2011 年度冬の LA シンポジウム [15]

滑らかな常微分方程式の計算量

太田浩行*　河村彰星†　マルチン・ツィーグラー‡

カルステン・レースニク§

平成 24 年 1 月 31 日

概要

多項式時間計算可能で一回微分可能関数の常微分方程式は, **PSPACE** 完全な解を持ちうること, 及びある仮定のもと, 多項式時間計算可能で任意回微分可能関数の常微分方程式は, **PSPACE** 完全な解を持ちうることを示す. これは河村が示した Lipschitz 条件を満たす常微分方程式の解が **PSPACE** 完全たりうるという結果の拡張である.

1　導入

1.1　計算可能解析

計算可能解析 (Computable Analysis) では計算可能性理論や計算量理論の視点から解析学を扱う. 実数や実関数といった解析学の対象が, 機械により計算できるかを問う. 例えば「計算可能な実数」や「多項式時間計算可能な実関数」といった概念を定義し, 実数計算の本質的な難しさを分析する.

有限な対象においては「計算できる関数」はモデルによらず, すべてチューリング機械で計算できるものと同値であることが知られているが, 実数計算においては, 計算できる関数が互いに異なる, いくつかのモデルが提唱されている. その中でも本稿で扱うモデルにおいては, 「機械が実関数を計算する」ことを次のように定義する.

実関数 $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ を計算するといっても, 実数は有限の文字列で表されないから, 有限の時間内で機械が完全な値を読んだり書いたりすることはできない.

そこでまず実数を近似値の列で表現する. 有理数の列 $\{r_n\}$ が x を表現するとは, $\{r_n\}$ が x へ速く収束すること, すなわち $|r_n - x| \leq 2^{-n}$ を満たすこととする. 数列は $n \in \mathbf{N}$ を $r_n \in \mathbf{Q}$ へ移す関数と考えることもできる. そのような関数または数列を実数の名と呼ぶ.

---

* 東京大学

† 第 1 著者に同じ

‡ ダルムシュタット工科大学

§ 第 3 著者に同じ

表 1.1　関連研究

制限	上界	下界
—	—	計算不可能たりうる [9]
h が g の唯一解	計算可能 [1]	任意の時間がかかりうる [5] [8]
Lipschitz 条件を満たす	多項式領域	多項式領域困難になりうる [4]
$\mathcal{D}^{(0,1)}g$ が連続	多項式領域	多項式領域困難たりうる [本稿]
$\mathcal{D}^{(0,i)}g$ が連続	多項式領域	ある仮定のもと多項式領域困難たりうる [本稿]
g が解析的	多項式時間 [7] [3]	—

関数を計算する機械を考えるとき, 入力である実数は, その名を神託として機械に与える. ある神託機械が関数 $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ を計算するとは, 入力となる実数 x の名を神託として与えられ, 求める精度 n を入力として与えられたとき, 有理数 s_n で $|s_n - f(x)| \le 2^{-n}$ を満たすものを出力することとする.

この神託機械の資源を制限することで, 多項式時間 ($\mathbf{P}$) や多項式領域 ($\mathbf{PSPACE}$) に対応する実関数のクラスを定義できる. 厳密には 2 節において定義する.

1.2　問題と関連研究

連続実関数 $g\colon [0,1] \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ にたいして次の常微分方程式を考える.

$$h(0) = 0, \qquad h'(t) = g(t, h(t)) \quad (t \in [0,1]) \tag{1.1}$$

本稿では「g を単純な実関数としたとき, h がどれほど複雑な実関数になりうるか」を考える.

様々な制限のもと常微分方程式の解の計算量が研究されている [表 1.1]. g に何の制限も設けない場合, その解は計算不能たりうる. g が唯一解を持つよう制限した場合, 解は計算可能であるが, 任意の時間がかかりうる. Lipschitz 条件は常微分方程式の解の一意性を保証する重要な条件である. Lipschitz 条件を満たすとき, 解は多項式領域計算可能であり, 多項式領域計算完全たりうる. g が解析的であるとき, 常微分方程式の解も解析的となるため, 多項式時間計算可能である.

我々は制限と下界の関係について調べ, 以下の知見を得た.

定理 1.1. pp 多項式時間実関数 $g\colon [0,1] \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ で, $(\infty, 1)$ 回連続的微分可能であり, g の常微分方程式 (1.1) の解 h が $\mathbf{PSPACE}$ 完全であるものが存在する.

定理 1.2. 任意の自然数 $k \ge 2$ にたいして, 多項式時間実関数 $g\colon [0,1] \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ で, (∞, k) 回連続的微分可能であり, g の常微分方程式 (1.1) の解 h が $\mathbf{DIVp(log)}$ 困難であるものが存在する.

DIVp(log) とは本稿において定義される計算量クラスであり, **DIVp(log)** $\subseteq$ **PSPACE** であるが, **DIVp(log)** $=$ **PSPACE** は未解決であるため, (∞, k) 階連続的微分可能関数の常微分方程式の解が **PSPACE** 完全になりうるかは未解決である. 厳密な定義は 1.3 節で導入する.

二変数関数 g が (i, j) 階連続的微分可能であるとは, 第一変数について i 回, 第二変数について j 回微分可能であり, その導関数が連続であることと定義する. これは多変数関数における k 階連続的微分可能の定義とは異なる.

また定理 1.2 において任意の k に対して (∞, k) 階微分可能な関数を考えているが, 一つ関数が任意の k にたいして k 階微分ではない. つまり g が無限回微分可能であると制限しているわけではない. 無限回微分可能な関数に対する常微分方程式の計算量は今後の課題である.

1.3 離散初期値問題

関数 $G\colon [P] \times [Q] \times [R] \to -1, 0, 1$ にたいして, 関数 H が以下を満たすとき, H を G の差分方程式の解と呼ぶ.

$$H_u\colon [P(|u|) + 1] \times \left[2^{Q(|u|)} + 1\right] \to [d] \tag{1.2}$$

$$H_u(i, 0) = H_u(0, T) = 0$$

$$H_u(i + 1, T + 1) = H_u(i + 1, T) + G_u(i, T, H_u(i, T))$$

$$\left(i \in [P(|u|)],\ T \in \left[2^{Q(|u|)}\right]\right) \tag{1.3}$$

離散初期値問題が言語 L を認識するとはその解 $(H_u)_u$ が任意の文字列 u で $H_u(P(|u|), 2^{Q(|u|)}) = L(u)$ を満たすことと定義する.

河村の論文において離散初期値問題が **PSPACE** 完全であることが示されている.

補題 1.3 (補題 4.7. [4])**.** 任意の言語 $L \in$ **PSPACE** にたいして, L を認識する離散初期値問題が存在する.

もと論文では $d = 2$ であったが, 後の議論との統一のために一般化する.

離散初期値問題へさらに制限を加えた問題を考える. 定数 d, 関数 $P\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, 多項式 $Q\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, 関数族 $(G_u)_u$ の組 $\langle d, P, Q, (G_u)_u \rangle$ が (**??**), (**??**) に加え,

$$P(x) = O(\log x) \text{ かつ } P \text{ は多項式時間計算可能} \tag{1.4}$$

を満たすとき対数深さ離散初期値問題であると呼ぶ. 対数深さ離散初期値問題の解 $(H_u)_u$ が満たすべき条件は離散初期値問題と同じく (1.2), (1.3) である.

