滑らかな常微分方程式の計算量

太田浩行[*]　河村彰星[†]

マルチン・ツィーグラー[‡]　カルステン・レースニク[§]

概要

常微分方程式 $h(0) = 0,\ h'(t) = g(t, h(t))$ の解 h の計算量と, 関数 g の計算量及び制限の関係は, 常微分方程式を数値的に解くことの本質的な難しさを表しているとして調べられている. 本稿では河村が 2010 年の論文の中で Lipschitz 条件を満たす多項式時間計算可能な関数 g の常微分方程式の解が **PSPACE** 困難たりうるという結果を示すために用いた手法を, 微分可能な g に拡張する. これにより多項式時間計算可能で 1 回連続微分可能な関数の常微分方程式が, **PSPACE** 困難な解を持ちうることがわかる. また任意の k について, 多項式時間計算可能で k 回微分可能な関数の常微分方程式は, 計数階層 **CH** について困難な解を持ちうることを示す.

1　序論

計算可能解析学 (Computable Analysis) [12] では計算可能性理論や計算量理論の視点から解析学を扱う. 「計算可能な実数」や「多項式時間計算可能な実関数」といった概念を定義し (本稿では 2 節で説明する), 解析学に現れる様々な実数や実関数の本質的な難しさを分析する.

連続実関数 $g\colon [0,1] \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ に対して次の常微分方程式を考える.

$$h(0) = 0, \qquad Dh(t) = g(t, h(t)) \quad (t \in [0,1]) \tag{1.1}$$

ただし Dh は h の導関数. 本稿では g が多項式時間計算可能であるとき, 解 h がどれほど複雑でありうるかを考える.

g に多項式時間計算可能であることの他に何の制限も設けない場合, 解 h (一般に一意でない) は計算不能でありうるため, 様々な制限のもと h の計算量が研究されている (表 1.1). この表では下に向うにつれて左列の条件が強まっている. Lipschitz 条件とは解 h が一意であるための十分条件であり, これが満たされるときには, 解 h は多項式領域計算可能であり, **PSPACE** 困難でありうることがわかっている. つまり上界と下界が一致しているといえる (詳しくは河村 [4]). 一方で g が解析的であるとき, 解 h も解析的となり, このとき h は多項式時間計算可能である.

[*] 東京大学, `hota@is.s.u-tokyo.ac.jp`

[†] 東京大学

[‡] Martin Ziegler, ダルムシュタット工科大学

[§] Carsten Rösnick, ダルムシュタット工科大学

表 1.1　多項式時間計算可能実関数 g の常微分方程式 (1.1) の解 h の計算量

制限	上界	下界
—	—	計算不可能たりうる [9]
h が g の唯一解	計算可能 [1]	任意の時間がかかりうる [5, 8]
g が Lipschitz 条件を満たす	多項式領域計算可能	**PSPACE** 困難になりうる [4]
g が $(\infty, 1)$ 回連続微分可能	多項式領域計算可能	**PSPACE** 困難になりうる [本稿定理 1.1]
g が (∞, k) 回連続微分可能	多項式領域計算可能	**CH** 困難たりうる [本稿定理 1.2]
g が解析的	多項式時間計算可能 [7, 3]	—

そこで本稿ではこの隔たりを埋めるため, 滑らかつまり微分可能な実関数 g について h の計算量がどれほどになりうるかを調べた.

なお, 積分および最大化の計算量については, 実関数を無限回微分可能に制限しても一般の場合と複雑さは変わらず, それぞれ #**P** 困難および **NP** 困難であることが示されている (定理 3.7, 定理 5.32 [6]).

二変数実関数 g が (i, j) 回連続微分可能であるとは, 第一変数について i 回, 第二変数について j 回微分でき, その導関数が連続であることとする (2 節で厳密に定義).

定理 1.1. 多項式時間計算可能かつ $(\infty, 1)$ 回連続微分可能な実関数 $g\colon [0, 1] \times [-1, 1] \to \mathbf{R}$ であって, 常微分方程式 (1.1) が **PSPACE** 困難な解 $h\colon [0, 1] \to \mathbf{R}$ を持つものが存在する.

定理 1.2. 任意の自然数 $k \geq 2$ に対して, 多項式時間計算可能かつ (∞, k) 回連続微分可能な実関数 $g\colon [0, 1] \times [-1, 1] \to \mathbf{R}$ であって, 常微分方程式 (1.1) が **CH** 困難な解 $h\colon [0, 1] \to \mathbf{R}$ を持つものが存在する.

ここで $g\colon [0, 1] \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ でなく $g\colon [0, 1] \times [-1, 1] \to \mathbf{R}$ と書いたのは, 本稿では実関数の多項式時間計算可能性を, 定義域が有界閉領域のときにのみ定義するからである. このため h が区間 $[-1, 1]$ の外に値を取ることがあると方程式 (1.1) が意味をなさなくなるが, 定理 1.1 において h が解であるというのは, 任意の $t \in [0, 1]$ について $h(t) \in [-1, 1]$ が満たされることも含めて述べている. なお両定理とも Lipschitz 条件よりも強い仮定を置いているため, そのような h は g に対して, 存在すれば唯一である.

また二変数関数 g が $i + j \leq k$ を満たす任意の自然数 i, j について (i, j) 回連続微分可能であることを, g が k 回連続微可能であると言うこともある. 定理 1.1 で主張される g は, $(\infty, 1)$ 回連続微分可能であるから, 特に 1 回連続微分可能である.

また定理 1.2 において任意の k に対して (∞, k) 階微分可能な関数を考えているが, 一つの関数が任意の k に対して k 階微分であることを求めているわけではない. つまり g が無限回微分可能であると制限しているわけではない. 無限回微分可能な関数に対する常微分方程式の計算量は今後の課題である.

1.1 演算子の計算量

定理 1.1, 1.2 はいづれも関数 g を多項式時間計算可能と仮定した上で解 h の計算量について述べている. しかし微分方程式を「解く」困難さ, すなわち与えられた g から h を求める演算子の計算量は如何程であろうか. この問に答えるには先ず実関数を実関数へ写す演算子の計算量を定義することを要する. 実数の名を実数の名へ変換する機械を以て実関数の計算を定義したのと同じように, 実関数の名を実関数の名へ変換することになる. ほげほげ……

定理 1.3. ODE_1 は $(\delta_\Box, \delta_\Box)$-**FPSPACE**-$\leq_{\mathrm{W}}$ 完全.

定理 1.4. ODE_k は $(\delta_\Box, \delta_\Box)$-**FPSPACE** に属し, $(\delta_\Box, \delta_\Box)$-**CH**-$\leq_{\mathrm{W}}$ 困難.

定理 1.5. ODE_∞ は **FPSPACE**-$\leq_{\mathrm{sW}}$ 完全.

2 準備

2.1 表記

自然数の集合を $\mathbf{N}$, 整数の集合を $\mathbf{Z}$, 実数の集合を $\mathbf{R}$, 有理数の集合を $\mathbf{Q}$, $\{0\}^* = \{0^n \mid n \in \mathbf{N}\}$ と表す.

A, B を $\mathbf{R}$ の有界閉区間とする. 実関数 $f\colon A \to \mathbf{R}$ に対して $|f| = \sup_{x \in A} f(x)$ と書く.

一変数関数 $f\colon A \to \mathbf{R}$ が i 回連続微分可能であるとき, その i 階導関数を $D^i f$ と表記する.

二変数関数 $g\colon A \times B \to \mathbf{R}$ が (i, j) **回連続微分可能**であること及び実関数 $D^{(i,j)}g\colon A \times B \to \mathbf{R}$ を定義する.

まず $(i, j) = (0, 0)$ の時, g が連続であれば $(0, 0)$ 連続微分可能であり $D^{(0,0)}g = g$.

二変数実関数 g について, 第一変数についての偏導関数を $D_1 g$, 第二変数についての偏導関数を $D_2 g$ と表記する. $(i, j) \neq (0, 0)$ の時, 以下のすべてを満たすとき g は (i, j) 回連続微分可能であると定義する.

- $i > 0$ ならば g が $(i-1, j)$ 回連続微分可能かつ $D^{(i-1,j)}g$ が第一変数について偏微分可能であり, その導関数 $D_1 D^{(i-1,j)}g$ が連続.
- $j > 0$ ならば g が $(i, j-1)$ 回連続微分可能かつ $D^{(i,j-1)}g$ が第二変数について偏微分可能であり, その導関数 $D_2 D^{(i,j-1)}g$ が連続.

