

滑らかな常微分方程式の計算量

太田浩行^{*} 河村彰星[†] マルチン・ツィーグラ[‡]
カルステン・レースニク[§]

2012/1/31

概要

1 導入

2 準備

2.1 表記

(二進) 自然数の集合を \mathbb{N} , 整数の集合を \mathbb{Z} , 実数の集合を \mathbb{R} , 有理数の集合を \mathbb{Q} と表記する. 一変数関数 f の i 階の導関数を $\mathcal{D}^{(i)}f$ と表記する. 同様に二変数関数 g の第一引数にたいして i 階, 第二引数に対して j 階の導関数を $\mathcal{D}^{(i,j)}g$ と表記する.

2.2 実数の名

精度を与えると, ある実数の近似値を返す関数をその実数の名と呼ぶ.

定義 2.1 (実数の名). 関数 $\phi : \{0^{\mathbb{N}}\} \rightarrow \mathbb{Z}$ が実数 $x \in [0, 1]$ の名であるとは, $\phi(0^n) = \lfloor x \cdot 2^n \rfloor$ または $\phi(0^n) = \lceil x \cdot 2^n \rceil$ を満たすこと.

2.3 計算可能実関数, 多項式時間実関数

実数は無限の長さを持つため, 文字列にエンコードすることができない. そこで実関数を計算する機械を, 入力となる実数の名を神託としてもつ神託機械として定義する.

^{*}東京大学

[†]第 1 著者に同じ

[‡]ダルムシュタット工科大学

[§]第 1 著者に同じ

定義 2.2. 神託機械 M が実関数 $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ を計算するとは、任意の実数 $x \in A$ 、任意の x の名 ϕ_x にたいして、 M_x^ϕ が $f(x)$ の名であること。

ある実関数が計算可能であるとは、その関数を計算する神託機械が存在することである。同様に、ある実関数が多項式時間計算可能であるとは、その関数を計算する多項式時間神託機械が存在することである。

多項式時間計算可能な関数は、多項式連続度という概念を導入することで、神託機械を用いない同値な定義を構成できる。

$\phi_f : \mathbf{Q} \times \{0^{\mathbf{N}}\} \rightarrow \mathbf{Q}$, $m_f : \{0^{\mathbf{N}}\} \rightarrow \{0^{\mathbf{N}}\}$ は

$$|\phi_f(d, 0^n) - f(d)| \leq 2^{-n} \quad |x - y| \leq 2^{-p_f(m)} \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq 2^{-m} \quad (2.1)$$

をみたす関数とする。計算可能な ϕ_f, m_f が存在することと f が計算可能であることは同値である。多項式時間計算可能な ϕ_f, m_f が存在することと f が多項式時間計算可能であることは同値である。

定義 2.3 (多項式連続度). f の多項式連続度 (polynomial modulus of continuity) を持つとは任意の $x_0, x_1 \in [0, 1]$, $m \in \mathbf{N}$ に対して $|x_0 - x_1| \leq 2^{-p(m)}$ ならば $|f(x_0) - f(x_1)| \leq 2^{-m}$ を満たすような多項式 p が存在すること。

補題 2.4. 実関数 $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ の多項式連続度を持ち多項式時間関数 $F : ([0, 1] \cap \mathbf{Q}) \times \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{Q}$ で任意の $d \in ([0, 1] \cap \mathbf{Q})$, $n \in \mathbf{N}$ にたいして

$$|F(d, 0^n) - f(d)| \leq 2^{-n} \quad (2.2)$$

を満たすものが存在することと、 f が多項式時間計算可能であることは同値である。

2.4 完全性

定義 2.5 (還元). 言語 L が実関数 f に還元可能であるとは、任意の文字列 u にたいして、以下を満たす実数 x_u 、多項式時間計算可能な関数 R, S, T が存在すること。

- $S(u, \cdot)$ は実数 x_u の名;
- 任意の $f(x_u)$ の名 ϕ にたいして

$$L(u) = R(u, \phi(T(u))).$$

計算量 C にたいして、関数 f が C 困難であるとは、任意の C に含まれる言語が f に還元可能であることである。さらに f が C に含まれるとき、つまり C に対応する神託機械で f を計算するものが存在するとき、 f は C 完全であると定義する。

3 微分可能関数と常微分方程式

以下のような常微分方程式を考える.

$$h(0) = 0, \quad \mathcal{D}^{(1)}h(t) = g(t, h(t)) \quad (t \in [0, 1]) \quad (3.1)$$

定理 3.1. 多項式時間実関数 $g(t, y)$ で, 微分可能かつ $\mathcal{D}^{(0,1)}g$ が連続であり, g の常微分方程式 (3.1) の解 h が PSPACE 完全であるものが存在する.

