

Chapitre 3 : Espaces vectoriels

I Corps

Définition : Un **corps** est un ensemble K muni de deux lois de composition interne notées $+$ et \times telles que :

- $(K, +)$ est un groupe abélien
- $(K \setminus \{0\}, \times)$ est un groupe abélien
- La loi \times est distributive par rapport à la loi $+$

Si de plus la loi \times est commutative, on dit que K est un **corps commutatif**.

Rappel : Distributivité : $\forall a, b, c \in K, a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

Exemple : $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, p$ premier sont des corps.

II Espaces vectoriels

Définition : Soient K un corps et E un groupe abélien.

Soit une loi $: \begin{matrix} K \times E \rightarrow E \\ (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v \end{matrix}$ (*multiplication externe*).

On dit que $(E, +, \cdot)$ est un **K -espace vectoriel** si on a $\forall \lambda, \mu \in K, \forall v \in E$:

- $\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \times \mu) \cdot v$
- $1 \cdot v = v$
- $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$ (*on a deux + différents*)
- $\lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w$

Vocabulaire : Les éléments de E sont appelés **vecteurs**. Les éléments de K sont appelés **scalaires**.

Exemple : \mathbb{R}^n est un \mathbb{R} -espace vectoriel. De même pour $\{0\}, \mathbb{R}[X], M_n(\mathbb{R})$.
On peut voir \mathbb{C} comme un \mathbb{R} -espace vectoriel.

Définition : Soit E un K -ev, et soit $(v_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E .

Soit $(\lambda_i)_{i \in I}$ une famille de scalaires de K .

On dit que $(\lambda_i)_{i \in I}$ est presque nulle si : $\{i \in I, \lambda_i \neq 0\}$ est fini.

Alors on considère $\sum_{i \in I, \lambda_i \neq 0} \lambda_i v_i$ noté $\sum_{i \in I} \lambda_i v_i$. C'est une **combinaison linéaire** des v_i .

Définition : Soit $X \subset E$. Une combinaison linéaire de vecteurs de X est de la forme $\sum_{v \in X} \lambda_v v$ avec $(\lambda_v)_{v \in X}$ presque nulle.

Vocabulaire : Les $(\lambda_v)_{v \in X}$ sont appelés les **coefficients** de la combinaison linéaire.

III Sous-espaces vectoriels

Définition : Soit E un K -ev. Soit $F \subset E$.

On dit que F est un **sous-espace vectoriel** (sous-ev) de E si :

- $F \neq \emptyset$
- $\forall u, v \in F, \lambda, \mu \in K, \lambda u + \mu v \in F$

Proposition : Caractérisation des sous-ev

Tout sous-espace vectoriel est un espace vectoriel pour les lois induites par E .


Preuve:

Montrons $(F, +)$ est un sous-groupe de $(E, +)$:

- $F \neq \emptyset$ donc $\exists u \in F$.
- $\lambda = \mu = 1 \implies u + v \in F, \forall u, v \in F$ donc F est stable par $+$
- $u + (-1)u = u(1 + (-1)) = 0_E \in F$. On a donc $-u \in F, \forall u \in F$.

Donc on a bien un sous-groupe.

Les autres propriétés sont vérifiables et immédiates, on a bien un espace vectoriel

 **Exemple :** Soit E un \mathbb{K} -ev.

- $\{0_E\}$ et E sont des sous-ev de E .
- $\{(x, y) \mid ax + by = 0\} \subset \mathbb{R}^2$ est un sous-ev de \mathbb{R}^2 .

Proposition : Intersection de sev

Soit E un K -ev. Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sev de E .

Alors $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un sev de E .

Preuve:

Montrons que $\bigcap_{i \in I} F_i$ est stable par combinaison linéaire.

Soient $x, y \in \bigcap_{i \in I} F_i$ et $\lambda, \mu \in K$.

On a $x, y \in F_i$ pour tout $i \in I$, donc $\lambda x + \mu y \in F_i$ pour tout $i \in I$.

Donc $\lambda x + \mu y \in \bigcap_{i \in I} F_i$. \square

 **Remarque :** L'union de sev n'est pas forcément un sev.


Proposition : Sous-ev engendré

Soit E un K -ev. Soit $X \subset E$.

Alors il existe un plus petit sev de E contenant X , noté $\text{Vect}(X)$ et appelé le **sev engendré** par X .

On a $\text{Vect}(X) = \{\sum_{x \in X} \lambda_x x \mid (\lambda_x)_{x \in X} \text{ est presque nulle, } \lambda_x \in K\} = \bigcap_{\substack{F \text{ sev de } E \\ X \subset F}} F$.

Intuitivement, c'est l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de X .

 **Rappel :** "Presque nulle" signifie que tous les coefficients sont nuls sauf un nombre fini d'entre eux.

Preuve:

Montrons que $\text{Vect}(X)$ est un sev de E .

Soient $u, v \in \text{Vect}(X)$ et $\lambda, \mu \in K$.

On a $u = \sum_{x \in X} \lambda_x x$ et $v = \sum_{x \in X} \mu_x x$ avec $(\lambda_x)_{x \in X}$ et $(\mu_x)_{x \in X}$ presque nulles.

Donc $\lambda u + \mu v = \sum_{x \in X} (\lambda \lambda_x + \mu \mu_x) x$ est une combinaison linéaire d'éléments de X avec des coefficients presque

nuls.

