Chapitre 5 : Séries entières

I Introduction

Définition : Une **série entière** est une série de fonction dont le $n^{\text{ème}}$ terme général est un monôme de degré n.
C'est-à-dire que c'est une série de la forme $\sum_n a_n z^n$ où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes ($\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ ou $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$) et z est une variable complexe.

Remarque : Comme séries de fonctions, les propositions vues sur le chapitre sur les séries de fonctions s'appliquent aux séries entières.

Exemple :

$$\sum_{n\geq 0} z^n \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!} \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n} \qquad \cdots$$

A Convergence d'une série entière

Exemple : La série $\sum_{n\geq 0} z^n$ converge si et seulement si $|z| < 1$ sur $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} = D(0,1)$

Exemple : Soit $z \in \mathbb{C}$. On pose $u_n = \frac{z^n}{n!}$. Alors on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{z^n} = \frac{z}{n+1} \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.
Par le critère de d'Alembert, la série $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$ et on dira que le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$ est $+\infty$.

Vocabulaire : On dit que 1 est le **rayon de convergence** de la série $\sum_{n\geq 0} z^n$ (et $D(0,1)$ est le **disque de convergence** de la série $\sum_{n\geq 0} z^n$).

Lemme :
Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière et $z_0 \in \mathbb{C}$.

1. Si $\sum_{n\geq 0} a_n z_0^n$ converge absolument, alors la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge normalement sur $\overline{D}(0,|z_0|) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq |z_0|\}$.
2. Si $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge normalement sur $\overline{D}(0,r)$ pour tout $r < |z_0|$

Démonstration :
Soit $z \in \overline{D}(0,|z_0|)$ et soit $n \in \mathbb{N}$.
On a $|a_n z^n| = |a_n||z|^n \leq |a_n||z_0|^n$.
Et de plus $\sum_{n\geq 0} |a_n||z_0|^n$ converge par hypothèse et est indépendant de z.

Donc la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge normalement sur $\overline{D}(0,|z_0|)$.

Contents