3.1 離散初期値問題

初期値問題の離散バージョンが PSPACE 完全であるところから始める. 河村の論文において以下のように定義されるフィードバックの弱い計算が PSPACE 完全であることが示されている.

補題 3.2 (補題 4.7. [Kaw10]). 任意の言語 $L \in \text{PSPACE}$, 任意の文字列 u にたいして, 以下を満たす定数 $d \geq 2$ 多項式 P, Q , 関数族 $(G_u)_u, (H_u)_u$ で, $(G_u)_u$ は多項式時間計算可能, $H_u(P(|u|) + 1, 2^{Q(|u|)}) = L(u)$ であるものが存在する.

- (i) $G_u : [P(|u|)] \times [2^{Q(|u|)}] \times [d] \rightarrow \{-1, 0, 1\}$;
- (ii) $H_u : [P(|u|) + 1] \times [2^{Q(|u|)} + 1] \rightarrow [d]$;
- (iii) 任意の $i \in [P(|u|)], T \in [2^{Q(|u|)}]$ にたいして
 - $H_u(i, 0) = H_u(0, T) = 0$
 - $H_u(i + 1, T + 1) = H_u(i + 1, T) + G_u(i, T, H_u(i, T))$.

もと論文では $d = 4$ であったが, 後の議論との統一のために一般化する.
(図, より直感的でわかりやすい説明を入れる)

3.2 離散初期値問題を模倣する関数族

任意の言語 $L \in \text{PSPACE}$, 文字列 u にたいして, 上記の計算を模倣し $L(u)$ を計算する微分可能な実関数 g_u を構成する.

補題 3.3. 任意の言語 $L \in \text{PSPACE}$, 多項式 λ にたいして, 多項式 ρ , 関数族 $(g_u)_u, (h_u)_u$ で, $(g_u)_u$ は多項式時間計算可能であり, 各二進文字列 u にたいして以下を満たすものが存在する.

- (i) $g_u : [0, 1] \times [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}, \quad h_u : [0, 1] \rightarrow [-1, 1]$;
- (ii) 任意の $y \in [-1, 1]$ にたいして $g_u(0, y) = g_u(1, y) = 0$;

(iii) h_u は g_u の常微分方程式の解;

(iv) $\mathcal{D}^{(0,1)}g$ は連続;

(v) $|\mathcal{D}^{(0,1)}g| \leq 2^{-\lambda(|u|)-|u|}$;

(vi) $h_u(1) = 2^{-\rho(|u|)}L(u)$.

この補題の証明の前に、葛によって示されている滑らかな多項式時間実関数 $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ を導入する.

補題 3.4 (補題 3.6. [Ko91]). 以下を満たす多項式時間無限回微分可能実関数 $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ が存在する.

(i) $f(0) = 0, \quad f(1) = 1$;

(ii) 任意の $n \geq 1$ で $f^{(n)}(0) = f^{(n)}(1) = 0$;

(iii) f は $[0, 1]$ で単調増加;

(iv) 任意の $n \geq 1$ で $f^{(n)}$ は多項式時間実関数.

補題 3.3 の証明. $d, P, Q, (G_u)_u, (H_u)_u$ を補題 3.2 と同様に定義する. 各ステップを $P(u)$ 個に分割することで, $G_u(i, T, Y) \neq 0$ を満たす i を各 T にたいしてただか 1 つにすることができる. そのような i のことを $j_u l(T)$ と表現する. 任意の i で $G_u(i, T, Y) = 0$ ならば $j_u(T)$ は任意の値を取るとする. さらに以下のように仮定できる.

$$H_u(i, 2^{Q(|u|)}) = \begin{cases} L(u) & (i = P(|u|)) \\ 0 & (i < P(|u|)) \end{cases} \quad (3.2)$$

$$G_u(i, 2 \cdot 2^{Q(|u|)} - 1 - T, Y) = \begin{cases} 0 & (i = P(|u|) - 1) \\ -G_u(i, T, Y) & (i < P(|u|) - 1) \end{cases} \quad (3.3)$$

$$H_u(i, 2 \cdot 2^{Q(|u|)} - T) = \begin{cases} H_u(P(|u|), 2^{Q(|u|)}) & (i = P(|u|)) \\ H_u(i, T) & (i < P(|u|)) \end{cases} \quad (3.4)$$

補題 3.4 の f にたいして, 定数 c を任意の $x \in [0, 1]$ にたいして $|\mathcal{D}^{(\cdot)} 1f(x)| \leq 2^c$ を満たす最小の自然数と定める. 定数 $d' = \lceil \log(4d+1) \rceil$, $B = 2^{\lambda(|u|)+Q(|u|)+|u|+c+d'}$ とおき, 各 $(t, y) \in [0, 1] \times [-1, 1]$ にたいして, 自然数 N , $\theta \in [0, 1]$, 整数 Y , $\eta \in [-1/4, 3/4]$ を $t = (T + \theta)2^{-Q(|u|)}$, $y = (Y + \eta)B^{-j_u(T)}$ を満たすように定める.

