Chapitre 3 : Espaces vectoriels

I Corps

Définition : Un **corps** est un ensemble K muni de deux lois de composition interne notées $+$ et $\times$ telles que :

- $(K, +)$ est un groupe abélien
- $(K \setminus \{0\}, \times)$ est un groupe abélien
- La loi $\times$ est distributive par rapport à la loi $+$

Si de plus la loi $\times$ est commutative, on dit que K est un **corps commutatif**.

Rappel : Distributivité : $\forall a, b, c \in K, a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

Exemple : $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, p$ premier sont des corps.

II Espaces vectoriels

Définition : Soient K un corps et E un groupe abélien.
Soit une loi : $\begin{matrix} K \times E \to E \\ (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v \end{matrix}$ *(multiplication externe)*.
On dit que $(E, +, \cdot)$ est un K**-espace vectoriel** si on a $\forall \lambda, \mu \in K, \forall v \in E$:

- $\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \times \mu) \cdot v$
- $1 \cdot v = v$
- $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$ *(on a deux + différents)*
- $\lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w$

Vocabulaire : Les éléments de E sont appelés **vecteurs**. Les éléments de K sont appelés **scalaires**.

Exemple : $\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. De même pour $\{0\}$, $\mathbb{R}[X]$, $M_n(\mathbb{R})$.
On peut voir $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Définition : Soit E un K-ev, et soit $(v_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E.
Soit $(\lambda_i)_{i \in I}$ une famille de scalaires de K.
On dit que $(\lambda_i)_{i \in I}$ est presque nulle si : $\{i \in I, \lambda_i \neq 0\}$ est fini.

Alors on considère $\sum_{i \in I, \lambda \neq 0} \lambda_i v_i$ noté $\sum_{i \in I} \lambda_i v_i$. C'est une **combinaison linéaire** des v_i.

Définition : Soit $X \subset E$. Une combinaison linéaire de vecteurs de X est de la forme $\sum_{v \in X} \lambda_v v$ avec $(\lambda_v)_{v \in X}$ presque nulle.

Vocabulaire : Les $(\lambda_v)_{v \in X}$ sont appelés les **coefficients** de la combinaison linéaire.

III Sous-espaces vectoriels

Définition : Soit E un K-ev. Soit $F \subset E$.
On dit que F est un **sous-espace vectoriel** (sous-ev) de E si :

- $F \neq \emptyset$
- $\forall u, v \in F, \lambda, \mu \in K, \lambda u + \mu v \in F$

Proposition : Caractérisation des sous-ev

Tout sous-espace vectoriel est un espace vectoriel pour les lois induites par E.

Preuve:
Montrons $(F, +)$ est un sous-groupe de $(E, +)$:

- $F \neq \emptyset$ donc $\exists u \in F$.
- $\lambda = \mu = 1 \implies u + v \in F, \forall u, v \in F$ donc F est stable par $+$
- $u + (-1)u = u(1 + (-1)) = 0_E \in F$. On a donc $-u \in F, \forall u \in F$.

Donc on a bien un sous-groupe.
Les autres propriétés sont vérifiables et immédiates, on a bien un espace vectoriel

Exemple : Soit E un $\mathbb{K}$-ev.

- $\{0_E\}$ et E sont des sous-ev de E.
- $\{(x, y) \mid ax + by = 0\} \subset \mathbb{R}^2$ est un sous-ev de $\mathbb{R}^2$.

Proposition : Intersection de sev

Soit E un K-ev. Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sev de E.
Alors $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un sev de E.

Preuve:
Montrons que $\bigcap_{i \in I} F_i$ est stable par combinaison linéaire.
Soient $x, y \in \bigcap_{i \in I} F_i$ et $\lambda, \mu \in K$.
On a $x, y \in F_i$ pour tout $i \in I$, donc $\lambda x + \mu y \in F_i$ pour tout $i \in I$.
Donc $\lambda x + \mu y \in \bigcap_{i \in I} F_i$. $\square$

Remarque : L'union de sev n'est pas forcément un sev.

Proposition : Sous-ev engendré

Soit E un K-ev. Soit $X \subset E$.
Alors il existe un plus petit sev de E contenant X, noté Vect(X) et appelé le **sev engendré** par X.
On a Vect$(X) = \{\sum_{x \in X} \lambda_x x \mid (\lambda_x)_{x \in X} \text{est presque nulle}, \lambda_x \in K\} = \bigcap_{\substack{F \text{ sev de } E \\ X \subset F}} F$.

Intuitivement, c'est l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de X.