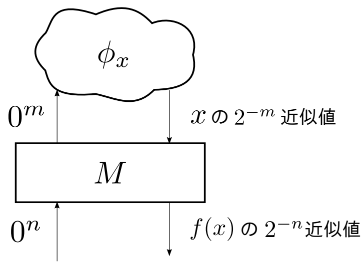

図 2.1　実関数を計算する機械

また g が (i,j) 回連続微分可能であるとき,

$$D^{(i,j)}g = \begin{cases} D_1 D^{(i-1,j)}g & (i>0) \\ D_2 D^{(i,j-1)}g & (j>0) \end{cases} \tag{2.1}$$

と定義する.

$i>0$, $j>0$ のとき $D^{(i,j)}g$ の定義が 2 つ存在するが (i,j) 回連続微分可能であれば, 第一変数について i 階以下, 第二変数について j 階以下の導関数はその微分の順序によらず等しいため, 2 つの定義は一致する [13].

2.2　実数の名

実数は有限な文字列に符号化できない. そこで文字列から文字列への関数に符号化する.

定義 2.1 (実数の名)**.** 関数 $\phi\colon \{0\}^* \to \mathbf{Z}$ が実数 $x \in [0,1]$ の**名**であるとは, $\phi(0^n) = \lfloor x \cdot 2^n \rfloor$ または $\phi(0^n) = \lceil x \cdot 2^n \rceil$ を満たすこと.

ここで $\lfloor\cdot\rfloor, \lceil\cdot\rceil$ とはそれぞれ整数への切り捨て関数と切り上げ関数である. つまり実質的には実数 x の名は, サイズ n の入力を受け取ると, 精度 n 桁の x の近似値を返す. 以下では ϕ の値を二進数で表すことにし, ϕ を文字列から文字列への関数として扱う.

2.3　計算可能実関数, 多項式時間実関数

実数を受け取り実数を返す関数を機械が計算するとはどういうことか定義しよう. 実数自体が関数として符号化されているため, それを読み書きする機構として, 神託チューリング機械 (以下単に機械という) を使う [図 2.1]. 計算可能な実関数は Grzegorczyk によって初めて形式的に定義された [2].

機械 M に, 文字列から文字列への関数 ϕ を神託として与え, 文字列 0^n を入力として与えたとき, 出力される文字列を $M^\phi(0^n)$ で表す. つまり M^ϕ をやはり文字列から文字列への関数とみる.

定義 2.2. A を $\mathbf{R}$ の有界閉区間とする. 機械 M が実関数 $f\colon A \to \mathbf{R}$ を計算するとは, 任意の実数 $x \in A$, 任意の x の名 ϕ_x に対して, M^{ϕ_x} が $f(x)$ の名であること.

A が $\mathbf{R}^2$ の有界閉領域であるときにも, 神託を二つ取る機械を考えて同様に定義する.

ある実関数が**計算可能**であるとは, その関数を計算する神託機械が存在することである. 同様に, ある実関数が**多項式時間計算可能**であるとは, その関数を計算する多項式時間神託機械が存在することである.

文字列 u で添字づけられた実関数 $f_u\colon A \to \mathbf{R}$ の族 $(f_u)_u$ を機械 M が計算するとは, 任意の実数 $x \in A$, 任意の x の名 ϕ_x に対して, 文字列 v を $M^{\phi_x}(u,v)$ へ移す関数が, $f_u(x)$ の名であることをいう. 実関数族が多項式時間計算可能であるとは, その実関数族を計算する多項式時間神託機械が存在することである.

神託機械 M で f を計算するとき, 求める精度 n に対して, x の近似値に必要な精度 m が定まるため, 計算可能な関数は連続である. また n と m の対応関係と有理数における近似値を与えることで, 計算可能実関数や多項式時間計算可能実関数に対して, 神託機械を用いない同値な特徴付けが可能である.

補題 2.3. 実関数 $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ に対して, f が多項式時間計算可能であることは, 多項式時間計算可能な二つの関数 $\phi\colon (\mathbf{Q} \cap [0,1]) \times \{0\}^* \to \mathbf{Q}$ と $p\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ とが存在し, 任意の $d \in \mathbf{Q} \cap [0,1]$, $n \in \mathbf{N}$ について

$$|\phi(d, 0^n) - f(d)| \le 2^{-n} \tag{2.2}$$

任意の $x, y \in [0,1]$, $m \in \mathbf{N}$ について

$$|x - y| \le 2^{-p(m)} \Rightarrow |f(x) - f(y)| \le 2^{-m} \tag{2.3}$$

が成立つことと同値である.

2.4 困難性

実関数の計算量の下界を述べるために, 困難性を定義する.

まず実関数に言語が還元することを定義する. 言語 $L\colon \{0,1\}^* \to \{0,1\}$ が実関数 $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ に多項式時間還元可能であるとは, f を計算する機械を使って $L(u)$ を多項式時間で計算可能であることである. つまり f を計算する機械があるとしたとき, 入力 u に対して, 精度 n をこの機械に与え, ある実数 x_u の神託を模倣し, $f(x_u)$ の n 桁近似値から, u が L に属するか否かを多項式時間で計算可能であることである [図 2.4]. 厳密には以下のように定義する.

定義 2.4 (多項式時間還元可能)**.** 言語 L が実関数 $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ に**多項式時間還元可能**であるとは, 多項式時間計算可能な関数 R, S, T が存在し, 任意の文字列 u に対して以下を満たすことをいう.

- $S(u, \cdot)$ はある実数 x_u の名
- $f(x_u)$ の任意の名 ϕ に対して

$$L(u) = R(u, \phi(T(u))).$$

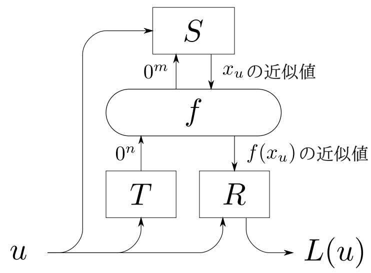

図 2.2　言語 L から関数 f への還元

以下単に言語が実関数に還元可能といった場合, 多項式時間還元可能を指す. 計算量 C に対して, 関数 f が C **困難**であるとは, C に属する任意の言語が f に還元可能であることと定義する.

2.5　計数階層

計数階層(Counting Hierarchy($\mathbf{CH}$)) とは Wagner によって導入された計算量クラスである [11]. 多項式階層 ($\mathbf{PH}$) が $\mathbf{NP}$ の神託機械を用いて,

$$\Sigma_0^p = \mathbf{P}$$
$$\Sigma_{k+1}^p = \mathbf{NP}^{\Sigma_k^p}$$
$$\mathbf{PH} = \bigcup_k \Sigma_k^p$$

と定義されるのに対し, 計数階層は多項式階層の $\mathbf{NP}$ を $\mathbf{PP}$ で置き換えたものである. つまり

$$\mathbf{C}_0\mathbf{P} = \mathbf{P}$$
$$\mathbf{C}_{k+1}\mathbf{P} = \mathbf{PP}^{\mathbf{C}_k\mathbf{P}}$$
$$\mathbf{CH} = \bigcup_k \mathbf{C}_k\mathbf{P}.$$

上記の特徴付けは Torán によるものであり, Wagner によるオリジナルの定義とは異なる [10].

$\mathbf{PH} \subseteq \mathbf{CH} \subseteq \mathbf{PSPACE}$ だが, $\mathbf{PH} = \mathbf{CH}$, $\mathbf{CH} = \mathbf{PSPACE}$ か否かは未解決である.

3　1 回連続微分可能関数と常微分方程式

この節では定理 1.1, つまり $(\infty, 1)$ 階連続微分可能な関数の常微分方程式の解は $\mathbf{PSPACE}$ 困難でありうることを示す. ただし紙面の都合上, 詳細な証明は省き, 証明の概略を述べるに止める.

証明の流れとして, まず補題 3.1 により任意の言語 $L \in \mathbf{PSPACE}$ を認識する関数族 $(G_u)_u, (H_u)_u$ を得る. そして $(G_u)_u, (H_u)_u$ を模倣する実関数族 $(g_u)_u, (h_u)_u$ を構成し (補題 3.2), $(g_u)_u, (h_u)_u$ から定理 1.1 で求める g, h を構成する.

