САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
АЭРОКОСМИЧЕСКОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ

КАФЕДРА «ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ»

ЛЕКЦИЯ № 3-4

Экстремум ФНП.

по дисциплине Математика. Математический анализ.

Раздел. Функции нескольких переменных

Учебная цель: сформировать знания о производных и дифференциалах высших порядков ФНП, сформировать знания о необходимых и достаточных условиях экстремума, сформировать знания о скалярном поле, производной скалярного поля по заданному направлению, о градиенте и его свойствах.

Учебные вопросы:
1. Производные высших порядков.
2. Дифференциалы высших порядков.
3. Экстремум ФНП. Необходимые и достаточные условия экстремума ФНП.
4. Определение, поверхности и линии уровня.
5. Производная скалярного поля по заданному направлению.
6. Градиент и его свойства.

Санкт – Петербург
2022

Вопрос 1. Производные высших порядков.

Пусть функция $z = f(x, y)$ имеет частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в каждой точке (x, y) области *D*. Тогда эти производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y) \text{ и } \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y)$$

будут функциями от x и y в области *D*, которые в свою очередь в точках области *D* (во всех или в некоторых) могут иметь частные производные. Эти частные производные от $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ (если они существуют) называются **вторыми частными производными** или **частными производными второго порядка** функции $z = f(x, y)$.

Для функции $z = f(x, y)$ двух независимых переменных x и y получаем четыре частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \text{или } f''_{x^2}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \quad \text{или } f''_{y^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad \text{или } f''_{xy}, \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \quad \text{или } f''_{yx}.$$

Производные f''_{xy} и f''_{yx} называются **смешанными**: одна из них получается дифференцированием функции сначала по x, затем по y; другая, наоборот, дифференцированием сначала по y, затем по x.

Частные производные второго порядка – функции двух переменных x и y. От них снова можно брать производные по x и по y, которые называются **производными третьего порядка**, их будет 8:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \ \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \ \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}, \ \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}, \ \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}, \ \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y}, \ \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}, \ \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}.$$

Аналогично определяются частные производные четвертого порядка и выше. Вообще, частная производная *n*-го порядка есть первая производная от производной $(n-1)$-го порядка.

Пример

Найти частные производные 1-го и 2-го порядков от функции $z = x^3 y^2$.

Решение.

$$z'_x = 3x^2y^2, \quad z''_{x^2} = 6xy^2, \quad z''_{xy} = 6x^2y,$$
$$z'_y = 2x^3y, \quad z''_{yx} = 6x^2y, \quad z''_{y^2} = 2x^3.$$

Имеет место теорема.

> **Теорема (о равенстве смешанных производных).**
> Пусть для функции $z = f(x,y)$ в некоторой окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$ существуют производные $f'_x,\, f'_y,\, f''_{xy},\, f''_{yx}$ и пусть, кроме того, производные $f''_{xy},\, f''_{yx}$ в точке $M_0(x_0,y_0)$ непрерывны. Тогда в точке $M_0(x_0,y_0)$ эти производные равны: $f''_{xy}(x_0,y_y) = f''_{yx}(x_0,y_0)$.

Требование непрерывности производных $f''_{xy},\, f''_{yx}$ в точке $M_0(x_0,y_0)$ существенно.

Пример

Для функции $f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$ смешанные частные производные f''_{xy} и f''_{yx} в точке $(0;0)$ существуют, но не равны друг другу.

Действительно,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} \dfrac{y\left(x^4 - y^4 + 4x^2y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}.$$

Поэтому

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right|_{x=0,y=0} = \lim_{y\to 0} \frac{\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=0,y\neq 0} - \left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=0,y=0}}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{y\left(-y^4\right)}{y^4 y} = -1.$$

Частная производная

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} \dfrac{x\left(x^4 - y^4 - 4x^2y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases},$$

следовательно,

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{x=0,y=0} = \lim_{x\to 0} \frac{\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{x\neq 0,y=0} - \left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{x=0,y=0}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x \cdot x^4}{x^4 \cdot x} = 1.$$

Таким образом, в точке $(0;0)$ $f''_{xy} \neq f''_{yx}$, в этой точке смешанные производные f''_{xy}, f''_{yx} разрывны.

