滑らかな常微分方程式の計算量

太田浩行* 河村彰星†

マルチン・ツィーグラー‡ カルステン・レースニク§

概要

常微分方程式 $h(0) = 0,\ h'(t) = g(t, h(t))$ の解 h の計算量と, 関数 g の計算量及び制限の関係は, 常微分方程式を数値的に解くことの本質的な難しさを表しているとして調べられている. 河村は 2010 年の論旋の中で, g を Lipschitz 条件を満たす多項式時間計算可能な関数に限定した時でも解 h が PSPACE 困難になりうるという結果を示しているが, 本稿ではさらに g を滑らかな関数への制限による h の計算量の下限の変化を観察した. 結果, 1 回連続微分可能に限ったとしても, 解は PSPACE 困難になりうるが, 2 回以上微分可能な g においては, 解 h は計数階層 CH について困難であることを示した.

1 序論

連続実関数 $g\colon [0,1] \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ に対して次の常微分方程式を考える.

$$h(0) = 0, \qquad Dh(t) = g(t, h(t)) \quad (t \in [0,1]) \tag{1.1}$$

ただし Dh は h の導関数. 本稿では g が多項式時間計算可能であるとき, 解 h がどれほど複雑でありうるかを考える. ここで多項式時間を初めとする計算量は**計算可能解析学** (Computable Analysis) [14] における概念であり, 実関数を指定された精度で近似する計算の困難さを測るものである (本稿では 2 節で説明する).

g に多項式時間計算可能であることの他に何の制限も設けない場合, 解 h (一般に一意でない) は計算不能でありうるため, 様々な制限の下で h の計算量が研究されている (表 1.1). この表では下に向うにつれて左列の条件が強まっており, g が (大域的) Lipschitz 条件を満たせば解 h が一意であるが, 表の第 3 行にある通りこのとき唯一解 h はちょうど PSPACE 困難でありうることがわかっている [3]. 本稿ではより強く g に滑らかさの仮定を置いたときの h の複雑さを調べる.

一般に数値計算においてはしばしば, 或る種の算法を適用できるようにするため, 或いは解析しやすくするために, 与えられる関数に何らかの滑らかさ (十分な回数微分可能であるなど) を仮定

* 東京大学, `hota@is.s.u-tokyo.ac.jp`

† 東京大学

‡ Martin Ziegler, ダルムシュタット工科大学

§ Carsten Rösnick, ダルムシュタット工科大学

表 1.1　g が多項式時間計算可能であるときの常微分方程式 (1.1) の解 h の計算量

制限	上界	下界
—	—	計算不可能になりうる [11]
h が g の唯一解	計算可能 [1]	任意の時間がかかりうる [6, 9]
g が Lipschitz 条件を満たす	多項式領域計算可能 [6]	PSPACE 困難になりうる [3]
g が $(\infty, 1)$ 回連続微分可能	多項式領域計算可能	PSPACE 困難になりうる (定理 1.1)
g が (∞, k) 回連続微分可能 (k は任意の定数)	多項式領域計算可能	CH 困難になりうる (定理 1.2)
g が解析的	多項式時間計算可能 [10, 8, 2]	—

すると都合のよいことがある．しかしこれは経験則にすぎず, 実際に滑らかさの仮定が解の複雑さを計算量の意味で抑える効果をもつのかについてはあまり論ぜられて来なかった．

本稿で扱う微分方程式についていえば, 極端なのは g が解析的である場合であり, このときにはテイラー級数による解法により, 表の最下列にあるように h は g と同じく多項式時間計算可能になる．本稿では Lipschitz 条件より強いが解析的よりは弱い滑らかさの仮定を考える (表の第 4, 5 行)．ここで (i, j) 回連続微分可能とは, 第一, 第二変数についてそれぞれ i 回, j 回微分でき, その導関数が連続であることである[*1]．

定理 1.1. 多項式時間計算可能かつ $(\infty, 1)$ 回連続微分可能な実関数 $g\colon [0, 1] \times [-1, 1] \to \mathbf{R}$ であって, 常微分方程式 (1.1) が PSPACE 困難な解 $h\colon [0, 1] \to \mathbf{R}$ を持つものが存在する．

定理 1.2. 任意の自然数 k に対して, 多項式時間計算可能かつ (∞, k) 回連続微分可能な実関数 $g\colon [0, 1] \times [-1, 1] \to \mathbf{R}$ であって, 常微分方程式 (1.1) が CH 困難な解 $h\colon [0, 1] \to \mathbf{R}$ を持つものが存在する．但し CH $\subseteq$ PSPACE は計数階層 (3.2 節) である．

ここで $g\colon [0, 1] \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ でなく $g\colon [0, 1] \times [-1, 1] \to \mathbf{R}$ と書いたのは, 本稿では実関数の多項式時間計算可能性を, 定義域が有界閉領域のときにのみ定義するからである．このため h が区間 $[-1, 1]$ の外に値を取ることがあると方程式 (1.1) が意味をなさなくなるが, 定理 1.1 において h が解であるというのは, 任意の $t \in [0, 1]$ について $h(t) \in [-1, 1]$ が満たされることも含めて述べている．なお両定理とも Lipschitz 条件よりも強い仮定を置いているため, そのような h は g に対して, 存在すれば唯一である．

*1 二変数関数 g が $i + j \leq k$ を満たす任意の自然数 i, j について (i, j) 回連続微分可能であることを k 回連続微分可能と言うこともあるが, 本稿では各変数について微分できる回数をこのように分けて書く．

本稿のように対象を滑らかな関数に制限することによる計算量の変化について, 常微分方程式以外の問題では次のような否定的な結果がある. 多項式時間計算可能な関数から積分により得られる関数は, もとの関数を無限回微分可能なものに限ってもなお一般の場合と同じく #P 困難である. [7, 定理 5.33]. 最大化でも同様に, 無限回微分可能な関数に限っても一般の場合と同じく NP 困難である [7, 定理 3.7][*2] (なお対象を解析的な関数に限ると, やはり級数を用いた議論により, これらは多項式時間計算可能になる). 一方常微分方程式については, 定理 1.2 は各 k についてそれぞれ成立つが, g が (∞, ∞) 回微分可能であると仮定したときの h の計算量については依然不明である.

記法

自然数の集合を $\mathbf{N}$, 実数の集合を $\mathbf{R}$, 有理数の集合を $\mathbf{Q}$ と表す. A, B を $\mathbf{R}$ の有界閉区間とする. 実関数 $f\colon A \to \mathbf{R}$ に対して $|f| = \sup_{x \in A} f(x)$ と書く.