対数深さ離散初期値問題が認識する言語の集合を **DIVp(log)** と呼ぶ. 深さが多項式である離散初期値問題が認識する言語は **PSPACE** であったため, **DIVp(log)** $\subseteq$ **PSPACE** であるが, **DIVp(log)** $=$ **PSPACE** は未解決である. **DIVp(log)** は $\sharp$**P** 困難？[*1]

[*1] d を $2^{R(|u|)}$ で置き換えれば, $\sharp$**P** 困難になる. しかし d のままでは $\sharp$**P** 困難は難しそう. 離散初期値問題をそのように定義するか？

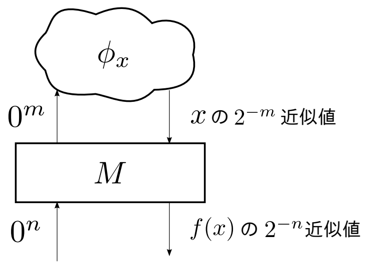

図 2.1　実関数のモデル化

2　準備

2.1　表記

(二進) 自然数の集合を $\mathbf{N}$, 整数の集合を $\mathbf{Z}$, 実数の集合を $\mathbf{R}$, 有理数の集合を $\mathbf{Q}$, $0^{\mathbf{N}} = \{0^n \mid n \in \mathbf{N}\}$ と表記する.

$A \subset \mathbf{R}$ とする. 一変数関数 $f \colon A \to \mathbf{R}$ が i 回微分可能であるとき, その i 階導関数を $\mathcal{D}^{(i)} f$ と表記する.

二変数関数 $g \colon A \times B \to \mathbf{R}$ が (i, j) 階連続的微分可能であるとき, 第一変数にたいして i 階, 第二変数にたいして j 階の導関数はその微分の順序によらず等しい. [10] よってその導関数を $\mathcal{D}^{(i,j)} g$ と表記する.

実関数 $f \colon A \to \mathbf{R}$ にたいして $\max_{x \in A} f(x)$ を $|f|$ と表記する.

2.2　実数の名

実数は無限の長さを持つため, 有限な文字列に符号化することが不可能である. そこで実数を計算可能なモデルで扱うために, 求める精度を与えると, 実数の近似値をその精度で返すような関数を考える.

定義 2.1 (実数の名)**.** 関数 $\phi \colon 0^{\mathbf{N}} \to \mathbf{Z}$ が実数 $x \in [0, 1]$ の名であるとは, $\phi(0^n) = \lfloor x \cdot 2^n \rfloor$ または $\phi(0^n) = \lceil x \cdot 2^n \rceil$ を満たすこと.

2.3　計算可能実関数, 多項式時間実関数

実関数は入力として実数を受け取るが, 実数を符号化することは不可能である. そこで入力の実数は神託として与える. そして実関数のモデルを, 求める精度を入力として受け取り関数の入力である実数の名を神託とし, 関数の値の近似値を返すような神託機械として定義する [図 2.3]. より厳密には以下のように定義する.

定義 2.2. 神託機械 M が実関数 $f\colon A \to \mathbf{R}$ を計算するとは, 任意の実数 $x \in A$, 任意の x の名 ϕ_x にたいして, M^{ϕ_x} が $f(x)$ の名であること.

計算可能な実関数は Grzegorczyk によって初めて形式的に定義された [2]. 多変数関数のモデルも, 変数と同じ数だけ神託を持つ神託機械によって同様に定義される.

ある実関数が計算可能であるとは, その関数を計算する神託機械が存在することである. 同様に, ある実関数が多項式時間計算可能であるとは, その関数を計算する多項式時間神託機械が存在することである.

神託機械 M がある実関数族 $(f_u)_u$ を計算するとは, 入力 u を受けったとき, M_u が f_u を計算することである. 実関数族が多項式時間計算可能であるとは, その実関数族を計算する多項式時間神託機械が存在することである.

神託機械 M で f を計算するとき, 求める精度 n にたいして, x の近似値に必要な精度 m が定まるため, 計算可能な関数は連続である. また n と m の対応関係と有理数における近似値を与えることで, 計算可能実関数や多項式時間計算可能実関数にたいして, 神託機械を用いない同値な特徴付けが可能である.

補題 2.3. 実関数 $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ にたいして, $\phi_f\colon (\mathbf{Q} \cap [0,1]) \times 0^{\mathbf{N}} \to \mathbf{Q}$, $m_f\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ は

$$|\phi_f(d, 0^n) - f(d)| \leq 2^{-n} \qquad (d \in (\mathbf{Q} \cap [0,1]), \quad n \in \mathbf{N}) \tag{2.1}$$

$$|x - y| \leq 2^{-p_f(m)} \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq 2^{-m} \qquad (x, y \in [0,1], \quad m \in \mathbf{N}) \tag{2.2}$$

をみたす関数とする.

- f が計算可能であることは, 計算可能な ϕ_f, m_f が存在することと同値である.
- f が多項式時間計算可能であることは, 多項式時間計算可能な ϕ_f, 多項式 m_f が存在することと同値である.

2.4 完全性

関数の下限を示すために, 困難及び完全性を定義する. 言語 L が実関数 $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ に多項式時間還元可能であるとは, f を計算する機械をブラックボックスとして, 入力 u にたいして, 精度を f に与え, ある実数 x_u の神託を模倣し, $f(x_u)$ の近似値から, u が L に含まれるか否かを多項式時間で計算可能であることである [図 2.4]. 厳密には以下のように定義する.

定義 2.4 (多項式時間還元可能)**.** 言語 L が実関数 $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ に多項式時間還元可能であるとは, 任意の文字列 u にたいして, 以下を満たす実数 $x_u \in [0,1]$ 多項式時間計算可能な関数 R, S, T が存在すること.

- $R\colon N \times N \to \{0,1\}, \quad S\colon \mathbf{N} \times 0^{\mathbf{N}} \to \mathbf{N}, \quad T\colon \mathbf{N} \to 0^{\mathbf{N}}$;
- $S(u, \cdot)$ は実数 x_u の名;

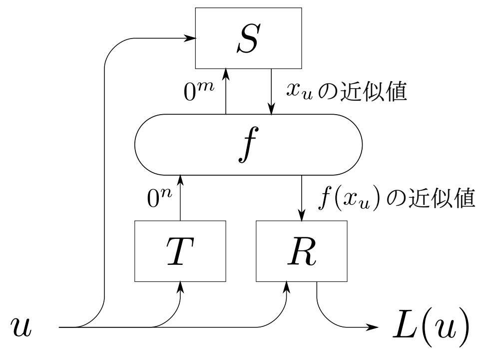

図 2.2　言語 L から関数 f への還元

- 任意の $f(x_u)$ の名 ϕ にたいして

$$L(u) = R(u, \phi(T(u))).$$

計算量 C にたいして, 関数 f が C 困難であるとは, 任意の C に含まれる言語が f に多項式時間還元可能であることである. さらに f が C に含まれるとき, つまり C に対応する神託機械で f を計算するものが存在するとき, f は C 完全であると定義する.

3　微分可能関数と常微分方程式

3.1　離散初期値問題を模倣する関数族

任意の言語 $L \in \mathbf{PSPACE}$, 文字列 u にたいして, 上記の計算を模倣し $L(u)$ を計算する微分可能な実関数 g_u を構成する.

補題 3.1. 任意の言語 $L \in \mathbf{PSPACE}$ にたいして, 係数のみに i を含む多項式 μ_i が存在して, 任意の多項式 γ にたいして, 多項式 ρ, 関数族 $(g_u)_u, (h_u)_u$ で, $(g_u)_u$ は多項式時間計算可能であり, 各二進文字列 u にたいして以下を満たすものが存在する.

