

## 滑らかな常微分方程式の計算量

太田浩行<sup>\*</sup>      河村彰星<sup>†</sup>      マルチン・ツィーグラ<sup>‡</sup>  
カルステン・レースニク<sup>§</sup>

2012/1/31

### 概要

多項式時間計算可能で一回微分可能関数の常微分方程式は, PSPACE 完全な解を持ちうること, 及びある仮定のもと, 多項式時間計算可能で任意回微分可能関数の常微分方程式は, PSPACE 完全な解を持ちうることを示す. これは河村が示した Lipschitz 条件を満たす常微分方程式の解が PSPACE 完全たりうるという結果の拡張である.

## 1 導入

### 1.1 計算可能解析

計算可能解析 (Computable Analysis) とは計算可能性理論や計算量理論の手法を用いて解析学を行うものである.

計算可能解析における, 実数や実関数のモデル化を形式張らずに説明する. まず実数  $x$  は  $x$  へ収束する有理数の列  $\{r_n\}$  で表現される. ここで収束することの条件として  $|r_n - x| \leq 2^{-n}$  を用いる. 有理数  $r_n$  は符号化可能であるため, 実数は入力として精度を受け取り, 近似値を返す関数としてモデル化できる.

実数を関数としてモデル化するため, 実関数  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  は関数を関数へ写す高階関数となる. よって計算可能なモデル化は単純にはできない. そこで関数  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  が計算可能であるとは, 入力として実数  $x$  と求める精度  $n$  を与えられ, 有理数  $s_n$  で  $|s_n - f(x)| \leq 2^{-n}$  を満たすものを出力する機械  $M$  が存在することとする.  $x$  は有限サイズの表現を持たないため,  $M$  が直接  $x$  を読むことはできない. そこで  $M$  を神託機械とし, 近似値を返す関数を神託として与える. この神託機械の資源を制限することで, 多項式時間 (P) や多項式領域 (PSPACE) に対応する実関数のクラスを定義できる. 厳密な定義については 2 章において定義する.

---

<sup>\*</sup> 東京大学

<sup>†</sup> 第 1 著者に同じ

<sup>‡</sup> ダルムシュタット工科大学

<sup>§</sup> 第 3 著者に同じ

表 1.1: 関連研究

制限	上界	下界
—	—	計算不可能たりうる [?]
$h$ が $g$ の唯一解	計算可能 [?]	任意の時間がかかりうる [?]
Lipschitz 条件を満たす	多項式領域	多項式領域困難になりうる [Kaw10]
$\mathcal{D}^{(0,1)}g$ が連続	多項式領域	多項式領域困難たりうる [本紙]
$\mathcal{D}^{(0,i)}g$ が連続	多項式領域	ある仮定のもと多項式領域困難たりうる [本紙]
$g$ が解析的	多項式時間 [?]	—

## 1.2 問題と関連研究

連続実関数  $g : [0, 1] \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  にたいして以下のような常微分方程式を考える.

$$h(0) = 0, \quad h'(t) = g(t, h(t)) \quad (t \in [0, 1]) \quad (1.1)$$

常微分方程式の難しさを, “ $g$  を単純な実関数としたとき,  $h$  がどれほど複雑な実関数になりうるか” という問題によって評価する.

様々な制限のもと常微分方程式の解の計算量が研究されている [表 1.1].  $g$  に何の制限も設けない場合, その解は計算不能たりうる.  $g$  が唯一解を持つよう制限した場合, 解は計算可能であるが, 任意の時間がかかりうる. Lipschitz 条件は常微分方程式の解の一意性を保証する重要な条件である. Lipschitz 条件を満たすとき, 解は多項式領域計算可能であり, 多項式領域計算完全たりうる.  $g$  が解析的であるとき, 常微分方程式の解も解析的となるため, 多項式時間計算可能である.

我々は制限と下界の関係について調べ, 以下の知見を得た.

**定理 1.1.** 多項式時間実関数  $g : [0, 1] \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  で, 第二変数について連続的微分可能であり,  $g$  の常微分方程式 (1.1) の解  $h$  が PSPACE 完全であるものが存在する.

**定理 1.2.** 仮定 4.1 のもと, 任意の自然数  $k \geq 2$  にたいして, 多項式時間実関数  $g : [0, 1] \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  で, 第二変数について  $k$  階連続的微分可能であり,  $g$  の常微分方程式 (1.1) の解  $h$  が PSPACE 完全であるものが存在する.

二変数関数  $g$  が  $(i, j)$  階連続的微分可能であるとは, 第一変数について  $i$  回, 第二変数について  $j$  回微分可能であり, その導関数が連続であること. こ

れは任意の  $i_1, \dots, i_n (\sum i_j = k)$  にたいして,  $\mathcal{D}^{(i_1, \dots, i_n)}$  が連続である関数類  $C^k$  とは異なり (包含される),  $g$  を注目する変数のみの関数とみなしたときの連続的微分可能とも異なる.

また定理 1.2 において任意の  $k$  に対して  $k$  階微分可能な関数を考えているが, 一つ関数が任意の  $k$  にたいして  $k$  階微分ではない. つまり  $g$  が無限回微分可能であると制限しているわけではないことに留意したい. 無限回微分可能な関数に対する常微分方程式の計算量は今後の課題である.

## 2 準備

### 2.1 表記

(二進) 自然数の集合を  $\mathbf{N}$ , 整数の集合を  $\mathbf{Z}$ , 実数の集合を  $\mathbf{R}$ , 有理数の集合を  $\mathbf{Q}$ ,  $0^{\mathbf{N}} = \{0^n \mid n \in \mathbf{N}\}$  と表記する.

一変数関数  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  が  $i$  回微分可能であるとき, その  $i$  階導関数を  $\mathcal{D}^{(i)}f$  と表記する. 同様に二変数関数  $g$  の第一変数にたいして  $i$  階, 第二変数にたいして  $j$  階の導関数を  $\mathcal{D}^{(i,j)}g$  と表記する.