そのとき,

$$g_u^*(t, Y) = \frac{2^{Q(|u|)} \pi \sin(\theta\pi)}{2B^{j_u(T)+1}} G_u(j_u(T), T, Y \bmod 2^{d'}) \quad (3.5)$$

とおき g_u, h_u を以下のように定義する.

$$g_u(t, y) = \begin{cases} g_u^*(t, Y) & (\eta \leq \frac{1}{4}) \\ (1 - f(2\eta - 1/2))g_u^*(t, Y) + f(2\eta - 1/2)g_u^*(t, Y + 1) & (\eta > \frac{1}{4}) \end{cases} \quad (3.6)$$

$$h_u(t) = \sum_{i=0}^{P(|u|)} \frac{H_u(i, T)}{B^i} + \frac{1 - \cos(\theta\pi)}{2} \cdot \frac{G_u(j_u(T), T, H_u(j_u(T), T))}{B^{j_u(T)+1}} \quad (3.7)$$

上記のように定義した g_u, h_u が補題 3.3 で求める性質を満たすことを示す. (i), (ii) は自明. $(g_u)_u$ が多項式時間計算可能であることは補題によって示される.

h_u は g_u の常微分方程式の解であることを示す. まず h_u について解析する. (3.7) の一つ目の項において $i \leq j_u(T)$ の合計は $B^{j_u(T)}$ の倍数. $i > j_u(T)$ の合計は,

$$\begin{aligned} \sum_{i > j_u(T)} \frac{H_u(i, T)}{B^i} &\leq \sum_{i > j_u(T)} \frac{d-1}{B^i} = \sum_{i > j_u(T)} \frac{d-1}{B^{i-j_u(T)}} B^{-j_u(T)} \\ &\leq \sum_{i > j_u(T)} \frac{(d-1)}{(4d+1)^{i-j_u(T)}} B^{-j_u(T)} \\ &= \frac{d-1}{4d} B^{-j_u(T)} \end{aligned}$$

二つ目の項の絶対値は

$$\left| \frac{1 - \cos(\theta\pi)}{2} \cdot \frac{G_u(j_u(T), T, H_u(j_u(T), T))}{B^{j_u(T)+1}} \right| \leq \frac{1}{B^{j_u(T)+1}} \leq \frac{B^{-j_u(T)}}{4d+1} \quad (3.8)$$

よって $h_u(t) = (Y + \eta)B^{-j_u(T)}$ を満たす $\eta \in [-1/4, 1/4]$ が存在する. このとき,

$$Y = \sum_{i=0}^{j_u(T)} H_u(i, T) \cdot B^{j_u(T)-i}. \quad (3.9)$$

B は $2^{d'}$ の倍数なので, $Y \bmod 2^{d'} = H_u(j_u)$. (3.6) へ Y と η を代入すると,

$$\begin{aligned} g_u(t, h_u(t)) &= \frac{2^{Q(|u|)} \pi \sin(\theta\pi)}{2B^{j_u(T)+1}} G_u(j_u(T), T, H_u(j_u(T), T)) \\ &= \mathcal{D}^{(1)} h_u(t). \end{aligned}$$

よって h_u は g_u の常微分方程式の解.

g_u は y に関して微分可能であり,

$$\mathcal{D}^{(0,1)}g(t, y) = \begin{cases} 0 & (\eta \leq \frac{1}{4}) \\ 2B^{j_u(T)}\mathcal{D}^{(1)}f(2\eta - 1/2) \cdot (g_u^*(t, Y + 1) - g_u^*(t, Y)) & (\eta > \frac{1}{4}) \end{cases} \quad (3.10)$$

よって $\mathcal{D}^{(0,1)}g$ は連続.

$$|g_u^*(t, Y)| \leq 2^{Q(|u|)}\pi/(2B^{j_u(T)+1}) \leq 2^{Q(|u|)+1}/B^{j_u(T)+1} \text{ より,}$$

$$\begin{aligned} |\mathcal{D}^{(0,1)}g| &\leq 2B^{j_u(T)} \cdot |\mathcal{D}^{(1)}f(2\eta - 1/2)| \cdot 2 \cdot \frac{2^{Q(|u|)+1}}{B^{j_u(T)+1}} \\ &\leq \frac{2B^{j_u(T)} \cdot 2^c \cdot 2^{Q(|u|)+2}}{B^{j_u(T)+1}} \\ &= \frac{2^{Q(|u|)+c+3}}{B} \leq 2^{-\lambda(|u|)-|u|} \end{aligned} \quad (3.11)$$

