Chapitre 4 : Espaces euclidiens

I Produit scalaire et norme

A Produit scalaire

On ne rappelera pas les définitions de normes et distances ici et les propositions qui s'ensuivent. Le lecteur est invité à se référer au chapitre 4 du cours AN3.

Définition : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Un **produit scalaire** sur E est une application $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ qui vérifie les propriétés suivantes :

1. $\forall x, y \in E,\ \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ (symétrie)
2. $\forall x, x', y \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \langle \lambda x + x', y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle$ (linéarité en la première variable)
3. $\forall x \in E,\ \langle x, x \rangle \geq 0$ et $\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$ (positivité)

En résumé, un produit scalaire est une forme bilinéaire, symétrique et définie positive.

Exemple : Dans $\mathbb{R}^n$,$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ est un produit scalaire.
Dans $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ est un produit scalaire.

Remarque : Si E est un espace vectoriel normé de dimension finie, il n'y a pas de produit scalaire canonique *a priori*. (On a vu néanmoins que dans $\mathbb{R}^n$, il existe un produit scalaire canonique.

Définition : Un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E muni d'un produit scalaire est appelé un **espace euclidien**.
On le note $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Identités remarquables :

$\langle x+y, x+y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle$
$\langle x+y, x-y \rangle = \langle x, x \rangle - \langle y, y \rangle$

Théorème : Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.
Alors, pour tous $x, y \in E$, on a :

$$|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle}\sqrt{\langle y, y \rangle}$$

De plus, l'égalité a lieu si et seulement si x et y sont colinéaires.

Note de rédaction : cf. Laurent.

B Normes

Rappel : On rappelle qu'une norme est une application $N : E \to \mathbb{R}_+$ qui vérifie l'homogénéité, l'inégalité triangulaire et la séparation.

Proposition :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
On pose $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.
Alors $\|\cdot\|$ est une norme sur E, appelée la norme associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Démonstration :
Homogénéité : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in E$.
$\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle x, x \rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle x, x \rangle} = |\lambda| \|x\|$
Inégalité triangulaire : Soit $x, y \in E$.
$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \leq \langle x, x \rangle + 2|\langle x, y \rangle| + \langle y, y \rangle$
$\leq \langle x, x \rangle + 2\sqrt{\langle x, x \rangle}\sqrt{\langle y, y \rangle} + \langle y, y \rangle = (\sqrt{\langle x, x \rangle} + \sqrt{\langle y, y \rangle})^2$
$\Rightarrow \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$
Séparation : Soit $x \in E$ tel que $\|x\| = 0$.
Alors $\sqrt{\langle x, x \rangle} = 0 \Rightarrow \langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$

Remarque : $x \mapsto |x|$ est une norme sur $\mathbb{R}$, associée au produit scalaire $\langle x, y \rangle = xy$.

Rappel : Une distance sur un ensemble X est une application $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ qui vérifie la séparation, la symétrie et l'inégalité triangulaire.

Proposition : Lien entre norme et distance

Soit N une norme sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.
Alors $d(x, y) = N(x - y)$ est une distance sur E.

Remarque : En géométrie affine, si A et B sont deux points, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est défini par $\overrightarrow{AB} = B - A$, et $d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\|$.

Remarque : Un produit scalaire donne une norme ($\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$) et une norme donne une distance ($d(x, y) = \|x - y\|$).

Propriété : Norme associée au produit scalaire (identité du parallélogramme)

$\forall x, y \in E,\ \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.
On peut le vérifier avec $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ et les identités remarquables.

D'où si une norme ne vérifie pas l'identité du parallélogramme, elle n'est pas associée à un produit scalaire.

Définition : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
L'**angle non-orienté** entre $x, y \in E \setminus \{0\}$ est défini par $\theta = \arccos\left(\frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|\|y\|}\right) \in [0, \pi]$.

Remarque : Cette définition est basée sur la propriété en géométrie euclidienne classique (angle où la direction n'a pas d'importance), et on a : $\langle x, y \rangle = \|x\|\|y\| \cos(\theta)$.

Remarque : Le vecteur normé associé à $x \in E \setminus \{0\}$ est $\frac{x}{\|x\|}$. C'est utile pour calculer des vecteurs unitaires.

II Orthogonalité

Définition : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
Deux vecteurs $x, y \in E$ sont dits **orthogonaux** si $\langle x, y \rangle = 0$.

On note $x \perp y$.

Remarque : L'angle entre deux vecteurs orthogonaux non nuls est $\frac{\pi}{2}$, et tout vecteur est orthogonal au vecteur nul.

Définition : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
Une famille de vecteurs $(x_i)_{i \in I}$ est dite **orthogonale** si $x_i \perp x_j$ pour tous $i \neq j$, *i.e.* si ses vecteurs sont deux à deux orthogonaux.

Théorème de Pythagore :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
Soit $(x_1, \ldots, x_k)$ une famille orthogonale (finie) de E.
Alors :

$$\|x_1 + \ldots + x_k\|^2 = \|x_1\|^2 + \ldots + \|x_k\|^2.$$

De plus, si $k = 2$, alors $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \Rightarrow x \perp y$.

Démonstration :
$\| \sum_{i=1}^k x_i \|^2 = \langle \sum_{i=1}^k x_i, \sum_{j=1}^k x_j \rangle =$ (bilinéarité) $\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \langle x_i, x_j \rangle = \sum_{i=1}^k \langle x_i, x_i \rangle = \sum_{i=1}^k \|x_i\|^2$.

Pour $k = 2$, $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$.
Donc si $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$, alors $2\langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow x \perp y$. $\square$

Définition : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
Une famille de vecteurs $(x_i)_{i \in I}$ est dite **orthonormée** si elle est orthogonale et que $\|x_i\| = 1$ pour tout $i \in I$.

Autrement dit, $\forall i, j \in I, \ \langle x_i, x_j \rangle = \delta_{ij}$.

Proposition :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
Alors une famille orthogonale dont chacun des vecteurs est non nul est libre.

En particulier, une famille orthonormée est libre.

Remarque : Si E est de dimension finie, toute famille orthonormée admet au plus $\dim(E)$ vecteurs.

Contents