滑らかな常微分方程式の計算量

太田浩行[*]　河村彰星[†]

マルチン・ツィーグラー[‡]　カルステン・レースニク[§]

概要

常微分方程式 $h(0) = 0,\ h'(t) = g(t, h(t))$ の解 h の計算量と, 関数 g の計算量及び制限の関係は, 常微分方程式を数値的に解くことの本質的な難しさを表しているとして調べられている. 本稿では河村が 2010 年の論旋の中で Lipschitz 条件を満たす多項式時間計算可能な関数 g の常微分方程式の解が **PSPACE** 困難たりうるという結果を示すために用いた手法を, 微分可能な g に拡張する. これにより多項式時間計算可能で 1 回連続微分可能な関数の常微分方程式が, **PSPACE** 困難な解を持ちうることがわかる. また任意の k について, 多項式時間計算可能で k 回微分可能な関数の常微分方程式は, 計数階層 **CH** について困難な解を持ちうることを示す.

1　序論

計算可能解析学 (Computable Analysis) [14] では計算可能性理論や計算量理論の視点から解析学を扱う. 「計算可能な実数」や「多項式時間計算可能な実関数」といった概念を定義し (本稿では 2 節で説明する), 解析学に現れる様々な実数や実関数の本質的な難しさを分析する.

連続実関数 $g\colon [0,1] \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ に対して次の常微分方程式を考える.

$$h(0) = 0, \qquad Dh(t) = g(t, h(t)) \quad (t \in [0,1]) \tag{1.1}$$

ただし Dh は h の導関数. 本稿では g が多項式時間計算可能であるとき, 解 h がどれほど複雑でありうるかを考える.

g に多項式時間計算可能であることの他に何の制限も設けない場合, 解 h (一般に一意でない) は計算不能でありうるため, 様々な制限のもと h の計算量が研究されている (表 1.1). この表では下に向うにつれて左列の条件が強まっており, g が (大域的) Lipschitz 条件を満たせば解 h が一意であるが, 表の第 3 行にある通りこのとき唯一解 h はちょうど **PSPACE** 困難でありうることがわかっている [4]. 本稿の目的はより強く g に滑らかさの仮定を置いたときの h の複雑さを調べることである.

[*] 東京大学, `hota@is.s.u-tokyo.ac.jp`

[†] 東京大学

[‡] Martin Ziegler, ダルムシュタット工科大学

[§] Carsten Rösnick, ダルムシュタット工科大学

表 1.1　g が多項式時間計算可能であるときの常微分方程式 (1.1) の解 h の計算量

制限	上界	下界
—	—	計算不可能たりうる [11]
h が g の唯一解	計算可能 [1]	任意の時間がかかりうる [6, 9]
g が Lipschitz 条件を満たす	多項式領域計算可能 [6]	**PSPACE** 困難になりうる [4]
g が $(\infty, 1)$ 回連続微分可能	多項式領域計算可能	**PSPACE** 困難になりうる [本稿定理 1.1]
g が (∞, k) 回連続微分可能	多項式領域計算可能	**CH** 困難たりうる [本稿定理 1.2]
g が解析的	多項式時間計算可能 [10, 8, 3]	—

一般に数値計算においてはしばしば, 或る種の算法を適用できるようにするため, 或いは解析しやすくするために, 与えられる関数に何らかの滑らかさ (十分な回数微分可能であるなど) を仮定すると都合のよいことがある. しかしこれは経験則にすぎず, 実際に滑らかさの仮定が解の複雑さを計算量の意味で抑える効果をもつのかについてはあまり論ぜられて来なかった.

本稿で扱う微分方程式についていえば, 極端なのは g が解析的である場合であり, このときにはテイラー級数として解く議論により, 表の最下列にあるように h は g と同じく多項式時間計算可能になる. 本稿では Lipschitz 条件より強いが解析的よりは弱い滑らかさの仮定を考える (表の第 4, 5 行). ここで (i, j) 回連続微分可能とは, 第一, 第二変数についてそれぞれ i 回, j 回微分でき, その導関数が連続であることである (2 節).

定理 1.1. 多項式時間計算可能かつ $(\infty, 1)$ 回連続微分可能な実関数 $g\colon [0,1] \times [-1,1] \to \mathbf{R}$ であって, 常微分方程式 (1.1) が **PSPACE** 困難な解 $h\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ を持つものが存在する.

定理 1.2. 任意の自然数 $k \geq 2$ に対して, 多項式時間計算可能かつ (∞, k) 回連続微分可能な実関数 $g\colon [0,1] \times [-1,1] \to \mathbf{R}$ であって, 常微分方程式 (1.1) が **CH** 困難な解 $h\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ を持つものが存在する.

ここで $g\colon [0,1] \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ でなく $g\colon [0,1] \times [-1,1] \to \mathbf{R}$ と書いたのは, 本稿では実関数の多項式時間計算可能性を, 定義域が有界閉領域のときにのみ定義するからである. このため h が区間 $[-1,1]$ の外に値を取ることがあると方程式 (1.1) が意味をなさなくなるが, 定理 1.1 において h が解であるというのは, 任意の $t \in [0,1]$ について $h(t) \in [-1,1]$ が満たされることも含めて述べている. なお両定理とも Lipschitz 条件よりも強い仮定を置いているため, そのような h は g に対して, 存在すれば唯一である.

CH は定数回の計数 (数え上げ) によって定義される計算量クラスである (2.5 節).

二変数関数 g が $i+j \le k$ を満たす任意の自然数 i, j について (i,j) 回連続微分可能であることを k 回連続微可能と言うこともある.

定理 1.2 は各 k についてそれぞれ成立つが, g が (∞,∞) 回微分可能であると仮定したときの h の計算量については依然として不明である.

積分の計算量については無限回微分可能な関数の積分も一般の関数の積分と同等に $\#\mathbf{P}$ 困難であるが, 解析的な関数の積分においては, 多項式時間計算可能である. つまり無限回微分可能と解析的という制限の間に大きな隔たりをもつ. 最大化でも同様に, 無限回微分可能な関数の最大化は一般の関数の最大化と同じく **NP** 困難であるが, 解析的な関数の最大化は多項式時間計算可能である.

無限回微分可能な関数の最大化が一般の関数と同じく **NP** 困難であることの証明は葛によって与えられているが, その中には間違いがある.

2 準備

2.1 表記

自然数の集合を $\mathbf{N}$, 実数の集合を $\mathbf{R}$, 有理数の集合を $\mathbf{Q}$, $\{0\}^* = \{0^n \mid n \in \mathbf{N}\}$ と表す.

A, B を $\mathbf{R}$ の有界閉区間とする. 実関数 $f\colon A \to \mathbf{R}$ に対して $|f| = \sup_{x\in A} f(x)$ と書く.

