滑らかな常微分方程式の計算量

太田浩行* 河村彰星†

マルチン・ツィーグラー‡ カルステン・レースニク§

概要

常微分方程式 $h(0) = 0, h'(t) = g(t, h(t))$ の解 h の計算量と, 関数 g の計算量及び制限の関係は, この方程式を数値的に解くことの本質的な難しさを表しているとして調べられている. 河村は 2010 年, g を Lipschitz 条件を満たす多項式時間計算可能な関数に限っても解 h が PSPACE 困難になりうることを示した. 本稿ではさらに g を滑らかな関数へ制限した場合を考え, 次の結果を得た. 1 回連続微分可能な g に限っても解 h はやはり PSPACE 困難でありうる. また任意の k について, k 回連続微分可能な g に限っても解 h は計数階層 CH について困難でありうる.

1 序論

連続実関数 $g\colon [0,1] \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ に対して次の常微分方程式を考える.

$$h(0) = 0, \qquad Dh(t) = g(t, h(t)) \quad (t \in [0,1]) \tag{1.1}$$

ただし Dh は h の導関数. 本稿では g が多項式時間計算可能であるとき, 解 h がどれほど複雑でありうるかを考える. ここで多項式時間を初めとする計算量は**計算可能解析学** (Computable Analysis) [14] における概念であり, 実関数を指定された精度で近似する計算の困難さを測るものである (本稿では 2 節で説明する).

g に多項式時間計算可能であることの他に何の制限も設けない場合, 解 h (一般に一意でない) は計算不能でありうるため, 様々な制限の下で h の計算量が研究されている (表 1.1). この表では下に向うにつれて左列の条件が強まっており, g が (大域的) Lipschitz 条件を満たせば解 h が一意であるが, 表の第 3 行にある通りこのとき唯一解 h はちょうど PSPACE 困難でありうることがわかっている [3]. 本稿ではより強く g に滑らかさの仮定を置いたときの h の複雑さを調べる.

一般に数値計算においてはしばしば, 或る種の算法を適用できるようにするため, 或いは解析しやすくするために, 与えられる関数に何らかの滑らかさ (十分な回数微分可能であるなど) を仮定

* 東京大学, hota@is.s.u-tokyo.ac.jp

† 東京大学

‡ Martin Ziegler, ダルムシュタット工科大学

§ Carsten Rösnick, ダルムシュタット工科大学

表 1.1　g が多項式時間計算可能であるときの常微分方程式 (1.1) の解 h の計算量

制限	上界	下界
—	—	計算不可能になりうる [11]
h が g の唯一解	計算可能 [1]	任意の時間がかかりうる [6, 9]
g が Lipschitz 条件を満たす	多項式領域計算可能 [6]	PSPACE 困難になりうる [3]
g が $(\infty, 1)$ 回連続微分可能	多項式領域計算可能	PSPACE 困難になりうる (定理 1.1)
g が (∞, k) 回連続微分可能 (k は任意の定数)	多項式領域計算可能	CH 困難になりうる (定理 1.2)
g が解析的	多項式時間計算可能 [10, 8, 2]	—

すると都合のよいことがある．しかしこれは経験則にすぎず, 実際に滑らかさの仮定が解の複雑さを計算量の意味で抑える効果をもつのかについてはあまり論ぜられて来なかった.

本稿で扱う微分方程式についていえば, 極端なのは g が解析的である場合であり, このときにはテイラー級数による解法により, 表の最下列にあるように h は g と同じく多項式時間計算可能になる．本稿では Lipschitz 条件より強いが解析的よりは弱い滑らかさの仮定を考える (表の第 4, 5 行)．ここで (i, j) 回連続微分可能とは, 第一, 第二変数についてそれぞれ i 回, j 回微分でき, その導関数が連続であることである[*1].

定理 1.1. 多項式時間計算可能かつ $(\infty, 1)$ 回連続微分可能な実関数 $g\colon [0, 1] \times [-1, 1] \to \mathbf{R}$ であって, 方程式 (1.1) が PSPACE 困難な解 $h\colon [0, 1] \to \mathbf{R}$ を持つものが存在する.

定理 1.2. 任意の自然数 k に対して, 多項式時間計算可能かつ (∞, k) 回連続微分可能な実関数 $g\colon [0, 1] \times [-1, 1] \to \mathbf{R}$ であって, 方程式 (1.1) が CH 困難な解 $h\colon [0, 1] \to \mathbf{R}$ を持つものが存在する．但し CH $\subseteq$ PSPACE は計数階層 (3.2 節) である.

ここで $g\colon [0, 1] \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ でなく $g\colon [0, 1] \times [-1, 1] \to \mathbf{R}$ と書いたのは, 本稿では実関数の多項式時間計算可能性を, 定義域が有界閉領域のときにのみ定義するからである．このため h が区間 $[-1, 1]$ の外に値を取ることがあると方程式 (1.1) が意味をなさなくなるが, 定理 1.1 において h が解であるというのは, 任意の $t \in [0, 1]$ について $h(t) \in [-1, 1]$ が満たされることも含めて述べている．なお両定理とも Lipschitz 条件よりも強い仮定を置いているため, そのような h は g に対して, 存在すれば唯一である.

[*1] 二変数関数 g が $i + j \le k$ を満たす任意の自然数 i, j について (i, j) 回連続微分可能であることを k 回連続微分可能と言うこともあるが, 本稿では各変数について微分できる回数をこのように分けて書く.

本稿のように対象を滑らかな関数に制限することによる計算量の変化について, 常微分方程式以外の問題では次のような否定的な結果がある. 多項式時間計算可能な関数から積分により得られる関数は, もとの関数を無限回微分可能なものに限ってもなお一般の場合と同じく #P 困難である. [7, 定理 5.33]. 最大化でも同様に, 無限回微分可能な関数に限っても一般の場合と同じく NP 困難である [7, 定理 3.7][*2] (なお対象を解析的な関数に限ると, やはり級数を用いた議論により, これらは多項式時間計算可能になる). 一方常微分方程式については, 定理 1.2 は各 k についてそれぞれ成立つが, g が (∞, ∞) 回微分可能であると仮定したときの h の計算量については依然不明である.

記法

自然数の集合を $\mathbf{N}$, 実数の集合を $\mathbf{R}$, 有理数の集合を $\mathbf{Q}$ と表す.

A, B を $\mathbf{R}$ の有界閉区間とする. 実関数 $f \colon A \to \mathbf{R}$ に対して $|f| = \sup_{x \in A} f(x)$ と書く.

