

Chapitre 1 : Dénombrement

I Cardinal d'un ensemble

Définition : Soit E un ensemble. On dit que E est **fini** s'il existe un entier naturel $n \in \mathbb{N}$ et une bijection entre E et l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$.

Si $n = 0$, on dit que E est vide et on note $E = \emptyset$.

On appelle n le **cardinal** de E et on le note $\text{Card}(E)$.

Lemme : Égalité des cardinaux

Soient A et B deux ensembles finis non vides. Alors, on a $\text{Card}(A) = \text{Card}(B)$ si et seulement si il existe une bijection entre A et B .

Démonstration :

Soit $n \geq 1$ tq $\text{Card}(A) = n$.

On a au tableau le dessin d'une bijection entre A et $S_n = \{1, 2, \dots, n\}$.


$\Rightarrow \exists f: A \rightarrow S_n$ bijective.

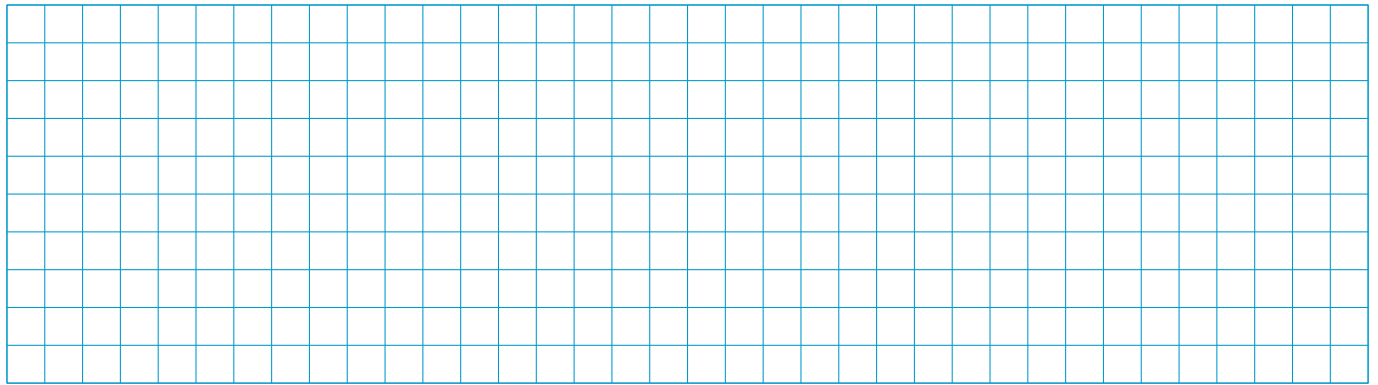
Si $\text{Card}(B) = n$, alors $\exists g: B \rightarrow S_n$ bijective.

Donc, $g^{-1}: S_n \rightarrow B$ est bijective.


Considérons $g^{-1} \circ f: A \rightarrow B$. C'est une bijection entre A et B par composition de bijections.

Donc, $\text{Card}(A) = \text{Card}(B)$.

 **Application :** Montrer que si A et B sont en bijection, alors $\text{Card}(A) = \text{Card}(B)$.



Définition : Soient E et F deux ensembles non vides. Alors on appelle le **produit cartésien** de E et F et on note $E \times F := \{(x, y) \mid x \in E, y \in F\}$.

 **Exemple :** Soient $E = \{1, 2\}$ et $F = \{5, 6, 7\}$.

Alors, $E \times F = \{(1, 5), (1, 6), (1, 7), (2, 5), (2, 6), (2, 7)\}$.

Proposition : Principe multiplicatif

Soient A et B deux ensembles finis non vides. Alors, $A \times B$ est fini et on a :

$$\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B)$$

En règle générale, si A_1, A_2, \dots, A_k sont des ensembles finis non vides, alors :

$$\text{Card}(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k) = \prod_{i=1}^k \text{Card}(A_i)$$

Démonstration :

On démontre cette proposition pour le cas $k = 2$.

Soient A et B deux ensembles finis non vides.

Soient $n = \text{Card}(A)$ et $m = \text{Card}(B)$.

On pose $A = \{1, 2, \dots, n\}$ et $B = \{1, 2, \dots, m\}$. (ça revient au même par le lemme précédent)

On peut dresser le tableau suivant pour représenter $A \times B$:

	1	2	...	n
1	(1,1)	(2,1)	...	(n,1)
2	(1,2)	(2,2)	...	(n,2)
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
m	(1,m)	(2,m)	...	(n,m)

On remarque que le tableau contient n colonnes et m lignes.

Donc, le tableau contient $n \times m$ cases.

Chaque case correspond à un élément de $A \times B$.

On pose donc $f: A \times B \rightarrow \{1, 2, \dots, n \times m\}$ l'application définie par $f((i, j)) = i + (j - 1) \times n$ (l'idée est de numérotter les cases de gauche à droite et de haut en bas).

On vérifie facilement que f est une bijection (strictement croissante et bien définie).