連続な一変数関数 $f\colon A \to \mathbf{R}$ が i 回連続微分可能であること, 及びそのときの第 i 導関数 $D^i f\colon A \to \mathbf{R}$ を定義する. まず連続な関数 f はみな 0 回連続微分可能であり $D^0 f = f$. また $i > 0$ については, f が $i-1$ 回連続微分可能かつ, $D^{i-1} f$ が微分可能であり, $DD^{i-1} f$ が連続であるとき f は i 回連続微分可能であるといい, $D^i f = DD^{i-1} f$ とする.

連続な二変数関数 $g\colon A \times B \to \mathbf{R}$ が (i,j) **回連続微分可能**であること及びそのときの第 (i,j) 導関数 $D^{(i,j)} g\colon A \times B \to \mathbf{R}$ を次で定義する. まず以下の両方を満たすとき g は (i,j) 回連続微分可能であるという.

- $i > 0$ ならば g が $(i-1,j)$ 回連続微分可能かつ $D^{(i-1,j)} g$ が第一変数について偏微分可能であり導関数 $D_1 D^{(i-1,j)} g$ が連続.
- $j > 0$ ならば g が $(i,j-1)$ 回連続微分可能かつ $D^{(i,j-1)} g$ が第二変数について偏微分可能であり導関数 $D_2 D^{(i,j-1)} g$ が連続.

ただし二変数実関数 g が第一変数について偏微分可能であるときその偏導関数を $D_1 g$ で, 第二変数について偏微分可能であるときその偏導関数を $D_2 g$ と表記する. また g が (i,j) 回連続微分可能であるとき,

$$D^{(i,j)} g = \begin{cases} g & (i = 0,\ j = 0) \\ D_1 D^{(i-1,j)} g & (i > 0) \\ D_2 D^{(i,j-1)} g & (j > 0) \end{cases} \tag{2.1}$$

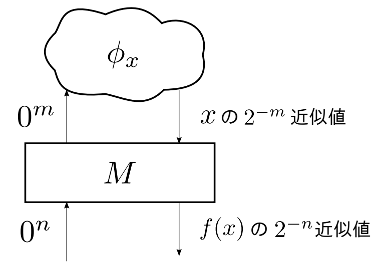

図 2.1　実関数を計算する機械

と定義する．$i > 0$, $j > 0$ のときには $D^{(i,j)}g$ の定義が 2 つあるが, (i, j) 回連続微分可能であれば, 第一変数について i 階以下, 第二変数について j 階以下の導関数はその微分の順序によらず等しいため, 2 つの定義は一致する [15].

任意の i について g が (i, j) 回連続微分可能であるとき, g は (∞, j) 回連続微分可能であると定義する．

2.2　実数の名

実数は有限な旋字列に符号化できない．そこで旋字列から旋字列への関数に符号化する．

定義 2.1 (実数の名)**.** 関数 $\phi\colon \{0\}^* \to \{0,1\}^*$ が実数 $x \in [0,1]$ の**名**であるとは, $\phi(0^n) = \lfloor x \cdot 2^n \rfloor$ または $\phi(0^n) = \lceil x \cdot 2^n \rceil$ を満たすこと．

ここで $\lfloor\cdot\rfloor, \lceil\cdot\rceil$ とはそれぞれ整数へ切り捨てた値, 及び切り上げた値の旋字列表現を返す関数である．つまり実数 x の名は, 長さ n の旋字列を受け取ると, 精度 n 桁の x の近似値を返す．

2.3　計算可能実関数, 多項式時間実関数

実数を受け取り実数を返す関数を機械が計算するとはどういうことか定義しよう．実数自体が関数として符号化されているため, それを読み書きする機構として, 神託チューリング機械 (以下単に機械という) を使う [図 2.1]. 計算可能な実関数は Grzegorczyk によって初めて形式的に定義された [2].

機械 M に, 旋字列から旋字列への関数 ϕ を神託として与え, 旋字列 0^n を入力として与えたとき, 出力される旋字列を $M^\phi(0^n)$ で表す．つまり M^ϕ をやはり旋字列から旋字列への関数とみる．

定義 2.2. A を $\mathbf{R}$ の有界閉区間とする．機械 M が実関数 $f\colon A \to \mathbf{R}$ を計算するとは, 任意の実数 $x \in A$, 任意の x の名 ϕ_x に対して, M^{ϕ_x} が $f(x)$ の名であること．

A が $\mathbf{R}^2$ の有界閉領域であるときにも, 神託を二つ取る機械を考えて同様に定義する．

ある実関数が**計算可能**であるとは, その関数を計算する神託機械が存在することである．同様に, ある実関数が**多項式時間計算可能**であるとは, その関数を計算する多項式時間神託機械が存在する

ことである.

旗字列 u で添字づけられた実関数 $f_u\colon A \to \mathbf{R}$ の族 $(f_u)_u$ を機械 M が計算するとは, 任意の実数 $x \in A$, 任意の x の名 ϕ_x に対して, 旗字列 v を $M^{\phi_x}(u,v)$ へ移す関数が, $f_u(x)$ の名であることをいう. 実関数族が多項式時間計算可能であるとは, その実関数族を計算する多項式時間神託機械が存在することである.

神託機械 M で f を計算するとき, 求める精度 n に対して, x の近似値に必要な精度 m が定まるため, 計算可能な関数は連続である. また n と m の対応関係と有理数における近似値を与えることで, 計算可能実関数や多項式時間計算可能実関数に対して, 神託機械を用いない同値な特徴付けが可能である.

補題 2.3. 実関数 $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ に対して, f が多項式時間計算可能であることは, 多項式時間計算可能な二つの関数 $\phi\colon (\mathbf{Q} \cap [0,1]) \times \{0\}^* \to \mathbf{Q}$ と $p\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ とが存在し, 任意の $d \in \mathbf{Q} \cap [0,1]$, $n \in \mathbf{N}$ について

$$|\phi(d, 0^n) - f(d)| \leq 2^{-n} \tag{2.2}$$

任意の $x, y \in [0,1]$, $m \in \mathbf{N}$ について

$$|x - y| \leq 2^{-p(m)} \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq 2^{-m} \tag{2.3}$$

が成立つことと同値である.

2.4 困難性

実関数の計算量の下界を述べるために, 困難性を定義する.

まず実関数に言語が還元することを定義する. 言語 $L\colon \{0,1\}^* \to \{0,1\}$ が実関数 $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ に多項式時間還元可能であるとは, f を計算する機械を使って $L(u)$ を多項式時間で計算可能であることである. つまり f を計算する機械があるとしたとき, 入力 u に対して, 精度 n をこの機械に与え, ある実数 x_u の神託を模倣し, $f(x_u)$ の n 桁近似値から, u が L に属するか否かを多項式時間で計算可能であることである [図 2.4]. 厳密には以下のように定義する.