連続な一変数関数 $f\colon A \to \mathbf{R}$ が i 回連続微分可能であるとは, 導関数 $Df, D^2 f, \ldots, D^i f$ が存在し, すべて連続であることと定義する. 連続な二変数関数 $g\colon A \times B \to \mathbf{R}$ が (i, j) **回連続微分可能**であるとは, 導関数 $D_1^n D_2^m g$ が, 任意の $0 \leq n \leq i$, $0 \leq m \leq j$ を満たす n, m において存在し連続であることと定義する. g が (i, j) 回連続微分可能であるとき, その導関数 $D_1^i D_2^j g$ を $D^{(i,j)} g$ と表記する. また任意の i について g が (i, j) 回連続微分可能であるとき, g は (∞, j) 回連続微分可能であると定義する.

2 実関数の計算量

2.1 実関数の計算

実数を旗字列から旗字列への関数で表す.

定義 2.1. 関数 $\phi\colon \{0\}^* \to \{0,1\}^*$ が実数 $x \in \mathbf{R}$ の**名**であるとは, 任意の $n \in \mathbf{N}$ について, $\phi(0^n) = \lfloor x \cdot 2^n \rfloor$ または $\phi(0^n) = \lceil x \cdot 2^n \rceil$ を満たすこと.

ここで $\lfloor \cdot \rfloor$, $\lceil \cdot \rceil$ とはそれぞれ整数へ切り捨てた値, 及び切り上げた値を二進法で書いた旗字列を表す. つまり実数 x の名は, 長さ n の旗字列 0^n を受け取ると, 精度 n 桁の x の近似値を返す.

この名を読み書きする機構として, 神託チューリング機械 (以下単に機械という) を使う (図 2.1).

機械 M に, 旗字列から旗字列への関数 ϕ を神託として与え, 旗字列 0^n を入力として与えたとき, 出力される旗字列を $M^\phi(0^n)$ で表す. つまり M^ϕ をやはり旗字列から旗字列への関数とみる.

定義 2.2. A を $\mathbf{R}$ の有界閉区間とする. 機械 M が実関数 $f\colon A \to \mathbf{R}$ を計算するとは, 任意の実

[*2] ただし葛 [7, 定理 3.7] の証明において関数 f を

$$f(x) = \begin{cases} u_s & \text{if not } R(s,t) \\ u_s + 2^{-(p(n)+2n+1)\cdot n} \cdot h_1(2^{p(n)+2n+1}(x - y_{s,t})) & \text{if } R(s,t) \end{cases}$$

に修正する必要がある.

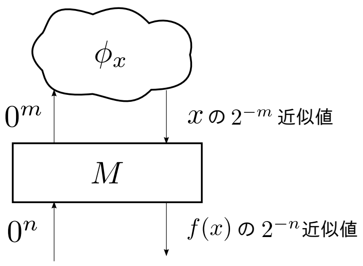

図 2.1　実関数 f を計算する機械 M

数 $x \in A$, 任意の x の名 ϕ_x に対して, M^{ϕ_x} が $f(x)$ の名であること.

A が $\mathbf{R}^2$ の有界閉集合であるときにも, 神託を二つ取る機械を考えて同様に定義する.

ある実関数が**計算可能**であるとは, その関数を計算する神託機械が存在することである. 同様に, ある実関数が**多項式時間計算可能**であるとは, その関数を計算する多項式時間神託機械が存在することである.

神託機械 M で f を計算するとき, 求める $f(x)$ の精度 n に対して, x の近似値に必要な精度 m が定まるため, 計算可能な関数は連続である. また n と m の対応関係と有理数における近似値を与えることで, 計算可能実関数や多項式時間計算可能実関数に対して, 神託機械を用いない同値な特徴付けが可能である.

補題 2.3. 実関数 $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ が多項式時間計算可能であることは, 多項式時間計算可能な関数 $\phi\colon (\mathbf{Q} \cap [0,1]) \times \{0\}^* \to \mathbf{Q}$ と多項式 $p\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ とが存在し, 任意の $d \in \mathbf{Q} \cap [0,1]$, $n \in \mathbf{N}$ について

$$|\phi(d, 0^n) - f(d)| \leq 2^{-n} \tag{2.1}$$

任意の $x, y \in [0,1]$, $m \in \mathbf{N}$ について

$$|x - y| \leq 2^{-p(m)} \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq 2^{-m} \tag{2.2}$$

が成立つことと同値である. 但し $\mathbf{Q}$ の元は分母と分子を二進法の整数で書いた分数として表す.

2.2　帰着と困難性

言語 $L\colon \{0,1\}^* \to \{0,1\}$ が実関数 $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ に多項式時間帰着 (以下単に帰着と呼ぶ) するとは, f を計算する機械があるとしたとき, 入力 u に対して, 精度 n をこの機械に与え, ある実数 x_u の神託を模倣し, $f(x_u)$ の n 桁近似値から, u が L に属するか否かを多項式時間で計算可能であることである (図 2.2). 厳密には以下のように定義する.

定義 2.4 (帰着)**.** 言語 L が実関数 $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ に**帰着**するとは, 多項式時間計算可能な関数 S と多項式時間神託機械 M が存在し, 任意の旋字列 u に対して以下を満たすことをいう.

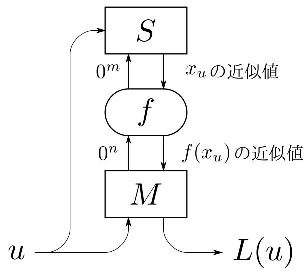

図 2.2　言語 L から関数 $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ への帰着

- $S(u, \cdot)$ はある実数 x_u の名;
- $f(x_u)$ の任意の名 ϕ に対して

$$M^{\phi}(u) \text{ が受理} \leftrightarrow u \in L.$$

この定義は河村による帰着の定義と形式上は異なるが, 帰着としての強さは等しい. 計算量 C に対して, 関数 f が C **困難**であるとは, C に属する任意の言語が f に帰着することをいう.

3　証明

本節では次の手順で定理 1.1, 1.2 を示す. まずある種の差分方程式の族が, PSPACE 困難ないし CH 困難であることを示す (3.1 節, 3.2 節). そしてこの差分方程式が, 滑らかさの条件を満たす (1.1) の形の微分方程式の族により模倣されることを示す (3.3 節). この族を一つの滑らかな微分方程式へ埋め込むことで, 定理にいう g, h を構成する (3.4 節).

