

# Chapitre 4 : Topologie des espaces métriques et des espaces vectoriels normés

## I Distances et normes

Soit  $X$  un ensemble quelconque (dans la suite supposé non nul).

**Définition :** Une distance  $d$  sur  $X$  est une application  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$  qui vérifie les axiomes suivants :

1.  $\forall (x, y) \in X^2, d(x, y) = d(y, x)$  (symétrie)
2.  $\forall x, y, z \in X, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  (inégalité triangulaire)
3.  $\forall (x, y) \in X^2, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$  (séparation)

**Vocabulaire :** On appelle **espace métrique** un couple  $(X, d)$  où  $X$  est un ensemble et  $d$  une distance sur  $X$ .

### Exemple :

- $\mathbb{R}$  muni de la distance  $d(x, y) = |x - y|$ , où  $|\cdot|$  est la valeur absolue.
- $\mathbb{C}$  muni de la distance  $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$ , où  $|\cdot|$  est le module.
- Une autre façon de voir l'exemple 2, on considère l'ensemble  $\mathbb{R}^2$  muni de la distance suivante : Si  $A = (x_A, y_A)$  et  $B = (x_B, y_B)$  sont deux points de  $\mathbb{R}^2$ , on définit la distance  $d(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$ . On appelle cette distance la **distance euclidienne** sur  $\mathbb{R}^2$ .
- Prenons  $X = \text{ cercle unité}$  muni de la distance  $d(A, B) = \arccos(\cos(\theta_2 - \theta_1))$  où  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sont les arguments des points  $A$  et  $B$  respectivement. (voir schéma OneNote)

**Remarque :** On peut voir l'exemple 1 comme un cas particulier de l'exemple 2, en identifiant  $\mathbb{R}$  à l'axe des réels dans le plan complexe.

**Remarque :** On peut généraliser l'exemple 3 à  $\mathbb{R}^n$  muni de la distance euclidienne définie par :

$$d(A, B) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_{A_i} - x_{B_i})^2}$$

où  $A = (x_{A_1}, x_{A_2}, \dots, x_{A_n})$  et  $B = (x_{B_1}, x_{B_2}, \dots, x_{B_n})$  sont deux points de  $\mathbb{R}^n$ .

Il se trouve que les exemples 1, 2 et 3 proviennent d'espaces vectoriels normés, qu'on verra (très) rapidement.

### Proposition : Inégalités triangulaires

Soit  $(X, d)$  un espace métrique.

On a :

1.  $\forall (x, y, z) \in X^3, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  (inégalité triangulaire)
2.  $\forall (x, y, z) \in X^3, |d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z)$  (inégalité triangulaire généralisée)

### Preuve :

1. C'est l'axiome 2 de la définition d'une distance.
2. On a  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  d'après l'inégalité triangulaire.  
Donc  $d(x, y) - d(x, z) \leq d(z, y) = d(y, z)$ .  
De plus,  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  d'après l'inégalité triangulaire.  
Donc  $d(x, z) - d(x, y) \leq d(y, z)$ .  
En combinant les deux, on obtient  $|d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z)$ .

Construction d'espaces métriques : Restriction (admis)

On part de  $(X, d)$  un espace métrique.

Soit  $Y \subset X$ . Alors  $(Y, d|_{Y \times Y})$  est un espace métrique.

**Vocabulaire :** On dit que  $d|_{Y \times Y}$  est la **distance sur  $Y$**  induite par la distance sur  $X$ .

**i Remarque :** Ainsi, tout sous-ensemble d'un espace métrique est muni d'une "structure d'espace métrique" induite : c'est la distance induite.

**Exemple :**  $(X, d_X) = (\mathbb{C}, |\cdot|)$  un espace métrique. Alors pour  $Y = \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ ,  $d_Y$  n'est autre que la distance usuelle sur  $\mathbb{R}$ .  
Idem pour  $\mathbb{Q}$ .

