Chapitre 4 : Topologie des espaces métriques et des espaces vectoriels normés

I Distances et normes

Soit X un ensemble quelconque (dans la suite supposé non nul).

Définition : Une distance d sur X est une application $d\colon X \times X \to \mathbb{R}_+$ qui vérifie les axiomes suivants :

1. $\forall (x, y) \in X^2, d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie)
2. $\forall x, y, z \in X, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire)
3. $\forall (x, y) \in X^2, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (séparation)

Vocabulaire : On appelle **espace métrique** un couple (X, d) où X est un ensemble et d une distance sur X.

Exemple :

- $\mathbb{R}$ muni de la distance $d(x, y) = |x - y|$, où $|\cdot|$ est la valeur absolue.
- $\mathbb{C}$ muni de la distance $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$, où $|\cdot|$ est le module.
- Une autre façon de voir l'exemple 2, on considère l'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni de la distance suivante :
  Si $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$ sont deux points de $\mathbb{R}^2$, on définit la distance $d(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$.
  On appelle cette distance la **distance euclidienne** sur $\mathbb{R}^2$.
- Prenons $X =$ cercle unité muni de la distance $d(A, B) = arccos(cos(\theta_2 - \theta_1))$ où θ_1 et θ_2 sont les arguments des points A et B respectivement. *(voir schéma OneNote)*

Remarque : On peut voir l'exemple 1 comme un cas particulier de l'exemple 2, en identifiant $\mathbb{R}$ à l'axe des réels dans le plan complexe.

Remarque : On peut généraliser l'exemple 3 à $\mathbb{R}^n$ muni de la distance euclidienne définie par :

$$d(A, B) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_{A_i} - x_{B_i})^2}$$

où $A = (x_{A_1}, x_{A_2}, \dots, x_{A_n})$ et $B = (x_{B_1}, x_{B_2}, \dots, x_{B_n})$ sont deux points de $\mathbb{R}^n$.

Il se trouve que les exemples 1, 2 et 3 proviennent d'espaces vectoriels normés, qu'on verra (très) rapidement.

Proposition : Inégalités triangulaires

Soit (X, d) un espace métrique.
On a :

1. $\forall (x, y, z) \in X^3, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire)
2. $\forall (x, y, z) \in X^3, |d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z)$ (inégalité triangulaire généralisée)

Preuve :

1. C'est l'axiome 2 de la définition d'une distance.
2. On a $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ d'après l'inégalité triangulaire.
   Donc $d(x, y) - d(x, z) \leq d(z, y)$ = $d(y, z)$.
   De plus, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ d'après l'inégalité triangulaire.
   Donc $d(x, z) - d(x, y) \leq d(y, z)$.
   En combinant les deux, on obtient $|d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z)$.

Construction d'espaces métriques : Restriction *(admis)*

On part de (X, d) un espace métrique.
Soit $Y \subset X$. Alors $(Y, d|_{Y\times Y})$ est un espace métrique.

Vocabulaire : On dit que $d|_{Y\times Y}$ est la **distance sur Y induite** par la distance sur X.

Remarque : Ainsi, tout sous-ensemble d'un espace métrique est muni d'une "structure d'espace métrique" induite : c'est la distance induite.

Exemple : $(X, d_X) = (\mathbb{C}, |\cdot|)$ un espace métrique. Alors pour $Y = \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, d_Y n'est autre que la distance usuelle sur $\mathbb{R}$.
Idem pour $\mathbb{Q}$.

Construction d'espaces métriques : Bijection *(admis)*

Soient (X, d_X) et Y un ensemble quelconque et $f : Y \to X$ bijective.
Alors (Y, d_Y) est un espace métrique, où $d_Y(y_1, y_2) = d_X(f(y_1), f(y_2))$ pour tout $y_1, y_2 \in Y$.

Autrement dit, $d_Y : {\scriptstyle \begin{matrix} Y\times Y \to \mathbb{R}_+ \\ (y_1,y_2)\mapsto d_X(f(y_1),f(y_2)) \end{matrix}}$.

Application : Démontrer le théorème ci-dessus. *(vérifier que d_Y satisfait bien les axiomes d'une distance.)*

A Espaces vectoriels normés

On a plus un ensemble X quelconque mais on considère E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). (a priori pas de dimension finie)

1 Définitions

Définition : Une norme N sur E est une application $N : E \to \mathbb{R}_+$ souvent notée $\|\cdot\|$ qui vérifie les axiomes suivants :

1. $\forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \|\lambda u\| = |\lambda| \cdot \|u\|$ (homogénéité)
2. $\forall (u, v) \in E^2, \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (inégalité triangulaire)
3. $\forall u \in E, \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0_E$ (séparation)

Vocabulaire : On dit que le couple $(E, N) = (E, \|\cdot\|)$ est un **espace vectoriel normé**. Il est commun d'écrire $e.v.n.$.

Remarque : $\forall x \in E, N(-x) = N(x)$ d'après l'axiome 1.

Théorème : Association norme-distance

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.
Alors c'est en particulier un espace métrique pour la distance définie par $d_N(u,v) = \|v-u\|$.

Preuve : Il suffit de vérifier les axiomes d'une distance.

1. Symétrie : $d_N(u,v) = \|v-u\| = \|-(u-v)\| = \|u-v\| = d_N(v,u)$.
2. Inégalité triangulaire : $d_N(u,w) = \|w-u\| = \|(w-v)+(v-u)\| \leq \|w-v\| + \|v-u\| = d_N(u,v) + d_N(v,w)$.
3. Séparation : $d_N(u,v) = 0 \Leftrightarrow \|v-u\| = 0 \Leftrightarrow v-u = 0_E \Leftrightarrow u = v$.