(i) $g_u\colon [0,1] \times [-1,1] \to \mathbf{R}, \quad h_u\colon [0,1] \to [-1,1]$;

(ii) h_u は g_u の常微分方程式 (1.1) の解;

(iii) g_u は $(\infty, 1)$ 階連続微分可能;

(iv) 任意の $i \in \mathbf{N}$, $y \in [-1,1]$ にたいして

$$\mathcal{D}^{(i,0)} g_u(0,y) = \mathcal{D}^{(i,0)} g_u(1,y) = 0$$

(v) 任意の $i \in \mathbf{N}$ にたいして

$$|\mathcal{D}^{(i,1)} g_u| \le 2^{\mu_i(|u|)-\gamma(|u|)}, \qquad |\mathcal{D}^{(i,0)} g_u| \le 2^{\mu_i(|u|)-\gamma(|u|)}$$

(vi) $h_u(1) = 2^{-\rho(|u|)} L(u)$.

ここで実関数族 $(g_u)_u$ ($g_u\colon [0,1]\times[-1,1]\to\mathbf{R}$) が多項式時間計算可能であることを, 実関数の多項式時間計算可能性から自然に定義する. つまりある神託機械 M が実関数族 $(g_u)_u$ を計算するとは, 実数 t,y の名 ϕ,ψ を神託として受けとり, 文字列 u, 求める精度 n を入力として受けとったとき, $|M^{\phi,\psi}(u,0^n)-g_u(t,y)|\le 2^{-n}$ を満たすことである. そして実関数族が多項式時間計算可能であるとは, 実関数族を計算し, $|u|$ と n の多項式時間で動作する神託機械が存在することと定義する.

この補題の証明の前に, 葛によって示されている滑らかな多項式時間実関数 $f\colon [0,1]\to\mathbf{R}$ を導入する.

補題 3.2 (補題 3.6. [6])**.** 以下を満たす多項式時間無限回微分可能実関数 $f\colon[0,1]\to\mathbf{R}$ が存在する.

(i) $f(0)=0,\quad f(1)=1;$

(ii) 任意の $n\ge 1$ で $f^{(n)}(0)=f^{(n)}(1)=0;$

(iii) f は $[0,1]$ で単調増加;

(iv) 任意の $n\ge 1$ で $f^{(n)}$ は多項式時間実関数.

補題 3.1 の証明. 補題 1.3 から, L を認識する離散初期値問題 $\langle d,p,q,(G_u)_u\rangle$ とその解 $(H_u)_u$ を得る. 各ステップを $p(u)$ 個に分割することで, $G_u(i,T,Y)\ne 0$ を満たす i を各 T にたいしてたかだか 1 つにすることができる. そのような i のことを $j_ul(T)$ と表現する. 任意の i で $G_u(i,T,Y)=0$ ならば $j_u(T)$ は任意の値を取るとする. さらに以下を満たすとしても一般性を失わない.

$$H_u(i,2^{q(|u|)})=\begin{cases}L(u) & (i=p(|u|))\\ 0 & (i<p(|u|))\end{cases}\tag{3.1}$$

$$G_u(i,2\cdot 2^{q(|u|)}-1-T,Y)=\begin{cases}0 & (i=p(|u|)-1)\\ -G_u(i,T,Y) & (i<p(|u|)-1)\end{cases}\tag{3.2}$$

$$H_u(i,2\cdot 2^{q(|u|)}-T)=\begin{cases}H_u(p(|u|),2^{q(|u|)}) & (i=p(|u|))\\ H_u(i,T) & (i<p(|u|))\end{cases}\tag{3.3}$$

補題 3.2 の f にたいして, 自然数 c_i を各 $i\in\mathbf{N}$ にたいして $|\mathcal{D}^{(i)}f(x)|\le 2^{c_i}$ を満たす最小の自然数と定める. 定数 $d'=\lceil\log(4d+1)\rceil$, $B=2^{\gamma(|u|)+d'}$ とおき, 各 $(t,y)\in[0,1]\times[-1,1]$ にたいして, 自然数 N, $\theta\in[0,1]$, 整数 Y, $\eta\in[-1/4,3/4]$ を $t=(T+\theta)2^{-q(|u|)}$, $y=(Y+\eta)B^{-j_u(T)}$ を満たすように定める.

そのとき,

$$\delta_{u,Y}(t)=\frac{2^{q(|u|)}f'(\theta)}{B^{j_u(T)+1}}G_u\left(j_u(T),T,\min\left(Y \bmod 2^{d'},\ d-1\right)\right)\tag{3.4}$$

とおき g_u, h_u を以下のように定義する.

$$g_u(t,y) = \begin{cases} \delta_{u,Y}(t) & (\eta \le \frac{1}{4}) \\ (1 - f(\frac{4\eta-1}{2}))\delta_{u,Y}(t) + f(\frac{4\eta-1}{2})\delta_{u,Y+1}(t) & (\eta > \frac{1}{4}) \end{cases} \tag{3.5}$$

$$h_u(t) = \sum_{i=0}^{p(|u|)} \frac{H_u(i,T)}{B^i} + \frac{f(\theta)}{B^{j_u(T)+1}} G_u(j_u(T), T, H_u(j_u(T),T)) \tag{3.6}$$

上記のように定義した g_u, h_u が補題 3.1 で求める性質を満たすことを示す. (i) は自明. $(g_u)_u$ が多項式時間計算可能であることは補題 2.3 によって示される.

h_u は g_u の常微分方程式の解であることを示す. まず h_u について解析する. $h_u(t) = (Y+\eta)B^{-j_u(T)}$ とおくときの, η の範囲がどうなるか, つまり式 (3.5) のどちらのケースを使うかを考える. 式 (4.4) の一つ目の項において $i \le j_u(T)$ の合計は $B^{j_u(T)}$ の倍数なので η に影響はない. $i > j_u(T)$ の合計は,

$$\begin{aligned} \sum_{i>j_u(T)} \frac{H_u(i,T)}{B^i} &\le \sum_{i>j_u(T)} \frac{d-1}{B^i} = \sum_{i>j_u(T)} \frac{d-1}{B^{i-j_u(T)}} B^{-j_u(T)} \\ &\le \sum_{i>j_u(T)} \frac{(d-1)}{(4d+1)^{i-j_u(T)}} B^{-j_u(T)} \\ &= \frac{d-1}{4d} B^{-j_u(T)} \end{aligned}$$

二つ目の項の絶対値は

$$\left| \frac{f(\theta)}{B^{j_u(T)+1}} G_u(j_u(T), T, H_u(j_u(T),T)) \right| \le \frac{1}{B^{j_u(T)+1}} \le \frac{B^{-j_u(T)}}{4d+1} \tag{3.7}$$

$(\frac{d-1}{4d} + \frac{1}{4d+1})B^{-j_u(T)} \le \frac{1}{4}B^{-j_u(T)}$ より $h_u(t) = (Y+\eta)B^{-j_u(T)}$ を満たす $\eta \in [-1/4, 1/4]$ が存在する. このとき,

$$Y = \sum_{i=0}^{j_u(T)} H_u(i,T) \cdot B^{j_u(T)-i}. \tag{3.8}$$

B は $2^{d'}$ の倍数なので, $\min(Y \bmod 2^{d'}, d-1) = \min(H_u(j_u), d-1) = H_u(j_u)$. (3.5) へ Y と η を代入すると,

$$\begin{aligned} g_u(t, h_u(t)) &= \frac{2^{q(|u|)} f'(\theta)}{B^{j_u(T)+1}} G_u(j_u(T), T, H_u(j_u(T),T)) \\ &= \mathcal{D}^{(1)} h_u(t). \end{aligned}$$

よって h_u は g_u の常微分方程式の解.

g_u が $(\infty, 1)$ 階連続的微分可能であることを証明する. η が $[-1/4, 1/4]$ と $[1/4, 3/4]$ である区間それぞれにおいて微分する.