連続な一変数関数 $f \colon A \to \mathbf{R}$ が i 回連続微分可能であるとは, 導関数 $Df, D^2 f, \ldots, D^i f$ が存在し, すべて連続であることと定義する.

連続な二変数関数 $g \colon A \times B \to \mathbf{R}$ について第一変数についての偏導関数を $D_1 g$, 第二変数についての偏導関数を $D_2 g$ と表記する. 二変数関数 g が (i, j) **回連続微分可能**であるとは, 導関数 $D_1^n D_2^m g$ が, 任意の $0 \le n \le i$, $0 \le m \le j$ を満たす n, m において存在し連続であることと定義する. g が (i, j) 回連続微分可能であるとき, その導関数 $D_1^i D_2^j g$ を $D^{(i,j)} g$ と表記する. また任意の i について g が (i, j) 回連続微分可能であるとき, g は (∞, j) 回連続微分可能であると定義する.

2 実関数の計算量

2.1 実関数の計算

実数を文字列から文字列への関数で表す.

定義 2.1. 関数 $\phi \colon \{0\}^* \to \{0, 1\}^*$ が実数 $x \in \mathbf{R}$ の**名**であるとは, 任意の $n \in \mathbf{N}$ について, $\phi(0^n) = \lfloor x \cdot 2^n \rfloor$ または $\phi(0^n) = \lceil x \cdot 2^n \rceil$ を満たすこと.

ここで $\lfloor \cdot \rfloor$, $\lceil \cdot \rceil$ とはそれぞれ整数へ切り捨てた値, 及び切り上げた値を二進法で書いた文字列を表す. つまり実数 x の名は, 長さ n の文字列 0^n を受け取ると, 精度 n 桁の x の近似値を返す.

この名を読み書きする機構として, 神託チューリング機械 (以下単に機械という) を使う (図 2.1).

機械 M に, 文字列から文字列への関数 ϕ を神託として与え, 文字列 0^n を入力として与えたとき, 出力される文字列を $M^\phi(0^n)$ で表す. つまり M^ϕ をやはり文字列から文字列への関数とみる.

[*2] ただし葛 [7, 定理 3.7] の証明において関数 f を

$$f(x) = \begin{cases} u_s & \text{if not } R(s,t) \\ u_s + 2^{-(p(n)+2n+1)\cdot n} \cdot h_1(2^{p(n)+2n+1}(x - y_{s,t})) & \text{if } R(s,t) \end{cases}$$

に修正する必要がある.

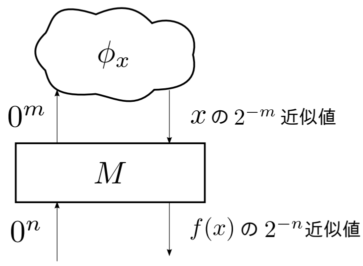

図 2.1　実関数 f を計算する機械 M

定義 2.2. A を $\mathbf{R}$ の有界閉区間とする．機械 M が実関数 $f\colon A \to \mathbf{R}$ を計算するとは, 任意の実数 $x \in A$, 任意の x の名 ϕ_x に対して, M^{ϕ_x} が $f(x)$ の名であること．

A が $\mathbf{R}^2$ の有界閉集合であるときにも, 神託を二つ取る機械を考えて同様に定義する．

ある実関数が**計算可能**であるとは, その関数を計算する神託機械が存在することである．同様に, ある実関数が**多項式時間計算可能**であるとは, その関数を計算する多項式時間神託機械が存在することである．

神託機械 M で f を計算するとき, 求める $f(x)$ の精度 n に対して, x の近似値に必要な精度 m が定まるため, 計算可能な関数は連続である．また n と m の対応関係と有理数における近似値を与えることで, 計算可能実関数や多項式時間計算可能実関数に対して, 神託機械を用いない同値な特徴付けが可能である．

補題 2.3. 実関数 $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ が多項式時間計算可能であることは, 多項式時間計算可能な関数 $\phi\colon (\mathbf{Q} \cap [0,1]) \times \{0\}^* \to \mathbf{Q}$ と多項式 $p\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ とが存在し, 任意の $d \in \mathbf{Q} \cap [0,1]$, $n \in \mathbf{N}$ について

$$|\phi(d, 0^n) - f(d)| \leq 2^{-n} \tag{2.1}$$

任意の $x, y \in [0,1]$, $m \in \mathbf{N}$ について

$$|x - y| \leq 2^{-p(m)} \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq 2^{-m} \tag{2.2}$$

が成立つことと同値である．但し $\mathbf{Q}$ の元は分母と分子を二進法の整数で書いた分数として表す．

2.2　帰着と困難性

言語 $L \subseteq \{0,1\}^*$ を関数 $L\colon \{0,1\}^* \to \{0,1\}$ と同一視し, $u \in L$ のとき $L(u) = 1$ とする．

定義 2.4 (帰着)**.** 言語 L が実関数 $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ に**帰着**するとは, 多項式時間計算可能な関数 S と多項式時間神託機械 M が存在し, 任意の文字列 u に対して以下を満たすことをいう (図 2.2).

- $S(u, \cdot)$ はある実数 x_u の名;

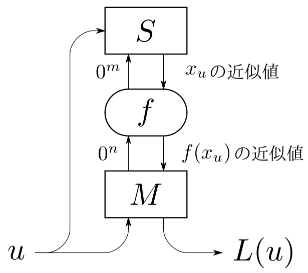

図 2.2　言語 L から関数 $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ への帰着

- $f(x_u)$ の任意の名 ϕ に対して

$$M^{\phi}(u) \text{ が受理} \leftrightarrow L(u) = 1.$$

この定義は河村による帰着の定義と形式上は異なるが, 帰着としての強さは等しい. 計算量 C に対して, 関数 f が C **困難**であるとは, C に属する任意の言語が f に帰着することをいう.

3　証明

本節では次の手順で定理 1.1, 1.2 を示す. まずある種の差分方程式の族が, PSPACE 困難ないし CH 困難であることを示す (3.1 節, 3.2 節). そしてこの差分方程式が, 滑らかさの条件を満たす (1.1) の形の微分方程式の族により模倣されることを示す (3.3 節). この族を一つの滑らかな微分方程式へ埋め込むことで, 定理にいう g, h を構成する (3.4 節).

このように微分方程式で差分方程式を模倣する考え方は, 既に Lipschitz 条件の場合の証明 [3] にも本質的には現れていたものであるが, 本稿ではより精密に, 滑らかさの条件が与える影響を調べるため, 差分方程式の構造に着目する. その結果, 2 回以上連続微分可能という制限の下でも, 差分方程式族の「深さ」が小さければ模倣できることが判り, そのことから CH 困難性が従う.

