滑らかな常微分方程式の計算量

太田浩行 *　河村彰星 †　マルチン・ツィーグラー ‡
カルステン・レースニク §

2012/1/31

概 要

1　導入

2　準備

2.1　表記

(二進) 自然数の集合を $\mathbf{N}$, 整数の集合を $\mathbf{Z}$, 実数の集合を $\mathbf{R}$, 有理数の集合を $\mathbf{Q}$, $0^{\mathbf{N}} = \{0^n \mid n \in \mathbf{N}\}$ と表記する．一変数関数 f の i 階の導関数を $\mathcal{D}^{(i)}f$ と表記する．同様に二変数関数 g の第一引数にたいして i 階, 第二引数に対して j 階の導関数を $\mathcal{D}^{(i,j)}g$ と表記する．

2.2　実数の名

精度を与えると, ある実数の近似値を返す関数をその実数の名と呼ぶ.

定義 2.1 (実数の名)**.** 関数 $\phi : 0^{\mathbf{N}} \to \mathbf{Z}$ が実数 $x \in [0, 1]$ の名であるとは, $\phi(0^n) = \lfloor x \cdot 2^n \rfloor$ または $\phi(0^n) = \lceil x \cdot 2^n \rceil$ を満たすこと.

2.3　計算可能実関数, 多項式時間実関数

実数は無限の長さを持つため, 文字列にエンコードすることができない．そこで実関数を計算する機械を, 入力となる実数の名を神託としてもつ神託機械として定義する.

*東京大学
†第 1 著者に同じ
‡ダルムシュタット工科大学
§第 1 著者に同じ

定義 2.2. 神託機械 M が実関数 $f : A \to \mathbf{R}$ を計算するとは, 任意の実数 $x \in A$, 任意の x の名 ϕ_x にたいして, M_x^{ϕ} が $f(x)$ の名であること.

ある実関数が計算可能であるとは, その関数を計算する神託機械が存在することである. 同様に, ある実関数が多項式時間計算可能であるとは, その関数を計算する多項式時間神託機械が存在することである.

神託機械 M で f を計算するとき, 精度 n を求められたとき, x の近似値に必要な精度 m が定まる. よって計算可能な関数は連続である. 神託機械を用いない同値な特徴付けが可能である.

補題 2.3. $\phi_f : \mathbf{Q} \times 0^{\mathbf{N}} \to \mathbf{Q}$, $m_f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ は

$$|\phi_f(d, 0^n) - f(d)| \leq 2^{-n} \tag{2.1}$$

$$|x - y| \leq 2^{-p_f(m)} \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq 2^{-m} \tag{2.2}$$

をみたす関数とする.

- f が計算可能であることは, 計算可能な ϕ_f, m_f が存在することと同値である.
- f が多項式時間計算可能であることは, 多項式時間計算可能な ϕ_f, 多項式 m_f が存在することと同値である.

2.4 完全性

定義 2.4 (還元)**.** 言語 L が実関数 $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ に還元可能であるとは, 任意の文字列 u にたいして, 以下を満たす実数 $x_u \in [0,1]$ 多項式時間計算可能な関数 R, S, T が存在すること.

- $R : N \times N \to \{0,1\}, \quad S : \mathbf{N} \times 0^{\mathbf{N}} \to \mathbf{N}, \quad T : \mathbf{N} \to 0^{\mathbf{N}}$;
- $S(u, \cdot)$ は実数 x_u の名;
- 任意の $f(x_u)$ の名 ϕ にたいして

$$L(u) = R(u, \phi(T(u))).$$

計算量 C にたいして, 関数 f が C 困難であるとは, 任意の C に含まれる言語が f に還元可能であることである. さらに f が C に含まれるとき, つまり C に対応する神託機械で f を計算するものが存在するとき, f は C 完全であると定義する.

3 微分可能関数と常微分方程式

以下のような常微分方程式を考える.

$$h(0) = 0, \qquad \mathcal{D}^{(1)}h(t) = g(t, h(t)) \quad (t \in [0,1]) \tag{3.1}$$

定理 3.1. 多項式時間実関数 $g(t,y)$ で, 微分可能かつ $\mathcal{D}^{(0,1)}g$ が連続であり, g の常微分方程式 (3.1) の解 h が **PSPACE** 完全であるものが存在する.

3.1 離散初期値問題

初期値問題の離散バージョンが **PSPACE** 完全であるところから始める. 河村の論文において以下のように定義されるフィードバックの弱い計算が **PSPACE** 完全であることが示されている.

補題 3.2 (補題 4.7. [Kaw10])**.** 任意の言語 $L \in$ **PSPACE**, 任意の文字列 u にたいして, 以下を満たす定数 $d \geq 2$ 多項式 P, Q, 関数族 $(G_u)_u$, $(H_u)_u$ で, $(G_u)_u$ は多項式時間計算可能, $H_u(P(|u|)+1, 2^{Q(|u|)}) = L(u)$ であるものが存在する.

