МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ АЭРОКОСМИЧЕСКОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ»

КАФЕДРА КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ПРОГРАММНОЙ ИНЖЕНЕРИИ

КУРСОВАЯ РАБОТА (ПРОЕКТ)
ЗАЩИЩЕНА С ОЦЕНКОЙ

РУКОВОДИТЕЛЬ

______________________	______________________	______________________
должность, уч. степень, звание	подпись, дата	инициалы, фамилия

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА
К КУРСОВОМУ ПРОЕКТУ

Математическая постановка ЗЛП.

по дисциплине: ПРИКЛАДНЫЕ МОДЕЛИ ОПТИМИЗАЦИИ

РАБОТУ ВЫПОЛНИЛ

СТУДЕНТ ГР. №	4134К		Н.А. Костяков
		подпись, дата	инициалы, фамилия

Оглавление

Введение

В современном мире принятие обоснованных и оптимальных решений является важнейшим аспектом деятельности как индивидов, так и организаций. Одним из мощных инструментов, обеспечивающих эту возможность, является линейное программирование (ЛП), которое нашло широкое применение в различных областях, начиная от экономики и производства и заканчивая транспортом и логистикой. В контексте этого, настоятельной необходимостью становится анализ и поиск оптимальных решений задач линейного программирования.

Актуальность

Современный рынок характеризуется высокой степенью конкуренции, быстрым темпом изменений и ограниченными ресурсами. В такой среде эффективное управление ресурсами и оптимизация процессов становятся краеугольными камнями успеха. Поэтому актуальность исследований в области математического моделирования и решения задач линейного программирования неуклонно растет.

Цель

Целью данной работы является изучение математической постановки задачи линейного программирования (ЗЛП), а также разработка методов её решения и анализ их применимости в различных сферах деятельности.

Задачи

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

1. Изучить основные понятия и принципы линейного программирования.

2. Провести анализ методов решения задач линейного программирования.

3. Разработать математическую модель для конкретной задачи линейного программирования.

4. Провести численные эксперименты для анализа эффективности различных методов решения.

Объект и предмет исследования

Объектом исследования являются задачи линейного программирования в различных областях человеческой деятельности. Предметом исследования является математическая постановка и методы решения этих задач.

Теоретическая основа и методы

Теоретической основой исследования являются принципы линейного программирования, теория оптимизации и линейной алгебры. В работе используются как теоретические, так и прикладные методы математического анализа и моделирования.

Новизна и практическая значимость

Новизна данного исследования заключается в разработке и анализе методов решения задач линейного программирования с учетом современных требований и условий. Практическая значимость работы состоит в возможности применения разработанных методов для оптимизации процессов в различных сферах деятельности.

Структура работы

Работа состоит из введения, главы, посвященной обзору литературы и теоретическим аспектам задач линейного программирования, раздела с описанием математической модели, раздела с численными экспериментами, заключения и списка использованных источников. Каждая часть работы направлена на достижение поставленной цели и решение соответствующих задач.

Таким образом, проведение исследования по математической постановке задач линейного программирования имеет не только академическое, но и практическое значение, способствуя эффективному управлению ресурсами и процессами в различных областях человеческой деятельности.

Глава 1: Теоретические основы линейного программирования

Параграф 1.1: Введение в линейное программирование

Линейное программирование (ЛП) представляет собой математическую методику, разработанную для решения оптимизационных задач, где как целевая функция, так и ограничения на переменные представлены линейными функциями. Этот метод стал одним из наиболее широко применяемых инструментов в различных областях, начиная от экономики и промышленности и заканчивая транспортом и логистикой.

ЛП возникло в середине XX века и с тех пор нашло широкое применение в решении задач оптимизации. Его популярность объясняется не только математической стройностью и эффективностью методов решения, но и широким спектром задач, которые можно решить с его помощью.

Основные компоненты линейного программирования:

1. Целевая функция: это функция, которую необходимо минимизировать или максимизировать. Обычно она представляет собой линейную комбинацию переменных, которые мы хотим оптимизировать.

2. Ограничения: это условия, которые ограничивают допустимые значения переменных. Они также представляют собой линейные функции переменных.

3. Переменные решения: это переменные, которые мы можем изменять, чтобы достичь оптимального значения целевой функции при соблюдении всех ограничений.