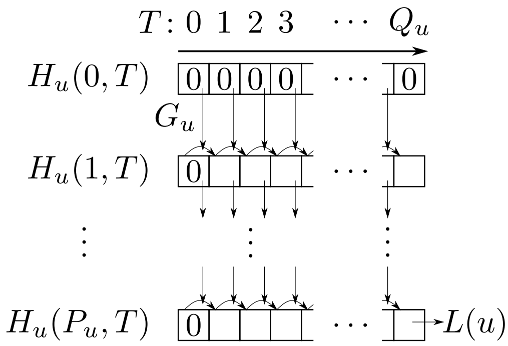

図 3.1　差分方程式と認識される言語

3.1　差分方程式

定理 1.1 と定理 1.2 の証明では, まず滑らかな実関数の常微分方程式によってある種の「離散版」常微分方程式を模倣できることを示し, その離散版の方程式が **PSPACE** 困難ないし **CH** 困難であることを示す. この節ではその離散版の方程式である「差分方程式」を定義する.

$[n] = \{0, \ldots, n-1\}$ と表記する. 関数 $G\colon [P] \times [Q] \times [R] \to \{-1, 0, 1\}$ に対して, 関数 $H\colon [P+1] \times [Q+1] \to [R]$ が任意の $i \in [P]$, $T \in [Q]$ について以下を満たすとき, H を G の **差分方程式** の解と呼ぶ.

$$H(i, 0) = H(0, T) = 0 \tag{3.1}$$

$$H(i+1, T+1) = H(i+1, T) + G(i, T, H(i, T)) \tag{3.2}$$

P, Q, R をそれぞれ**段数**, **列数**, **欄の大きさ**と呼ぶ. G と H が常微分方程式の g と h に対応し, $H(i, 0) = 0$ が $h(0) = 0$ に, 式 (3.2) と同値である式 $H(i+1, T+1) - H(i+1, T) = G(i, T, H(i, T))$ が $h'(t) = g(t, h(t))$ と対応する.

以下では文字列 u ごとに差分方程式 G_u を一つ定めた族 $(G_u)_u$ を考える. 言語 L がこの族 $(G_u)_u$ によって認識されるとは, 各 u に対して G_u の段数と列数, 解をそれぞれ P_u, Q_u, H_u としたとき, $H_u(P_u, Q_u) = L(u)$ を満たすこととする (表 3.1). ここで言語 $L \subseteq \{0,1\}^*$ は関数 $L\colon \{0,1\}^* \to \{0,1\}$ と同一視し, $u \in L$ のとき $L(u) = 1$ としている.

$(G_u)_u$ が**一様**であるとは, 各 u について G_u の段数, 列数及び欄の大きさが $|u|$ の多項式の指数 ($2^{\mathrm{poly}(|u|)}$) で抑えられ, かつ与えられた (u, i, T, Y) から多項式時間で $G_u(i, T, Y)$ が計算できることと定義する.

G_u の段数がさらに $|u|$ の多項式, 対数で抑えられるとき, 族 $(G_u)_u$ はそれぞれ**多項式段**, **対数段**であるという. 多項式段, 対数段の一様関数族によって認識される言語のクラスをそれぞれ **DIVP**(poly), **DIVP**(log) と名づける. この記法を使うと河村の論文では次が示されている.

補題 3.1 (補題 4.7 [4])**.** 任意の言語 $L \in$ **PSPACE** に対して, その言語を認識する多項式段一様

な関数族 $(G_u)_u$ が存在する.

$\mathbf{CH} \subseteq \mathbf{DIVP}(\log) \subseteq \mathbf{DIVP}(\mathrm{poly}) = \mathbf{PSPACE}$ であるが, $\mathbf{CH} = \mathbf{DIVP}(\log)$, $\mathbf{DIVP}(\log) = \mathbf{PSPACE}$ か否かは未解決である.

3.2 多項式段一様関数族の差分方程式と PSPACE

任意の言語 $L \in \mathbf{PSPACE}$ について, その差分方程式が L を認識する多項式段一様な関数族 $(G_u)_u$ が存在すること (補題 3.1) は河村によって示されているがその証明の概略を示す.

PSPACE 完全な言語である QBF を認識する $(G_u)_u$ を構成することにより, 任意の $L \in \mathbf{PSPACE}$ を認識する多項式段一様な関数族 $(G_u)_u$ が存在することを示す. ここで QBF とは, 文字列 u を $\psi = Q_1x_1 \cdots Q_nx_n\phi(x_1, \ldots, x_n)$ と解釈したとき $u \in$ QBF $\Leftrightarrow \psi = T$ によって定義される言語である. ただし Q_i は $\exists$ または $\forall$, $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ は x_i 以外の変数を含まない論理式とする.

論理式 $\psi = Q_1x_1 \cdots Q_nx_n\phi(x_1, \ldots, x_n)$ の値を $\vee, \wedge$ によってラベル付された二分木によって計算することを考える. 量化子 Q_1x_1 を除き x_1 を T と F に置き換えた式をそれぞれ $\psi_T = Q_2x_2 \cdots Q_nx_n\phi(T, x_2, \ldots, x_n)$, $\psi_F = Q_2x_2 \cdots Q_nx_n\phi(F, x_2, \ldots, x_n)$ と置くと $Q_1 = \forall$ ならば $\psi = \psi_T \wedge \psi_F$, $Q_1 = \exists$ ならば $\psi = \psi_T \vee \psi_F$. つまり変数の 1 つ少ない 2 つの論理式と量化子によってもとの論理式の値も決まる. これを再帰的に繰り返すことで ψ は計算可能であり, それは深さ n の二分木を葉から根へ値を定めていくことと同じである. この過程は二分木の深さが段数に, 幅が列数に対応する形で多項式段一様な関数による差分方程式で模倣可能であるため, QBF を認識する多項式段一様関数の差分方程式が存在する.

3.3 多項式段差分方程式を模倣する関数族

補題 3.2. 任意の言語 $L \in \mathbf{PSPACE}$ に対して, 係数のみに i を含む多項式 μ_i が存在して, 任意の多項式 γ に対して, 多項式 ρ, 実関数族 $(g_u)_u, (h_u)_u$ で, $(g_u)_u$ は多項式時間計算可能であり, 各文字列 u に対して以下を満たすものが存在する.

(i) $g_u \colon [0,1] \times [-1,1] \to \mathbf{R}$, $\quad h_u \colon [0,1] \to [-1,1]$;

(ii) h_u は g_u の常微分方程式 (1.1) の解;

(iii) g_u は $(\infty, 1)$ 階連続微分可能;

(iv) 任意の $i \in \mathbf{N}$, $y \in [-1,1]$ に対して
$$D^{(i,0)}g_u(0,y) = D^{(i,0)}g_u(1,y) = 0;$$

(v) 任意の $i \in \mathbf{N}$, $j \in \{0,1\}$ に対して
$$|D^{(i,j)}g_u| \leq 2^{\mu_i(|u|) - \gamma(|u|)};$$

(vi) $h_u(1) = 2^{-\rho(|u|)}L(u)$.

この補題より関数族 $(g_u)_u, (h_u)_u$ で h_u は g_u の常微分方程式の解であり, g_u は滑らかであり, 各 $h_u(1)$ に $L(u)$ の情報を持つものの存在が示される. 条件 (iii) – (v) はすべて定理 1.1 の g を滑らかな関数とするために必要となる条件である. 詳細については定理の証明の際に説明する.

この補題の証明の基本的な流れを説明する. 任意の言語 $L \in \mathbf{PSPACE}$ に対し, 補題 3.1 を用いて L を認識する $(G_u)_u$ 及びその差分方程式の解 $(H_u)_u$ を得る. 各 G_u, H_u を模倣する滑らかなな $g_u\colon [0,1] \times [-1,1] \to \mathbf{R}$ とその常微分方程式の解 $h_u\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ を構成する. また $(G_u)_u$ の一様性から $(g_u)_u$ の多項式時間計算可能性を示す.

上記の証明は基本的に, リプシッツ連続条件の場合の証明と変わらない. 違いは g_u を滑らかな関数にするため, 以下のような滑らかな多項式時間実関数 $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ を用いて g_u を構成している点である.

補題 3.3 (補題 3.6. [6])**.** 以下を満たす多項式時間無限回微分可能実関数 $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ が存在する.