(vii) は

$$\begin{aligned} h_u(1) &= \frac{H_u(P(|u|), 2^{Q(|u|)})}{B^{P(|u|)}} \\ &= \frac{L(u)}{2^{P(|u|)(\lambda(|u|)+Q(|u|)+|u|+c+d')}} \end{aligned} \quad (3.12)$$

より, $\rho(k) = P(k)(\lambda(k) + Q(k) + |u| + c + d')$ とおくと成り立つ. \square

3.3 定理 3.1 の証明

証明. L を PSPACE 完全な言語, $\lambda(k) = 2k + 2$ とおく. PSPACE 完全な言語 L にたいして補題 3.3 を用いて, $\rho, (g_u)_u, (h_u)_u$ を得る. $(g_u)_u$ は多項式時間実関数族なので, $|g_u(t, y)| \leq 2^{\gamma(|u|)-|u|}$ を満たすような多項式 γ が存在する. 各 u にたいして

$$\Lambda_u = 2^{\lambda(|u|)}, \quad \Gamma_u = 2^{\gamma(|u|)} \quad (3.13)$$

$$c_u = 1 - \frac{1}{2^{|u|}} + \frac{2\bar{u} + 1}{\Lambda_u}, \quad l_u^\mp = c_u \mp \frac{1}{\Lambda_u} \quad (3.14)$$

とおく. ただし $\bar{u} \in \{0, \dots, 2^{|u|} - 1\}$ は u を二進数として解釈した数.

関数 g, h を $t \in [0, 1], y \in \mathbf{R}$ にたいして, 下のように定義する.

$$g\left(l_u^\mp \pm \frac{t}{\Lambda_u}, \frac{y}{\Lambda_u \Gamma_u}\right) = \begin{cases} \pm \frac{1}{\Gamma_u} (g_u(t, 1) + \mathcal{D}^{(0,1)}g_u(t, 1)(y - 1)) & (1 < y) \\ \pm \frac{g_u(t, y)}{\Gamma_u} & (-1 \leq y \leq 1) \\ \pm \frac{1}{\Gamma_u} (g_u(t, -1) + \mathcal{D}^{(0,1)}g_u(t, -1)(y + 1)) & (y < -1) \end{cases} \quad (3.15)$$

$$h\left(l_u^\mp \pm \frac{t}{\Lambda_u}\right) = \frac{h_u(t)}{\Lambda_u \Gamma_u}. \quad (3.16)$$

任意の $y \in \mathbf{R}$ にたいして $g(1, y) = h(1) = 0$ と定義する.

g と h が定理 3.1 で求める関数の性質を満たすことを示す.

まず g が多項式時間計算可能であることを示す. 補題¹を用いて示す. 各有理数 T, Y について $g(T, Y)$ を求めるとき, $T = l_u^\mp \pm t/\Lambda_u$, $Y = y/\Lambda_u\Gamma_u$ を満たすような $u, \pm(\mp), t, y$ は, 多項式時間で計算可能である.

次に g が y に関して微分可能であり, 導関数は y, t に関して連続になっていることをしめす. 各区間で第二引数に関して微分すると,

$$\mathcal{D}^{(0,1)}g\left(l_u^\mp \pm \frac{t}{\Lambda_u}, \frac{y}{\Lambda_u\Gamma_u}\right) = \begin{cases} \pm\Lambda_u\mathcal{D}^{(0,1)}g_u(t, 1) & (1 < y) \\ \pm\Lambda_u\mathcal{D}^{(0,1)}g_u(t, y) & (-1 < y < 1) \\ \pm\Lambda_u\mathcal{D}^{(0,1)}g_u(t, -1) & (y < -1). \end{cases} \quad (3.17)$$

よって $\mathcal{D}^{(0,1)}g(t, 1) = \pm\Lambda_u\mathcal{D}^{(0,1)}g_u(t, 1)$, $\mathcal{D}^{(0,1)}g(t, -1) = \pm\Lambda_u\mathcal{D}^{(0,1)}g_u(t, -1)$ であり, y に関して微分可能. $\mathcal{D}^{(0,1)}g_u$ は連続であるため, y に関して連続は自明.