(i) $G_u : [P(|u|)] \times [2^{Q(|u|)}] \times [d] \to \{-1, 0, 1\}$;

(ii) $H_u : [P(|u|)+1] \times [2^{Q(|u|)}+1] \to [d]$;

(iii) 任意の $i \in [P(|u|)], T \in [2^{Q(|u|)}]$ にたいして

- $H_u(i, 0) = H_u(0, T) = 0$
- $H_u(i+1, T+1) = H_u(i+1, T) + G_u(i, T, H_u(i, T))$.

もと論文では $d = 4$ であったが, 後の議論との統一のために一般化する.
(図, より直感的でわかりやすい説明を入れる)

3.2 離散初期値問題を模倣する関数族

任意の言語 $L \in$ **PSPACE**, 文字列 u にたいして, 上記の計算を模倣し $L(u)$ を計算する微分可能な実関数 g_u を構成する.

補題 3.3. 任意の言語 $L \in$ **PSPACE**, 多項式 λ にたいして, 多項式 ρ, 関数族 $(g_u)_u, (h_u)_u$ で, $(g_u)_u$ は多項式時間計算可能であり, 各二進文字列 u にたいして以下を満たすものが存在する.

(i) $g_u : [0,1] \times [-1,1] \to \mathbf{R}, \quad h_u : [0,1] \to [-1,1]$;

(ii) 任意の $y \in [-1,1]$ にたいして $g_u(0,y) = g_u(1,y) = 0$;

(iii) h_u は g_u の常微分方程式の解;

(iv) $\mathcal{D}^{(0,1)}g$ は連続;

(v) $|\mathcal{D}^{(0,1)}g| \leq 2^{-\lambda(|u|)-|u|}$;

(vi) $h_u(1) = 2^{-\rho(|u|)}L(u)$.

この補題の証明の前に, 葛によって示されている滑らかな多項式時間実関数 $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ を導入する.

補題 3.4 (補題 3.6. [Ko91])**.** 以下を満たす多項式時間無限回微分可能実関数 $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ が存在する.

(i) $f(0) = 0, \quad f(1) = 1$;

(ii) 任意の $n \geq 1$ で $f^{(n)}(0) = f^{(n)}(1) = 0$;

(iii) f は $[0,1]$ で単調増加;

(iv) 任意の $n \geq 1$ で $f^{(n)}$ は多項式時間実関数.

補題 3.3 の証明. $d, P, Q, (G_u)_u, (H_u)_u$ を補題 3.2 と同様に定義する. 各ステップを $P(u)$ 個に分割することで, $G_u(i,T,Y) \neq 0$ を満たす i を各 T にたいしてたかだか 1 つにすることができる. そのような i のことを $j_u l(T)$ と表現する. 任意の i で $G_u(i,T,Y) = 0$ ならば $j_u(T)$ は任意の値を取るとする. さらに以下のように仮定できる.

$$H_u(i, 2^{Q(|u|)}) = \begin{cases} L(u) & (i = P(|u|)) \\ 0 & (i < P(|u|)) \end{cases} \tag{3.2}$$

$$G_u(i, 2 \cdot 2^{Q(|u|)} - 1 - T, Y) = \begin{cases} 0 & (i = P(|u|) - 1) \\ -G_u(i,T,Y) & (i < P(|u|) - 1) \end{cases} \tag{3.3}$$

$$H_u(i, 2 \cdot 2^{Q(|u|)} - T) = \begin{cases} H_u(P(|u|), 2^{Q(|u|)}) & (i = P(|u|)) \\ H_u(i,T) & (i < P(|u|)) \end{cases} \tag{3.4}$$

補題 3.4 の f にたいして, 定数 c を任意の $x \in [0,1]$ にたいして $|\mathcal{D}^{()}1 f(x)| \leq 2^c$ を満たす最小の自然数と定める. 定数 $d' = \lceil \log(4d+1) \rceil$, $B = 2^{\lambda(|u|)+Q(|u|)+|u|+c+d'}$ とおき, 各 $(t,y) \in [0,1] \times [-1,1]$ にたいして, 自然数 N, $\theta \in [0,1]$, 整数 Y, $\eta \in [-1/4, 3/4]$ を $t = (T+\theta)2^{-Q(|u|)}$, $y = (Y+\eta)B^{-j_u(T)}$ を満たすように定める.

