



Chapitre 2 : Séries numériques


I Séries et sommes d'une série

Définition : Soit (u_n) une suite dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .
On considère $\forall N \in \mathbb{N}, S_N = \sum_{n=0}^N u_n \in \mathbb{K}$.
On a donc une suite $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$ associée à la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Définition : On appelle **série de terme général** u_n que l'on note $\sum_{n \geq 0} u_n$ la suite $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$.

 **Note de rédaction :** Les deux définitions précédentes gagneraient à être fusionnées.


 **Vocabulaire :** On dit que (S_N) est la suite des sommes partielles de la série.

 **Remarque :** (S_N) correspond aux $N + 1$ premiers termes de la suite.

A Correspondance suite - série

Raisonnement : Par définition une série est une suite. Expliquons comment une suite peut-être vue comme une série.

Si (u_n) est une suite, considérons la série de terme général $v_n = u_n - u_{n-1} \forall n \in \mathbb{N}$ (avec la convention $v_0 = u_0$).
Ainsi, $u_n = \sum_{k=0}^n v_k$.


 **Remarque :** Cependant la série associée à une suite (u_n) va s'étudier en tant que telle (que série) grâce à u_n .

B Opérations sur les séries

Propriété : Opérations sur les séries (admise)

Soient $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries.
Alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$:

- **Somme :** $\sum_{n \geq 0} (u_n + v_n) = \sum_{n \geq 0} u_n + \sum_{n \geq 0} v_n$ définie comme $(S_N + S'_N)$
- **Produit par un scalaire :** $\sum_{n \geq 0} \lambda u_n = \lambda \sum_{n \geq 0} u_n$ définie comme (λS_N)

 **Exemple :** Si $u_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$, alors $\sum_{n \geq 0} u_n = 0$ est la série nulle.

C Troncature d'une série

Définition : Si (u_n) est une suite définie pour $n \geq n_0 \mid n_0 \in \mathbb{N}$. On peut considérer la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ où $u_0 = u_1 = \dots = u_{n_0-1} = 0$, ou bien on peut écrire $\sum_{n \geq n_0} u_n$.
Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ est une série de terme général u_n , une **troncature** de la série est $\sum_{n \geq n_0} u_n$. C'est la suite (S_N) où $S_N = \sum_{n=n_0}^N u_n$.

 **Note de rédaction :** Cette définition pourrait être synthétisée.

 **Exemple :**

- la série nulle
- la série géométrique de raison $q \in \mathbb{C}^*$: $\sum_{n \geq 0} q^n$ de terme général q^n ;
- la série harmonique : $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ de terme général $\frac{1}{n}$;
- la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

II Convergence d'une série

A Définitions et nature d'une série

Définition : Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série.

On dit que la série converge, si la suite (S_N) converge, et on note S la limite de S_N .
S s'appelle la somme de la série.

Dans ce cas, on écrit : $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = S \in \mathbb{R}$ (c'est une "somme infinie", un objet-limite).

💬 **Vocabulaire :** Si (S_N) diverge, alors on dit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge.

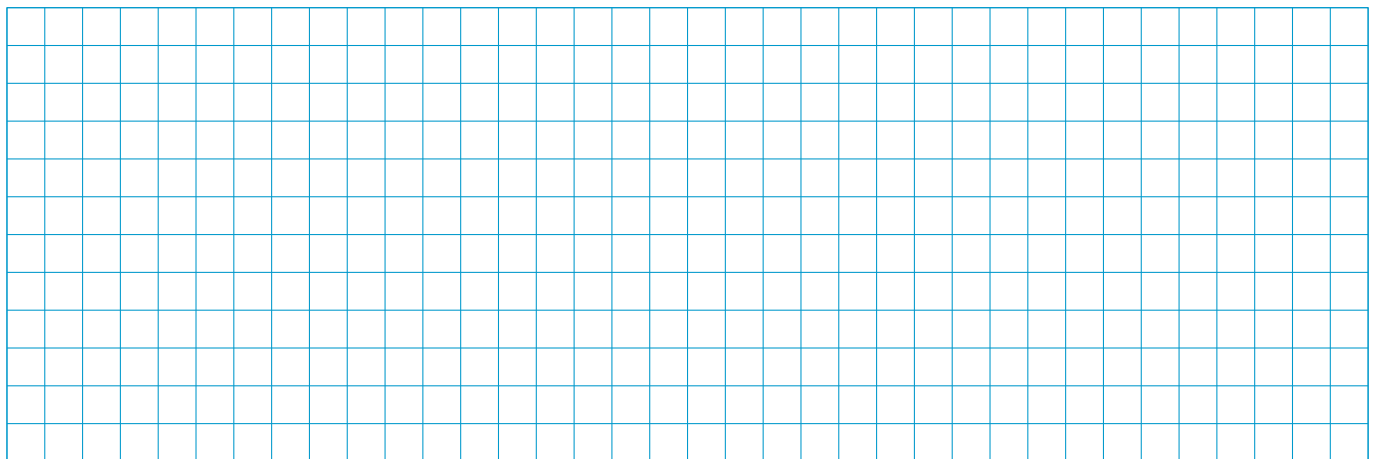
✗ **Attention** ✗ Si S n'existe pas, alors on écrit **jamais** la notation avec ∞

💬 **Vocabulaire :** La convergence ou la divergence d'une série s'appelle la **nature** de la série.

Proposition : Stabilité de la limite par troncature (admis)

La nature d'une série n'est pas modifiée par troncature.

Preuve:



💬 **Note de rédaction :** Indication : les premiers termes n'influencent pas la convergence.

B Quelques applications...

💡 **Exemple :**

- Si (u_n) est nulle à partir d'un rang N_0 alors la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente, et $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{N_0} u_n$.

- Série géométrique $\sum_{n \geq 0} q^n$:

On considère la suite des sommes partielles (S_N) où $S_N = \sum_{n=0}^N q^n = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}$ avec $q \neq 1$. On a plusieurs cas :

- Si $|q| < 1$, $q^{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$ donc $S_N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{1-q} \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.
La série $\sum_{n \geq 0} q^n$ converge et on arrive à trouver S !
- Si $|q| > 1$, alors $\sum_{n \geq 0} q^n$ diverge.
- Si $q = 1$, alors $\sum_{n \geq 0} q^n = N + 1 \Rightarrow \sum_{n \geq 0} q^n$ diverge.