3.1　差分方程式

この節では微分方程式 (1.1) の離散版ともいうべき差分方程式を定義し, それが深さの制限に応じて PSPACE 困難ないし CH 困難であることを示す.

$[n] = \{0, \dots, n-1\}$ と書く. 関数 $G\colon [P] \times [Q] \times [R] \to \{-1, 0, 1\}$ と $H\colon [P+1] \times [Q+1] \to [R]$ が任意の $i \in [P]$, $T \in [Q]$ について以下を満たすとき (図 3.1), H を**差分方程式** G の解と呼ぶ.

$$H(i, 0) = H(0, T) = 0 \tag{3.1}$$

$$H(i+1, T+1) - H(i+1, T) = G(i, T, H(i, T)) \tag{3.2}$$

P, Q, R をそれぞれこの差分方程式の**段数**, **列数**, **欄の大きさ**と呼ぶ. (1.1) の初期条件 $h(0) = 0$ と方程式 $Dh(t) = g(t, h(t))$ がそれぞれ式 (3.1), (3.2) に似ており, 3.3 節ではこれを用いて微分方程式で差分方程式を模倣する.

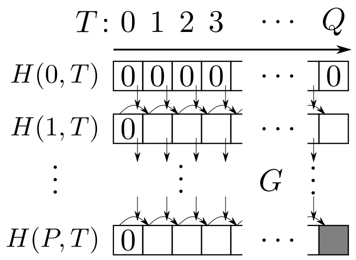

図 3.1　差分方程式 G とその解 H

文字列 u ごとに一つの差分方程式 G_u を与え, u が言語 L に属するかをその差分方程式によって計算することを考える．言語 L が関数族 $(G_u)_u$ によって**認識**されるとは, 各 G_u に対してその解 H_u が存在し, P_u, Q_u をその段数及び列数とおくと, $H_u(P_u, Q_u) = L(u)$ を満たすこととする．

族 $(G_u)_u$ が**一様**であるとは, G_u の段数, 列数, 欄の大きさそれぞれを u を入力とする関数と見做したときそれらが多項式時間計算可能であり, かつ与えられた (u, i, T, Y) から多項式時間で $G_u(i, T, Y)$ が計算できることと定義する．そのようなとき G_u の段数, 列数及び欄の大きさは, $|u|$ の多項式の指数 $(2^{\mathrm{poly}(|u|)})$ で抑えられる．G_u の段数を P_u と置くとき, 多項式 p が存在して $P_u \le p(|u|)$ が成立つとき, 族 $(G_u)_u$ は**多項式段**であるという．また定数 c, d が存在して $P_u \le c \log(|u|) + d$ が成立つとき, 族 $(G_u)_u$ は**対数段**であるという．この用語を使うと, 河村が Lipschitz 連続な場合の解析に用いた補題 [3, 補題 4.7] は次のように書ける．

補題 3.1. 多項式段の一様な差分方程式族によって認識される PSPACE 困難な言語が存在する[*3].

河村 [3] はこの多項式段の一様な差分方程式族を Lipschitz 連続な微分方程式で模倣することで, 表 1.1 第三行の結果を得た．本稿の定理 1.1 はこの構成に手を加えて, $(\infty, 1)$ 回微分可能な模倣に作り替えることにより (3.3, 3.4 節), やはり補題 3.1 から得られる．

本稿では更に, 対象とする差分方程式族を対数段に制限すれば, x について 2 回以上微分可能な関数によっても模倣できることを示し (3.3, 3.4 節), これと次の補題から定理 1.2 を得る．

補題 3.2. 対数段の一様な差分方程式族によって認識される CH 困難な言語が存在する．

計数階層 CH の定義と差分方程式の関係及び補題 3.2 の証明は 3.2 節にて述べる．

[*3] 差分方程式によって認識される言語のクラスはカープ帰着において閉じており, 多項式段一様な関数族によって認識される言語は PSPACE と一致する．

3.2　計数階層と対数段の差分方程式

計数階層 (Counting Hierarchy) CH は Wagner によって導入された計算量クラスである [13]. 多項式階層 PH が NP の神託機械を用いて

$$\Sigma_0^p = \mathsf{P} \qquad \Sigma_{n+1}^p = \mathsf{NP}^{\Sigma_n^p} \qquad \mathsf{PH} = \bigcup_n \Sigma_n^p \tag{3.3}$$

と定義されるのに対し, 計数階層は多項式階層の NP を PP で置き換えて

$$\mathsf{C}_0\mathsf{P} = \mathsf{P} \qquad \mathsf{C}_{n+1}\mathsf{P} = \mathsf{PP}^{\mathsf{C}_n\mathsf{P}} \qquad \mathsf{CH} = \bigcup_n \mathsf{C}_n\mathsf{P} \tag{3.4}$$

で定義される[*4]. PH ⊆ CH ⊆ PSPACE だが, いずれも真の包含か否かは未解決である.

各階層 $\mathsf{C}_n\mathsf{P}$ は次の完全問題 $\mathsf{C}_n B_{be}$ をもつ. 量化子 C を自然数 m, l 個の論理変数の組 X, 論理式 $\phi(X)$ について次のように定義する.

$$\mathsf{C}^m X\phi(X) \longleftrightarrow \sum_{X\in\{0,1\}^l} \phi(X) \geq m. \tag{3.5}$$

ただし論理式 $\phi(X)$ を関数 $\phi\colon \{0,1\}^l \to \{0,1\}$ と同一視し, $\phi(X)$ が成立つとき $\phi(X)=1$ とする. $\mathsf{C}^1 = \exists$, $\mathsf{C}^{2^l} = \forall$ であり, C は $\exists, \forall$ の一般化と言える. 言語 $\mathsf{C}_n B_{be}$ を次のように定義する.

$$\langle \phi(X_1,\dots,X_n), m_1,\dots,m_n\rangle \in \mathsf{C}_n B_{be} \longleftrightarrow \mathsf{C}^{m_1}X_1\cdots\mathsf{C}^{m_n}X_n\phi(X_1,\dots,X_n) \tag{3.6}$$

ただし X_i は論理変数の組, $\phi(X_1,\dots,X_n)$ は $X_1,\dots,X_n$ 以外の変数を持たない論理式とする.

補題 3.3 ([13, 定理 7])**.** $\mathsf{C}_n B_{be}$ は $\mathsf{C}_n\mathsf{P}$ 完全.