(i) $f(0) = 0, \quad f(1) = 1$;
(ii) 任意の $n \geq 1$ で $f^{(n)}(0) = f^{(n)}(1) = 0$;
(iii) f は $[0,1]$ で単調増加;
(iv) 任意の $n \geq 1$ で $f^{(n)}$ は多項式時間実関数.

補題 3.2 の証明. 補題 3.1 から, L を認識する離散初期値問題 $\langle d, p, q, (G_u)_u \rangle$ とその解 $(H_u)_u$ を得る. 各ステップを $p(u)$ 個に分割することで, $G_u(i, T, Y) \neq 0$ を満たす i を各 T に対してたかだか 1 つにすることができる. そのような i のことを $j_u l(T)$ と表現する. 任意の i で $G_u(i, T, Y) = 0$ ならば $j_u(T)$ は任意の値を取るとする. さらに以下を満たすとしても一般性を失わない.

$$H_u(i, 2^{q(|u|)}) = \begin{cases} L(u) & (i = p(|u|)) \\ 0 & (i < p(|u|)) \end{cases} \tag{3.3}$$

$$G_u(i, 2 \cdot 2^{q(|u|)} - 1 - T, Y) = \begin{cases} 0 & (i = p(|u|) - 1) \\ -G_u(i, T, Y) & (i < p(|u|) - 1) \end{cases} \tag{3.4}$$

$$H_u(i, 2 \cdot 2^{q(|u|)} - T) = \begin{cases} H_u(p(|u|), 2^{q(|u|)}) & (i = p(|u|)) \\ H_u(i, T) & (i < p(|u|)) \end{cases} \tag{3.5}$$

補題 3.3 の f に対して, 自然数 c_i を各 $i \in \mathbf{N}$ に対して $|Dif(x)| \leq 2^{c_i}$ を満たす最小の自然数と定める. 定数 $d' = \lceil \log(4d+1) \rceil$, $B = 2^{\gamma(|u|)+d'}$ とおき, 各 $(t, y) \in [0,1] \times [-1,1]$ に対して, 自然数 N, $\theta \in [0,1]$, 整数 Y, $\eta \in [-1/4, 3/4]$ を $t = (T+\theta)2^{-q(|u|)}$, $y = (Y+\eta)B^{-j_u(T)}$ を満たすように定める.

そのとき,

$$\delta_{u,Y}(t) = \frac{2^{q(|u|)} f'(\theta)}{B^{j_u(T)+1}} G_u\left(j_u(T), T, \min\left(Y \bmod 2^{d'}_{,}\ d-1\right)\right) \tag{3.6}$$

とおき g_u, h_u を以下のように定義する．

$$g_u(t,y) = \begin{cases} \delta_{u,Y}(t) & (\eta \leq \frac{1}{4}) \\ (1 - f(\frac{4\eta-1}{2}))\delta_{u,Y}(t) + f(\frac{4\eta-1}{2})\delta_{u,Y+1}(t) & (\eta > \frac{1}{4}) \end{cases} \tag{3.7}$$

$$h_u(t) = \sum_{i=0}^{p(|u|)} \frac{H_u(i,T)}{B^i} + \frac{f(\theta)}{B^{j_u(T)+1}} G_u(j_u(T), T, H_u(j_u(T), T)) \tag{3.8}$$

上記のように定義した g_u, h_u が補題 3.2 で求める性質を満たすことを示す．(i) は自明．$(g_u)_u$ が多項式時間計算可能であることは補題 2.3 によって示される．

h_u は g_u の常微分方程式の解であることを示す． まず h_u について解析する． $h_u(t) = (Y+\eta)B^{-j_u(T)}$ とおくときの, η の範囲がどうなるか, つまり式 (3.7) のどちらのケースを使うかを考える．式 (4.21) の一つ目の項において $i \leq j_u(T)$ の合計は $B^{j_u(T)}$ の倍数なので η に影響はない．$i > j_u(T)$ の合計は,

$$\begin{aligned} \sum_{i>j_u(T)} \frac{H_u(i,T)}{B^i} &\leq \sum_{i>j_u(T)} \frac{d-1}{B^i} = \sum_{i>j_u(T)} \frac{d-1}{B^{i-j_u(T)}} B^{-j_u(T)} \\ &\leq \sum_{i>j_u(T)} \frac{(d-1)}{(4d+1)^{i-j_u(T)}} B^{-j_u(T)} \\ &= \frac{d-1}{4d} B^{-j_u(T)} \end{aligned}$$

二つ目の項の絶対値は

$$\left| \frac{f(\theta)}{B^{j_u(T)+1}} G_u(j_u(T), T, H_u(j_u(T), T)) \right| \leq \frac{1}{B^{j_u(T)+1}} \leq \frac{B^{-j_u(T)}}{4d+1} \tag{3.9}$$

$(\frac{d-1}{4d} + \frac{1}{4d+1})B^{-j_u(T)} \leq \frac{1}{4}B^{-j_u(T)}$ より $h_u(t) = (Y+\eta)B^{-j_u(T)}$ を満たす $\eta \in [-1/4, 1/4]$ が存在する．このとき,

$$Y = \sum_{i=0}^{j_u(T)} H_u(i,T) \cdot B^{j_u(T)-i}. \tag{3.10}$$

B は $2^{d'}$ の倍数なので, $\min(Y \bmod 2^{d'}_{,}\ d-1) = \min(H_u(j_u), d-1) = H_u(j_u)$．(3.7) へ Y と η を代入すると,

$$\begin{aligned} g_u(t, h_u(t)) &= \frac{2^{q(|u|)} f'(\theta)}{B^{j_u(T)+1}} G_u(j_u(T), T, H_u(j_u(T), T)) \\ &= D1h_u(t). \end{aligned}$$

よって h_u は g_u の常微分方程式の解．

g_u が $(\infty, 1)$ 階連続的微分可能であることを証明する．η が $[-1/4, 1/4]$ と $[1/4, 3/4]$ である区間それぞれにおいて微分する．

$$Di\delta_{u,Y}(t) = \frac{2^{(i+1)q(|u|)} Di + 1f(\theta)}{B^{j_u(T)+1}} G_u\left(j_u(T), T, \min\left(Y \bmod 2^{d'}_{,}\ d-1\right)\right) \tag{3.11}$$

$$Di,0g_u(t,y) = \begin{cases} Di\delta_{u,Y}(t) & (-\frac{1}{4} < \eta < \frac{1}{4}) \\ \left(1 - f\left(\frac{4\eta-1}{2}\right)\right) Di\delta_{u,Y}(t) + f\left(\frac{4\eta-1}{2}\right) Di\delta_{u,Y+1}(t) & \\ & (\frac{1}{4} < \eta < \frac{3}{4}) \end{cases} \tag{3.12}$$

$$Di,1g_u(t,y) = \begin{cases} 0 & (-\frac{1}{4} < \eta < \frac{1}{4}) \\ 2B^{j_u(T)} D1f(\frac{4\eta-1}{2})(Di\delta_{u,Y+1}(t) - Di\delta_{u,Y}(t)) & \\ & (\frac{1}{4} < \eta < \frac{3}{4}) \end{cases} \tag{3.13}$$

f は 無限回微分可能であるため, $\delta_{u,Y}$ も無限回微分可能である. よって 区間 $[-1/4, 1/4]$, $[1/4, 3/4]$ において $Di,0g_u$, $Di,1g_u$ は連続. $\eta = 1/4$ および $\eta = 3/4(-1/4)$ においても連続であることは自明. よって g_u は $(\infty, 1)$ 階連続的微分可能.

式 (4.25) に $t = 0$ を代入して $Di,0g_u(0,y) = Di,0g_u(1,y) = 0$.