### 2.2 実数の名

実数は無限の長さを持つため, 有限な文字列に符号化することが不可能である. そこで実数を計算可能なモデルで扱うために, 求める精度を与えると, 実数の近似値をその精度で返すような関数を考える.

**定義 2.1 (実数の名).** 関数  $\phi: 0^{\mathbf{N}} \rightarrow \mathbf{Z}$  が実数  $x \in [0, 1]$  の名であるとは,  $\phi(0^n) = \lfloor x \cdot 2^n \rfloor$  または  $\phi(0^n) = \lceil x \cdot 2^n \rceil$  を満たすこと.

### 2.3 計算可能実関数, 多項式時間実関数

実関数は入力として実数を受け取るが, 実数を符号化することは不可能である. そこで入力の実数は神託として与える. そして実関数のモデルを, 求める精度を入力として受け取り関数の入力である実数の名を神託とし, 関数の値の近似値を返すような神託機械として定義する [図 2.3]. より厳密には以下のように定義する.

**定義 2.2.** 神託機械  $M$  が実関数  $f: A \rightarrow \mathbf{R}$  を計算するとは, 任意の実数  $x \in A$ , 任意の  $x$  の名  $\phi_x$  にたいして,  $M^{\phi_x}$  が  $f(x)$  の名であること.

多変数関数のモデルも, 変数と同じ数だけ神託を持つ神託機械によって同様に定義される.

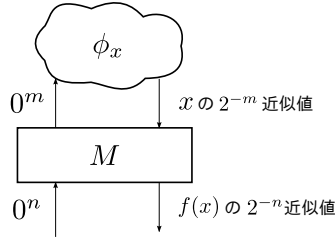


図 2.1: 実関数のモデル化

ある実関数が計算可能であるとは、その関数を計算する神託機械が存在することである。同様に、ある実関数が多項式時間計算可能であるとは、その関数を計算する多項式時間神託機械が存在することである。

神託機械  $M$  がある実関数族  $(f_u)_u$  を計算するとは、入力  $u$  を受けったとき、 $M_u$  が  $f_u$  を計算することである。実関数族が多項式時間計算可能であるとは、その実関数族を計算する多項式時間神託機械が存在することである。

神託機械  $M$  で  $f$  を計算するとき、求める精度  $n$  にたいして、 $x$  の近似値に必要な精度  $m$  が定まるため、計算可能な関数は連続である。また  $n$  と  $m$  の対応関係と有理数における近似値を与えることで、計算可能実関数や多項式時間計算可能実関数にたいして、神託機械を用いない同値な特徴付けが可能である。

**補題 2.3.** 実関数  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  にたいして、 $\phi_f : (\mathbf{Q} \cap [0, 1]) \times 0^{\mathbf{N}} \rightarrow \mathbf{Q}$ ,  $m_f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$  は

$$|\phi_f(d, 0^n) - f(d)| \leq 2^{-n} \quad (d \in (\mathbf{Q} \cap [0, 1]), \quad n \in \mathbf{N}) \quad (2.1)$$

$$|x - y| \leq 2^{-p_f(m)} \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq 2^{-m} \quad (x, y \in [0, 1], \quad m \in \mathbf{N}) \quad (2.2)$$

をみたす関数とする。

- $f$  が計算可能であることは、計算可能な  $\phi_f, m_f$  が存在することと同値である。
- $f$  が多項式時間計算可能であることは、多項式時間計算可能な  $\phi_f$ , 多項式  $m_f$  が存在することと同値である。

## 2.4 完全性

関数の下限を示すために、困難及び完全性を定義する。言語  $L$  が実関数  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  に多項式時間還元可能であるとは、 $f$  を計算する機械をブラッ

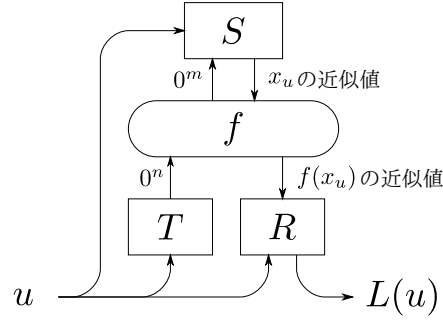


図 2.2: 言語  $L$  から関数  $f$  への還元

クボックスとして, 入力  $u$  にたいして, 精度を  $f$  に与え, ある実数  $x_u$  の神託を模倣し,  $f(x_u)$  の近似値から,  $u$  が  $L$  に含まれるか否かを多項式時間で計算可能であることである [図 2.4]. 厳密には以下のように定義する.

**定義 2.4** (多項式時間還元可能). 言語  $L$  が実関数  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  に多項式時間還元可能であるとは, 任意の文字列  $u$  にたいして, 以下を満たす実数  $x_u \in [0, 1]$  多項式時間計算可能な関数  $R, S, T$  が存在すること.

- $R : N \times N \rightarrow \{0, 1\}$ ,  $S : N \times 0^N \rightarrow N$ ,  $T : N \rightarrow 0^N$ ;
- $S(u, \cdot)$  は実数  $x_u$  の名;
- 任意の  $f(x_u)$  の名  $\phi$  にたいして

$$L(u) = R(u, \phi(T(u))).$$

計算量  $C$  にたいして, 関数  $f$  が  $C$  困難であるとは, 任意の  $C$  に含まれる言語が  $f$  に多項式時間還元可能であることである. さらに  $f$  が  $C$  に含まれるとき, つまり  $C$  に対応する神託機械で  $f$  を計算するものが存在するとき,  $f$  は  $C$  完全であると定義する.

