critère de Cauchy** si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall N \geq N_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}, |\sum_{k=N}^{N+p} u_k| < \varepsilon$$

Proposition : Convergence et critère de Cauchy

 $\sum_{n\geq 0} u_n$ vérifie le critère de Cauchy $\Leftrightarrow \sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

Preuve: (par équivalence)

 $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge $\Leftrightarrow (S_N)$ converge $\Leftrightarrow (S_N)$ est une suite de Cauchy (car l'espace est complet) $\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists N_\varepsilon\in S_N$ $\mathbb{N}, \forall N \geq N_{\varepsilon}, \forall p \in \mathbb{N}, |S_{N+p} - S_N| < \varepsilon \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_{\varepsilon} \in \mathbb{N}, \forall N \geq N_{\varepsilon}, \forall p \in \mathbb{N}, |\sum_{n=N}^{N+p} u_n| < \varepsilon$

1 Remarque : Autre preuve de la divergence de la série harmonique :

Soit $\varepsilon=1/2$. Pour tout $N\in\mathbb{N}$, on peut choisir p=N et on a : $|\sum_{k=N}^{2N}\frac{1}{k}|\geq\sum_{k=N}^{2N}\frac{1}{2N}=\frac{1}{2}$. Donc la série harmonique ne vérifie pas le critère de Cauchy, donc elle diverge.

Définitions et propriétés

Définition : On dit que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est absolument convergente (ACV) si la série $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ converge.

Théorème : Série ACV et convergence

Série ACV \Rightarrow série convergente et $|\sum_{n=0}^{\infty} u_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$.

Preuve:

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série ACV. Donc $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ converge.

Donc $\sum_{n\geq 0}|u_n|$ vérifie le critère de Cauchy : $\forall \varepsilon>0, \exists N_\varepsilon\in\mathbb{N}, \forall N\geq N_\varepsilon, \forall p\in\mathbb{N}, |\sum_{k=N+1}^{N+p}|u_k||<\varepsilon$

 $\begin{array}{l} \text{Donc } \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall N \geq N_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}, |\sum_{k=N+1}^{N+p} u_k| \leq \sum_{k=N+1}^{N+p} |u_k| < \varepsilon \\ \text{Ainsi } \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall N \geq N_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}, |\sum_{k=N}^{N+p} u_k| < \varepsilon \\ \text{Donc } \sum_{n \geq 0} u_n \text{ v\'erifie le crit\`ere de Cauchy.} \end{array}$

Donc $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge et on a $|\sum_{n=0}^N u_n| \leq \sum_{n=0}^N |u_n| \implies |\sum_{n=0}^\infty u_n| \leq \sum_{n=0}^\infty |u_n|$.

X Attention **X** La réciproque est fausse.

Exemple: La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente, mais elle n'est pas absolument convergente car $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

Convergence absolue d'une série

Note de rédaction : Correspond à II. dans le plan de cours du prof.

Séries à termes positifs

Théorème:

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans \mathbb{R}^+ .

Alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ ($u_n\geq 0$) converge \Leftrightarrow la suite (S_N) des sommes partielles est bornée.

En effet, $S_{N+1} - S_N = u_{N+1} \ge 0$ donc (S_N) est croissante (à termes positifs).

Ainsi (S_N) converge $\Leftrightarrow (S_N)$ est bornée (théorème de convergence monotone).

Or $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge \Leftrightarrow (S_N) converge.

Donc $\sum_{n>0} u_n$ converge $\Leftrightarrow (S_N)$ est bornée.

1 Remarque : Si (S_N) n'est pas bornée, alors $S_N \xrightarrow[N \to \infty]{} +\infty$. On tolère la notation $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = +\infty$.

Application : Application du théorème.