Верен и более общий факт: если для функции $U = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ какие-либо смешанные производные порядка $m \geq 2$ отличаются между собой только порядком дифференцирования и непрерывны в некоторой точке, то они в этой точке имеют одно и то же значение. Например,

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}.$$

Пример Найти вторые частные производные функции $z = \ln\left(x^2 + y^2\right)$. Убедиться, что $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2\left(x^2 + y^2\right) - 2x \cdot 2x}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = \frac{2\left(y^2 - x^2\right)}{\left(x^2 + y^2\right)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2\left(x^2 + y^2\right) - 2y \cdot 2y}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = \frac{2\left(x^2 - y^2\right)}{\left(x^2 + y^2\right)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{-2x \cdot 2y}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = \frac{-4xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{-2y \cdot 2x}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = \frac{-4xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2}.$$

Таким образом, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$. Интересно отметить, что для данной функции производные $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ и $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ отличаются только знаком, т.е.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Это уравнение называется уравнением Лапласа, которое имеет большое значение для приложений. Мы доказали, что $\ln\left(x^2 + y^2\right)$ есть одно из решений уравнения Лапласа.

Пример. Для функции $z = e^{xy^3}$ найти $\dfrac{\partial^4 z}{\partial x^4}$ и $\dfrac{\partial^4 z}{\partial x^3 \partial y}$.

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{xy^3} \cdot y^3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^{xy^3} \cdot y^6, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = e^{xy^3} \cdot y^9, \quad \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = e^{xy^3} \cdot y^{12},$$

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^3 \partial y} = \left(y^9 e^{xy^3}\right)'_y = 9y^8 e^{xy^3} + y^9 e^{xy^3} 3y^2 = 3y^8 e^{xy^3}\left(3 + y^3\right).$$

Вопрос 2. Дифференциалы высших порядков.

Пусть в области D задана функция $z = f\left(x, y\right)$ независимых переменных x и y. Если эта функция дифференцируема в области D, то ее полный дифференциал в точке $\left(x, y\right) \in D$, соответствующий приращениям dx и dy независимых переменных x и y, выражается формулой

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{dy} dy,$$

здесь $dx = \Delta x,\ dy = \Delta y$ – произвольные приращения независимых аргументов, т.е. произвольные числа, не зависящие от x и y. Поэтому мы можем изменять x и y, оставляя dx и dy постоянными. При фиксированных dx и dy полный дифференциал dz есть функция от x и y, которая в свою очередь может оказаться дифференцируемой.

Определение. Полный дифференциал от полного дифференциала 1-го порядка dz в точке $\left(x, y\right)$, соответствующий приращениям независимых переменных, равным прежним dx и dy, называется **дифференциалом второго порядка** функции $z = f\left(x, y\right)$ и обозначается символом $d^2 z$:

$$\boxed{d^2 z \overset{\text{опр.}}{=} d\left(dz\right)}.$$

Пусть функция $z = f\left(x, y\right) \in C^2\left(D\right)$, т.е. имеет в области D непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Тогда будет существовать $d^2 z$. Пользуясь правилами дифференцирования и помня, что dx, dy – постоянные, получим

$$d^2 z = d\left(dz\right) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx\right) + d\left(\frac{\partial z}{\partial y} dy\right) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) dx + d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) dy,$$

по формуле полного дифференциала, примененной к $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, имеем

$$d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) dy = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dy,$$

$$d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) dy = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy,$$

следовательно, учитывая, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ (в силу непрерывности этих смешанных производных), для $d^2 z$ получаем формулу:

$$\boxed{d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2} \quad \textbf{(1)}$$

здесь $dx^2 = (dx)^2$, $dy^2 = (dy)^2$.