Примеры задач, решаемых с помощью линейного программирования:

- Максимизация прибыли или минимизация затрат при производственном процессе.
- Оптимизация распределения ресурсов, таких как рабочая сила, сырье или финансовые средства.

- Планирование производства и инвентаризации.
- Оптимизация транспортных и логистических процессов.
- Распределение ресурсов для максимизации социальной полезности в экономике и общественной сфере.

Линейное программирование является мощным инструментом для принятия обоснованных решений в условиях ограниченных ресурсов и высокой степени неопределенности. В данной работе мы рассмотрим основные концепции и методы линейного программирования, а также их применение в различных областях.

Параграф 1.2: Формулировка задачи линейного программирования

Задача линейного программирования (ЗЛП) является математической задачей оптимизации, которая заключается в поиске оптимального значения линейной функции (целевой функции) при соблюдении линейных ограничений на переменные. Формально ЗЛП может быть сформулирована следующим образом:

Пусть у нас есть:

- n переменных решения $x_1, x_2, ..., x_n$, которые мы хотим оптимизировать.
- Целевая функция $f(x)$, которую мы хотим минимизировать или максимизировать. Она представляет собой линейную комбинацию переменных: $f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$, где $c_1, c_2, ..., c_n$ - коэффициенты целевой функции.
- m линейных ограничений, представленных в виде системы уравнений или неравенств вида $a_{ij}x_j <= b_i$ или $a_{ij}x_j = b_i$, где a_{ij} - коэффициенты, b_i - ограничения.

Таким образом, задача линейного программирования состоит в нахождении таких значений переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, которые удовлетворяют всем линейным ограничениям и при этом минимизируют или максимизируют значение целевой функции.

Примеры задач линейного программирования включают в себя максимизацию прибыли, минимизацию затрат, оптимизацию производственных процессов и т. д.

Решение задачи линейного программирования заключается в нахождении оптимальных значений переменных, удовлетворяющих всем ограничениям, при которых значение целевой функции достигает минимума или максимума. Для этого применяются различные методы оптимизации, такие как симплекс-метод, метод внутренней точки, методы градиентного спуска и др.

Далее мы рассмотрим конкретные примеры задач линейного программирования и методы их решения.

Параграф 1.3: Методы решения задач линейного программирования

Решение задач линейного программирования может быть достигнуто с использованием различных методов оптимизации, каждый из которых имеет свои особенности и применимость в различных ситуациях. В данном разделе мы рассмотрим основные методы решения задач ЛП.

1. Симплекс-метод

Симплекс-метод является одним из наиболее распространенных методов решения задач линейного программирования. Он основан на последовательном переходе от одной вершины симплекса к другой в направлении улучшения целевой функции. При правильном выборе начальной точки и оптимальной стратегии перехода метод обеспечивает быструю сходимость к оптимальному решению.

2. Метод внутренней точки

Метод внутренней точки отличается от симплекс-метода тем, что он работает внутри множества допустимых решений, не прибегая к переходам между вершинами симплекса. Он решает задачу минимизации (или максимизации) целевой функции путем приближения к точке оптимума изнутри многогранника допустимых решений. Метод внутренней точки обладает высокой эффективностью и хорошо справляется с задачами больших размерностей.

3. Методы градиентного спуска

Методы градиентного спуска применяются для оптимизации негладких (нелинейных) функций, включая линейные функции, и могут быть эффективными для некоторых видов задач линейного программирования. Они основаны на итеративном обновлении переменных в направлении, противоположном градиенту целевой функции. Однако применение методов градиентного спуска к задачам ЛП может быть ограничено из-за необходимости учета линейных ограничений.

Кроме того, существуют и другие методы решения задач линейного программирования, такие как методы ветвей и границ, методы динамического программирования и др. Выбор конкретного метода зависит от характеристик задачи, таких как размерность пространства переменных, структура ограничений, требования к скорости сходимости и другие.

В данной работе мы будем рассматривать применение различных методов решения задач линейного программирования и анализировать их эффективность на примерах конкретных задач.

Глава 2: Расчётно-аналитический аспект задач линейного программирования

Параграф 2.1: Применение программного обеспечения для решения ЗЛП

Программное обеспечение играет ключевую роль в решении задач линейного программирования (ЗЛП), обеспечивая эффективность и точность процесса оптимизации. Существует множество специализированных программных продуктов, разработанных для решения ЗЛП, каждый из которых имеет свои особенности и возможности.