$$\mathcal{D}^{(i)}\delta_{u,Y}(t) = \frac{2^{(i+1)q(|u|)}\mathcal{D}^{(i+1)}f(\theta)}{B^{j_u(T)+1}} G_u\left(j_u(T), T, \min\left(Y \bmod 2^{d'}_{,}\ d-1\right)\right) \tag{3.9}$$

$$\mathcal{D}^{(i,0)}g_u(t,y) = \begin{cases} \mathcal{D}^{(i)}\delta_{u,Y}(t) & (-\frac{1}{4} < \eta < \frac{1}{4}) \\ \left(1 - f\left(\frac{4\eta-1}{2}\right)\right)\mathcal{D}^{(i)}\delta_{u,Y}(t) + f\left(\frac{4\eta-1}{2}\right)\mathcal{D}^{(i)}\delta_{u,Y+1}(t) & \\ & (\frac{1}{4} < \eta < \frac{3}{4}) \end{cases} \tag{3.10}$$

$$\mathcal{D}^{(i,1)}g_u(t,y) = \begin{cases} 0 & (-\frac{1}{4} < \eta < \frac{1}{4}) \\ 2B^{j_u(T)}\mathcal{D}^{(1)}f(\frac{4\eta-1}{2})(\mathcal{D}^{(i)}\delta_{u,Y+1}(t) - \mathcal{D}^{(i)}\delta_{u,Y}(t)) & \\ & (\frac{1}{4} < \eta < \frac{3}{4}) \end{cases} \tag{3.11}$$

f は 無限回微分可能であるため, $\delta_{u,Y}$ も無限回微分可能である. よって 区間 $[-1/4, 1/4]$, $[1/4, 3/4]$ において $\mathcal{D}^{(i,0)}g_u$, $\mathcal{D}^{(i,1)}g_u$ は連続. $\eta = 1/4$ および $\eta = 3/4(-1/4)$ においても連続であることは自明. よって g_u は $(\infty, 1)$ 階連続的微分可能.

式 (4.8) に $t = 0$ を代入して $\mathcal{D}^{(i,0)}g_u(0,y) = \mathcal{D}^{(i,0)}g_u(1,y) = 0$.

$|\mathcal{D}^{(i,1)}g_u| \leq 2^{\mu_i(|u|)-\gamma(|u|)}$ および $|\mathcal{D}^{(i,0)}g_u| \leq 2^{\mu_i(|u|)-\gamma(|u|)}$ を示す.

$$|\mathcal{D}^{(i)}\delta_{u,Y}(t)| \leq \left|\frac{2^{(i+1)q(|u|)}\mathcal{D}^{(i+1)}f(\theta)}{B^{j_u(T)+1}}\right| \leq \frac{2^{(i+1)q(|u|)+c_i}}{B^{j_u(T)+1}} \tag{3.12}$$

$\mu_i(k) = (i+1)q(k) + c_i + c_1 + 2$ とおく. これは λ に依存しない. B の定義より

$$\left|\mathcal{D}^{(i,0)}g_u\right| \leq |\mathcal{D}^{(i)}\delta_{u,Y}(t)| \leq \frac{2^{(i+1)q(|u|)+c_i}}{B} \leq 2^{\mu_i(|u|)-\gamma(|u|)} \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned} \left|\mathcal{D}^{(i,1)}g_u\right| &\leq 2B^{j_u(T)}\left|\mathcal{D}^{(1)}f\left(\frac{4\eta-1}{2}\right)\right| \cdot \left|\mathcal{D}^{(i)}\delta_{u,Y+1}(t) - \mathcal{D}^{(i)}\delta_{u,Y}(t)\right| \\ &\leq 2B^{j_u(T)} \cdot 2^{c_1} \cdot 2 \cdot \frac{2^{(i+1)q(|u|)+c_i}}{B^{j_u(T)+1}} \\ &= \frac{2^{(i+1)q(|u|)+c_i+c_1+2}}{B} \leq 2^{\mu_i(|u|)-\gamma(|u|)}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

(vii) は

$$\begin{aligned} h_u(1) &= \frac{H_u(p(|u|), 2^{q(|u|)})}{B^{p(|u|)}} \\ &= \frac{L(u)}{2^{p(|u|)(\gamma(|u|)+d')}} \end{aligned} \tag{3.15}$$

より, $\rho(k) = p(k)(\gamma(k) + d')$ とおくと成り立つ. □

3.2 定理 1.1 の証明

証明. L を **PSPACE** 完全な言語とおく. **PSPACE** 完全な言語 L にたいして補題 3.1 を用いて, まず多項式 μ_i をえる. μ_i は i を係数部にのみ持つ多項式であるため, $\mu_i(k) = O(k^c)$ をみたす最

小の定数 c が存在する.

$$\lambda(k) = 2k + 2, \qquad \gamma(k) = k^{c+1} + k\lambda(k) \tag{3.16}$$

とおき, 各 u にたいして

$$\Lambda_u = 2^{\lambda(|u|)}, \qquad c_u = 1 - \frac{1}{2^{|u|}} + \frac{2\bar{u}+1}{\Lambda_u}, \qquad l_u^{\mp} = c_u \mp \frac{1}{\Lambda_u} \tag{3.17}$$

とおく. ただし $\bar{u} \in \{0, \ldots, 2^{|u|} - 1\}$ は u を二進数として解釈した数. γ にたいして, 再び補題より ρ, $(g_u)_u$, $(h_u)_u$ を得る.

任意の $[0,1)$ の実数にたいして, $l_u^{\mp} \pm \frac{t}{\Lambda_u}$ がその実数と等しくなるような $u, \pm, t \in [0,1]$ が存在する. 関数 g, h を $t \in [0,1]$, $y \in \mathbf{R}$ にたいして, それぞれ $[0,1) \times [-1,1]$ の範囲と $[0,1)$ の範囲で下のように定義する.

$$g\left(l_u^{\mp} \pm \frac{t}{\Lambda_u}, \frac{y}{\Lambda_u}\right) = \begin{cases} \pm\left(g_u(t,1) + \mathcal{D}^{(0,1)}g_u(t,1)(y-1)\right) & (1 < y) \\ \pm g_u(t,y) & (-1 \le y \le 1) \\ \pm\left(g_u(t,-1) + \mathcal{D}^{(0,1)}g_u(t,-1)(y+1)\right) & (y < -1) \end{cases} \tag{3.18}$$

$$h\left(l_u^{\mp} \pm \frac{t}{\Lambda_u}\right) = \frac{h_u(t)}{\Lambda_u}. \tag{3.19}$$

任意の $y \in \mathbf{R}$ にたいして $g(1,y) = h(1) = 0$ と定義する.

この g と h が定理 1.1 で求める関数の性質を満たすことを示す.

