滑らかな常微分方程式の計算量

太田浩行* 河村彰星† マルチン・ツィーグラー‡ カルステン・レースニク§

概要

常微分方程式 $h(0) = 0$, $h'(t) = g(t, h(t))$ の解 h の計算量と, 関数 g の計算量及び制限の関係は, 常微分方程式を数値的に解くことの本質的な難しさを表しているとして調べられている. 本稿では河村が 2010 年の論旋で Lipschitz 条件を満たす多項式時間計算可能な関数 g について上記の微分方程式の解 h が **PSPACE** 困難であり得るという結果を示した手法を, 微分可能な g に拡張する. これにより g が多項式時間計算可能で連続微分可能であっても, この方程式の解が **PSPACE** 困難であり得ることを示す.

1 序論

計算可能解析学 (Computable Analysis) [11] では計算可能性理論や計算量理論の視点から解析学を扱う. 「計算可能な実数」や「多項式時間計算可能な実関数」といった概念を定義し (本稿では 2 節で説明する), 解析学に現れる様々な実数や実関数の本質的な難しさを分析する.

連続実関数 $g\colon [0,1] \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ に対して次の常微分方程式を考える.

$$h(0) = 0, \quad Dh(t) = g(t, h(t)) \quad (t \in [0,1]) \tag{1.1}$$

ただし Dh は h の導関数. 本稿では g が多項式時間計算可能であるとき, 解 h がどれほど複雑でありうるかを考える.

g に多項式時間計算可能であることの他に何の制限も設けない場合, 解 h (一般に一意でない) は計算不能でありうるため, 様々な制限のもと h の計算量が研究されている (表 1.1). この表では下に向うにつれて左列の条件が強まっている. Lipschitz 条件とは解 h が一意であるための十分条件であり, これが満たされるときには, 解 h は多項式領域計算可能であり, **PSPACE** 困難でありうることがわかっている. つまり上界と下界が一致しているといえる (詳しくは河村 [4]). 一方で g が解析的であるとき, 解 h も解析的となり, このとき h は多項式時間計算可能である.

そこで本稿ではこの隔たりを埋めるため, 滑らかつまり微分可能な実関数 g について h の計算量がどれほどになりうるかを調べた.

なお, 積分および最大化の計算量については, 実関数を無限回微分可能に制限しても一般の場合と複雑さは変わらず, それぞれ **#P** 困難および **NP** 困難であることが示されている (定理 3.7, 定理 5.32 [7]).

二変数実関数 g が (i, j) 回連続微分可能であるとは, 第一変数について i 回, 第二変数について j 回微分でき, その導関数が連続であることとする (2 節で厳密に定義).

定理 1.1. 多項式時間計算可能かつ $(\infty, 1)$ 回連続微分可能な実関数 $g\colon [0,1] \times [-1,1] \to \mathbf{R}$ であって, 常微分方程式 (1.1) が **PSPACE** 困難な解 $h\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ を持つものが存在する.

ここで $g\colon [0,1] \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ でなく $g\colon [0,1] \times [-1,1] \to \mathbf{R}$ と書いたのは, 本稿では実関数の多

* 東京大学, hota@is.s.u-tokyo.ac.jp
† 東京大学
‡ Martin Ziegler, ダルムシュタット工科大学
§ Carsten Rösnick, ダルムシュタット工科大学

表 1.1　多項式時間計算可能実関数 g の常微分方程式 (1.1) の解 h の計算量

制限	上界	下界
—	—	計算不可能たりうる [10]
h が g の唯一解	計算可能 [1]	任意の時間がかかりうる [6, 9]
g が Lipschitz 条件を満たす	多項式領域計算可能 [6]	**PSPACE** 困難になりうる [4]
g が $(\infty, 1)$ 回連続微分可能	多項式領域計算可能	**PSPACE** 困難になりうる [本稿定理 1.1]
g が解析的	多項式時間計算可能 [8, 3]	—

項式時間計算可能性を, 定義域が有界閉領域のときにのみ定義するからである．このため h が区間 $[-1, 1]$ の外に値を取ることがあると方程式 (1.1) が意味をなさなくなるが, 定理 1.1 において h が解であるというのは, 任意の $t \in [0, 1]$ について $h(t) \in [-1, 1]$ が満たされることも含めて述べている．Lipschitz 条件よりも強い仮定を置いているため, そのような h は g に対して, 存在すれば唯一である．

また二変数関数 g が $i + j \leq k$ を満たす任意の自然数 i, j について (i, j) 回連続微分可能であることを, g が k 回連続微可能であると言うこともある．定理 1.1 で主張される g は, $(\infty, 1)$ 回連続微分可能であるから, 特に 1 回連続微分可能である．