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries à termes positifs. Montrons que la série $\sum_{n\geq 0} \sqrt{u_n v_n}$ converge. En effet, utilisons l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

$$\forall N \in \mathbb{N}, \sum_{n=0}^{N} \sqrt{u_n v_n} \le \sqrt{\sum_{n=0}^{N} u_n} \sqrt{\sum_{n=0}^{N} v_n}.$$

Or les deux termes de droite sont bornés, donc $\forall N \in \mathbb{N}, \sum_{n=0}^{N} \sqrt{u_n v_n}$ est bornée.

Donc $\sum_{n\geq 0} \sqrt{u_n v_n}$ converge.

Autre preuve (sans Cauchy-Schwarz):

$$(a-b)^2 \ge 0 \Leftrightarrow ab \le \frac{a^2+b^2}{2} \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{split} &(a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow ab \leq \frac{a^2+b^2}{2} \forall a,b \in \mathbb{R}. \\ &\text{Donc } \sum_{n=0}^N \sqrt{u_n v_n} \leq \frac{1}{2} (\sum_{n=0}^N u_n + \sum_{n=0}^N v_n). \end{split}$$

Or les deux termes de droite sont bornés, donc $\forall N \in \mathbb{N}, \sum_{n=0}^{N} \sqrt{u_n v_n}$ est bornée.

Donc $\sum_{n\geq 0} \sqrt{u_n v_n}$ converge.

🗩 Note de rédaction : On a pas encore abordé Cauchy-Schwarz.

Proposition:

Soient $\sum_{n>0} u_n$ et $\sum_{n>0} v_n$ deux séries convergentes (pas forcément à termes positifs mais réels).

Si $u_n \leq v_n \forall n \in \mathbb{N}$, alors $\sum_{n=0}^{\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} v_n$.

Preuve:

On considère la série à termes positifs $\sum_{n>0}(v_n-u_n)$. C'est une série convergente.

On a
$$\sum_{n=0}^{\infty} (v_n - u_n) \ge 0$$

On a $\sum_{n=0}^{\infty}(v_n-u_n)\geq 0$. Or $\sum_{n\geq 0}v_n$ et $\sum_{n\geq 0}u_n$ sont convergentes. Donc on peut écrire : $\sum_{n=0}^{\infty}v_n-\sum_{n=0}^{\infty}u_n=\sum_{n=0}^{\infty}(v_n-u_n)\geq 0$. Donc $\sum_{n=0}^{\infty}u_n\leq\sum_{n=0}^{\infty}v_n$.

Critère de comparaison

Tout cela est fait pour des séries à termes positifs.

Théorème : Critère de comparaison ("Hyper important")

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries à termes positifs.

Supposons que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq v_n$.

- Si $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.
- Si $\sum_{n>0} u_n$ diverge, alors $\sum_{n>0} v_n$ diverge.

Preuve:

- On a $\forall N \in \mathbb{N}, 0 \leq \sum_{n=0}^N u_n \leq \sum_{n=0}^N v_n$. Or $\sum_{n>0} v_n$ converge, donc la suite des sommes partielles $(\sum_{n=0}^N v_n)$ est bornée. Donc la suite des sommes partielles $(\sum_{n=0}^N u_n)$ est bornée et donc $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.
- Comme $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge, la suite des sommes partielles $(\sum_{n=0}^N u_n)$ n'est pas bornée. Et comme $\forall N \in \mathbb{N}, 0 \leq \sum_{n=0}^N u_n \leq \sum_{n=0}^N v_n$, la suite des sommes partielles $(\sum_{n=0}^N v_n)$ n'est pas bornée. Et donc par le théorème de convergence des séries à termes positifs on a que $\sum_{n>0} v_n$ diverge.

Corollaire:

Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries à termes positifs.

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \ge n_0, \frac{u_{n+1}}{u_n} \le \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

Alors:

- Si $\sum_{n>0} v_n$ converge, alors $\sum_{n>0} u_n$ converge.
- Si $\sum_{n>0} u_n$ diverge, alors $\sum_{n>0} v_n$ diverge.