これらの問題 $\mathsf{C}_n B_{be}$ から問題 $\mathsf{C}_{\log} B_{be}$ を次で定義する.

$$\langle 0^{2^n}, u\rangle \in \mathsf{C}_{\log} B_{be} \longleftrightarrow u \in \mathsf{C}_n B_{be}. \tag{3.7}$$

この $\mathsf{C}_{\log} B_{be}$ が補題 3.2 で求める言語であること, つまり CH 困難かつ対数段一様関数族によって認識可能であることを示す.

補題 3.2 の証明. $\mathsf{C}_{\log} B_{be}$ が CH 困難であることを示す. 任意の CH の言語 A はある階層 $\mathsf{C}_n\mathsf{P}$ に属する. 補題 3.3 より任意の $u \in \{0,1\}^*$ について $u \in A \leftrightarrow f_n(u) \in \mathsf{C}_n B_{be}$ を満たす多項式時間関数 f_n が存在する.

$$u \in A \longleftrightarrow \langle 0^{2^n}, f_n(u)\rangle \in \mathsf{C}_{\log} B_{be}. \tag{3.8}$$

n は定数であるため $\langle 0^{2^n}, f_n(\cdot)\rangle$ は多項式時間関数. よって A は $\mathsf{C}_{\log} B_{be}$ に帰着する.

[*4] ただしこの特徴づけは Torán によるものであり, Wagner による定義とは異なる [12].

$\mathsf{C}_{\log}B_{be}$ を認識する対数段一様な関数族 $(G_u)_u$ を構成する．自然数 $n, m_1, \ldots, m_n$, 論理式 ϕ を $u = \langle 0^{2^n}, \langle \phi(X_1, \ldots, X_n), m_1, \ldots, m_n \rangle\rangle$ を満たすものとする (そのような $n, m_1, \ldots, m_n$, ϕ が存在しないとき $u \notin \mathsf{C}_{\log}B_{be}$).

$l_i = |X_i|$, $s_i = i + \sum_{j=1}^{i} l_j$ と表記する．任意の $i \in \{0, \ldots, n\}$ と $n - i$ 個の文字列 $Y_{i+1} \in \{0,1\}^{l_{i+1}}, \ldots, Y_n \in \{0,1\}^{l_n}$ について論理式 $\mathsf{C}^{m_i} X_i \cdots \mathsf{C}^{m_1} X_1 \phi(X_1, \ldots, X_i, Y_{i+1}, \ldots, Y_n)$ の真偽値を $\phi_i(Y_{i+1}, \ldots, Y_n)$ と表記すると, $\phi_0 = \phi$ かつ $\phi_n() = \mathsf{C}_{\log}B_{be}(u)$. 関数 $C^m \colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ を

$$C^m(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq m) \\ 0 & (x < m) \end{cases} \tag{3.9}$$

と定義すると

$$\phi_{i+1}(Y_{i+2}, \ldots, Y_n) = C^{m_{i+1}} \left(\sum_{X_{i+1} \in \{0,1\}^{l_i}} \phi_i(X_{i+1}, Y_{i+2}, \ldots, Y_n) \right). \tag{3.10}$$

$T \in \mathbf{N}$ に対し, T_i を T の 2 進表記における i 桁目, $T_{[i,j]} = T_{j-1}T_{j-2} \cdots T_{i+1}T_i$ と表記する．

G_u を $(i, T, Y) \in [n+1] \times [2^{s_n} + 1] \times [2^{|u|}]$ の範囲でを以下のように定義する．一段目つまり $i = 0$ ならば

$$G_u(0, T, Y) = (-1)^{T_{s_1}} \phi(T_{[1,s_1]}, T_{[s_1+1,s_2]}, \ldots, T_{[s_{n-1}+1,s_n]}) \tag{3.11}$$

$i \geq 1$ ならば

$$G_u(i, T, Y) = \begin{cases} (-1)^{T_{s_{i+1}}} C^{m_i}(Y) & (T_{[1,s_i+1]} = 10 \cdots 0) \\ 0 & (\text{otherwise}). \end{cases} \tag{3.12}$$

H_u を G_u から (3.1) と (3.2) を満たすように定める．任意の $i \in [n+1]$, $T \in [2^{s_n} + 1]$ について, $T_{[1,s_i+1]} = 10 \cdots 0$ ならば

$$G_u(i, T, H_u(i, T)) = (-1)^{T_{s_{i+1}}} \phi_i(T_{[s_i+1,s_{i+1}]}, \ldots, T_{[s_{n-1}+1,s_n]}) \tag{3.13}$$

を満たすことを i についての帰納法により示す.

$i = 0$ のとき, 式 (3.11) より成立つ．$i = j$ において成立つと仮定すると,

$$H_u(j+1, T) = \sum_{V=0}^{T-1} G_u(j, V, H_u(j, V)) = \sum_{V} (-1)^{V_{s_{j+1}}} \phi_j(V_{[s_j+1,s_{j+1}]}, \ldots, V_{[s_{n-1}+1,s_n]}) \tag{3.14}$$

$U \in \{0,1\}^*$ に対して, U を 2 進数と解釈した時の値を $\overline{U}$ と表記する．$V \leq \overline{T_{[s_{j+1}+1,s_n]} 0 \cdots 0}$ の範囲においては $\phi_j(V_{[s_j+1,s_{j+1}]}, \ldots, V_{[s_{n-1}+1,s_n]})$ と $-\phi_j(V_{[s_j+1,s_{j+1}]}, \ldots, V_{[s_{n-1}+1,s_n]})$ が互いに打ち消し合うので, $T_{[1,s_{j+1}+1]} = 10 \cdots 0$ により,

$$H_u(j+1, T) = \sum_{X \in \{0,1\}^{l_j}} \phi_j(X, T_{[s_{j+1}+1,s_{j+2}]}, \ldots, T_{[s_{n-1}+1,s_n]}) \tag{3.15}$$

式 (3.10) より

$$\begin{aligned} G_u(j+1, T, H_u(j+1, T)) &= (-1)^{T_{s_{j+2}}} C^{m_{j+1}}(H_u(j+1, T)) \\ &= (-1)^{T_{s_{j+2}}} \phi_{j+1}(T_{[s_{j+1}+1,s_{j+2}]}, \ldots, T_{[s_{n-1}+1,s_n]}) \end{aligned} \tag{3.16}$$

$i=j+1$ でも成立つため, 任意の $i\in[n+1]$ で (3.13) が成立つ.

(3.13) に $i=n$, $T=2^{s_n}$ を代入して $G_u(n,2^{s_n},H_u(n,2^{s_n}))=\phi_n()=\mathsf{C}_{\log}B_{be}(u)$ よって $H_u(n+1,2^{s_n}+1)=\mathsf{C}_{\log}B_{be}(u)$.

