

# Chapitre 4 : Espaces euclidiens

## I Produit scalaire et norme

### A Produit scalaire

On ne rappellera pas les définitions de normes et distances ici et les propositions qui s'ensuivent. Le lecteur est invité à se référer au chapitre 4 du cours AN3.

**Définition :** Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Un **produit scalaire** sur  $E$  est une application  $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  qui vérifie les propriétés suivantes :

1.  $\forall x, y \in E, \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$  (**symétrie**)
2.  $\forall x, x', y \forall \lambda \in \mathbb{R}, \langle \lambda x + x', y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle$  (**linéarité en la première variable**)
3.  $\forall x \in E, \langle x, x \rangle \geq 0$  et  $\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$  (**positivité**)

En résumé, un produit scalaire est une forme bilinéaire, symétrique et définie positive.

**Exemple :** Dans  $\mathbb{R}^n, \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$  est un produit scalaire.

Dans  $C^0([0, 1], \mathbb{R}), \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$  est un produit scalaire.

**Remarque :** Si  $E$  est un espace vectoriel normé de dimension finie, il n'y a pas de produit scalaire canonique *a priori*. (On a vu néanmoins que dans  $\mathbb{R}^n$ , il existe un produit scalaire canonique).

**Définition :** Un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$  muni d'un produit scalaire est appelé un **espace euclidien**.

On le note  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ .

#### Identités remarquables :

$$\langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle$$

$$\langle x + y, x - y \rangle = \langle x, x \rangle - \langle y, y \rangle$$

#### Théorème : Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien.

Alors, pour tous  $x, y \in E$ , on a :

$$|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}$$

De plus, l'égalité a lieu si et seulement si  $x$  et  $y$  sont colinéaires.

**Note de rédaction :** cf. Laurent.

### B Normes

**Rappel :** On rappelle qu'une norme est une application  $N : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  qui vérifie l'homogénéité, l'inégalité triangulaire et la séparation.

**Proposition :**

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

On pose  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ .

Alors  $\|\cdot\|$  est une norme sur  $E$ , appelée la norme associée au produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

**Démonstration :**

**Homogénéité** : Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $x \in E$ .

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle x, x \rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle x, x \rangle} = |\lambda| \|x\|$$

**Inégalité triangulaire** : Soit  $x, y \in E$ .

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \leq \langle x, x \rangle + 2|\langle x, y \rangle| + \langle y, y \rangle \\ &\leq \langle x, x \rangle + 2\sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle} + \langle y, y \rangle = (\sqrt{\langle x, x \rangle} + \sqrt{\langle y, y \rangle})^2 \\ &\Rightarrow \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \end{aligned}$$

**Séparation** : Soit  $x \in E$  tel que  $\|x\| = 0$ .

Alors  $\sqrt{\langle x, x \rangle} = 0 \Rightarrow \langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$

**Remarque** :  $x \mapsto |x|$  est une norme sur  $\mathbb{R}$ , associée au produit scalaire  $\langle x, y \rangle = xy$ .

**Rappel** : Une distance sur un ensemble  $X$  est une application  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$  qui vérifie la séparation, la symétrie et l'inégalité triangulaire.

**Proposition : Lien entre norme et distance**

Soit  $N$  une norme sur un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$ .

Alors  $d(x, y) = N(x - y)$  est une distance sur  $E$ .

**Remarque** : En géométrie affine, si  $A$  et  $B$  sont deux points, le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  est défini par  $\overrightarrow{AB} = B - A$ , et  $d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\|$ .

**Remarque** : Un produit scalaire donne une norme ( $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ ) et une norme donne une distance ( $d(x, y) = \|x - y\|$ ).

**Propriété : Norme associée au produit scalaire (identité du parallélogramme)**

$$\forall x, y \in E, \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

On peut le vérifier avec  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$  et les identités remarquables.

D'où si une norme ne vérifie pas l'identité du parallélogramme, elle n'est pas associée à un produit scalaire.

**Définition** : Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

L'**angle non-orienté** entre  $x, y \in E \setminus \{0\}$  est défini par  $\theta = \arccos \left( \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|} \right) \in [0, \pi]$ .