定義 2.4 (多項式時間還元可能)**.** 言語 L が実関数 $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ に**多項式時間還元可能**であるとは, 多項式時間計算可能な関数 R, S, T が存在し, 任意の旗字列 u に対して以下を満たすことをいう.

- $S(u, \cdot)$ はある実数 x_u の名;
- $f(x_u)$ の任意の名 ϕ に対して

$$L(u) = R(u, \phi(T(u))).$$

以下単に言語が実関数に還元可能といった場合, 多項式時間還元可能を指す. 計算量 C に対して, 関数 f が C **困難**であるとは, C に属する任意の言語が f に還元可能であることと定義する.

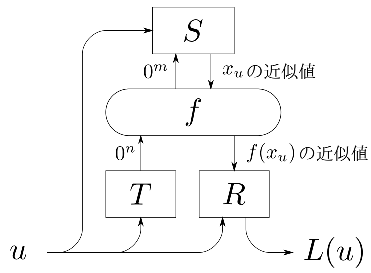

図 2.2　言語 L から関数 f への還元

2.5　計数階層

計数階層(Counting Hierarchy($\mathbf{CH}$)) とは Wagner によって導入された計算量クラスである [13]. 多項式階層 ($\mathbf{PH}$) が $\mathbf{NP}$ の神託機械を用いて,

$$\Sigma_0^p = \mathbf{P}$$
$$\Sigma_{k+1}^p = \mathbf{NP}^{\Sigma_k^p}$$
$$\mathbf{PH} = \bigcup_k \Sigma_k^p$$

と定義されるのに対し, 計数階層は多項式階層の $\mathbf{NP}$ を $\mathbf{PP}$ で置き換えたものである. つまり

$$\mathbf{C}_0\mathbf{P} = \mathbf{P}$$
$$\mathbf{C}_{k+1}\mathbf{P} = \mathbf{PP}^{\mathbf{C}_k\mathbf{P}}$$
$$\mathbf{CH} = \bigcup_k \mathbf{C}_k\mathbf{P}.$$

上記の特徴付けは Torán によるものであり, Wagner によるオリジナルの定義とは異なる [12].

$\mathbf{PH} \subseteq \mathbf{CH} \subseteq \mathbf{PSPACE}$ だが, $\mathbf{PH} = \mathbf{CH}$, $\mathbf{CH} = \mathbf{PSPACE}$ か否かは未解決である.

3　連続微分可能関数と常微分方程式

基本的な証明の流れは河村によるものと等しい [4]. 定理 1.1 の証明では, まず任意の言語 $L \in \mathbf{PSPACE}$ を認識する関数族 $(G_u)_u, (H_u)_u$ を得る (補題 3.1). そして $(G_u)_u, (H_u)_u$ を模倣する実関数族 $(g_u)_u, (h_u)_u$ を構成し (補題 3.4), それらから定理で求める g, h を構成する. 定理 1.2 においても, ある $\mathbf{CH}$ 困難な言語を認識する関数族 $(G_u)_u, (H_u)_u$ を構成し (補題 3.2), それらを模倣する実関数族 $(g_u)_u, (h_u)_u$ を構成し (補題 3.5), それらから定理で求める g, h を構成する.

3.1　差分方程式

定理 1.1 と定理 1.2 の証明では, まず滑らかな実関数の常微分方程式によってある種の「離散版」常微分方程式を模倣できることを示し, その離散版の方程式が $\mathbf{PSPACE}$ 困難ないし $\mathbf{CH}$ 困難で

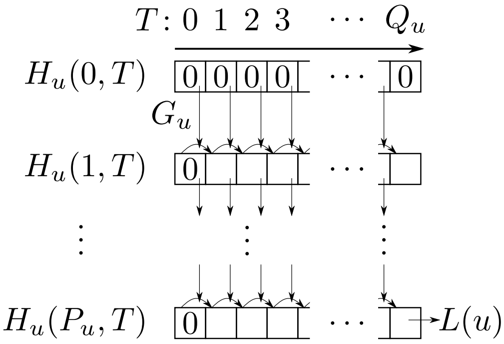

図 3.1　差分方程式と認識される言語

あることを示す．この節ではその離散版の方程式である「差分方程式」を定義する．

$[n] = \{0,\dots,n-1\}$ と表記する．関数 $G\colon [P]\times[Q]\times[R] \to \{-1,0,1\}$ に対して，関数 $H\colon [P+1]\times[Q+1] \to [R]$ が任意の $i \in [P]$, $T \in [Q]$ について以下を満たすとき，H を G の **差分方程式** の解と呼ぶ．

$$H(i,0) = H(0,T) = 0 \tag{3.1}$$

$$H(i+1,T+1) = H(i+1,T) + G(i,T,H(i,T)) \tag{3.2}$$

P, Q, R をそれぞれ**段数**, **列数**, **欄の大きさ**と呼ぶ．G と H が常微分方程式の g と h に対応し，$H(i,0) = 0$ が $h(0) = 0$ に，式 (3.2) と同値である式 $H(i{+}1,T{+}1) - H(i{+}1,T) = G(i,T,H(i,T))$ が $Dh(t) = g(t,h(t))$ と対応していると考える．

以下では旋字列 u ごとに差分方程式 G_u を一つ定めた族 $(G_u)_u$ を考える．各 u に対して G_u の段数と列数，解をそれぞれ P_u, Q_u, H_u としたとき，言語 L がこの族 $(G_u)_u$ によって認識されるとは，$H_u(P_u,Q_u) = L(u)$ を満たすこととする (表 3.1)．ここで言語 $L \subseteq \{0,1\}^*$ は関数 $L\colon \{0,1\}^* \to \{0,1\}$ と同一視し，$u \in L$ のとき $L(u) = 1$ としている．

$(G_u)_u$ が**一様**であるとは，各 u について G_u の段数，列数及び欄の大きさが $|u|$ の多項式の指数 ($2^{\mathrm{poly}(|u|)}$) で抑えられ，かつ与えられた (u,i,T,Y) から多項式時間で $G_u(i,T,Y)$ が計算できることと定義する．

G_u の段数がさらに $|u|$ の多項式，対数で抑えられるとき，族 $(G_u)_u$ はそれぞれ**多項式段**, **対数段**であるという．河村の論旋では次が示されている．

補題 3.1 (補題 4.7 [4])**.** 任意の言語 $L \in \mathbf{PSPACE}$ に対して，その言語を認識する多項式段一様関数族が存在する．

$(\infty,1)$ 回微分可能な関数の常微分方程式においても，この補題を用いて **PSPACE** 困難な常微分方程式の解を構成する．

2 回以上微分可能な関数の常微分方程式の複雑さを考えるとき，その滑らかさによる制限により多項式段の差分方程式を模倣することはできなかった．しかし差分方程式を対数段に制限してやれ

ば模倣可能であり, 対数段一様な関数族によって認識される言語の困難性が重要である.