まず g が多項式時間計算可能であることを補題 2.3 を用いて示す. 各有理数 T, Y について $g(T,Y)$ を求めるとき, $T = l_u^{\mp} \pm t/\Lambda_u$, $Y = y/\Lambda_u\Gamma_u$ を満たすような $u, \pm, t, y$ は, 多項式時間で計算可能であり, $(g_u)_u$ は多項式時間計算可能なので $g(T,Y)$ は多項式時間計算可能.

g が $(\infty, 1)$ 階連続的微分可能であることをしめすため, まず g が $(\infty, 0)$ 階連続的微分可能であることをしめす.

g_u は $(\infty, 1)$ 階連続的微分可能であるため, 各区間においては $(\infty, 1)$ 階連続的微分可能である. $t \in (0,1)$ において

$$\mathcal{D}^{(i,0)}g\left(l_u^{\mp} \pm \frac{t}{\Lambda_u}, \frac{y}{\Lambda_u}\right) = \begin{cases} \pm\Lambda_u^i\left(\mathcal{D}^{(i,0)}g_u(t,1) + \mathcal{D}^{(i,1)}g_u(t,1)(y-1)\right) & (1 < y) \\ \pm\Lambda_u^i\mathcal{D}^{(i,0)}g_u(t,y) & (-1 < y < 1) \\ \pm\Lambda_u^i\left(\mathcal{D}^{(i,0)}g_u(t,-1) + \mathcal{D}^{(i,1)}g_u(t,-1)(y+1)\right) & (y < -1) \end{cases} \tag{3.20}$$

$\mathcal{D}^{(i,0)}g_u$ は連続であるため $t \in (0,1)$, $y \neq -1, 1$ の区間において連続. 確認すべきなのは g_u 同士をつなぐ境界 $t = 0, 1$ と g_u の外側との境界 $y = 0, 1$, および極限 g_u の極限, つまり g の第一引数が 1 へ限りなく近づくとき発散せずに連続であることである.

$y=1$ のとき $\mathcal{D}^{(i,0)}g\,(l_u^{\mp}\pm t/\Lambda_u, y/\Lambda_u)=\pm\Lambda_u^i\mathcal{D}^{(i,0)}g_u(t,1)$, $y=-1$ のとき $\mathcal{D}^{(i,0)}g\,(l_u^{\mp}\pm t/\Lambda_u, y/\Lambda_u)=\pm\Lambda_u^i\mathcal{D}^{(i,0)}g_u(t,-1)$ より $\mathcal{D}^{(i,0)}g$ は第二変数について連続である.

第一変数が $[0,1)$ の範囲にあるとき, つまり $l_u^{\mp}\pm t/\Lambda_u$ と表される範囲において連続であることをしめす. $t=1$ において g_u と $-g_u$ が接続され, $t=0$ において g_u とつぎの文字 u' の関数 $g_{u'}$ が接続されているが, $\mathcal{D}^{(i,0)}g_u(0,y)=\mathcal{D}^{(i,0)}g_u(1,y)=0$ より連続に接続されている.

最後に第一変数が 1 へ向かうとき発散しないことをしめす.

$$\begin{aligned}\left|\mathcal{D}^{(i,0)}g\left(l_u^{\mp}\pm\frac{t}{\Lambda_u},\frac{y}{\Lambda_u}\right)\right| &\le \Lambda_u^i(|\mathcal{D}^{(i,0)}g_u|+|\mathcal{D}^{(i,1)}g_u|(\Lambda_u+1))\\ &\le \Lambda_u^i(\Lambda_u+2)2^{\mu_i(|u|)-\gamma(|u|)}\\ &\le \Lambda_u^{(i+1)}2^{\mu_i(|u|)-\gamma(|u|)+1}\\ &= 2^{(i+1)\lambda(|u|)+\mu_i(|u|)+1-\gamma(|u|)} \end{aligned}\tag{3.21}$$

γ のとり方により, $|u|\to\infty$ のとき式 (3.21) は 0 に収束する. よって $\lim_{t\to1-0}\mathcal{D}^{(i,0)}g(t,y)=0$. とくに $i=0$ のとき, $\lim_{t\to1-0}g(t,y)=0=g(1,y)$ より 1 で連続. 以上により g が $(\infty,0)$ 階連続的微分可能であることをしめした.

g が $(\infty,1)$ 階連続的微分可能であることをしめす. $(\infty,0)$ 階連続的微分可能と同様に, 各区間において, $(\infty,1)$ 階連続的微分可能であるためそれぞれ導関数を求める. $t\in(0,1)$ において

$$\mathcal{D}^{(i,1)}g\left(l_u^{\mp}\pm\frac{t}{\Lambda_u},\frac{y}{\Lambda_u}\right)=\begin{cases}\pm\Lambda_u^{i+1}\mathcal{D}^{(i,1)}g_u(t,1) & (1<y)\\ \pm\Lambda_u^{i+1}\mathcal{D}^{(i,1)}g_u(t,y) & (-1<y<1)\\ \pm\Lambda_u^{i+1}\mathcal{D}^{(i,1)}g_u(t,-1) & (y<-1).\end{cases}\tag{3.22}$$

$\mathcal{D}^{(0,1)}g(t,1)=\pm\Lambda_u\mathcal{D}^{(0,1)}g_u(t,1)$, $\mathcal{D}^{(0,1)}g(t,-1)=\pm\Lambda_u\mathcal{D}^{(0,1)}g_u(t,-1)$ であり, 第二変数について連続.

第一変数について連続性をしめす. $[0,1)$ 区間において $t\in(0,1)$ ならば $\mathcal{D}^{(i,1)}g_u$ が連続であるため $\mathcal{D}^{(i,1)}g$ も連続. $g_u(0,y)=g_u(1,y)=1$ より $\mathcal{D}^{(i,1)}g_u(0,y)=\mathcal{D}^{(i,1)}g_u(1,y)=0$ なので $\mathcal{D}^{(i,1)}g(0,y)=\mathcal{D}^{(i,1)}g(1,y)=0$ のため $t=0,1$ においても連続.

最後に第一変数が 1 へ向かうとき発散しないことをしめす.

$$\begin{aligned}\left|\mathcal{D}^{(i,1)}g\left(l_u^{\mp}\pm\frac{t}{\Lambda_u},\frac{y}{\Lambda_u}\right)\right| &\le \Lambda_u^{i+1}|\mathcal{D}^{(i,1)}g_u|\\ &\le 2^{(i+1)\lambda(|u|)+\mu_i(|u|)-\gamma(|u|)}\end{aligned}\tag{3.23}$$

γ のとり方により $|u|\to\infty$ のとき $2^{(i+1)\lambda(|u|)+\mu_i(|u|)-\gamma(|u|)}$ は 0 へ収束する. よって $\lim\limits_{t\to1-0}\mathcal{D}^{(i,0)}g(t,y)=0$. 以上により g が $(\infty,1)$ 階連続的微分可能であることをしめした.

h が g の常微分方程式の解であることを示す. $h(0)=0, \quad \mathcal{D}^{(1)}h(1)=0=g(1,h(1))$ は自明.

$$\begin{aligned} h'\left(l_u^{\mp} \pm \frac{t}{\Lambda_u}\right) &= \pm \frac{h_u'(t)}{\Lambda_u} \\ &= \pm g_u\left(t, h_u(t)\right) \\ &= g\left(l_u^{\mp} \pm \frac{t}{\Lambda_u}, \frac{h_u(t)}{\Lambda_u}\right) \\ &= g\left(l_u^{\mp} \pm \frac{t}{\Lambda_u}, h\left(l_u^{\mp} \pm \frac{t}{\Lambda_u}\right)\right). \end{aligned} \tag{3.24}$$

L は h に還元可能であることを示す.

$$h(c_u) = \frac{h_u(1)}{\Lambda_u} = \frac{L(u)}{2^{\lambda(|u|)+\rho(|u|)}} \tag{3.25}$$

つまり R, S, T を以下のように定義することで, 還元可能.

$$R(u,v) = v \tag{3.26}$$

$$S(u,0^n) = \lfloor 2^n c_u \rfloor \text{ を表す文字列}, \tag{3.27}$$

$$T(u) = 0^{\lambda(|u|)+\rho(|u|)} \tag{3.28}$$

L は **PSPACE** 完全であるため, h も **PSPACE** 完全. □

4 任意回微分可能関数と常微分方程式

第二変数について任意回微分可能な関数の常微分方程式の解は, **DIVp(log)** 困難でありうることを証明する.