そのとき,

$$g_u^*(t,Y)=\frac{2^{Q(|u|)}\pi\sin(\theta\pi)}{2B^{j_u(T)+1}}G_u\left(j_u(T),T,Y \bmod 2^{d'}\right) \tag{3.5}$$

とおき g_u, h_u を以下のように定義する.

$$g_u(t,y)=\begin{cases} g_u^*(t,Y) & (\eta\le\frac{1}{4}) \\ (1-f(2\eta-1/2))g_u^*(t,Y)+f(2\eta-1/2)g_u^*(t,Y+1) & (\eta>\frac{1}{4}) \end{cases} \tag{3.6}$$

$$h_u(t)=\sum_{i=0}^{P(|u|)}\frac{H_u(i,T)}{B^i}+\frac{1-\cos(\theta\pi)}{2}\cdot\frac{G_u(j_u(T),T,H_u(j_u(T),T))}{B^{j_u(T)+1}} \tag{3.7}$$

上記のように定義した g_u, h_u が補題 3.3 で求める性質を満たすことを示す. (i) , (ii) は自明. $(g_u)_u$ が多項式時間計算可能であることは補題によって示される.

h_u は g_u の常微分方程式の解であることを示す. まず h_u について解析する. (3.7) の一つ目の項において $i\le j_u(T)$ の合計は $B^{j_u(T)}$ の倍数. $i>j_u(T)$ の合計は,

$$\begin{aligned}\sum_{i>j_u(T)}\frac{H_u(i,T)}{B^i} &\le \sum_{i>j_u(T)}\frac{d-1}{B^i}=\sum_{i>j_u(T)}\frac{d-1}{B^{i-j_u(T)}}B^{-j_u(T)} \\ &\le \sum_{i>j_u(T)}\frac{(d-1)}{(4d+1)^{i-j_u(T)}}B^{-j_u(T)} \\ &= \frac{d-1}{4d}B^{-j_u(T)}\end{aligned}$$

二つ目の項の絶対値は

$$\left|\frac{1-\cos(\theta\pi)}{2}\cdot\frac{G_u(j_u(T),T,H_u(j_u(T),T))}{B^{j_u(T)+1}}\right|\le\frac{1}{B^{j_u(T)+1}}\le\frac{B^{-j_u(T)}}{4d+1} \tag{3.8}$$

よって $h_u(t)=(Y+\eta)B^{-j_u(T)}$ を満たす $\eta\in[-1/4,1/4]$ が存在する. このとき,

$$Y=\sum_{i=0}^{j_u(T)}H_u(i,T)\cdot B^{j_u(T)-i}. \tag{3.9}$$

B は $2^{d'}$ の倍数なので, $Y \bmod 2^{d'}=H_u(j_u)$. (3.6) へ Y と η を代入すると,

$$\begin{aligned}g_u(t,h_u(t)) &= \frac{2^{Q(|u|)}\pi\sin(\theta\pi)}{2B^{j_u(T)+1}}G_u(j_u(T),T,H_u(j_u(T),T)) \\ &= \mathcal{D}^{(1)}h_u(t).\end{aligned}$$

よって h_u は g_u の常微分方程式の解.

g_u は y に関して微分可能であり,

$$\mathcal{D}^{(0,1)}g(t,y) = \begin{cases} 0 & (\eta \le \frac{1}{4}) \\ 2B^{j_u(T)}\mathcal{D}^{(1)}f(2\eta - 1/2)\cdot(g_u^*(t,Y+1) - g_u^*(t,Y)) & (\eta > \frac{1}{4}) \end{cases} \tag{3.10}$$

よって $\mathcal{D}^{(0,1)}g$ は連続.

$|g_u^*(t,Y)| \le 2^{Q(|u|)}\pi/(2B^{j_u(T)+1}) \le 2^{Q(|u|)+1}/B^{j_u(T)+1}$ より,

$$\begin{aligned} \left|\mathcal{D}^{(0,1)}g\right| &\le 2B^{j_u(T)}\cdot|\mathcal{D}^{(1)}f(2\eta-1/2)|\cdot 2\cdot\frac{2^{Q(|u|)+1}}{B^{j_u(T)+1}} \\ &\le \frac{2B^{j_u(T)}\cdot 2^c\cdot 2^{Q(|u|)+2}}{B^{j_u(T)+1}} \\ &= \frac{2^{Q(|u|)+c+3}}{B} \quad \le \quad 2^{-\lambda(|u|)-|u|} \end{aligned} \tag{3.11}$$

(vii) は

$$\begin{aligned} h_u(1) &= \frac{H_u(P(|u|), 2^{Q(|u|)})}{B^{P(|u|)}} \\ &= \frac{L(u)}{2^{P(|u|)(\lambda(|u|)+Q(|u|)+|u|+c+d')}} \end{aligned} \tag{3.12}$$