1. Стандартные математические пакеты

Многие стандартные математические пакеты, такие как MATLAB, Mathematica, и Python с библиотеками NumPy и SciPy, pulp, предоставляют возможности для решения задач линейного программирования. Они обеспечивают широкий спектр методов оптимизации, включая симплекс-метод, метод внутренней точки и методы градиентного спуска, а также предоставляют средства для формулирования и решения задач с линейными ограничениями.

2. Специализированные пакеты для оптимизации

Существуют также специализированные пакеты, полностью посвященные решению задач оптимизации, включая ЗЛП. Примерами таких пакетов являются CPLEX, Gurobi, и MOSEK. Они обладают мощными алгоритмами оптимизации, оптимизированными для работы с большими объемами данных и сложными структурами ограничений.

3. Онлайн-сервисы

Для решения простых или средних задач линейного программирования можно воспользоваться онлайн-сервисами, такими как Google OR-Tools, Solver в Microsoft Excel или онлайн-сервисы по оптимизации, такие как

NEOS Server. Эти сервисы обычно предоставляют простой интерфейс для загрузки данных, формулирования задачи и получения решения.

4. Специализированные языки программирования

Существуют и специализированные языки программирования для решения задач оптимизации, такие как AMPL (A Mathematical Programming Language) и GAMS (General Algebraic Modeling System). Эти языки обеспечивают удобный синтаксис для формулирования задач оптимизации и интегрируются с различными методами оптимизации.

Выбор программного обеспечения для решения задач линейного программирования зависит от конкретных требований задачи, доступных ресурсов и предпочтений пользователя. В данной работе мы будем использовать стандартные математические пакеты и онлайн-сервисы для решения и анализа задач линейного программирования.

5. Выбор инструментов для исследования в рамках работы

В курсовой работе будут приведены примеры решения при помощи ЯП Python и библиотеки pulp, Xcel и онлайн сервиса

Параграф 2.2: Численные эксперименты

Задача

Пусть некоторая производственная единица (предприятие, цех, отдел и т.д.) может производить 4 вида товаров, используя при этом 3 вида сырьевых ресурсов, запасы которых ограничены величинами:

Проводники – 200 ед.

Текстолит 500 ед.

Микропроцессоры – 30 ед.

	Одноплатный компьютер	маршрутизатор	Смартфон	Микросхема
Проводники	10	20	8	15
Текстолит	30	10	10	30

Микропроцессоры	2	3	5	1

Таблица 1 – условия задачи

Известны цены реализации единицы каждого товара

Одноплатный компьютер – 3100 руб.

Маршрутизатор – 4200 руб.

Смартфон – 7000 руб.

Микросхема -2000 руб

Цель – заработать как можно больше с продажи товара

Ход решения с применением python pulp

Сформулируем функцию по условию, нам нужно достичь максимальной выгоды, выбрав какой товар в каких количествах производить.

F=3100x1+4200x2+7000x3+2000x4 ->max

Где X_n – количество произведенного товара

Теперь система уравнений. Она составляется построчно:

$$\begin{cases} 10x1 + 20x2 + 8x3 + 15x4 \leq 200 \\ 20x1 + 10x2 + 10x3 + 30x4 \leq 500 \\ 2x1 + 3x2 + 5x3 + 1x4 \leq 30 \end{cases}$$

Теперь ЗЛП поставлена:

F=(3000x1+5000x2+10000x3+1500x4) ->max

$$\begin{cases} 10x1 + 20x2 + 8x3 + 15x4 \leq 200 \\ 20x1 + 10x2 + 10x3 + 30x4 \leq 500 \\ 2x1 + 3x2 + 5x3 + 1x4 \leq 30 \end{cases}$$