- $\sum_{n \geq 1} \log(1 + 1/n)$:

On a $\forall N \geq 1, S_N = \sum_{n=1}^N \log(\frac{n+1}{n}) = \log(N+1)$ (télescopage).

Or $\log(N+1) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} +\infty$, donc la série $\sum_{n \geq 1} \log(1 + 1/n)$ diverge.


- $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$:

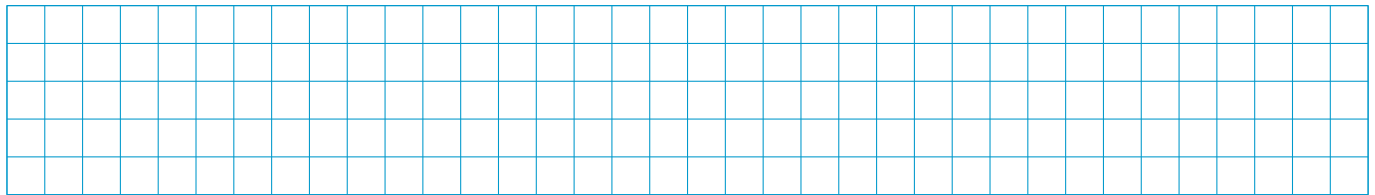
On a $\forall N \geq 1, S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^N (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{N+1}$ (télescopage).

Or $1 - \frac{1}{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1$, donc la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

- Important, démontré plus tard : $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ (série harmonique) diverge.
- $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge. (idée : montrer que S_N converge en montrant $A_N = S_{2N}$ et $B_N = S_{2N+1}$ sont adjacentes)

✗ **Attention** ✗ Ces six exemples sont à connaître et comprendre parfaitement.

 **Application** : Étudier la convergence de la série géométrique pour $|q| = 1$ et $q = -1$ ($q \in \mathbb{C}$).



C Propriétés des séries convergentes

Propriété : Convergence de la combinaison linéaire (admise)

Soient $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries convergentes.

Alors $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} : \sum_{n \geq 0} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n \geq 0} u_n + \mu \sum_{n \geq 0} v_n$, cette série converge (vers la combinaison linéaire des limites).

 **Remarque** : En d'autres termes, la somme de deux séries convergentes est une série $\sum_{n \geq 0} (u_n + v_n)$ qui converge.

Preuve :

La suite de sommes partielles associée à $\sum_{n \geq 0} (u_n + v_n)$ est $\sum_{n=0}^N (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^N u_n + \sum_{n=0}^N v_n$

Comme $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ sont convergentes, on a $\sum_{n=0}^{\infty} (u_n + v_n)$ est convergente et sa limite est $\sum_{n=0}^{\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \sum_{n=0}^{\infty} v_n$.

 **Exemple** : Retour : Divergence de la série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$

But : minorer $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \forall N \in \mathbb{N}$.

$n \leq t \in \mathbb{R} \leq n+1 \Rightarrow \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{n}$

Intégrons entre n et $n+1$: $\int_n^{n+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{n}$

Donc en sommant : $\sum_{n=1}^N \int_n^{n+1} \frac{1}{t} dt \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$

donc par Chasles : $\int_1^{N+1} \frac{1}{t} dt \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \forall n \in \mathbb{N}$

Or $\int_1^{N+1} \frac{1}{t} dt = \ln(N+1) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} +\infty$ donc $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} +\infty$.

Donc la série harmonique diverge.

Propriété : Divergence de la combinaison linéaire (*admise*)

Soient $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série convergente et $\sum_{n \geq 0} v_n$ une série divergente.
Alors $\sum_{n \geq 0} (u_n + v_n)$ diverge.

Preuve :

$\sum_{n=0}^N (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^N u_n + \sum_{n=0}^N v_n$
Comme $\sum_{n=0}^N u_n$ est convergente et $\sum_{n=0}^N v_n$ est divergente, on a $\sum_{n=0}^N (u_n + v_n)$ est divergente.

✗ **Attention** ✗ Quand on considère deux séries divergentes, la situation est à étudier au cas par cas.

💡 **Exemple :** Considérons $\sum_{n \geq 1} u_n$ avec $u_n = 1 \forall n \in \mathbb{N}$ et $\sum_{n \geq 1} v_n$ avec $v_n = -1 \forall n \in \mathbb{N}$.

D'une part $\sum_{n \geq 1} u_n$ diverge, et $\sum_{n \geq 1} v_n$ diverge aussi.

Mais $\sum_{n \geq 1} (u_n + v_n) = \sum_{n \geq 1} 0 = 0$ converge.

Mais si on considère $v_n = u_n$, alors $\sum_{n \geq 1} (u_n + v_n) = \sum_{n \geq 1} 2u_n$ diverge.

✗ **Attention** ✗ **Source d'erreur classique :** Si $\sum_{n \geq 0} u_n + v_n$ est convergente, *a priori* on ne peut pas écrire que $\sum_{n=0}^{\infty} u_n + v_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \sum_{n=0}^{\infty} v_n$ car les séries de termes généraux u_n et v_n peuvent être divergentes (il faut donc vérifier leur convergence).