Donc, $\text{Card}(A \times B) = n \times m = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B)$.

Définition : Soit E un ensemble non vide et $n \geq 1$ un entier naturel.

Les éléments de $E^n := \underbrace{E \times E \times \dots \times E}_{n \text{ fois}}$ sont appelés des **n-uplets** d'éléments de E , et on les note

$(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ avec $\omega_i \in E$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Proposition : Cardinal des n-uplets

Soient $n, M \geq 1$ et soit E un ensemble tel que $\text{Card}(E) = M$.

On dit que le nombre de n -uplets d'éléments de E est égal à M^n , c'est-à-dire :

$$\text{Card}(E^n) = M^n$$

Exemple : L'ensemble des dates d'anniversaires des 8 étudiants du premier rang est décrit par $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_8)$ où chaque ω_i est une date parmi les 366 possibles (*années bissextiles*).

Le nombre de configurations possibles pour les dates d'anniversaires des 8 étudiants est donc 366^8 .

Définition : Soit E un ensemble de cardinal $M \geq 1$ et soit $0 \leq n \leq M$.

Un **arrangement** de n éléments de E est un n -uplet $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ d'éléments de E tels que tous les ω_i sont distincts.

On parle de n -uplets d'éléments distincts de E .

💬 **Vocabulaire :** Quand $n = M$, on parle de **permutations** d'éléments de E (on parle de A_M^M).

💡 **Exemple :** Si on reprend l'exemple des dates d'anniversaires, un arrangement de 3 éléments parmi les 8 étudiants du premier rang pourrait être $(\omega_1, \omega_3, \omega_5)$ où les dates d'anniversaires des étudiants 1, 3 et 5 sont distinctes.

Proposition : Cardinal des arrangements

Soient E un ensemble de cardinal $M \geq 1$ et soit $0 \leq n \leq M$.

Le nombre d'arrangements de n éléments de E est donné par la formule :

$$A_M^n = \frac{M!}{(M-n)!}$$

Dans le cas d'une permutation, on a $A_M^M = M!$ (application de la formule avec $n = M$).

Démonstration :

Soit E un ensemble de cardinal $M \geq 1$ et soit $0 \leq n \leq M$.

On cherche à compter le nombre d'arrangements de n éléments de E .

Soit $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ un arrangement de n éléments de E .

- Pour choisir ω_1 , on a M possibilités.

- Pour choisir ω_2 , on a $M - 1$ possibilités (car ω_2 doit être distinct de ω_1).

⋮

- Pour choisir ω_n , on a $M - n + 1$ possibilités (car ω_n doit être distinct de tous les ω_i précédents).

Par le principe multiplicatif, le nombre total d'arrangements de n éléments de E est donc :

$$A_M^n = M \times (M-1) \times (M-2) \times \dots \times (M-n+1) = \frac{M!}{(M-n)!}$$

💡 **Rappel :** On rappelle que $k! = \prod_{i=1}^k i$ pour tout $k \geq 1$ et $0! = 1$.

💡 **Exemple :** Si on reprend l'exemple des dates d'anniversaires, le nombre d'arrangements de 3 éléments parmi les 8 étudiants du premier rang est donné par :

$$A_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = 8 \times 7 \times 6 = 336$$

Proposition : Dénombrement d'applications

Soient A et B deux ensembles finis tels que $\text{Card}(A) = n$ et $\text{Card}(B) = M$ (avec $n, M \geq 1$).

Alors :

1. L'ensemble $\mathcal{F}(A, B)$ des applications de A dans B est fini et on a : $\text{Card}(\mathcal{F}(A, B)) = M^n$.
2. Si $n \leq M$, le nombre de fonctions injectives de A dans B est donné par : A_M^n .
3. Si $n = M$, le nombre de fonctions bijectives de A dans B est donné par : $A_M^M = M!$.

Démonstration :

Soient A et B deux ensembles finis tels que $\text{Card}(A) = n$ et $\text{Card}(B) = M$ (avec $n, M \geq 1$).

1. Soit $f \in \mathcal{F}(A, B)$.

On peut représenter f par un n -uplet $(f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n))$ d'éléments de B où $a_i \in A$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Chaque $f(a_i)$ peut prendre n'importe quelle valeur dans B , donc on a M possibilités pour chaque $f(a_i)$.

Par le principe multiplicatif, le nombre total de fonctions de A dans B est donc : M^n . Réciproquement, chaque n -uplet d'éléments de B correspond à une fonction de A dans B .

2. Toute fonction injective correspond à un arrangement de n éléments de B (car les images des éléments de A doivent être distinctes).

3. *Laissée en exercice.*

Rappel : Soient X, Y deux ensembles. Soit $f : X \rightarrow Y$. $\forall A \subset Y$ $f^{-1}(A) = \{x \in X \mid f(x) \in A\}$ est l'**image réciproque** de A par f .

Remarque : $f^{-1}(A)$ peut être \emptyset , même si $A \neq \emptyset$.