### 3 微分可能関数と常微分方程式

#### 3.1 離散初期値問題

初期値問題の離散バージョンが PSPACE 完全であるところから始める. 離散初期値問題とは定数  $d$ , 多項式  $P, Q : N \rightarrow N$ , 関数族  $(G_u)_u$  の組  $\langle d, P, Q, (G_u)_u \rangle$  で以下の制限を満たすものである.

$$(G_u)_u \text{ は多項式時間計算可能} \quad (3.1)$$

$$G_u : [P(|u|)] \times \left[2^{Q(|u|)}\right] \times [d] \rightarrow \{-1, 0, 1\} \quad (3.2)$$

また関数族  $(H_u)_u$  が以下を満たすとき,  $(H_u)_u$  を離散初期値問題  $\langle d, P, Q, (G_u)_u \rangle$  の解と呼ぶ.

$$H_u : [P(|u|) + 1] \times \left[2^{Q(|u|)}\right] \rightarrow [d] \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} H_u(i, 0) &= H_u(0, T) = 0, \\ H_u(i + 1, T + 1) &= H_u(i + 1, T) + G_u(i, T, H_u(i, T)) \\ &\quad \left( i \in [P(|u|)], T \in \left[2^{Q(|u|)}\right] \right) \end{aligned} \quad (3.4)$$

離散初期値問題が言語  $L$  を認識するとはその解  $(H_u)_u$  が任意の文字列  $u$  で  $H_u(P(|u|), 2^{Q(|u|)}) = L(u)$  を満たすこと.

河村の論文において離散初期値問題が PSPACE 完全であることが示されている.

**補題 3.1** (補題 4.7. [Kaw10]). 任意の言語  $L \in \text{PSPACE}$  にたいして,  $L$  を認識する離散初期値問題が存在する.

もと論文では  $d = 4$  であったが, 後の議論との統一のために一般化する.

### 3.2 離散初期値問題を模倣する関数族

任意の言語  $L \in \text{PSPACE}$ , 文字列  $u$  にたいして, 上記の計算を模倣し  $L(u)$  を計算する微分可能な実関数  $g_u$  を構成する.

**補題 3.2.** 任意の言語  $L \in \text{PSPACE}$ , 多項式  $\lambda$  にたいして, 多項式  $\rho$ , 関数族  $(g_u)_u, (h_u)_u$  で,  $(g_u)_u$  は多項式時間計算可能であり, 各二進文字列  $u$  にたいして以下を満たすものが存在する.

- (i)  $g_u : [0, 1] \times [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $h_u : [0, 1] \rightarrow [-1, 1]$ ;
- (ii) 任意の  $y \in [-1, 1]$  にたいして  $g_u(0, y) = g_u(1, y) = 0$ ;
- (iii)  $h_u$  は  $g_u$  の常微分方程式 ?? の解;
- (iv)  $\mathcal{D}^{(0,1)} g_u$  は連続;
- (v)  $|\mathcal{D}^{(0,1)} g_u| \leq 2^{-\lambda(|u|)-|u|}$ ;
- (vi)  $h_u(1) = 2^{-\rho(|u|)} L(u)$ .

この補題の証明の前に, 葛によって示されている滑らかな多項式時間実関数  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  を導入する.

補題 3.3 (補題 3.6. [Ko91]). 以下を満たす多項式時間無限回微分可能実関数  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  が存在する.

- (i)  $f(0) = 0, \quad f(1) = 1;$
- (ii) 任意の  $n \geq 1$  で  $f^{(n)}(0) = f^{(n)}(1) = 0;$
- (iii)  $f$  は  $[0, 1]$  で単調増加;
- (iv) 任意の  $n \geq 1$  で  $f^{(n)}$  は多項式時間実関数.

補題 3.2 の証明. 補題 3.1 から,  $L$  を認識する離散初期値問題  $\langle d, P, Q, (G_u)_u, (H_u)_u \rangle$  とその解  $(H_u)_u$  を得る. 各ステップを  $P(u)$  個に分割することで,  $G_u(i, T, Y) \neq 0$  を満たす  $i$  を各  $T$  にたいしてたかだか 1 つにすることができる. そのような  $i$  のことを  $j_u(T)$  と表現する. 任意の  $i$  で  $G_u(i, T, Y) = 0$  ならば  $j_u(T)$  は任意の値を取るとする. さらに以下を満たすとしても一般性を失わない.

$$H_u(i, 2^{Q(|u|)}) = \begin{cases} L(u) & (i = P(|u|)) \\ 0 & (i < P(|u|)) \end{cases} \quad (3.5)$$

$$G_u(i, 2 \cdot 2^{Q(|u|)} - 1 - T, Y) = \begin{cases} 0 & (i = P(|u|) - 1) \\ -G_u(i, T, Y) & (i < P(|u|) - 1) \end{cases} \quad (3.6)$$

$$H_u(i, 2 \cdot 2^{Q(|u|)} - T) = \begin{cases} H_u(P(|u|), 2^{Q(|u|)}) & (i = P(|u|)) \\ H_u(i, T) & (i < P(|u|)) \end{cases} \quad (3.7)$$

補題 3.3 の  $f$  にたいして, 定数  $c$  を任意の  $x \in [0, 1]$  にたいして  $|\mathcal{D}^{(1)}f(x)| \leq 2^c$  を満たす最小の自然数と定める. 定数  $d' = \lceil \log(4d+1) \rceil$ ,  $B = 2^{\lambda(|u|)+Q(|u|)+|u|+c+d'}$  とおき, 各  $(t, y) \in [0, 1] \times [-1, 1]$  にたいして, 自然数  $N$ ,  $\theta \in [0, 1]$ , 整数  $Y$ ,  $\eta \in [-1/4, 3/4]$  を  $t = (T + \theta)2^{-Q(|u|)}$ ,  $y = (Y + \eta)B^{-j_u(T)}$  を満たすように定める.

そのとき,

$$g_u^*(t, Y) = \frac{2^{Q(|u|)} \pi \sin(\theta \pi)}{2B^{j_u(T)+1}} G_u(j_u(T), T, Y \bmod 2^{d'}) \quad (3.8)$$

とおき  $g_u, h_u$  を以下のように定義する.

$$g_u(t, y) = \begin{cases} g_u^*(t, Y) & (\eta \leq \frac{1}{4}) \\ (1 - f(2\eta - 1/2))g_u^*(t, Y) + f(2\eta - 1/2)g_u^*(t, Y + 1) & (\eta > \frac{1}{4}) \end{cases} \quad (3.9)$$

$$h_u(t) = \sum_{i=0}^{P(|u|)} \frac{H_u(i, T)}{B^i} + \frac{1 - \cos(\theta \pi)}{2} \cdot \frac{G_u(j_u(T), T, H_u(j_u(T), T))}{B^{j_u(T)+1}} \quad (3.10)$$

上記のように定義した  $g_u, h_u$  が補題 3.2 で求める性質を満たすことを示す.  
(i), (ii) は自明.  $(g_u)_u$  が多項式時間計算可能であることは補題によって示される.

