Chapitre 5 : Fonctions de plusieurs variables

Cadre de travail :

- $p, q \in \mathbb{N}^*$
- U ouvert de $\mathbb{R}^n$
- $f : U \to \mathbb{R}^m$
- $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$ sont des espaces vectoriels qui peuvent être normés, donc des espaces métriques. Ainsi, toutes les propriétés et des notions des espaces métriques s'appliquent.

I Continuité

Rappel : Une suite (X_n) de composante $\begin{pmatrix} x_1^{(n)} \\ x_2^{(n)} \\ \vdots \\ x_p^{(n)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$ tend vers $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$ si et seulement si chacune de ses composantes converge, c'est-à-dire :

$$\forall i \in \{1, \dots, p\}, \quad x_i^{(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} x_i$$

Proposition :

Soit $f : U \to \mathbb{R}^q$ et $a \in U$. On écrit $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_q(x)), x \in U$.
On a : f est continue en $a \Leftrightarrow \forall i = 1, \dots, q, f_i(x)$ est continue en a.

Remarque : $\forall i = 1, \dots, q$, les fonctions $x \mapsto f_i(x)$ sont à valeur dans $\mathbb{R}$, donc on peut utiliser les résultats de la continuité pour les fonctions à valeur réelle.

Vocabulaire : On appelle les f_i les **fonctions composantes** de f.

Preuve :
On rappelle que f est continue en a ssi par toute suite (x_n) qui converge vers a, la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(a)$.
On a donc $f(x_n) = (f_1(x_n), f_2(x_n), \dots, f_q(x_n)) \to f(a) = (f_1(a), f_2(a), \dots, f_q(a))$ ssi $\forall i = 1, \dots, q, f_i(x_n) \to f_i(a)$.
Donc f est continue en a ssi $\forall i = 1, \dots, q, f_i$ est continue en a.

Pour comprendre la continuité, il suffit de se restreindre aux fonctions $f : U \to \mathbb{R}$.

Exemple :

1. $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$ et $f(0, 0) = 0$.
   On a $U = \mathbb{R}^2$, $p = 2$ et $q = 1$.
   Montrons que f est continue.

   f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ car c'est un quotient de fonctions continues (polynômes) dont le dénominateur ne s'annule pas.
   Montrons que f est continue en $(0, 0)$.
   On doit montrer que si $(x, y) \to (0, 0)$, alors $f(x, y) \to 0$.
   $|f(x, y)| = \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| = \frac{x^2 |y|}{x^2 + y^2} \leq \frac{x^2 |y|}{y^2} = |y|$.
   Donc si $(x, y) \to (0, 0)$, alors $|y| \to 0$ et donc $f(x, y) \to 0$.
   Ainsi, f est continue en $(0, 0)$.
   Donc f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. $f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$.
   f peut-elle être continue sur $\mathbb{R}^2$?
   Sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, f est continue (même raison).
   Problème en $(0,0)$.
   Montrons que $f(x,y)$ n'a pas de limite en $(0,0)$.
   Trouvons $(x_n,y_n)\to(0,0)$ et $(a_n,b_n)\to(0,0)$ tels que $f(x_n,y_n)$ et $f(a_n,b_n)$ aient des limites différentes.
   Prenons $(x_n,y_n)=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$. On a : $f(x_n,y_n)=\frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{1}{n}\right)^2}=\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}}=\frac{1}{2}$.
   De plus, prenons $(a_n,b_n)=\left(\frac{2}{n},\frac{1}{n}\right)$. On a : $f(a_n,b_n)=\frac{\frac{2}{n}\cdot\frac{1}{n}}{\left(\frac{2}{n}\right)^2+\left(\frac{1}{n}\right)^2}=\frac{\frac{2}{n^2}}{\frac{4}{n^2}+\frac{1}{n^2}}=\frac{2}{5}$.
   Ainsi, $f(x_n,y_n)\to\frac{1}{2}$ et $f(a_n,b_n)\to\frac{2}{5}$.
   Donc f n'a pas de limite en $(0,0)$ et donc f n'est pas continue en $(0,0)$. Ainsi, f n'est pas continue sur $\mathbb{R}^2$.

II Vers une bonne notion de dérivée pour les fonctions à plusieurs variables

Introduction : Soit $f\colon]a,b[\to\mathbb{R}$ où $]a,b[\subset\mathbb{R}$. On dit que f est dérivable en $x\in]a,b[$ si il existe un réel $f'(x)$ tel que :

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+o(h)$$

Ce qui équivaut à : $\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ existe.
Si f est dérivable en x alors on sait que f est continue en x.
$|f(x+h)-f(x)|\to0$ quand $h\to0$.

