

# Chapitre 5 : Déterminants

## I Aire algébrique dans le plan

Soit  $E$  un plan sur un corps  $K$ . Soient  $u, v \in E$ . Comment définir  $\mathcal{A}(u, v)$ , l'aire algébrique du parallélogramme construit sur les vecteurs  $u$  et  $v$  ? Propriétés attendues :

- $\mathcal{A}(\lambda u, v) = \lambda \mathcal{A}(u, v)$  pour tout  $\lambda \in K$  (linéarité par rapport au premier argument) ;
- $\mathcal{A}(u, \lambda v) = \lambda \mathcal{A}(u, v)$  pour tout  $\lambda \in K$  (linéarité par rapport au second argument) ;
- $\mathcal{A}(u_1 + u_2, v) = \mathcal{A}(u_1, v) + \mathcal{A}(u_2, v)$  (additivité par rapport au premier argument) ;
- $\mathcal{A}(u, v_1 + v_2) = \mathcal{A}(u, v_1) + \mathcal{A}(u, v_2)$  (additivité par rapport au second argument) ;

Donc les applications  $u \mapsto \mathcal{A}(u, v)$  et  $v \mapsto \mathcal{A}(u, v)$  sont linéaires. De plus,  $\mathcal{A}(u, u) = 0$  pour tout  $u \in E$ . Cela entraîne :  $(u + v, u + v) = 0$

et donc :  $\mathcal{A}(u, u + v) + \mathcal{A}(v, u + v) = 0$

et donc :  $\mathcal{A}(u, u) + \mathcal{A}(u, v) + \mathcal{A}(v, u) + \mathcal{A}(v, v) = 0$

et donc :  $\mathcal{A}(v, u) = -\mathcal{A}(u, v)$  (antisymétrie/alternée).

Soit  $(e_1, e_2)$  une base de  $E$ .

Soient  $u = ae_1 + be_2$  et  $v = ce_1 + de_2$ , avec  $a, b, c, d \in K$ .

On a :  $\mathcal{A}(u, v) = \mathcal{A}(ae_1 + be_2, ce_1 + de_2)$

$= ac\mathcal{A}(e_1, e_1) + ad\mathcal{A}(e_1, e_2) + bc\mathcal{A}(e_2, e_1) + bd\mathcal{A}(e_2, e_2)$

$= (ad - bc)\mathcal{A}(e_1, e_2) = \text{déterminant de } u \text{ et } v \text{ dans la base } (e_1, e_2) \text{ multiplié par } \mathcal{A}(e_1, e_2).$

**✗ Attention ✗** Pour avoir une meilleure idée que le ramassis de maths crachées au tableau, voir cette vidéo (en anglais).

## II Formes multilinéaires

**Définition :** Soit  $E$  un espace vectoriel sur un corps  $K$ , soit  $p$  un entier naturel non nul.

Soit  $f : E^p \rightarrow K$  une application.

On dit que  $f$  est une **forme multilinéaire** si pour tout  $i$  et  $(u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_p) \in E^p$ ,  $u \mapsto f(u_1, \dots, u_{i-1}, u, u_{i+1}, \dots, u_p)$  est une application linéaire de  $E$  dans  $K$ .

Autrement dit,  $f$  est linéaire par rapport à chacun de ses variables.

**🗨 Vocabulaire :** On dit que  $f$  est  $p$ -linéaire. C'est une forme linéaire si  $p = 1$ , une forme bilinéaire si  $p = 2$ .

**Définition :** On dit que  $f$  est **alternée** si pour tout  $(u_1, \dots, u_p) \in E^p$  et pour tout  $i \neq j$ ,  $f(u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_p) = 0_K$  dès que  $u_i = u_j$ .

Autrement dit,  $f$  s'annule si deux de ses arguments sont égaux.

**Définition :** On dit que  $f$  est **antisymétrique** si pour tous  $i, j, i \neq j$  on a  $f(u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_p) = -f(u_1, \dots, u_j, \dots, u_i, \dots, u_p)$ .

Autrement dit, permuter deux arguments de  $f$  change le signe de son image.

**Proposition :**

Soit  $\sigma \in S_p$  une permutation et soit  $f : E^p \rightarrow K$  une forme  $p$ -linéaire.

L'application  $(u_1, \dots, u_p) \mapsto f(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(p)})$  est une forme  $p$ -linéaire notée  $f^\sigma$ .