$|Di,1g_u| \leq 2^{\mu_i(|u|)-\gamma(|u|)}$ および $|Di,0g_u| \leq 2^{\mu_i(|u|)-\gamma(|u|)}$ を示す.

$$|Di\delta_{u,Y}(t)| \leq \left| \frac{2^{(i+1)q(|u|)} Di+1f(\theta)}{B^{j_u(T)+1}} \right| \leq \frac{2^{(i+1)q(|u|)+c_i}}{B^{j_u(T)+1}} \tag{3.14}$$

$\mu_i(k) = (i+1)q(k) + c_i + c_1 + 2$ とおく. これは λ に依存しない. B の定義より

$$|Di,0g_u| \leq |Di\delta_{u,Y}(t)| \leq \frac{2^{(i+1)q(|u|)+c_i}}{B} \leq 2^{\mu_i(|u|)-\gamma(|u|)} \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned} |Di,1g_u| &\leq 2B^{j_u(T)} \left| D1f\left(\frac{4\eta-1}{2}\right) \right| \cdot |Di\delta_{u,Y+1}(t) - Di\delta_{u,Y}(t)| \\ &\leq 2B^{j_u(T)} \cdot 2^{c_1} \cdot 2 \cdot \frac{2^{(i+1)q(|u|)+c_i}}{B^{j_u(T)+1}} \\ &= \frac{2^{(i+1)q(|u|)+c_i+c_1+2}}{B} \leq 2^{\mu_i(|u|)-\gamma(|u|)}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

(vii) は

$$\begin{aligned} h_u(1) &= \frac{H_u(p(|u|), 2^{q(|u|)})}{B^{p(|u|)}} \\ &= \frac{L(u)}{2^{p(|u|)(\gamma(|u|)+d')}} \end{aligned} \tag{3.17}$$

より, $\rho(k) = p(k)(\gamma(k) + d')$ とおくと成り立つ. □

3.4 定理 1.1 の証明

PSPACE 完全な言語 QBF 補題 3.2 から得られる $(g_u)_u$ と $(h_u)_u$ から滑らかな g とその常微分方程式の解で **PSPACE** 困難な h を構成する. 各 $h_u(1)$ には $L(u)$ の情報が含まれるため, すべての h_u を一つの関数 h に埋め込みたい. そこで [0,1] を無限の区間に分割し, h の各文字列 u

に対応する区間 $[l_u^-, c_u]$ に h_u を縮小して埋め込む. ただし次の文字列 u' の計算に影響を与えないために, h_u を定義域方向について反転したものを区間 $[c_u, l_u^+]$ に埋め込むことで影響を相殺する. つまり $h(l_u^-) = 0$, $h(c_u) = 2^{-\rho'(|u|)}L(u)$, $h(l_u^+) = 0$ を満たすように $h_u(t)$ 埋め込む. ただし ρ' とは ρ に縮小率をかけたものとする. 同様に g は h が常微分方程式の解となるよう, 各文字列 u に対応する区間に g_u を縮小して埋め込む.

リプシッツ連続条件の場合と異なる点は, g_u を構成する時点で $(\infty, 1)$ 階連続微分可能にするために, $|D^{(i,0)}g_u|, |D^{(i,0)}g_u|$ の大きさを制限する点である (補題 3.2 の (v)).

証明. L を **PSPACE** 完全な言語とおく. **PSPACE** 完全な言語 L に対して補題 3.2 を用いて, まず多項式 μ_i をえる. μ_i は i を係数部にのみ持つ多項式であるため, $\mu_i(k) = O(k^c)$ をみたす最小の定数 c が存在する.

$$\lambda(k) = 2k + 2, \qquad \gamma(k) = k^{c+1} + k\lambda(k) \tag{3.18}$$

とおき, 各 u に対して

$$\Lambda_u = 2^{\lambda(|u|)}, \qquad c_u = 1 - \frac{1}{2^{|u|}} + \frac{2\bar{u}+1}{\Lambda_u}, \qquad l_u^{\mp} = c_u \mp \frac{1}{\Lambda_u} \tag{3.19}$$

とおく. ただし $\bar{u} \in \{0, \ldots, 2^{|u|} - 1\}$ は u を二進数として解釈した数. γ に対して, 再び補題より ρ, $(g_u)_u$, $(h_u)_u$ を得る.

任意の $[0, 1)$ の実数に対して, $l_u^{\mp} \pm \frac{t}{\Lambda_u}$ がその実数と等しくなるような $u, \pm, t \in [0, 1]$ が存在する. 関数 g, h を $t \in [0, 1]$, $y \in \mathbf{R}$ に対して, それぞれ $[0, 1) \times [-1, 1]$ の範囲と $[0, 1)$ の範囲で下のように定義する.

$$g\left(l_u^{\mp} \pm \frac{t}{\Lambda_u}, \frac{y}{\Lambda_u}\right) = \begin{cases} \pm\left(g_u(t,1) + D0,1g_u(t,1)(y-1)\right) & (1 < y) \\ \pm g_u(t,y) & (-1 \leq y \leq 1) \\ \pm\left(g_u(t,-1) + D0,1g_u(t,-1)(y+1)\right) & (y < -1) \end{cases} \tag{3.20}$$

$$h\left(l_u^{\mp} \pm \frac{t}{\Lambda_u}\right) = \frac{h_u(t)}{\Lambda_u}. \tag{3.21}$$

任意の $y \in \mathbf{R}$ に対して $g(1, y) = h(1) = 0$ と定義する.

この g と h が定理 1.1 で求める関数の性質を満たすことを示す.

まず g が多項式時間計算可能であることを補題 2.3 を用いて示す. 各有理数 T, Y について $g(T, Y)$ を求めるとき, $T = l_u^{\mp} \pm t/\Lambda_u$, $Y = y/\Lambda_u\Gamma_u$ を満たすような $u, \pm, t, y$ は, 多項式時間で計算可能であり, $(g_u)_u$ は多項式時間計算可能なので $g(T, Y)$ は多項式時間計算可能.

g が $(\infty, 1)$ 階連続的微分可能であることを示すため, まず g が $(\infty, 0)$ 階連続的微分可能であることを示す.

g_u は $(\infty, 1)$ 階連続的微分可能であるため, 各区間においては $(\infty, 1)$ 階連続的微分可能である. $t \in (0, 1)$ において

$$Di,0g\left(l_u^{\mp} \pm \frac{t}{\Lambda_u}, \frac{y}{\Lambda_u}\right)$$
$$= \begin{cases} \pm\Lambda_u^i \left(Di,0g_u(t,1) + Di,1g_u(t,1)(y-1)\right) & (1<y) \\ \pm\Lambda_u^i Di,0g_u(t,y) & (-1<y<1) \\ \pm\Lambda_u^i \left(Di,0g_u(t,-1) + Di,1g_u(t,-1)(y+1)\right) & (y<-1) \end{cases} \quad (3.22)$$

$Di,0g_u$ は連続であるため $t \in (0,1)$, $y \neq -1,1$ の区間において連続. 確認すべきなのは g_u 同士をつなぐ境界 $t=0,1$ と g_u の外側との境界 $y=0,1$, および極限 g_u の極限, つまり g の第一引数が 1 へ限りなく近づくとき発散せずに連続であることである.

$y=1$ のとき $Di,0g\left(l_u^{\mp} \pm t/\Lambda_u, y/\Lambda_u\right) = \pm\Lambda_u^i Di,0g_u(t,1), y=-1$ のとき $Di,0g\left(l_u^{\mp} \pm t/\Lambda_u, y/\Lambda_u\right) = \pm\Lambda_u^i Di,0g_u(t,-1)$ より $Di,0g$ は第二変数について連続である.

第一変数が $[0,1)$ の範囲にあるとき, つまり $l_u^{\mp} \pm t/\Lambda_u$ と表される範囲において連続であることを示す. $t=1$ において g_u と $-g_u$ が接続され, $t=0$ において g_u とつぎの文字 u' の関数 $g_{u'}$ が接続されているが, $Di,0g_u(0,y) = Di,0g_u(1,y) = 0$ より連続に接続されている.

最後に第一変数が 1 へ向かうとき発散しないことを示す.

$$\begin{aligned} \left|Di,0g\left(l_u^{\mp} \pm \frac{t}{\Lambda_u}, \frac{y}{\Lambda_u}\right)\right| &\leq \Lambda_u^i(|Di,0g_u| + |Di,1g_u|(\Lambda_u+1)) \\ &\leq \Lambda_u^i(\Lambda_u+2)2^{\mu_i(|u|)-\gamma(|u|)} \\ &\leq \Lambda_u^{(i+1)}2^{\mu_i(|u|)-\gamma(|u|)+1} \\ &= 2^{(i+1)\lambda(|u|)+\mu_i(|u|)+1-\gamma(|u|)} \end{aligned} \quad (3.23)$$

γ のとり方により, $|u| \to \infty$ のとき式 (3.23) は 0 に収束する. よって $\lim_{t\to 1-0} Di,0g(t,y) = 0$. とくに $i=0$ のとき, $\lim_{t\to 1-0} g(t,y) = 0 = g(1,y)$ より 1 で連続. 以上により g が $(\infty,0)$ 階連続的微分可能であることを示した.

g が $(\infty,1)$ 階連続的微分可能であることを示す. $(\infty,0)$ 階連続的微分可能と同様に, 各区間において, $(\infty,1)$ 階連続的微分可能であるためそれぞれ導関数を求める. $t \in (0,1)$ において

$$Di,1g\left(l_u^{\mp} \pm \frac{t}{\Lambda_u}, \frac{y}{\Lambda_u}\right) = \begin{cases} \pm\Lambda_u^{i+1} Di,1g_u(t,1) & (1<y) \\ \pm\Lambda_u^{i+1} Di,1g_u(t,y) & (-1<y<1) \\ \pm\Lambda_u^{i+1} Di,1g_u(t,-1) & (y<-1). \end{cases} \quad (3.24)$$

$D0,1g(t,1) = \pm\Lambda_u D0,1g_u(t,1)$, $D0,1g(t,-1) = \pm\Lambda_u D0,1g_u(t,-1)$ であり, 第二変数について連続.