t 軸方向への連続性について. 任意の $[0, 1)$ の数はある u と $t \in [0, 1]$ が存在して $l_u^\mp \pm t/\Lambda_u$ の形で表せる. $t \in (0, 1)$ においては $\mathcal{D}^{(0,1)}g_u(t, y)$ は連続であるため, t 軸方向へ連続. $t = 0, 1$ のとき, $y \in [-1, 1]$ にたいして $g_u(0, y) = g_u(1, y) = 0$ より $\mathcal{D}^{(0,1)}g_u(0, y) = \mathcal{D}^{(0,1)}g_u(1, y) = 0$ よって $t = 0, 1$ においても連続. $g(1, y) = 0$ より $\mathcal{D}^{(0,1)}g(1, y) = 0$. また $|\mathcal{D}^{(0,1)}g_u| \leq 2^{\lambda(|u|)-|u|}$ より,

$$\lim_{t \rightarrow 1-0} |\mathcal{D}^{(0,1)}g| = \lim_{|u| \rightarrow \infty} |\Lambda_u \mathcal{D}^{(0,1)}g_u| \leq \lim_{|u| \rightarrow \infty} |2^{-|u|}| = 0. \quad (3.18)$$

よって $\mathcal{D}^{(0,1)}g$ は連続.

h が g の常微分方程式の解であることを示す. $h(0) = 0$, $\mathcal{D}^{(1)}h(1) = 0 = g(1, h(1))$ は自明.

$$\begin{aligned} & h'(l_u^\mp \pm t/\Lambda_u) \\ &= \pm \frac{h'_u(t)}{\Lambda_u\Gamma_u} \\ &= \pm \frac{g_u(t, h_u(t))}{\Gamma_u} \\ &= g\left(l_u^\mp \pm \frac{t}{\Lambda_u}, \frac{h_u(t)}{\Lambda_u\Gamma_u}\right) \\ &= g\left(l_u^\mp \pm \frac{t}{\Lambda_u}, h\left(l_u^\mp \pm \frac{t}{\Lambda_u}\right)\right). \end{aligned} \quad (3.19)$$

L は h に還元可能であることを示す.

$$h(c_u) = \frac{h_u(1)}{\Lambda_u\Gamma_u} = \frac{L(u)}{2^{\lambda(|u|)+\gamma(|u|)+\rho(|u|)}} \quad (3.20)$$

¹準備で導入

つまり R, S, T を以下のように定義することで, 還元可能.

$$R(u, v) = v \quad (3.21)$$

$$S(u, 0^n) = \lfloor 2^n c_u \rfloor \text{ を表す文字列}, \quad (3.22)$$

$$T(u) = 0^{\lambda(|u|)+\gamma(|u|)+\rho(|u|)} \quad (3.23)$$

L は PSPACE 完全であるため, h も PSPACE 完全. \square

4 任意回微分可能関数と常微分方程式

任意回微分可能な関数の常微分方程式の解も, ある仮定のもと PSPACE 完全でありうることを証明する.

定理 4.1. 仮定 4.2 のもと, 任意の自然数 $k \geq 2$ にたいし, 多項式時間実関数 $g(t, y)$ で, $\mathcal{D}^{(0,k)}g$ が連続であり, g の常微分方程式 (3.1) の解 h が PSPACE 完全であるものが存在する.

仮定については次の章で導入する.

4.1 フィードバックの弱い計算

フィードバックの弱い計算を定義する. フィードバックの弱い計算とは定数 d , 関数 $P: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, 多項式 $Q: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, 関数族 $(G_u)_u, (H_u)_u$ で, 5 つ組 $M = \langle d, P, Q, (G_u)_u, (H_u)_u \rangle$ である.

- $(G_u)_u$ は多項式時間計算可能;
- $P(x) = O(\log x)$ かつ多項式時間計算可能;
- $G_u: [P(|u|)] \times [2^{Q(|u|)}] \times [d] \rightarrow \{-1, 0, 1\}$;
- $H_u: [P(|u|) + 1] \times [2^{Q(|u|)}] \rightarrow [d]$;
- 任意の $i \in [P(|u|)]$, $T \in [2^{Q(|u|)}]$ にたいして

- $H_u(i, 0) = H_u(0, T) = 0$
- $H_u(i + 1, T + 1) = H_u(i + 1, T) + G_u(i, T, H_u(i, T))$.

フィードバックの弱い計算 M が言語 L を認識するとは任意の文字列 u で $H_u(P(|u|), 2^{Q(|u|)}) = L(u)$ を満たすこと.

仮定 4.2. 任意の言語 $L \in \text{PSPACE}$ に対して L を認識するフィードバックの弱い計算が存在する.

つまりフィードバックの弱い計算が PSPACE 完全であることを仮定する.