Proposition : (*admis*)

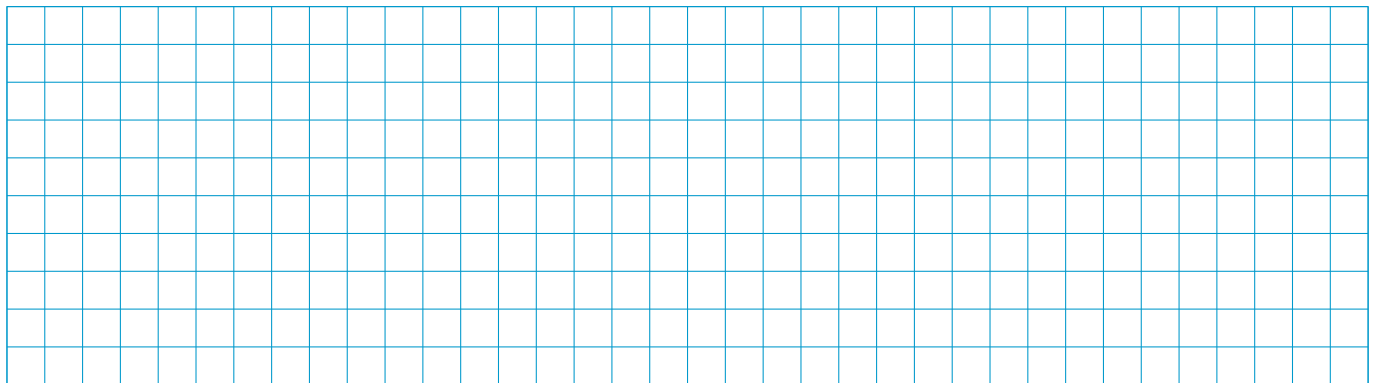
Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série numérique où $u_n \in \mathbb{C} \forall n \in \mathbb{N}$.

On a $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge \Leftrightarrow les suites $(\operatorname{Re}(u_n))$ et $(\operatorname{Im}(u_n))$ sont convergentes.

🛠 **Application :** Montrer la proposition précédente.

Indication pour la preuve:

écrire $u_n = \operatorname{Re}(u_n) + i\operatorname{Im}(u_n)$ et utiliser la propriété sur les combinaisons linéaires.

**Théorème : Lien entre convergence et limite des termes**

Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge, alors $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Preuve:

Considérons (S_N) la suite des sommes partielles associée à $\sum_{n \geq 0} u_n$.

On a $S_{N+1} - S_N = u_{N+1} \forall N \in \mathbb{N}$.

Or $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge $\Rightarrow (S_N)$ converge. Donc $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N - \lim_{N \rightarrow \infty} S_{N+1} = 0 \Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} u_N = 0$.

✗ **Attention** ✗ La réciproque est fausse. Par exemple la série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge mais $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

💬 **Vocabulaire :** Si $u_n \not\rightarrow 0$, on dit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ **diverge grossièrement**.

D Reste d'une série

Définition : On suppose que $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge. On note $S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ sa somme et (S_N) la suite des sommes partielles.

Le **reste** de la série au rang N est $R_N = S - S_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} u_n$.

Proposition : Comportement du reste

Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge, alors $R_N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$.

Preuve:

Par définition, $R_N = S - S_N$. Or $S_N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} S$. Donc $R_N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$.

III Série absolument convergente (ACV)

A Critère de Cauchy pour les séries numériques

Ce qui a été fait dans le **Chapitre 1 - Suites de Cauchy** sur les suites réelles reste valable si on considère des suites complexes.

Définition : On dit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ vérifie le **critère de Cauchy** si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall N \geq N_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}, \left| \sum_{k=N}^{N+p} u_k \right| < \varepsilon$$

Proposition : Convergence et critère de Cauchy

$\sum_{n \geq 0} u_n$ vérifie le critère de Cauchy $\Leftrightarrow \sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

Preuve: (par équivalence)

$\sum_{n \geq 0} u_n$ converge $\Leftrightarrow (S_N)$ converge $\Leftrightarrow (S_N)$ est une suite de Cauchy (car l'espace est complet) $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall N \geq N_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}, |S_{N+p} - S_N| < \varepsilon \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall N \geq N_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}, \left| \sum_{n=N}^{N+p} u_n \right| < \varepsilon$

Remarque : Autre preuve de la divergence de la série harmonique :

Soit $\varepsilon = 1/2$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on peut choisir $p = N$ et on a : $\left| \sum_{k=N}^{2N} \frac{1}{k} \right| \geq \sum_{k=N}^{2N} \frac{1}{2N} = \frac{1}{2}$.
Donc la série harmonique ne vérifie pas le critère de Cauchy, donc elle diverge.

B Définitions et propriétés

Définition : On dit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est absolument convergente (ACV) si la série $\sum_{n \geq 0} |u_n|$ converge.

Théorème : Série ACV et convergence

Série ACV \Rightarrow série convergente et $\left| \sum_{n=0}^{\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$.

Preuve:

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série ACV.

Donc $\sum_{n \geq 0} |u_n|$ converge.

Donc $\sum_{n \geq 0} |u_n|$ vérifie le critère de Cauchy : $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall N \geq N_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}, \left| \sum_{k=N}^{N+p} |u_k| \right| < \varepsilon$

Donc $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall N \geq N_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}, \left| \sum_{k=N}^{N+p} u_k \right| \leq \sum_{k=N}^{N+p} |u_k| < \varepsilon$

Ainsi $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall N \geq N_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}, \left| \sum_{k=N}^{N+p} u_k \right| < \varepsilon$

Donc $\sum_{n \geq 0} u_n$ vérifie le critère de Cauchy.

Donc $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge et on a $|\sum_{n=0}^N u_n| \leq \sum_{n=0}^N |u_n| \implies |\sum_{n=0}^{\infty} u_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$.

✗ **Attention** ✗ La réciproque est fausse.

💡 **Exemple** : La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente, mais elle n'est pas absolument convergente car $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

IV Convergence absolue d'une série

💬 **Note de rédaction** : Correspond à II. dans le plan de cours du prof.

A Séries à termes positifs

Théorème :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans \mathbb{R}^+ .

Alors la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ ($u_n \geq 0$) converge \Leftrightarrow la suite (S_N) des sommes partielles est bornée.

Preuve:

En effet, $S_{N+1} - S_N = u_{N+1} \geq 0$ donc (S_N) est croissante (à termes positifs).

Ainsi (S_N) converge $\Leftrightarrow (S_N)$ est bornée (*théorème de convergence monotone*).

Or $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge $\Leftrightarrow (S_N)$ converge.

Donc $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge $\Leftrightarrow (S_N)$ est bornée.