С помощью формального символа $\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy$, полученную формулу (1) можно записать в символической форме:

$$\boxed{d^2 z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 \cdot z}. \quad \textbf{(2)}$$

Здесь символы $\frac{\partial}{\partial x}$ и $\frac{\partial}{\partial y}$ рассматриваются как «множители» и формула квадрата суммы с последующим условным умножением на z приводит к нужному результату.

Аналогично вводятся понятия дифференциала 3-го порядка, 4-го порядка и т.д.

Вообще: полный дифференциал n-го порядка $d^n z$ есть полный дифференциал от полного дифференциала $(n-1)$-го порядка:

$$\boxed{d^n z = d\left(d^{n-1} z\right)}.$$

Если функция $z = f(x, y) \in C^n(D)$, то у нее существует дифференциал n-го порядка, который выражается формулой:

$$\boxed{d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n \cdot z}.$$

Для функции $U = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ от m независимых переменных при выполнении соответствующих условий получаем:

$$d^n U = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + ... + \frac{\partial}{\partial x_m} \right)^n U.$$

Замечание. Если x и y не являются независимыми переменными, то как и в случае функции одной переменной, уже второй дифференциал не обладает свойством инвариантности формы.

Действительно, пусть $z = f(x, y)$, где $x = \varphi(\xi, \eta)$, $y = \psi(\xi, \eta)$, тогда первый дифференциал может быть записан в прежнем виде $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$, но теперь dx и dy сами есть функции и могут не быть постоянными, поэтому

$$d^2z = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx + d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy + \frac{\partial z}{\partial x}d\left(dx\right) + \frac{\partial z}{\partial y}d\left(dy\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 z + \frac{\partial z}{\partial x}d^2x + \frac{\partial z}{\partial y}d^2y,$$

так что инвариантность формы вообще не имеет места.

Пример. Найти d^2z для функции $z = 3x^2y - 2xy + y^2$.

Решение. $\frac{\partial z}{\partial x} = 6xy - 2y,\quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 - 2x + 2y,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6y,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6x - 2,$

тогда по формуле (1) имеем $d^2z = 6ydx^2 + 2\left(6x-2\right)dxdy + 2dy^2$.

Вопрос 3. Экстремум ФНП.

Необходимые и достаточные условия экстремума ФНП.

Пусть функция $z = f\left(x, y\right)$ определена в некоторой области D и пусть $M_0\left(x_0, y_0\right)$ – внутренняя точка этой области.

Определение. Если существует такое число $\delta > 0$, что для всех Δx и Δy, удовлетворяющих условиям $\left|\Delta x\right| < \delta$ и $\left|\Delta y\right| < \delta$, верно неравенство

$$\Delta f\left(x_0, y_0\right) = f\left(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y\right) - f\left(x_0, y_0\right) \le 0,$$

то точка $M_0\left(x_0, y_0\right)$ называется **точкой локального максимума** функции $f\left(x, y\right)$; если же для всех $\Delta x, \Delta y$, удовлетворяющих условиям $\left|\Delta x\right| < \delta$ и $\left|\Delta y\right| < \delta$,

$$\Delta f\left(x_0, y_0\right) = f\left(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y\right) - f\left(x_0, y_0\right) \ge 0,$$

то точка $M_0\left(x_0, y_0\right)$ называется **точкой локального минимума**.

Иными словами, точка $M_0\left(x_0, y_0\right)$ есть точка максимума или минимума функции $f\left(x, y\right)$, если существует δ-окрестность точки $M_0\left(x_0, y_0\right)$ такая, что во всех точках $M\left(x, y\right)$ этой окрестности приращение функции

$$\Delta f = f\left(x, y\right) - f\left(x_0, y_0\right)$$

сохраняет знак.

Мы будем рассматривать только точки строгого максимума и минимума функций, когда строгое неравенство $\Delta f < 0$ и строгое неравенство $\Delta f > 0$ выполняется для всех точек $M\left(x, y\right)$ из некоторой проколотой δ-окрестности точки $M_0\left(x_0, y_0\right)$.