4.2 離散初期値問題を模倣する関数族

証明の流れは1回微分可能の時と変わらない。任意の言語 $L \in \mathbf{PSPACE}$, 文字列 u にたいして, 上記のフィードバックの弱い計算を模倣し $L(u)$ を計算する任意回微分可能な実関数 g_u を構成する。

補題 4.3. 仮定 4.2 のもと, 任意の自然数 $k \geq 2$, 任意の言語 $L \in \mathbf{PSPACE}$, 任意の多項式 λ にたいして, 関数 $\rho: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ と関数族 g_u, h_u で, $\rho, (g_u)_u$ は多項式時間計算可能であり, 各二進文字列 u にたいして以下を満たすものが存在する。

- (i) $g_u: [0, 1] \times [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}, \quad h_u: [0, 1] \rightarrow [-1, 1];$
- (ii) 任意の $y \in [-1, 1]$ にたいして $g_u(0, y) = g_u(1, y) = 0;$
- (iii) h_u は g_u の常微分方程式の解;
- (iv) $\mathcal{D}^{(0,k)} g_u$ は連続;
- (v) 任意の $i \in \{0, \dots, k\}$ にたいして $|\mathcal{D}^{(0,i)} g_u(t, y)| \leq \Lambda_u^{-i} 2^{-|u|};$
- (vi) $h_u(1) = 2^{-\rho(|u|)} L(u).$

ただし $\Lambda_u = 2^{\lambda(|u|)}.$

証明. 仮定 4.2 より L を認識する $M = \langle d, P, Q, (G_u)_u, (H_u)_u \rangle$ を得る。さらに以下のように仮定する。

$$H_u(i, 2^{Q(|u|)}) = \begin{cases} L(u) & (i = P(|u|)) \\ 0 & (i < P(|u|)). \end{cases} \quad (4.1)$$

補題 3.4 の f にたいして, 定数 c を任意の $i \in \{0, \dots, k\}$, 任意の $x \in [0, 1]$ にたいして $|\mathcal{D}^{(i)} f(x)| \leq 2^c$ を満たす最小の自然数と定める。定数 $d' = \lceil \log(4d + 1) \rceil$, $B = 2^{Q(|u|) + k\lambda(|u|) + (k-1)|u| + c + d' + k}$ とおき, 各 $(t, y) \in [0, 1] \times [-1, 1]$ にたいして, 自然数 N , $\theta \in [0, 1]$, 整数 Y , $\eta \in [-1/4, 3/4]$ を $t = (T + \theta)2^{-Q(|u|)}, y = (Y + \eta)B^{-(k+1)^{j_u(T)}}$ を満たすように定める。

そのとき,

$$g_u^*(t, Y) = \frac{2^{Q(|u|)} \pi \sin(\theta \pi)}{2B^{(k+1)^{j_u(T)+1}}} G_u(j_u(T), T, Y \bmod 2^{d'}) \quad (4.2)$$

とおき g_u, h_u を以下のように定義する。

$$g_u(t, y) = \begin{cases} g_u^*(t, Y) & (\eta \leq \frac{1}{4}) \\ (1 - f(2\eta - \frac{1}{2})) g_u^*(t, Y) + f(2\eta - \frac{1}{2}) g_u^*(t, Y + 1) & (\eta > \frac{1}{4}) \end{cases} \quad (4.3)$$

$$h_u(t) = \sum_{i=0}^{P(|u|)} \frac{H_u(i, T)}{B^{(k+1)^i}} + \frac{1 - \cos(\theta\pi)}{2} \cdot \frac{G_u(j_u(T), T, H_u(j_u(T), T))}{B^{(k+1)^{j_u(T)+1}}} \quad (4.4)$$

上記のように定義した g_u, h_u が補題 4.3 で求める性質を満たすことを示す。
(i), (ii) は自明. $(g_u)_u$ が多項式時間計算可能であることは補題によって示される.

h_u は g_u の常微分方程式の解であることを示す. まず h_u について解析する. (4.4) の一つ目の項において $i \leq j_u(T)$ の合計は $B^{(k+1)^{j_u(T)}}$ の倍数. $i > j_u(T)$ の合計は,

$$\begin{aligned} \sum_{i > j_u(T)}^{P(|u|)} \frac{H_u(i, T)}{B^{(k+1)^i}} &\leq \sum_{i > j_u(T)}^{\infty} \frac{d-1}{B^{(k+1)^i}} \\ &\leq \sum_{i > j_u(T)}^{\infty} \frac{d-1}{B^i} = \sum_{i > j_u(T)} \frac{d-1}{B^{i-j_u(T)}} B^{-j_u(T)} \\ &\leq \sum_{i > j_u(T)} \frac{(d-1)}{(4d+1)^{i-j_u(T)}} B^{-j_u(T)} \\ &= \frac{d-1}{4d} B^{-j_u(T)} \end{aligned}$$

二つ目の項の絶対値は

$$\left| \frac{1 - \cos(\theta\pi)}{2} \cdot \frac{G_u(j_u(T), T, H_u(j_u(T), T))}{B^{(k+1)^{j_u(T)+1}}} \right| \leq \frac{1}{B^{j_u(T)+1}} \leq \frac{B^{-j_u(T)}}{4d+1} \quad (4.5)$$