2 回以上連続微分可能な実関数の常微分方程式の解について **PSPACE** 困難であることは 1 回連続微分可能と同様な方法では証明できない．しかし **CH** 困難であることが示せており別稿にて証明する予定である．無限回微分可能な関数に対する常微分方程式の計算量は今後の課題である．

これまでの結果では関数 g を多項式時間計算可能と仮定した時の解 h の計算量について解析していた．しかしより本質的に微分方程式を「解く」困難さ, つまり与えられた任意の g から h を求める演算子の計算量について述べる手法が河村とクックによって提案されている [5]．定理 1.1 も同様に演算子の計算量として述べ直すこともできるが, 本稿では割愛する．

2　準備

2.1　表記

自然数の集合を $\mathbf{N}$, 実数の集合を $\mathbf{R}$, 有理数の集合を $\mathbf{Q}$, $\{0\}^* = \{0^n \mid n \in \mathbf{N}\}$ と表す．

A, B を $\mathbf{R}$ の有界閉区間とする． 実関数 $f\colon A \to \mathbf{R}$ に対して $|f| = \sup_{x \in A} f(x)$ と書く．

一変数関数 $f\colon A \to \mathbf{R}$ が i 回連続微分可能であること, 及び実関数 $D^i f\colon A \to \mathbf{R}$ を定義する．

まず $i = 0$ の時, f が連続であれば 0 回連続微分可能であり $D^0 f = f$.

f が i 回連続微分可能かつ, $D^i f$ が微分可能であり, $DD^i f$ が連続であるとき f は $i + 1$ 回連続微分可能. $D^{i+1} f = DD^i f$.

連続な二変数関数 $g\colon A \times B \to \mathbf{R}$ が (i, j) **回連続微分可能**であること及び実関数 $D^{(i,j)} g\colon A \times B \to \mathbf{R}$ を定義する．

以下の両方を満たすとき g は (i, j) 回連続微分可能であると定義する．

- $i > 0$ ならば g が $(i - 1, j)$ 回連続微分可能かつ $D^{(i-1,j)} g$ が第一変数について偏微分可能であり, その導関数 $D_1 D^{(i-1,j)} g$ が

連続.

- $j > 0$ ならば g が $(i, j-1)$ 回連続微分可能かつ $D^{(i,j-1)}g$ が第二変数について偏微分可能であり, その導関数 $D_2 D^{(i,j-1)}g$ が連続.

ただし二変数実関数 g について, 第一変数についての偏微分可能であるときその偏導関数を $D_1 g$, 第二変数についての偏微分可能であるときその偏導関数を $D_2 g$ と表記する. また g が (i,j) 回連続微分可能であるとき,

$$D^{(i,j)}g = \begin{cases} g & (i = 0,\ j = 0) \\ D_1 D^{(i-1,j)}g & (i > 0) \\ D_2 D^{(i,j-1)}g & (j > 0) \end{cases} \tag{2.1}$$

と定義する.

$i > 0, j > 0$ のとき $D^{(i,j)}g$ の定義が 2 つ存在するが (i,j) 回連続微分可能であれば, 第一変数について i 階以下, 第二変数について j 階以下の導関数はその微分の順序によらず等しいため, 2 つの定義は一致する [12].

任意の i について g が (i,j) 回連続微分可能であるとき, g は (∞, j) 回連続微分可能であると定義する.

2.2 実数の名

実数は有限な旅字列に符号化できない. そこで旅字列から旅字列への関数に符号化する.

定義 2.1 (実数の名)**.** 関数 $\phi\colon \{0\}^* \to \{0,1\}^*$ が実数 $x \in [0,1]$ の**名**であるとは, $\phi(0^n) = \lfloor x \cdot 2^n \rfloor$ または $\phi(0^n) = \lceil x \cdot 2^n \rceil$ を満たすこと.

ここで $\lfloor\cdot\rfloor, \lceil\cdot\rceil$ とはそれぞれ整数へ切り捨てた値, 及び切り上げた値の旅字列表現を返す関数である. つまり実質的には実数 x の名は, サイズ n の入力を受け取ると, 精度 n 桁の x の近似値を返す.

2.3 計算可能実関数, 多項式時間実関数

実数を受け取り実数を返す関数を機械が計算するとはどういうことか定義しよう. 実数自体が関数として符号化されているため, それを読み書きする機構として, 神託チューリング機械 (以下単に機械という) を使う [図 2.1]. 計算可能な実関数は Grzegorczyk によって初めて形式的に定義された [2].