補題 3.2. **CH** 困難で対数段一様な関数族によって認識される言語が存在する.

補題 3.1 が **PSPACE** の任意の言語について述べているのに対して, この補題は **CH** 困難な或る言語について述べているという違いがある. しかし定理の証明において必要なのは言語クラスに対して困難な或る言語を認識できることであり, 補題 3.1 を補題 3.2 と同じ形式 (**PSPACE** 困難で多項式段一様な関数族によって認識される言語が存在する) に変えても定理を証明するには十分である.

3.2 CH 困難な言語

Wagner によって **CH** の各階層 $\mathbf{C}_n\mathbf{P}$ に対してそれぞれ完全問題が存在することが示されている [13]. 量化子 $\mathbf{C}$ を自然数 m, 論理式 $A(x_1, \ldots, x_l)$, l 個の論理変数の組 α について以下のように定義する.

$$\mathbf{C}^m \alpha A(\alpha) \longleftrightarrow \left| \{\alpha \in \{0,1\}^l \mid A(\alpha) = 1\} \right| \geq m. \tag{3.3}$$

$\mathbf{C}^1 = \exists$, $\mathbf{C}^{2^l} = \forall$ であり, $\mathbf{C}$ は $\exists, \forall$ の一般化と言える. 言語 $\mathbf{C}_n B_{be}$ を以下のように定義する.

$$\langle \phi(x_1, \ldots, x_n), m_1, \ldots, m_n \rangle \in \mathbf{C}_n B_{be} \longleftrightarrow \mathbf{C}^{m_1}\alpha_1 \cdots \mathbf{C}^{m_n}\alpha_n \phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \tag{3.4}$$

ただし $\langle y_1, \ldots, y_i \rangle$ は組み合わせ関数, x_i, α_i は l_i 個の論理変数の組, $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ は $x_1, \ldots, x_n$ のみを変数として持つ論理式とする.

補題 3.3 (Theorem 7 [13])**.** $\mathbf{C}_n B_{be}$ は $\mathbf{C}_n\mathbf{P}$ 完全.

各 $\mathbf{C}_n B_{be}$ をまとめた言語 $\mathbf{C}_{\log} B_{be}$ を以下のように定義する.

$$\langle 0^{2^n}, u \rangle \in \mathbf{C}_{\log} B_{be} \longleftrightarrow u \in \mathbf{C}_n B_{be} \tag{3.5}$$

この $\mathbf{C}_{\log} B_{be}$ が補題 3.2 で求める言語であること, つまり **CH** 困難かつ対数段一様関数族によって認識可能であることを示す.

補題 3.2 の証明. $\mathbf{C}_{\log} B_{be}$ が **CH** 困難であることを示す. 任意の **CH** の言語 A はある階層 $\mathbf{C}_n\mathbf{P}$ に属する. 補題 3.3 より任意の $u \in \{0,1\}^*$ について $u \in A \leftrightarrow f(u) \in \mathbf{C}_n B_{be}$ を満たす多項式時間関数 f が存在する.

$$u \in A \longleftrightarrow \langle 0^{2^n}, f(u) \rangle \in \mathbf{C}_{\log} B_{be} \tag{3.6}$$

n は定数であるため $\langle 0^{2^n}, f(\cdot) \rangle$ は多項式時間関数. よって A は $\mathbf{C}_n B_{be}$ に多項式時間還元可能.

$\mathbf{C}_{\log} B_{be}$ を認識する関数族 $(G_u)_u$, その解 $(H_u)_u$, 関数 $p\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, 多項式 q, r を構成する. 自然数 $n, m_1, \ldots, m_n$, 論理式 ϕ を $u = \langle 0^{2^n}, \langle \phi(x_1, \ldots, x_n), m_1, \ldots, m_n \rangle \rangle$ を満たすものとする. (そのような $n, m_1, \ldots, m_n, \phi$ が存在しないとき $u \notin A$.)

$L = C_{\log} B_{be}$, $l_i = |x_i|$, $s_i = \sum_{j=1}^{i} l_j + 2i$ と表記する．関数 $C^m : \mathbf{N} \to \{0,1\}$ を

$$C^m(Y) = \begin{cases} 1 & (Y \geq m) \\ 0 & (Y < m) \end{cases} \tag{3.7}$$

と定義する．任意の $i = 0, \ldots, n$ と $n-i$ 個の旋字列 $\beta_{i+1} \in \{0,1\}^{l_{i+1}}, \ldots, \beta_n \in \{0,1\}^{l_n}$ について論理式 $\mathbf{C}^{m_i}\alpha_i \cdots \mathbf{C}^{m_1}\alpha_1 \phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \beta_{i+1}, \ldots, \beta_n)$ の真偽値を $\phi_i(\beta_{i+1}, \ldots, \beta_n)$ と表記する．

$$\phi_0(\beta_1, \ldots, \beta_n) = \phi(\beta_1, \ldots, \beta_n) \tag{3.8}$$

$$\phi_{i+1}(\beta_{i+2}, \ldots, \beta_n) = C^{m_{i+1}} \left(\sum\nolimits_{\alpha_i \in \{0,1\}^{l_i}} \phi_i(\alpha_{i+1}, \beta_{i+2}, \ldots, \beta_n) \right) \tag{3.9}$$

$$\phi_n() = L(u) \tag{3.10}$$

$T \in \mathbf{N}$ に対し, T_i を T の 2 進表記における i 桁目, $T_{[i,j]} = T_{j-1}T_{j-2} \cdots T_{i+1}T_i$ と表記する．

G_u を $(i, T, Y) \in [n+1] \times [2^{s_n}+1] \times [2^{|u|}]$ の範囲でを以下のように定義する．一段目つまり $i = 0$ ならば

$$G_u(0, T, Y) = (-1)^{T_{s_1}} \phi(T_{[1,s_1]}, T_{[s_1+1,s_2]}, \ldots, T_{[s_{n-1}+1,s_n]}) \tag{3.11}$$

$i \geq 1$ ならば

$$G_u(i, T, Y) = \begin{cases} (-1)^{T_{s_{i+1}}} C^{m_i}(Y) & (T_{[1,s_i]} = 10 \cdots 0) \\ 0 & \text{(othewise).} \end{cases} \tag{3.12}$$

任意の $i \in [n+1]$, $T \in [2^{s_n}+1]$ について, $H_u(i,T) \in [2^{l_i}+1]$ が成りたつこと, および $T_{[1,s_i]} = 10 \cdots 0$ ならば

$$G_u(i, T, H_u(i,T)) = (-1)^{T_{s_{i+1}}} \phi_i(T_{[s_i+1,s_{i+1}]}, \ldots, T_{[s_{n-1}+1,s_n]}) \tag{3.13}$$