$h_u$  は  $g_u$  の常微分方程式の解であることを示す. まず  $h_u$  について解析する.  
(3.10) の一つ目の項において  $i \leq j_u(T)$  の合計は  $B^{j_u(T)}$  の倍数.  $i > j_u(T)$  の合計は,

$$\begin{aligned} \sum_{i > j_u(T)} \frac{H_u(i, T)}{B^i} &\leq \sum_{i > j_u(T)} \frac{d-1}{B^i} = \sum_{i > j_u(T)} \frac{d-1}{B^{i-j_u(T)}} B^{-j_u(T)} \\ &\leq \sum_{i > j_u(T)} \frac{(d-1)}{(4d+1)^{i-j_u(T)}} B^{-j_u(T)} \\ &= \frac{d-1}{4d} B^{-j_u(T)} \end{aligned}$$

二つ目の項の絶対値は

$$\left| \frac{1 - \cos(\theta\pi)}{2} \cdot \frac{G_u(j_u(T), T, H_u(j_u(T), T))}{B^{j_u(T)+1}} \right| \leq \frac{1}{B^{j_u(T)+1}} \leq \frac{B^{-j_u(T)}}{4d+1} \quad (3.11)$$

よって  $h_u(t) = (Y + \eta)B^{-j_u(T)}$  を満たす  $\eta \in [-1/4, 1/4]$  が存在する. このとき,

$$Y = \sum_{i=0}^{j_u(T)} H_u(i, T) \cdot B^{j_u(T)-i}. \quad (3.12)$$

$B$  は  $2^{d'}$  の倍数なので,  $Y \bmod 2^{d'} = H_u(j_u)$ . (3.9) へ  $Y$  と  $\eta$  を代入すると,

$$\begin{aligned} g_u(t, h_u(t)) &= \frac{2^{Q(|u|)} \pi \sin(\theta\pi)}{2B^{j_u(T)+1}} G_u(j_u(T), T, H_u(j_u(T), T)) \\ &= \mathcal{D}^{(1)} h_u(t). \end{aligned}$$

よって  $h_u$  は  $g_u$  の常微分方程式の解.

$g_u$  は  $y$  に関して微分可能であり,

$$\mathcal{D}^{(0,1)} g_u(t, y) = \begin{cases} 0 & (\eta \leq \frac{1}{4}) \\ 2B^{j_u(T)} \mathcal{D}^{(1)} f(2\eta - 1/2) \cdot (g_u^*(t, Y+1) - g_u^*(t, Y)) & (\eta > \frac{1}{4}) \end{cases} \quad (3.13)$$

よって  $\mathcal{D}^{(0,1)} g$  は連続.

$|g_u^*(t, Y)| \leq 2^{Q(|u|)} \pi / (2B^{j_u(T)+1}) \leq 2^{Q(|u|)+1} / B^{j_u(T)+1}$  より,

$$\begin{aligned} \left| \mathcal{D}^{(0,1)} g_u \right| &\leq 2B^{j_u(T)} \cdot |\mathcal{D}^{(1)} f(2\eta - 1/2)| \cdot 2 \cdot \frac{2^{Q(|u|)+1}}{B^{j_u(T)+1}} \\ &\leq \frac{2B^{j_u(T)} \cdot 2^c \cdot 2^{Q(|u|)+2}}{B^{j_u(T)+1}} \\ &= \frac{2^{Q(|u|)+c+3}}{B} \leq 2^{-\lambda(|u|)-|u|} \end{aligned} \quad (3.14)$$



(vii) は

$$\begin{aligned} h_u(1) &= \frac{H_u(P(|u|), 2^{Q(|u|)})}{B^{P(|u|)}} \\ &= \frac{L(u)}{2^{P(|u|)(\lambda(|u|)+Q(|u|)+|u|+c+d')}} \end{aligned} \quad (3.15)$$

より,  $\rho(k) = P(k)(\lambda(k) + Q(k) + |u| + c + d')$  とおくと成り立つ.  $\square$

### 3.3 定理 1.1 の証明

証明.  $L$  を PSPACE 完全な言語,  $\lambda(k) = 2k + 2$  とおく. PSPACE 完全な言語  $L$  にたいして補題 3.2 を用いて,  $\rho, (g_u)_u, (h_u)_u$  を得る.  $(g_u)_u$  は多項式時間実関数族なので,  $|g_u(t, y)| \leq 2^{\gamma(|u|)-|u|}$  を満たすような多項式  $\gamma$  が存在する. 各  $u$  にたいして

$$\Lambda_u = 2^{\lambda(|u|)}, \quad \Gamma_u = 2^{\gamma(|u|)} \quad (3.16)$$

$$c_u = 1 - \frac{1}{2^{|u|}} + \frac{2\bar{u} + 1}{\Lambda_u}, \quad l_u^\mp = c_u \mp \frac{1}{\Lambda_u} \quad (3.17)$$

とおく. ただし  $\bar{u} \in \{0, \dots, 2^{|u|} - 1\}$  は  $u$  を二進数として解釈した数.