より, $\rho(k) = P(k)(\lambda(k) + Q(k) + |u| + c + d')$ とおくと成り立つ. □

3.3 定理 3.1 の証明

証明. L を **PSPACE** 完全な言語, $\lambda(k) = 2k+2$ とおく. **PSPACE** 完全な言語 L にたいして補題 3.3 を用いて, ρ, $(g_u)_u$, $(h_u)_u$ を得る. $(g_u)_u$ は多項式時間実関数族なので, $|g_u(t,y)| \le 2^{\gamma(|u|)-|u|}$ を満たすような多項式 γ が存在する. 各 u にたいして

$$\Lambda_u = 2^{\lambda(|u|)}, \quad \Gamma_u = 2^{\gamma(|u|)} \tag{3.13}$$

$$c_u = 1 - \frac{1}{2^{|u|}} + \frac{2\bar{u}+1}{\Lambda_u}, \quad l_u^{\mp} = c_u \mp \frac{1}{\Lambda_u} \tag{3.14}$$

とおく. ただし $\bar{u} \in \{0,\ldots,2^{|u|}-1\}$ は u を二進数として解釈した数.

関数 g, h を $t \in [0,1]$, $y \in \mathbf{R}$ にたいして, 下のように定義する.

$$g\left(l_u^{\mp} \pm \frac{t}{\Lambda_u}, \frac{y}{\Lambda_u\Gamma_u}\right) = \begin{cases} \pm\frac{1}{\Gamma_u}\left(g_u(t,1) + \mathcal{D}^{(0,1)}g_u(t,1)(y-1)\right) & (1 < y) \\ \pm\frac{g_u(t,y)}{\Gamma_u} & (-1 \le y \le 1) \\ \pm\frac{1}{\Gamma_u}\left(g_u(t,-1) + \mathcal{D}^{(0,1)}g_u(t,-1)(y+1)\right) & (y < -1) \end{cases} \tag{3.15}$$

$$h\left(l_u^{\mp} \pm \frac{t}{\Lambda_u}\right) = \frac{h_u(t)}{\Lambda_u\Gamma_u}. \tag{3.16}$$

任意の $y \in \mathbf{R}$ にたいして $g(1,y) = h(1) = 0$ と定義する.

g と h が定理 3.1 で求める関数の性質を満たすことを示す.

まず g が多項式時間計算可能であることを示す. 補題[1]を用いて示す. 各有理数 T, Y について $g(T, Y)$ を求めるとき, $T = l_u^{\mp} \pm t/\Lambda_u$, $Y = y/\Lambda_u\Gamma_u$ を満たすような $u, \pm(\mp), t, y$ は, 多項式時間で計算可能である.

次に g が y に関して微分可能であり, 導関数は y, t に関して連続になっていることをしめす. 各区間で第二引数に関して微分すると,

$$\mathcal{D}^{(0,1)} g\left(l_u^{\mp} \pm \frac{t}{\Lambda_u}, \frac{y}{\Lambda_u \Gamma_u}\right) = \begin{cases} \pm\Lambda_u \mathcal{D}^{(0,1)} g_u(t,1) & (1 < y) \\ \pm\Lambda_u \mathcal{D}^{(0,1)} g_u(t,y) & (-1 < y < 1) \\ \pm\Lambda_u \mathcal{D}^{(0,1)} g_u(t,-1) & (y < -1). \end{cases} \tag{3.17}$$

よって $\mathcal{D}^{(0,1)} g(t,1) = \pm\Lambda_u \mathcal{D}^{(0,1)} g_u(t,1)$, $\mathcal{D}^{(0,1)} g(t,-1) = \pm\Lambda_u \mathcal{D}^{(0,1)} g_u(t,-1)$ であり, y に関して微分可能. $\mathcal{D}^{(0,1)} g_u$ は連続であるため, y に関して連続は自明.

t 軸方向への連続性について. 任意の $[0, 1)$ の数はある u と $t \in [0, 1]$ が存在して $l_u^{\mp} \pm t/\Lambda_u$ の形で表せる. $t \in (0, 1)$ においては $\mathcal{D}^{(0,1)} g_u(t, y)$ は連続であるため, t 軸方向へ連続. $t = 0, 1$ のとき, $y \in [-1, 1]$ にたいして $g_u(0, y) = g_u(1, y) = 0$ より $\mathcal{D}^{(0,1)} g_u(0, y) = \mathcal{D}^{(0,1)} g_u(1, y) = 0$ よって $t = 0, 1$ においても連続. $g(1, y) = 0$ より $\mathcal{D}^{(0,1)} g(1, y) = 0$. また $\left|\mathcal{D}^{(0,1)} g_u\right| \le 2^{\lambda(|u|)-|u|}$ より,

$$\lim_{t \to 1-0} \left|\mathcal{D}^{(0,1)} g\right| = \lim_{|u| \to \infty} \left|\Lambda_u \mathcal{D}^{(0,1)} g_u\right| \le \lim_{|u| \to \infty} \left|2^{-|u|}\right| = 0. \tag{3.18}$$