Rappel : "Presque nulle" signifie que tous les coefficients sont nuls sauf un nombre fini d'entre eux.

Preuve:
Montrons que $Vect(X)$ est un sev de E.
Soient $u, v \in Vect(X)$ et $\lambda, \mu \in K$.
On a $u = \sum_{x \in X} \lambda_x x$ et $v = \sum_{x \in X} \mu_x x$ avec $(\lambda_x)_{x \in X}$ et $(\mu_x)_{x \in X}$ presque nulles.
Donc $\lambda u + \mu v = \sum_{x \in X} (\lambda \lambda_x + \mu \mu_x) x$ est une combinaison linéaire d'éléments de X avec des coefficients presque

nuls.
Donc $\lambda u + \mu v \in Vect(X)$. C'est bien un sev.
On a $X \subset \{CLdeX\}$ car $x = 1 \cdot x + 0 \cdot y, \forall x \in X, y \in E$.
Donc $Vect(X) \subset \{CLdeX\}$.
Réciproquement, $Vect(X)$ est stable par combinaison linéaire et contient X, donc $\{CLdeX\} \subset Vect(X)$. Donc $Vect(X) = \{CLdeX\}$. $\square$.

Remarque : La démonstration est générée par IA, elle diffère de celle du cours.

Proposition : Addition de sev

Soit E un K-ev. Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sev de E.
On peut considérer $Vect(\bigcup_{i\in I} F_i)$, noté $\sum_{i\in I} F_i$ et appelé la **somme** de la famille $(F_i)_{i\in I}$.

Remarque : On note $F_1 + F_2 + \cdots + F_n$ au lieu de $\sum_{i=1}^{n} F_i$.

Proposition : Caractérisation de la somme

Soit E un K-ev. Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sev de E.
Alors $\sum_{i\in I} F_i = \{\sum_{i\in I} x_i \mid x_i \in F_i,$ presque tous nuls$\}$.

Preuve:
Note de rédaction : cf. Laurent

Exemple : Soient F et G deux sev de E.
Alors $F + G = \{x + y \mid x \in F, y \in G\}$.

Proposition : Application

On a une application $\varphi : \begin{smallmatrix} F_1\times F_2\times\cdots\times F_n \to F_1+F_2+\cdots+F_n \\ (x_1,x_2,\dots,x_n)\mapsto x_1+x_2+\cdots+x_n \end{smallmatrix}$.
Elle est surjective.

Vocabulaire : Si de plus l'application φ est injective, alors on dit que la somme $F_1 + F_2 + \cdots + F_n$ est **directe** et on note $F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_n$.

Proposition : Caractérisation de la somme directe

Soient $F_1, F_2, \dots, F_n$ des sev de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- $F_1 + F_2 + \cdots + F_n$ est une somme directe.
- $\forall (u_1, u_2, \dots, u_n) \in F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_n, u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 0_E \implies u_1 = u_2 = \cdots = u_n = 0_E$
- $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, F_i \cap (F_1 + \cdots + F_{i-1}) = \{0_E\}$

Preuve:
Note de rédaction : cf. Laurent

✕ Attention ✕ On a F_1 somme directe avec F_2 ssi $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$. Mais pour avoir $F_1 \oplus F_2$ et $F_1 \oplus F_3$, et $F_2 \oplus F_3 = \{0_E\}$, mais pas forcément $F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$.

Exemple : On prend 3 droites dans le plan passant par l'origine, deux par deux distinctes.
Alors elles sont en somme, mais pas en somme directe.

Vocabulaire : Si $F \oplus G = E$, on dit que F et G sont des **supplémentaires**.

✖ Attention ✖ Le supplémentaire n'est pas unique.

IV Familles

Définition : Soit E un K-ev. Soit I un ensemble.
Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de E.

Soit $J \subset I$. On dit que $(x_i)_{i \in J}$ est une **sous-famille** de $(x_i)_{i \in I}$.

Vocabulaire : À l'inverse, $(x_i)_{i \in I}$ est une **sur-famille** de $(x_i)_{i \in J}$.

Remarque : Dans la pratique, on prend souvent $I = \{1, 2, \dots, n\}$.

Remarque : Soit $X \subset E$. On a une famille $(x)_{x \in X}$ indexée par X.
Donc une combinaison linéaire de X est une combinaison linéaire de la famille $(x)_{x \in X}$. *(la réciproque n'est pas vraie, car il peut y avoir des répétitions dans la famille: x+x n'est pas une combinaison linéaire de X)*

Définition : Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E.
On dit que $(x_i)_{i \in I}$ est **libre** si :
$\forall (\lambda_i)_{i \in I}$ presque nulle, $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0_E \implies \forall i \in I, \lambda_i = 0$.
On dit que $(x_i)_{i \in I}$ est **liée** sinon.