第一変数について連続性を示す. $[0,1)$ 区間において $t \in (0,1)$ ならば $Di,1g_u$ が連続であるため $Di,1g$ も連続. $g_u(0,y) = g_u(1,y) = 1$ より $Di,1g_u(0,y) = Di,1g_u(1,y) = 0$ なので $Di,1g(0,y) = Di,1g(1,y) = 0$ のため $t=0,1$ においても連続.

最後に第一変数が 1 へ向かうとき発散しないことを示す.

$$\left|Di, 1g\left(l_u^{\mp} \pm \frac{t}{\Lambda_u}, \frac{y}{\Lambda_u}\right)\right| \le \Lambda_u^{i+1}|Di, 1g_u| \le 2^{(i+1)\lambda(|u|)+\mu_i(|u|)-\gamma(|u|)} \tag{3.25}$$

γ のとり方により $|u| \to \infty$ のとき $2^{(i+1)\lambda(|u|)+\mu_i(|u|)-\gamma(|u|)}$ は 0 へ収束する. よって $\lim_{t\to 1-0} Di, 0g(t, y) = 0$. 以上により g が $(\infty, 1)$ 階連続的微分可能であることを示した.

h が g の常微分方程式の解であることを示す. $h(0) = 0, \quad D1h(1) = 0 = g(1, h(1))$ は自明.

$$\begin{aligned} h'\left(l_u^{\mp} \pm \frac{t}{\Lambda_u}\right) &= \pm\frac{h_u'(t)}{\Lambda_u} \\ &= \pm g_u\left(t, h_u(t)\right) \\ &= g\left(l_u^{\mp} \pm \frac{t}{\Lambda_u}, \frac{h_u(t)}{\Lambda_u}\right) \\ &= g\left(l_u^{\mp} \pm \frac{t}{\Lambda_u}, h\left(l_u^{\mp} \pm \frac{t}{\Lambda_u}\right)\right). \end{aligned} \tag{3.26}$$

L は h に還元可能であることを示す.

$$h(c_u) = \frac{h_u(1)}{\Lambda_u} = \frac{L(u)}{2^{\lambda(|u|)+\rho(|u|)}} \tag{3.27}$$

つまり R, S, T を以下のように定義することで, 還元可能.

$$R(u, v) = v \tag{3.28}$$

$$S(u, 0^n) = \lfloor 2^n c_u \rfloor \text{ を表す文字列}, \tag{3.29}$$

$$T(u) = 0^{\lambda(|u|)+\rho(|u|)} \tag{3.30}$$

L は **PSPACE** 完全であるため, h は **PSPACE** 困難. □

4 任意回連続微分可能関数と常微分方程式

この節では定理 1.2, つまり (∞, k) 階連続微分可能な関数の常微分方程式の解は **CH** 困難でありうることを示す. 証明の流れは 3 節とほぼ同じである. ただし紙面の都合上, 詳細な証明は省き, 証明の概略を説明するに止める.

4.1 CH 困難な言語

Wagner によって **CH** の各階層 $\mathbf{C}_n\mathbf{P}$ に対してそれぞれ完全問題が存在することが示されている [11]. 量化子 $\mathbf{C}$ を自然数 m, 論理式 $A(x_1, \ldots, x_l)$, l 個の論理変数の組 α について以下のように定義する.

$$\mathbf{C}^m \alpha A(\alpha) \longleftrightarrow \left|\{\alpha \in \{0,1\}^l \mid A(\alpha) = 1\}\right| \ge m. \tag{4.1}$$

$\mathbf{C}^1 = \exists$, $\mathbf{C}^{2^l} = \forall$ であり, $\mathbf{C}$ は $\exists, \forall$ の一般化と言える．言語 $\mathbf{C}_n B_{be}$ を以下のように定義する．

$$\langle \phi(x_1, \ldots, x_n), m_1, \ldots, m_n \rangle \in \mathbf{C}_n B_{be} \longleftrightarrow \mathbf{C}^{m_1} \alpha_1 \cdots \mathbf{C}^{m_n} \alpha_n \phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \tag{4.2}$$

ただし $\langle y_1, \ldots, y_i \rangle$ は組み合わせ関数, それぞれ x_i, α_i は l_i 個の論理変数の組とする．

補題 4.1 (Theorem 7 [11])**.** $\mathbf{C}_n B_{be}$ は $\mathbf{C}_n \mathbf{P}$ 完全.

各 $\mathbf{C}_n B_{be}$ をまとめた言語 $\mathbf{C}_{\log} B_{be}$ を以下のように定義する．

$$\langle 0^{2^n}, u \rangle \in \mathbf{C}_{\log} B_{be} \longleftrightarrow u \in \mathbf{C}_n B_{be}$$

補題 4.2. $\mathbf{C}_{\log} B_{be}$ は $\mathbf{CH}$ 困難.

証明. 任意の $\mathbf{CH}$ の言語 A はある階層 $\mathbf{C}_n \mathbf{P}$ に属する．補題 4.1 より任意の $u \in \{0,1\}^*$ について $u \in A \leftrightarrow f(u) \in \mathbf{C}_n B_{be}$ を満たす多項式時間関数 f が存在する．

$$u \in A \longleftrightarrow \langle 0^{2^n}, f(u) \rangle \in \mathbf{C}_{\log} B_{be} \tag{4.3}$$

n は定数であるため $\langle 0^{2^n}, f(\cdot) \rangle$ は多項式時間関数．よって A は $\mathbf{C}_n B_{be}$ に多項式時間還元可能. $\square$

補題 4.3. $\mathbf{C}_{\log} B_{be}$ を認識する対数段一様関数族 $(G_u)_u$ が存在する．

証明. 関数族 $(G_u)_u$, $(H_u)_u$, 関数 p, 多項式 q, r を構成する．$u = \langle 0^{2^n}, \langle \phi(x_1, \ldots, x_n), m_1, \ldots, m_n \rangle \rangle$ と仮定する．

$L = C_{\log} B_{be}$, $l_i = |x_i|$, $s_i = \sum_{j=1}^{i} l_j + 2i$ と表記する．関数 $C^m \colon \mathbf{N} \to \{0,1\}$ を

$$C^m(Y) = \begin{cases} 1 & (Y \geq m) \\ 0 & (Y < m) \end{cases} \tag{4.4}$$

と定義する．任意の $i = 0, \ldots, n$ と $n - i$ 個の文字列 $\beta_{i+1} \in \{0,1\}^{l_{i+1}}, \ldots, \beta_n \in \{0,1\}^{l_n}$ について部分式 $\mathbf{C}^{m_i} \alpha_i \cdots \mathbf{C}^{m_1} \alpha_1 \phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \beta_{i+1}, \ldots, \beta_n)$ の真偽値を $\phi_i(\beta_{i+1}, \ldots, \beta_n)$ と表記する．

$$\phi_0 = \phi \tag{4.5}$$

$$\phi_{i+1}(\beta_{i+2}, \ldots, \beta_n) = C^{m_{i+1}} \left(\sum\nolimits_{\alpha_i \in \{0,1\}^{l_i}} \phi_i(\alpha_{i+1}, \beta_{i+2}, \ldots, \beta_n) \right) \tag{4.6}$$

$$\phi_n() = L(u) \tag{4.7}$$

$T \in \mathbf{N}$ に対し, T_i を T の 2 進表記における i 桁目, $T_{[i,j]} = T_{j-1} T_{j-2} \cdots T_{i+1} T_i$ と表記する．