このように微分方程式で差分方程式を模倣する考え方は, Lipschitz 条件の場合の証明 [3] にも本質的には既に現れていたものであるが, 本稿ではより精密に, 滑らかさの条件が与える影響を調べるため, 差分方程式をある種の回路族として定義する. その結果, 2 回以上連続微分可能という制限の下でも, 回路の深さが小さければ模倣できることが判り, そのことから CH 困難性が従う.

3.1　差分方程式

Lipschitz 連続な常微分方程式の PSPACE 困難性の証明では最初のステップとして, まずの離散版の常微分方程式を定義し, それが PSPACE 困難であることを示している [3, 補題 4.7]. この節では離散版微分方程式をより形式的に定義し, 滑らかな常微分方程式の離散版が PSPACE 困難ないし CH 困難であることを示す.

$[n] = \{0, \ldots, n-1\}$ と表記する. 関数 $G\colon [P] \times [Q] \times [R] \to \{-1, 0, 1\}$ に対して, 関数 $H\colon [P+1] \times [Q+1] \to [R]$ が任意の $i \in [P]$, $T \in [Q]$ について以下を満たすとき, H を G の**差**

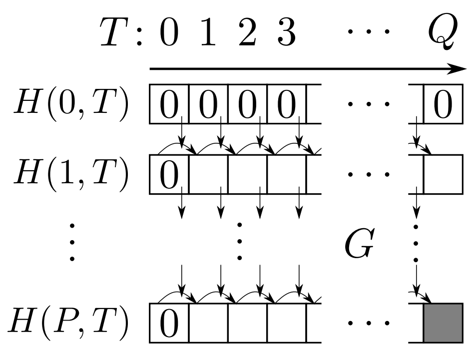

図 3.1　差分方程式と認識される言語

分方程式の解と呼ぶ.

$$H(i,0) = H(0,T) = 0 \tag{3.1}$$

$$H(i+1,T+1) - H(i+1,T) = G(i,T,H(i,T)) \tag{3.2}$$

P, Q, R をそれぞれ**段数**, **列数**, **欄の大きさ**と呼ぶ. 常微分方程式 (1.1) の 1 つめの条件 ($h(0) = 0$) と式 (3.1), 2 つめの条件 ($Dh(t) = g(t, h(t))$) と式 (3.2) の間に対応関係を見て取ることができるため, 差分方程式は常微分方程式の離散版と呼べる (図 3.1).

旋字列 u ごとに一つの差分方程式 G_u を与え, u が言語 L に入っているかをその差分方程式によって計算することを考える. 各 u に対して G_u の段数と列数, 解をそれぞれ P_u, Q_u, H_u としたとき, 言語 L が関数族 $(G_u)_u$ によって認識されるとは, $H_u(P_u, Q_u) = L(u)$ を満たすこととする. ここで言語 $L \subseteq \{0,1\}^*$ は関数 $L\colon \{0,1\}^* \to \{0,1\}$ と同一視し, $u \in L$ のとき $L(u) = 1$ としている.

このままでは任意の言語を差分方程式で認識可能となってしまうので, $(G_u)_u$ 全体にある種の制限をかける. $(G_u)_u$ が**一様**であるとは, 各 u について G_u の段数, 列数及び欄の大きさが $|u|$ の多項式の指数 ($2^{\mathrm{poly}(|u|)}$) で抑えられ, かつ与えられた (u, i, T, Y) から多項式時間で $G_u(i, T, Y)$ が計算できることと定義する.

G_u の段数がさらに $|u|$ の多項式, 対数で抑えられるとき, 族 $(G_u)_u$ はそれぞれ**多項式段**, **対数段**であるという. 河村の論旋では次が示されている.

補題 3.1 ([3, 補題 4.7])**.** PSPACE 困難で多項式段一様な関数族によって認識される言語が存在する[*3].

g が $(\infty, 1)$ 回微分可能であるときも, この補題を用いて PSPACE 困難な常微分方程式の解を構成することができる. 2 回以上微分可能な関数によって与えられるの常微分方程式の計算量を考えるとき, その滑らかさの制限により多項式段の差分方程式を模倣することができなかった. しかし

[*3] 差分方程式によって認識される言語のクラスはカープ還元において閉じており, 多項式段一様な関数族によって認識される言語は PSPACE と一致する.

差分方程式を対数段に制限してやれば模倣可能である (3.3 節, 3.4 節). そこで対数段一様な差分方程式の困難性について注目し以下の結果を得た.

補題 3.2. CH 困難で対数段一様な関数族によって認識される言語が存在する.

計数階層 CH の定義及びこの補題の証明は次章にて行う.

3.2 計数階層と対数段差分方程式

計数階層(Counting Hierarchy(CH)) とは Wagner によって導入された計算量クラスである [13]. 多項式階層 ($\mathbf{PH}$) が $\mathbf{NP}$ の神託機械を用いて,

$$\Sigma_0^p = \mathsf{P}$$
$$\Sigma_{k+1}^p = \mathbf{NP}^{\Sigma_k^p}$$
$$\mathbf{PH} = \bigcup_k \Sigma_k^p$$

と定義されるのに対し, 計数階層は多項式階層の $\mathbf{NP}$ を $\mathbf{PP}$ で置き換えたものである[*4]. つまり

$$\mathsf{C}_0\mathsf{P} = \mathsf{P}$$
$$\mathsf{C}_{k+1}\mathsf{P} = \mathsf{PP}^{\mathsf{C}_k\mathsf{P}}$$
$$\mathsf{CH} = \bigcup_k \mathsf{C}_k\mathsf{P}.$$

$\mathbf{PH} \subseteq \mathsf{CH} \subseteq \mathsf{PSPACE}$ だが, いずれの包含関係も厳密か否かは未解決である.