📌 **Remarque** : Si (S_N) n'est pas bornée, alors $S_N \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} +\infty$. On tolère la notation $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = +\infty$.

📌 Application : Application du théorème.

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries à termes positifs.

Montrons que la série $\sum_{n \geq 0} \sqrt{u_n v_n}$ converge.

En effet, utilisons l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

$$\forall N \in \mathbb{N}, \sum_{n=0}^N \sqrt{u_n v_n} \leq \sqrt{\sum_{n=0}^N u_n} \sqrt{\sum_{n=0}^N v_n}.$$

Or les deux termes de droite sont bornés, donc $\forall N \in \mathbb{N}, \sum_{n=0}^N \sqrt{u_n v_n}$ est bornée.

Donc $\sum_{n \geq 0} \sqrt{u_n v_n}$ converge.

Autre preuve (sans Cauchy-Schwarz) :

$$(a - b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2} \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Donc } \sum_{n=0}^N \sqrt{u_n v_n} \leq \frac{1}{2} (\sum_{n=0}^N u_n + \sum_{n=0}^N v_n).$$

Or les deux termes de droite sont bornés, donc $\forall N \in \mathbb{N}, \sum_{n=0}^N \sqrt{u_n v_n}$ est bornée.

Donc $\sum_{n \geq 0} \sqrt{u_n v_n}$ converge.

💬 **Note de rédaction** : On a pas encore abordé Cauchy-Schwarz.

Proposition :

Soient $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries convergentes (*pas forcément à termes positifs mais réels*).

Si $u_n \leq v_n \forall n \in \mathbb{N}$, alors $\sum_{n=0}^{\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} v_n$.

Preuve:

On considère la série à termes positifs $\sum_{n \geq 0} (v_n - u_n)$. C'est une série convergente.

On a $\sum_{n=0}^{\infty} (v_n - u_n) \geq 0$.

Or $\sum_{n \geq 0} v_n$ et $\sum_{n \geq 0} u_n$ sont convergentes.

Donc on peut écrire : $\sum_{n=0}^{\infty} v_n - \sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} (v_n - u_n) \geq 0$.
 Donc $\sum_{n=0}^{\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} v_n$.

B Critère de comparaison

Tout cela est fait pour des séries à termes positifs.

Théorème : Critère de comparaison ("Hyper important")

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries à termes positifs.

Supposons que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq v_n$.

Alors :

- Si $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge, alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.
- Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge, alors $\sum_{n \geq 0} v_n$ diverge.

Preuve:

- On a $\forall N \in \mathbb{N}, 0 \leq \sum_{n=0}^N u_n \leq \sum_{n=0}^N v_n$.
 Or $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge, donc la suite des sommes partielles $(\sum_{n=0}^N v_n)$ est bornée.
 Donc la suite des sommes partielles $(\sum_{n=0}^N u_n)$ est bornée et donc $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.
- Comme $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge, la suite des sommes partielles $(\sum_{n=0}^N u_n)$ n'est pas bornée.
 Et comme $\forall N \in \mathbb{N}, 0 \leq \sum_{n=0}^N u_n \leq \sum_{n=0}^N v_n$, la suite des sommes partielles $(\sum_{n=0}^N v_n)$ n'est pas bornée.
 Et donc par le théorème de convergence des séries à termes positifs on a que $\sum_{n \geq 0} v_n$ diverge.

Corollaire :

Soient $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries à termes positifs.

$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$.

Alors :

- Si $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge, alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.
- Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge, alors $\sum_{n \geq 0} v_n$ diverge.

Preuve:

Pour $n \geq n_0$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \times \frac{u_n}{u_{n-1}} \times \dots \times \frac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n} \times \frac{v_n}{v_{n-1}} \times \dots \times \frac{v_{n_0+1}}{v_{n_0}}$$

$$\Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_{n_0}} \leq \frac{v_{n+1}}{v_{n_0}} \Rightarrow u_{n+1} \leq k v_{n+1} \text{ avec } k = \frac{u_{n_0}}{v_{n_0}} \in \mathbb{R}_+^*$$

- On suppose que $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge.
 Donc $\sum_{n \geq 0} k v_n$ converge.
 Donc par le théorème précédent, comme $\forall n \geq n_0, 0 \leq u_n \leq k v_n$, on a que $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.
- (non démontré en cours)

 **Application :** applications aux séries absolument convergentes

Proposition :

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série à termes réels.

Définissons $u_n^+ = \max(u_n, 0) \geq 0$ et $u_n^- = \max(-u_n, 0) \geq 0$.

On a $\sum_{n \geq 0} u_n$ est ACV.

$\sum_{n \geq 0} |u_n|$ converge $\Leftrightarrow \sum_{n \geq 0} u_n^+$ et $\sum_{n \geq 0} u_n^-$ convergent.

Preuve:

\Rightarrow On a $\forall n \in \mathbb{N} \ 0 \leq u_n^+ \leq |u_n|$ et $0 \leq u_n^- \leq |u_n|$.

Donc par le théorème de comparaison, $\sum_{n \geq 0} u_n^+$ et $\sum_{n \geq 0} u_n^-$ convergent.


\Leftarrow On remarque que $|u_n| = u_n^+ + u_n^-$.