G_u の段数 $n+1$, 列数 $2^{s_n}+1$, 欄のサイズ $2^{|u|}$ はそれぞれ u より多項式時間計算可能かつ, $n+1\le\log(|0^{2^n}|)+1\le\log|u|+1$ より $(G_u)_u$ は対数段一様. □

段数が定数 i であるの一様関数族によって認識される言語クラスは, 計数階層の第 i 層 $\mathsf{C}_i\mathsf{P}$ を含み, $\mathsf{C}_{i+1}\mathsf{P}$ に含まれる. $\mathsf{C}_i\mathsf{P}$ は神託機械による定義 (3.4) の他に, C_iB_{be} へのカープ還元可能や, 確率的に遷移するよう拡張された交替性機械において交替が高々 i 回である機械によって受理される言語として特徴付けられる. また対数段一様な関数族によって認識される言語は, $\mathsf{C}_{\log}B_{be}$ へカープ還元される言語と一致し, 拡張された交替性機械で交替が高々対数オーダーであるものと等しい. そのようなクラスは CH を含むため, 補題 3.4, 定理 1.2 では CH 困難と述べるに留まっているが, CH と PSPACE の間のどこに位置するかは以前不明である.

3.3 差分方程式を模倣する関数族

次に前節で示した PSPACE または CH 困難な各差分方程式を滑らかな実関数で模倣可能であることを示す.

まず実関数の多項式時間計算可能性を実関数の族に拡張する. 文字列 u で添字づけられた実関数 $f_u\colon A\to\mathbf{R}$ の族 $(f_u)_u$ を機械 M が計算するとは, 任意の実数 $x\in A$, 任意の x の名 ϕ_x に対して, 文字列 v を $M^{\phi_x}(u,v)$ へ移す関数が, $f_u(x)$ の名であることをいう. 実関数族が多項式時間計算可能であるとは, その実関数族を計算する多項式時間神託機械が存在することである.

補題 3.4. CH 困難な言語 L と多項式 μ が存在し, 任意の正の整数 k, 任意の多項式 γ に対して, 多項式 ρ, 実関数族 $(g_u)_u,(h_u)_u$ で, $(g_u)_u$ は多項式時間計算可能であり, 各文字列 u に対して以下を満たすものが存在する.

(i) $g_u\colon[0,1]\times[-1,1]\to\mathbf{R}$, $h_u\colon[0,1]\to[-1,1]$.
(ii) $h_u(0)=0$ かつ任意の $t\in[0,1]$ について $Dh_u(t)=g_u(t,h_u(t))$.
(iii) g_u は (∞,k) 回連続微分可能.
(iv) 任意の $i\in\mathbf{N}$, $y\in[-1,1]$ に対して $D^{(i,0)}g_u(0,y)=D^{(i,0)}g_u(1,y)=0$.
(v) 任意の $i\in\mathbf{N}$, $j\in\{0,\ldots,k\}$ に対して $\left|D^{(i,j)}g_u(t,y)\right|\le 2^{\mu(i,|u|)-\gamma(|u|)}$.
(vi) $h_u(1)=2^{-\rho(|u|)}L(u)$.

補題 3.5. PSPACE 困難な言語 L と多項式 μ が存在し, $k=1$ のとき, 任意の多項式 γ に対して, 多項式 ρ, 実関数族 $(g_u)_u,(h_u)_u$ で, $(g_u)_u$ は多項式時間計算可能であり, 各文字列 u に対して補題 3.4 の (i) – (vi) を満たすものが存在する.

補題 3.4 は次のように証明する. まず補題 3.2 より, CH 困難な言語 L と, L を認識する $(G_u)_u$ 及び $(H_u)_u$ を得る. 各 $T=0,\ \ldots,\ 2^{q(|u|)}$ において $h_u(T/2^{q(|u|)})=\sum_i^{p(|u|)}H_u(i,T)/B^{d_u(i)}$ を満

たすように h_u を構成し, G_u から g_u を構成する. それらが微分方程式 $Dh_u(t) = g_u(t, h_u(t))$ を満たすことを差分方程式の性質により示し, $(g_u)_u$ の多項式時間計算可能性を $(G_u)_u$ の一様性から示す. 補題 3.5 も同様に, 補題 3.1 を用いて示す.

補題 3.4 では河村 [3, 補題 4.1] と違って g_u の滑らかさと導関数についての条件 (iii) – (v) が加わっている. これを満すように g_u を構成するため, 次の補題にいう関数 $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ を用いる.

補題 3.6 ([7, 補題 3.6])**.** 以下を満たす多項式時間計算可能で無限回微分可能な関数 $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ 及び多項式 s が存在する.

(i) $f(0) = 0$, $f(1) = 1$.
(ii) 任意の $n \geq 1$ について, $D^n f(0) = D^n f(1) = 0$.
(iii) f は単調増加.
(iv) 任意の $n \geq 1$ について, $D^n f$ は多項式時間計算可能.
(v) 任意の $n \geq 1$ について, $|D^n f| \leq s(n)$.

葛 [7, 補題 3.6] には条件 (v) を満たす多項式 s の存在が明示されていないが, 容易に示される.

ここではより難しく一般的な補題 3.4 のみ証明を行い, 補題 3.5 について証明は省略する.

補題 3.4 の証明. 補題 3.2 より CH 困難な言語 L を認識する対数段の一様な関数族 $(G_u)_u$ とその解 $(H_u)_u$ を得る.

[3, 補題 4.1] の証明の冒頭と同様に G_u, H_u を拡張することで多項式時間関数 p, j_u と多項式 q, r が存在し, 次が成立つとしてよい.

$$G_u\colon [p(|u|)] \times [2^{q(|u|)}] \times [2^{r(|u|)}] \to \{-1, 0, 1\} \tag{3.17}$$

$$H_u(i, 2^{q(|u|)}) = \begin{cases} L(u) & (i = p(|u|)) \\ 0 & (i < p(|u|)) \end{cases} \tag{3.18}$$

$$i \neq j_u(T) \to G_u(i, T, Y) = 0 \tag{3.19}$$

G_u は対数段であるため, $(k+1)^{p(x)} \leq \sigma(x)$ が成立つ多項式 σ が存在する.

