

# Chapitre 4 : Variables aléatoires

## I Définitions

**Rappel :** Un rappel a été proposé sur l'image réciproque d'un ensemble par une application.

**Définition :** Soit  $(\Omega, \mathbb{P})$  un espace de probabilité et soit  $E$  un ensemble dénombrable. Une **variable aléatoire à valeurs dans  $E$**  est une application de  $\Omega$  dans  $E$ .

De manière générique, on la note  $X : \Omega \rightarrow E$

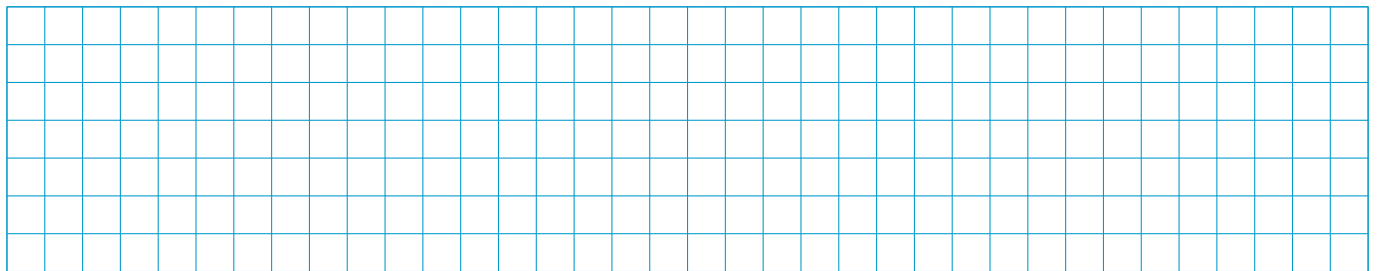
**Vocabulaire :** On écrira souvent *v.a.r.* pour *variable aléatoire réelle*, ie. une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

**Définition :** Soit  $(\Omega, \mathbb{P})$  un espace de probabilité et soit  $X : \Omega \rightarrow E$  une variable aléatoire à valeurs dans  $E$ . La **loi de  $X$**  est une probabilité définie sur  $E$  par :

$$\mu_X(A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A)) := \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\})$$

où  $A \in \mathcal{P}(E)$

**Application :** Vérifier en montrant les axiomes de la probabilité que  $\mu_X$  est bien une probabilité sur  $E$ .



**Exemple :** On lance deux dés.  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2 = \{(\omega_1, \omega_2) : \omega_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$  et  $\mathbb{P}$  est la probabilité uniforme.

On pose  $S : \Omega \rightarrow \{2, 3, \dots, 12\}$  définie par  $S((\omega_1, \omega_2)) = \omega_1 + \omega_2$ .

$$\mu_S(2) = \mathbb{P}(S^{-1}(\{2\})) = \mathbb{P}(\{(1, 1)\}) = \frac{1}{36} = \mathbb{P}(S = 2)$$

$$\mu_S(3) = \mathbb{P}(S^{-1}(\{3\})) = \mathbb{P}(\{(1, 2), (2, 1)\}) = \frac{2}{36} = \mathbb{P}(S = 3)$$

$$\mu_S(4) = \mathbb{P}(S^{-1}(\{4\})) = \mathbb{P}(\{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}) = \frac{3}{36} = \mathbb{P}(S = 4)$$

...

**Vocabulaire :** On a les abréviations et/ou notations suivantes :

- $\mu_X(A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A)) = \mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\})$
- $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X^{-1}(\{k\})) = \mu_X(\{k\})$

**Exemple :** On va ici illustrer la loi de Bernoulli.

La loi de Bernoulli est donnée par  $\mu(\{0\}) = 1 - p$  et  $\mu(\{1\}) = p$  où  $p \in [0, 1]$ .

Une **variable de Bernoulli** de paramètre  $p$  est une variable aléatoire définie sur  $(\Omega, \mathbb{P})$   $X : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$  telle que  $\mu_X$  est la loi de Bernoulli de paramètre  $p$ .

On la note  $Ber(p)$

**Définition :** Soit  $E$  un ensemble fini.

La **loi uniforme sur  $E$**  est définie par  $\mu(\{x\}) = \frac{1}{|E|}$  pour tout  $x \in E$ . On la note  $\mathcal{U}(E)$

## Contents

I	Définitions	1
---	-------------	---