Значение функции в точке максимума называется **максимумом,** а значение функции в точке минимума – **минимумом** этой функции. Точки максимума и точки минимума функции называются **точками экстремума** функции, а сами максимумы и минимумы функции – ее экстремумами.

Определение максимума и минимума функции двух переменных можно также сформулировать так:

Максимумом функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ называют такое ее значение $f(x_0, y_0)$, что $f(x_0, y_0) > f(x, y)$ для всех точек, принадлежащих δ-окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$. **Минимумом** функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ называют такое ее значение $f(x_0, y_0)$, что $f(x_0, y_0) < f(x, y)$ для всех точек, принадлежащих δ-окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$.

Пример

Для функции $z = 1 - x^2 - y^2$ точка $O(0;0)$ является точкой максимума.

Необходимые условия экстремума.

Теорема. Если функция $z = f(x, y)$ имеет экстремум в точке $M_0(x_0, y_0)$, то в этой точке каждая частная производная $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ либо обращается в нуль

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} = 0, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} = 0,$$

либо не существует.

Точки, в которых частные производные обращаются в нуль или не существуют, называются **критическими точками** функции $z = f(x, y)$.

Точки, в которых $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, называются **стационарными точками** функции.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением случая, когда частные производные существуют.

Достаточные условия экстремума функции двух переменных.

Теорема. Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ является стационарной точкой функции $f(x, y)$, $f'_x(x_0, y_0) = 0$ и $f'_y(x_0, y_0) = 0$, в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$, включая саму точку $M_0(x_0, y_0)$, функция $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Тогда:

1) в точке $M_0(x_0, y_0)$ функция $f(x, y)$ имеет максимум, если в этой точке определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{xy}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} = f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot f''_{yy}(x_0, y_0) - f''^{2}_{xy}(x_0, y_0) > 0$$

и $f''_{xx}(x_0,y_0)<0, \quad f''_{yy}(x_0,y_0)<0$;

2) в точке $M_0(x_0,y_0)$ функция $f(x,y)$ имеет минимум, если

$$\Delta>0, \; f''_{xx}(x_0,y_0)>0, \; f''_{yy}(x_0,y_0)>0;$$

3) в точке $M_0(x_0,y_0)$ функция $f(x,y)$ не имеет экстремума, если

$$\Delta<0.$$

4) если $\Delta=0$, то в точке $M_0(x_0,y_0)$ экстремум функции $f(x,y)$ может быть, а может и не быть, в этом случае требуются дополнительные исследования.

Если обозначить

$$A=f''_{xx}(x_0,y_0), \quad B=f''_{xy}(x_0,y_0), \; C=f''_{yy}(x_0,y_0), \; \Delta=AC-B^2,$$

тогда

1) если $\Delta>0, \; A<0, \; C<0$, то $z_0=f(x_0,y_0)=z_{\max}$;

2) если $\Delta>0, \; A>0, \; C>0$, то $z_0=f(x_0,y_0)=z_{\min}$;

3) если $\Delta<0$, то экстремума нет;

4) если $\Delta=0$, то требуются дополнительные исследования.

Пример. Исследовать на экстремум функцию $z=x^3+y^3-9xy$.

Решение. $z'_x=3x^2-9y, \quad z'_y=3y^2-9x$

$$\begin{cases}3x^2-9y=0\\3y^2-9x=0\end{cases}, \quad \begin{cases}y=\dfrac{1}{3}x^2\\ \dfrac{1}{3}x^4-9x=0\end{cases}, \quad x^4-27x=0, \; x\left(x^3-27\right)=0 \Rightarrow \left|\begin{array}{l}x_1=0, \; y_1=0\\x_2=3, \; y_2=3\end{array}\right.$$

Стационарные точки $O(0;0)$ и $P(3;3)$

$A=z''_{xx}=6x, \; B=z''_{xy}=-9, \; C=z''_{yy}=6y$,

1) точка $O(0;0)$: $A=0, \; B=-9, \; C=0, \; \Delta=AC-B^2=-81<0 \Rightarrow$ экстремума нет,

2) точка $P(3;3)$: $A=18, \; B=-9, \; C=18, \; \Delta=AC-B^2=324-81>0 \Rightarrow$ в точке P функция имеет минимум, $z_{\min}=z(3;3)=-27$.