関数  $g, h$  を  $t \in [0, 1], y \in \mathbf{R}$  にたいして, 下のように定義する.

$$g\left(l_u^\mp \pm \frac{t}{\Lambda_u}, \frac{y}{\Lambda_u \Gamma_u}\right) = \begin{cases} \pm \frac{1}{\Gamma_u} (g_u(t, 1) + \mathcal{D}^{(0,1)} g_u(t, 1)(y - 1)) & (1 < y) \\ \pm \frac{g_u(t, y)}{\Gamma_u} & (-1 \leq y \leq 1) \\ \pm \frac{1}{\Gamma_u} (g_u(t, -1) + \mathcal{D}^{(0,1)} g_u(t, -1)(y + 1)) & (y < -1) \end{cases} \quad (3.18)$$

$$h\left(l_u^\mp \pm \frac{t}{\Lambda_u}\right) = \frac{h_u(t)}{\Lambda_u \Gamma_u}. \quad (3.19)$$

任意の  $y \in \mathbf{R}$  にたいして  $g(1, y) = h(1) = 0$  と定義する.

$g$  と  $h$  が定理 1.1 で求める関数の性質を満たすことを示す.

まず  $g$  が多項式時間計算可能であることを示す. 補題<sup>1</sup>を用いて示す. 各有理数  $T, Y$  について  $g(T, Y)$  を求めるとき,  $T = l_u^\mp \pm t/\Lambda_u, Y = y/\Lambda_u \Gamma_u$  を満たすような  $u, \pm(\mp), t, y$  は, 多項式時間で計算可能である.

次に  $g$  が  $y$  に関して微分可能であり, 導関数は  $y, t$  に関して連続になっていることをしめす. 各区間で第二引数に関して微分すると,

$$\mathcal{D}^{(0,1)} g\left(l_u^\mp \pm \frac{t}{\Lambda_u}, \frac{y}{\Lambda_u \Gamma_u}\right) = \begin{cases} \pm \Lambda_u \mathcal{D}^{(0,1)} g_u(t, 1) & (1 < y) \\ \pm \Lambda_u \mathcal{D}^{(0,1)} g_u(t, y) & (-1 < y < 1) \\ \pm \Lambda_u \mathcal{D}^{(0,1)} g_u(t, -1) & (y < -1). \end{cases} \quad (3.20)$$

<sup>1</sup>準備で導入

よって  $\mathcal{D}^{(0,1)}g(t, 1) = \pm \Lambda_u \mathcal{D}^{(0,1)}g_u(t, 1)$ ,  $\mathcal{D}^{(0,1)}g(t, -1) = \pm \Lambda_u \mathcal{D}^{(0,1)}g_u(t, -1)$  であり,  $y$  に関して微分可能.  $\mathcal{D}^{(0,1)}g_u$  は連続であるため,  $y$  に関して連続は自明.

$t$  軸方向への連続性について. 任意の  $[0, 1]$  の数はある  $u$  と  $t \in [0, 1]$  が存在して  $l_u^\mp \pm t/\Lambda_u$  の形で表せる.  $t \in (0, 1)$  においては  $\mathcal{D}^{(0,1)}g_u(t, y)$  は連続であるため,  $t$  軸方向へ連続.  $t = 0, 1$  のとき,  $y \in [-1, 1]$  にたいして  $g_u(0, y) = g_u(1, y) = 0$  より  $\mathcal{D}^{(0,1)}g_u(0, y) = \mathcal{D}^{(0,1)}g_u(1, y) = 0$  よって  $t = 0, 1$  においても連続.  $g(1, y) = 0$  より  $\mathcal{D}^{(0,1)}g(1, y) = 0$ . また  $|\mathcal{D}^{(0,1)}g_u| \leq 2^{\lambda(|u|)-|u|}$  より,

$$\lim_{t \rightarrow 1-0} |\mathcal{D}^{(0,1)}g| = \lim_{|u| \rightarrow \infty} |\Lambda_u \mathcal{D}^{(0,1)}g_u| \leq \lim_{|u| \rightarrow \infty} |2^{-|u|}| = 0. \quad (3.21)$$

よって  $\mathcal{D}^{(0,1)}g$  は連続.

$h$  が  $g$  の常微分方程式の解であることを示す.  $h(0) = 0$ ,  $\mathcal{D}^{(1)}h(1) = 0 = g(1, h(1))$  は自明.

$$\begin{aligned} & h'(l_u^\mp \pm t/\Lambda_u) \\ &= \pm \frac{h'_u(t)}{\Lambda_u \Gamma_u} \\ &= \pm \frac{g_u(t, h_u(t))}{\Gamma_u} \\ &= g\left(l_u^\mp \pm \frac{t}{\Lambda_u}, \frac{h_u(t)}{\Lambda_u \Gamma_u}\right) \\ &= g\left(l_u^\mp \pm \frac{t}{\Lambda_u}, h\left(l_u^\mp \pm \frac{t}{\Lambda_u}\right)\right). \end{aligned} \quad (3.22)$$

$L$  は  $h$  に還元可能であることを示す.

$$h(c_u) = \frac{h_u(1)}{\Lambda_u \Gamma_u} = \frac{L(u)}{2^{\lambda(|u|)+\gamma(|u|)+\rho(|u|)}} \quad (3.23)$$

つまり  $R, S, T$  を以下のように定義することで, 還元可能.

$$R(u, v) = v \quad (3.24)$$

$$S(u, 0^n) = \lfloor 2^n c_u \rfloor \text{ を表す文字列}, \quad (3.25)$$

$$T(u) = 0^{\lambda(|u|)+\gamma(|u|)+\rho(|u|)} \quad (3.26)$$

$L$  は PSPACE 完全であるため,  $h$  も PSPACE 完全.  $\square$

## 4 任意回微分可能関数と常微分方程式

任意回微分可能な関数の常微分方程式の解も, ある仮定のもと PSPACE 完全でありうることを証明する.

#### 4.1 対数深さ離散初期値問題

前章で定義した離散初期値問題へさらに制限を加えた問題を考える. 定数  $d$ , 関数  $P: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , 多項式  $Q: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , 関数族  $(G_u)_u$  の組  $\langle d, P, Q, (G_u)_u \rangle$  が (3.1), (3.2) に加え,

$$P(x) = O(\log x) \text{ かつ } P \text{ は多項式時間計算可能} \quad (4.1)$$

を満たすとき対数深さ離散初期値問題であると呼ぶ. 対数深さ離散初期値問題の解  $(H_u)_u$  が満たすべき条件は離散初期値問題と同じく (3.3), (3.4) である.

