Задача 1

Вариант 051

Пусть вероятность попадания при одном выстреле 0.7, X – случайная величина, значение которой – число выстрелов до первого попадания, когда имеется 3 снарядов. Найти закон распределения этой случайной величины. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение X.

закон распределения случайной величины X будет иметь вид:

P(X=k) = (1-p)^(k-1)*p

где p=0.7 - вероятность попадания при одном выстреле.

Математическое ожидание X:

M(X) = 1/p = 1/0.7 ≈ 1.43

Дисперсия случайной величины X:

D(X) = (1-p)/p^2 = (1-0.7)/0.7^2 ≈ 0.612

Среднее квадратическое отклонение X:

σ(X) = sqrt(D(X)) ≈ 0.782

Задача 2

Математическое ожидание случайной величины X равно 8. Дисперсия случайной величины X равна 1. Найти математическое ожидание и дисперсию случайных величин: а) $X - 4$; б) $X + 6$; в) $3X - 4$; г) $4X + 3$.

а) Математическое ожидание случайной величины X - 4 равно:

M(X-4) = M(X) - 4 = 8 - 4 = **4**

Дисперсия случайной величины X - 4 равна:

$D(X-4) = \mathbf{D(X)}$

б) Математическое ожидание случайной величины X + 6 равно:

$M(X+6) = M(X) + 6 = 8 + 6 = \mathbf{14}$

Дисперсия случайной величины X + 6 равна:

$D(X+6) = \mathbf{D(X)}$

в) Математическое ожидание случайной величины 3X - 4 равно:

$M(3X-4) = 3M(X) - 4 = 3*8 - 4 = \mathbf{20}$

Дисперсия случайной величины 3X - 4 равна:

$D(3X-4) = \mathbf{9D(X)}$

г) Математическое ожидание случайной величины 4X + 3 равно:

$M(4X+3) = 4M(X) + 3 = 4*8 + 3 = \mathbf{35}$

Дисперсия случайной величины 4X + 3 равна:

$D(4X+3) = \mathbf{16D(X)}$

Задача 3

Случайная величина X распределена равномерно на отрезке [4, 9], т.е. $X \in R[4, 9]$. Найти вероятность попадания случайной величины X на отрезок $[4 + 4/10; 9 - 4/5]$.

воспользуемся формулой плотности вероятности равномерного распределения:

$f(x) = 1/(b-a), a <= x <= b$

где a = 4, b = 9 - границы отрезка, на котором равномерно распределена случайная величина X.

Тогда плотность вероятности для данной задачи будет:

f(x) = 1/(9-4) = 1/5

Вероятность попадания случайной величины X на отрезок [4 + 4/10; 9 - 4/5] можно найти как интеграл плотности вероятности на этом отрезке:

P(4 + 4/10 <= X <= 9 - 4/5) = ∫(4+4/10)^(9-4/5) f(x) dx

P(4 + 4/10 <= X <= 9 - 4/5) = ∫(22/5)^((41/5)) (1/5) dx

P(4 + 4/10 <= X <= 9 - 4/5) = (1/5) * [x]_(22/5)^((41/5))

P(4 + 4/10 <= X <= 9 - 4/5) = (1/5) * ((41/5)-(22/5))

P(4 + 4/10 <= X <= 9 - 4/5) = (1/5) * (19/5)

P(4 + 4/10 <= X <= 9 - 4/5) = 19 / (5*5)

P(4 + 4/10 <= X <= 9 - 4/5) = 19 /25

Ответ: вероятность попадания случайной величины X на отрезок [4 + 4/10; 9 - 4/5] равна **0.76**.

Задача 4

Точность работы двух приборов оценивалась отклонениями от эталонного сигнала. Из 10 наблюдений первого прибора отклонение от эталона (выборочная дисперсия) составило 3.2, из 10 наблюдений второго прибора 4,5. Можно ли считать на уровне значимости α = 0,1, что приборы имеют одинаковую точность?

Нулевая гипотеза H0: математические ожидания двух выборок равны.

Альтернативная гипотеза H1: математические ожидания двух выборок не равны.

Уровень значимости α = 0.1.

Для проверки гипотезы необходимо вычислить t-статистику:

t = (x1 - x2) / sqrt(s^2 * (1/n1 + 1/n2))

где x1 и x2 - выборочные средние первого и второго приборов соответственно, s^2 - несмещенная выборочная дисперсия, n1 и n2 - размерности выборок.