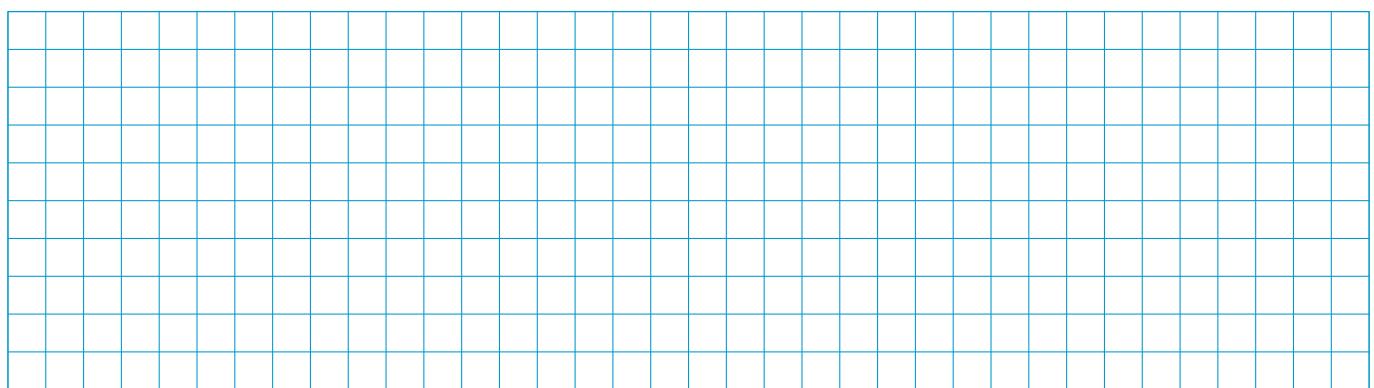
Construction d'espaces métriques : Bijections (admis)

Soient  $(X, d_X)$  et  $Y$  un ensemble quelconque et  $f : Y \rightarrow X$  bijective.

Alors  $(Y, d_Y)$  est un espace métrique, où  $d_Y(y_1, y_2) = d_X(f(y_1), f(y_2))$  pour tout  $y_1, y_2 \in Y$ .

Autrement dit,  $d_Y : (y_1, y_2) \mapsto d_X(f(y_1), f(y_2))$ .

 **Application :** Démontrer le théorème ci-dessus. (vérifier que  $d_Y$  satisfait bien les axiomes d'une distance.)



## A Espaces vectoriels normés

On a plus un ensemble  $X$  quelconque mais on considère  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ). (a priori pas de dimension finie)

## 1 Définitions

**Définition :** Une norme  $N$  sur  $E$  est une application  $N: E \rightarrow \mathbb{R}_+$  souvent notée  $\|\cdot\|$  qui vérifie les axiomes suivants :

- $\forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \|\lambda u\| = |\lambda| \cdot \|u\|$  (homogénéité)
  - $\forall (u, v) \in E^2, \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$  (inégalité triangulaire)
  - $\forall u \in E, \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0_E$  (séparation)

**Vocabulaire :** On dit que le couple  $(E, N) = (E, \|\cdot\|)$  est un **espace vectoriel normé**. Il est commun d'écrire  $e, v, n, \dots$

**Remarque :**  $\forall x \in E, N(-x) = N(x)$  d'après l'axiome 1.

### Théorème : Association norme-distance

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé.

Alors c'est en particulier un espace métrique pour la distance définie par  $d_N(u, v) = \|v - u\|$ .

**Preuve :** Il suffit de vérifier les axiomes d'une distance.

1. Symétrie :  $d_N(u, v) = \|v - u\| = \|-(u - v)\| = \|u - v\| = d_N(v, u)$ .
2. Inégalité triangulaire :  $d_N(u, w) = \|w - u\| = \|(w - v) + (v - u)\| \leq \|w - v\| + \|v - u\| = d_N(u, v) + d_N(v, w)$ .
3. Séparation :  $d_N(u, v) = 0 \Leftrightarrow \|v - u\| = 0 \Leftrightarrow v - u = 0_E \Leftrightarrow u = v$ .

**Remarque :** Hors programme : espaces euclidiens  $\subset$  espaces vectoriels normés  $\subset$  espaces métriques.

**Exemple :** En fait, les exemples 1, 2 et 3 dans "Espaces métriques" sont des evn :  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ ,  $(\mathbb{C}, |\cdot|)$  et  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$  où  $\|(x_1, \dots, x_n)\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \|\cdot\|_{\text{euclidienne}}$ .

**Application :** Définissons  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto \|X\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)$ .

Montrer que  $\|\cdot\|_\infty$  est une norme sur  $\mathbb{R}^n$ .

**Observation :**  $\|X\|_\infty = |x_{i_0}|$  où  $i_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$  réalise le maximum.

**Homogénéité :**  $\forall i \in \{1, \dots, n\}, |x_i| \leq |x_{i_0}|$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}, |\lambda| \cdot |x_i| \leq |\lambda| \cdot |x_{i_0}| \forall i \in \{1, \dots, n\}$

D'où  $\forall \lambda \in \mathbb{R}, |\lambda x_i| \leq |\lambda| \cdot |x_{i_0}| \forall i \in \{1, \dots, n\}$

Or  $\lambda X = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$ ,  $i_0$  réalise le maximum de  $(|\lambda x_1|, \dots, |\lambda x_n|)$

Donc  $\|\lambda X\|_\infty = |\lambda| \cdot |x_{i_0}| = |\lambda| \cdot \|X\|_\infty$ .