を満たすことを i についての帰納法により示す．上記が成り立つとき, $i = n$, $T = 2^{s_n}$ において $G_u(n, 2^{s_n}, H_u(n, 2^{s_n})) = \phi_n() = L(u)$ よって $H_u(n+1, 2^{s_n}+1) = L(u)$. ここで

$$n + 1 \leq \log(|0^{2^n}|) + 1 = O(\log(|u|)) \tag{3.14}$$

$$2^{s_n} + 1 \leq 2^{s_n+1} \leq 2^{|u|} \tag{3.15}$$

より $p(u) = n+1, q(x) = r(x) = x$ とおき G_u を $[p(u)] \times [2^{q(|u|)}] \times [2^{r(|u|)}]$ の範囲に拡張すると $H_u(p(u), 2^{q(|u|)}) = L(u)$.

$i = 0$ のとき, 式 (3.12) より成り立つ．$i = j$ のとき, 成り立つと仮定する, $Y = H_u(i+1, T)$ とおくと

$$Y = \sum_{V=1}^{T-1} G_u(i, V, H_u(i, V)) \tag{3.16}$$

$$= \sum (-1)^{V_{s_{i+1}}} \phi_i(V_{[s_i+1,s_{i+1}]}, \ldots, V_{[s_{n-1}+1,s_n]}) \tag{3.17}$$

$T_{[1,s_{i+1}]} = 10\cdots0$ のとき, $V_{[1,s_n]} = T_{[s_{i+1}+1,s_n]}0\alpha10\cdots0$ であるとき以外の値は打ち消し合うので,

$$Y = \sum\nolimits_{\alpha\in\{0,1\}^{l_i}} \phi_i(\alpha, T_{[s_{i+1}+1,s_{i+2}]},\dots,T_{[s_{n-1}+1,s_n]}) \tag{3.18}$$

式 (3.9) より

$$G_u(i+1,T,H_u(i+1,T)) = (-1)^{T_{s_{i+2}}}C^{m_{i+1}}(Y) \tag{3.19}$$
$$= (-1)^{T_{s_{i+2}}}\phi_{i+1}(T_{[s_{i+1}+1,s_{i+2}]},\dots,T_{[s_{n-1}+1,s_n]}) \tag{3.20}$$

よって $i = j+1$ でも成り立つ. □

3.3 差分方程式を模倣する関数族

補題 3.4. 任意の言語 $L \in \mathbf{PSPACE}$ に対して, 係数のみに i を含む多項式 μ_i が存在して, 任意の多項式 γ に対して, 多項式 ρ, 実関数族 $(g_u)_u, (h_u)_u$ で, $(g_u)_u$ は多項式時間計算可能であり, 各旋字列 u に対して以下を満たすものが存在する.

(i) $g_u\colon [0,1]\times[-1,1] \to \mathbf{R}$, $h_u\colon [0,1] \to [-1,1]$;

(ii) h_u は g_u の常微分方程式 (1.1) の解;

(iii) g_u は $(\infty,1)$ 回連続微分可能;

(iv) 任意の $i \in \mathbf{N}$, $y \in [-1,1]$ に対して

$$D^{(i,0)}g_u(0,y) = D^{(i,0)}g_u(1,y) = 0;$$

(v) 任意の $i \in \mathbf{N}$, $j \in \{0,1\}$ に対して

$$|D^{(i,j)}g_u| \le 2^{\mu_i(|u|)-\gamma(|u|)};$$

(vi) $h_u(1) = 2^{-\rho(|u|)}L(u)$.

補題 3.5. 任意の自然数 $k \ge 2$ に対して, **CH** 困難な言語 L, 係数のみに i を含む多項式 μ_i が存在して, 任意の多項式 γ に対して, 関数 $\rho\colon \mathbf{N}\to\mathbf{N}$, 関数族 g_u, h_u で, $\rho, (g_u)_u$ は多項式時間計算可能であり, 各旋字列 u に対して以下を満たすものが存在する.

(i) $g_u\colon [0,1]\times[-1,1] \to \mathbf{R}$, $\quad h_u\colon [0,1] \to [-1,1]$;

(ii) h_u は g_u の常微分方程式 (1.1) の解;

(iii) g_u は (∞,k) 階連続微分可能;

(iv) 任意の $i \in \mathbf{N}$, $y \in [-1,1]$ に対して

$$D^{(i,0)}g_u(0,y) = D^{(i,0)}g_u(1,y) = 0;$$

(v) 任意の $i \in \mathbf{N}$, $j \in \{0,\dots,k\}$ に対して

$$\left|D^{(i,j)}g_u(t,y)\right| \le 2^{\mu_i(|u|)-\gamma(|u|)};$$

(vi) $h_u(1) = 2^{-\rho(|u|)}L(u)$.

この補題より各 h_u が g_u の常微分方程式の解であり, $h_u(1)$ に $L(u)$ の情報を持つ実関数族 $(g_u)_u, (h_u)_u$ の存在が示される. 河村による Lipschitz 連続な常微分方程式の **PSPACE** 困難性の証明における, 補題 4.1 に対応するが, g を微分可能にするため, 条件 (iii) – (v) が付け加えられている.

この補題の証明の基本的な流れを説明する. 任意の言語 $L \in \mathbf{PSPACE}$ に対し, 補題 3.1 を用いて L を認識する $(G_u)_u$ 及びその差分方程式の解 $(H_u)_u$ を得る. そして各 G_u, H_u を模倣する滑らかな $g_u \colon [0,1] \times [-1,1] \to \mathbf{R}$ とその常微分方程式の解 $h_u \colon [0,1] \to \mathbf{R}$ を構成する. また $(G_u)_u$ の一様性から $(g_u)_u$ の多項式時間計算可能性を示す.

上記の証明は基本的に, Lipschitz 条件の場合と変わらない. 異なる点は, g_u を滑らかな関数にするため, 以下のような無限回微分可能な多項式時間実関数 $f \colon [0,1] \to \mathbf{R}$ を用いて g_u を構成していることである.

補題 3.6 (補題 3.6 [7])**.** 以下を満たす多項式時間計算可能で無限回微分可能な実関数 $f \colon [0,1] \to \mathbf{R}$ が存在する.

(i) $f(0) = 0, \quad f(1) = 1$;

(ii) 任意の $n \geq 1$ で $f^{(n)}(0) = f^{(n)}(1) = 0$;

(iii) f は $[0,1]$ で単調増加;

(iv) 任意の $n \geq 1$ で $f^{(n)}$ は多項式時間実関数.

