

Chapitre 5 : Séries entières

I Introduction

Définition : Une **série entière** est une série de fonctions dont le $n^{\text{ème}}$ terme général est un monôme de degré n .

C'est-à-dire que c'est une série de la forme $\sum_n a_n z^n$ où $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes ($\mathbb{C}^\mathbb{N}$ ou $\mathbb{R}^\mathbb{N}$) et z est une variable complexe.

Remarque : Comme séries de fonctions, les propositions vues sur le chapitre sur les séries de fonctions s'appliquent aux séries entières. Exception faite sur le théorème touchant aux dérivées, car on ne sait pas encore ce qu'est la dérivée d'une fonction de variable complexe.

Exemple :

$$\sum_{n \geq 0} z^n \quad \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} \quad \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n} \quad \dots$$

Rappel : Le *sup* d'une partie de \mathbb{R} est défini par $\sup(A) = \min\{x \in \mathbb{R} : A \subset]-\infty, x]\}$ et le *inf* d'une partie de \mathbb{R} est défini par $\inf(A) = \max\{x \in \mathbb{R} : A \subset [x, +\infty[\}$.

A Convergence d'une série entière

Exemple : La série $\sum_{n \geq 0} z^n$ converge si et seulement si $|z| < 1$ sur $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} = D(0, 1)$

Exemple : Soit $z \in \mathbb{C}$. On pose $u_n = \frac{z^n}{n!}$. Alors on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{z^n} = \frac{z}{n+1} \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. Par le critère de d'Alembert, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$ et on dira que le rayon de convergence de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$ est $+\infty$.

Vocabulaire : On dit que 1 est le **rayon de convergence** de la série $\sum_{n \geq 0} z^n$ (et $D(0, 1)$ est le **disque de convergence** de la série $\sum_{n \geq 0} z^n$).

Lemme :

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière et $z_0 \in \mathbb{C}$.

1. Si $\sum_{n \geq 0} a_n z_0^n$ converge absolument, alors la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge normalement sur $\overline{D}(0, |z_0|) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq |z_0|\}$.
2. Si $(a_n z_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, alors la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge normalement sur $\overline{D}(0, r)$ pour tout $r < |z_0|$

Démonstration :

1. Soit $z \in \overline{D}(0, |z_0|)$ et soit $n \in \mathbb{N}$.

On a $|a_n z^n| = |a_n| |z|^n \leq |a_n| |z_0|^n$.

Et de plus $\sum_{n \geq 0} |a_n| |z_0|^n$ converge par hypothèse et est indépendant de z .

Donc la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge normalement sur $\overline{D}(0, |z_0|)$.

2. Soit $r < |z_0|$.

Montrons que $\sum_{n \geq 0} a_n r^n$ converge absolument.

et $1 \Rightarrow 2$ et $|a_n|r^n = |a_n||z_0|^n \cdot \left(\frac{r}{|z_0|}\right)^n \leq M \cdot \left(\frac{r}{|z_0|}\right)^n$ pour un certain $M = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n||z_0|^n$.
 et comme série géométrique de raison $\frac{r}{|z_0|} < 1$, la série $\sum_{n \geq 0} M \cdot \left(\frac{r}{|z_0|}\right)^n$ converge.
 D'où la série $\sum_{n \geq 0} a_n r^n$ converge absolument.

Définition : On appelle **rayon de convergence** de la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ le nombre $R \in [0, +\infty]$ défini par $R = \sup\{r \in [0, +\infty] : (a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée}\} = \sup\{r \in [0, +\infty] : \sum_{n \geq 0} a_n r^n \text{ converge}\}$.

Définition : On appelle **disque ouvert de convergence** de la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ l'ensemble $D(0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ où R est le rayon de convergence de la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$.

Remarque : Si $R = 0$, $D(0, R) = \emptyset$

Si $R = +\infty$, $D(0, R) = \mathbb{C}$

Contents

I	Introduction	1
A	Convergence d'une série entière	1