G_u, H_u を模倣する g_u, h_u を構成する. 具体的には $h_u(T/2^{q(|u|)}) = \sum_{i=0}^{p(|u|)} H_u(i, T)/B^{d_u(i)}$ を満たすようにする. この B と関数 $d_u\colon [p(|u|)+1] \to \mathbf{N}$ を次で定める.

$$B = 2^{\gamma(|u|)+r(|u|)+s(k)+k+3} \qquad d_u(i) = \begin{cases} \sigma(|u|) & (i = p(|u|)) \\ (k+1)^i & (i < p(|u|)) \end{cases} \tag{3.20}$$

各 $(t, y) \in [0,1] \times [-1,1]$ に対して, $t = (T+\theta)2^{-q(|u|)}$, $y = (Y+\eta)B^{-d_u(j_u(T))}$ を満たす $N \in \mathbf{N}$, $\theta \in [0,1)$, $Y \in \mathbf{Z}$, $\eta \in [-1/4, 3/4)$ がそれぞれ唯一存在する. 関数 $\delta_{u,Y}\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ を次で定める.

$$\delta_{u,Y}(t) = \frac{2^{q(|u|)} Df(\theta)}{B^{d_u(j_u(T)+1)}} G_u\bigl(j_u(T), T, Y \bmod 2^{r(|u|)}\bigr) \tag{3.21}$$

関数 $g_u\colon [0,1] \times [-1,1] \to \mathbf{R}$ と $h_u\colon [0,1] \to [-1,1]$ を次で定義する. ただし f と多項式 s は補題

3.6 のものである.

$$g_u(t,y)=\begin{cases}\delta_{u,Y}(t) & (\eta\le\frac{1}{4})\\ (1-f(\frac{4\eta-1}{2}))\delta_{u,Y}(t)+f(\frac{4\eta-1}{2})\delta_{u,Y+1}(t) & (\eta>\frac{1}{4})\end{cases} \tag{3.22}$$

$$h_u(t)=\sum_{i=0}^{p(|u|)}\frac{H_u(i,T)}{B^{d_u(i)}}+\frac{f(\theta)}{B^{d_u(j_u(T)+1)}}G_u\bigl(j_u(T),T,H_u(j_u(T),T)\bigr) \tag{3.23}$$

この g_u, h_u が補題 3.4 の各性質を満たすことを示す. 性質 (ii) は [3, 補題 4.1] と同様に判る.

性質 (iii), すなわち g_u が (∞,k) 回連続微分可能であることを示す. (3.21), (3.22) より各 $i\in\mathbf{N}$ について

$$D^i\delta_{u,Y}(t)=\frac{2^{(i+1)q(|u|)}D^{i+1}f(\theta)}{B^{d_u(j_u(T)+1)}}G_u\left(j_u(T),\ T,\ Y \bmod 2^{r(|u|)}\right) \tag{3.24}$$

$$D^{(i,0)}g_u(t,y)=\begin{cases}D^i\delta_{u,Y}(t) & (-\frac{1}{4}<\eta<\frac{1}{4})\\ \left(1-f\left(\frac{4\eta-1}{2}\right)\right)D^i\delta_{u,Y}(t)+f\left(\frac{4\eta-1}{2}\right)D^i\delta_{u,Y+1}(t) & (\frac{1}{4}<\eta<\frac{3}{4})\end{cases} \tag{3.25}$$

$j\in\{1,\dots,k\}$ について,

$$D^{(i,j)}g_u(t,y)=\begin{cases}0 & (-\frac{1}{4}<\eta<\frac{1}{4})\\ (2B^{d_u(j_u(T))})^jD^jf(\frac{4\eta-1}{2})(D^i\delta_{u,Y+1}(t)-D^i\delta_{u,Y}(t)) & (\frac{1}{4}<\eta<\frac{3}{4})\end{cases} \tag{3.26}$$

境界においても連続であるため, g_u は (∞,j) 回連続微分可能であることが示された. また式 (3.25) に $t=0,1$ $(\theta=0)$ を代入して $D^{(i,0)}g_u(0,y)=D^{(i,0)}g_u(1,y)=0$. つまり (iv) が成立つ.

(v) を示す. $\mu(x,y)=(x+1)q(y)+s(x+1)$ とおく. この μ は k や γ に依存しない多項式である. 式 (3.21) より $|D^i\delta_{u,Y}(t)|\le 2^{(i+1)q(|u|)+s(i+1)}B^{-d_u(j_u(|u|)+1)}$. 任意の $i\in\mathbf{N}$, $j\in\{0,\dots,k\}$ について

$$|D^{(i,j)}g_u|\le 2^kB^{k\cdot j_u(T)}2^{s(k)}\cdot 2\cdot\frac{2^{(i+1)q(|u|)+s(i+1)}}{B^{d_u(j_u(|u|)+1)}}\le\frac{2^{\mu(i,|u|)+s(k)+k+1}}{B} \tag{3.27}$$

B のとり方により, $|D^{(i,j)}g_u|\le 2^{\mu(i,|u|)-\gamma(|u|)}$.

(vi) を示す. $\rho(x)=\sigma(x)\cdot(\gamma(x)+r(x)+s(k)+k+3)$ とおくと,

$$h_u(1)=\frac{H_u(p(|u|),2^{q(|u|)})}{B^{d_u(p(|u|))}}=\frac{L(u)}{2^{\sigma(|u|)\cdot(\gamma(|u|)+r(|u|)+s(k)+k+3)}}=2^{-\rho(|u|)}L(u). \tag{3.28}$$

□

補題 3.5 の証明では d_u を $d_u(i)=i$ と置き換え, PSPACE 困難な言語を認識する多項式段一様関数族 $(G_u)_u$ とその解 $(H_u)_u$ に対して, 式 (3.22), (3.23) により $(g_u)_u$ と $(h_u)_u$ を定義する. それらが補題 3.5 で求める性質を満たすことは, 補題 3.4 の証明と同様に示される.

3.4 主定理の証明

証明の概略を示す. 前の節の補題から得られる $(g_u)_u$ と $(h_u)_u$ を縮小して連結し滑らかな g と解 h を構成する. $[0,1)$ を無限個の区間 $[l_u^-,l_u^+]$ に分割し, その中心を c_u としたとき, 各区間

$[l_u^-, c_u]$ に h_u を縮小して埋め込む. $h_u(1)$ が後の計算に影響を与えないために, h_u を定義域方向について反転したものを区間 $[c_u, l_u^+]$ に埋め込むことで相殺する. つまりある多項式 ρ' に対して $h(l_u^-) = 0,\ h(c_u) = 2^{-\rho'(|u|)}L(u),\ h(l_u^+) = 0$ を満たすように h を構成する. また g と h が方程式 (1.1) を満たすよう, 各文字列 u に対応する区間に g_u を縮小して埋め込むことで g を構成する.