Вопрос 4. Определение поверхности и линии уровня.

Определение. Если каждой точке *M* пространства, или его части, ставится в соответствие (по определенному правилу) определенное значение физической величины, то говорят, что задано **поле** этой **физической величины**. При этом, если физическая величина скалярная, то **поле** называется **скалярным**, если векторная – то **поле** называется **векторным**.

Задание скалярного поля осуществляется заданием скалярной функции точки *M*.

Пусть Ω – область на плоскости или в пространстве. Говорят, что в области Ω **задано скалярное поле**, если каждой точке $M \in \Omega$ ставится в соответствие по известному закону некоторое число $U(M)$, т.е.

$$U = f(M).$$

Таким образом, понятие скалярного поля и функции совпадают.

Если Ω – область трехмерного пространства и в пространстве введена декартова система координат, то скалярное поле U можно рассматривать как функцию трех переменных x, y, z (координаты точки М)

$$U = f(M) = f(x, y, z).$$

Функция U, независимо от ее физического смысла, называется **потенциалом поля**.

Величина U, характеризующая скалярное поле, может зависеть также и от времени (температура воздуха в одних и тех же точках пространства может быть различной в разные моменты времени). Мы ограничимся рассмотрением лишь тех полей, где U не зависит от времени. Такие поля называются **стационарными**.

Из сказанного выше следует, что понятие скалярного поля является физической трактовкой функции нескольких переменных.

Примеры скалярных полей

1. Поле температур, задается в виде $T = T(x, y, z)$.
2. Потенциал электростатического поля, определяется формулой $U = \frac{e}{r}$, где e – заряд, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ – расстояние точки до заряда, помещенного в начале координат. Функция $U = \frac{e}{r}$ определяет скалярное поле во всем пространстве, за исключением начала координат, где $r = 0$ и потенциал обращается в бесконечность.
3. Поле давления и другие.

   Простейшими геометрическими характеристиками скалярных полей являются линии уровня в пространстве двух измерений, поверхности уровня, или эквипотенциальные поверхности, в пространства 3-х измерений. В пространстве $n > 3$ измерений соответствующие геометрические характеристики называют гиперповерхностями уровня.

Определение. Линией уровня для плоского скалярного поля $U = U(x, y)$ называется геометрическое место точек (ГМТ), для которых скалярное поле сохраняет постоянное значение.

Уравнение линии уровня имеет вид $U(x, y) = C$.

Определение. Поверхностью уровня для пространственного скалярного поля $U=U\left(x,y,z\right)$ называется ГМТ, для которых скалярное поле сохраняет постоянное значение.

Уравнение поверхности уровня имеет вид $U\left(x,y,z\right)=C$.

Так как функцию, задающую скалярное поле часто называют потенциалом, то поверхности уровня называют **эквипотенциальными поверхностями**, т.е. поверхностями равного потенциала.

Пример 1

Найти поверхности уровня потенциального поля конечного заряда.

Решение

Скалярное поле задано функцией $U\left(x,y,z\right)=\dfrac{e}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $e=const$.

Уравнение поверхности уровня $\dfrac{e}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=C \Rightarrow x^2+y^2+z^2=\dfrac{e^2}{C^2}$ – семейство концентрических сфер с центром в начале координат.

Пример 2

Найти поверхности уровня скалярного поля $U=x^2+y^2-z^2$.

Решение

Уравнение поверхности уровня $x^2+y^2-z^2=C,\ C=const$;

при $C=0$, $x^2+y^2-z^2=0$ получаем круговой конус,

при $C>0$ – однополостные гиперболоиды,

при $C<0$ – двуполостные гиперболоиды.