補題 3.4 の証明は Lipschitz の場合とほとんど変わらず, 細かな差異も補題 3.5 の証明に含まれるものと同じであるため省略する.

補題 3.5 の証明. 補題 3.2 より **CH** 困難な言語 L を認識する対数段一様関数族 $(G_u)_u$, その解 $(H_u)_u$, $P_u = p(|u|), Q_u = 2^{q(|u|)}, R_u = 2^{r(|u|)}$ を満たす関数 p, 多項式 q, r を得る. さらに以下のように仮定する.

$$H_u(i, 2^{q(|u|)}) = \begin{cases} L(u) & (i = p(|u|)) \\ 0 & (i < p(|u|)). \end{cases} \tag{3.21}$$

補題 3.6 の f に対して, 自然数の族 c_i を各 $i \in \mathbf{N}$ に対して $|D^i f(x)| \leq 2^{c_i}$ を満たす最小の自然数と定める. $B = 2^{\gamma(|u|)+r(|u|)+3}$ とおき, 各 $(t,y) \in [0,1] \times [-1,1]$ に対して, 自然数 $N, \theta \in [0,1]$, 整数 $Y, \eta \in [-1/4, 3/4]$ を $t = (T+\theta)2^{-q(|u|)}$, $y = (Y+\eta)B^{-k^{j_u(T)}}$ を満たすように定める.

そのとき,

$$\delta_{u,Y}(t) = \frac{2^{q(|u|)}Df(\theta)}{B^{k^{j_u(T)+1}}} G_u\left(j_u(T),\ T,\ Y \bmod 2^{r(|u|)}\right) \tag{3.22}$$

とおき g_u, h_u を以下のように定義する.

$$g_u(t,y) = \begin{cases} \delta_{u,Y}(t) & (\eta \leq \frac{1}{4}) \\ (1 - f(\frac{4\eta-1}{2}))\delta_{u,Y}(t) + f(\frac{4\eta-1}{2})\delta_{u,Y+1}(t) & (\eta > \frac{1}{4}) \end{cases} \tag{3.23}$$

$$h_u(t) = \sum_{i=0}^{p(|u|)} \frac{H_u(i,T)}{B^{k^i}} + \frac{f(\theta)}{B^{k^{j_u(T)+1}}} G_u(j_u(T), T, H_u(j_u(T), T)) \tag{3.24}$$

上記のように定義した g_u, h_u が補題 3.4 で求める性質を満たすことを示す. (i) は自明. $(g_u)_u$ が多項式時間計算可能であることは補題 2.3 によって示される.

h_u は g_u の常微分方程式の解であることを示す. 任意の t について $h_u(t) = (Y+\eta)B^{-j_u(T)}$ を満たす $\eta \in [-1/4, 1/4]$ が存在する. つまり常微分方程式の解 h は式 3.23 の一つ目の場合のみを考慮すればよい.

$$Y = \sum_{i=0}^{j_u(T)} \frac{H_u(i,T)}{B^{k^i}} \cdot B^{k^{j_u(T)}}. \tag{3.25}$$

B は $2^{r(|u|)}$ の倍数なので, $Y \bmod 2^{r(|u|)} = H_u(j_u)$. g_u に代入すると,

$$\begin{aligned} g_u(t, h_u(t)) &= \frac{2^{q(|u|)} D f(\theta)}{B^{k^{j_u(T)+1}}} G_u(j_u(T), T, H_u(j_u(T), T)) \\ &= D h_u(t). \end{aligned}$$

よって h_u は g_u の常微分方程式の解.

g_u が (∞, k) 階連続的微分可能であることを示す. η が $[-1/4, 1/4]$ と $[1/4, 3/4]$ である区間それぞれにおいて微分する. 任意の $i \in \mathbf{N}$ について

$$D^i \delta_{u,Y}(t) = \frac{2^{(i+1)q(|u|)} D^{i+1} f(\theta)}{B^{k^{j_u(T)+1}}} G_u\left(j_u(T),\ T,\ Y \bmod 2^{r(|u|)}\right) \tag{3.26}$$

$$D^{(i,0)} g_u(t,y) = \begin{cases} D^i \delta_{u,Y}(\theta) & (-\frac{1}{4} < \eta < \frac{1}{4}) \\ \left(1 - f\left(\frac{4\eta-1}{2}\right)\right) D^i \delta_{u,Y}(\theta) + f\left(\frac{4\eta-1}{2}\right) D^i \delta_{u,Y+1}(\theta) & \\ & (\frac{1}{4} < \eta < \frac{3}{4}) \end{cases} \tag{3.27}$$

$j \in \{1, \dots, k\}$ について,

$$D^{(i,j)} g_u(t,y) = \begin{cases} 0 & (-\frac{1}{4} < \eta < \frac{1}{4}) \\ (2B^{j_u(T)})^j D^j f(\frac{4\eta-1}{2}) (D^i \delta_{u,Y+1}(\theta) - D^i \delta_{u,Y}(\theta)) & \\ & (\frac{1}{4} < \eta < \frac{3}{4}) \end{cases} \tag{3.28}$$

境界においても連続であるため, g_u は (∞, j) 階連続的微分可能であることが示された. 式 (3.27) に $t = 0, 1$ $(\theta = 0)$ を代入して $D^{(i,0)} g_u(0,y) = D^{(i,0)} g_u(1,y) = 0$. 上記の式より, 任意の $i \in \mathbf{N}$, $j \in \{0, \dots, k\}$ について $|D^{(i,j)} g_u| \leq 2^{\mu_i(|u|) - \gamma(|u|)}$.

$$\begin{aligned} h_u(1) &= \frac{H_u(p(|u|), 2^{q(|u|)})}{B^{2^{p(|u|)}}} \\ &= L(u) \cdot 2^{-2^{p(|u|)} \cdot (\gamma(|u|) + r(|u|) + 3)} \end{aligned} \tag{3.29}$$

より, $\rho(x) = 2^{p(x)} \cdot (\gamma(x) + r(x) + 3)$ とおくと成り立つ. □

補題 3.4 の証明では **PSPACE** 困難な言語を認識する多項式段一様関数族 $(G_u)_u$ とその解 $(H_u)_u$ に対して

$$\delta_{u,Y}(t) = \frac{2^{q(|u|)}Df(\theta)}{B^{j_u(T)+1}} G_u\left(j_u(T),\ T,\ Y \bmod 2^{r(|u|)}\right) \tag{3.30}$$

$$g_u(t,y) = \begin{cases} \delta_{u,Y}(t) & (\eta \le \frac{1}{4}) \\ (1 - f(\frac{4\eta-1}{2}))\delta_{u,Y}(t) + f(\frac{4\eta-1}{2})\delta_{u,Y+1}(t) & (\eta > \frac{1}{4}) \end{cases} \tag{3.31}$$

$$h_u(t) = \sum_{i=0}^{p(|u|)} \frac{H_u(i,T)}{B^i} + \frac{f(\theta)}{B^{j_u(T)+1}} G_u(j_u(T), T, H_u(j_u(T), T)) \tag{3.32}$$