**Remarque** : Cette définition est basée sur la propriété en géométrie euclidienne classique (angle où la direction n'a pas d'importance), et on a :  $\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \cos(\theta)$ .

**Remarque** : Le vecteur normé associé à  $x \in E \setminus \{0\}$  est  $\frac{x}{\|x\|}$ . C'est utile pour calculer des vecteurs unitaires.

## II Orthogonalité

**Définition :** Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Deux vecteurs  $x, y \in E$  sont dits **orthogonaux** si  $\langle x, y \rangle = 0$ .

On note  $x \perp y$ .

**Remarque :** L'angle entre deux vecteurs orthogonaux non nuls est  $\frac{\pi}{2}$ , et tout vecteur est orthogonal au vecteur nul.

**Définition :** Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

Une famille de vecteurs  $(x_i)_{i \in I}$  est dite **orthogonale** si  $x_i \perp x_j$  pour tous  $i \neq j$ , i.e. si ses vecteurs sont deux à deux orthogonaux.

### Théorème de Pythagore :

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

Soit  $(x_1, \dots, x_k)$  une famille orthogonale (finie) de  $E$ .

Alors :

$$\|x_1 + \dots + x_k\|^2 = \|x_1\|^2 + \dots + \|x_k\|^2.$$

De plus, si  $k = 2$ , alors  $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \Rightarrow x \perp y$ .

### Démonstration :

$$\|\sum_{i=1}^k x_i\|^2 = \langle \sum_{i=1}^k x_i, \sum_{j=1}^k x_j \rangle = (\text{bilinéarité}) \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \langle x_i, x_j \rangle = \sum_{i=1}^k \langle x_i, x_i \rangle = \sum_{i=1}^k \|x_i\|^2.$$

Pour  $k = 2$ ,  $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$ .

Donc si  $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ , alors  $2\langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow x \perp y$ .  $\square$

**Définition :** Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

Une famille de vecteurs  $(x_i)_{i \in I}$  est dite **orthonormée** si elle est orthogonale et que  $\|x_i\| = 1$  pour tout  $i \in I$ .

Autrement dit,  $\forall i, j \in I$ ,  $\langle x_i, x_j \rangle = \delta_{ij}$ .

### Proposition :

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

Alors une famille orthogonale dont chacun des vecteurs est non nul est libre.

En particulier, une famille orthonormée est libre.

**Remarque :** Si  $E$  est de dimension finie, toute famille orthonormée admet au plus  $\dim(E)$  vecteurs.

**Note de rédaction :** cf. Laurent pour les preuves de ces deux dernières propriétés.

**Définition :** Soit  $E$  un espace euclidien.

Une **base orthonormée** de  $E$  est une famille orthonormée qui est une base de  $E$ .

### Parenthèse : avantages d'une base orthonormée :

Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormée de  $E$ .

Soit  $x \in E$ .

Alors :  $x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i$ . (on remarque que ça ressemble à la dualité !)  
La  $i^{me}$  coordonnée de  $x$  dans la base  $(e_1, \dots, e_n)$  est  $\langle x, e_i \rangle$ .

### III Procédé d'orthonormalisation Gram-Schmidt

Voir cette vidéo pour une explication du procédé d'orthonormalisation Gram-Schmidt.

On obtient l'algorithme suivant :

Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . On pose  $u_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$ .

Si  $(u_1, \dots, u_k)$  est construite pour  $k \leq n - 1$ , on pose  $u_{k+1} = \frac{e_{k+1} - \sum_{i=1}^k \langle e_{k+1}, u_i \rangle u_i}{\|e_{k+1} - \sum_{i=1}^k \langle e_{k+1}, u_i \rangle u_i\|}$ .

## Contents

<b>I</b>	<b>Produit scalaire et norme</b>	<b>1</b>
A	Produit scalaire . . . . .	1
B	Normes . . . . .	1
<b>II</b>	<b>Orthogonalité</b>	<b>3</b>
<b>III</b>	<b>Procédé d'orthonormalisation Gram-Schmidt</b>	<b>4</b>