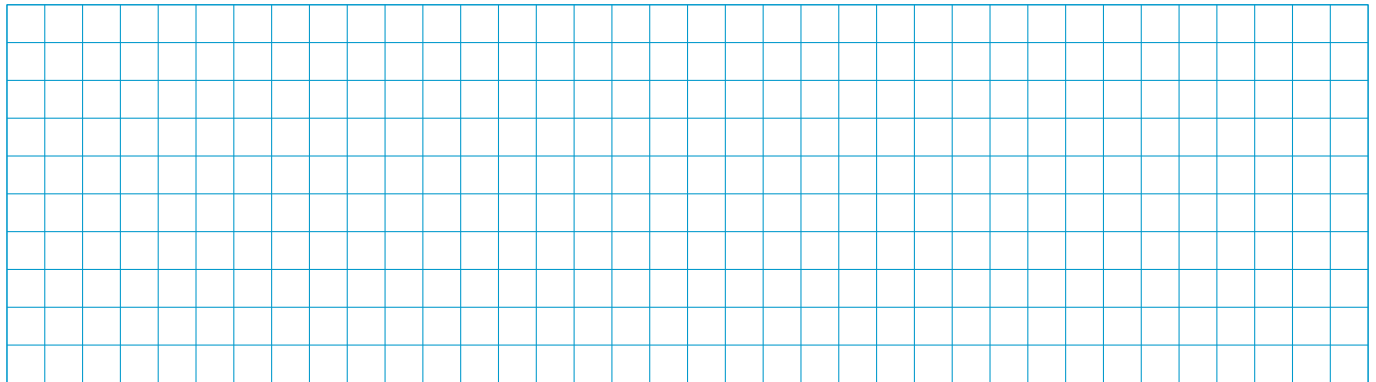
Si $\sum_{n \geq 0} u_n^+$ et $\sum_{n \geq 0} u_n^-$ convergent, alors $\sum_{n \geq 0} |u_n|$ converge $\Rightarrow \sum_{n \geq 0} u_n$ est ACV.


Proposition :

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série à termes complexes.

On a $\sum_{n \geq 0} u_n$ est ACV $\Leftrightarrow \sum_{n \geq 0} \operatorname{Re}(u_n)$ et $\sum_{n \geq 0} \operatorname{Im}(u_n)$ sont ACV.

 **Application :** Montrer la proposition précédente.

**C Domination, convergence et équivalence**

 **Rappel :** Soient (u_n) et (v_n) deux suites.

- $u_n = O(v_n)$ ssi $\exists M > 0, |u_n| \leq M|v_n|$ au voisinage de l'infini (n assez grand) $\Leftrightarrow \left| \frac{u_n}{v_n} \right|$ est bornée.
- $u_n = o(v_n)$ ssi $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$. (u_n est négligeable devant v_n)
- $u_n = o(v_n) \Rightarrow u_n = O(v_n)$
- $u_n \sim v_n$ ssi $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$. (u_n est équivalent à v_n)

Proposition : (admis)

Soient $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries à termes positifs.

On suppose $u_n = O_{+\infty}(v_n)$.

- Si $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge, alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.
- Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge, alors $\sum_{n \geq 0} v_n$ diverge.

Indication pour la preuve:

Il suffit de remarquer que $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} Mv_n$ sont de même nature ; et M est tel que $u_n \leq Mv_n$

✗ Attention ✗ Si on sait que $\sum_{n \geq 0} v_n$ alors pour montrer que $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge, il suffit de montrer que $u_n = o_{+\infty}(v_n)$.

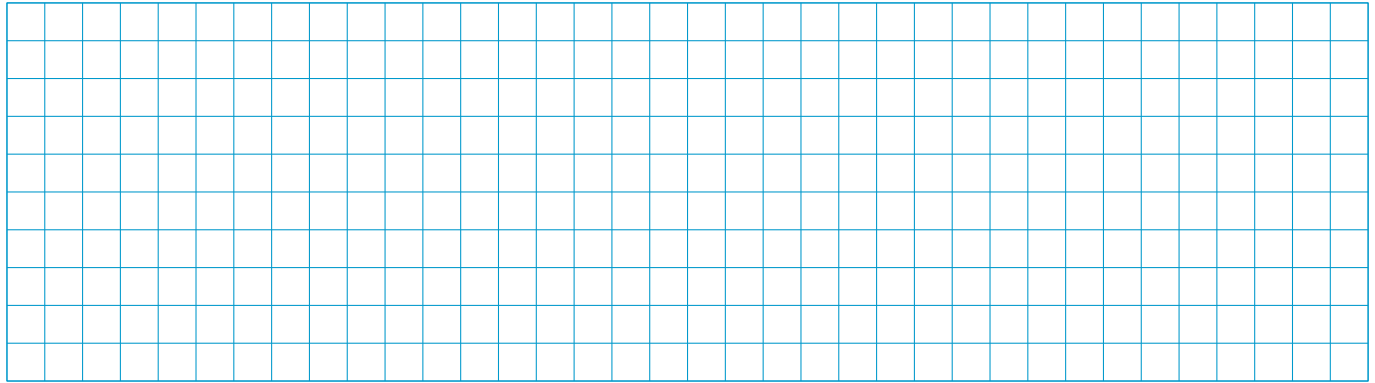
(en réalité il faudrait montrer grand O, mais $o \Rightarrow O$ donc c'est plus fort et plus simple à montrer)

Corollaire : (admis)

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série à terme général dans \mathbb{C} et soit $\sum_{n \geq 0} v_n$ une série à terme général positif tel que $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge.

Si $u_n = O_{+\infty}(v_n)$, alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge absolument (ACV).

 **Application :** Montrer le corollaire précédent.

**Théorème : "Hyper² important"**


Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série à terme général dans \mathbb{C} et soit $\sum_{n \geq 0} v_n$ une série à termes positifs.

On suppose $u_n \sim_{+\infty} v_n$.

(on pourrait mettre une constante)

On a :

- Si $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge absolument (ACV).
- Si $\sum_{n \geq 0} v_n$ diverge alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge.

 **Remarque :** Si $u_n \geq 0$ alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ sont de même nature.

V Séries de références

A Série de Riemann

Théorème :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$, dite **série de Riemann**.

La série converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$.

Preuve:

On a vu que pour $\alpha = 1$, la série diverge (série harmonique).

- Si $\alpha \leq 1$, $\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n}$. Donc par le théorème de comparaison, $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.

- \Leftarrow / Supposons $\alpha > 1$.

Considérons la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ de terme général $u_n = \frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$.