対数深さ離散初期値問題が言語  $L$  を認識するとは任意の文字列  $u$  で  $H_u(P(|u|), 2^{Q(|u|)}) = L(u)$  を満たすこと.

仮定 4.1. 任意の言語  $L \in \mathbf{PSPACE}$  に対して  $L$  を認識する対数深さ離散初期値問題が存在する.

つまり対数深さ離散初期値問題が  $\mathbf{PSPACE}$  完全であることを仮定する.

#### 4.2 離散初期値問題を模倣する関数族

証明の流れは 1 回微分可能の時と変わらない. 任意の言語  $L \in \mathbf{PSPACE}$ , 文字列  $u$  にたいして, 上記の対数深さ離散初期値問題を模倣し  $L(u)$  を計算する任意回微分可能な実関数  $g_u$  を構成する.

補題 4.2. 仮定 4.1 のもと, 任意の自然数  $k \geq 2$ , 任意の言語  $L \in \mathbf{PSPACE}$ , 任意の多項式  $\lambda$  にたいして, 関数  $\rho: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  と関数族  $g_u, h_u$  で,  $\rho, (g_u)_u$  は多項式時間計算可能であり, 各二進文字列  $u$  にたいして以下を満たすものが存在する.

- (i)  $g_u: [0, 1] \times [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}, \quad h_u: [0, 1] \rightarrow [-1, 1];$
- (ii) 任意の  $y \in [-1, 1]$  にたいして  $g_u(0, y) = g_u(1, y) = 0;$
- (iii)  $h_u$  は  $g_u$  の常微分方程式の解;
- (iv)  $\mathcal{D}^{(0,k)} g_u$  は連続;
- (v) 任意の  $i \in \{0, \dots, k\}$  にたいして  $|\mathcal{D}^{(0,i)} g_u(t, y)| \leq \Lambda_u^{-i} 2^{-|u|};$
- (vi)  $h_u(1) = 2^{-\rho(|u|)} L(u).$

ただし  $\Lambda_u = 2^{\lambda(|u|)}.$

証明. 仮定 4.1 より  $L$  を認識する対数深さ離散初期値問題  $\langle d, P, Q, (G_u)_u, (H_u)_u \rangle$  とその解  $(H_u)_u$  を得る. さらに以下のように仮定する.

$$H_u(i, 2^{Q(|u|)}) = \begin{cases} L(u) & (i = P(|u|)) \\ 0 & (i < P(|u|)). \end{cases} \quad (4.2)$$

補題 3.3 の  $f$  にたいして, 定数  $c$  を任意の  $i \in \{0, \dots, k\}$ , 任意の  $x \in [0, 1]$  にたいして  $|\mathcal{D}^{(i)} f(x)| \leq 2^c$  を満たす最小の自然数と定める. 定数  $d' = \lceil \log(4d + 1) \rceil$ ,  $B = 2^{Q(|u|) + k\lambda(|u|) + (k-1) + |u| + c + d' + k}$  とおき, 各  $(t, y) \in [0, 1] \times [-1, 1]$  にたいして, 自然数  $N$ ,  $\theta \in [0, 1]$ , 整数  $Y$ ,  $\eta \in [-1/4, 3/4]$  を  $t = (T + \theta)2^{-Q(|u|)}$ ,  $y = (Y + \eta)B^{-(k+1)j_u(T)}$  を満たすように定める.

そのとき,

$$g_u^*(t, Y) = \frac{2^{Q(|u|)} \pi \sin(\theta\pi)}{2B^{(k+1)j_u(T)+1}} G_u(j_u(T), T, Y \bmod 2^{d'}) \quad (4.3)$$

とおき  $g_u, h_u$  を以下のように定義する.

$$g_u(t, y) = \begin{cases} g_u^*(t, Y) & (\eta \leq \frac{1}{4}) \\ (1 - f(2\eta - \frac{1}{2}))g_u^*(t, Y) + f(2\eta - \frac{1}{2})g_u^*(t, Y + 1) & (\eta > \frac{1}{4}) \end{cases} \quad (4.4)$$

$$h_u(t) = \sum_{i=0}^{P(|u|)} \frac{H_u(i, T)}{B^{(k+1)^i}} + \frac{1 - \cos(\theta\pi)}{2} \cdot \frac{G_u(j_u(T), T, H_u(j_u(T), T))}{B^{(k+1)j_u(T)+1}} \quad (4.5)$$

上記のように定義した  $g_u, h_u$  が補題 4.2 で求める性質を満たすことを示す. (i), (ii) は自明.  $(g_u)_u$  が多項式時間計算可能であることは補題によって示される.

$h_u$  は  $g_u$  の常微分方程式の解であることを示す. まず  $h_u$  について解析する. (4.5) の一つ目の項において  $i \leq j_u(T)$  の合計は  $B^{(k+1)j_u(T)}$  の倍数.  $i > j_u(T)$  の合計は,

$$\begin{aligned} \sum_{i > j_u(T)} \frac{H_u(i, T)}{B^{(k+1)^i}} &\leq \sum_{i > j_u(T)} \frac{d-1}{B^{(k+1)^i}} \\ &\leq \sum_{i > j_u(T)} \frac{d-1}{B^i} = \sum_{i > j_u(T)} \frac{d-1}{B^{i-j_u(T)}} B^{-j_u(T)} \\ &\leq \sum_{i > j_u(T)} \frac{d-1}{(4d+1)^{i-j_u(T)}} B^{-j_u(T)} \\ &= \frac{d-1}{4d} B^{-j_u(T)} \end{aligned}$$

二つ目の項の絶対値は

$$\left| \frac{1 - \cos(\theta\pi)}{2} \cdot \frac{G_u(j_u(T), T, H_u(j_u(T), T))}{B^{(k+1)j_u(T)+1}} \right| \leq \frac{1}{B^{j_u(T)+1}} \leq \frac{B^{-j_u(T)}}{4d+1} \quad (4.6)$$