Pour $X \subset E$, on dit que X est une partie libre (resp. liée) si la famille $(x)_{x \in X}$ est libre (resp. liée).

Exemple : Dans $\mathbb{R}^3$, les vecteurs $(1, 0, 0)$ et $(0, 1, 0)$ sont libres.
Les vecteurs $(1, 0, 0)$ et $(2, 0, 0)$ sont liés.

Définition : Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E.
On dit que c'est une **famille génératrice** de E si $Vect(\{x_i \mid i \in I\}) = E$.

Alors tout élément de E s'écrit comme une combinaison linéaire des x_i.
Pour $X \subset E$, on dit que X est une partie génératrice de E si la famille $(x)_{x \in X}$ est génératrice de E.

Proposition : Sous-familles

Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E.
Alors toute sous-famille $(x_j)_{j \in J}$ de $(x_i)_{i \in I}$ est libre (resp. liée) si $(x_i)_{i \in I}$ est libre (resp. liée).
Et toute sur-famille $(x_k)_{k \in K}$ de $(x_i)_{i \in I}$ est génératrice (resp. non génératrice) si $(x_i)_{i \in I}$ est génératrice (resp. non génératrice).

(de même pour un sous-ensemble et un sur-ensemble d'une partie de E)

V Bases

Définition : Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E.
On dit que $(x_i)_{i\in I}$ est une **base** de E si c'est une famille libre et génératrice de E.

Pour $X \subset E$, on dit que X est une partie basique de E si c'est une partie libre et génératrice de E. Alors la famille $(x)_{x\in X}$ est une base de E.

Vocabulaire : Une partie basique appelée une **base** par abus de langage.

Théorème : Coordonnées

Soit $(b_i)_{i\in I}$ une base de E, et soit $u \in E$.
Alors il existe une unique famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ presque nulle telle que $u = \sum_{i\in I} \lambda_i b_i$.

Vocabulaire : On dit que λ_i est la **i-ème coordonnée** de u dans la base B.

Preuve:
Montrons l'existence.
Comme B est une base, c'est une famille génératrice, donc u s'écrit comme une combinaison linéaire de vecteurs de B.
Montrons l'unicité.
Supposons qu'il existe $(\lambda_i)_{i\in I}$ et $(\mu_i)_{i\in I}$ presque nulles telles que $u = \sum_{i\in I} \lambda_i b_i = \sum_{i\in I} \mu_i b_i$.
On a donc $\sum_{i\in I}(\lambda_i - \mu_i)b_i = 0_E$. Comme B est libre, on a $\forall i \in I, \lambda_i - \mu_i = 0$, donc $\lambda_i = \mu_i$. $\square$

Exemple : E=$\{0\}$, la seule base est la base vide.
Dans $\mathbb{R}^2$, la famille $((1,0),(0,1))$ est une base : c'est la base canonique.

Vocabulaire : Si E est engendré par une partie finie, on dit que E est de **dimension finie**.

Remarque : K^n est de dimension finie, K^X avec X infini est de dimension infinie.

Proposition :

Soit $L \subset E$ avec une partie libre. Soit $u \in E$.
Alors $L \cup \{u\}$ est libre ssi $u \notin Vect(L)$.

Preuve:
Si $u \in Vect(L)$, alors $u = \sum_{v\in L} \lambda_v v$ avec $(\lambda_v)_{v\in L}$ presque nulle.
Donc $u - \sum_{v\in L} \lambda_v v = 0$ avec $1 \neq 0$, donc $L \cup \{u\}$ est liée.
Réciproquement, si $L \cup \{u\}$ est liée, alors il existe $(\lambda_v)_{v\in L}$ presque nulle et $\mu \neq 0$ tels que $\sum_{v\in L} \lambda_v v + \mu u = 0_E$.
Donc $u = -\frac{1}{\mu}\sum_{v\in L} \lambda_v v \in Vect(L)$. $\square$

✕ Attention ✕ Démonstration générée par IA, différente de celle du cours.

Note de rédaction : cf. Laurent pour une autre preuve

Théorème : Base incomplète

Soit G une partie génératrice finie de E.
Soit $L \subset G$ une partie libre.
Alors il existe une partie basique B de E telle que $L \subset B \subset G$.

Note de rédaction : cf. Laurent pour les preuve

Corollaire : Existence de base

Si E est un K-ev de dimension finie, alors E admet une base.