Observation 1 : $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{n=1}^N u_n = 1 - \frac{1}{(N+1)^{\alpha-1}}$ donc $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge (car $\alpha - 1 > 0$). (téléscopage)

Observation 2 : Déterminons un équivalent de u_n .

$$u_n = \frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} = \frac{1}{n^{\alpha-1}} \left(1 - \left(\frac{n}{n+1} \right)^{\alpha-1} \right).$$

$$\text{On a } \left(\frac{n}{n+1} \right)^{\alpha-1} = \left(\frac{n+1-1}{n+1} \right)^{\alpha-1} = \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^{\alpha-1} = 1 - \frac{\alpha-1}{n} + o_{+\infty} \left(\frac{1}{n} \right) \text{ (DL ordre 1).}$$

$$\Rightarrow 1 - \left(\frac{n}{n+1} \right)^{\alpha-1} = \frac{\alpha-1}{n} + o_{+\infty} \left(\frac{1}{n} \right) \sim_{+\infty} \frac{\alpha-1}{n}.$$

$$\text{Donc } u_n \sim_{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha-1}} \times \frac{\alpha-1}{n} = \frac{\alpha-1}{n^\alpha} > 0.$$

On a deux séries à termes positifs $\sum_{n \geq 1} u_n$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{\alpha-1}{n^\alpha}$ qui sont de même nature car équivalentes ($u_n \sim_{+\infty} \frac{\alpha-1}{n^\alpha}$).

On en déduit que $\sum_{n \geq 1} \frac{\alpha-1}{n^\alpha}$ converge pour $\alpha > 1$ par le théorème sur les équivalents.

De plus la nature d'une série n'est pas modifiée quand le terme général est multiplié par un scalaire non nul.

Donc $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est de même nature que $\sum_{n \geq 1} \frac{\alpha-1}{n^\alpha}$.

Donc $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge.

✗ **Attention** ✗ Démonstration probablement en question de cours au partiel/CC :)

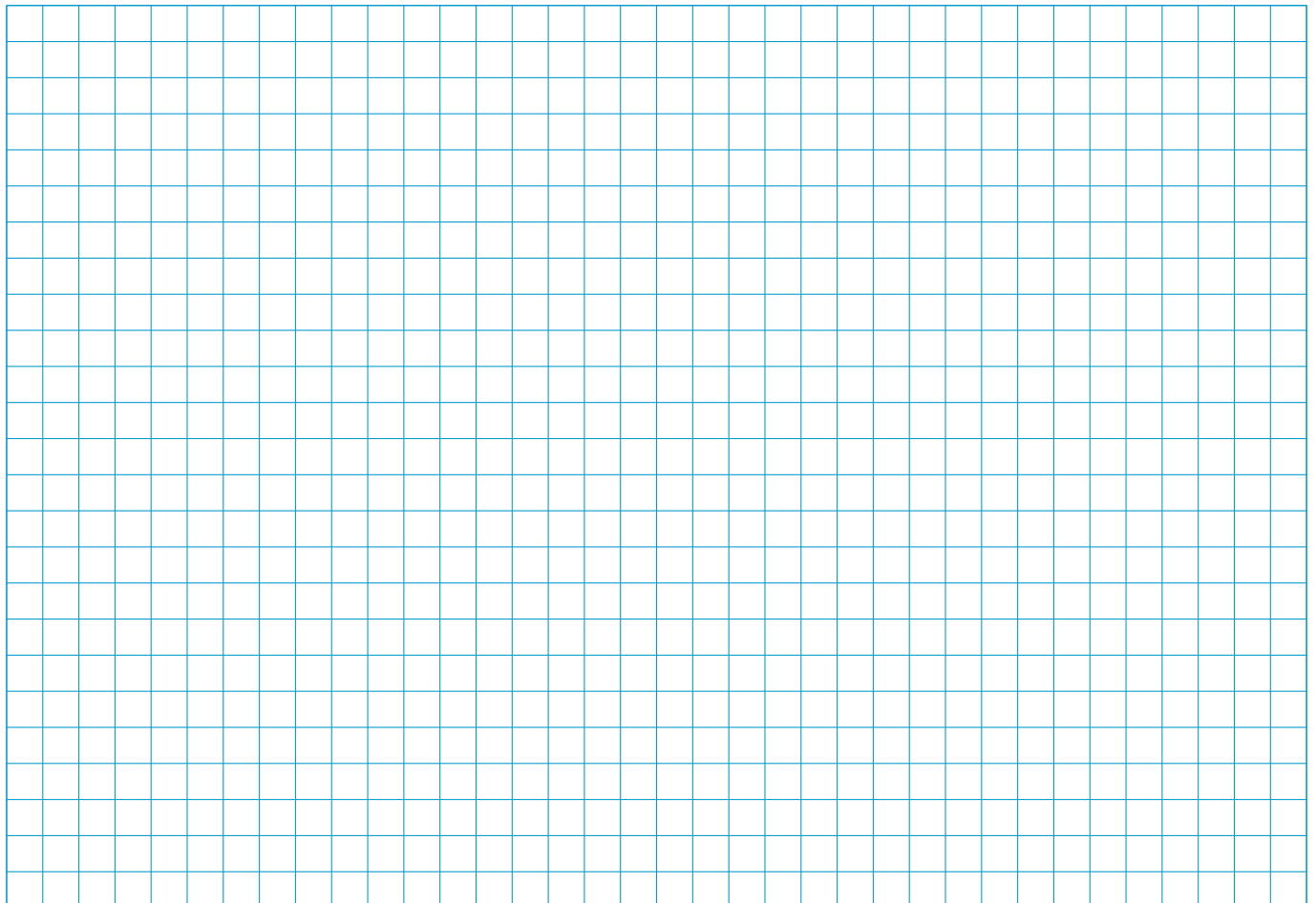
Règles de comparaisons avec les séries de Riemann :


Soient $\sum u_n$ une série de terme général dans \mathbb{C} .