Для первого прибора:

x1 = , s1^2 = , n1 = 10

Для второго прибора:

x2 = 4.5, s2^2 = , n2 =

Так как размерности выборок различны, необходимо использовать поправку Уэлча:

t = (x1 - x2) / sqrt(s1^2/n1 + s2^2/n2)

t = (- 4.5) / sqrt(/10 + /)

t = -3.16

Критическое значение t-статистики для уровня значимости α = 0.1 и числа степеней свободы df = 6.7 можно найти в таблице критических значений распределения Стьюдента или с помощью функции STINV в Excel:

t_crit = -1.895

Так как t < t_crit, то на уровне значимости α = 0.1 нулевая гипотеза отвергается в пользу альтернативной гипотезы. **Можно считать, что приборы имеют разную точность.**

Задача 5

В таблице приведены данные о связи между ценой на нефть X (усл. ед.) и индексом нефтяных компаний Y (усл. ед.). Предполагая, что связь между величинами X и Y линейна, найти функцию регрессии, оценить ее значимость и построить доверительный интервал уровня α = 0,05 для Y при X = 12.5.

51	
x	y
11.3	1.0
11.6	1.6
12.3	1.6
12.5	1.7
12.9	1.7
13.2	2.2

Для нахождения функции регрессии необходимо найти коэффициенты уравнения прямой $Y = aX + b$. Для этого воспользуемся формулами для нахождения коэффициентов регрессии:

$a = (n\Sigma XY - \Sigma X\Sigma Y) / (n\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2)$ $b = (\Sigma Y - a\Sigma X) / n$

где n - количество наблюдений, Σ - сумма значений.

Подставим значения из таблицы:

$n = 6$ $\Sigma X = 73.8$ $\Sigma Y = 9.8$ $\Sigma XY = 123.7$ $\Sigma X^2 = 878.27$

$a = ((6 * 123.7) - (73.8 * 9.8)) / ((6 * 878.27) - (73.8 * 73.8)) \approx 0.198$ $b = (9.8 - (0.198 * 73.8)) / 6 \approx -0.47$

Таким образом, функция регрессии имеет вид $Y \approx 0.198X - 0.47$.

Для оценки значимости уравнения регрессии можно воспользоваться критерием Стьюдента для проверки гипотезы о равенстве коэффициента регрессии нулю:

$t = a / (S / \mathrm{sqrt}(n))$

где S - оценка среднеквадратического отклонения ошибки регрессии.

Подставим значения:

$S^2 = \Sigma(Y_i - Y_i')^2 / (n - k)$

где k - количество коэффициентов регрессии.

$k = 2$ $Y_i' = aX_i + b$

Подставим значения из таблицы:

$Y_i' = [0.198 * 11.3 - 0.47, 0.198 * 11.6 - 0.47, 0.198 * 12.3 - 0.47, 0.198 * 12.5 - 0.47, 0.198 * 12.9 - 0.47, 0.198 * 13.2 - 0.47] \approx [1.4, 1.5, 1.7, 1.7, 1.8, 1.9]$

$S^2 \approx ((1-1.4)^2 + (1.6-1.5)^2 + (1.6-1.7)^2 + (1.7-1.7)^2 + (1.7-1.8)^2 + (2-1.9)^2) / (6-2) \approx 0{,}013$

$t \approx (0{,}198 / \mathrm{sqrt}(0{,}013 / \mathrm{sqrt}(6))) \approx$ **5,25**

Критическое значение t при уровне значимости α=0,05 и числе степеней свободы df=n-k=4 равно 2,776. Так как t > tкрит., то гипотеза о равенстве коэффициента регрессии нулю отвергается на уровне значимости α=0,05.

Доверительный интервал уровня $\alpha=0{,}05$ для Y при X=12,5 можно найти по формуле:

Yi’ ± tкрит.*S*sqrt(1 + 1/n + ((Xi’ - Xср.)^2) / Σ(Xi-Xср.)^2)

где Xср.- среднее значение X.

Подставим значения:

Xi’ = Xср.=12 n = 6 S ≈ sqrt(S^2) ≈ sqrt(0,013) ≈ 0,114 tкрит. = 2,571

Yi’ ± tкрит.*S*sqrt(1 + 1/n + ((Xi’ - Xср.)^2) / Σ(Xi-Xср.)^2) ≈ 1.7 ± 2.571 * 0.114 * sqrt(1 + 1/6 + ((12 - 12.3)^2) / (878.27 - (73.8)^2)) ≈ [1.4; 2.0]

Таким образом**, доверительный интервал** уровня $\alpha=0{,}05$ для Y при X=12.5 составляет **[1.4; 2.0].**