よって  $h_u(t) = (Y + \eta)B^{-j_u(T)}$  を満たす  $\eta \in [-1/4, 1/4]$  が存在する. このとき,

$$Y = \sum_{i=0}^{j_u(T)} H_u(i, T) \cdot B^{j_u(T)-i}. \quad (4.7)$$

$B$  は  $2^{d'}$  の倍数なので,  $Y \bmod 2^{d'} = H_u(j_u)$ . (4.4)  $\wedge Y$  と  $\eta$  を代入すると,

$$\begin{aligned} g_u(t, h_u(t)) &= \frac{2^{Q(|u|)} \pi \sin(\theta\pi)}{2B^{j_u(T)+1}} G_u(j_u(T), T, H_u(j_u(T), T)) \\ &= \mathcal{D}^{(1)} h_u(t). \end{aligned} \quad (4.8)$$

よって  $h_u$  は  $g_u$  の常微分方程式の解.

$$\mathcal{D}^{(0,i)} g(t, y) = \quad (4.9)$$

$$\begin{cases} 0 & (\eta \leq \frac{1}{4}) \\ 2^i B^{i \cdot (k+1)j_u(T)} \cdot \mathcal{D}^{(i)} f(2\eta - \frac{1}{2}) \cdot (g_u^*(t, Y+1) - g_u^*(t, Y)) & (\eta > \frac{1}{4}) \end{cases}$$

よって  $\mathcal{D}^{(0,i)} g$  は連続

(v) を示す.  $|g_u^*| \leq \left| \frac{2^{Q(|u|)} \pi \sin(\theta\pi)}{2B^{(k+1)j_u(T)+1}} \right| \leq \frac{2^{Q(|u|)+1}}{B^{(k+1)j_u(T)+1}}$  より,  $i = 0$  において

$$|\mathcal{D}^{(0,0)} g| = |g| \leq \frac{2^{Q(|u|)+1}}{B^{(k+1)j_u(T)+1}} \leq \frac{2^{Q(|u|)+1}}{B^{(k+1)}} \leq 2^{-|u|} \quad (4.10)$$

$i \in \{1, \dots, k\}$  において,

$$\begin{aligned} |\mathcal{D}^{(0,i)} g| &\leq 2^i \cdot B^{i \cdot (k+1)j_u(T)} \cdot 2^c \cdot (g_u^*(t, Y+1) - g_u^*(t, Y)) \\ &\leq 2^{c+k} \cdot B^{k(k+1)j_u(T)} \cdot 2 \cdot \frac{2^{Q(|u|)+1}}{B^{(k+1)j_u(T)+1}} \\ &\leq \frac{2^{Q(|u|)+c+k+2}}{B} \leq 2^{-i\lambda(|u|)-|u|} = \Lambda_u^{-i} 2^{-|u|} \end{aligned} \quad (4.11)$$

(vii) は

$$\begin{aligned} h_u(1) &= \frac{H_u(P(|u|), 2^{Q(|u|)})}{B^{(k+1)P(|u|)}} \\ &= \frac{L(u)}{2^{(k+1)P(|u|)(Q(|u|)+k\lambda(|u|)+|u|+c+d'+k)}} \end{aligned} \quad (4.12)$$

より,  $\rho(x) = (k+1)^{P(x)}(Q(x) + k\lambda(x) + x + c + d' + k)$  とおく.  $P(|u|) = O(\log |u|)$  かつ  $P$  は多項式時間計算可能により,  $\rho$  は多項式時間計算可能.  $\square$

### 4.3 定理 1.2 の証明

証明.  $L$  を PSPACE 完全な言語,  $\lambda(k) = 2k+2$  とおく. PSPACE 完全な言語  $L$  にたいして補題 4.2 を用いて,  $\rho, (g_u)_u, (h_u)_u$  を得る.

$$c_u = 1 - \frac{1}{2^{|u|}} + \frac{2\bar{u}+1}{\Lambda_u}, \quad l_u^\mp = c_u \mp \frac{1}{\Lambda_u} \quad (4.13)$$

とおく. ただし  $\bar{u} \in \{0, \dots, 2^{|u|} - 1\}$  は  $u$  を二進数として解釈した数.

関数  $g, h$  を  $t \in [0, 1], y \in \mathbf{R}$  にたいして, 下のように定義する.

$$g\left(l_u^\mp \pm \frac{t}{\Lambda_u}, \frac{y}{\Lambda_u}\right) = \begin{cases} \pm \sum_{i=0}^k \frac{\mathcal{D}^{(0,i)} g_u(t, 1)}{i!} (y-1)^i & (1 < y) \\ \pm g_u(t, y) & (-1 \leq y \leq 1) \\ \pm \sum_{i=0}^k \frac{\mathcal{D}^{(0,i)} g_u(t, -1)}{i!} (y+1)^i & (1 < y) \end{cases} \quad (4.14)$$

$$h\left(l_u^\mp \pm \frac{t}{\Lambda_u}\right) = \frac{h_u(t)}{\Lambda_u}. \quad (4.15)$$

任意の  $y \in \mathbf{R}$  にたいして  $g(1, y) = h(1) = 0$  と定義する.

$g$  と  $h$  が定理 1.1 で求める関数の性質を満たすことを示す.

まず  $g$  が多項式時間計算可能であることを示す. 補題<sup>2</sup>を用いて示す. 各有理数  $T, Y$  について  $g(T, Y)$  を求めるとき,  $T = l_u^\mp \pm t/\Lambda_u$ ,  $Y = y/\Lambda_u$  を満たすような  $u, \pm(\mp), t, y$  は, 多項式時間で計算可能である.