よって $\mathcal{D}^{(0,1)} g$ は連続.

h が g の常微分方程式の解であることを示す. $h(0) = 0, \quad \mathcal{D}^{(1)} h(1) = 0 = g(1, h(1))$ は自明.

$$\begin{aligned} & h'(l_u^{\mp} \pm t/\Lambda_u) \\ & = \pm\frac{h_u'(t)}{\Lambda_u \Gamma_u} \\ & = \pm\frac{g_u\left(t, h_u(t)\right)}{\Gamma_u} \\ & = g\left(l_u^{\mp} \pm \frac{t}{\Lambda_u}, \frac{h_u(t)}{\Lambda_u \Gamma_u}\right) \\ & = g\left(l_u^{\mp} \pm \frac{t}{\Lambda_u}, h\left(l_u^{\mp} \pm \frac{t}{\Lambda_u}\right)\right). \end{aligned} \tag{3.19}$$

L は h に還元可能であることを示す.

$$h(c_u) = \frac{h_u(1)}{\Lambda_u \Gamma_u} = \frac{L(u)}{2^{\lambda(|u|)+\gamma(|u|)+\rho(|u|)}} \tag{3.20}$$

[1]準備で導入

つまり R, S, T を以下のように定義することで, 還元可能.

$$R(u, v) = v \tag{3.21}$$

$$S(u, 0^n) = \lfloor 2^n c_u \rfloor \text{ を表す文字列}, \tag{3.22}$$

$$T(u) = 0^{\lambda(|u|)+\gamma(|u|)+\rho(|u|)} \tag{3.23}$$

L は **PSPACE** 完全であるため, h も **PSPACE** 完全. □

4 任意回微分可能関数と常微分方程式

任意回微分可能な関数の常微分方程式の解も, ある仮定のもと **PSPACE** 完全でありうることを証明する.

定理 4.1. 仮定 4.2 のもと, 任意の自然数 $k \geq 2$ にたいし, 多項式時間実関数 $g(t, y)$ で, $\mathcal{D}^{(0,k)}g$ が連続であり, g の常微分方程式 (3.1) の解 h が **PSPACE** 完全であるものが存在する.

仮定については次の章で導入する.

4.1 フィードバックの弱い計算

フィードバックの弱い計算を定義する. フィードバックの弱い計算とは定数 d, 関数 $P : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, 多項式 $Q : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, 関数族 $(G_u)_u, (H_u)_u$ で, 5 つ組 $M = \langle d, P, Q, (G_u)_u, (H_u)_u \rangle$ である.

- $(G_u)_u$ は多項式時間計算可能;
- $P(x) = O(\log x)$ かつ多項式時間計算可能;
- $G_u : [P(|u|)] \times \left[2^{Q(|u|)}\right] \times [d] \to \{-1, 0, 1\}$;
- $H_u : [P(|u|) + 1] \times \left[2^{Q(|u|)}\right] \to [d]$;
- 任意の $i \in [P(|u|)]$, $T \in \left[2^{Q(|u|)}\right]$ にたいして
  - $H_u(i, 0) = H_u(0, T) = 0$
  - $H_u(i + 1, T + 1) = H_u(i + 1, T) + G_u(i, T, Hu(i, T))$.

フィードバックの弱い計算 M が言語 L を認識するとは任意の文字列 u で $H_u(P(|u|), 2^{Q(|u|)}) = L(u)$ を満たすこと.

仮定 4.2. 任意の言語 $L \in \mathbf{PSPACE}$ に対して L を認識するフィードバックの弱い計算が存在する.

つまりフィードバックの弱い計算が **PSPACE** 完全であることを仮定する.

4.2 離散初期値問題を模倣する関数族

証明の流れは 1 回微分可能の時と変わらない. 任意の言語 $L \in \mathbf{PSPACE}$, 文字列 u にたいして, 上記のフィードバックの弱い計算を模倣し $L(u)$ を計算する任意回微分可能な実関数 g_u を構成する.

補題 4.3. 仮定 4.2 のもと, 任意の自然数 $k \geq 2$, 任意の言語 $L \in \mathbf{PSPACE}$, 任意の多項式 λ にたいして, 関数 $\rho : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ と関数族 g_u, h_u で, $\rho, (g_u)_u$ は多項式時間計算可能であり, 各二進文字列 u にたいして以下を満たすものが存在する.