よって $h_u(t) = (Y + \eta)B^{-j_u(T)}$ を満たす $\eta \in [-1/4, 1/4]$ が存在する. このとき,

$$Y = \sum_{i=0}^{j_u(T)} H_u(i, T) \cdot B^{j_u(T)-i}. \quad (4.6)$$

B は $2^{d'}$ の倍数なので, $Y \bmod 2^{d'} = H_u(j_u)$. (4.3) へ Y と η を代入すると,

$$\begin{aligned} g_u(t, h_u(t)) &= \frac{2^{Q(|u|)} \pi \sin(\theta\pi)}{2B^{j_u(T)+1}} G_u(j_u(T), T, H_u(j_u(T), T)) \\ &= \mathcal{D}^{(1)} h_u(t). \end{aligned} \quad (4.7)$$

よって h_u は g_u の常微分方程式の解.

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{(0,i)} g(t, y) &= \\ \begin{cases} 0 & (\eta \leq \frac{1}{4}) \\ 2^i B^{i \cdot (k+1)^{j_u(T)}} \cdot \mathcal{D}^{(i)} f\left(2\eta - \frac{1}{2}\right) \cdot (g_u^*(t, Y+1) - g_u^*(t, Y)) & (\eta > \frac{1}{4}) \end{cases} \end{aligned} \quad (4.8)$$

よって $\mathcal{D}^{(0,i)}g$ は連続

(v) を示す. $|g_u^*| \leq \left| \frac{2^{Q(|u|)} \pi \sin(\theta\pi)}{2B^{(k+1)}(j_u(T)+1)} \right| \leq \frac{2^{Q(|u|)+1}}{B^{(k+1)}(j_u(T)+1)}$ より, $i = 0$ において

$$|\mathcal{D}^{(0,0)}g| = |g| \leq \frac{2^{Q(|u|)+1}}{B^{(k+1)}(j_u(T)+1)} \leq \frac{2^{Q(|u|)+1}}{B^{(k+1)}} \leq 2^{-|u|} \quad (4.9)$$

$i \in \{1, \dots, k\}$ において,

$$\begin{aligned} |\mathcal{D}^{(0,i)}g| &\leq 2^i \cdot B^{i \cdot (k+1)^{j_u(T)}} \cdot 2^c \cdot (g_u^*(t, Y+1) - g_u^*(t, Y)) \\ &\leq 2^{c+k} \cdot B^{k(k+1)^{j_u(T)}} \cdot 2 \cdot \frac{2^{Q(|u|)+1}}{B^{(k+1)}(j_u(T)+1)} \\ &\leq \frac{2^{Q(|u|)+c+k+2}}{B} \leq 2^{-i\lambda(|u|)-|u|} = \Lambda_u^{-i} 2^{-|u|} \end{aligned} \quad (4.10)$$

(vii) は

$$\begin{aligned} h_u(1) &= \frac{H_u(P(|u|), 2^{Q(|u|)})}{B^{(k+1)^{P(|u|)}}} \\ &= \frac{L(u)}{2^{(k+1)^{P(|u|)}(Q(|u|)+k\lambda(|u|)+|u|+c+d'+k)}} \end{aligned} \quad (4.11)$$

より, $\rho(x) = (k+1)^{P(x)}(Q(x) + k\lambda(x) + x + c + d' + k)$ とおく. $P(|u|) = O(\log |u|)$ かつ P は多項式時間計算可能により, ρ は多項式時間計算可能. \square

4.3 定理 4.1 の証明

証明. L を PSPACE 完全な言語, $\lambda(k) = 2k+2$ とおく. PSPACE 完全な言語 L について補題 4.3 を用いて, $\rho, (g_u)_u, (h_u)_u$ を得る.

$$c_u = 1 - \frac{1}{2^{|u|}} + \frac{2\bar{u}+1}{\Lambda_u}, \quad l_u^\mp = c_u \mp \frac{1}{\Lambda_u} \quad (4.12)$$

とおく. ただし $\bar{u} \in \{0, \dots, 2^{|u|}-1\}$ は u を二進数として解釈した数.

関数 g, h を $t \in [0, 1], y \in \mathbf{R}$ について, 下のように定義する.

$$g\left(l_u^\mp \pm \frac{t}{\Lambda_u}, \frac{y}{\Lambda_u}\right) = \begin{cases} \pm g_u(t, 1) \pm \mathcal{D}^{(0,1)}g_u(t, 1)(y-1) & (1 < y) \\ \pm g_u(t, y) & (-1 \leq y \leq 1) \\ \pm g_u(t, -1) \pm \mathcal{D}^{(0,1)}g_u(t, -1)(y+1) & (y < -1) \end{cases} \quad (4.13)$$

$$h\left(l_u^\mp \pm \frac{t}{\Lambda_u}\right) = \frac{h_u(t)}{\Lambda_u}. \quad (4.14)$$

任意の $y \in \mathbf{R}$ について $g(1, y) = h(1) = 0$ と定義する.

g と h が定理 3.1 で求める関数の性質を満たすことを示す.