Remarque : Hors programme : espaces euclidiens $\subset$ espaces vectoriels normés $\subset$ espaces métriques.

Exemple : En fait, les exemples 1, 2 et 3 dans "Espaces métriques" sont des evn : $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ et $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ où $\|(x_1,\dots,x_n)\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \|\cdot\|_{\text{euclidienne}}$.

Application : Définissons $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto \|X\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)$.
Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.
Observation : $\|X\|_\infty = |x_{i_0}|$ où $i_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$ réalise le maximum.
Homogénéité : $\forall i \in \{1,\dots,n\}, |x_i| \leq |x_{i_0}|$
$\forall \lambda \in \mathbb{R}, |\lambda| \cdot |x_i| \leq |\lambda| \cdot |x_{i_0}| \forall i \in \{1,\dots,n\}$
D'où $\forall \lambda \in \mathbb{R}, |\lambda x_i| \leq |\lambda| \cdot |x_{i_0}| \forall i \in \{1,\dots,n\}$
Or $\lambda X = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$, i_0 réalise le maximum de $(|\lambda x_1|, \dots, |\lambda x_n|)$
Donc $\|\lambda X\|_\infty = |\lambda| \cdot |x_{i_0}| = |\lambda| \cdot \|X\|_\infty$.
Inégalité triangulaire : Soient $X = (x_1,\dots,x_n)$ et $Y = (y_1,\dots,y_n)$ dans $\mathbb{R}^n$.
$\|X+Y\|_\infty = \max(|x_1+y_1|, \dots, |x_n+y_n|)$.
On a $\forall i \in \{1,\dots,n\}, |x_i+y_i| \leq |x_i| + |y_i| \leq \|X\|_\infty + \|Y\|_\infty$.
En prenant le max sur i, on obtient $\|X+Y\|_\infty \leq \|X\|_\infty + \|Y\|_\infty$.
Séparation : Soit $X = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$.
$\|X\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \max(|x_1|,\dots,|x_n|) = 0$.
Or $\forall k \in \{1,\dots,n\}, |x_k| \leq \max(|x_1|,\dots,|x_n|) = 0 \Rightarrow x_k = 0 \Rightarrow X = 0_{\mathbb{R}^n}$.

Application :

1. Montrer que $\|\cdot\|_1 : \substack{\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+ \\ X \mapsto \sum_{i=1}^n |x_i|}$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.
2. **Plus difficile.** Plus généralement, montrer que pour $p \in \mathbb{R}_+$, $\|\cdot\|_p : \substack{\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+ \\ X \mapsto \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}}$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Exemple : Exemples de normes sur des espaces de dimension infinie :

- Considérons $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On définit la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$ pour $f \in E$. En effet,

  Homogénéité : Soit $f \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
  On a $\|\lambda f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |\lambda f(x)| = |\lambda| \cdot \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| = |\lambda| \cdot \|f\|_\infty$.
  Inégalité triangulaire : Soient $f, g \in E$.
  On a $\|f+g\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)+g(x)|$.
  Or $\forall x \in [0,1], |f(x)+g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.
  En prenant le supremum sur x, on obtient $\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.
  Séparation : Soit $f \in E$.
  On a $\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| = 0$.
  Or $\forall x \in [0,1], |f(x)| \leq \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| = 0 \Rightarrow f(x) = 0$ pour tout x dans $[0,1] \Rightarrow f = 0_E$.

- Considérons $E = \{f \colon I \to \mathbb{R}, f \in \mathcal{C}^0(I) \mid \int_I |f|(t)dt \text{ converge}\} = L_1$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. On définit la norme $\|f\|_1 = \int_I |f(t)|dt$ pour $f \in E$.

✖ **Attention** ✖ $\|f\|_\infty$ existe car $\sup |f(t)| < +\infty$ pour f continue sur le compact $[0, 1]$.

Contre-Exemple : $f \in \mathcal{C}^0(]0, 1], \mathbb{R})$ définie par $f(x) = \frac{1}{x}$. Alors $\|f\|_\infty$ n'existe pas car $\sup_{x \in]0,1]} |f(x)| = +\infty$.

2 Propriétés

Propriété : Vecteurs unitaires *(admise)*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul, soit $x \in E \setminus \{0_E\}$ et soit N une norme sur E.
Alors $\frac{x}{N(x)}$ est un vecteur unitaire (ou vecteur normé), c'est-à-dire $N\left(\frac{x}{N(x)}\right) = 1$. (existe car $N(x) \neq 0$ par séparation)

Propriété : *(admise)*

Soit (E, N) un espace vectoriel normé.
Alors $\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E^n$, $\forall (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, on a :

$$N(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \cdot N(x_i)$$

Propriété : Inégalité triangulaire renversée

Soit (E, N) un espace vectoriel normé.

1. $\forall (x, y) \in E^2, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$
2. $\forall (x, y) \in E^2, |N(x) - N(y)| \leq N(x - y)$

Preuve :

1. C'est l'axiome 2 de la définition d'une norme.
2. On a $N(x) = N((x - y) + y) \leq N(x - y) + N(y)$ d'après l'inégalité triangulaire.
   Donc $N(x) - N(y) \leq N(x - y)$.
   De plus, $N(y) = N((y - x) + x) \leq N(y - x) + N(x)$ d'après l'inégalité triangulaire.
   Donc $N(y) - N(x) \leq N(y - x) = N(x - y)$.
   En combinant les deux, on obtient $|N(x) - N(y)| \leq N(x - y)$.