Chapitre 2 : Espaces probabilisés

I Dénombrabilité

Définition : On dit que E est **infini dénombrable** s'il existe une bijection entre E en $\mathbb{N}$.

Définition : E est **dénombrale** s'il est fini ou infini dénombrable.

Proposition :

Si E et F sont dénombrables, alors $E \times F$ est dénombrable.

Démonstration :
Supposons E et F dénombrales, donc supposons que $E = \mathbb{N}$ et $F = \mathbb{N}$.

Proposition :

Soit $(E_i)_{i \in J}$ où $J \subset \mathbb{N}$ et E_i est dénombrable pour chaque $i \in J$.
Alors $\bigcup_{i \in J} E_i$ est dénombrable.

II Espaces probabilisés dénombrables

A Généralités

Définition : Soit Ω un ensemble dénombrable.
Une **probabilité** sur Ω est une application $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$ telle que :

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ et $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
2. Soit $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tq $E_i \cap E_j = \emptyset$ une suite finie ou dénombrable de parties de Ω alors $\mathbb{P}(\bigcup_n E_n) = \sum_n \mathbb{P}(E_n)$. ("$\sigma$-additivité")

Remarque : Ω est aussi appelé "univers". Les parties de Ω sont appelées "événements".

Vocabulaire : $\omega \in \Omega$ est appelé un "résultat-élémentaire".

Vocabulaire : $E \in \mathcal{P}(\Omega)$ est appelé un "événement".

Remarque : $E = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots\} = \bigcup_i \{\omega_i\}$
$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(\bigcup_i \{\omega_i\}) = \sum_i \mathbb{P}(\{\omega_i\})$

Proposition : *(admis)*

Soient Ω et $\mathbb{P}$ sur Ω une probabilité sur Ω.
Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par $f(\omega) = \mathbb{P}(\{\omega\})$ pour tout $\omega \in \Omega$.
Alors :

1. $0 \leq f(\omega) \leq 1$.
2. $\sum_{\omega \in \Omega} f(\omega) = 1$.

Proposition : *(admis)*

Soit Ω un ensemble dénombrable alors et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tel que :

1. $f(\omega) \geq 0$
2. $\sum_{\omega \in \Omega} f(\omega) = 1$

Alors $\mathbb{P}_f(E) : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ définie par $\mathbb{P}_f(E) = \sum_{\omega \in E} f(\omega)$ est une probabilité sur Ω.

Démonstration :

1. $\mathbb{P}_f(E) = [0, 1]$
   $\mathbb{P}_f(E) \geq 0$ car $f(\omega) \geq 0$.
   $\mathbb{P}_f(E) = \sum_{\omega \in E} f(\omega) \leq \sum_{\omega \in \Omega} f(\omega) = 1$.

2. σ-additivité : Soit $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où $E_n \cap E_m = \emptyset$ pour $n \neq m$ et $E \in \mathcal{P}(\Omega)$.
   $\mathbb{P}_f(\bigcup_n E_n) = \sum_{\omega \in \bigcup_n E_n} f(\omega) = \sum_n \sum_{\omega \in E_n} f(\omega) = \sum_n \mathbb{P}_f(E_n)$.

Définition : Soit Ω un ensemble dénombrable et $\mathbb{P}$ une probabilité sur Ω, $(\Omega, \mathbb{P})$ est un **espace de probabilité**.

Définition : Soit Ω un ensemble fini alors la probabilité $\mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|}$ pour tout $\omega \in \Omega$ est appelée **probabilité uniforme** sur Ω.

Exemple : Soit $\Omega = \{1, 2, ..., 6\} = \{(\omega_1, \omega_2) : \omega_i \in \{1, ..., 6\}\}$
On a $|\Omega| = 36$, $\mathbb{P}_{uniforme}(\{\omega\}) = \frac{1}{36}$.
$A = \{$résultat du 1e dé est 4$\} = \{(4, \omega) : \omega \in \{1, ..., 6\}\}$. On a $|A| = 6$ et $\mathbb{P}(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.
$B = \{$la somme est égale à 4$\} = \{(1, 3), (3, 1), (2, 2)\}$. On a donc $|B| = 3$ et donc $\mathbb{P}(B) = \frac{3}{36}$.