補題 3.2 において述べている CH 困難な言語を定義するため, まず各階層 $\mathsf{C}_n\mathsf{P}$ に対する完全問題 C_nB_{be} を導入する. k 個の量化子を持つ論理式の真偽値判定は, 多項式階層の各階層 Σ_k^p にたいし完全問題であるが, 新たに計数用の量化子を導入して同様の判定問題を構成する. 量化子 C を自然数 m, l 個の論理変数の組 X, 論理式 $\phi(X)$ について以下のように定義する.

$$\mathsf{C}^m X\phi(X) \longleftrightarrow \left|\{X \in \{0,1\}^l \mid \phi(X) = 1\}\right| \geq m. \tag{3.3}$$

$\mathsf{C}^1 = \exists$, $\mathsf{C}^{2^l} = \forall$ であり, C は $\exists, \forall$ の一般化と言える. 言語 C_nB_{be} を以下のように定義する.

$$\langle\phi(X_1,\dots,X_n), m_1,\dots,m_n\rangle \in \mathsf{C}_nB_{be} \longleftrightarrow \mathsf{C}^{m_1}X_1\cdots\mathsf{C}^{m_n}X_n\phi(X_1,\dots,X_n) \tag{3.4}$$

ただし $\langle\cdot\rangle$ は組み合わせ関数, X_i は論理変数の組, $\phi(X_1,\dots,X_n)$ は $X_1,\dots,X_n$ 以外の変数を持たない論理式とする.

補題 3.3 ([13, 定理 7])**.** C_nB_{be} は $\mathsf{C}_n\mathsf{P}$ 完全.

$(\mathsf{C}_nB_{be})_n$ をまとめた言語 $\mathsf{C}_{\log}B_{be}$ を以下のように定義する.

$$\langle 0^{2^n}, u\rangle \in \mathsf{C}_{\log}B_{be} \longleftrightarrow u \in \mathsf{C}_nB_{be} \tag{3.5}$$

[*4] ただしこの特徴付けは Torán によるものであり, Wagner によるオリジナルの定義とは異なる [12].

入力として階層の指数サイズ (0^{2^n}) を与えているのは, padding することにより量化子の数が全体の入力長に対して対数オーダーであることを保証することで, 対数段の差分方程式により認識可能とするためである. この $\mathsf{C}_{\log}B_{be}$ が補題 3.2 で求める言語であること, つまり CH 困難かつ対数段一様関数族によって認識可能であることを示す.

補題 3.2 の証明. $\mathsf{C}_{\log}B_{be}$ が CH 困難であることを示す. 任意の CH の言語 A はある階層 $\mathsf{C}_n\mathsf{P}$ に属する. 補題 3.3 より任意の $u \in \{0,1\}^*$ について $u \in A \leftrightarrow f(u) \in \mathsf{C}_nB_{be}$ を満たす多項式時間関数 f が存在する.

$$u \in A \longleftrightarrow \langle 0^{2^n}, f(u)\rangle \in \mathsf{C}_{\log}B_{be} \tag{3.6}$$

n は定数であるため $\langle 0^{2^n}, f(\cdot)\rangle$ は多項式時間関数. よって A は $\mathsf{C}_{\log}B_{be}$ に多項式時間還元可能.

$\mathsf{C}_{\log}B_{be}$ を認識する関数族 $(G_u)_u$, その解 $(H_u)_u$, 関数 $p\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, 多項式 q, r を構成する. 自然数 $n, m_1, \ldots, m_n$, 論理式 ϕ を $u = \langle 0^{2^n}, \langle \phi(X_1, \ldots, X_n), m_1, \ldots, m_n\rangle\rangle$ を満たすものとする. (そのような $n, m_1, \ldots, m_n, \phi$ が存在しないとき $u \notin A$.)

$L = \mathsf{C}_{\log}B_{be}$, $l_i = |X_i|$ と表記する. 関数 $C^m\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ を

$$C^m(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq m) \\ 0 & (x < m) \end{cases} \tag{3.7}$$

と定義する. 任意の $i = 0, \ldots, n$ と $n-i$ 個の旋字列 $Y_{i+1} \in \{0,1\}^{l_{i+1}}, \ldots, Y_n \in \{0,1\}^{l_n}$ について論理式 $\mathsf{C}^{m_i}X_i \cdots \mathsf{C}^{m_1}X_1\phi(X_1, \ldots, X_i, Y_{i+1}, \ldots, Y_n)$ の真偽値を $\phi_i(Y_{i+1}, \ldots, Y_n)$ と表記する.

$$\phi_0(Y_1, \ldots, Y_n) = \phi(Y_1, \ldots, Y_n) \tag{3.8}$$

$$\phi_{i+1}(Y_{i+2}, \ldots, Y_n) = C^{m_{i+1}}\left(\sum\nolimits_{X_{i+1} \in \{0,1\}^{l_i}} \phi_i(X_{i+1}, Y_{i+2}, \ldots, Y_n)\right) \tag{3.9}$$

$$\phi_n() = L(u) \tag{3.10}$$

$T \in \mathbf{N}$ に対し, T_i を T の 2 進表記における i 桁目, $T_{[i,j]} = T_{j-1}T_{j-2}\cdots T_{i+1}T_i$ と表記する.

$s_i = i + \sum_{j=1}^{i} l_j$ と書く. G_u を $(i, T, Y) \in [n+1] \times [2^{s_n}+1] \times [2^{|u|}]$ の範囲でを以下のように定義する. 一段目つまり $i = 0$ ならば

$$G_u(0, T, Y) = (-1)^{T_{s_1}}\phi(T_{[1,s_1]}, T_{[s_1+1,s_2]}, \ldots, T_{[s_{n-1}+1,s_n]}) \tag{3.11}$$

$i \geq 1$ ならば

$$G_u(i, T, Y) = \begin{cases} (-1)^{T_{s_{i+1}}}C^{m_i}(Y) & (T_{[1,s_i]} = 10\cdots 0) \\ 0 & (\text{othewise}). \end{cases} \tag{3.12}$$

任意の $i \in [n+1]$, $T \in [2^{s_n}+1]$ について, $H_u(i, T) \in [2^{l_i}+1]$ が成りたつこと, および $T_{[1,s_i]} = 10\cdots 0$ ならば

$$G_u(i, T, H_u(i, T)) = (-1)^{T_{s_{i+1}}}\phi_i(T_{[s_i+1,s_{i+1}]}, \ldots, T_{[s_{n-1}+1,s_n]}) \tag{3.13}$$

を満たすことを i についての帰納法により示す. 上記が成り立つとき, $i=n$, $T=2^{s_n}$ において $G_u(n,2^{s_n},H_u(n,2^{s_n}))=\phi_n()=L(u)$ よって $H_u(n+1,2^{s_n}+1)=L(u)$. ここで

$$n+1 \leq \log(|0^{2^n}|)+1=O(\log(|u|)) \tag{3.14}$$

$$2^{s_n}+1 \leq 2^{s_n+1} \leq 2^{|u|} \tag{3.15}$$

より $l(u)=n+1, q(x)=r(x)=x$ とおき G_u を $[l(u)]\times[2^{q(|u|)}]\times[2^{r(|u|)}]$ の範囲に拡張すると $H_u(p(u),2^{q(|u|)})=L(u)$.