(i) $g_u : [0,1] \times [-1,1] \to \mathbf{R}, \quad h_u : [0,1] \to [-1,1]$;

(ii) 任意の $y \in [-1,1]$ にたいして $g_u(0,y) = g_u(1,y) = 0$;

(iii) h_u は g_u の常微分方程式の解;

(iv) $\mathcal{D}^{(0,k)} g_u$ は連続;

(v) 任意の $i \in \{0, \ldots, k\}$ にたいして $\left|\mathcal{D}^{(0,i)} g_u(t,y)\right| \leq \Lambda_u^{-i} 2^{-|u|}$;

(vi) $h_u(1) = 2^{-\rho(|u|)} L(u)$.

ただし $\Lambda_u = 2^{\lambda(|u|)}$.

証明. 仮定 4.2 より L を認識する $M = \langle d, P, Q, (G_u)_u, (H_u)_u \rangle$ を得る. さらに以下のように仮定する.

$$H_u(i, 2^{Q(|u|)}) = \begin{cases} L(u) & (i = P(|u|)) \\ 0 & (i < P(|u|)). \end{cases} \tag{4.1}$$

補題 3.4 の f にたいして, 定数 c を任意の $i \in \{0, \ldots, k\}$, 任意の $x \in [0,1]$ にたいして $|\mathcal{D}^{(i)} f(x)| \leq 2^c$ を満たす最小の自然数と定める. 定数 $d' = \lceil \log(4d+1) \rceil$, $B = 2^{Q(|u|)+k\lambda(|u|)+(k-1)+|u|+c+d'+k}$ とおき, 各 $(t,y) \in [0,1] \times [-1,1]$ にたいして, 自然数 N, $\theta \in [0,1]$, 整数 Y, $\eta \in [-1/4, 3/4]$ を $t = (T+\theta) 2^{-Q(|u|)}$, $y = (Y+\eta) B^{-(k+1)^{j_u(T)}}$ を満たすように定める.

そのとき,

$$g_u^*(t,Y) = \frac{2^{Q(|u|)} \pi \sin(\theta\pi)}{2B^{(k+1)^{(j_u(T)+1)}}} G_u\left(j_u(T), T, Y \bmod 2^{d'}\right) \tag{4.2}$$

とおき g_u, h_u を以下のように定義する.

$$g_u(t,y) = \begin{cases} g_u^*(t,Y) & (\eta \leq \frac{1}{4}) \\ (1 - f\left(2\eta - \frac{1}{2}\right) g_u^*(t,Y) + f\left(2\eta - \frac{1}{2}\right) g_u^*(t,Y+1) & (\eta > \frac{1}{4}) \end{cases} \tag{4.3}$$

$$h_u(t) = \sum_{i=0}^{P(|u|)} \frac{H_u(i,T)}{B^{(k+1)^i}} + \frac{1-\cos(\theta\pi)}{2} \cdot \frac{G_u(j_u(T), T, H_u(j_u(T), T))}{B^{(k+1)^{(j_u(T)+1)}}} \quad (4.4)$$

上記のように定義した g_u, h_u が補題 4.3 で求める性質を満たすことを示す. (i) , (ii) は自明. $(g_u)_u$ が多項式時間計算可能であることは補題によって示される.

h_u は g_u の常微分方程式の解であることを示す. まず h_u について解析する. (4.4) の一つ目の項において $i \le j_u(T)$ の合計は $B^{(k+1)^{j_u(T)}}$ の倍数. $i > j_u(T)$ の合計は,

$$\begin{aligned}
\sum_{i>j_u(T)}^{P(|u|)} \frac{H_u(i,T)}{B^{(k+1)^i}} &\le \sum_{i>j_u(T)}^{\infty} \frac{d-1}{B^{(k+1)^i}} \\
&\le \sum_{i>j_u(T)}^{\infty} \frac{d-1}{B^i} = \sum_{i>j_u(T)} \frac{d-1}{B^{i-j_u(T)}} B^{-j_u(T)} \\
&\le \sum_{i>j_u(T)} \frac{(d-1)}{(4d+1)^{i-j_u(T)}} B^{-j_u(T)} \\
&= \frac{d-1}{4d} B^{-j_u(T)}
\end{aligned}$$

二つ目の項の絶対値は

$$\left| \frac{1-\cos(\theta\pi)}{2} \cdot \frac{G_u(j_u(T), T, H_u(j_u(T), T))}{B^{(k+1)^{(j_u(T)+1)}}} \right| \le \frac{1}{B^{j_u(T)+1}} \le \frac{B^{-j_u(T)}}{4d+1} \quad (4.5)$$