4.1 対数深さ離散初期値問題を模倣する関数族

証明の流れは $(\infty,1)$ 階連続的微分可能の時と変わらない. 任意の言語 $L \in \mathbf{DIVp(log)}$, 文字列 u にたいして, 上記の対数深さ離散初期値問題を模倣し $L(u)$ を計算する任意回微分可能な実関数 g_u を構成する.

補題 4.1. 任意の自然数 $k \geq 2$, 任意の言語 $L \in \mathbf{DIVp(log)}$ にたいして, 係数のみに i を含む多項式 μ_i が存在して, 任意の多項式 γ にたいして, 関数 $\rho\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, 関数族 g_u, h_u で, $\rho, (g_u)_u$ は多項式時間計算可能であり, 各二進文字列 u にたいして以下を満たすものが存在する.

(i) $g_u\colon [0,1]\times[-1,1] \to \mathbf{R}, \quad h_u\colon [0,1] \to [-1,1]$;

(ii) h_u は g_u の常微分方程式 (1.1) の解;

(iii) g_u は (∞,k) 階連続微分可能;

(iv) 任意の $i \in \mathbf{N}$, $y \in [-1,1]$ にたいして

$$\mathcal{D}^{(i,0)}g_u(0,y) = \mathcal{D}^{(i,0)}g_u(1,y) = 0$$

(v) 任意の $i \in \mathbf{N}$, $j \in \{0, \ldots, k\}$ にたいして

$$\left|\mathcal{D}^{(i,j)} g_u(t,y)\right| \le 2^{\mu_i(|u|)-\gamma(|u|)}$$

(vi) $h_u(1) = 2^{-\rho(|u|)} L(u)$.

証明. $L \in \mathbf{DIVp(log)}$ を認識する対数深さ離散初期値問題 $\langle d, p, q, (G_u)_u \rangle$ とその解 $(H_u)_u$ を得る．さらに以下のように仮定する．

$$H_u(i, 2^{q(|u|)}) = \begin{cases} L(u) & (i = p(|u|)) \\ 0 & (i < p(|u|)). \end{cases} \tag{4.1}$$

補題 3.2 の f にたいして, 自然数の族 c_i を各 $i \in \mathbf{N}$ にたいして $|\mathcal{D}^{(i)} f(x)| \le 2^{c_i}$ を満たす最小の自然数と定める．定数 $d' = \lceil \log(4d+1) \rceil$, $B = 2^{\gamma(|u|)+d'}$ とおき, 各 $(t,y) \in [0,1] \times [-1,1]$ にたいして, 自然数 N, $\theta \in [0,1]$, 整数 Y, $\eta \in [-1/4, 3/4]$ を $t = (T+\theta)2^{-q(|u|)}$, $y = (Y+\eta)B^{-k^{j_u(T)}}$ を満たすように定める．

そのとき,

$$\delta_{u,Y}(t) = \frac{2^{q(|u|)} f'(\theta)}{B^{k^{j_u(T)+1}}} G_u\left(j_u(T), T, \min\left(Y \bmod 2^{d'}, d-1\right)\right) \tag{4.2}$$

とおき g_u, h_u を以下のように定義する．

$$g_u(t,y) = \begin{cases} \delta_{u,Y}(t) & (\eta \le \frac{1}{4}) \\ (1 - f(\frac{4\eta-1}{2}))\delta_{u,Y}(t) + f(\frac{4\eta-1}{2})\delta_{u,Y+1}(t) & (\eta > \frac{1}{4}) \end{cases} \tag{4.3}$$

$$h_u(t) = \sum_{i=0}^{p(|u|)} \frac{H_u(i,T)}{B^{k^i}} + \frac{f(\theta)}{B^{k^{j_u(T)+1}}} G_u(j_u(T), T, H_u(j_u(T), T)) \tag{4.4}$$

上記のように定義した g_u, h_u が補題 3.1 で求める性質を満たすことを示す．(i) は自明．$(g_u)_u$ が多項式時間計算可能であることは補題 2.3 によって示される．

h_u は g_u の常微分方程式の解であることを示す． まず h_u について解析する． $h_u(t) = (Y+\eta)B^{-k^{j_u(T)}}$ とおくときの, η の範囲がどうなるか, つまり式 (3.5) のどちらのケースを使うかを考える．式 (4.4) の一つ目の項において $i \le j_u(T)$ の合計は $B^{k^{j_u(T)}}$ の倍数なので η に影響はない．$i > j_u(T)$ の合計は,

$$\begin{aligned} \sum_{i>j_u(T)}^{p(|u|)} \frac{H_u(i,T)}{B^{k^i}} &\le \sum_{i>j_u(T)}^{\infty} \frac{d-1}{B^{k^i}} \\ &\le \sum_{i>j_u(T)}^{\infty} \frac{d-1}{B^i} = \sum_{i>j_u(T)}^{\infty} \frac{d-1}{B^{i-j_u(T)}} B^{-j_u(T)} \\ &\le \sum_{i>j_u(T)}^{\infty} \frac{d-1}{(4d+1)^{i-j_u(T)}} B^{-j_u(T)} \\ &= \frac{d-1}{4d} B^{-j_u(T)} \end{aligned}$$

二つ目の項の絶対値は

$$\left|\frac{f(\theta)}{B^{k^{j_u(T)+1}}}G_u(j_u(T),T,H_u(j_u(T),T))\right| \leq \frac{1}{B^{j_u(T)+1}} \leq \frac{B^{-j_u(T)}}{4d+1} \tag{4.5}$$

$(\frac{d-1}{4d}+\frac{1}{4d+1})B^{-j_u(T)} \leq \frac{1}{4}B^{-j_u(T)}$ より $h_u(t) = (Y+\eta)B^{-j_u(T)}$ を満たす $\eta \in [-1/4, 1/4]$ が存在する．このとき,

$$Y = \sum_{i=0}^{j_u(T)} H_u(i,T) \cdot B^{k^{j_u(T)}-k^i}. \tag{4.6}$$

B は $2^{d'}$ の倍数なので, $\min(Y \bmod 2^{d'}, d-1) = \min(H_u(j_u), d-1) = H_u(j_u)$. g_u に代入すると,

$$\begin{aligned} g_u(t, h_u(t)) &= \frac{2^{q(|u|)}f'(\theta)}{B^{k^{j_u(T)+1}}}G_u(j_u(T),T,H_u(j_u(T),T)) \\ &= \mathcal{D}^{(1)}h_u(t). \end{aligned}$$

よって h_u は g_u の常微分方程式の解.

g_u が (∞, k) 階連続的微分可能であることを証明する．η が $[-1/4, 1/4]$ と $[1/4, 3/4]$ である区間それぞれにおいて微分する．任意の $i \in \mathbf{N}$ について

$$\mathcal{D}^{(i)}\delta_{u,Y}(t) = \frac{2^{(i+1)q(|u|)}\mathcal{D}^{(i+1)}f(\theta)}{B^{k^{j_u(T)+1}}}G_u\left(j_u(T), T, \min\left(Y \bmod 2^{d'}, d-1\right)\right) \tag{4.7}$$

$$\mathcal{D}^{(i,0)}g_u(t,y) = \begin{cases} \mathcal{D}^{(i)}\delta_{u,Y}(\theta) & (-\frac{1}{4} < \eta < \frac{1}{4}) \\ \left(1 - f\left(\frac{4\eta-1}{2}\right)\right)\mathcal{D}^{(i)}\delta_{u,Y}(\theta) + f\left(\frac{4\eta-1}{2}\right)\mathcal{D}^{(i)}\delta_{u,Y+1}(\theta) & \\ & (\frac{1}{4} < \eta < \frac{3}{4}) \end{cases} \tag{4.8}$$