定理 1.1 は補題 3.5 を用いると, 定理 1.2 と同様に証明されるため, ここでは省略する.

定理 1.2 の証明. CH 困難な言語 L と多項式 μ を補題 3.5 を満たすものとする. まず

$$\lambda(x) = 2x + 2, \qquad \gamma(x) = x\mu(x, x) + x\lambda(x) \tag{3.29}$$

とおき, 各 u に対して

$$\Lambda_u = 2^{\lambda(|u|)}, \qquad c_u = 1 - \frac{1}{2^{|u|}} + \frac{2\bar{u} + 1}{\Lambda_u}, \qquad l_u^{\mp} = c_u \mp \frac{1}{\Lambda_u} \tag{3.30}$$

とおく. ただし $\bar{u} \in \{0, \ldots, 2^{|u|} - 1\}$ は u を二進数として解釈した数. γ に対して, 補題より ρ, $(g_u)_u$, $(h_u)_u$ を得る.

任意の $[0, 1)$ の実数は, 或る文字列 u, $\pm$, $t \in [0, 1]$ を以って $l_u^{\mp} \pm \frac{t}{\Lambda_u}$ と書ける. 関数 g, h を $t \in [0, 1)$, $y \in [-1, 1]$ に対して,

$$g\left(l_u^{\mp} \pm \frac{t}{\Lambda_u}, \frac{y}{\Lambda_u}\right) = \begin{cases} \pm \displaystyle\sum_{l=0}^{k} \frac{D^{(0,l)} g_u(t, 1)}{l!}(y - 1)^l & (1 < y) \\ \pm g_u(t, y) & (-1 \le y \le 1) \\ \pm \displaystyle\sum_{l=0}^{k} \frac{D^{(0,l)} g_u(t, -1)}{l!}(y + 1)^l & (1 < y) \end{cases} \tag{3.31}$$

$$h\left(l_u^{\mp} \pm \frac{t}{\Lambda_u}\right) = \frac{h_u(t)}{\Lambda_u}. \tag{3.32}$$

$t = 1$ のとき $g(1, y) = 0$, $h(1) = 0$ と定義する.

この g が多項式時間計算可能であり g と h が方程式 (1.1) を満たすことは, Lipschitz 条件の場合と同様に示されるため, 河村による証明を参照されたし [3, 定理 3.2]. ここでは特に g が (∞, k) 回連続微分可能であることのみ示す.

(∞, k) 回連続微分可能を示すため, 任意の $i \in \mathbf{N}$, $j \in \{0, \ldots, k\}$ にたいして導関数 $D_1^i D_2^j g$ が存在し連続であることを i と j の帰納法により示す.

$i = j = 0$ のとき, g が $[0, 1) \times [-1, 1]$ の範囲で連続であることはその定義 (3.31) と補題 3.4 (iv) により示される. 補題 3.4 の (v) より

$$\begin{aligned} \left| g\left(l_u^{\mp} \pm \frac{t}{\Lambda_u}, \frac{y}{\Lambda_u}\right) \right| &\le \sum_{l=0}^{k} |D^{(0,l)} g_u| (\Lambda_u + 1)^l \\ &\le k \cdot 2^{\mu(0,|u|) - \gamma(|u|)} \cdot (2\Lambda_u)^k \\ &\le 2^{k\lambda(|u|) + 2k + \mu(0,|u|) - \gamma(|u|)}. \end{aligned} \tag{3.33}$$

γ のとり方により, $|u| \to \infty$ のとき式 (3.35) は 0 に収束する. よって $\lim_{t\to 1-0} g(t,y) = g(1,y) = 0$. 以上により g は連続.

j に対する帰納法のステップと i に対する帰納法のステップを同時に示す. つまり導関数 $D_1^{i'} D_2^{j'} g$ が存在し連続であることを仮定して $i = i' = 0$, $j = j' + 1$ (resp. $i = i' + 1$, $j = j'$) としたとき, 導関数 $D_1^i D_2^j g$ が存在し連続であることを示す. 式 (3.31) の各場合分けの中の式は (∞, k) 回連続微分可能であり, 場合分けの区間の内部の点においては微分係数が定まる. 帰納法の仮定により導関数 $D_1^{i'} D_2^{j'} g$ が存在し連続であるため, 各境界 ($t = 0, 1$, $y = -1, 1$) 及び第一変数が 1 である領域において連続であることを示せば, 導関数 $D_1^i D_2^j g$ は存在し連続であることが示される. $t \in (0,1)$, $y \neq -1, 1$ において

$$D_1^i D_2^j g\left(l_u^{\mp} \pm \frac{t}{\Lambda_u}, \frac{y}{\Lambda_u}\right) = \begin{cases} \pm\Lambda_u^{(i,j)} \sum_{l=j}^{k} \frac{D^{(i,l)} g_u(t,1)}{(l-j)!}(y-1)^l & (1 < y) \\ \pm\Lambda_u^{(i,j)} D^{(i,j)} g_u(t,y) & (-1 < y < 1) \\ \pm\Lambda_u^{(i,j)} \sum_{l=j}^{k} \frac{D^{(i,l)} g_u(t,-1)}{(l-j)!}(y+1)^l & (1 < y). \end{cases} \tag{3.34}$$

よって

$$\begin{aligned} \lim_{y\to -1-0} D_1^i D_2^j g\left(l_u^{\mp} \pm \frac{t}{\Lambda_u}, \frac{y}{\Lambda_u}\right) &= \lim_{y\to -1+0} D_1^i D_2^j g\left(l_u^{\mp} \pm \frac{t}{\Lambda_u}, \frac{y}{\Lambda_u}\right), \\ \lim_{y\to 1-0} D_1^i D_2^j g\left(l_u^{\mp} \pm \frac{t}{\Lambda_u}, \frac{y}{\Lambda_u}\right) &= \lim_{y\to 1+0} D_1^i D_2^j g\left(l_u^{\mp} \pm \frac{t}{\Lambda_u}, \frac{y}{\Lambda_u}\right) \end{aligned}$$

が成立つため境界 $y = 1, -1$ においても導関数が存在し連続. 境界 $t = 0, 1$ において導関数が存在し連続であることは補題 3.4 (iv) により示される. 第一変数が 1 である領域において導関数が存在し連続であることを示す. 補題 3.4 の (v) より

$$\begin{aligned} \left| D_1^i D_2^j g\left(l_u^{\mp} \pm \frac{t}{\Lambda_u}, \frac{y}{\Lambda_u}\right) \right| &\leq \Lambda_u^{i+j} \sum_{l=j}^{k} |D^{(i,l)} g_u| (\Lambda_u + 1)^l \\ &\leq \Lambda_u^{i+j} \cdot k \cdot 2^{\mu(i,|u|) - \gamma(|u|)} \cdot (2\Lambda_u)^k \\ &\leq 2^{(i+j+k)\lambda(|u|) + 2k + \mu(i,|u|) - \gamma(|u|)}. \end{aligned} \tag{3.35}$$

γ のとり方により, $|u| \to \infty$ のとき式 (3.35) は 0 に収束する. よって $\lim_{t\to 1-0} D^{(i,j)} g(t,y) = D^{(i,j)} g(1,y) = 0$.