よって $h_u(t) = (Y+\eta)B^{-j_u(T)}$ を満たす $\eta \in [-1/4, 1/4]$ が存在する. このとき,

$$Y = \sum_{i=0}^{j_u(T)} H_u(i,T) \cdot B^{j_u(T)-i}. \quad (4.6)$$

B は $2^{d'}$ の倍数なので, $Y \bmod 2^{d'} = H_u(j_u)$. (4.3) へ Y と η を代入すると,

$$\begin{aligned}
g_u(t, h_u(t)) &= \frac{2^{Q(|u|)}\pi\sin(\theta\pi)}{2B^{j_u(T)+1}} G_u(j_u(T), T, H_u(j_u(T), T)) \\
&= \mathcal{D}^{(1)} h_u(t). \quad (4.7)
\end{aligned}$$

よって h_u は g_u の常微分方程式の解.

$$\mathcal{D}^{(0,i)} g(t,y) = \quad (4.8)$$

$$\begin{cases} 0 & (\eta \le \frac{1}{4}) \\ 2^i B^{i\cdot(k+1)^{j_u(T)}} \cdot \mathcal{D}^{(i)} f\left(2\eta - \frac{1}{2}\right) \cdot (g_u^*(t, Y+1) - g_u^*(t,Y)) & (\eta > \frac{1}{4}) \end{cases}$$

よって $\mathcal{D}^{(0,i)}g$ は連続

(v) を示す. $|g_u^*| \le \left|\frac{2^{Q(|u|)}\pi\sin(\theta\pi)}{2B^{(k+1)^{(j_u(T)+1)}}}\right| \le \frac{2^{Q(|u|)+1}}{B^{(k+1)^{(j_u(T)+1)}}}$ より, $i=0$ において

$$|\mathcal{D}^{(0,0)}g| = |g| \le \frac{2^{Q(|u|)+1}}{B^{(k+1)^{(j_u(T)+1)}}} \le \frac{2^{Q(|u|)+1}}{B^{(k+1)}} \le 2^{-|u|} \tag{4.9}$$

$i \in \{1,\dots,k\}$ において,

$$\begin{aligned}
|\mathcal{D}^{(0,i)}g| &\le 2^i \cdot B^{i\cdot(k+1)^{j_u(T)}} \cdot 2^c \cdot (g_u^*(t,Y+1) - g_u^*(t,Y)) \\
&\le 2^{c+k} \cdot B^{k(k+1)^{j_u(T)}} \cdot 2 \cdot \frac{2^{Q(|u|)+1}}{B^{(k+1)^{(j_u(T)+1)}}} \\
&\le \frac{2^{Q(|u|)+c+k+2}}{B} \le 2^{-i\lambda(|u|)-|u|} = \Lambda_u^{-i}2^{-|u|}
\end{aligned} \tag{4.10}$$

(vii) は

$$\begin{aligned}
h_u(1) &= \frac{H_u(P(|u|), 2^{Q(|u|)})}{B^{(k+1)^{P(|u|)}}} \\
&= \frac{L(u)}{2^{(k+1)^{P(|u|)}(Q(|u|)+k\lambda(|u|)+|u|+c+d'+k)}}
\end{aligned} \tag{4.11}$$

より, $\rho(x) = (k+1)^{P(x)}(Q(x)+k\lambda(x)+x+c+d'+k)$ とおく. $P(|u|) = O(\log|u|)$ かつ P は多項式時間計算可能により, ρ は多項式時間計算可能. □

4.3 定理 4.1 の証明

証明. L を **PSPACE** 完全な言語, $\lambda(k) = 2k+2$ とおく. **PSPACE** 完全な言語 L にたいして補題 4.3 を用いて, ρ, $(g_u)_u$, $(h_u)_u$ を得る.

$$c_u = 1 - \frac{1}{2^{|u|}} + \frac{2\bar{u}+1}{\Lambda_u}, \qquad l_u^{\mp} = c_u \mp \frac{1}{\Lambda_u} \tag{4.12}$$

とおく. ただし $\bar{u} \in \{0,\dots,2^{|u|}-1\}$ は u を二進数として解釈した数.

関数 g, h を $t\in[0,1]$, $y \in \mathbf{R}$ にたいして, 下のように定義する.

$$g\left(l_u^{\mp} \pm \frac{t}{\Lambda_u}, \frac{y}{\Lambda_u}\right) = \begin{cases} \pm g_u(t,1) \pm \mathcal{D}^{(0,1)}g_u(t,1)(y-1) & (1<y) \\ \pm g_u(t,y) & (-1\le y\le 1) \\ \pm g_u(t,-1) \pm \mathcal{D}^{(0,1)}g_u(t,-1)(y+1) & (y<-1) \end{cases} \tag{4.13}$$

$$h\left(l_u^{\mp} \pm \frac{t}{\Lambda_u}\right) = \frac{h_u(t)}{\Lambda_u}. \tag{4.14}$$

任意の $y \in \mathbf{R}$ にたいして $g(1,y) = h(1) = 0$ と定義する.

g と h が定理 3.1 で求める関数の性質を満たすことを示す.