$i=0$ のとき, 式 (3.12) より成り立つ. $i=j$ のとき, 成り立つと仮定する, $Y=H_u(i+1,T)$ とおくと

$$Y=\sum_{V=1}^{T-1} G_u(i,V,H_u(i,V)) \tag{3.16}$$

$$=\sum(-1)^{V_{s_{i+1}}}\phi_i(V_{[s_i+1,s_{i+1}]},\dots,V_{[s_{n-1}+1,s_n]}) \tag{3.17}$$

$T_{[1,s_{i+1}]}=10\cdots0$ のとき, $V_{[1,s_n]}=T_{[s_{i+1}+1,s_n]}0X10\cdots0$ であるとき以外の値は打ち消し合うので,

$$Y=\sum\nolimits_{X\in\{0,1\}^{l_i}}\phi_i(X,T_{[s_{i+1}+1,s_{i+2}]},\dots,T_{[s_{n-1}+1,s_n]}) \tag{3.18}$$

式 (3.9) より

$$G_u(i+1,T,H_u(i+1,T))=(-1)^{T_{s_{i+2}}}C^{m_{i+1}}(Y) \tag{3.19}$$

$$=(-1)^{T_{s_{i+2}}}\phi_{i+1}(T_{[s_{i+1}+1,s_{i+2}]},\dots,T_{[s_{n-1}+1,s_n]}) \tag{3.20}$$

よって $i=j+1$ でも成り立つ. □

3.3 差分方程式を模倣する関数族

次に前節で示した PSPACE または CH 困難な各差分方程式を滑らかな実関数で模倣可能であることを示す.

しかし補題を述べる前に実関数の多項式時間計算可能性を実関数族のそれに拡張する. 旋字列 u で添字づけられた実関数 $f_u\colon A\to\mathbf{R}$ の族 $(f_u)_u$ を機械 M が計算するとは, 任意の実数 $x\in A$, 任意の x の名 ϕ_x に対して, 旋字列 v を $M^{\phi_x}(u,v)$ へ移す関数が, $f_u(x)$ の名であることをいう. 実関数族が多項式時間計算可能であるとは, その実関数族を計算する多項式時間神託機械が存在することである.

補題 3.4. 或る CH 困難な言語 L, 二変数多項式 μ において, 任意の正の整数 k, 任意の多項式 γ に対して, 多項式 ρ, 実関数族 $(g_u)_u,(h_u)_u$ で, $(g_u)_u$ は多項式時間計算可能であり, 各旋字列 u に対して以下を満たすものが存在する.

(i) $g_u\colon[0,1]\times[-1,1]\to\mathbf{R},\quad h_u\colon[0,1]\to[-1,1]$;

(ii) g_u と h_u は常微分方程式 (1.1) を満たす;

(iii) g_u は (∞, k) 階連続微分可能;

(iv) 任意の $i \in \mathbf{N}$, $y \in [-1,1]$ に対して

$$D^{(i,0)} g_u(0,y) = D^{(i,0)} g_u(1,y) = 0;$$

(v) 任意の $i \in \mathbf{N}$, $j \in \{0,\ldots,k\}$ に対して

$$\left| D^{(i,j)} g_u(t,y) \right| \leq 2^{\mu(i,|u|)-\gamma(|u|)};$$

(vi) $h_u(1) \geq 2^{-\rho(|u|)} \longleftrightarrow u \in L$.

補題 3.5. 或る PSPACE 困難な言語 L, 二変数多項式 μ において, $k=1$ のとき, 任意の多項式 γ に対して, 多項式 ρ, 実関数族 $(g_u)_u, (h_u)_u$ で, $(g_u)_u$ は多項式時間計算可能であり, 各旋字列 u に対して補題 3.4 の (i) – (vi) を満たすものが存在する.

この補題より各 $h_u(1)$ に $L(u)$ の情報を持つ滑らかな実関数族 $(g_u)_u, (h_u)_u$ の存在が示される. 河村による Lipschitz 連続な常微分方程式の PSPACE 困難性の証明における, 補題 4.1 に対応するが, g を微分可能にするため, 条件 (iii) – (v) が付け加えられている.

この補題の証明の基本的な流れを説明する. ある CH 困難 (resp. PSPACE 困難) な言語 L に対し, 補題 3.2(resp. 補題 3.1) を用いて L を認識する $(G_u)_u$ 及び $(H_u)_u$ を得る. そして各 G_u, H_u を模倣する滑らかな $g_u \colon [0,1] \times [-1,1] \to \mathbf{R}$ と $h_u \colon [0,1] \to \mathbf{R}$ 構成する. それらが常微分方程式 (1.1) を満たすことを差分方程式の性質により示し, $(g_u)_u$ の多項式時間計算可能性を $(G_u)_u$ の一様性から示す.

上記の証明は基本的に, 河村による証明と変わらない [3, 補題 4.1]. 河村の証明と大きく異なる点は, g_u を滑らかな関数にするため, 以下のような無限回微分可能な多項式時間実関数 $f \colon [0,1] \to \mathbf{R}$ を用いて g_u を構成していることである.

補題 3.6 ([7, 補題 3.6])**.** 以下を満たす多項式時間計算可能で無限回微分可能な実関数 $f \colon [0,1] \to \mathbf{R}$ が存在する.

(i) $f(0) = 0, \quad f(1) = 1$;

(ii) 任意の $n \geq 1$ で $f^{(n)}(0) = f^{(n)}(1) = 0$;

(iii) f は $[0,1]$ で単調増加;

(iv) 任意の $n \geq 1$ で $D^n f$ は多項式時間実関数.

さらにここでは上記の条件に加えて,

(v) 以下を満たす多項式 s が存在する

$$|D^n f| \leq s(n) \tag{3.21}$$

を満たすような f が存在することを用いて証明する. 葛による証明を確認することで多項式 s の存在は容易に示される.

ここではより難しく一般的な補題 3.4 のみ証明を行い, 補題 3.5 について証明は省略する.