G_u を $(i, T, Y) \in [n+1] \times [2^{s_n} + 1] \times [2^{|u|}]$ の範囲でを以下のように定義する．一段目つまり $i = 0$ ならば

$$G_u(0, T, Y) = (-1)^{T_{s_1}} \phi(T_{[1,s_1]}, T_{[s_1+1,s_2]}, \ldots, T_{[s_{n-1}+1,s_n]}) \tag{4.8}$$

$i \geq 1$ ならば

$$G_u(i, T, Y) = \begin{cases} (-1)^{T_{s_{i+1}}} C^{m_i}(Y) & (T_{[1,s_i]} = 10 \cdots 0) \\ 0 & (\text{othewise}). \end{cases} \tag{4.9}$$

任意の $i \in [n+1]$, $T \in [2^{s_n}+1]$ について, $H_u(i,T) \in [2^{l_i}+1]$ が成りたつこと, および $T_{[1,s_i]} = 10\cdots0$ ならば

$$G_u(i,T,H_u(i,T)) = (-1)^{T_{s_{i+1}}}\phi_i(T_{[s_i+1,s_{i+1}]},\dots,T_{[s_{n-1}+1,s_n]}) \tag{4.10}$$

を満たすことを i についての帰納法により示す. 上記が成り立つとき, $i=n$, $T=2^{s_n}$ において $G_u(n,2^{s_n},H_u(n,2^{s_n})) = \phi_n() = L(u)$ よって $H_u(n+1,2^{s_n}+1) = L(u)$. ここで

$$n+1 \le \log(|0^{2^n}|)+1 = O(\log(|u|)) \tag{4.11}$$

$$2^{s_n}+1 \le 2^{s_n+1} \le 2^{|u|} \tag{4.12}$$

より $p(u) = n+1, q(x) = r(x) = x$ とおき G_u を $[p(u)] \times [2^{q(|u|)}] \times [2^{r(|u|)}]$ の範囲に拡大すると $H_u(p(u),2^{q(|u|)}) = L(u)$.

$i=0$ のとき, 式 (4.9) より成り立つ. $i=j$ のとき, 成り立つと仮定する, $Y = H_u(i+1,T)$ とおくと

$$Y = \sum_{V=1}^{T-1} G_u(i,V,H_u(i,V)) \tag{4.13}$$

$$= \sum (-1)^{V_{s_{i+1}}}\phi_i(V_{[s_i+1,s_{i+1}]},\dots,V_{[s_{n-1}+1,s_n]}) \tag{4.14}$$

$T_{[1,s_{i+1}]} = 10\cdots0$ のとき, $V_{[1,s_n]} = T_{[s_{i+1}+1,s_n]}0\alpha10\cdots0$ であるとき以外の値は打ち消し合うので,

$$Y = \sum\nolimits_{\alpha\in\{0,1\}^{l_i}} \phi_i(\alpha,T_{[s_{i+1}+1,s_{i+2}]},\dots,T_{[s_{n-1}+1,s_n]}) \tag{4.15}$$

式 (4.6) より

$$G_u(i+1,T,H_u(i+1,T)) = (-1)^{T_{s_{i+2}}}C^{m_{i+1}}(Y) \tag{4.16}$$

$$= (-1)^{T_{s_{i+2}}}\phi_{i+1}(T_{[s_{i+1}+1,s_{i+2}]},\dots,T_{[s_{n-1}+1,s_n]}) \tag{4.17}$$

よって $i=j+1$ でも成り立つ. □

4.2 対数段差分方程式を模倣する関数族

補題 4.4. 任意の自然数 $k \ge 2$ に対して, **CH** 困難な言語 L, 係数のみに i を含む多項式 μ_i が存在して, 任意の多項式 γ に対して, 関数 $\rho\colon \mathbf{N}\to\mathbf{N}$, 関数族 g_u, h_u で, $\rho, (g_u)_u$ は多項式時間計算可能であり, 各文字列 u に対して以下を満たすものが存在する.

(i) $g_u\colon [0,1]\times[-1,1]\to\mathbf{R}$, $\quad h_u\colon [0,1]\to[-1,1]$;

(ii) h_u は g_u の常微分方程式 (1.1) の解;

(iii) g_u は (∞,k) 階連続微分可能;

(iv) 任意の $i\in\mathbf{N}$, $y\in[-1,1]$ に対して

$$Di,0g_u(0,y) = Di,0g_u(1,y) = 0;$$

(v) 任意の $i \in \mathbf{N}$, $j \in \{0, \ldots, k\}$ に対して

$$|Di, jg_u(t, y)| \leq 2^{\mu_i(|u|)-\gamma(|u|)};$$

(vi) $h_u(1) = 2^{-\rho(|u|)}L(u)$.

補題 3.2 とくらべて補題 4.4 は, **PSPACE** が **CH** に置き換わり, $(\infty, 1)$ 回連続微分可能が (∞, k) 回連続微分可能に一般化されている. 本質的な違いは条件 (v) によって, h に対するフィードバックの大きさ, つまり $g(t, y)$ に対する y の値の影響がかなり制限されてしまう点にある. それにより, 模倣できる差分方程式が多項式段ではなく対数段に制限され, **PSPACE** 困難が **CH** 困難へと置き換わる.

証明. **CH** 困難な問題 $\mathbf{C}_{\log}B_{be}$ を認識する対数深さ離散初期値問題 $\langle d, p, q, (G_u)_u \rangle$ とその解 $(H_u)_u$ を得る. さらに以下のように仮定する.

$$H_u(i, 2^{q(|u|)}) = \begin{cases} L(u) & (i = p(|u|)) \\ 0 & (i < p(|u|)). \end{cases} \tag{4.18}$$

補題 3.3 の f に対して, 自然数の族 c_i を各 $i \in \mathbf{N}$ に対して $|Dif(x)| \leq 2^{c_i}$ を満たす最小の自然数と定める. 定数 $d' = \lceil \log(4d + 1) \rceil$, $B = 2^{\gamma(|u|)+d'}$ とおき, 各 $(t, y) \in [0, 1] \times [-1, 1]$ に対して, 自然数 N, $\theta \in [0, 1]$, 整数 Y, $\eta \in [-1/4, 3/4]$ を $t = (T + \theta)2^{-q(|u|)}$, $y = (Y + \eta)B^{-k^{j_u(T)}}$ を満たすように定める.

そのとき,

$$\delta_{u,Y}(t) = \frac{2^{q(|u|)}f'(\theta)}{B^{k^{j_u(T)+1}}} G_u\left(j_u(T), T, \min\left(Y \bmod 2^{d'}_{,}\ d - 1\right)\right) \tag{4.19}$$

とおき g_u, h_u を以下のように定義する.

$$g_u(t, y) = \begin{cases} \delta_{u,Y}(t) & (\eta \leq \frac{1}{4}) \\ (1 - f(\frac{4\eta-1}{2}))\delta_{u,Y}(t) + f(\frac{4\eta-1}{2})\delta_{u,Y+1}(t) & (\eta > \frac{1}{4}) \end{cases} \tag{4.20}$$

$$h_u(t) = \sum_{i=0}^{p(|u|)} \frac{H_u(i, T)}{B^{k^i}} + \frac{f(\theta)}{B^{k^{j_u(T)+1}}} G_u(j_u(T), T, H_u(j_u(T), T)) \tag{4.21}$$

上記のように定義した g_u, h_u が補題 3.2 で求める性質を満たすことを示す. (i) は自明. $(g_u)_u$ が多項式時間計算可能であることは補題 2.3 によって示される.

h_u は g_u の常微分方程式の解であることを示す. まず h_u について解析する. $h_u(t) = (Y + \eta)B^{-k^{j_u(T)}}$ とおくときの, η の範囲がどうなるか, つまり式 (3.7) のどちらのケースを使うかを考える. 式 (4.21) の一つ目の項において $i \leq j_u(T)$ の合計は $B^{k^{j_u(T)}}$ の倍数なので η に影響は