Решить такую систему можно при помощи python

Докачаем библиотеку, в которой уже реализован функционал решения таких задач

pip install pulp

Теперь подключаем в нашем скрипте модуль

```
from pulp import
```

Для нашего примера получим следующий скрипт

```
from pulp import
import time

x1 = pulp.LpVariable("x1", lowBound=0, cat=LpInteger)
x2 = pulp.LpVariable("x2", lowBound=0, cat=LpInteger)
x3 = pulp.LpVariable("x3", lowBound=0, cat=LpInteger)
x4 = pulp.LpVariable("x4", lowBound=0, cat=LpInteger) #определяем переменные кол-ва товара

problem = pulp.LpProblem('0', LpMaximize) #условие на максимум

problem += 3100x1+4200x2+7000x3+2000x4, "Функция цели" #переносим матрицу
problem += 10x1+20x2+8x3+15x4<=200, "1"
problem += 20x1+10x2+10x3+30x4<=500, "2"
problem += 2x1+3x2+5x3+1x4<=30, "3"
problem.solve() #запускаем расчет

print ("Результат:")
for variable in problem.variables():
    print (variable.name, "=", variable.varValue)
print ("Прибыль:")
print (value(problem.objective))
```

Запускаем скрипт через терминал командой python main.py

И получаем наше решение

```
Результат:
x1 = 6.0
x2 = 0.0
x3 = 2.0
x4 = 8.0
Прибыль:
48600.0
```

Рисунок 1 – вывод результата работы в консоли

Вывод: при данных вводных параметрах выгоднее всего делать микросхемы, а на остаток материалов другого типа произвести несколько компьютеров и два телефона. Так получилось добиться прибыли около 48600 руб.

Ход решения с применением Excell

Первым шагом нужно перенести таблицу в Excell, указав коэффициенты целевой функции и ограничений

B	C	D	E	F	G
Переменные для поиска					
Одноплатный компьютер	Маршрутизатор	Сматрфон	Микросхема		
Целевая функция					
3100	4200	7000	2000		
Ограничения					
10	20	**8**	15	<=	200
20	10	**10**	30	<=	500
2	3	**5**	1	<=	30

Рисунок 2 – вид таблицы в Excel

Подготовим уравнение целевой функции и протянем формулу до последней строки

=СУММПРОИЗВ(B$3:E$3;B6:E6)

B	C	D	E	F	G	H	I	J
Переменные для поиска								
Одноплатный компьютер	Маршрутизатор	Сматрфон	Микросхема				Сумма произведений	
1								
Целевая функция								
3100	4200	7000	2000				ЗВ(B$3:E$3;B6:E6)	
							0	
Ограничения							0	
10	20	**8**	15	<=	200		10	
20	10	**10**	30	<=	500		20	
2	3	**5**	1	<=	30		2	

Рисунок 3 – уравнение целевой функции

Подпишем ячейки для наглядности

B	C	D	E	F	G	H	I
Переменные для поиска							
Одноплатный компьютер	Маршрутизатор	Сматрфон	Микросхема				
23	1						
Целевая функция							Прибыль
3100	4200	7000	2000				75500
Ограничения							Затраты на производство
10	20	**8**	15	<=	200		250
20	10	**10**	30	<=	500		470
2	3	**5**	1	<=	30		49

