

Постановка задач линейного программирования

Общие термины

Что такое Задача логического программирования (ЗЛП) – это определение упорядоченной совокупности переменных, при которых линейная целевая функция достигает экстремального значения и при этом удовлетворяются все ограничения

Линейное программирование (ЛП) — это направление математического программирования, изучающее методы решения экстремальных задач, которые характеризуются линейной зависимостью между переменными и линейным критерием.

Общая формулировка

В общей постановке задача линейного программирования (ЗЛП) формулируется следующим образом.

Имеются какие-то переменные $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и линейная функция этих переменных, которая носит название целевой функции. Ставится задача: найти экстремум (максимум или минимум) целевой функции при условии, что переменные x удовлетворяют системе линейных равенств и/или неравенств. Классическими примерами практических задач, сводящихся к задаче линейного программирования, являются задача о диете, а также задача о составлении плана производства.

В задаче о диете составляется наиболее экономный (т.е. наиболее дешевый) рацион питания животных, удовлетворяющий определенным медицинским требованиям. При этом в качестве переменных x_1, x_2, \dots, x_n выступают количества продуктов питания, используемых в рационе.

Задачу о составлении плана производства рассмотрим более подробно. Пусть некоторая производственная единица (предприятие, цех, отдел и т.д.) может производить n видов товаров G_1, G_2, \dots, G_n , используя при этом m видов сырьевых ресурсов R_1, R_2, \dots, R_m , запасы которых ограничены величинами b_1, b_2, \dots, b_m .

Технологией производства товара G_j назовем набор чисел a_{ij} , показывающий, какое количество i -го ресурса необходимо для производства единицы товара G_j . Это можно записать в виде технологической матрицы, которая полностью описывает технологические потребности производства и элементами которой являются числа a_{ij} .

	G_1	G_2	...	G_n
R_1	A_{11}	A_{12}	...	A_{1n}
R_2	A_{21}	A_{22}	...	A_{2n}
...
R_n	A_{m1}	A_{m2}	...	A_{mn}

Предположим также, что известны цены реализации единицы каждого товара c_1, c_2, \dots, c_n . Обозначим через x_1, x_2, \dots, x_n планируемое производство единиц товаров G_1, G_2, \dots, G_n . В силу имеющейся технологической матрицы для этого потребуется:

Таким образом получен исходный вид задачи ЛП, и поставлена математическая задача

Рассмотрим на конкретном примере

Пусть некоторая производственная единица (предприятие, цех, отдел и т.д.) может производить 4 вида товаров, используя при этом 3 вида сырьевых ресурсов, запасы которых ограничены величинами:

Проводники – 200 ед.

Текстолит 500 ед.

Микропроцессоры – 30 ед.

	Одноплатный компьютер	маршрутизатор	Смартфон	Микросхема
Проводники	10	20	8	15
Текстолит	30	10	10	30
Микропроцессоры	2	3	5	1

известны цены реализации единицы каждого товара

Одноплатный компьютер – 3100 руб.

Маршрутизатор – 4200 руб.

Смартфон – 7000 руб.

Микросхема -2000 руб

Цель – заработать как можно больше с продажи товара

$$F=3100 \cdot x_1 + 4200 \cdot x_2 + 7000 \cdot x_3 + 2000 \cdot x_4 \rightarrow \max$$

Где X_n – количество произведенного товара

Теперь система уравнений. Она составляется построчно:

$$\begin{cases} 10x_1 + 20x_2 + 8x_3 + 15x_4 \leq 200 \\ 30x_1 + 10x_2 + 10x_3 + 30x_4 \leq 500 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 1x_4 \leq 30 \end{cases}$$

Теперь ЗЛП поставлена:

$$F=(3000 \cdot x_1 + 5000 \cdot x_2 + 10000 \cdot x_3 + 1500 \cdot x_4) \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 10x_1 + 20x_2 + 8x_3 + 15x_4 \leq 200 \\ 20x_1 + 10x_2 + 10x_3 + 30x_4 \leq 500 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 1x_4 \leq 30 \end{cases}$$

Решить такую систему можно при помощи python

Докачаем библиотеку, в которой уже реализован функционал решения таких задач

`pip install pulp`

Теперь подключаем в нашем скрипте модуль

```
from pulp import *
```

Для нашего примера получим следующий скрипт

```
from pulp import *
import time

x1 = pulp.LpVariable("x1", lowBound=0, cat=LpInteger)
x2 = pulp.LpVariable("x2", lowBound=0, cat=LpInteger)
x3 = pulp.LpVariable("x3", lowBound=0, cat=LpInteger)
x4 = pulp.LpVariable("x4", lowBound=0, cat=LpInteger) #определяем переменные кол-
ва товара

problem = pulp.LpProblem('0', LpMaximize) #условие на максимум

problem += 3100*x1+4200*x2+7000*x3+2000*x4, "Функция цели" #переносим матрицу
problem += 10*x1+20*x2+8*x3+15*x4<=200, "1"
problem += 20*x1+10*x2+10*x3+30*x4<=500, "2"
problem += 2*x1+3*x2+5*x3+1*x4<=30, "3"
problem.solve() #запускаем расчет

print ("Результат:")
for variable in problem.variables():
    print (variable.name, "=", variable.varValue)
print ("Прибыль:")
print (value(problem.objective))
```

Запускаем скрипт через терминал командой python main.py

И получаем наше решение

```
Результат:
x1 = 6.0
x2 = 0.0
x3 = 2.0
x4 = 8.0
Прибыль:
48600.0
```

Вывод: при данных вводных параметрах выгоднее всего делать микросхемы, а на остаток материалов другого типа произвести несколько компьютеров и два телефона. Так получилось добиться прибыли около 48600 руб.

Задание на закрепление

попытаться создать такие условия, чтобы было выгодно производить

- А) только телефоны
- Б) все типы продуктов
- В) попробовать минимизировать прибыль