De plus, si  $f$  est antisymétrique, on a  $f^\sigma = \varepsilon(\sigma)f$  où  $\varepsilon(\sigma)$  est la signature de la permutation  $\sigma$ .

💬 **Note de rédaction** : cf. Laurent pour la preuve

### Théorème : Relation entre alternance et antisymétrie

Toute forme  $p$ -linéaire alternée est antisymétrique.

De plus, si  $2 \neq 0$  (i.e. 2 est inversible dans  $K$ ), toute forme  $p$ -linéaire antisymétrique est alternée.

❗ **Remarque** : Si  $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} := \mathbb{F}_2$  et  $E = \mathbb{K}$ , alors :  $(u = (x, y), v = (z, t)) \mapsto xz + yt$  n'est pas alternée car  $(1, 0)$  et  $(0, 1)$  sont distincts mais l'image est 1. Cependant, cette application est antisymétrique car  $1 = -1$  dans  $\mathbb{F}_2$ .

### Proposition :

Soit  $f$  une forme  $p$ -linéaire alternée.

Soit  $(u_1, \dots, u_p) \in E^p$  et soit  $i \in \{1, \dots, p\}$ .

Soit  $v_i = u_i +$  combinaison linéaire de  $u_1, \dots, \hat{u}_i, \dots, u_p$  (c'est-à-dire des  $u_j$  avec  $j \neq i$ ).

Alors  $f(u_1, \dots, u_{i-1}, v_i, u_{i+1}, \dots, u_p) = f(u_1, \dots, u_p)$ .

💬 **Vocabulaire** : On note  $(u_1, \dots, \hat{u}_i, \dots, u_p)$  la famille obtenue en supprimant  $u_i$  de la famille  $(u_1, \dots, u_p)$ .

## III Cas des formes $n$ -linéaires alternées sur un espace vectoriel de dimension $n$

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  sur un corps  $K$ , et soit  $B = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . *But : déterminer les formes  $n$ -linéaires alternées sur  $E$ .*

### Proposition : Formule de développement d'une forme $n$ -linéaire alternée

Soit  $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$ .

Posons  $u_j = \sum_{i=1}^n \lambda_{ij} e_i$  avec  $\lambda_{ij} \in K$ .

Soit  $f$  une forme linéaire alternée sur  $E$ .

On a :  $f(u_1, \dots, u_n) = \left( \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \left( \prod_{j=1}^n \lambda_{\sigma(j), j} \right) \right) f(e_1, \dots, e_n)$ .

❗ **Remarque** : Pour  $n = 1$ , on a :  $f(u_1) = \lambda_{11} f(e_1)$  (linéarité).

Pour  $n = 2$ , on a :  $f(u_1, u_2) = (\lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{21}\lambda_{12})f(e_1, e_2)$  (déjà vu dans le cas bilinéaire).

Pour  $n = 3$ , on a :  $f(u_1, u_2, u_3) = (\lambda_{11}\lambda_{22}\lambda_{33} + \lambda_{21}\lambda_{32}\lambda_{13} + \lambda_{31}\lambda_{12}\lambda_{23} - \lambda_{31}\lambda_{22}\lambda_{13} - \lambda_{21}\lambda_{12}\lambda_{33} - \lambda_{11}\lambda_{32}\lambda_{23})f(e_1, e_2, e_3)$ .

Il y a  $n!$  termes dans la formule. On a l'intuition que ça ressemble à un déterminant.

❗ **Remarque** : Le facteur de gauche dans la formule est indépendant de  $f$ . Celui de droite est indépendant des  $u_i$ .

💬 **Note de rédaction** : cf. Laurent pour la preuve

### Théorème :

1. Il existe une unique forme linéaire alternée  $f_0$  sur  $E$  telle que  $f_0(e_1, \dots, e_n) = 1$ .

Elle est donnée par :  $f_0(u_1, \dots, u_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \left( \prod_{j=1}^n \lambda_{\sigma(j), j} \right)$  où  $u_j = \sum_{i=1}^n \lambda_{ij} e_i$ .

2. Soit une forme  $n$ -linéaire alternée  $f$  sur  $E$ .

Il existe un unique  $\lambda \in K$  tel que  $f = \lambda f_0$ .

En particulier, on a  $\lambda = f(e_1, \dots, e_n)$ .