$j \in \{1, \ldots, k\}$ について,

$$\mathcal{D}^{(i,j)}g_u(t,y) = \begin{cases} 0 & (-\frac{1}{4} < \eta < \frac{1}{4}) \\ (2B^{j_u(T)})^j\mathcal{D}^{(j)}f(\frac{4\eta-1}{2})(\mathcal{D}^{(i)}\delta_{u,Y+1}(\theta) - \mathcal{D}^{(i)}\delta_{u,Y}(\theta)) & \\ & (\frac{1}{4} < \eta < \frac{3}{4}) \end{cases} \tag{4.9}$$

f は 無限回微分可能であるため, $\delta_{u,Y}$ も無限回微分可能である． よって 区間 $(-1/4, 1/4)$, $(1/4, 3/4)$ において $\mathcal{D}^{(i,0)}g_u$, $\mathcal{D}^{(i,j)}g_u$ は連続. $\eta = 1/4$ および $\eta = 3/4(-1/4)$ においても連続であることは自明. $\mathcal{D}^{(i+1,0)}f(0) = \mathcal{D}^{(i+1,0)}f(1) = 0$ より $\theta = 0$ または $\theta = 1$ において $\mathcal{D}^{(i,0)}g_u(t,y) = 0$, $\mathcal{D}^{(i,j)}g_u(t,y) = 0$, よって t についても連続. 以上により g_u は (∞, j) 階連続的微分可能であることがしめされた.

式 (4.8) に $t = 0, 1$ $(\theta = 0)$ を代入して $\mathcal{D}^{(i,0)}g_u(0,y) = \mathcal{D}^{(i,0)}g_u(1,y) = 0$.

任意の $i \in \mathbf{N}$, $j \in \{0, \ldots, k\}$ について $|\mathcal{D}^{(i,j)}g_u| \leq 2^{\mu_i(|u|)-\gamma(|u|)}$ を示す.

$$|\mathcal{D}^{(i)}\delta_{u,Y}(t)| \leq \left|\frac{2^{(i+1)q(|u|)}\mathcal{D}^{(i+1)}f(\theta)}{B^{k^{j_u(T)+1}}}\right| \leq \frac{2^{(i+1)q(|u|)+c_i}}{B^{k^{j_u(T)+1}}} \tag{4.10}$$

$\mu_i(k) = (i+1)q(k) + \sum_{j=1}^{k} c_i + c_i + k + 1$ とおく．これは λ に依存しない．B の定義より

$$\left|\mathcal{D}^{(i,0)} g_u\right| \leq |\mathcal{D}^{(i)} \delta_{u,Y}(t)| \leq \frac{2^{(i+1)q(|u|)+c_i}}{B} \leq 2^{\mu_i(|u|)-\gamma(|u|)} \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned}\left|\mathcal{D}^{(i,j)} g_u\right| &\leq (2B^{j_u(T)})^j \left|\mathcal{D}^{(j)} f\left(\frac{4\eta-1}{2}\right)\right| \cdot \left|\mathcal{D}^{(i)}\delta_{u,Y+1}(t) - \mathcal{D}^{(i)}\delta_{u,Y}(t)\right| \\ &\leq 2^k B^{k\cdot j_u(T)} \cdot 2^{c_j} \cdot 2 \cdot \frac{2^{(i+1)q(|u|)+c_i}}{B^{k j_u(T)+1}} \\ &\leq \frac{2^{(i+1)q(|u|)+\sum_{j=1}^{k} c_j + c_i + k + 1}}{B} \leq 2^{\mu_i(|u|)-\gamma(|u|)}. \end{aligned} \tag{4.12}$$

(vii) は

$$\begin{aligned} h_u(1) &= \frac{H_u(p(|u|), 2^{q(|u|)})}{B^{p(|u|)}} \\ &= \frac{L(u)}{2^{p(|u|)(\gamma(|u|)+d')}} \end{aligned} \tag{4.13}$$

より, $\rho(k) = p(k)(\gamma(k) + d')$ とおくと成り立つ． □

4.2 定理 1.2 の証明

証明. L を $\mathbf{DIVp(log)}$ に含まれる言語, つまり対数深さ離散初期値問題によって認識される言語とおく．L にたいして補題 3.1 を用いて, まず多項式 μ_i をえる．μ_i は i を係数部にのみ持つ多項式であるため, $\mu_i(k) = O(k^c)$ をみたす最小の定数 c が存在する．

$$\lambda(k) = 2k+2, \qquad \gamma(k) = k^{c+1} + k\lambda(k) \tag{4.14}$$

とおき, 各 u にたいして

$$\Lambda_u = 2^{\lambda(|u|)}, \qquad c_u = 1 - \frac{1}{2^{|u|}} + \frac{2\bar{u}+1}{\Lambda_u}, \qquad l_u^{\mp} = c_u \mp \frac{1}{\Lambda_u} \tag{4.15}$$

とおく．ただし $\bar{u} \in \{0, \ldots, 2^{|u|}-1\}$ は u を二進数として解釈した数．γ にたいして, 再び補題より ρ, $(g_u)_u$, $(h_u)_u$ を得る．

任意の $[0,1)$ の実数にたいして, $l_u^{\mp} \pm \frac{t}{\Lambda_u}$ がその実数と等しくなるような $u, \pm, t \in [0,1]$ が存在する．関数 g, h を $t \in [0,1]$, $y \in \mathbf{R}$ にたいして, それぞれ $[0,1) \times [-1,1]$ の範囲と $[0,1)$ の範囲で下のように定義する．

$$
g\left(l_u^{\mp} \pm \frac{t}{\Lambda_u}, \frac{y}{\Lambda_u}\right) = \begin{cases} \pm \sum_{l=0}^{k} \frac{\mathcal{D}^{(0,l)} g_u(t,1)}{l!} (y-1)^l & (1 < y) \\ \pm g_u(t,y) & (-1 \le y \le 1) \\ \pm \sum_{l=0}^{k} \frac{\mathcal{D}^{(0,l)} g_u(t,-1)}{l!} (y+1)^l & (1 < y) \end{cases} \tag{4.16}
$$

$$
h\left(l_u^{\mp} \pm \frac{t}{\Lambda_u}\right) = \frac{h_u(t)}{\Lambda_u}. \tag{4.17}
$$

任意の $y \in \mathbf{R}$ にたいして $g(1,y) = h(1) = 0$ と定義する.

この g と h が定理 1.2 で求める関数の性質を満たすことを示す.

まず g が多項式時間計算可能であることを補題 2.3 を用いて示す. 各有理数 T, Y について $g(T,Y)$ を求めるとき, $T = l_u^{\mp} \pm t/\Lambda_u$, $Y = y/\Lambda_u \Gamma_u$ を満たすような $u, \pm, t, y$ は, 多項式時間で計算可能であり, $(g_u)_u$ は多項式時間計算可能なので $g(T,Y)$ は多項式時間計算可能.

g が (∞, k) 階連続的微分可能であることをしめす.

g_u は (∞, k) 階連続的微分可能であるため, 各区間においては (∞, k) 階連続的微分可能である. $t \in (0,1)$ において

$$
\mathcal{D}^{(i,j)} g\left(l_u^{\mp} \pm \frac{t}{\Lambda_u}, \frac{y}{\Lambda_u}\right)
$$

$$
= \begin{cases} \pm \Lambda_u^{i+j} \sum_{l=j}^{k} \frac{\mathcal{D}^{(i,l)} g_u(t,1)}{(l-j)!} (y-1)^{l-j} & (1 < y) \\ \pm \Lambda_u^{i+j} \mathcal{D}^{(i,j)} g_u(t,y) (y-1)^{l-j} & (-1 < y < 1) \\ \pm \Lambda_u^{i+j} \sum_{l=j}^{k} \frac{\mathcal{D}^{(i,l)} g_u(t,-1)}{(l-j)!} (y+1)^{l-j} & (y < -1) \end{cases} \tag{4.18}
$$

$\mathcal{D}^{(i,j)} g_u$ は連続であるため $t \in (0,1)$, $y \neq -1, 1$ の区間において連続. 確認すべきなのは g_u 同士をつなぐ境界 $t = 0, 1$ と g_u の外側との境界 $y = 0, 1$, および極限 g_u の極限, つまり g の第一引数が 1 へ限りなく近づくとき発散せずに連続であることである.