Пример 3

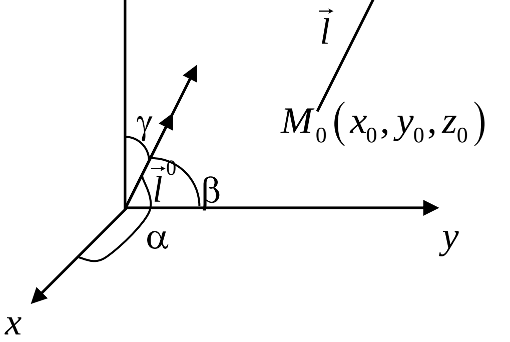
Найти линии уровня плоского скалярного поля $U=y^2-2x$.

Решение

Уравнение линий уровня $y^2-2x=C$ или $y^2=2\left(x+C_1\right)$ – семейство парабол, симметричных относительно оси *Ox*.

Вопрос 5. Производная скалярного поля по заданному направлению.

Пусть дано скалярное поле, определяемое скалярной функцией $U=U\left(M\right)$.



Выберем некоторое направление, определяемое единичным вектором $\vec{l}^0$:

$$\vec{l}^0=\left\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\right\}.$$

Пусть точка M_0 – некоторая фиксированная точка поля.

Возьмем в поле другую точку M так, чтобы вектор $\overrightarrow{M_0M}$ был параллелен вектору $\vec{l}^0$.

Обозначим через ΔU разность $\Delta U = U(M) - U(M_0)$, через $|\overrightarrow{\Delta l}|$ – длину вектора $\overrightarrow{M_0M}$. Отношение $\dfrac{\Delta U}{|\overrightarrow{\Delta l}|}$ определяет среднюю скорость изменения скалярного поля на единицу длины по данному направлению.

Устремим точку M к точке M_0 так, чтобы вектор $\overrightarrow{M_0M}$ оставался все время коллинеарным вектору $\vec{l}^{\,0}$, при этом $|\overrightarrow{\Delta l}| \to 0$.

Определение. Если существует предел при $|\overrightarrow{\Delta l}| \to 0$ отношения $\dfrac{\Delta U}{|\overrightarrow{\Delta l}|}$, то его называют **производной** функции $U = U(M)$ в данной точке M_0 **по направлению** $\vec{l}$ и обозначают символом $\dfrac{\partial U}{\partial l}$.

Итак, по определению

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \lim_{|\overrightarrow{\Delta l}| \to 0} \frac{\Delta U}{|\overrightarrow{\Delta l}|} = \lim_{|\overrightarrow{\Delta l}| \to 0} \frac{U(M) - U(M_0)}{|\overrightarrow{\Delta l}|}, \quad \overrightarrow{M_0M} \,\square\, \vec{l}.$$

Это определение носит инвариантный характер, т.е не связано с выбором системы координат.

Пусть в пространстве введена декартова система координат и пусть функция $U(M) = f(x, y, z)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Проекции вектора $\overrightarrow{M_0M}$ на оси координат будут равны с одной стороны

$$l\cos\alpha,\ l\cos\beta,\ l\cos\gamma,$$

с другой –

$$x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0.$$

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} x - x_0 &= l\cos\alpha \\ y - y_0 &= l\cos\beta \\ z - z_0 &= l\cos\gamma \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} x &= x_0 + l\cos\alpha \\ y &= y_0 + l\cos\beta \\ z &= z_0 + l\cos\gamma \end{aligned},$$

на выбранном направлении $\vec{l}$ функция $U = f(x, y, z)$ превращается в функцию одной переменной l:

$$U = f\left(x_0 + l\cos\alpha, y_0 + l\cos\beta, z_0 + l\cos\gamma\right) -$$

– сложная функция одной переменной *l*.