**Inégalité triangulaire :** Soient  $X = (x_1, \dots, x_n)$  et  $Y = (y_1, \dots, y_n)$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

$\|X + Y\|_\infty = \max(|x_1 + y_1|, \dots, |x_n + y_n|)$ .

On a  $\forall i \in \{1, \dots, n\}, |x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i| \leq \|X\|_\infty + \|Y\|_\infty$ .

En prenant le max sur  $i$ , on obtient  $\|X + Y\|_\infty \leq \|X\|_\infty + \|Y\|_\infty$ .

**Séparation :** Soit  $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ .

$\|X\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \max(|x_1|, \dots, |x_n|) = 0$ .

Or  $\forall k \in \{1, \dots, n\}, |x_k| \leq \max(|x_1|, \dots, |x_n|) = 0 \Rightarrow x_k = 0 \Rightarrow X = 0_{\mathbb{R}^n}$ .

### Application :

1. Montrer que  $\|\cdot\|_1 : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+} \sum_{i=1}^n |x_i|$  est une norme sur  $\mathbb{R}^n$ .

2. **Plus difficile.** Plus généralement, montrer que pour  $p \in \mathbb{R}_+$ ,  $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$  est une norme sur  $\mathbb{R}^n$ .

**Exemple :** Exemples de normes sur des espaces de dimension infinie :

- Considérons  $E = C([0, 1], \mathbb{R})$  l'espace vectoriel des fonctions continues de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ . On définit la norme  $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$  pour  $f \in E$ . En effet,

**Homogénéité :** Soit  $f \in E$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

On a  $\|\lambda f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |\lambda f(x)| = |\lambda| \cdot \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| = |\lambda| \cdot \|f\|_\infty$ .

**Inégalité triangulaire :** Soient  $f, g \in E$ .

On a  $\|f + g\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) + g(x)|$ .

Or  $\forall x \in [0, 1], |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ .

En prenant le supremum sur  $x$ , on obtient  $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ .

**Séparation :** Soit  $f \in E$ .

On a  $\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| = 0$ .

Or  $\forall x \in [0, 1], |f(x)| \leq \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| = 0 \Rightarrow f(x) = 0$  pour tout  $x$  dans  $[0, 1] \Rightarrow f = 0_E$ .

- Considérons  $E = \{f: I \rightarrow \mathbb{R}, f \in \mathcal{C}^0(I) \mid \int_I |f|(t)dt \text{ converge}\} = L_1$  où  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ . On définit la norme  $\|f\|_1 = \int_I |f(t)|dt$  pour  $f \in E$ .

**Attention**  $\|f\|_\infty$  existe car  $\sup |f(t)| < +\infty$  pour  $f$  continue sur le compact  $[0, 1]$ .

**Contre-Exemple :**  $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$  définie par  $f(x) = \frac{1}{x}$ . Alors  $\|f\|_\infty$  n'existe pas car  $\sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| = +\infty$ .

## 2 Propriétés

### Propriété : Vecteurs unitaires (admise)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel non nul, soit  $x \in E \setminus \{0_E\}$  et soit  $N$  une norme sur  $E$ .

Alors  $\frac{x}{N(x)}$  est un vecteur unitaire (ou vecteur normé), c'est-à-dire  $N\left(\frac{x}{N(x)}\right) = 1$ . (existe car  $N(x) \neq 0$  par séparation)

### Propriété : (admise)

Soit  $(E, N)$  un espace vectoriel normé.

Alors  $\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n, \forall (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ , on a :

$$N\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \cdot N(x_i)$$

### Propriété : Inégalité triangulaire renversée

Soit  $(E, N)$  un espace vectoriel normé.

1.  $\forall (x, y) \in E^2, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$
2.  $\forall (x, y) \in E^2, |N(x) - N(y)| \leq N(x - y)$

### Preuve :

1. C'est l'axiome 2 de la définition d'une norme.
2. On a  $N(x) = N((x - y) + y) \leq N(x - y) + N(y)$  d'après l'inégalité triangulaire.  
Donc  $N(x) - N(y) \leq N(x - y)$ .  
De plus,  $N(y) = N((y - x) + x) \leq N(y - x) + N(x)$  d'après l'inégalité triangulaire.  
Donc  $N(y) - N(x) \leq N(y - x) = N(x - y)$ .  
En combinant les deux, on obtient  $|N(x) - N(y)| \leq N(x - y)$ .

## II Topologie sur les espaces métriques

### A Ouverts et fermés

**Remarque :** Un evn étant un espace métrique avec la distance  $d(x, y) = N(y - x)$ , toutes les notions de topologie vues ici s'appliquent aux evn.