補題 3.4 の証明. 補題 3.2 より CH 困難な言語 L を認識する対数段一様関数族 $(G_u)_u$, その解 $(H_u)_u$ を得る. 対数段一様関数族の定義より $G_u\colon [l(|u|)] \times [2^{q(|u|)}] \times [2^{r(|u|)}] \to \{-1, 0, 1\}$ を満たす関数 l, 多項式 q, r が存在する. また $l(|u|) = O(\log |u|)$ より任意の $x \in \mathbf{N}$ に対して, $(k+1)^{l}(x) \leq p(x)$ を満たす多項式 p が存在する. また $\rho(x) = p(x) \cdot (\gamma(x) + r(x) + 3)$, $\mu(x, y) = (x+1)q(y) + s(x+1)$ とおく.

河村による証明と同様に $(G_u)_u, (H_u)_u$ を拡張することにより, 以下のことを仮定する.

$$H_u(i, 2^{q(|u|)}) = \begin{cases} L(u) & (i = p(|u|)) \\ 0 & (i < p(|u|)). \end{cases} \tag{3.22}$$

$$i \neq j_u(T) \to G_u(i, T, Y) = 0 \tag{3.23}$$

$B = 2^{\gamma(|u|)+r(|u|)+s(k)+k+3}$ とおき, 各 $(t, y) \in [0, 1] \times [-1, 1]$ に対して, 自然数 N, $\theta \in [0, 1]$, 整数 Y, $\eta \in [-1/4, 3/4]$ を $t = (T + \theta)2^{-q(|u|)}$, $y = (Y + \eta)B^{-(k+1)^{j_u(T)}}$ を満たすように定める. そのとき,

$$\delta_{u,Y}(t) = \frac{2^{q(|u|)} D f(\theta)}{B^{(k+1)^{j_u(T)+1}}} G_u\left(j_u(T),\ T,\ Y \bmod 2^{r(|u|)}\right) \tag{3.24}$$

とおき g_u, h_u を以下のように定義する.

$$g_u(t, y) = \begin{cases} \delta_{u,Y}(t) & (\eta \leq \frac{1}{4}) \\ (1 - f(\frac{4\eta-1}{2}))\delta_{u,Y}(t) + f(\frac{4\eta-1}{2})\delta_{u,Y+1}(t) & (\eta > \frac{1}{4}) \end{cases} \tag{3.25}$$

$$h_u(t) = \sum_{i=0}^{l(|u|)} \frac{H_u(i, T)}{B^{(k+1)^i}} + \frac{f(\theta)}{B^{(k+1)^{j_u(T)+1}}} G_u(j_u(T), T, H_u(j_u(T), T)) \tag{3.26}$$

ただし f と多項式 s は補題 3.6 および式 (3.21) を満たすものとする.

上記のように定義した g_u, h_u が補題 3.5 で求める性質を満たすことを示す. ただし多くは河村による証明と同様に示せるため異なる条件 (iii) - (vi) のみ示す

g_u が (∞, k) 階連続的微分可能であることを示す. η が $[-1/4, 1/4]$ と $[1/4, 3/4]$ である区間それぞれにおいて微分する. 任意の $i \in \mathbf{N}$ について

$$D^i \delta_{u,Y}(t) = \frac{2^{(i+1)q(|u|)} D^{i+1} f(\theta)}{B^{(k+1)^{j_u(T)+1}}} G_u\left(j_u(T),\ T,\ Y \bmod 2^{r(|u|)}\right) \tag{3.27}$$

$$D^{(i,0)} g_u(t, y) = \begin{cases} D^i \delta_{u,Y}(\theta) & (-\frac{1}{4} < \eta < \frac{1}{4}) \\ \left(1 - f\left(\frac{4\eta-1}{2}\right)\right) D^i \delta_{u,Y}(\theta) + f\left(\frac{4\eta-1}{2}\right) D^i \delta_{u,Y+1}(\theta) & \\ & (\frac{1}{4} < \eta < \frac{3}{4}) \end{cases} \tag{3.28}$$

$j \in \{1, \ldots, k\}$ について,

$$D^{(i,j)}g_u(t,y) = \begin{cases} 0 & (-\frac{1}{4} < \eta < \frac{1}{4}) \\ (2B^{(k+1)^{j_u(T)}})^j D^j f(\frac{4\eta-1}{2})(D^i\delta_{u,Y+1}(\theta) - D^i\delta_{u,Y}(\theta)) & \\ & (\frac{1}{4} < \eta < \frac{3}{4}) \end{cases} \tag{3.29}$$

境界においても連続であるため, g_u は (∞, j) 階連続的微分可能であることが示された. 式 (3.28) に $t = 0, 1$ $(\theta = 0)$ を代入して $D^{(i,0)}g_u(0,y) = D^{(i,0)}g_u(1,y) = 0$. 上記の式より任意の $i \in \mathbf{N}$, $j \in \{0, \ldots, k\}$ について $|D^{(i,j)}g_u| \le 2^{\mu(i,|u|)-\gamma(|u|)}$.

$$h_u(1) = \frac{H_u(l(|u|), 2^{q(|u|)})}{B^{(k+1)^{l(|u|)}}} = \frac{L(u)}{2^{(k+1)^{l(|u|)}\cdot(\gamma(|u|)+r(|u|)+s(k)+k+3)}} \tag{3.30}$$

$u \notin L$ ならば $h_u(1) = 0$, $u \in L$ ならば $(k+1)^l(|u|) < p(|u|)$ より $h_u(1) \le 2^{\rho(u)}$ □

補題 3.5 の証明では PSPACE 困難な言語を認識する多項式段一様関数族 $(G_u)_u$ とその解 $(H_u)_u$ に対して式 (3.24), (3.25), (3.26) をそれぞれ,

$$\delta_{u,Y}(t) = \frac{2^{q(|u|)}Df(\theta)}{B^{j_u(T)+1}} G_u\left(j_u(T),\ T,\ Y \bmod 2^{r(|u|)}\right) \tag{3.31}$$

$$g_u(t,y) = \begin{cases} \delta_{u,Y}(t) & (\eta \le \frac{1}{4}) \\ (1 - f(\frac{4\eta-1}{2}))\delta_{u,Y}(t) + f(\frac{4\eta-1}{2})\delta_{u,Y+1}(t) & (\eta > \frac{1}{4}) \end{cases} \tag{3.32}$$

$$h_u(t) = \sum_{i=0}^{l(|u|)} \frac{H_u(i,T)}{B^i} + \frac{f(\theta)}{B^{j_u(T)+1}} G_u(j_u(T), T, H_u(j_u(T), T)) \tag{3.33}$$

と置き換える. ただし p, q, r は $G_u\colon [p(|u|)] \times [2^{q(|u|)}] \times [2^{r(|u|)}] \to \{-1, 0, 1\}$ を満たす多項式. $(g_u)_u$ と $(h_u)_u$ が補題 3.5 で求める性質を満たすことは, 補題 3.4 の証明と同様に示される.