Preuve:

Pour $n \geq n_0$,

$$\begin{array}{l} \text{Fold } n \geq n_0, \\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \times \frac{u_n}{u_{n-1}} \times \ldots \times \frac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n} \times \frac{v_n}{v_{n-1}} \times \ldots \times \frac{v_{n_0+1}}{v_{n_0}} \\ \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_{n_0}} \leq \frac{v_{n+1}}{v_{n_0}} \Rightarrow u_{n+1} \leq k v_{n+1} \text{ avec } k = \frac{u_{n_0}}{v_{n_0}} \in \mathbb{R}_+^* \end{array}$$

- On suppose que $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge.
 - Donc $\sum_{n\geq 0} kv_n$ converge.

Donc par le théorème précédent, comme $\forall n \geq n_0, 0 \leq u_n \leq kv_n$, on a que $\sum_{n>0} u_n$ converge.

- (non démontré en cours)
- Application: applications aux séries absolument convergentes

Proposition:

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à termes réels.

Définissons $u_n^+ = \max(u_n, 0) \ge 0$ et $u_n^- = \max(-u_n, 0) \ge 0$.

On a $\sum_{n>0} u_n$ est ACV.

 $\sum_{n\geq 0} |u_n| \text{ converge} \Leftrightarrow \sum_{n\geq 0} u_n^+ \text{ et } \sum_{n\geq 0} u_n^- \text{ convergent.}$

Preuve:

 \Rightarrow / On a $\forall n \in \mathbb{N}0 \leq u_n^+ \leq |u_n|$ et $0 \leq u_n^- \leq |u_n|$. Donc par le théorème de comparaison, $\sum_{n \geq 0} u_n^+$ et $\sum_{n \geq 0} u_n^-$ convergent.

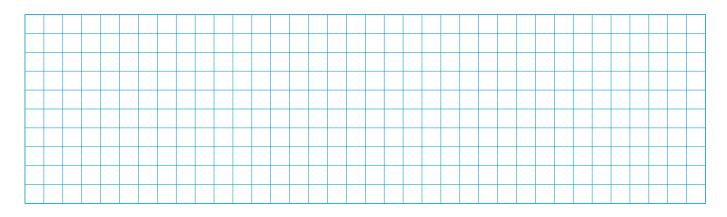
 \Leftarrow / On remarque que $|u_n| = u_n^+ + u_n^-$.

Si $\sum_{n\geq 0} u_n^+$ et $\sum_{n\geq 0} u_n^-$ convergent, alors $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ converge $\Rightarrow \sum_{n>0} u_n$ est ACV.

Proposition:

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à termes complexes. On a $\sum_{n\geq 0} u_n$ est ACV $\Leftrightarrow \sum_{n\geq 0} Re(u_n)$ et $\sum_{n\geq 0} Im(u_n)$ sont ACV.

Application : Montrer la proposition précédente.



Domination, convergence et équivalence

• Rappel : Soient (u_n) et (v_n) deux suites.

- $u_n = O(v_n)$ ssi $\exists M > 0, |u_n| \le M|v_n|$ au voisinage de l'infini (n assez grand) $\Leftrightarrow |\frac{u_n}{v_n}|$ est bornée.
- $u_n = o(v_n)$ ssi $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$. $(u_n \text{ est n\'egligeable devant } v_n)$
- $u_n = o(v_n) \Rightarrow u_n = O(v_n)$
- $u_n \sim v_n$ ssi $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$. $(u_n$ est équivalent à v_n)

Proposition: (admis)

Soient $\sum_{n\geq 0}u_n$ et $\sum_{n\geq 0}v_n$ deux séries à termes positifs. On suppose $u_n=O_{+\infty}(v_n)$.

- Si $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.
- Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge, alors $\sum_{n\geq 0} v_n$ diverge.