#### Définition : Soit $(X, d)$ un espace métrique.

Une boule ouverte de centre  $a \in X$  de rayon  $r > 0$  est  $B(a, r) = \{x \in X \mid d(x, a) = d(a, x) < r\}$ .

#### Définition : Soit $(X, d)$ un espace métrique.

Une boule fermée de centre  $a \in X$  de rayon  $r > 0$  est  $B_F(a, r) = \{x \in X \mid d(a, x) \leq r\}$ .

**Définition :** Soit  $(X, d)$  un espace métrique.

La sphère de centre  $a \in X$  de rayon  $r > 0$  est  $S(a, r) = \{x \in X \mid d(a, x) = r\}$ .

**Exemple :** Dans  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ ,  $B(1, 1) = ]0, 2[$

**Exemple :** Dans  $\mathbb{R}^2$  avec trois métriques :

$d_1 = \|y - x\|_1$ ,  $d_2 = \|y - x\|_2$  et  $d_\infty = \|y - x\|_\infty$ .

Traçons les boules de centre 0 de rayon 1 associées à chaque distance.

$B(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x, 0) < 1\}$ .

On a :  $\|x\|_{1,2,\infty} < 1$ .

- Pour  $d_1$  :  $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| < 1$ . C'est un losange.
- Pour  $d_2$  :  $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < 1$ . C'est un disque.
- Pour  $d_\infty$  :  $\|x\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|) < 1$ . C'est un carré.

**Remarque :** Les bordures correspondent aux sphères  $S(0, 1)$  associées à chaque distance. Les boules fermées  $B_F(0, 1)$  correspondent aux mêmes figures mais en incluant les bordures.

**Définition :** Une partie  $U$  de  $X$  est un ouvert de  $(X, d)$  si  $\forall x \in U, \exists r > 0$  tel que  $B(x, r) \subset U$ .

**Exemple :**  $]0, 1[ \subset \mathcal{C}(]0, 1[, \mathbb{R})$  est un ouvert :  $\forall x \in ]0, 1[, B(x, \min(x, 1-x)) \subset ]0, 1[$ .

**Définition :** Une topologie sur  $(X, d)$  est l'ensemble des ouverts de  $(X, d)$ . Autrement dit,  $\tau = \{U \subset X \mid U$  est un ouvert de  $(X, d)\}$ .

### Proposition :

- Toute boule ouverte de  $(X, d)$  est un ouvert de  $(X, d)$ .
- Si  $(U_i)_{i \in I}$  est une famille d'ouverts de  $(X, d)$ , alors  $\bigcup_{i \in I} U_i$  est un ouvert de  $(X, d)$ . (I un ensemble quelconque)
- Si  $(U_1, U_2, \dots, U_n)$  est une famille finie d'ouverts de  $(X, d)$ , alors  $\bigcap_{i=1}^n U_i$  est un ouvert de  $(X, d)$ .

### Preuve :

- Soit  $B(a, r)$  une boule ouverte de  $(X, d)$ . Soit  $x \in B(a, r)$ . On a  $d(a, x) < r$ . Posons  $s = r - d(a, x) > 0$ . Montrons que  $B(x, s) \subset B(a, r)$ . Soit  $y \in B(x, s)$ . On a  $d(x, y) < s$ . D'après l'inégalité triangulaire, on a  $d(a, y) \leq d(a, x) + d(x, y) < d(a, x) + s = d(a, x) + (r - d(a, x)) = r$ . Donc  $y \in B(a, r)$ . Ainsi,  $B(x, s) \subset B(a, r)$  et donc  $B(a, r)$  est un ouvert de  $(X, d)$ .
- Soit  $x \in (U_i)_{i \in I}$ . Alors  $\exists i_0 \in I$  tel que  $x \in U_{i_0}$ . Comme  $U_{i_0}$  est un ouvert de  $(X, d)$ , il existe  $r > 0$  tel que  $B(x, r) \subset U_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ . Donc  $\bigcup_{i \in I} U_i$  est un ouvert de  $(X, d)$ .
- Soit  $x \in \bigcap_{i=1}^n U_i$ , où on a écrit  $I = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ . Alors  $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $\exists r_i > 0$  tel que  $B(x, r_i) \subset U_i$ . Posons  $r = \min(r_1, r_2, \dots, r_n) > 0$ . Alors  $B(x, r) \subset \bigcap_{i=1}^n U_i$  pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . En effet, soit  $z \in B(x, r)$ ,  $d(z, x) < r \leq r_i$  donc  $z \in B(x, r_i) \subset U_i$  pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Donc  $z \in \bigcap_{i=1}^n U_i$ . Ainsi,  $\bigcap_{i=1}^n U_i$  est un ouvert de  $(X, d)$ .