3.4 主定理の証明

証明の概略を示す. 前の節の補題から得られる $(g_u)_u$ と $(h_u)_u$ を縮小して連結し滑らかな g と解 h を構成する. $[0, 1)$ を無限の区間に分割し, 各旋字列 u に対応する区間 $[l_u^-, c_u]$ に h_u を縮小して埋め込む. ただし次の旋字列 u' の計算に影響を与えないために, h_u を定義域方向について反転したものを区間 $[c_u, l_u^+]$ に埋め込むことで影響を相殺する. つまりある多項式 ρ' に対して $h(l_u^-) = 0,\ h(c_u) = 2^{-\rho'(|u|)}L(u),\ h(l_u^+) = 0$ を満たすように $h_u(t)$ 埋め込む. 同様に g は h が常微分方程式の解となるよう, 各旋字列 u に対応する区間に g_u を縮小して埋め込む.

定理 1.1 と定理 1.2 の関係は補題 3.5 と補題 3.4 の関係と等しい. つまり PSPACE が CH に置き換わり, $(\infty, 1)$ 回連続微分可能が (∞, k) 回連続微分可能に一般化されている. よって定理 1.1 の証明は定理 1.2 の証明から構成できるため省略する.

定理 1.2 の証明. L を CH 困難な言語とおく. L に対して補題 3.5 を用いて, まず多項式 μ をえる.

$$\lambda(x) = 2x + 2, \qquad \gamma(x) = x\mu(1,x) + x\lambda(x) \tag{3.34}$$

とおき, 各 u に対して

$$\Lambda_u = 2^{\lambda(|u|)}, \qquad c_u = 1 - \frac{1}{2^{|u|}} + \frac{2\bar{u}+1}{\Lambda_u}, \qquad l_u^{\mp} = c_u \mp \frac{1}{\Lambda_u} \tag{3.35}$$

とおく. ただし $\bar{u} \in \{0, \ldots, 2^{|u|}-1\}$ は u を二進数として解釈した数. γ に対して, 補題より ρ, $(g_u)_u$, $(h_u)_u$ を得る.

任意の $[0,1)$ の実数に対して, $l_u^{\mp} \pm \frac{t}{\Lambda_u}$ がその実数と等しくなるような $u, \pm, t \in [0,1]$ が存在する. 関数 g, h を $t \in [0,1)$, $y \in [-1,1]$ に対して,

$$g\left(l_u^{\mp} \pm \frac{t}{\Lambda_u}, \frac{y}{\Lambda_u}\right) = \begin{cases} \pm \displaystyle\sum_{l=0}^{k} \frac{D^{(0,l)} g_u(t,1)}{l!}(y-1)^l & (1 < y) \\ \pm g_u(t,y) & (-1 \leq y \leq 1) \\ \pm \displaystyle\sum_{l=0}^{k} \frac{D^{(0,l)} g_u(t,-1)}{l!}(y+1)^l & (1 < y) \end{cases} \tag{3.36}$$

$$h\left(l_u^{\mp} \pm \frac{t}{\Lambda_u}\right) = \frac{h_u(t)}{\Lambda_u}. \tag{3.37}$$

$t = 1$ のとき $g(1,y) = 0$, $h(1) = 0$ と定義する.

この g が多項式時間計算可能であり h が常微分方程式の解であることは, Lipschitz 条件の場合と同様に示されるため, 河村による証明を参照されたし [3, 定理 3.2]. ここでは特に g が (∞, k) 回連続微分可能であることのみ示す.

g_u は (∞, k) 階連続的微分可能であるため, 各区間においては (∞, k) 階連続的微分可能である. $i \in \mathbf{N}$, $j \in \{0, \ldots, k\}$, $t \in (0,1)$ において

$$D^{(i,j)} g\left(l_u^{\mp} \pm \frac{t}{\Lambda_u}, \frac{y}{\Lambda_u}\right) = \begin{cases} \pm \Lambda_u^{(i,j)} \sum_{l=j}^{k} \frac{D^{(i,l)} g_u(t,1)}{(l-j)!}(y-1)^l & (1 < y) \\ \pm \Lambda_u^{(i,j)} D^{(i,j)} g_u(t,y) & (-1 < y < 1) \\ \pm \Lambda_u^{(i,j)} \sum_{l=j}^{k} \frac{D^{(i,l)} g_u(t,-1)}{(l-j)!}(y+1)^l & (1 < y) \end{cases} \tag{3.38}$$

$D^{(i,j)} g_u$ は連続であるため $t \in (0,1)$, $y \neq -1, 1$ において連続. 境界 ($t = 0, 1$ または $y = -1, 1$) において連続であることは, 定義および補題 3.4 (iv) によりしめされる. 第一変数が 1 のとき連続であることを示す. 補題 3.4 の (v) より

$$\begin{aligned} \left| D^{(i,j)} g\left(l_u^{\mp} \pm \frac{t}{\Lambda_u}, \frac{y}{\Lambda_u}\right) \right| &\leq \Lambda_u^{i+j} \sum_{l=j}^{k} \left(|D^{(i,l)} g_u| (\Lambda_u + 1)^l \right) \\ &\leq \Lambda_u^{i+j+k} 2^{k+\mu(i,|u|)-\gamma(|u|)} \\ &= 2^{(i+j+k)\lambda(|u|)+k+\mu(i,|u|)-\gamma(|u|)}. \end{aligned} \tag{3.39}$$

γ のとり方により, $|u| \to \infty$ のとき式 (3.39) は 0 に収束する. よって $\lim_{t \to 1-0} D^{(i,j)} g(t,y) = g(1,y) = 0$. 以上により g は (∞, k) 階連続的微分可能. □

4　演算子の計算量

定理 1.1, 1.2 はいづれも関数 g を多項式時間計算可能と仮定した上で解 h の計算量について述べている．しかし微分方程式を「解く」困難さ, すなわち与えられた g から h を求める演算子の計算量は如何であろうか．この問に答えるにはまず実関数を実関数へ写す演算子の計算量を定義することを要する．