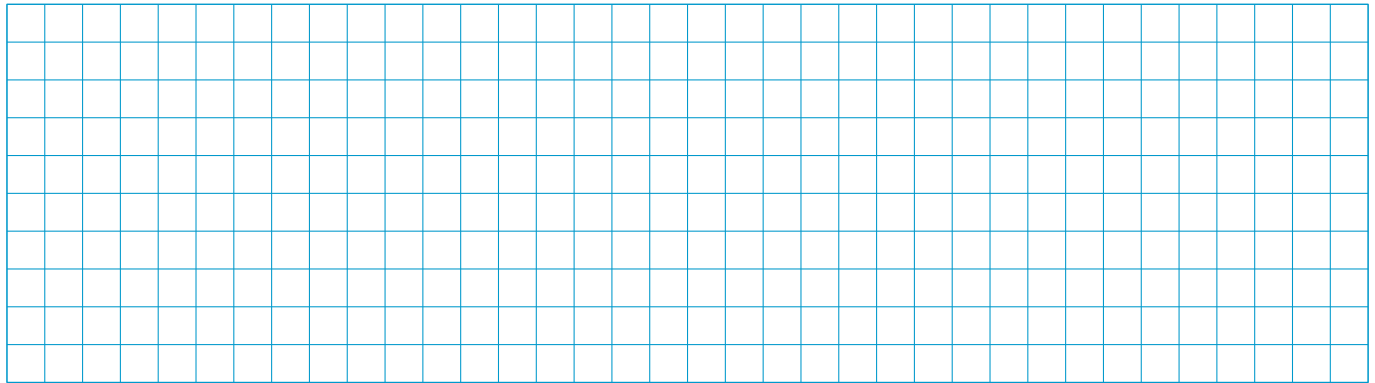
1. Si $u_n \sim_{+\infty} k \frac{1}{n^\alpha}$ avec $k \in \mathbb{C}^*$.
 - Si $\alpha > 1$ alors $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge absolument (ACV).
 - Si $\alpha \leq 1$ alors $\sum_{n \geq 1} u_n$ diverge.
2. Si $\exists \alpha > 1, n^\alpha |u_n|$ bornée (i.e. $u_n = O(\frac{1}{n^\alpha})$), alors $\sum u_n$ converge absolument (ACV).
il suffit de montrer que $u_n = o(\frac{1}{n^\alpha})$
3. On se restreint à $u_n \in \mathbb{R}$. Si $\exists \alpha \leq 1, n^\alpha u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$, alors $\sum u_n$ diverge.

Remarque : Penser u_n à terme réel positif et $k \in \mathbb{R}_+^*$ pour la compréhension. (suffisant pour la compréhension et la plupart des exercices)

Application : Montrer les règles de comparaison avec les séries de Riemann.



 **Application :** Etudier la nature de la série de terme général $u_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt[3]{n^3 + an^2 + bn + c}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.



B Série géométrique

 **Rappel :** La série $\sum_{n \geq 0} q^n$ converge $\Leftrightarrow |q| < 1$ et dans ce cas $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

Preuve:

\Leftarrow Si $|q| < 1$, alors $S_N = \sum_{n=0}^N q^n = \frac{1-q^{N+1}}{1-q} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \frac{1}{1-q}$.

\Rightarrow Si $|q| \geq 1$, alors $q^n \not\rightarrow 0$ donc la série diverge (grossièrement).

Règle de Cauchy :

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série à terme général dans \mathbb{C} .


On suppose que $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n|^{\frac{1}{n}} = l$ (existe et égale à $l \in [0, +\infty]$, $+\infty$ autorisé).

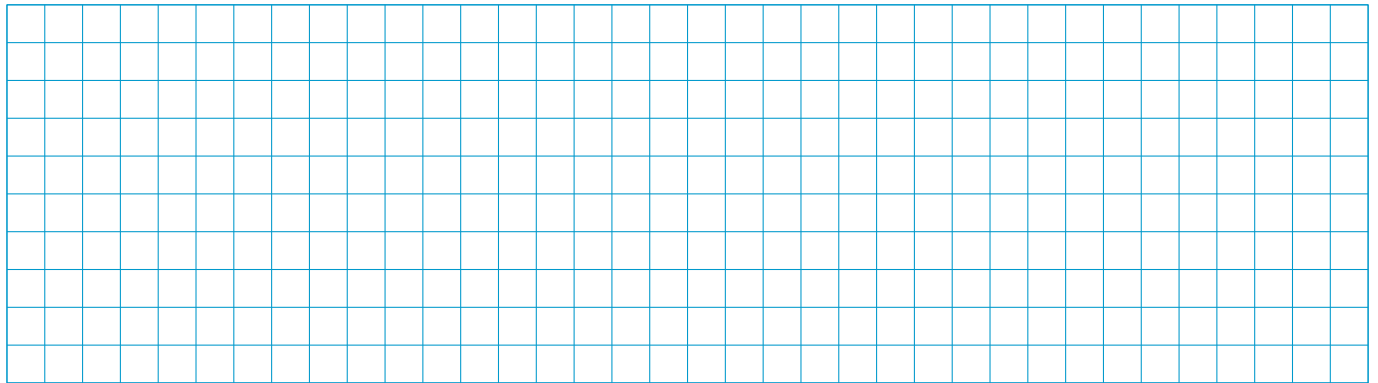
1. Si $l < 1$, alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge absolument (ACV).
2. Si $l > 1$, alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge.
3. Si $l = 1$, on ne peut rien conclure.

 **Remarque :** Comprendre la règle précédente dans le cas réel, terme positif.

Preuve:

1. Si $l < 1$, prenons $\varepsilon > 0$ tel que $l + \varepsilon < 1$.
 Or $|u_n|^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l$, donc $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n|^{\frac{1}{n}} \leq l + \varepsilon$.
 Donc $|u_n| \leq (l + \varepsilon)^n$ pour $n \geq N$.
 Or la série de terme général $(l + \varepsilon)^n$ est une série géométrique de raison $l + \varepsilon < 1$, donc elle converge.
 Donc $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.
2. Laissez à la douce appréciation du lecteur.
3. Trouvons une série $\sum_{n \geq 0} u_n$ où $|u_n|^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$ et où on ne peut rien conclure sur la nature de la série.
 Si on prend $u_n = \frac{1}{n^\alpha} = e^{-\alpha \ln(n)}$, on a bien $u_n^{\frac{1}{n}} = e^{-\alpha \frac{\ln(n)}{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1 \forall \alpha$.
 Or on a convergence pour $\alpha > 1$ et divergence pour $\alpha \leq 1$, on ne peut rien conclure.