A Rappels : fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^q, q\geq1$

Soit f : $\substack{]a,b[\to\mathbb{R}^q\\ x\mapsto(f_1(x),f_2(x),\dots,f_q(x))}$. (fonction coordonnées)

Définition : On dit que f est dérivable en $x\in]a,b[$ si $\lim_{h\to0}\frac{f(x)-f(x+h)}{h}$ existe. (avec $\frac{f(x)-f(x+h)}{h}\in\mathbb{R}^q$).
i.e. $\exists L\in\mathbb{R}^q$ tel que $\|\frac{f(x)-f(x+h)}{h}-L\|\to0$ quand $h\to0$ où $\|.\|$ est une norme $\mathbb{R}^q$ (elles sont équivalentes).

Proposition : Dérivabilité

f est dérivable en $x\Leftrightarrow\forall i=1,\dots,q, f_i$ est dérivable en x et on a : $f'(x)=(f_1'(x),f_2'(x),\dots,f_q'(x))$.
Autrement dit, f est dérivable en x si et seulement si chacune de ses composantes est dérivable en x.

Preuve :
$\Rightarrow$ / Supposons f dérivable en x.
$\exists L=(L_1,L_2,\dots,L_q)\in\mathbb{R}^q$ tel que $\|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-L\|\to0$ quand $h\to0$.
On a le choix de $\|.\|$ car les normes sont toutes équivalentes (en dimension finie). Prenons la norme infinie.
Alors $\forall i\in\{1,\dots,q\}, |\frac{f_i(x+h)-f_i(x)}{h}-L_i|\leq\|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-L\|_{+\infty}\to0$ quand $h\to0$.
Ainsi, $\forall i\in\{1,\dots,q\}, f_i$ est dérivable en x et $f_i'(x)=L_i$.
Et donc $f'(x)=(f_1'(x),f_2'(x),\dots,f_q'(x))$.
$\Leftarrow$ / Supposons que $\forall i=1,\dots,q, f_i$ est dérivable en x.
Donc $\forall i\in\{1,\dots,q\}, \frac{f_i(x+h)-f_i(x)}{h}\to f_i'(x)$ quand $h\to0$.
Montrons que $\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ existe.
Posons $L=(f_1'(x),f_2'(x),\dots,f_q'(x))\in\mathbb{R}^q$.
On veut $\|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-L\|\to0$ quand $h\to0$.
Prenons $\|.\|_1$ la norme 1.
On a :

$$\left\|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-L\right\|_1=\sum_{i=1}^{q}\left|\frac{f_i(x+h)-f_i(x)}{h}-L_i\right|$$

On a une somme finie donc chaque terme (par hypothèse) tend vers 0 quand $h\to0$.
En passant à la limite on obtient : $\|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-L\|_1\to0$ quand $h\to0$.
Donc f est dérivable en x et $f'(x)=L=(f_1'(x),f_2'(x),\dots,f_q'(x))$.

B Dérivées partielles

Soit $U \subset \mathbb{R}^p$ ouvert et $p \in \mathbb{N}^*$. On considère $f : U \to \mathbb{R}^q$.

Remarque : Penser à une fonction f définie de $U = \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, donc $p = 2$ et $q = 1$. (tous les problèmes se posent déjà dans ce cas)

On veut définir la notion de dérivées partielles en un point $a = (a_1, a_2, \dots, a_p) \in U$.
Il y a p dérivées partielles (car p variables). Prenons $k \in \{1, \dots, p\}$ et définissons la k-ième dérivée partielle de f en $a = (a_1, a_2, \dots, a_p)$.
Considérons la k-ième fonction partielle d'une variable réelle $g_k \colon x_k \mapsto f(a_1, \dots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \dots, a_p)$.
Les points $a_1, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_p$ sont fixés dans $\mathbb{R}$ et x_k varie dans un voisinage de a_k.
Note de rédaction : Schéma, ¬ cf. Laurent

On dit que f admet une k-ième dérivée partielle en a si g_k est dérivable en a_k et on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = g_k'(a_k)$$

Exemple : Soit $f \colon (x, y) \mapsto x^2 + y^2$.
Prenons $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = 2a_1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a) = 2a_2$$

On utilise plutôt les notations suivantes :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y$$

✕ Attention ✕ Avant de calculer une dérivée partielle en un point, il faut justifier qu'elles existent (i.e. que les fonctions partielles sont dérivables en les points correspondants).