実数を入出力する関数の計算量を論ずるには, 実数を旋字列関数で表した．即ち $\mathbf{R}$ の各元の名として旋字列関数を使ったのであり, その対応を $\mathbf{R}$ の表現という．同じように実関数を入出力する演算子の計算量を論ずるには, 実関数を旋字列関数で表す．つまり連続な実関数 $h\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ の空間 $\mathrm{C}[0,1]$ や, Lipschitz 連続な実関数 $g\colon [0,1] \times [-1,1] \to \mathbf{R}$ の空間 $\mathrm{C_L}[[0,1] \times [-1,1]]$ について, 表現を指定すればよい．演算子の計算可能性や計算量はその表現に依ることになるが, ここでは [5] に従い, $\mathrm{C}[0,1]$ の表現として $\delta_\square$ を, $\mathrm{C_L}[[0,1] \times [-1,1]]$ の表現として $\delta_{\square\mathrm{L}}$ をそれぞれ用いる．$\delta_\square$ は関数空間 $\mathrm{C}[0,1]$ の表現として或る意味で自然な唯一のものであることが判っており [4], また $\delta_{\square\mathrm{L}}$ は $\delta_\square$ に Lipschitz 定数の情報を附加した表現である．

これらの表現では使われる旋字列関数の長さが有界でないため, 神託機械の時間・空間を測る方法を二階多項式を使って拡張し, これに基いて多項式空間 **FPSPACE** などの計算量クラスや, 多項式時間 Weihrauch 帰着 $\leq_\mathrm{W}$ などの帰着, その下での困難性を定義する [5]．この枠組を上述の実関数の表現と組合せることで, 本稿の結果も以下の如く構成的な形で述べることができる．

実関数 $g \in \mathrm{C_L}[[0,1] \times [-1,1]]$ を, (1.1) の解 $h \in \mathrm{C}[0,1]$ に対応させる演算子 ODE を考える．ODE は $\mathrm{C_L}[[0,1] \times [-1,1]]$ から $\mathrm{C}[0,1]$ への部分写像である．[5, 定理 4.9] では表 1.1 第三行の証明を構成的に書き直すことで, ODE が $(\delta_{\square\mathrm{L}}, \delta_\square)$-**FPSPACE**-$\leq_\mathrm{W}$ 完全であることが示された．本稿の定理 1.1 も同じように構成的に書き直すことができる．即ち ODE を (∞, k) 回連続微分可能な入力に制限したものを ODE_k と書くと,

定理 4.1. ODE_1 は $(\delta_{\square\mathrm{L}}, \delta_\square)$-**FPSPACE**-$\leq_\mathrm{W}$ 完全.

これを示すには, 定理 1.1 の証明において関数の構成に使われた情報が入力から容易に得られることを確かめればよく, 新たな技巧を要しないから詳細は省略する．この構成的な主張は非構成的な主張よりも強いものであり [5, 補題 3.7, 3.8], 定理 1.1 は定理 4.1 の系として従う．

なお定理 1.2 も同様に構成的な形で成り立ち, 各 $k \in \mathbf{N}$ について ODE_k は $(\delta_{\square\mathrm{L}}, \delta_\square)$-**CH**-$\leq_\mathrm{W}$ 困難であるが, この [5] の枠組における **CH** を定義するには相対化の扱いについて今少しの議論を要するので別稿で扱う．

5　今後の課題

一つ目の課題は (∞, k) 回連続微分可能の場合について, CH 以上の困難性を言えるのかという点である．定理 1.2 では便宜上 CH 困難と述べるにとどまっているが, 3.2 節において定義される

$\mathsf{C}_{\log}B_be$ にカープ還元可能な言語のクラスについて困難であるといえる. そのような言語クラスは, 交替性機械を確率的に動作するように拡張し, 交替回数が対数オーダーであるような機械によって認識される言語と等しい. そのようなクラスについての先行研究は存在しておらず, 大変興味深い. また導入でも述べたとおり無限微分可能という制限のもとでの, 常微分方程式の解の計算量については以前不明である.

演算子の計算量については進行中.

謝辞

本研究を遂行し発表するにあたり河村は科学研究費補助金若手研究 (B) 23700009 による援助を受けた. 記して謝意を表する.

参考文献

[1] E.A. Coddington and N. Levinson. *Theory of Ordinary Differential Equations*. McGraw-Hill, 1955.

[2] A. Kawamura. Complexity of initial value problems, 2010. To appear in *Fields Institute Communications*.

[3] A. Kawamura. Lipschitz continuous ordinary differential equations are polynomial-space complete. *Computational Complexity*, 19(2):305–332, 2010.

[4] A. Kawamura. On function space representations and polynomial-time computability. Dagstuhl Seminar 11411: Computing with Infinite Data, 2011. http://www-imai.is.s.u-tokyo.ac.jp/~kawamura/dagstuhl.pdf.

[5] A. Kawamura and S. Cook. Complexity theory for operators in analysis. In *Proceedings of the 42nd ACM Symposium on Theory of Computing*, pages 495–502. ACM, 2010.

[6] K.I. Ko. On the computational complexity of ordinary differential equations. *Information and Control*, 58(1-3):157–194, 1983.

[7] K.I. Ko. *Complexity Theory of Real Functions*. Birkhäuser Boston, 1991.

[8] K.I. Ko and H. Friedman. Computing power series in polynomial time. *Advances in Applied Mathematics*, 9(1):40–50, 1988.

[9] W. Miller. Recursive function theory and numerical analysis. *Journal of Computer and System Sciences*, 4(5):465–472, 1970.

[10] N.T. Müller. Uniform computational complexity of taylor series. *Automata, Languages and Programming*, pages 435–444, 1987.

[11] M.B. Pour-el and I. Richards. A computable ordinary differential equation which possesses no computable solution. *Annals of Mathematical Logic*, 17(1-2):61–90, 1979.

[12] J. Torán. Complexity classes defined by counting quantifiers. *Journal of the ACM*

(JACM), 38(3):752–773, 1991.

[13] K.W. Wagner. The complexity of combinatorial problems with succinct input representation. *Acta Informatica*, 23(3):325–356, 1986.

[14] Klaus Weihrauch. *Computable Analysis: An Introduction.* Texts in Theoretical Computer Science. Springer, 2000.