**Contre-Exemple :** Si  $I$  est infini, la propriété 3 n'est pas vraie en général. Par exemple, dans  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ , considérons la famille d'ouverts  $U_n = ]-1/n, 1/n[$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ . Alors  $\bigcap_{n=1}^\infty U_n = \{0\}$  qui n'est pas un ouvert de  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ .

**Définition :** Soit  $(X, d)$  un espace métrique.

Une partie  $F$  de  $X$  est un fermé de  $(X, d)$  si son complémentaire  $X \setminus F$  est un ouvert de  $(X, d)$ .

### Proposition :

1. Toute boule fermée de  $(X, d)$  est un fermé de  $(X, d)$ .
2. Si  $(F_i)_{i \in I}$  est une famille de fermés de  $(X, d)$ , alors  $\bigcap_{i \in I} F_i$  est un fermé de  $(X, d)$ . ( $I$  un ensemble quelconque)
3. Si  $(F_1, F_2, \dots, F_n)$  est une famille finie de fermés de  $(X, d)$ , alors  $\bigcup_{i=1}^n F_i$  est un fermé de  $(X, d)$ .

### Preuve :

1. Soit  $B_F(x, r)$  une boule fermée de  $(X, d)$ . C'est un fermé  $\Leftrightarrow X \setminus B_F(x, r)$  est un ouvert de  $(X, d)$ . Soit  $y \in X \setminus B_F(x, r)$ . On a  $d(x, y) > r$ . Posons  $\varrho = d(y, x) - r > 0$ . Montrons que  $B(y, \varrho) \subset X \setminus B_F(x, r)$ . Soit  $z \in B(y, \varrho)$ . On a  $d(y, z) < \varrho$ .  $d(z, y) < d(y, x) - r \Rightarrow r < d(y, x) - d(z, y) \leq d(z, x)$  (inégalité triangulaire)  $\Rightarrow z \in X \setminus B_F(x, r)$ . Ainsi,  $B(y, \varrho) \subset X \setminus B_F(x, r)$  et donc  $X \setminus B_F(x, r)$  est un ouvert de  $(X, d)$ . Donc  $B_F(x, r)$  est un fermé de  $(X, d)$ .
2. Laissé en exercice au lecteur.
3. Laissé en exercice au lecteur.

**i Remarque :** Dans  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ , tout intervalle fermé est un fermé, et tout intervalle ouvert est un ouvert. ( $\mathbb{R}$  est ouvert). On a :  $]a, +\infty[ = \bigcup_{n=1}^{\infty}]a, a+n[$  est un ouvert.

**i Remarque :**  $X$  et  $\emptyset$  sont des ouverts et des fermés de  $(X, d)$  (prendre  $r$  arbitrairement grand pour  $X$  et  $r$  quelconque pour  $\emptyset$ ).

**Définition :** Soit  $\mathcal{V} \subset X$  une partie de l'espace métrique  $(X, d)$ .

On dit que  $\mathcal{V}$  est un voisinage de  $a \in X$  si  $\exists r > 0$  tel que  $B(a, r) \subset \mathcal{V}$ .

### Proposition :

On dit aussi que  $U$  est un ouvert de  $(X, d)$  si et seulement si  $U$  est un voisinage de chacun de ses points.

## B Intérieur et adhérence

Soit  $(X, d)$  un espace métrique.

**Définition :** Soit  $A \subset X$  une partie de l'espace métrique  $(X, d)$ .

On appelle intérieur de  $A$  l'ensemble des points  $a \in A$  tels que  $A$  est un voisinage de  $a$ . On le note :  $\overset{\circ}{A}$ .  
On a :

$$\overset{\circ}{A} = \bigcup \{U \subset A \mid U \text{ est un ouvert de } (X, d)\}$$

**Définition :** Soit  $A \subset X$  une partie de l'espace métrique  $(X, d)$ .

On appelle adhérence de  $A$  l'ensemble des points  $x \in X$  tels que  $\forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ . On le note :  $\overline{A}$ .  
On a :

$$\overline{A} = \bigcap_{F \supset A, F \text{ fermé de } (X, d)} F$$

**Proposition : Lien avec les ouverts**

Soit  $A \subset X$  une partie de l'espace métrique  $(X, d)$ .

1.  $\overset{\circ}{A}$  est un ouvert contenu dans  $A$ .
2. Si  $U \subset A$  est un ouvert de  $(X, d)$ , alors  $U \subset \overset{\circ}{A}$ .  
Autrement dit,  $\overset{\circ}{A}$  est le plus grand ouvert contenu dans  $A$ .