$y = 1$ のとき $\mathcal{D}^{(i,j)} g\left(l_u^{\mp} \pm t/\Lambda_u, y/\Lambda_u\right) = \pm \Lambda_u^{i+j} \mathcal{D}^{(i,j)} g_u(t,1)$, $y = -1$ のとき $\mathcal{D}^{(i,j)} g\left(l_u^{\mp} \pm t/\Lambda_u, y/\Lambda_u\right) = \pm \Lambda_u^{i+j} \mathcal{D}^{(i,j)} g_u(t,-1)$ より $\mathcal{D}^{(i,j)} g$ は第二変数について連続である.

第一変数が $[0,1)$ の範囲にあるとき, つまり $l_u^{\mp} \pm t/\Lambda_u$ と表される範囲において連続であることをしめす. $t = 1$ において g_u と $-g_u$ が接続され, $t = 0$ において g_u とつぎの文字 u' の関数 $g_{u'}$ が接続されている. ここで $\mathcal{D}^{(i,0)} g_u(0,y) = \mathcal{D}^{(i,0)} g_u(1,y) = 0$ より $\mathcal{D}^{(i,j)} g_u(0,y) = \mathcal{D}^{(i,j)} g_u(1,y) = 0$. よって $\mathcal{D}^{(i,j)} g(0,y) = \mathcal{D}^{(i,j)} g(1,y) = 0$ なので $[0,1)$ で連続.

最後に第一変数が 1 へ向かうとき発散しないことをしめす.

$$\begin{aligned}\left|\mathcal{D}^{(i,j)}g\left(l_u^{\mp}\pm\frac{t}{\Lambda_u},\frac{y}{\Lambda_u}\right)\right| &\leq \Lambda_u^{i+j}\sum_{l=j}^{k}\frac{|\mathcal{D}^{(i,l)}g_u|}{(l-j)!}(|y|+1)^{l-j}\\ &\leq \Lambda_u^{i+j}2^{\mu_i(|u|)-\gamma(|u|)}\sum_{l=j}^{k}(2\Lambda_u)^{l-j}\\ &\leq \Lambda_u^{i+j}2^{\mu_i(|u|)-\gamma(|u|)}(2\Lambda_u)^{k-j+1}\\ &= 2^{\mu_i(|u|)+(i+k+1)\lambda(|u|)+k-j+1-\gamma(|u|)} \end{aligned} \tag{4.19}$$

γ のとり方により, $|u|\to\infty$ のとき 0 に収束する. よって $\lim_{t\to 1-0}\mathcal{D}^{(i,j)}g(t,y)=0$. とくに $i=0$ のとき, $\lim_{t\to 1-0}g(t,y)=0=g(1,y)$ より 1 で連続. 以上により g が (∞,k) 階連続的微分可能であることをしめした.

h が g の常微分方程式の解であることを示す. $h(0)=0,\quad \mathcal{D}^{(1)}h(1)=0=g(1,h(1))$ は自明.

$$\begin{aligned} h'\left(l_u^{\mp}\pm\frac{t}{\Lambda_u}\right) &= \pm\frac{h_u'(t)}{\Lambda_u}\\ &= \pm g_u\left(t,h_u(t)\right)\\ &= g\left(l_u^{\mp}\pm\frac{t}{\Lambda_u},\frac{h_u(t)}{\Lambda_u}\right)\\ &= g\left(l_u^{\mp}\pm\frac{t}{\Lambda_u},h\left(l_u^{\mp}\pm\frac{t}{\Lambda_u}\right)\right). \end{aligned} \tag{4.20}$$

L は h に還元可能であることを示す.

$$h(c_u)=\frac{h_u(1)}{\Lambda_u}=\frac{L(u)}{2^{\lambda(|u|)+\rho(|u|)}} \tag{4.21}$$

つまり R,S,T を以下のように定義することで, 還元可能.

$$R(u,v)=v \tag{4.22}$$

$$S(u,0^n)=\lfloor 2^n c_u\rfloor \text{ を表す文字列,} \tag{4.23}$$

$$T(u)=0^{\lambda(|u|)+\rho(|u|)} \tag{4.24}$$

任意の $L\in\textbf{DIVp(log)}$ について h へ還元可能であるため, h は **DIVp(log)** 困難. $\square$

5 考察

5.1 議論

$(\infty,1)$ 回連続的微分可能な関数の常微分方程式の解は **PSPACE** 完全足りうることを本稿では示したが, しかし一回連続的微分可能と二回連続的微分可能の間に本質的なギャップがあるとは思えず, (∞,k) 回連続的微分可能以上に関しても **PSPACE** 完全足りうることを証明できるのでは

ないかと考えている．証明される可能性としてひとつは $\mathbf{PSPACE} = \mathbf{DIVp(log)}$ が示されることであるが, 重要なのは $\mathbf{PSPACE} \neq \mathbf{DIVp(log)}$ ならば (∞, k) 回連続的微分可能な関数の常微分方程式の解が **PSPACE** 完全になりえないというわけではないことである.

5.2 課題

任意階微分可能な関数の常微分方程式の解が **PSPACE** 完全たりうることを証明することが第一の課題である．しかし, 対数深さ離散初期値問題が任意階微分可能な関数の常微分方程式で模倣できる計算の最大限であるという保証はない．つまりまたはまったく別の **PSPACE** 完全な計算を, 任意回微分可能な関数の常微分方程式で模倣できる可能性も残っている.

依然として解が多項式時間実関数となる, 解析的であるという条件との間にはギャップが存在し, 例えば g が無限回連続微分可能でかつであるとき, 解はどうなるのか等の疑問が生まれる.

また g の第一引数 t に関して本稿では連続であることのみ要求したが, 微分可能になると解はどうなるか, 更に制限するとどうなるかは不明である.

6 謝辞

参考文献

[1] E.A. Coddington and N. Levinson. *Theory of ordinary differential equations.* McGraw-Hill, 1955.

[2] A. Grzegorczyk. Computable functionals. *Fund. Math*, 42(19553):168–202, 1955.

[3] A. Kawamura. Complexity of initial value problems, 2010.

[4] A. Kawamura. Lipschitz continuous ordinary differential equations are polynomial-space complete. *Computational Complexity*, 19(2):305–332, 2010.

[5] K.I. Ko. On the computational complexity of ordinary differential equations*. *Information and control*, 58(1-3):157–194, 1983.

[6] K.I. Ko. *Complexity theory of real functions.* Birkhauser Boston Inc., 1991.

[7] K.I. Ko and H. Friedman. Computing power series in polynomial time. *Advances in Applied Mathematics*, 9(1):40–50, 1988.

[8] W. Miller. Recursive function theory and numerical analysis*. *Journal of Computer and System Sciences*, 4(5):465–472, 1970.

[9] M.B. Pour-el and I. Richards. A computable ordinary differential equation which possesses no computable solution. *Annals of Mathematical Logic*, 17(1-2):61–90, 1979.

[10] 高木貞治. **解析概論**. 岩波書店, 1968.