My sample book

The Jupyter Book Community

Jan 04, 2025

CONTENTS

CHAPTER

ONE

MODELO MATEMÁTICO PARA O PÊNDULO INTERROMPIDO

Vamos analisar um modelo matemático para descrever a trajetória de uma massa num *loop* ou para um pêndulo interrompido. Vamos admitir que, dependendo da velocidade inicial e energia cinética na parte mais baixo do círculo, a trajetória pode

1. ser parcialmente circular e periódica: a velocidade inicial não é suficiente para subir mais do que um raio do círculo;
2. ser inicialmente circular, mas a partir de uma certa altura ou ângulo crítico a massa se "desprende" da trajetória circular, a força normal ou da tensão é zerada e a massa segue em queda livre;
3. ser completamente circular: a velocidade incicial é suficiente para completar o círculo.

Durante a parte circular da trajetória circular há forças de vínculo (a força normal e a tensão no fio respectivamente) fornecendo parte da força centrípeta. Em ambos os casos há a força da gravidade, com componentes perpendicular (fornecendo uma parte da força centrípeta) e tangencial. Há, obviamente, também forças de atrito e graus de liberdade (rotação da massa, movimento do fio) que não vamos considerar inicialmente.

Nossa referência é o centro do círculo (0,0). Vamos chamar o raio do círculo h e soltamos a massa m de uma altura H. Em nosso referencial, se o ponto mais baixo da trajetória é $-h$ e se a gente solta a massa de $H \leq 0$, estamos na situação 1 acima, a de movimento periódico. Se $H \geq 0$, a velocidade v_0 em $(-h, 0)$ é dado por

$$\frac{1}{2}v_0^2 = gH \tag{1.1}$$

A equação (1.1) assume que soltamos a massa com velocidade zero.

1.1 Condição para *justamente* completar o círculo

É instrutivo começar com o caso em que a massa atinge *justamente* a altura h (o terceiro caso das três possibilidades descritas acima). Qual é a altura que precisamos solter a massa para isso acontecer? Parece o tipo de problema onde é suficiente usar considerações de conservação de energia mecânica. Uma análise ingênua, de um iniciante, poderia concluir que precisamos soltar a massa de $H = h$. Afinal, meste caso, a energia potencial inicial mgH é convertida totalmente para a energia potencial final mgh. A massa não "quer" chegar na mesma altura de onde partiu?

Esse raciocício ignora o fato que a velocidade da massa no topo da trajetória (vamos chamar de v_t) não pode ser zero. Para nosso modelo, a força de vínculo (a força normal ou a tensão no fio) pode ser zero no topo da trajetória mas para continuar em movimento circular deve haver uma a força centrípeta, dado somente pela gravidade, resultando numa velocidade mínima no topo

$$\frac{v_t^2}{h} = g$$

Combinando com a conservação de energia mecânica

$$\frac{1}{2}v_t^2 = \frac{1}{2}v_0^2 - gh$$

e temos que

$$\frac{1}{2}gh + gh = gH \Rightarrow H = \frac{3}{2}h$$

Ou seja, precisamos soltar a massa de uma altura um pouco *mais* do que h para *justamente* chegar na altura h no topo da trajetória, porque no nosso modelo no topo há uma aceleração centrípeta mínima (quando a força normal ou de tensão no fio são zero), dado pela aceleração da gravidade g.

1.2 Condição para *justamente* passar pelo centro do círculo

Se soltar a massa de uma altura $0 < H < \frac{3}{2}h$ em algum momento antes de chegar no topo a magnitude da força de vínculo se torna zero e a massa segue em queda livre. Começando com velocidade inicial v_0 em $(-h, 0)$, perguntamos para qual ângulo θ_c a força de vínculo (a tensão ou força normal) se torna zero.

XXX inserir uma figura

No momento crítico em que a força de vínculo é zero, a força centrípeta é dado (somente) pela componente perpendicular da força gravitação e temos

$$\frac{v_c^2}{h} = g\sin\theta_c. \tag{1.2}$$

Por outro lado, pela conservação de energia mecânica

$$\frac{1}{2}v_c^2 = \frac{1}{2}v_0^2 - gh\sin\theta_c \tag{1.3}$$

Combinando (1.2) e (1.3), e usando H_c (para a "altura de soltura crítica") em (1.1), temos

$$\sin\theta_c = \frac{2}{3}\frac{H_c}{h}. \tag{1.4}$$

Agora vamos escrever as equações horárias para a parábola de queda livre $x(t)$ e $y(t)$ com a posição inicial $(-h\cos\theta_c, h\sin\theta_c)$ e velocidade inicial $\vec{v}_c$:

$$\begin{aligned} x(t) &= -h\cos\theta_c + v_c\sin\theta_c t \\ y(t) &= h\sin\theta_c + v_c\cos\theta_c t - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

Para que essa parábola passa pelo $(0, 0)$ podemos mostrar que precisamos ter $\sin\theta_c = \sqrt{1/3}$ (ou $\theta_c = 35.3°$). Inserindo isso em (1.4) chegamos a

$$\boxed{\frac{H_c}{h} = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Ou seja, precisamos soltar a massa de uma altura de 0.866 do raio para que a parábola exatamente passa pelo orígem do círculo. Um pouco mais, e o fio se enrola em volta do pino no caso de um pêndulo interrompido. Note que essa altura de soltura é um pouco menos do que o Galileu afirmou (ele disse que seria necessário usar uma altura h ou exato um raio).

Para terminar, vamos mostrar que $\sin\theta_c = \sqrt{1/3}$. Certamente deve de ter uma maneira geométrica, pelas propriedades de círculos e parábolas de mostrar isso. Mas fiz por força bruta, colocando $x = 0, y = 0$ nas equações horárias do parábola. Usando $x(t_0) = 0$ temos

$$t_0 = \frac{h\cos\theta_c}{v_c}$$

Inserindo este tempo em $y(t_0) = 0$ temos

$$\frac{1}{2}g\frac{h^2}{\cos}\theta_c v_c^2 \sin\theta_c{}^2 = h\sin\theta_c + v_c\cos\theta_c\frac{h\cos\theta_c}{v_c\sin\theta_c}$$

Pulando alguns passos e usando $v_c^2 = hg\sin\theta_c$ chegamos a

$$\frac{\sin\theta_c{}^2}{\cos\theta_c{}^2} = \frac{1}{2}$$

o que mostra que $\sin\theta_c = \sqrt{1/3}$ (e $\cos\theta_c = \sqrt{2/3}$).