Donc $\lambda u + \mu v \in \text{Vect}(X)$. C'est bien un sev.

On a $X \subset \{CLdeX\}$ car $x = 1 \cdot x + 0 \cdot y, \forall x \in X, y \in E$.

Donc $\text{Vect}(X) \subset \{CLdeX\}$.

Réciproquement, $\text{Vect}(X)$ est stable par combinaison linéaire et contient X , donc $\{CLdeX\} \subset \text{Vect}(X)$. Donc $\text{Vect}(X) = \{CLdeX\}$. \square .

Remarque : La démonstration est générée par IA, elle diffère de celle du cours.

Proposition : Addition de sev

Soit E un K -ev. Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sev de E .

On peut considérer $\text{Vect}(\bigcup_{i \in I} F_i)$, noté $\sum_{i \in I} F_i$ et appelé la **somme** de la famille $(F_i)_{i \in I}$.

Remarque : On note $F_1 + F_2 + \dots + F_n$ au lieu de $\sum_{i=1}^n F_i$.

Proposition : Caractérisation de la somme

Soit E un K -ev. Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sev de E .

Alors $\sum_{i \in I} F_i = \{\sum_{i \in I} x_i \mid x_i \in F_i, \text{ presque tous nuls}\}$.

Preuve:

Note de rédaction : cf. Laurent

Exemple : Soient F et G deux sev de E .

Alors $F + G = \{x + y \mid x \in F, y \in G\}$.

Proposition : Application

On a une application $\varphi : \begin{matrix} F_1 \times F_2 \times \dots \times F_n \rightarrow F_1 + F_2 + \dots + F_n \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto x_1 + x_2 + \dots + x_n \end{matrix}$.

Elle est surjective.

Vocabulaire : Si de plus l'application φ est injective, alors on dit que la somme $F_1 + F_2 + \dots + F_n$ est **directe** et on note $F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_n$.

Proposition : Caractérisation de la somme directe

Soient F_1, F_2, \dots, F_n des sev de E . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- $F_1 + F_2 + \dots + F_n$ est une somme directe.
- $\forall (u_1, u_2, \dots, u_n) \in F_1 \times F_2 \times \dots \times F_n, u_1 + u_2 + \dots + u_n = 0_E \implies u_1 = u_2 = \dots = u_n = 0_E$
- $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, F_i \cap (F_1 + \dots + F_{i-1}) = \{0_E\}$

Preuve:

Note de rédaction : cf. Laurent

Attention : On a F_1 somme directe avec F_2 ssi $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$. Mais pour avoir $F_1 \oplus F_2$ et $F_1 \oplus F_3$, et $F_2 \oplus F_3 = \{0_E\}$, mais pas forcément $F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$.

Exemple : On prend 3 droites dans le plan passant par l'origine, deux par deux distinctes.

Alors elles sont en somme, mais pas en somme directe.

💬 **Vocabulaire** : Si $F \oplus G = E$, on dit que F et G sont des **supplémentaires**.

✗ **Attention** ✗ Le supplémentaire n'est pas unique.

IV Familles

Définition : Soit E un K -ev. Soit I un ensemble.
Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de E .

Soit $J \subset I$. On dit que $(x_i)_{i \in J}$ est une **sous-famille** de $(x_i)_{i \in I}$.

💬 **Vocabulaire** : À l'inverse, $(x_i)_{i \in I}$ est une **sur-famille** de $(x_i)_{i \in J}$.

📌 **Remarque** : Dans la pratique, on prend souvent $I = \{1, 2, \dots, n\}$.

📌 **Remarque** : Soit $X \subset E$. On a une famille $(x)_{x \in X}$ indexée par X .
Donc une combinaison linéaire de X est une combinaison linéaire de la famille $(x)_{x \in X}$. (la réciproque n'est pas vraie, car il peut y avoir des répétitions dans la famille: $x+x$ n'est pas une combinaison linéaire de X)

Définition : Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E .
On dit que $(x_i)_{i \in I}$ est **libre** si :
 $\forall (\lambda_i)_{i \in I}$ presque nulle, $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0_E \implies \forall i \in I, \lambda_i = 0$.
On dit que $(x_i)_{i \in I}$ est **liée** sinon.

Pour $X \subset E$, on dit que X est une partie libre (resp. liée) si la famille $(x)_{x \in X}$ est libre (resp. liée).

💡 **Exemple** : Dans \mathbb{R}^3 , les vecteurs $(1, 0, 0)$ et $(0, 1, 0)$ sont libres.
Les vecteurs $(1, 0, 0)$ et $(2, 0, 0)$ sont liés.

Définition : Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E .
On dit que c'est une **famille génératrice** de E si $\text{Vect}(\{x_i \mid i \in I\}) = E$.

Alors tout élément de E s'écrit comme une combinaison linéaire des x_i .
Pour $X \subset E$, on dit que X est une partie génératrice de E si la famille $(x)_{x \in X}$ est génératrice de E .

Proposition : Sous-familles

Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E .
Alors toute sous-famille $(x_j)_{j \in J}$ de $(x_i)_{i \in I}$ est libre (resp. liée) si $(x_i)_{i \in I}$ est libre (resp. liée).
Et toute sur-famille $(x_k)_{k \in K}$ de $(x_i)_{i \in I}$ est génératrice (resp. non génératrice) si $(x_i)_{i \in I}$ est génératrice (resp. non génératrice).