ない. $i > j_u(T)$ の合計は,

$$\begin{aligned}\sum_{i>j_u(T)}^{p(|u|)} \frac{H_u(i,T)}{B^{k^i}} &\le \sum_{i>j_u(T)}^{\infty} \frac{d-1}{B^{k^i}} \\ &\le \sum_{i>j_u(T)}^{\infty} \frac{d-1}{B^i} = \sum_{i>j_u(T)}^{\infty} \frac{d-1}{B^{i-j_u(T)}} B^{-j_u(T)} \\ &\le \sum_{i>j_u(T)}^{\infty} \frac{d-1}{(4d+1)^{i-j_u(T)}} B^{-j_u(T)} \\ &= \frac{d-1}{4d} B^{-j_u(T)}\end{aligned}$$

二つ目の項の絶対値は

$$\left| \frac{f(\theta)}{B^{k^{j_u(T)+1}}} G_u(j_u(T), T, H_u(j_u(T), T)) \right| \le \frac{1}{B^{j_u(T)+1}} \le \frac{B^{-j_u(T)}}{4d+1} \tag{4.22}$$

$(\frac{d-1}{4d} + \frac{1}{4d+1})B^{-j_u(T)} \le \frac{1}{4}B^{-j_u(T)}$ より $h_u(t) = (Y+\eta)B^{-j_u(T)}$ を満たす $\eta \in [-1/4, 1/4]$ が存在する. このとき,

$$Y = \sum_{i=0}^{j_u(T)} H_u(i,T) \cdot B^{k^{j_u(T)} - k^i}. \tag{4.23}$$

B は $2^{d'}$ の倍数なので, $\min(Y \bmod 2^{d'}, d-1) = \min(H_u(j_u), d-1) = H_u(j_u)$. g_u に代入すると,

$$\begin{aligned}g_u(t, h_u(t)) &= \frac{2^{q(|u|)} f'(\theta)}{B^{k^{j_u(T)+1}}} G_u(j_u(T), T, H_u(j_u(T), T)) \\ &= D1h_u(t).\end{aligned}$$

よって h_u は g_u の常微分方程式の解.

g_u が (∞, k) 階連続的微分可能であることを証明する. η が $[-1/4, 1/4]$ と $[1/4, 3/4]$ である区間それぞれにおいて微分する. 任意の $i \in \mathbf{N}$ について

$$Di\delta_{u,Y}(t) = \frac{2^{(i+1)q(|u|)} Di + 1 f(\theta)}{B^{k^{j_u(T)+1}}} G_u\left(j_u(T), T, \min\left(Y \bmod 2^{d'}, d-1\right)\right) \tag{4.24}$$

$$Di,0g_u(t,y) = \begin{cases} Di\delta_{u,Y}(\theta) & (-\frac{1}{4} < \eta < \frac{1}{4}) \\ \left(1 - f\left(\frac{4\eta-1}{2}\right)\right) Di\delta_{u,Y}(\theta) + f\left(\frac{4\eta-1}{2}\right) Di\delta_{u,Y+1}(\theta) & \\ & (\frac{1}{4} < \eta < \frac{3}{4}) \end{cases} \tag{4.25}$$

$j \in \{1, \ldots, k\}$ について,

$$Di,jg_u(t,y) = \begin{cases} 0 & (-\frac{1}{4} < \eta < \frac{1}{4}) \\ (2B^{j_u(T)})^j Djf(\frac{4\eta-1}{2})(Di\delta_{u,Y+1}(\theta) - Di\delta_{u,Y}(\theta)) & \\ & (\frac{1}{4} < \eta < \frac{3}{4}) \end{cases} \tag{4.26}$$

f は 無限回微分可能であるため, $\delta_{u,Y}$ も無限回微分可能である. よって 区間 $(-1/4, 1/4)$, $(1/4, 3/4)$ において $Di,0g_u$, Di,jg_u は連続. $\eta = 1/4$ および $\eta = 3/4(-1/4)$ においても連続であることは自明. $Di+1,0f(0) = Di+1,0f(1) = 0$ より $\theta = 0$ または $\theta = 1$ において $Di,0g_u(t,y) = 0$, $Di,jg_u(t,y) = 0$, よって t についても連続. 以上により g_u は (∞, j) 階連続的微分可能であることが示された.

式 (4.25) に $t = 0,1$ $(\theta = 0)$ を代入して $Di,0g_u(0,y) = Di,0g_u(1,y) = 0$.

任意の $i \in \mathbf{N}$, $j \in \{0,\ldots,k\}$ について $|Di,jg_u| \leq 2^{\mu_i(|u|)-\gamma(|u|)}$ を示す.

$$|Di\delta_{u,Y}(t)| \leq \left|\frac{2^{(i+1)q(|u|)}Di+1f(\theta)}{B^{k^{j_u(T)+1}}}\right| \leq \frac{2^{(i+1)q(|u|)+c_i}}{B^{k^{j_u(T)+1}}} \tag{4.27}$$

$\mu_i(k) = (i+1)q(k) + \sum_{j=1}^{k} c_i + c_i + k + 1$ とおく. これは λ に依存しない. B の定義より

$$|Di,0g_u| \leq |Di\delta_{u,Y}(t)| \leq \frac{2^{(i+1)q(|u|)+c_i}}{B} \leq 2^{\mu_i(|u|)-\gamma(|u|)} \tag{4.28}$$

$$\begin{aligned}
|Di,jg_u| &\leq (2B^{j_u(T)})^j \left|Djf\left(\frac{4\eta-1}{2}\right)\right| \cdot |Di\delta_{u,Y+1}(t) - Di\delta_{u,Y}(t)| \\
&\leq 2^k B^{k\cdot j_u(T)} \cdot 2^{c_j} \cdot 2 \cdot \frac{2^{(i+1)q(|u|)+c_i}}{B^{k^{j_u(T)+1}}} \\
&\leq \frac{2^{(i+1)q(|u|)+\sum_{j=1}^{k} c_j + c_i + k + 1}}{B} \leq 2^{\mu_i(|u|)-\gamma(|u|)}.
\end{aligned} \tag{4.29}$$

(vii) は

$$\begin{aligned}
h_u(1) &= \frac{H_u(p(|u|), 2^{q(|u|)})}{B^{p(|u|)}} \\
&= \frac{L(u)}{2^{p(|u|)(\gamma(|u|)+d')}}
\end{aligned} \tag{4.30}$$

より, $\rho(k) = p(k)(\gamma(k) + d')$ とおくと成り立つ. □

4.3 定理 1.2 の証明

定理 1.1 と定理 1.2 の関係は補題 3.2 と補題 4.4 の関係と等しい. つまり **PSPACE** が **CH** に置き換わり, $(\infty, 1)$ 回連続微分可能が (∞, k) 回連続微分可能に一般化されている. よって定理 1.1 の証明から定理 1.2 の証明が構成できる.

謝辞

本研究を遂行し発表するにあたり日本学術振興会「組織的な若手研究者等海外派遣プログラム」及び文部科学省科学研究費補助金若手研究 (B) 23700009 による援助を受けた. 記して謝意を表する.

参考文献

[1] E.A. Coddington and N. Levinson. *Theory of ordinary differential equations*. McGraw-Hill, 1955.

[2] A. Grzegorczyk. Computable functionals. *Fund. Math*, 42(19553):168–202, 1955.

[3] A. Kawamura. Complexity of initial value problems, 2010.

[4] A. Kawamura. Lipschitz continuous ordinary differential equations are polynomial-space complete. *Computational Complexity*, 19(2):305–332, 2010.

[5] K.I. Ko. On the computational complexity of ordinary differential equations. *Information and Control*, 58(1-3):157–194, 1983.

[6] K.I. Ko. *Complexity theory of real functions*. Birkhauser Boston Inc., 1991.

[7] K.I. Ko and H. Friedman. Computing power series in polynomial time. *Advances in Applied Mathematics*, 9(1):40–50, 1988.

[8] W. Miller. Recursive function theory and numerical analysis. *Journal of Computer and System Sciences*, 4(5):465–472, 1970.

[9] M.B. Pour-el and I. Richards. A computable ordinary differential equation which possesses no computable solution. *Annals of Mathematical Logic*, 17(1-2):61–90, 1979.

[10] J. Torán. Complexity classes defined by counting quantifiers. *Journal of the ACM (JACM)*, 38(3):752–773, 1991.

[11] K.W. Wagner. The complexity of combinatorial problems with succinct input representation. *Acta Informatica*, 23(3):325–356, 1986.

[12] Klaus Weihrauch. *Computable Analysis: An Introduction*. Texts in Theoretical Computer Science. Springer, 2000.

[13] 高木貞治. **解析概論**. 岩波書店, 1968.