Indication pour la preuve:

Il suffit de remarquer que $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} Mv_n$ sont de même nature ; et M est tel que $u_n\leq Mv_n$

X Attention **X** Si on sait que $\sum_{n>0} v_n$ alors pour montrer que $\sum_{n>0} u_n$ converge, il suffit de montrer que $u_n=0$

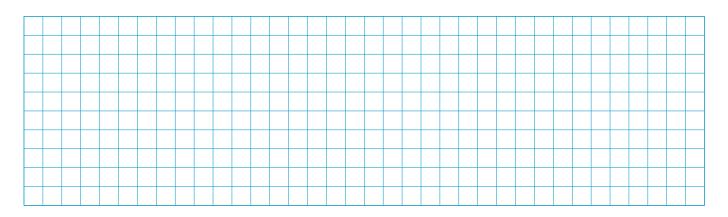
(en réalité il faudrait montrer grand O, mais o ⇒ O donc c'est plus fort et plus simple à montrer)

Corollaire: (admis)

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à terme général dans $\mathbb C$ et soit $\sum_{n\geq 0} v_n$ une série à terme général positif tel que $\sum_{n\geq 0} v_n$

Si $u_n = O_{+\infty}(v_n)$, alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge absolument (ACV).

Application : Montrer le corollaire précédent.



Théorème: "Hyper² important"

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à terme général dans $\mathbb C$ et soit $\sum_{n\geq 0} v_n$ une série à termes positifs.

On suppose $u_n \sim_{+\infty} v_n$.

(on pourrait mettre une constante)

On a:

- Si $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge absolument (ACV).
- Si $\sum_{n\geq 0} v_n$ diverge alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge.

1 Remarque: Si $u_n \ge 0$ alors $\sum_{n>0} u_n$ et $\sum_{n>0} v_n$ sont de même nature.

Séries de références Ш

A Série de Riemann

Théorème:

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\alpha}}$, dite série de Riemann.

La série converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$.

Preuve:

On a vu que pour $\alpha = 1$, la série diverge (série harmonique).

- Si $\alpha \leq 1, \frac{1}{n^{\alpha}} \geq \frac{1}{n}$. Donc par le théorème de comparaison, $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\alpha}}$ diverge.
- \Leftarrow / Supposons $\alpha > 1$.

Considérons la série $\sum_{n>1} u_n$ de terme général $u_n = \frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$.

Observation 1: $\forall N \in \mathbb{N}^*, \sum_{n=1}^N u_n = 1 - \frac{1}{(N+1)^{\alpha-1}} \text{ donc } \sum_{n\geq 1} u_n \text{ converge (car } \alpha-1>0).$ (téléscopage)

Observation 2 : Déterminons un équivalent de u_n .

$$u_n = \frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} = \frac{1}{n^{\alpha-1}} (1 - (\frac{n}{n+1})^{\alpha-1}).$$

 $u_n = \frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} = \frac{1}{n^{\alpha-1}} (1 - (\frac{n}{n+1})^{\alpha-1}).$ On a $(\frac{n}{n+1})^{\alpha-1} = (\frac{n+1-1}{n+1})^{\alpha-1} = (1 - \frac{1}{n+1})^{\alpha-1} = 1 - \frac{\alpha-1}{n} + o_{+\infty}(\frac{1}{n})$ (DL ordre 1). $\Rightarrow 1 - (\frac{n}{n+1})^{\alpha-1} = \frac{\alpha-1}{n} + o_{+\infty}(\frac{1}{n}) \sim_{+\infty} \frac{\alpha-1}{n}.$ Donc $u_n \sim_{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha-1}} \times \frac{\alpha-1}{n} = \frac{\alpha-1}{n^{\alpha}} > 0.$ On a deux séries à termes positifs $\sum_{n \geq 1} u_n$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{\alpha-1}{n^{\alpha}}$ qui sont de même nature car équivalentes $(u_n \sim_{+\infty} \frac{\alpha-1}{n})$ $\frac{\alpha-1}{n^{\alpha}}$). On en déduit que $\sum_{n\geq 1} \frac{\alpha-1}{n^{\alpha}}$ converge pour $\alpha>1$ par le théorème sur les équivalents.