 **Application :** Etudier la nature de la série de terme général $u_n = \cosh\left(\frac{1}{n}\right)^{-n^3}$.



Règle de d'Alembert :


Soit $\sum u_n$ une série à terme général dans \mathbb{C} .

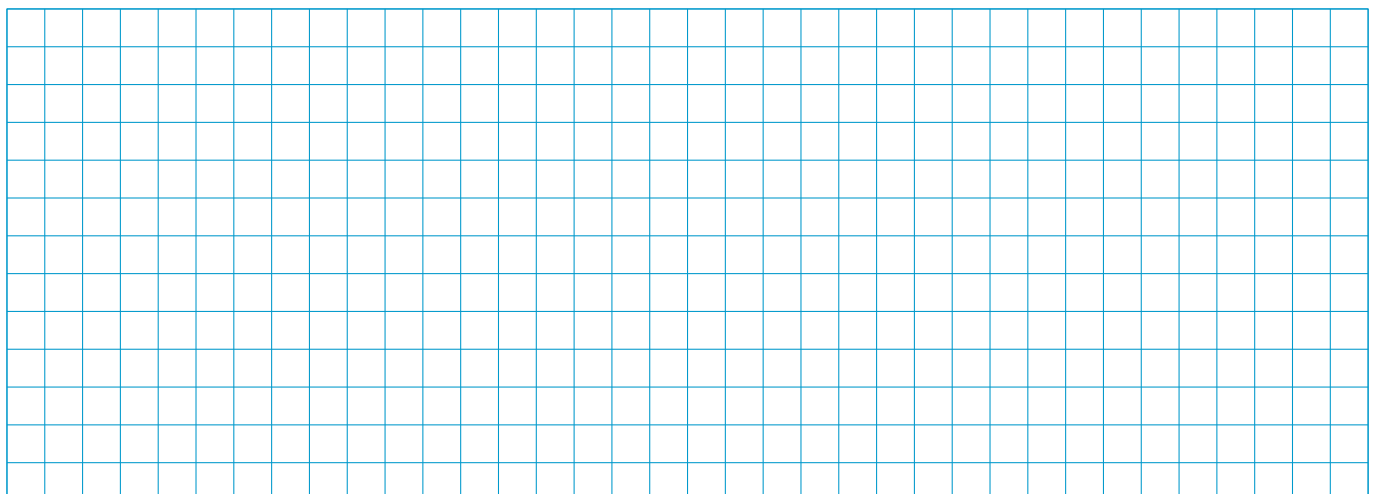
On suppose que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = l$ (existe et égale à $l \in [0, +\infty]$, $+\infty$ autorisé).

1. Si $l < 1$, alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge absolument (ACV).
2. Si $l > 1$, alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge.
3. Si $l = 1$, on ne peut rien conclure.

Preuve:

1. Si $l < 1$, prenons $\varepsilon > 0$ tel que $l + \varepsilon < 1$.
 Or $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l$, donc $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \leq l + \varepsilon$.
 Posons $q = l + \varepsilon < 1$.
 Ainsi, $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \leq \frac{q^{n+1}}{q^n}$ pour $n \geq N$.
 On a une comparaison du type $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$.
 On a vu que dans ce cas, $\sum b_n$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge.
 Or $\sum q^n$ converge (série géométrique de raison $q < 1$) donc $\sum u_n$ converge (ACV).
2. Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = l > 1, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \geq 1 \Rightarrow |u_n|$ est minorée par n assez grand.
 Donc $\sum u_n$ diverge.
3. Prendre $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$. On a bien $\frac{(n+1)^\alpha}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ et la nature dépend de α .

 **Application :** Etudier la nature de la série de terme général $u_n = \frac{n!}{n^n}$.



🗣️ **Note de rédaction** : On a évoqué en cours la formule de Stirling pour la culture, mais elle est hors programme : $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Proposition : Comparaison des règles de d'Alembert et de Cauchy

Soit $\sum u_n$ une série à terme général positif ou nul.

On suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l \in [0, +\infty]$.

Alors $u_n^{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l$.

Preuve:

On suppose $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l, l > 0, l \neq +\infty$.

On a $\forall l_1, 0 < l_1 < l, \sum_{n \geq 0} \frac{l_1^n}{u_n}$ converge par la règle de d'Alembert.

En effet, $\frac{l_1^{n+1}}{u_{n+1}} \times \frac{u_n}{l_1^n} = l_1 \times \frac{u_n}{u_{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{l_1}{l} < 1$.

Par convergence de la série on a que $\frac{l_1^n}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

À partir d'un certain rang, $\frac{l_1^n}{u_n} \leq 1 \Rightarrow l_1^n \leq u_n \Rightarrow l_1 \leq u_n^{\frac{1}{n}}$.

On a $\forall l_2, 0 < l < l_2, \sum_{n \geq 0} \frac{u_n}{l_2^n}$ converge par la règle de d'Alembert.

À partir d'un certain rang (même argument que pour l_1), $u_n \leq l_2^n \Rightarrow u_n^{\frac{1}{n}} \leq l_2$.

Donc $l_1 \leq u_n^{\frac{1}{n}} \leq l_2, \forall l_1 < l < l_2$ pour un n assez grand.

On fait tendre n vers ∞ puis l_1 et l_2 vers l et on en déduit que $u_n^{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l$.

✗ **Attention** ✗ La réciproque est fausse.

💡 **Exemple** : Contre-exemple.

Soit $0 < a < b$. Posons :

$$u_n = \begin{cases} a^p b^p & \text{si } n = 2p \\ a^{p+1} b^p & \text{si } n = 2p + 1 \end{cases}$$

On a $u_n^{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} ab$ (peu importe la parité de n).

Mais $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ dépend de la parité de n .

📌 **Remarque** : Donc on préfère la règle de d'Alembert à celle de Cauchy. Mais si la règle d'Alembert ne donne rien, la règle de Cauchy ne donnera rien non plus.

VI Séries semi-convergentes