まず g が多項式時間計算可能であることを示す. 補題²を用いて示す. 各有理数 T, Y について $g(T, Y)$ を求めるとき, $T = l_u^\mp \pm t/\Lambda_u, Y = y/\Lambda_u$ を満たすような $u, \pm(\mp), t, y$ は, 多項式時間で計算可能である.

²準備で導入

次に g が y に関して微分可能であり、導関数は y, t に関して連続になっていることをしめす. 各区間で第二引数に関して微分すると $i \in 1, \dots, k$ で

$$\mathcal{D}^{(0,i)}g \left(l_u^\mp \pm \frac{t}{\Lambda_u}, \frac{y}{\Lambda_u} \right) = \begin{cases} \pm \Lambda_u^i \mathcal{D}^{(0,i)}g_u(t, 1) & (1 < y) \\ \pm \Lambda_u^i \mathcal{D}^{(0,i)}g_u(t, y) & (-1 < y < 1) \\ \pm \Lambda_u^i \mathcal{D}^{(0,i)}g_u(t, -1) & (y < -1). \end{cases} \quad (4.15)$$

よって $\mathcal{D}^{(0,i)}g(t, 1) = \pm \Lambda_u^i \mathcal{D}^{(0,i)}g_u(t, 1)$, $\mathcal{D}^{(0,i)}g(t, -1) = \pm \Lambda_u^i \mathcal{D}^{(0,i)}g_u(t, -1)$ であり, y に関して i 回微分可能かつ i 階の導関数は連続.

t 軸方向への i 階の導関数の連続性について. 任意の $[0, 1]$ の数はある u と $t \in [0, 1]$ が存在して $l_u^\mp \pm t/\Lambda_u$ の形で表せる. $t \in (0, 1)$ においては $\mathcal{D}^{(0,i)}g_u(t, y)$ は連続であるため, t 軸方向へ連続. $t = 0, 1$ のとき, $y \in [-1, 1]$ にたいして $g_u(0, y) = g_u(1, y) = 0$ より $\mathcal{D}^{(0,i)}g_u(0, y) = \mathcal{D}^{(0,i)}g_u(1, y) = 0$ よって $t = 0, 1$ においても連続. $g(1, y) = 0$ より $\mathcal{D}^{(0,i)}g(1, y) = 0$. また $|\mathcal{D}^{(0,i)}g_u| \leq \Lambda_u^{-i} 2^{-|u|}$ より,

$$\lim_{t \rightarrow 1-0} |\mathcal{D}^{(0,i)}g| = \lim_{|u| \rightarrow \infty} |\Lambda_u^i \mathcal{D}^{(0,i)}g_u| \leq \lim_{|u| \rightarrow \infty} |2^{-|u|}| = 0. \quad (4.16)$$

よって $\mathcal{D}^{(0,i)}g$ は連続.

h が g の常微分方程式の解であることを示す. $h(0) = 0$, $\mathcal{D}^{(1)}h(1) = 0 = g(1, h(1))$ は自明.

$$\begin{aligned} & h'(l_u^\mp \pm t/\Lambda_u) \\ &= \pm \frac{h'_u(t)}{\Lambda_u} \\ &= \pm g_u(t, h_u(t)) \\ &= g \left(l_u^\mp \pm \frac{t}{\Lambda_u}, \frac{h_u(t)}{\Lambda_u} \right) \\ &= g \left(l_u^\mp \pm \frac{t}{\Lambda_u}, h \left(l_u^\mp \pm \frac{t}{\Lambda_u} \right) \right). \end{aligned} \quad (4.17)$$

L は h に還元可能であることを示す.

$$h(c_u) = \frac{h_u(1)}{\Lambda_u} = \frac{L(u)}{2^{\lambda(|u|)+\rho(|u|)}} \quad (4.18)$$

つまり R, S, T を以下のように定義することで, 還元可能.

$$R(u, v) = v \quad (4.19)$$

$$S(u, 0^n) = \lfloor 2^n c_u \rfloor \text{ を表す文字列}, \quad (4.20)$$

$$T(u) = 0^{\lambda(|u|)+\rho(|u|)} \quad (4.21)$$

L は PSPACE 完全であるため, h も PSPACE 完全.

□

5 結論

5.1 課題

t に関する微分.

参考文献

- [Kaw10] A. Kawamura. Lipschitz continuous ordinary differential equations are polynomial-space complete. *Computational Complexity*, 19(2):305–332, 2010.
- [Ko91] K.I. Ko. *Complexity theory of real functions*. Birkhauser Boston Inc., 1991.