Тогда,

$$\left.\frac{\partial U}{\partial l}\right|_{M_0} = \left.\frac{\partial f\left(x,y,z\right)}{\partial l}\right|_{\substack{x=x_0+l\cos\alpha\\ y=y_0+l\cos\beta\\ z=z_0+l\cos\gamma}} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0}\cdot\frac{dx}{dl} + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{M_0}\cdot\frac{dy}{dl} + \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{M_0}\cdot\frac{dz}{dl} =$$

$$= \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0}\cdot\cos\alpha + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{M_0}\cdot\cos\beta + \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{M_0}\cdot\cos\gamma .$$

Итак,

$$\boxed{\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{M_0} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0}\cdot\cos\alpha + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{M_0}\cdot\cos\beta + \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{M_0}\cdot\cos\gamma} -$$

– формула для производной по направлению $\vec{l}$,

где $\vec{l}^{\,0} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ – единичный вектор заданного направления $\vec{l}$, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы вектора.

Производная по направлению является скоростью изменения функции $U = U\left(M\right)$ в точке M_0 по направлению $\vec{l}$.

Абсолютная величина производной по направлению $\vec{l}$ определяет величину скорости, а знак производной – характер изменения функции (возрастание или убывание).

Пример

Найти производную поля $U\left(M\right) = x^2y - 3xyz + xy^2z^2$ в точке $M_0\left(1;2;-1\right)$ по направлению вектора $\vec{l}$, образующего с координатными осями острые углы α, β, γ, причем $\beta = \frac{\pi}{4}$, $\gamma = \frac{\pi}{3}$. Установить характер изменения поля в данном направлении.

Решение

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2xy - 3yz + y^2z^2\Big|_{M_0} = 4 + 6 + 4 = 14,$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x^2 - 3xz + 2xyz^2\Big|_{M_0} = 1 + 3 + 4 = 8,$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -3xy + 2xy^2z\Big|_{M_0} = -6 - 8 = -14,$$

$$\cos\beta = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos\gamma = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2},$$

так как $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ и угол α острый, то

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\beta - \cos^2\gamma} = \sqrt{1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2},$$

таким образом,

$$\left.\frac{\partial U}{\partial l}\right|_{M_0} = 14 \cdot \frac{1}{2} + 8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + (-14) \cdot \frac{1}{2} = 4\sqrt{2}.$$

Так как $\frac{\partial U}{\partial l} > 0$, то скалярное поле $U(M)$ возрастает в данном направлении.

Вопрос 6. Градиент и его свойства.

Пусть дано скалярное поле, определяемое скалярной дифференцируемой функцией $U = f(x, y, z)$.

Определение 1. **Градиентом** скалярного поля $U = f(x, y, z)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ называется вектор, обозначаемый символом $\mathrm{grad}U$ и равный

$$\boxed{\left.\mathrm{grad}U\right|_{M_0} = \left\{ \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{M_0}, \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{M_0}, \left.\frac{\partial U}{\partial z}\right|_{M_0} \right\}},$$

т.е. вектор, проекции которого на координатные оси Ox, Oy, Oz равны соответственно частным производным по x, y, z в точке M_0 от функции $U = f(x, y, z)$.

Пример

Пусть дано скалярное поле $U = x^2 + y^2 + z^2$ и $M_0(1;1;1)$. Найти $\left.\frac{\partial U}{\partial l}\right|_{M_0}$ и $\left.\mathrm{grad}U\right|_{M_0}$, если $\vec{l} = \{1;1;1\}$.

Решение

$$\cos\alpha = \frac{l_x}{|\vec{l}|}, \ \cos\beta = \frac{l_y}{|\vec{l}|}, \ \cos\gamma = \frac{l_z}{|\vec{l}|}, \quad |\vec{l}| = \sqrt{3}, \Rightarrow \ \cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \left.2x\right|_{M_0} = 2, \ \frac{\partial U}{\partial y} = \left.2y\right|_{M_0} = 2, \ \frac{\partial U}{\partial z} = \left.2z\right|_{M_0} = 2,$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial l}\right|_{M_0} = \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3};$$

$$\operatorname{grad}U\big|_{M_0} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}.$$

Установим связь между производной по направлению и градиентом.

