Chapitre 3 : Suites et séries de fonctions

I Suites de fonctions

Définition : Soit I un intervalle ouvert, et soit $E = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
Une **suite de fonctions** est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathcal{F}(I, E)$, l'ensemble des fonctions de I dans E. On la note $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où f_n est la fonction associée à l'entier naturel n.

Vocabulaire : $\mathcal{F}(I, E)$: ensemble des fonctions de I dans E. On le note aussi E^I.

Remarque : Cette notion est généralisable si I devient un disque de $\mathbb{C}$ et E un espace vectoriel normé.

Exemple : $f_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a aussi : $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \cos(nx)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On peut tracer les graphes de ces suites de fonctions : $f_0, f_1, f_2, \dots$

A Convergence simple

Définition : Soit (f_n) une série de fonctions de I dans E.
On dit que (f_n) est **simplement convergente** sur I s'il existe une fonction $f : I \to E$ telle que, pour tout $x \in I$, la suite $(f_n(x))$ converge dans E.
On appelle dans ce cas la **limite simple** de la suite (f_n) la fonction f définie par : $f : {}^{I\to E}_{x\mapsto \lim_{n\to+\infty} f_n(x)}$.

Exemple : On pose $f_n : {}^{[0,1]\to\mathbb{R}}_{x\mapsto x^n}$.
Soit $x \in [0, 1]$.

$$lim_{n\to+\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Donc la suite (f_n) converge simplement sur $[0, 1]$ et sa limite simple est la fonction f définie par : $f : {}^{[0,1]\to\mathbb{R}}_{x\mapsto} \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$
.

Attention On atteint un premier problème : la limite de f_n est continue mais la limite simple f ne l'est pas.

Exemple : On pose $f_n = \begin{cases} n^2 x & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ n^2\left(\frac{2}{n} - x\right) & \text{si } x \in \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right] \\ 0 & \text{si } x > \frac{2}{n} \end{cases}$ définie de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.
On a que f_n converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, 1]$.
En effet, $f_n(0) = 0 \longrightarrow 0$ et si $x \in]0, 1]$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \implies x > \frac{2}{n} \implies f_n(x) = 0$. Donc $f_n(x) \longrightarrow 0$.
D'où la limite simple est la fonction nulle.
Cependant, $max_{[0,1]} f_n = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = n$, qui diverge vers $+\infty$. Donc la "convergence n'est pas uniforme".
Autre chose étrange, $\int_0^1 f_n(x)dx = 1$, alors qu'on s'attendrait à ce que l'intégrale de la limite soit nulle.

Contents