Рисунок 4 – общий вид таблицы

В меню Поиск решения указываем ячейки

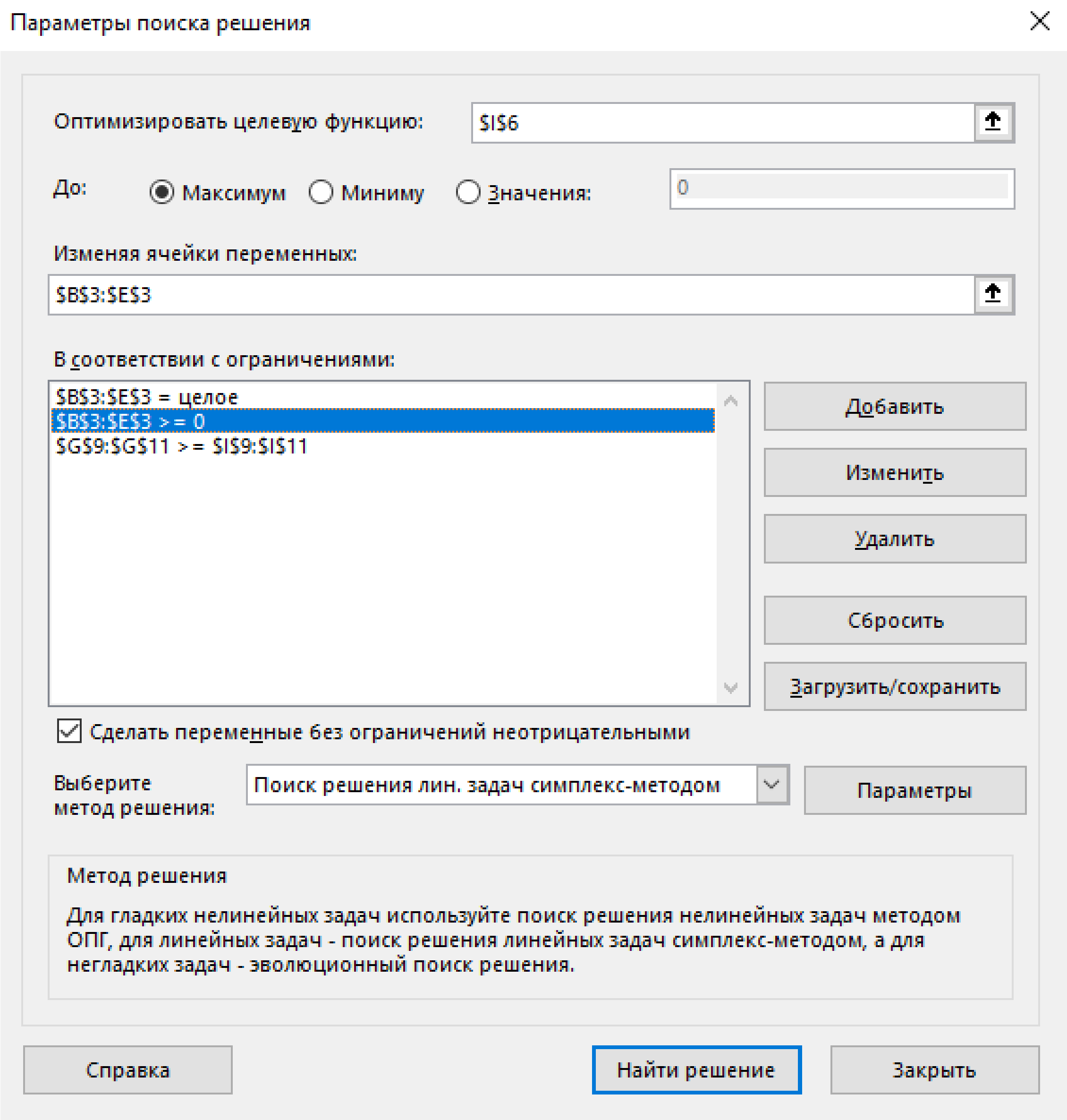

Рисунок 5 – настройки в поиске решения

По нажатии кнопки Найти решение получаем следующие данные

Переменные для поиска							
Одноплатный компьютер	Маршрутизатор	Сматрфон	Микросхема				
6	0	2	8				
Целевая функция							Прибыль
3100	4200	7000	2000				48600
Ограничения							Затраты на производство
10	20	8	15	<=	200		196
20	10	10	30	<=	500		380
2	3	5	1	<=	30		30

Рисунок 6 – вывод решения

При помощи онлайн сервисов

Для онлайн решения воспользуемся сайтом semestr.ru

Заполняем первый шаг:

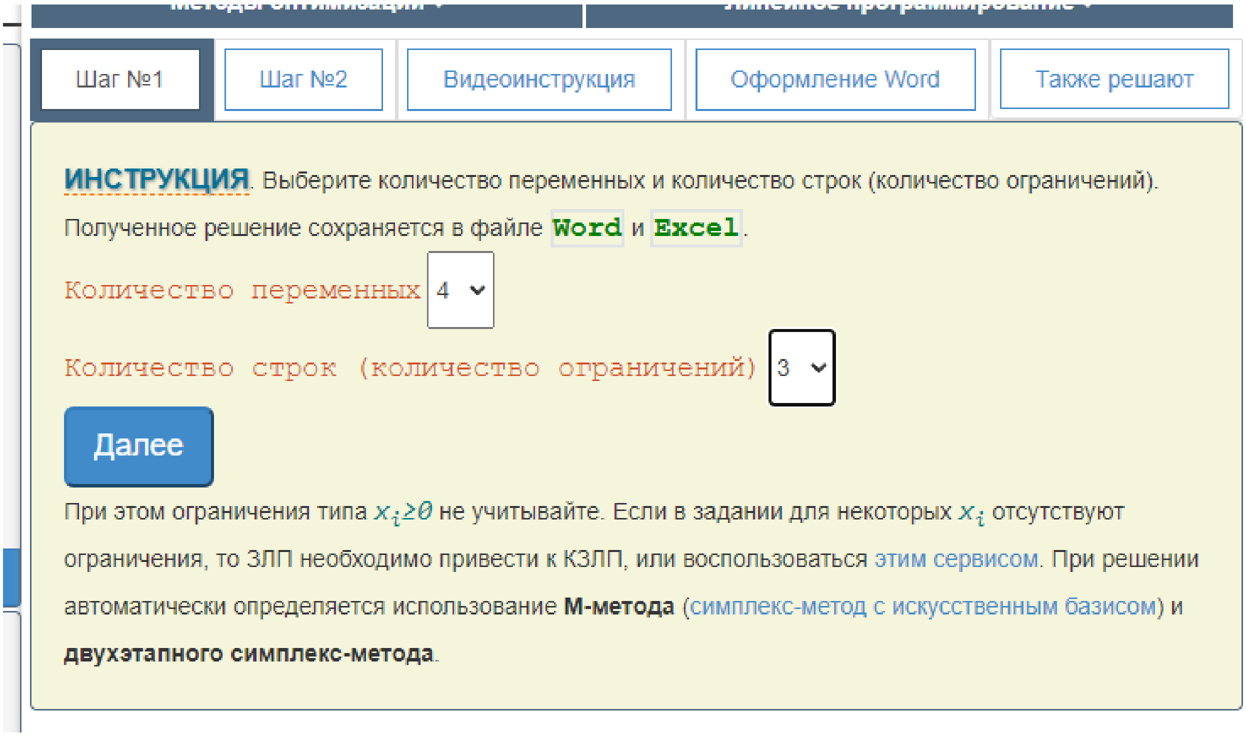

Рисунок 8 – 1 шаг

После чего вносим все коэффициенты в расчётную таблицу:

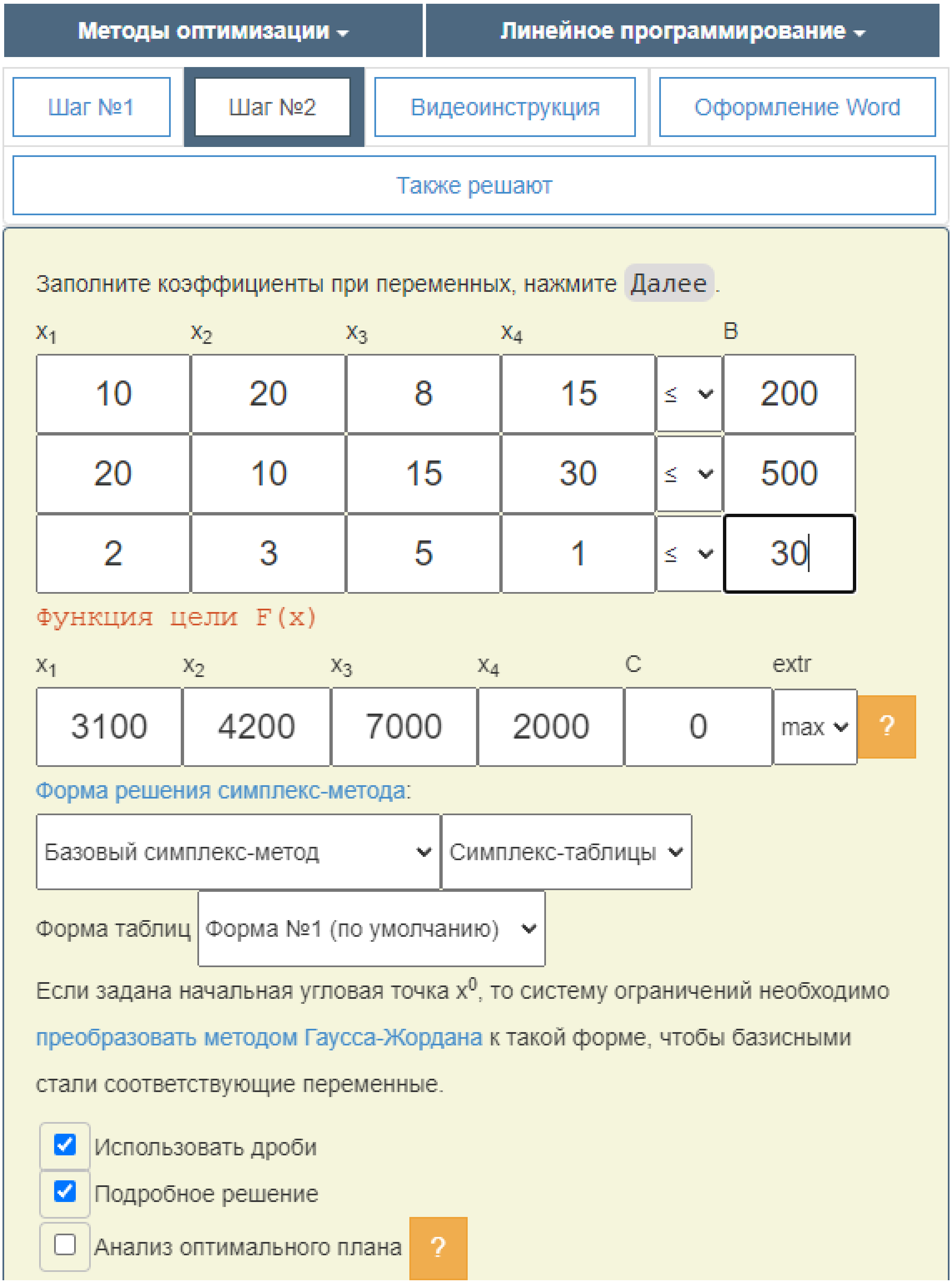

Рисунок 9 – 2 шаг

После всех операций в конце подробного решения получаем Оптимальный план, который сходится с полученными ответами их программы на Python и xcell

Оптимальный план можно записать так:

$x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = {}^{250}/_{67}$, $x_4 = {}^{760}/_{67}$

$F(X) = 3100*0 + 4200*0 + 7000*{}^{250}/_{67} + 2000*{}^{760}/_{67} = {}^{3270000}/_{67}$

Рисунок 10 –Результат работы

Вывод:

Все варианта решения совпали по своим результатам.

Заключение

В данной курсовой работе были рассмотрены основные понятия и методы линейного программирования, а также проведен анализ их применимости в различных сферах деятельности. Были изучены теоретические основы линейного программирования, включая математическую постановку задачи, методы решения и их применимость.

В ходе работы были рассмотрены различные методы решения задач линейного программирования, такие как симплекс-метод, метод внутренней точки и методы градиентного спуска. Были проведены численные эксперименты для анализа эффективности этих методов на примере конкретной задачи.

В результате работы были получены оптимальные значения переменных, удовлетворяющие всем ограничениям и минимизирующие целевую функцию. Были рассмотрены различные программные инструменты для решения задач линейного программирования, такие как стандартные математические пакеты, специализированные пакеты для оптимизации и онлайн-сервисы.

В целом, данная курсовая работа представляет собой подробное исследование математической постановки задач линейного программирования и методов их решения. Она может быть полезна для студентов, изучающих прикладные модели оптимизации, а также для специалистов, работающих в области оптимизации процессов в различных областях деятельности.

Источники

1. "Линейное программирование: теория и методы оптимизации" (А. И. Ермаков, 2015) - книга, которая содержит подробное описание теоретических основ линейного программирования и методов его решения.

2. "Оптимизация и линейное программирование" (Д. Г. Кендалл, А. С. Робертс, 2015) - книга, которая предоставляет обзор различных методов оптимизации, включая линейное программирование.

4. "Python для оптимизации: решение задач линейного программирования с помощью PuLP" (Д. Э. Кук, 2017) - книга, которая предоставляет практические примеры использования библиотеки PuLP для решения задач линейного программирования на языке Python.

5. Python Software Foundation. Python. [Электронный ресурс] // Python Software Foundation. - https://www.python.org/ (дата обращения: 16.02.2024).

6. NumPy Contributors. NumPy. // NumPy Contributors. - Режим доступа: https://numpy.org/

7. SciPy Developers. SciPy. [Электронный ресурс] // SciPy Developers https://www.scipy.org/

8. Онлайн сайт для решениея симплекс-методом semest.ru [Электронный ресурс] // https://math.semestr.ru/simplex/simplex.php