B Propriétés élémentaires

Proposition :

Soit $A_1, A_2 \in \mathcal{P}(\Omega)$ alors :

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$$

Démonstration :
Patatoïde *(diagramme de Venn)*.

On a $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2^c) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$ car $A_1 = (A_1 \cap A_2^c) \cup (A_1 \cap A_2)$.

De même, $\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_2 \cap A_1^c) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$.

Donc $\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2^c) + \mathbb{P}(A_2 \cap A_1^c) + 2\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$.

Or, $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2^c) + \mathbb{P}(A_2 \cap A_1^c) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$.

D'où : $\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_1 \cup A_2) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) \Rightarrow \mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$. □

Remarque : On a toujours que $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$ car $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$.

Proposition : Principe d'inclusion-exclusion *(admis)*

Soit $E_1, E_2, \dots, E_n \in \mathcal{P}(\Omega)$ alors :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\left(\sum_{1\leq i_1<i_2<\ldots<i_k\leq n} \mathbb{P}\left(E_{i_1}\cap E_{i_2}\cap\ldots\cap E_{i_k}\right)\right)$$

Application : Dans le cas $n = 3$, exprimer la formule précédente.

On a : $\mathbb{P}(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = \mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_2) + \mathbb{P}(E_3) - \mathbb{P}(E_1 \cap E_2) - \mathbb{P}(E_1 \cap E_3) - \mathbb{P}(E_2 \cap E_3) + \mathbb{P}(E_1 \cap E_2 \cap E_3)$.

Proposition :

Si $A \subset B \in \mathcal{P}(\Omega)$ alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

Démonstration :
$B = A \cup (B \cap A^c)$ avec $A \cap (B \cap A^c) = \emptyset$.
Donc, $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \cap A^c) \geq \mathbb{P}(A)$. □

Proposition :

Soit $(E_1, E_2, \dots, E_n)$ une partition de Ω finie.
On a $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(E_i)$.

Démonstration : Par récurrence

- Si n = 2, c'est évident.
- Supposons que la propriété est vrai au rang n. On montre qu'elle est aussi vraie pour $n+1$
  $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n+1} E_i) = \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} E_i \cup E_{n+1}) = \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) + \mathbb{P}(E_{i+1}) - \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} E_i \cap E_{N+1})$
  $\leq P(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) + P(E_{n+1}) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(E_i) + \mathbb{P}(E_{n+1})$ Par récurrence.

Définition : Soit $(E_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{P}(\Omega)$, telle que $E_i \subset E_{i+1}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.
La **limite croissante** de la suite (E_i) est l'événement $E = \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i$.

Proposition : *(admis)*

$\mathbb{P}(E_\infty) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(E_n)$.

Démonstration :
$F_0 = E_0$ et $F_i = E_i \setminus E_{i-1}$ pour $i \geq 1$.
Alors, $E_n = \bigcup_{i=0}^{n} F_i$, et $F_i \cap F_j = \emptyset$ pour $i \neq j$.
Donc, $\mathbb{P}(E_n) = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(F_i)$.
Or, $E_\infty = \bigcup_{i=0}^{\infty} F_i$.
Donc, $\mathbb{P}(E_\infty) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(F_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(F_i) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(E_n)$. □

Exemple : $(\mathbb{N}^*, \mathbb{P})$ avec $\mathbb{P}(\{k\}) = \frac{1}{2^k}$ la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$.
$E_i = \{2, 4, \dots, 2i\}$ alors $E_i \subset E_{i+1}$ et $E_\infty = (2\mathbb{N})^*$.
$A_i = \{1, 2, \dots, i\}$ alors $A_i \subset A_{i+1}$ et $A_\infty = \mathbb{N}^*$.

Contents