De plus la nature d'une série n'est pas modifiée quand le terme général est multiplié par un scalaire non nul.

Donc $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{\alpha}}$ est de même nature que $\sum_{n\geq 1}\frac{\alpha-1}{n^{\alpha}}$. Donc $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{\alpha}}$ converge.

X Attention X Démonstration probablement en question de cours au partiel/CC :)

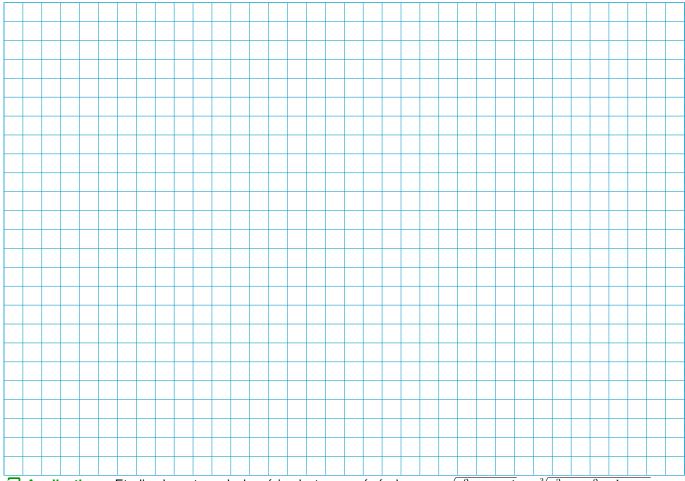
Règles de comparaisons avec les séries de Riemann :

Soient $\sum u_n$ une série de terme général dans $\mathbb C$.

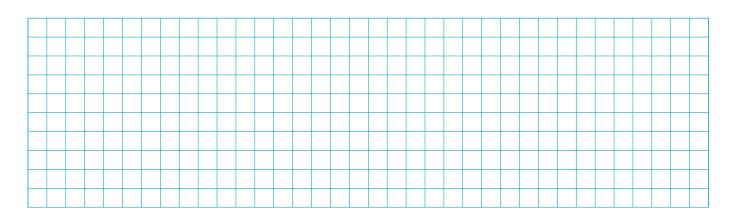
- 1. Si $u_n \sim_{+\infty} k \frac{1}{n^{\alpha}}$ avec $k \in \mathbb{C}^*$.
 - Si $\alpha>1$ alors $\sum_{n\geq 1}u_n$ converge absolument (ACV).
 - Si $\alpha \leq 1$ alors $\sum_{n>1} u_n$ diverge.
- 2. Si $\exists \alpha>1, n^{\alpha}|u_n|$ bornée (i.e. $u_n=O(\frac{1}{n^{\alpha}})$), alors $\sum u_n$ converge absolument (ACV). il suffit de montrer que $u_n=o(\frac{1}{n^{\alpha}})$
- 3. On se restreint à $u_n \in \mathbb{R}$. Si $\exists \alpha \leq 1, n^{\alpha}u_n \xrightarrow[n \to \infty]{} +\infty$, alors $\sum u_n$ diverge.

① Remarque : Penser u_n à terme réel positif et $k \in \mathbb{R}_+^*$ pour la compréhension. (suffisant pour la compréhension et la plupart des exercices)

Application : Montrer les règles de comparaison avec les séries de Riemann.



Application : Etudier la nature de la série de terme général $u_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt[3]{n^3 + an^2 + bn + c}$ avec $a,b,c \in \mathbb{R}$.



Série géométrique

1 Rappel: La série $\sum_{n\geq 0}q^n$ converge $\Leftrightarrow |q|<1$ et dans ce cas $\sum_{n=0}^{\infty}q^n=\frac{1}{1-q}$.

$$\Leftarrow$$
 Si $|q| < 1$, alors $S_N = \sum_{n=0}^N q^n = \frac{1-q^{N+1}}{1-q} \xrightarrow[N \to \infty]{} \frac{1}{1-q}$.