**Preuve :**

1. C'est une union quelconque d'ouverts induis dans  $A$ , donc  $\overset{\circ}{A}$  est un ouvert. De plus, par définition,  $\overset{\circ}{A} \subset A$ .
2. Par définition  $\overset{\circ}{A} = \bigcup\{U \subset A \mid U \text{ est un ouvert de } (X, d)\}$ . Donc si  $U \subset A$  est un ouvert de  $(X, d)$ , alors  $U$  est dans la famille indexée par l'union, donc  $U \subset \overset{\circ}{A}$ .

**Proposition : Lien avec les fermés**

Soit  $A \subset X$  une partie de l'espace métrique  $(X, d)$ .

1.  $\overline{A}$  est un fermé contenant  $A$ .
2. Si  $F \supset A$  est un fermé de  $(X, d)$ , alors  $\overline{A} \subset F$ .  
Autrement dit,  $\overline{A}$  est le plus petit fermé contenant  $A$ .

**Preuve :**

1. C'est une intersection quelconque de fermés contenant  $A$ , donc  $\overline{A}$  est un fermé. De plus, par définition,  $A \subset \overline{A}$ .
2. Par définition  $\overline{A} = \bigcap_{F \supset A, F \text{ fermé de } (X, d)} F$ . Donc si  $F \supset A$  est un fermé de  $(X, d)$ , alors  $F$  est dans la famille indexée par l'intersection, donc  $\overline{A} \subset F$ .

**Proposition :**

1.  $\overset{\circ}{A} = X \setminus \overline{(X \setminus A)}$
2.  $\overline{A} = X \setminus (X \setminus \overset{\circ}{A})$
3.  $x \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset$

**Preuve :**

1.  $(\Rightarrow) x \in \overset{\circ}{A}$ . Par définition d'un ouvert,  $\exists r > 0$  tel que  $B(x, r) \subset \overset{\circ}{A} \subset A$ .  
 $(\Leftarrow)$  On a  $B(x, r) \subset A$  qui est un ouvert.  
Donc  $B(x, r) \subset \overset{\circ}{A}$  car  $\overset{\circ}{A}$  est le plus grand ouvert contenu dans  $A$ . Donc  $x \in \overset{\circ}{A}$ , donc  $x \in \overset{\circ}{A}$ .
2.  $\overset{\circ}{A} \Leftrightarrow X \setminus \overset{\circ}{A} = \overline{(X \setminus A)}$ .  
Or  $\overset{\circ}{A} = \bigcup\{U \subset A \mid U \text{ est un ouvert de } (X, d)\}$ .  
Donc  $X \setminus \overset{\circ}{A} = X \setminus \bigcup\{U \subset A \mid U \text{ est un ouvert de } (X, d)\} = \bigcap_{F \supset X \setminus A, F \text{ fermé de } (X, d)} F = \overline{(X \setminus A)}$ .  
Faire de même avec  $\overline{A} = X \setminus (X \setminus \overset{\circ}{A})$ .
3.  $x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \in X \setminus (X \setminus \overset{\circ}{A})$  (d'après 2)  $\Leftrightarrow x \notin (X \setminus \overset{\circ}{A}) \Leftrightarrow$  pour tout  $r > 0$ ,  $B(x, r) \not\subset X \setminus \overset{\circ}{A} \Leftrightarrow$  pour tout  $r > 0$ ,  $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ .  
 $\Leftrightarrow B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ .

**Proposition :**

- $U$  est ouvert  $\Leftrightarrow \overset{\circ}{U} = U$ .
- $F$  est fermé  $\Leftrightarrow \overline{F} = F$ .

## C Suites dans un espace métrique

### 1 Définitions

**Définition :** On dit qu'une suite  $(x_n)$ ,  $x_n \in X$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , converge si  $\exists x \in X$  tel que  $d(x_n, x) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

Autrement dit,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, d(x_n, x) < \varepsilon$$

**Remarque :** Si  $(X, d) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$ , on retrouve la définition usuelle de la convergence des suites réelles.

**Définition :** On dit que  $x \in X$  est une valeur d'adhérence d'une suite  $(x_n)$  si il existe une sous-suite qui converge vers  $x$ . i.e.  $\exists (n_k)_{k \in \mathbb{N}}$  strictement croissante telle que  $d(x_{n_k}, x) \rightarrow 0$  quand  $k \rightarrow +\infty$ .

#### Proposition :

Soit  $(x_n)$  une suite de  $(X, d)$  qui converge vers  $x$ .

Alors  $x$  est la seule valeur d'adhérence de  $(x_n)$ . En particulier, la limite de  $(x_n)$  est unique.

#### Preuve :

Soit  $x$  la limite de  $(x_n)$ . Supposons qu'il existe une sous-suite  $(x_{n_k})$  qui converge vers une autre valeur  $y \neq x$ .