と定める．$(g_u)_u$ と $(h_u)_u$ が補題 3.4 で求める性質を満たすことは, 補題 3.5 の証明と同様に示される．

3.4 主定理の証明

主定理の証明は Lipschitz の場合とほぼ同じである．補題 3.4 から得られる $(g_u)_u$ と $(h_u)_u$ から滑らかな g とその常微分方程式の解 h を構成する．各 $h_u(1)$ には $L(u)$ の情報が含まれるため, すべての h_u を一つの関数 h に埋め込みたい．そこで [0,1] を無限の区間に分割し, h の各旋字列 u に対応する区間 $[l_u^-, c_u]$ に h_u を縮小して埋め込む．ただし次の旋字列 u' の計算に影響を与えないために, h_u を定義域方向について反転したものを区間 $[c_u, l_u^+]$ に埋め込むことで影響を相殺する．つまり $h(l_u^-) = 0,\ h(c_u) = 2^{-\rho'(|u|)}L(u),\ h(l_u^+) = 0$ を満たすように $h_u(t)$ 埋め込む．ただし ρ' とは ρ に縮小率をかけたものとする．同様に g は h が常微分方程式の解となるよう, 各旋字列 u に対応する区間に g_u を縮小して埋め込む．

定理 1.1 と定理 1.2 の関係は補題 3.4 と補題 3.5 の関係と等しい．つまり **PSPACE** が **CH** に置き換わり, $(\infty, 1)$ 回連続微分可能が (∞, k) 回連続微分可能に一般化されている．よって定理 1.2 の証明から定理 1.1 の証明が構成できる．

定理 1.2 の証明. L を **CH** 困難な言語とおく．L に対して補題 3.4 を用いて, まず多項式 μ_i をえる．μ_i は i を係数部にのみ持つ多項式であるため, $\mu_i(x) = O(x^c)$ をみたす最小の定数 c が存在する．

$$\lambda(x) = 2x + 2, \qquad \gamma(x) = x^{c+1} + x\lambda(x) \tag{3.33}$$

とおき, 各 u に対して

$$\Lambda_u = 2^{\lambda(|u|)}, \qquad c_u = 1 - \frac{1}{2^{|u|}} + \frac{2\bar{u}+1}{\Lambda_u}, \qquad l_u^{\mp} = c_u \mp \frac{1}{\Lambda_u} \tag{3.34}$$

とおく．ただし $\bar{u} \in \{0, \dots, 2^{|u|} - 1\}$ は u を二進数として解釈した数. γ に対して, 補題より ρ, $(g_u)_u$, $(h_u)_u$ を得る．

任意の $[0,1)$ の実数に対して, $l_u^{\mp} \pm \frac{t}{\Lambda_u}$ がその実数と等しくなるような $u, \pm, t \in [0,1]$ が存在する. 関数 g, h を $t \in [0,1)$, $y \in [-1,1]$ に対して,

$$g\left(l_u^{\mp} \pm \frac{t}{\Lambda_u}, \frac{y}{\Lambda_u}\right) = \begin{cases} \pm \sum_{l=0}^{k} \frac{D^{(0,l)} g_u(t,1)}{l!}(y-1)^l & (1 < y) \\ \pm g_u(t,y) & (-1 \le y \le 1) \\ \pm \sum_{l=0}^{k} \frac{D^{(0,l)} g_u(t,-1)}{l!}(y+1)^l & (1 < y) \end{cases} \tag{3.35}$$

$$h\left(l_u^{\mp} \pm \frac{t}{\Lambda_u}\right) = \frac{h_u(t)}{\Lambda_u}. \tag{3.36}$$

$t = 1$ のとき $g(1,y) = 0$, $h(1) = 0$ と定義する.

この g と h が定理 1.1 で求める関数の性質を満たすことを示す.

まず g が多項式時間計算可能であることを補題 2.3 を用いて示す. 各有理数 T, Y について $g(T,Y)$ を求めるとき, $T = l_u^{\mp} \pm t/\Lambda_u$, $Y = y/\Lambda_u$ を満たすような $u, \pm, t, y$ は, 多項式時間で計算可能であり, $(g_u)_u$ は多項式時間計算可能なので $g(T,Y)$ は多項式時間計算可能.

g が (∞, k) 回連続的微分可能であることを示す. g_u は (∞, k) 階連続的微分可能であるため, 各区間においては (∞, k) 階連続的微分可能である. $i \in \mathbf{N}$, $j \in \{0, \dots, k\}$, $t \in (0,1)$ において

$$D^{(i,j)} g\left(l_u^{\mp} \pm \frac{t}{\Lambda_u}, \frac{y}{\Lambda_u}\right) = \begin{cases} \pm \Lambda_u^{(i,j)} \sum_{l=j}^{k} \frac{D^{(i,l)} g_u(t,1)}{(l-j)!}(y-1)^l & (1 < y) \\ \pm \Lambda_u^{(i,j)} D^{(i,j)} g_u(t,y) & (-1 < y < 1) \\ \pm \Lambda_u^{(i,j)} \sum_{l=j}^{k} \frac{D^{(i,l)} g_u(t,-1)}{(l-j)!}(y+1)^l & (1 < y) \end{cases} \tag{3.37}$$

$D^{(i,j)} g_u$ は連続であるため $t \in (0,1)$, $y \neq -1, 1$ の区間において連続. 境界 ($t = 0, 1$ または $y = -1, 1$) において連続であることは, 定義および補題 3.5(iv) によりしめされる. 第一変数が 1 へ向かうとき

$$\begin{aligned} \left| D^{(i,j)} g\left(l_u^{\mp} \pm \frac{t}{\Lambda_u}, \frac{y}{\Lambda_u}\right)\right| &\le \Lambda_u^{i+j} \sum_{l=j}^{k} \left(|D^{(i,l)} g_u|(\Lambda_u + 1)^l\right) \\ &\le \Lambda_u^{i+j+k} 2^{k+\mu_i(|u|)-\gamma(|u|)} \\ &= 2^{(i+j+k)\lambda(|u|)+k+\mu_i(|u|)-\gamma(|u|)}. \end{aligned} \tag{3.38}$$

γ のとり方により, $|u| \to \infty$ のとき式 (3.38) は 0 に収束する. よって $\lim_{t \to 1-0} D^{(i,j)} g(t,y) = g(1,y) = 0$. 以上により g が (∞, k) 階連続的微分可能.