## IV Déterminant d'un endomorphisme

Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ , et soit  $B$  une base de  $E$ .

### Théorème :

Soit  $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ .

Alors il existe un unique scalaire  $\lambda \in K$  tel que pour tout  $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$ , on a :

$$\det_B(\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_n)) = \lambda \det_B(u_1, \dots, u_n).$$

Alors  $\lambda$  est indépendant de  $B$ . C'est le **déterminant** de  $\varphi$ , noté  $\det(\varphi)$ .

💬 **Note de rédaction** : cf. Laurent pour la preuve

### Théorème : Composition

Soient  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{L}(E)$ .

On a :  $\det(\varphi_1 \circ \varphi_2) = \det(\varphi_1) \times \det(\varphi_2)$ .

### Corollaire : Isomorphisme et déterminant

Soit  $\varphi \in \mathcal{L}(E)$  un isomorphisme.

Alors  $\det(\varphi) \neq 0_K$  et  $\det(\varphi^{-1}) = (\det(\varphi))^{-1}$ .

### Corollaire : Matrices

Soient  $A, B \in M_n(K)$ . On a :

1.  $\det(AB) = \det(A)\det(B)$  ;
2. Si  $A$  et  $B$  sont semblables, alors  $\det(A) = \det(B)$ .
3. Si  $A$  est inversible, alors  $\det(A) \neq 0_K$  et  $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$ .

## V Calcul de déterminants

### Proposition :

Soit  $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$  avec  $a_{in} = 0$  si  $i < n$ .

$$\text{On a donc } A_{n,m} = \begin{pmatrix} 0 \\ (*) \\ \vdots \\ 0 \\ a_{nn} \end{pmatrix}$$

Posons  $A_{ij} \in M_{n-1}(K)$  la matrice obtenue en supprimant la  $i$ -ème ligne et la  $j$ -ème colonne de  $A$ .

💬 **Vocabulaire** :

1. Posons  $\Delta_{ij} = \det(A_{ij})$  le **mineur** de  $A$  d'indices  $(i, j)$ .
2. Posons  $(-1)^{i+j} \Delta_{ij}$  le **cofacteur** de  $A$  d'indices  $(i, j)$ .
3. Posons  $\text{com}(A) = ((-1)^{i+j} \Delta_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(K)$  la **comatrice** de  $A$ .

**Théorème :**

On a  $\det(A) = (-1)^{i+1}a_{i1}\Delta_{i1} + \dots + (-1)^{i+n}a_{in}\Delta_{in}$  (développement suivant la  $i$ -ème ligne).  
 $= (-1)^{1+j}a_{1j}\Delta_{1j} + \dots + (-1)^{n+j}a_{nj}\Delta_{nj}$  (développement suivant la  $j$ -ème colonne).

Autrement dit,  $\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j}a_{ij}\Delta_{ij} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j}a_{ij}\Delta_{ij}$ .

**Théorème : Comatrice et transposée**

On a  $A^t \text{com}(A) = \text{com}(A)^t A = \det(A)I_n$ .

**Corollaire : Inversibilité**

On a  $A$  est inversible si et seulement si  $\det(A) \neq 0_K$ .

Dans ce cas,  $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t \text{com}(A)$ .

**VI Application aux systèmes linéaires**

On se donne  $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$  et  $b \in K^n$ . Soit  $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ .

On cherche les solutions  $X \in K^n$  à l'équation  $AX = B$ . En posant  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ , on a le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

**Théorème :**

Si  $\det(A) \neq 0_K$ , alors le système admet une unique solution donnée par  $X = A^{-1}B$  (formule de Cramer).

Plus précisément, la solution  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  vérifie pour tout  $k$  :

$x_k = \frac{\det(A_k(B))}{\det(A)}$  où  $A_k(B)$  est la matrice obtenue en remplaçant la  $k$ -ème colonne de  $A$  par le vecteur  $B$ .

Si  $\det(A) = 0_K$ , le système admet soit aucune, soit une infinité de solutions.

**Exemple :** Pour  $n = 2$ ,  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ .

On a :  $\det(A) = ad - bc$ .

Si  $ad - bc \neq 0$ , on a  $\begin{cases} x_1 = \frac{b_1d - b_2b}{ad - bc} \\ x_2 = \frac{ab_2 - cb_1}{ad - bc} \end{cases}$ .