On a  $d(x, y) > 0$ . Posons  $\varepsilon = \frac{d(x, y)}{2} > 0$ .

$\exists k_1, (\varepsilon, y) \in \mathbb{N}, \forall k \geq k_1, d(x_{n_k}, y) < \varepsilon$ . (convergence de la sous-suite)

Et comme  $x_n \rightarrow x$ , alors  $x_{n_k} \rightarrow x$  aussi.

Donc  $\exists k_2, (\varepsilon, x) \in \mathbb{N}, \forall k \geq k_2, d(x_{n_k}, x) < \varepsilon$ .

Alors on a pour  $k \geq \max(k_1, k_2)$  :

$d(x, y) \leq d(x, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, y) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = d(x, y)$ , ce qui est absurde. Donc  $x$  est la seule valeur d'adhérence de  $(x_n)$ .

#### Fermés

Soit  $A$  une partie quelconque de l'espace métrique  $(X, d)$ .

#### Proposition : Caractérisation de l'adhérence par des suites

$$\overline{A} = \{x \in X \mid \exists (x_n) \text{ suite de } A, x_n \rightarrow x\}.$$

#### Preuve :

( $\subset$ ) Soit  $x \in X$  tq  $\exists (x_n) \in A$  avec  $d(x_n, x) \rightarrow 0$ .

On veut montrer que  $x \in \overline{A} \Rightarrow$  pour tout  $r > 0$ ,  $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ .

Soit  $r > 0$ . Comme  $d(x_n, x) \rightarrow 0$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n \geq N, d(x_n, x) < r$ .

On a  $x_n \in A$  donc  $x_n \in B(x, r) \cap A \neq \emptyset \forall n \geq N$ . Donc  $x \in \overline{A}$ .  $\square$

( $\supset$ ) Soit  $x \in \overline{A} \Rightarrow$  pour tout  $r > 0$ ,  $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ .

Prenons,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $r = \frac{1}{n+1} > 0$ .

Alors  $B(x, \frac{1}{n+1}) \cap A \neq \emptyset$ .

Pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ , choisissons  $x_n \in B(x, \frac{1}{n+1}) \cap A$ .

On a alors construit une suite  $(x_n)$  qui vérifie  $d(x_n, x) < \frac{1}{n+1}$ .

Ainsi,  $x$  est bien la limite d'une suite d'éléments de  $A$ .  $\square$

#### Proposition : Caractérisation des fermés par des suites

Une partie  $F$  de  $(X, d)$  est fermée si et seulement si pour toute suite  $(x_n)$  d'éléments de  $F$  qui converge vers  $x \in X$ , on a  $x \in F$ .

#### Preuve :

On a  $\overline{F} = \{x \in X \mid \exists (x_n) \text{ suite de } F, x_n \rightarrow x\}$ .

Or  $\overline{F} = F$ . On a donc le résultat.

## D Continuité

## 1 Définitions

**Définition :** Soit  $f: (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  une application entre deux espaces métriques.

- $f$  est continue en  $a \in X$  si  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 : x \in B(a, \delta_\varepsilon), \text{ alors } f(x) \in B(f(a), \varepsilon)$ .  
Autrement dit, pour tout  $\varepsilon \exists \delta_\varepsilon$  tel que  $d_X(x, a) < \delta_\varepsilon \Rightarrow d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$ .
- $f$  est continue sur  $X$  si  $f$  est continue en tout point de  $X$ .

**Remarque :** Si  $f: (\mathbb{R}, |\cdot|) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$ , on retrouve la définition usuelle de la continuité des fonctions réelles.

**Définition :** Soit  $k \geq 0$  un réel.

On dit que  $f: (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  est  $k$ -lipschitzienne si  $\forall x, y \in X, d_Y(f(x), f(y)) \leq k d_X(x, y)$ .

**Définition :** Si  $f: (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  est une application  $k$ -lipschitzienne, alors  $f$  est continue sur  $X$ .

### Preuve :

Montrons que  $f$  est continue.

Soit  $a \in X$  et soit  $\varepsilon > 0$ . Posons  $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2k} > 0$ .

$\forall x \in B(a, \delta_\varepsilon)$ , on a  $d_Y(f(a), f(x)) \leq k d_X(a, x) \leq k \delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ .

Ainsi,  $f$  est continue.

Remarquons de plus que  $\delta_\varepsilon$  ne dépend pas de  $a$ , donc  $f$  est uniformément continue sur  $X$ . (HP)

**Exemple :** Exemple d'une fonction 1-lipschitzienne :  $f: \overset{(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)}{\underset{x \mapsto \|x\|}{\rightarrow}} (\mathbb{R}, |\cdot|)$ .