Рассмотрим вектор $\vec{l}^{\,0} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ и вектор $\operatorname{grad}U\big|_{M_0} = \left\{ \left.\dfrac{\partial U}{\partial x}\right|_{M_0}, \left.\dfrac{\partial U}{\partial y}\right|_{M_0}, \left.\dfrac{\partial U}{\partial z}\right|_{M_0} \right\}$ и их скалярное произведение

$$\operatorname{grad}U\big|_{M_0} \cdot \vec{l}^{\,0} = \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{M_0} \cos\alpha + \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{M_0} \cos\beta + \left.\frac{\partial U}{\partial z}\right|_{M_0} \cos\gamma = \left.\frac{\partial U}{\partial l}\right|_{M_0}, \text{ т.е.}$$

$$\boxed{\left.\frac{\partial U}{\partial l}\right|_{M_0} = \operatorname{grad}U\big|_{M_0} \cdot \vec{l}^{\,0}}, \text{ т.е.}$$

производная по направлению равна скалярному произведению градиента функции на единичный вектор заданного направления.

Так как $\vec{l}^{\,0}$ – единичный вектор, то скалярное произведение $\operatorname{grad}U \cdot \vec{l}^{\,0}$ равно проекции градиента на направление вектора $\vec{l}^{\,0}$:

$$\operatorname{grad}U\big|_{M_0} \cdot \vec{l}^{\,0} = \left|\operatorname{grad}U\big|_{M_0}\right| \underbrace{\left|\vec{l}^{\,0}\right|}_{=1} \cos\varphi = \text{пр}_{\vec{l}^{\,0}} \operatorname{grad}U\big|_{M_0},$$

т.е.

$$\left.\frac{\partial U}{\partial l}\right|_{M_0} = \left|\operatorname{grad}U\big|_{M_0}\right| \cdot \cos\varphi,$$

Следовательно, $\left(\left.\dfrac{\partial U}{\partial l}\right|_{M_0} \right)_{\max}$ достигается при $\varphi = 0$, т.е. скалярное поле имеет максимальный рост в направлении вектора $\operatorname{grad}U$, т.е.

$$\left(\left.\frac{\partial U}{\partial l}\right|_{M_0} \right)_{\max} = \left|\operatorname{grad}U\big|_{M_0}\right| = \sqrt{\left(\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{M_0} \right)^2 + \left(\left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{M_0} \right)^2 + \left(\left.\frac{\partial U}{\partial z}\right|_{M_0} \right)^2}.$$

Свойства градиента

1. Градиент направлен по нормали к поверхности уровня.
2. Градиент направлен в сторону максимального возрастания поля.
3. Модуль градиента равен скорости максимального возрастания поля, т.е. наибольшей производной по направлению поля в данной точке.

Определение 2. **Градиентом** скалярной функции *U* в данной точке называется вектор, который по численному значению и по направлению характеризует наибольшую скорость возрастания величины *U*.

Правила градиента

1. $\mathrm{grad}\, c = 0,\ c = const$.
2. $\mathrm{grad}\, cU = c\, \mathrm{grad}\, U,\ c = const$.
3. $\mathrm{grad}\left(U \pm V\right) = \mathrm{grad}\, U + \mathrm{grad}\, V$.
4. $\mathrm{grad}\left(UV\right) = V\, \mathrm{grad}\, U + U\, \mathrm{grad}\, V$.
5. $\mathrm{grad}\left(\dfrac{U}{V}\right) = \dfrac{V\, \mathrm{grad}\, U - U\, \mathrm{grad}\, V}{V^2}$.
6. $\mathrm{grad}\, x = \vec{i},\quad \mathrm{grad}\, y = \vec{j},\quad \mathrm{grad}\, z = \vec{k}$.
7. $\mathrm{grad}\, f\left(U\right) = f'\left(U\right) \mathrm{grad}\, U$ (градиент сложной функции).