 \Rightarrow Si $|q| \ge 1$, alors $q^n \ne 0$ donc la série diverge (grossièrement).

Règle de Cauchy:

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à terme général dans $\mathbb C.$

On suppose que $\lim_{n\to\infty} |u_n|^{\frac{1}{n}} = l$ (existe et égale à $l \in [0,+\infty]$, $+\infty$ autorisé).

- 1. Si l < 1, alors $\sum_{n>0} u_n$ converge absolument (ACV).
- 2. Si l > 1, alors $\sum_{n>0} u_n$ diverge.
- 3. Si l=1, on ne peut rien conclure.
- Remarque : Comprendre la règle précédente dans le cas réel, terme positif.

Preuve:

1. Si l<1, prenons $\varepsilon>0$ tel que $l+\varepsilon<1$. Or $|u_n|^{\frac{1}{n}}\xrightarrow{n\to\infty}l$, donc $\exists N\in\mathbb{N}, \forall n\geq N, |u_n|^{\frac{1}{n}}\leq l+\varepsilon$.

Donc $|u_n| \leq (l+\varepsilon)^n$ pour $n \geq N$.

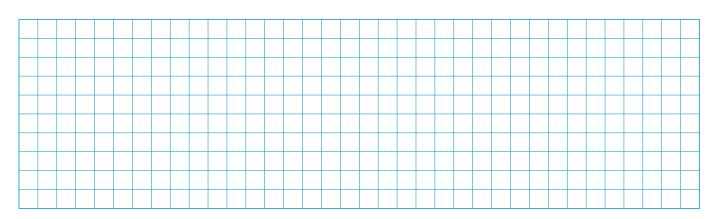
Or la série de terme général $(l+\varepsilon)^n$ est une série géométrique de raison $l+\varepsilon<1$, donc elle converge.

Donc $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

- 2. Laissée à la douce appréciation du lecteur.
- 3. Trouvons une série $\sum_{n\geq 0} u_n$ où $|u_n|^{\frac{1}{n}}\xrightarrow[n\to\infty]{}1$ et où on ne peut rien conclure sur la nature de la série. Si on prend $u_n=\frac{1}{n^{\alpha}}=e^{-\alpha\ln(n)}$, on a bien $u_n^{\frac{1}{n}}=e^{-\alpha\frac{\ln(n)}{n}}\xrightarrow[n\to\infty]{}1 \forall \alpha$.

Or on a convergence pour $\alpha > 1$ et divergence pour $\alpha \le 1$, on ne peut rien conclure.

Application: Etudier la nature de la série de terme général $u_n = \cosh(\frac{1}{n})^{-n^3}$.



Règle de d'Alembert :

Soit $\sum u_n$ une série à terme général dans $\mathbb C$. On suppose que $\lim_{n \to \infty} |\frac{u_{n+1}}{u_n}| = l$ (existe et égale à $l \in [0,+\infty]$, $+\infty$ autorisé).

- 1. Si l < 1, alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge absolument (ACV).
- 2. Si l > 1, alors $\sum_{n>0} u_n$ diverge.
- 3. Si l=1, on ne peut rien conclure.

Preuve:

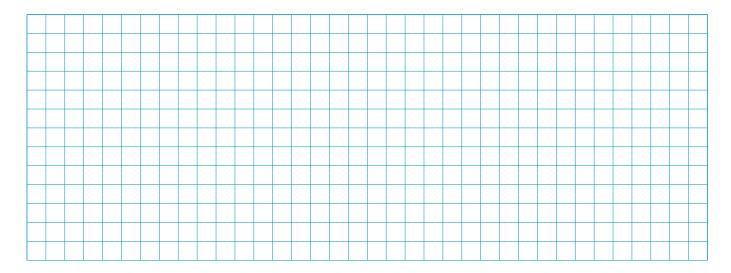
 $\begin{array}{l} \text{1. Si } l<1, \text{ prenons } \varepsilon>0 \text{ tel que } l+\varepsilon<1. \\ \text{Or } |\frac{u_{n+1}}{u_n}| \xrightarrow[n \to \infty]{} l, \text{ donc } \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |\frac{u_{n+1}}{u_n}| \leq l+\varepsilon. \\ \text{Posons } q=l+\varepsilon<1. \\ \text{Ainsi, } |\frac{u_{n+1}}{u_n}| \leq \frac{q^{n+1}}{q^n} \text{ pour } n \geq N. \end{array}$