En effet,  $|f(x) - f(y)| = ||x| - |y|| \leq \|x - y\| = d(x, y)$  (inégalité triangulaire renversée).

## 2 Caractérisation de la continuité

### Proposition : Caractérisation de la continuité par des suites

Soit  $f: (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  une application entre deux espaces métriques.

Alors  $f$  est continue en  $a \in X$  si et seulement si pour toute suite  $(x_n)$  de  $X$  qui converge vers  $a$ , la suite  $(f(x_n))$  converge vers  $f(a)$ .

### Preuve :

( $\Rightarrow$ ) Soit  $(x_n)$  une suite de  $X$  qui converge vers  $a$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ . Comme  $f$  est continue en  $a$ , il existe  $\delta_\varepsilon > 0$  tel que  $d_X(x, a) < \delta_\varepsilon \Rightarrow d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$ .

Comme  $x_n \rightarrow a$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n \geq N, d_X(x_n, a) < \delta_\varepsilon$ .

Donc  $\forall n \geq N, d_Y(f(x_n), f(a)) < \varepsilon$  pour tout  $n \geq N$ .

Ainsi  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, d_Y(f(x_n), f(a)) < \varepsilon$ . Donc  $f(x_n) \rightarrow f(a)$ .

( $\Leftarrow$ ) Par l'absurde, supposons que  $f$  n'est pas continue en  $a$ .

C'est-à-dire qu'il existe  $\varepsilon_0 > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in X$  tel que  $d_X(x, a) < \delta$  mais  $d_Y(f(x), f(a)) > \varepsilon_0$ .

$\forall n \in \mathbb{N}$ , posons  $\delta = \frac{1}{n+1} > 0$ .

On construit une suite  $(x_n)$  de  $X$  telle que  $d_X(x_n, a) < \frac{1}{n+1}$ ,  $d_Y(f(x_n), f(a)) > \varepsilon_0$ .

On a  $x_n \rightarrow a$  mais  $f(x_n) \not\rightarrow f(a)$  (car  $d_Y(f(x_n), f(a)) > \varepsilon_0$  pour tout  $n$ ).

Absurde. Donc  $f$  est continue en  $a$ .

### Proposition :

$f: (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  est continue sur  $X$  si et seulement si pour tout ouvert  $U$  de  $(Y, d_Y)$ ,  $f^{-1}(U)$  est un ouvert de  $(X, d_X)$ .

**Rappel :**  $f^{-1}(U) = \{x \in X \mid f(x) \in U\}$ .

### Preuve :

( $\Rightarrow$ ) Soit  $U$  un ouvert de  $(Y, d_Y)$ .

Montrons que  $f^{-1}(U)$  est un ouvert de  $(X, d_X)$ .

Soit  $a \in f^{-1}(U)$ . Alors  $f(a) \in U$ .

Comme  $U$  est un ouvert de  $(Y, d_Y)$ , il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $B_Y(f(a), \varepsilon) \subset U$ .

Or  $\exists \delta_\varepsilon > 0$  tel que  $x \in B_X(a, \delta_\varepsilon) \Rightarrow f(x) \in B_Y(f(a), \varepsilon)$ .

Vérifions que  $B_X(a, \delta_\varepsilon) \subset f^{-1}(U)$ .

Soit  $x \in B_X(a, \delta_\varepsilon)$ . Alors  $d_X(x, a) < \delta_\varepsilon \Rightarrow d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon \Rightarrow f(x) \in B_Y(f(a), \varepsilon) \subset U \Rightarrow x \in f^{-1}(U)$ .

Donc  $B_X(a, \delta_\varepsilon) \subset f^{-1}(U)$ . Ainsi,  $f^{-1}(U)$  est un ouvert de  $(X, d_X)$ .

$(\Leftarrow)$  Soit  $U$  un ouvert de  $(Y, d_Y)$ .

Alors  $f^{-1}(U)$  est un ouvert de  $(X, d_X)$ .

Soit  $a \in f^{-1}(U)$ . Alors  $f(a) \in U$ .

Soit  $\varepsilon > 0$  tq  $B(f(a), \varepsilon) \subset U$ .

Montrons que  $\exists \delta_\varepsilon > 0$  tel que  $d_X(x, a) < \delta_\varepsilon$  et  $d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$ .

Comme  $f^{-1}(U)$  est un ouvert de  $(X, d_X)$ , il existe  $\delta_\varepsilon > 0$  tel que  $B_X(a, \delta_\varepsilon) \subset f^{-1}(U)$  qui est ouvert.

Alors si  $x \in X$  tq  $d_X(x, a) < \delta_\varepsilon$ , on a  $d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$  car  $f(x) \in U$ .

Ainsi,  $f$  est continue en  $a$ .