まず g が多項式時間計算可能であることを示す. 補題[2]を用いて示す. 各有理数 T, Y について $g(T,Y)$ を求めるとき, $T = l_u^{\mp} \pm t/\Lambda_u$, $Y = y/\Lambda_u$ を満たすような $u, \pm(\mp), t, y$ は, 多項式時間で計算可能である.

[2]準備で導入

次に g が y に関して微分可能であり, 導関数は y, t に関して連続になっていることをしめす. 各区間で第二引数に関して微分すると $i \in 1, \ldots, k$ で

$$\mathcal{D}^{(0,i)} g\left(l_u^{\mp} \pm \frac{t}{\Lambda_u}, \frac{y}{\Lambda_u}\right) = \begin{cases} \pm\Lambda_u^i \mathcal{D}^{(0,i)} g_u(t,1) & (1 < y) \\ \pm\Lambda_u^i \mathcal{D}^{(0,i)} g_u(t,y) & (-1 < y < 1) \\ \pm\Lambda_u^i \mathcal{D}^{(0,i)} g_u(t,-1) & (y < -1). \end{cases} \tag{4.15}$$

よって $\mathcal{D}^{(0,i)} g(t,1) = \pm\Lambda_u^i \mathcal{D}^{(0,i)} g_u(t,1)$, $\mathcal{D}^{(0,i)} g(t,-1) = \pm\Lambda_u^i \mathcal{D}^{(0,i)} g_u(t,-1)$ であり, y に関して i 回微分可能かつ i 階の導関数は連続.

t 軸方向への i 階の導関数の連続性について. 任意の $[0,1)$ の数はある u と $t \in [0,1]$ が存在して $l_u^{\mp} \pm t/\Lambda_u$ の形で表せる. $t \in (0,1)$ においては $\mathcal{D}^{(0,i)} g_u(t,y)$ は連続であるため, t 軸方向へ連続. $t = 0, 1$ のとき, $y \in [-1,1]$ にたいして $g_u(0,y) = g_u(1,y) = 0$ より $\mathcal{D}^{(0,i)} g_u(0,y) = \mathcal{D}^{(0,i)} g_u(1,y) = 0$ よって $t = 0, 1$ においても連続. $g(1,y) = 0$ より $\mathcal{D}^{(0,i)} g(1,y) = 0$. また $\left|\mathcal{D}^{(0,i)} g_u\right| \le \Lambda_u^{-i} 2^{-|u|}$ より,

$$\lim_{t \to 1-0} \left|\mathcal{D}^{(0,i)} g\right| = \lim_{|u| \to \infty} \left|\Lambda_u^i \mathcal{D}^{(0,i)} g_u\right| \le \lim_{|u| \to \infty} \left|2^{-|u|}\right| = 0. \tag{4.16}$$

よって $\mathcal{D}^{(0,i)} g$ は連続.

h が g の常微分方程式の解であることを示す. $h(0) = 0, \quad \mathcal{D}^{(1)} h(1) = 0 = g(1, h(1))$ は自明.

$$\begin{aligned} & h'(l_u^{\mp} \pm t/\Lambda_u) \\ & = \pm \frac{h_u'(t)}{\Lambda_u} \\ & = \pm g_u\left(t, h_u(t)\right) \\ & = g\left(l_u^{\mp} \pm \frac{t}{\Lambda_u}, \frac{h_u(t)}{\Lambda_u}\right) \\ & = g\left(l_u^{\mp} \pm \frac{t}{\Lambda_u}, h\left(l_u^{\mp} \pm \frac{t}{\Lambda_u}\right)\right). \end{aligned} \tag{4.17}$$

L は h に還元可能であることを示す.

$$h(c_u) = \frac{h_u(1)}{\Lambda_u} = \frac{L(u)}{2^{\lambda(|u|) + \rho(|u|)}} \tag{4.18}$$

つまり R, S, T を以下のように定義することで, 還元可能.

$$R(u,v) = v \tag{4.19}$$

$$S(u, 0^n) = \lfloor 2^n c_u \rfloor \text{ を表す文字列}, \tag{4.20}$$

$$T(u) = 0^{\lambda(|u|) + \rho(|u|)} \tag{4.21}$$

L は **PSPACE** 完全であるため, h も **PSPACE** 完全.

□

5 結論

5.1 課題

t に関する微分.

参考文献

[Kaw10] A. Kawamura. Lipschitz continuous ordinary differential equations are polynomial-space complete. *Computational Complexity*, 19(2):305–332, 2010.

[Ko91] K.I. Ko. *Complexity theory of real functions.* Birkhauser Boston Inc., 1991.