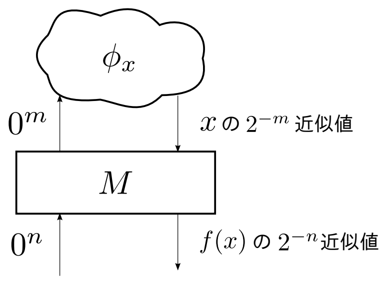

図 2.1　実関数を計算する機械

機械 M に, 旅字列から旅字列への関数 ϕ を神託として与え, 旅字列 0^n を入力として与えたとき, 出力される旅字列を $M^\phi(0^n)$ で表す. つまり M^ϕ をやはり旅字列から旅字列への関数とみる.

定義 2.2. A を $\mathbf{R}$ の有界閉区間とする. 機械 M が実関数 $f\colon A \to \mathbf{R}$ を計算するとは, 任意の実数 $x \in A$, 任意の x の名 ϕ_x に対して, M^{ϕ_x} が $f(x)$ の名であること.

A が $\mathbf{R}^2$ の有界閉領域であるときにも, 神託を二つ取る機械を考えて同様に定義する.

ある実関数が**計算可能**であるとは, その関数を計算する神託機械が存在することである. 同様に, ある実関数が**多項式時間計算可能**であるとは, その関数を計算する多項式時間神託機械が存在することである.

旅字列 u で添字づけられた実関数 $f_u\colon A \to \mathbf{R}$ の族 $(f_u)_u$ を機械 M が計算するとは, 任意の実数 $x \in A$, 任意の x の名 ϕ_x に対して, 旅字列 v を $M^{\phi_x}(u, v)$ へ移す関数が, $f_u(x)$ の名であることをいう. 実関数族が多項式時間計算可能であるとは, その実関数族を計算する多項式時間神託機械が存在することである.

神託機械 M で f を計算するとき, 求める精

度 n に対して, x の近似値に必要な精度 m が定まるため, 計算可能な関数は連続である. また n と m の対応関係と有理数における近似値を与えることで, 計算可能実関数や多項式時間計算可能実関数に対して, 神託機械を用いない同値な特徴付けが可能である.

補題 2.3. 実関数 $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ に対して, f が多項式時間計算可能であることは, 多項式時間計算可能な二つの関数 $\phi\colon (\mathbf{Q}\cap[0,1])\times\{0\}^* \to \mathbf{Q}$ と $p\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ とが存在し, 任意の $d \in \mathbf{Q}\cap[0,1]$, $n \in \mathbf{N}$ について

$$|\phi(d, 0^n) - f(d)| \leq 2^{-n} \tag{2.2}$$

任意の $x, y \in [0,1]$, $m \in \mathbf{N}$ について

$$|x-y| \leq 2^{-p(m)} \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq 2^{-m} \tag{2.3}$$

が成立つことと同値である.

2.4 困難性

実関数の計算量の下界を述べるために, 困難性を定義する.

まず実関数に言語が還元することを定義する. 言語 $L\colon \{0,1\}^* \to \{0,1\}$ が実関数 $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ に多項式時間還元可能であるとは, f を計算する機械を使って $L(u)$ を多項式時間で計算可能であることである. つまり f を計算する機械があるとしたとき, 入力 u に対して, 精度 n をこの機械に与え, ある実数 x_u の神託を模倣し, $f(x_u)$ の n 桁近似値から, u が L に属するか否かを多項式時間で計算可能であることである [図 2.4]. 厳密には以下のように定義する.

定義 2.4 (多項式時間還元可能)**.** 言語 L が実関数 $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ に**多項式時間還元可能**であるとは, 多項式時間計算可能な関数 R, S, T が存在し, 任意の旋字列 u に対して以下を満たすことをいう.

- $S(u, \cdot)$ はある実数 x_u の名

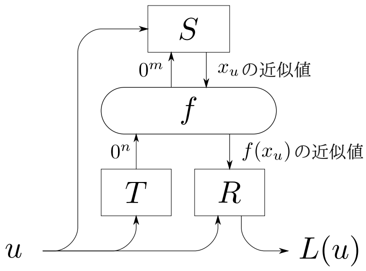

図 2.2　言語 L から関数 f への還元

- $f(x_u)$ の任意の名 ϕ に対して

$$L(u) = R(u, \phi(T(u))).$$

以下単に言語が実関数に還元可能といった場合, 多項式時間還元可能を指す. 計算量 C に対して, 関数 f が C **困難**であるとは, C に属する任意の言語が f に還元可能であることと定義する.

3　連続微分可能関数と常微分方程式

この節では定理 1.1, つまり $(\infty, 1)$ 回連続微分可能な関数の常微分方程式の解が $\mathbf{PSPACE}$ 困難でありうることを示す. ただし紙面の都合上, 詳細な証明は省き, 証明の概略を述べるに止める.