On a une comparaison du type $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$. On a vu que dans ce cas, $sumb_n$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge.

Or $\sum q^n$ converge (série géométrique de raison q < 1) donc $\sum u_n$ converge (ACV).

- 2. Comme $\lim_{n\to\infty}|\frac{u_{n+1}}{u_n}|=l>1, \exists N\in\mathbb{N}, \forall n\geq N, |\frac{u_{n+1}}{u_n}|\geq 1\Rightarrow |u_n|$ est minorée par n assez grand. Donc $\sum u_n$ diverge.
- 3. Prendre $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\alpha}}$. On a bien $\frac{(n+1)^{\alpha}}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ et la nature dépend de α .

Application: Etudier la nature de la série de terme général $u_n = \frac{n!}{n^n}$.



💬 Note de rédaction : On a évoqué en cours la formule de Stirling pour la culture, mais elle est hors programme : $n! \sim \sqrt{2\pi n} (\frac{n}{e})^n$.

Proposition: Comparaison des règles de d'Alembert et de Cauchy

Soit $\sum u_n$ une série à terme général positif ou nul. On suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n}\xrightarrow[n\to\infty]{}l\in[0,+\infty].$

Alors $u_n^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n \to \infty]{} l$.

Preuve:

On suppose $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l, l>0, l\neq +\infty$.

On a $\forall l_1, 0 < l_1 < l, \sum_{n \geq 0} \frac{l_1^n}{u_n}$ converge par la règle de d'Alembert. En effet, $\frac{l_1^{n+1}}{u_{n+1}} \times \frac{u_n}{l_1^n} = l_1 \times \frac{u_n}{u_{n+1}} \xrightarrow[n \to \infty]{l_1} < 1.$ Par convergence de la série on a que $\frac{l_1^n}{u_n} \xrightarrow[n \to \infty]{0}$.

À partir d'un certain rang, $\frac{l_1^n}{u_n} \leq 1 \Rightarrow l_1^n \leq u_n \Rightarrow l_1 \leq u_n^{\frac{1}{n}}$.

On a $\forall l_2, 0 < l < l_2, \sum_{n \geq 0} \frac{u_n}{l_n^n}$ converge par la règle de d'Alembert.

À partir d'un certain rang (même argument que pour l_1), $u_n \leq l_2^n \Rightarrow u_n^{\frac{1}{n}} \leq l_2$.

Donc $l_1 \le u_n^{\frac{1}{n}} \le l_2$, $\forall l_1 < l < l_2$ pour un n assez grand.

On fait tendre n vers ∞ puis l_1 et l_2 vers l et on en déduit que $u_n^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n \to \infty]{} l$.

X Attention **X** La réciproque est fausse.

Exemple: Contre-exemple.

Soit 0 < a < b. Posons :

$$u_n = \begin{cases} a^p b^p & \text{si n = 2p} \\ a^{p+1} b^p & \text{si n = 2p + 1} \end{cases}$$

On a $u_n^{\frac{1}{n}}\xrightarrow[n\to\infty]{}ab$ (peu importe la parité de n). Mais $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ dépend de la parité de n.

Remarque: Donc on préfère la règle de d'Alembert à celle de Cauchy. Mais si la règle d'Alembert ne donne rien, la règle de Cauchy ne donnera rien non plus.