以上により g は (∞, k) 回連続微分可能. □

4 演算子の計算量

定理 1.1, 1.2 はいづれも関数 g を多項式時間計算可能と仮定した上で解 h の計算量について述べている. しかし微分方程式を「解く」困難さ, すなわち与えられた g から h を求める演算子の計算量は如何であろうか. この問に答えるにはまず実関数を実関数へ写す演算子の計算量を定義することを要する.

実数を入出力する関数の計算量を論ずるには, 実数を文字列関数で表した. 即ち $\mathbf{R}$ の各元の名として文字列関数を使ったのであり, その対応を $\mathbf{R}$ の表現という. 同じように実関数を入出力する演算子の計算量を論ずるには, 実関数を文字列関数で表す. つまり連続な実関数 $h\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ の空間 $\mathrm{C}[0,1]$ や, Lipschitz 連続な実関数 $g\colon [0,1] \times [-1,1] \to \mathbf{R}$ の空間 $\mathrm{C_L}[[0,1] \times [-1,1]]$ について, 表現を指定すればよい. 演算子の計算可能性や計算量はその表現に依ることになるが, ここでは [5] に従い, $\mathrm{C}[0,1]$ の表現として $\delta_\square$ を, $\mathrm{C_L}[[0,1] \times [-1,1]]$ の表現として $\delta_{\square\mathrm{L}}$ をそれぞれ用いる. $\delta_\square$ は関数空間 $\mathrm{C}[0,1]$ の表現として或る意味で自然な唯一のものであることが判っており [4], また $\delta_{\square\mathrm{L}}$ は $\delta_\square$ に Lipschitz 定数の情報を附加した表現である.

これらの表現では使われる文字列関数の長さが有界でないため, 神託機械の時間・空間を測る方法を二階多項式を使って拡張し, これに基いて多項式空間 **FPSPACE** などの計算量クラスや, 多項式時間 Weihrauch 帰着 $\leq_\mathrm{W}$ などの帰着, その下での困難性を定義する [5]. この枠組を上述の実関数の表現と組合せることで, 本稿の結果も以下の如く構成的な形で述べることができる.

実関数 $g \in \mathrm{C_L}[[0,1] \times [-1,1]]$ を, (1.1) の解 $h \in \mathrm{C}[0,1]$ に対応させる演算子 ODE を考える. ODE は $\mathrm{C_L}[[0,1] \times [-1,1]]$ から $\mathrm{C}[0,1]$ への部分写像である. [5, 定理 4.9] では表 1.1 第三行の証明を構成的に書き直すことで, ODE が $(\delta_{\square\mathrm{L}}, \delta_\square)$-**FPSPACE**-$\leq_\mathrm{W}$ 完全であることが示された. 本稿の定理 1.1 も同じように構成的に書き直すことができる. 即ち ODE を (∞, k) 回連続微分可能な入力に制限したものを ODE_k と書くと,

定理 4.1. ODE_1 は $(\delta_{\square\mathrm{L}}, \delta_\square)$-**FPSPACE**-$\leq_\mathrm{W}$ 完全.

これを示すには, 定理 1.1 の証明において関数の構成に使われた情報が入力から容易に得られることを確かめればよく, 新たな技巧を要しないから詳細は省略する. この構成的な主張は非構成的な主張よりも強いものであり [5, 補題 3.7, 3.8], 定理 1.1 は定理 4.1 の系として従う.

なお定理 1.2 も同様に構成的な形で成立ち, 各 $k \in \mathbf{N}$ について ODE_k は $(\delta_{\square\mathrm{L}}, \delta_\square)$-**CH**-$\leq_\mathrm{W}$ 困難であるが, この [5] の枠組における **CH** を定義するには相対化の扱いについて今少しの議論を要するので別稿で扱う.

謝辞

本研究を遂行し発表するにあたり河村は科学研究費補助金若手研究 (B) 23700009 による援助を受けた. 記して謝意を表する.

参考文献

[1] E.A. Coddington and N. Levinson. *Theory of Ordinary Differential Equations*. McGraw-Hill, 1955.

[2] A. Kawamura. Complexity of initial value problems, 2010. To appear in *Fields Institute Communications*.

[3] A. Kawamura. Lipschitz continuous ordinary differential equations are polynomial-space complete. *Computational Complexity*, 19(2):305–332, 2010.

[4] A. Kawamura. On function space representations and polynomial-time computability. Dagstuhl Seminar 11411: Computing with Infinite Data, 2011. http://www-imai.is.s.u-tokyo.ac.jp/~kawamura/dagstuhl.pdf.

[5] A. Kawamura and S. Cook. Complexity theory for operators in analysis. In *Proceedings of the 42nd ACM Symposium on Theory of Computing*, pages 495–502. ACM, 2010.

[6] K.I. Ko. On the computational complexity of ordinary differential equations. *Information and Control*, 58(1-3):157–194, 1983.

[7] K.I. Ko. *Complexity Theory of Real Functions*. Birkhäuser Boston, 1991.

[8] K.I. Ko and H. Friedman. Computing power series in polynomial time. *Advances in Applied Mathematics*, 9(1):40–50, 1988.

[9] W. Miller. Recursive function theory and numerical analysis. *Journal of Computer and System Sciences*, 4(5):465–472, 1970.

[10] N.T. Müller. Uniform computational complexity of Taylor series. *Automata, Languages and Programming*, pages 435–444, 1987.

[11] M.B. Pour-el and I. Richards. A computable ordinary differential equation which possesses no computable solution. *Annals of Mathematical Logic*, 17(1-2):61–90, 1979.

[12] J. Torán. Complexity classes defined by counting quantifiers. *Journal of the ACM (JACM)*, 38(3):752–773, 1991.

[13] K.W. Wagner. The complexity of combinatorial problems with succinct input representation. *Acta Informatica*, 23(3):325–356, 1986.

[14] Klaus Weihrauch. *Computable Analysis: An Introduction.* Texts in Theoretical Computer Science. Springer, 2000.