次に  $g$  が  $y$  に関して微分可能であり, 導関数は  $y, t$  に関して連続になっていることをしめす. 各区間で第二引数に関して微分すると  $i \in 1, \dots, k$  で

$$\mathcal{D}^{(0,j)} g\left(l_u^\mp \pm \frac{t}{\Lambda_u}, \frac{y}{\Lambda_u}\right) = \begin{cases} \pm \Lambda_u^j \sum_{\langle i,j \rangle \in S_k, i \geq n, j \geq m} \frac{\mathcal{D}^{(0,i)} g_u(t, 1)}{(i-j)!} (y-1)^{(i-j)} & (1 < y) \\ \pm \Lambda_u^j \mathcal{D}^{(0,j)} g_u(t, y) & (-1 < y < 1) \\ \pm \Lambda_u^j \sum_{i=j}^k \frac{\mathcal{D}^{(0,i)} g_u(t, -1)}{(i-j)!} (y+1)^{(i-j)} & (y < -1) \end{cases} \quad (4.16)$$

よって  $\mathcal{D}^{(0,j)} g(t, 1) = \pm \Lambda_u^j \mathcal{D}^{(0,j)} g_u(t, 1)$ ,  $\mathcal{D}^{(0,j)} g(t, -1) = \pm \Lambda_u^j \mathcal{D}^{(0,j)} g_u(t, -1)$  であり,  $y$  に関して  $i$  回微分可能かつ  $i$  階の導関数は連続.

$t$  軸方向への  $i$  階の導関数の連続性について. 任意の  $[0, 1]$  の数はある  $u$  と  $t \in [0, 1]$  が存在して  $l_u^\mp \pm t/\Lambda_u$  の形で表せる.  $t \in (0, 1)$  においては  $\mathcal{D}^{(0,i)} g_u(t, y)$  は連続であるため,  $t$  軸方向へ連続.  $t = 0, 1$  のとき,  $y \in [-1, 1]$  にたいして  $g_u(0, y) = g_u(1, y) = 0$  より  $\mathcal{D}^{(0,i)} g_u(0, y) = \mathcal{D}^{(0,i)} g_u(1, y) = 0$  よって  $t = 0, 1$  においても連続.  $g(1, y) = 0$  より  $\mathcal{D}^{(0,i)} g(1, y) = 0$ . また  $|\mathcal{D}^{(0,i)} g_u| \leq \Lambda_u^{-i} 2^{-|u|}$  より,

$$\lim_{t \rightarrow 1-0} |\mathcal{D}^{(0,i)} g| = \lim_{|u| \rightarrow \infty} |\Lambda_u^i \mathcal{D}^{(0,i)} g_u| \leq \lim_{|u| \rightarrow \infty} |2^{-|u|}| = 0. \quad (4.17)$$

よって  $\mathcal{D}^{(0,i)} g$  は連続.

$h$  が  $g$  の常微分方程式の解であることを示す.  $h(0) = 0$ ,  $\mathcal{D}^{(1)} h(1) = 0 =$

<sup>2</sup>準備で導入

$g(1, h(1))$  は自明.

$$\begin{aligned}
& h'(l_u^\mp \pm t/\Lambda_u) \\
&= \pm \frac{h'_u(t)}{\Lambda_u} \\
&= \pm g_u(t, h_u(t)) \\
&= g\left(l_u^\mp \pm \frac{t}{\Lambda_u}, \frac{h_u(t)}{\Lambda_u}\right) \\
&= g\left(l_u^\mp \pm \frac{t}{\Lambda_u}, h\left(l_u^\mp \pm \frac{t}{\Lambda_u}\right)\right). \tag{4.18}
\end{aligned}$$

$L$  は  $h$  に還元可能であることを示す.

$$h(c_u) = \frac{h_u(1)}{\Lambda_u} = \frac{L(u)}{2^{\lambda(|u|)+\rho(|u|)}} \tag{4.19}$$

つまり  $R, S, T$  を以下のように定義することで, 還元可能.

$$R(u, v) = v \tag{4.20}$$

$$S(u, 0^n) = \lfloor 2^n c_u \rfloor \text{ を表す文字列,} \tag{4.21}$$

$$T(u) = 0^{\lambda(|u|)+\rho(|u|)} \tag{4.22}$$

$L$  は PSPACE 完全であるため,  $h$  も PSPACE 完全.

□

## 5 考察

### 5.1 議論

一回微分可能な関数の常微分方程式の解は PSPACE 完全足りうることを本紙では示したが, 二回微分可能以上の制限を設けた場合に関しては仮定 4.1 を前提としている. しかし一回微分可能と二回微分可能の間にそんな本質的なギャップがあるとは思えず, 二回微分可能以上に関しても PSPACE 完全足りうることを証明できるのではないかと考えている. 証明される可能性としてひとつは仮定 4.1 が示されることであるが, 重要なのは仮定が否定されたとしても定理 1.2 が否定されるわけではないということである.

問題は仮定 4.1 は妥当か. フィードバックの深さは対数領域しか使えないが,  $G_u$  は入力として時刻  $T \in [2^{Q(|u|)}]$  を持つため, 対数領域しか使えないわけではない.

### 5.2 課題

任意階微分可能な関数の常微分方程式の解が PSPACE 完全たりうることを証明することが第一の課題である. 仮定 4.1 の証明が可能ならば, 定理

1.2 から, “仮定 4.1 のもと,” という文言は取り払われ, 証明される. しかし, フィードバックの弱い計算が任意階微分可能な関数の常微分方程式で模倣できる計算の最大限であるという保証はない. つまりまたはまったく別の PSPACE 完全な計算を, 任意回微分可能な関数の常微分方程式で模倣できる可能性も残っている.

依然として解が多項式時間実関数となる, 解析的であるという条件との間にはギャップが存在し, 例えば  $g$  が無限回連続微分可能でかつであるとき, 解はどうなるのか等の疑問が生まれる.

また  $g$  の第一引数  $t$  に関して本紙では連続であることのみ要求したが, 微分可能になると解はどうなるか, 更に制限するとどうなるかは不明である.

## 6 謝辞

### 参考文献

- [Kaw10] A. Kawamura. Lipschitz continuous ordinary differential equations are polynomial-space complete. *Computational Complexity*, 19(2):305–332, 2010.
- [Ko91] K.I. Ko. *Complexity theory of real functions*. Birkhauser Boston Inc., 1991.