Preuve:
On applique le théorème de la base incomplète avec $L = \emptyset$. $\square$

Corollaire : Caractérisation des bases

Si L est une partie libre à p éléments de E et G une partie génératrice finie à q éléments de E.
On a $p \leq q$.

Note de rédaction : cf. Laurent pour les preuve

Théorème : Bases finies

Si E est un K-ev de dimension finie, alors toutes les bases de E ont le même cardinal, appelé la **dimension** de E et noté $\dim(E)$.

Si E est de dimension finie n et $(u_1, \ldots, u_n)$ est une famille libre de E, il existe $(u_{p+1}, \ldots, u_n)$ tels que $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base de E.

Théorème : Assertions équivalentes

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. E est un ev de dimension n.
2. Toute base de E a n vecteurs.
3. Toute base génératrice de E a au moins n vecteurs.
4. Toute partie génératrice de E a n vecteurs est libre.
5. Toute partie libre de E a au plus n vecteurs.
6. Toute partie libre E à n éléments est génératrice.

Note de rédaction : cf. Laurent pour les preuves

Proposition :

Soit E un K-ev. Supposons E de dimension finie.
Soit F un sev de E. Alors F est de dimension finie et $\dim(F) \leq \dim(E)$.

Si de plus $\dim(F) = \dim(E)$, alors $F = E$.

Note de rédaction : cf. Laurent pour la preuve

VI Applications linéaires

Définition : Soient E et F des K-ev.
Soit une application $f : E \to F$.
On dit que f est une **application linéaire** si $\forall x, y \in E, \forall \lambda, \mu \in K, f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$.

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Vocabulaire : On appelle aussi les applications linéaires des **morphismes** d'espaces vectoriels.

Remarque : f est un morphisme de groupes de $(E, +)$ dans $(F, +)$.

Vocabulaire : On dit que f est un **endomorphisme** si $E = F$.
On dit que f est un **isomorphisme** si f est bijective.
On dit que f est un **automorphisme** si f est un endomorphisme et un isomorphisme.

Vocabulaire : Si $F = K$, on dit que f est une **forme linéaire**.

Exemple :

1. Soit $\alpha \in K$. L'application $\varphi_\alpha : \substack{E \to E \\ x \mapsto \alpha x}$ est linéaire. C'est l'**homotétie** de rapport α.
2. Soit B une base de E.
   L'application $\varphi_B : \substack{E \to \\ x \mapsto \text{ième coordonnée de } x \text{ dans la base } B}$ est linéaire. C'est **l'application coordonnées** dans la base B.

Proposition :

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit B une base de E.
Alors f est déterminée par ses valeurs sur B. *(i.e. si $g \in \mathcal{L}(E, F)$ vérifie $f(e_i) = g(e_i), \forall i$, alors $f = g$)*

Remarque :

- B génératrice suffit.
- Si E est de dimension finie, f est déterminée par un nombre fini de valeurs.

Note de rédaction : cf. Laurent pour la preuve

Proposition :

$\mathcal{L}(E, F)$ est un K-ev.

Note de rédaction : cf. Laurent pour la preuve

Proposition : Composition d'applications linéaires

Soient E, F, G des K-ev. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.
Alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$.

Note de rédaction : cf. Laurent pour la preuve

Proposition :

Si on fixe $f \in \mathcal{L}(E,F)$ (respectivement $g \in \mathcal{L}(F,G)$), l'application $\varphi_f : \substack{\mathcal{L}(F,G) \to \mathcal{L}(E,G) \\ g \mapsto g \circ f}$ (resp. $\psi_g : \substack{\mathcal{L}(E,F) \to \mathcal{L}(E,G) \\ f \mapsto g \circ f}$) est linéaire.

Note de rédaction : cf. Laurent pour la preuve

Proposition :

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ bijective.
Alors $f^{-1} \in \mathcal{L}(F,E)$ et est un isomorphisme.

Note de rédaction : cf. Laurent pour la preuve

Définition : Si $E = F$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On définit $f^0 = id_E$ et pour $n \in \mathbb{N}^*, f^n = f \circ f^{n-1}$.
Si f est un automorphisme, on définit pour $n \in \mathbb{N}, f^{-n} = (f^{-1})^n$.

Définition : On note $GL(E) = \{f \in \mathcal{L}(E) \mid f \text{ est bijective}\}$ est le groupe linéaire de E.

Proposition :

$GL(E)$ est un groupe pour la composition.

Remarque : Si K est un corps fini, i.e. $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, p premier, et si E est de dimension finie n, alors $GL(E)$ est fini.