h が g の常微分方程式の解であることを示す. $h(0) = 0$,

$$Dh\left(l_u^{\mp} \pm \frac{t}{\Lambda_u}\right) = \pm \frac{Dh_u(t)}{\Lambda_u} = \pm g_u(t, h_u(t)) = g\left(l_u^{\mp} \pm \frac{t}{\Lambda_u}, h\left(l_u^{\mp} \pm \frac{t}{\Lambda_u}\right)\right). \tag{3.39}$$

L は h に還元可能であることを示す.

$$h(c_u) = \frac{h_u(1)}{\Lambda_u} = \frac{L(u)}{2^{\lambda(|u|)+\rho(|u|)}} \tag{3.40}$$

つまり R, S, T を以下のように定義することで, 還元可能.

$$R(u, v) = v \tag{3.41}$$

$$S(u, 0^n) = \lfloor 2^n c_u \rfloor \text{ を表す旋字列}, \tag{3.42}$$

$$T(u) = 0^{\lambda(|u|)+\rho(|u|)} \tag{3.43}$$

L は **CH** 困難であるため, h は **CH** 困難. □

4 演算子の計算量

定理 1.1, 1.2 はいづれも関数 g を多項式時間計算可能と仮定した上で解 h の計算量について述べている. しかし微分方程式を「解く」困難さ, すなわち与えられた g から h を求める演算子の計算量は如何程であろうか. この問に答えるには先ず実関数を実関数へ写す演算子の計算量を定義することを要する.

実数を入出力する関数の計算量を論ずるには, 実数を旋字列関数で表した. 即ち $\mathbf{R}$ の各元の名として旋字列関数を使ったのであり, その対応を $\mathbf{R}$ の表現という. 同じように実関数を入出力する演算子の計算量を論ずるには, 実関数を旋字列関数で表す. すなわち, 連続な実関数 $h\colon [0, 1] \to \mathbf{R}$ の全体 $\mathrm{C}[0, 1]$ や, リプシッツ連続な実関数 $g\colon [0, 1] \times [-1, 1] \to \mathbf{R}$ の全体 $\mathrm{C_L}[[0, 1] \times [-1, 1]]$ について, 表現を指定すればよい. 演算子の計算可能性や計算量はその表現に依ることになるが, ここでは [5] に従い, $\mathrm{C}[0, 1]$ の表現として $\delta_\square$ を, $\mathrm{C_L}[[0, 1] \times [-1, 1]]$ の表現として $\delta_{\square\mathrm{L}}$ をそれぞれ用いる. これらの表現では使われる旋字列関数の長さが有界でないため, 神託機械の時間・空間を測る方法を二階多項式を使って拡張する必要があるが, 詳細は [5] を参照せられたい. $\delta_\square$ は関数空間 $\mathrm{C}[0, 1]$ の表現として或る意味で自然なものであることが判っており [], また $\delta_{\square\mathrm{L}}$ はそれと同様の表現にリプシッツ定数に関する情報を附加したものである.

実関数 $g \in \mathrm{C_L}[[0, 1] \times [-1, 1]]$ を, (1.1) を満す $h \in \mathrm{C}[0, 1]$ に対応させる演算子 ODE を考える. ODE は $\mathrm{C_L}[[0, 1] \times [-1, 1]]$ から $\mathrm{C}[0, 1]$ への部分写像である.

[5] では表 1.1 第三行の証明を構成的に書き直すことで, ODE が $(\delta_{\square\mathrm{L}}, \delta_\square)$-**FPSPACE**-$\leq_\mathrm{W}$ 完全であることが示されている. 本稿の関心はこれを滑らかな入力に制限しても困難性が成立つかという問である. ODE を (∞, k) 回連続微分可能な入力に制限したものを ODE_k と書くことにする $(k \in \mathbf{N} \cup \{\infty\})$.

帰着の定義に $\leq_{\mathrm{m}f}$, $\leq_\mathrm{W}$, $\leq_\mathrm{sW}$ がほげほげ……

定理 4.1. ODE_1 は $(\delta_{\square\mathrm{L}}, \delta_\square)$-**FPSPACE**-$\leq_\mathrm{W}$ 完全.

定理 4.2. ODE_k は $(\delta_{\square\mathrm{L}}, \delta_\square)$-**FPSPACE** に属し, $(\delta_{\square\mathrm{L}}, \delta_\square)$-**CH**-$\leq_\mathrm{W}$ 困難.

定理 4.3. ODE_∞ は $(\delta_{\square\mathrm{L}}, \delta_\square)$-**FPSPACE**-$\leq_\mathrm{sW}$ 完全.

定理 1.1, 1.2 は系としてふがふが

謝辞

本研究を遂行し発表するにあたり河村は科学研究費補助金若手研究 (B) 23700009 による援助を受けた．記して謝意を表する．

参考文献

[1] E.A. Coddington and N. Levinson. *Theory of Ordinary Differential Equations*. McGraw-Hill, 1955.

[2] A. Grzegorczyk. Computable functionals. *Fund. Math*, 42(19553):168–202, 1955.

[3] A. Kawamura. Complexity of initial value problems, 2010. To appear in *Fields Institute Communications*.

[4] A. Kawamura. Lipschitz continuous ordinary differential equations are polynomial-space complete. *Computational Complexity*, 19(2):305–332, 2010.

[5] A. Kawamura and S. Cook. Complexity theory for operators in analysis. In *Proceedings of the 42nd ACM Symposium on Theory of Computing*, pages 495–502. ACM, 2010.

[6] K.I. Ko. On the computational complexity of ordinary differential equations. *Information and Control*, 58(1-3):157–194, 1983.

[7] K.I. Ko. *Complexity Theory of Real Functions*. Birkhäuser Boston, 1991.

[8] K.I. Ko and H. Friedman. Computing power series in polynomial time. *Advances in Applied Mathematics*, 9(1):40–50, 1988.

[9] W. Miller. Recursive function theory and numerical analysis. *Journal of Computer and System Sciences*, 4(5):465–472, 1970.

[10] N.T. Müller. Uniform computational complexity of taylor series. *Automata, Languages and Programming*, pages 435–444, 1987.

[11] M.B. Pour-el and I. Richards. A computable ordinary differential equation which possesses no computable solution. *Annals of Mathematical Logic*, 17(1-2):61–90, 1979.

[12] J. Torán. Complexity classes defined by counting quantifiers. *Journal of the ACM (JACM)*, 38(3):752–773, 1991.

[13] K.W. Wagner. The complexity of combinatorial problems with succinct input representation. *Acta Informatica*, 23(3):325–356, 1986.

[14] Klaus Weihrauch. *Computable Analysis: An Introduction*. Texts in Theoretical Computer Science. Springer, 2000.

[15] 高木貞治. **解析概論**. 岩波書店, 1968.