Proposition : Lemme des bergers

Soit X et Y des ensembles finis et $f : X \rightarrow Y$ une application.
On suppose que $\text{Card}(f^{-1}(\{y\})) = k$ où $k \in \mathbb{N}^*$ pour tout $y \in f(X)$.

Alors $\text{Card}(Y) = \frac{\text{Card}(X)}{k}$.

Exemple : C'est l'idée du berger qui compte ses moutons. Si chaque mouton a 4 pattes, en comptant le nombre de pattes total et en divisant par 4, on obtient le nombre de moutons.

Démonstration :

$X_i = f^{-1}(\{y_i\})$.

$X = \bigcup_{y_i \in f(X)} X_i$ et les X_i sont disjoints.

Donc $\text{Card}(X) = \sum_{i=1}^n \text{Card}(X_i)$.

En effet, si $z_1 \in f^{-1}(\{y_1\}) \Rightarrow z_1 \notin f^{-1}(\{y_j\})$ pour $j \neq 1$.

Donc $X_i \cap X_j = \emptyset$ pour $i \neq j$.

$\forall x \in X, \exists i : f(x) = y_i$ par définition de l'image.

Donc $X = \bigcup_{i=1}^n X_i$.

Or $\text{Card}(X_i) = k$ donc $\text{Card}(X) = \sum_{i=1}^n k = n \times k$ où $n = \text{Card}(f(X))$.

Donc $n = \frac{\text{Card}(X)}{k}$.

Exemple : Prenons le mot "Ensemble". On a 8 lettres, dont 3 "e" identiques.

Le nombre de façons de réarranger les lettres du mot "Ensemble" est donc : $\frac{8!}{3!} = 6720$.

Définition : Soient E un ensemble fini de cardinal N et $0 \leq n \leq N$.

Un sous-ensemble à n éléments de E est appelé une **combinaison** de n éléments de E .

Elle est donnée $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ où les ω_i sont distincts et non ordonnés.

Proposition :

Le nombre total des combinaisons à n éléments de E est donné par :

$$C_N^n = \frac{N!}{n!(N-n)!} = \frac{1}{n!} A_N^n = \binom{N}{n}$$

Démonstration :

$X = \{\text{arrangements de } n \text{ éléments de } E\}$.

$Y = \{\text{combinaisons de } n \text{ éléments de } E\}$.

Soit $f : X \rightarrow Y$ l'application telle que $f((\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)) = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$.

Donc $\text{Card}(f^{-1}(\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\})) = n!$ car il y a $n!$ façons d'ordonner les éléments d'une combinaison.

Donc $\text{Card}(Y) = \frac{\text{Card}(X)}{n!} = \frac{A_N^n}{n!} = \frac{N!}{n!(N-n)!}$.

Proposition :

1. Soient A et B tq $A \cap B = \emptyset$, A, B finis.
 $\Rightarrow \text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$.
2. Soient A, B finis.
 $\Rightarrow \text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$.

Démonstration :

1. Exercice : si $n = \text{Card}(A)$ et $m = \text{Card}(B)$.
 Idée montrer $A \cup B$ est en bijection avec $\{1, \dots, n, \dots, n + m\}$.
2. cf. Laurent.

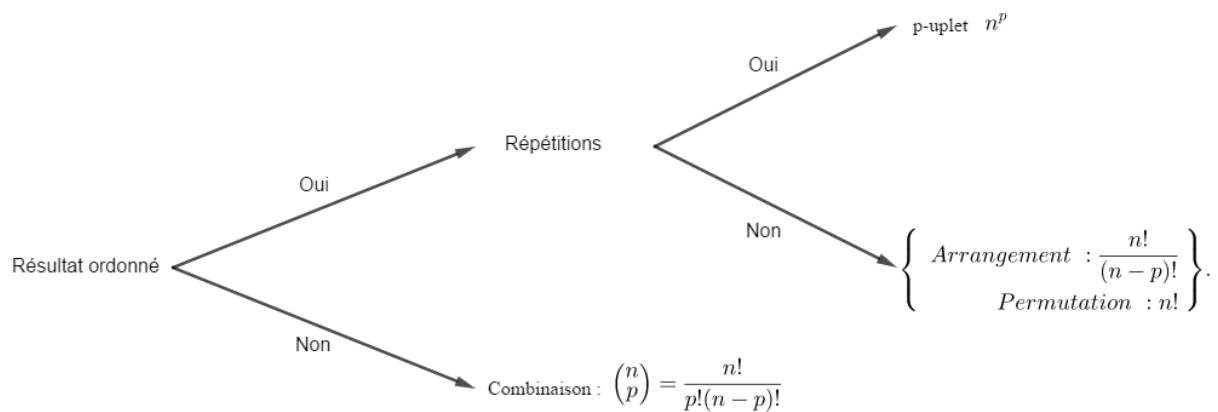
Formulaire : Cas d'utilisation des formules de dénombrement

Figure 1: Arbre décisionnel illustrant les cas d'utilisation des formules de dénombrement