証明の流れとして, まず補題 3.1 により任意の言語 $L \in \mathbf{PSPACE}$ を認識する関数族 $(G_u)_u, (H_u)_u$ を得る. そして $(G_u)_u, (H_u)_u$ を模倣する実関数族 $(g_u)_u, (h_u)_u$ を構成し (補題 3.2), $(g_u)_u, (h_u)_u$ から定理 1.1 で求める g, h を構成する.

3.1 差分方程式

まず実関数の常微分方程式によってある種の「離散版」常微分方程式を模倣できることを示し, その離散版の方程式が $\mathbf{PSPACE}$ 困難であることを示す. この節ではその離散版の方程式である「差分方程式」を定義する.

$[n] = \{0, \ldots, n-1\}$ と表記する. 関数 $G\colon [P] \times [Q] \times [R] \to \{-1, 0, 1\}$ に対して, 関数 $H\colon [P+1] \times [Q+1] \to [R]$ が任意の

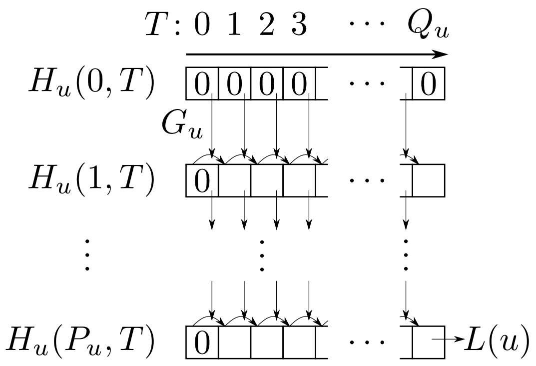

図 3.1　差分方程式と認識される言語

$i \in [P]$, $T \in [Q]$ について以下を満たすとき, H を G の **差分方程式** の解と呼ぶ.

$$H(i,0) = H(0,T) = 0 \tag{3.1}$$

$$H(i+1,T+1) = H(i+1,T) + G(i,T,H(i,T)) \tag{3.2}$$

P, Q, R をそれぞれ**段数**, **列数**, **欄の大きさ**と呼ぶ. G と H が常微分方程式の g と h に対応し, $H(i,0) = 0$ が $h(0) = 0$ に, 式 (3.2) と同値である式 $H(i+1,T+1) - H(i+1,T) = G(i,T,H(i,T))$ が $h'(t) = g(t,h(t))$ と対応する.

以下では旋字列 u ごとに差分方程式 G_u を一つ定めた族 $(G_u)_u$ を考える. 言語 L がこの族 $(G_u)_u$ によって認識されるとは, 各 u に対して G_u の段数と列数, 解をそれぞれ P_u, Q_u, H_u としたとき, $H_u(P_u, Q_u) = L(u)$ を満たすこととする (表 3.1). ここで言語 $L \subseteq \{0,1\}^*$ は関数 $L\colon \{0,1\}^* \to \{0,1\}$ と同一視し, $u \in L$ のとき $L(u) = 1$ としている.

$(G_u)_u$ が**一様**であるとは, 各 u について G_u の段数, 列数及び欄の大きさが $|u|$ の多項式の指数 ($2^{\mathrm{poly}(|u|)}$) で抑えられ, かつ与えられた (u,i,T,Y) から多項式時間で $G_u(i,T,Y)$ が計算できることと定義する. G_u の段数がさらに $|u|$ の多項式で抑えられるとき, 族 $(G_u)_u$ は**多項式段**であるという. 河村の論旋では次が示されている.

補題 3.1 (補題 4.7 [4]). 任意の言語 $L \in$ **PSPACE** に対して, その言語を認識する多項式段の一様な関数族 $(G_u)_u$ が存在する.

3.2　多項式段一様関数族と PSPACE

補題 3.1 は河村によって示されているがその証明の概略を示す. **PSPACE** 完全な言語である QBF を認識する $(G_u)_u$ を構成することにより, 任意の $L \in$ **PSPACE** を認識する多項式段一様な関数族 $(G_u)_u$ が存在することを示す. ここで QBF とは, 旋字列 u を $\psi = Q_1 x_1 \cdots Q_n x_n \phi(x_1, \ldots, x_n)$ と解釈したとき $u \in$ QBF $\Leftrightarrow \psi = T$ によって定義される言語である. ただし Q_i は $\exists$ または $\forall$ であり, $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ は x_i 以外の変数を含まない論理式とする.

論理式 $\psi = Q_1 x_1 \cdots Q_n x_n \phi(x_1, \ldots, x_n)$ の値を $\vee, \wedge$ によってラベル付された二分木によって計算することを考える. 量化子 $Q_1 x_1$ を除き x_1 を T と F に置き換えた式をそれぞれ $\psi_T = Q_2 x_2 \cdots Q_n x_n \phi(T, x_2, \ldots, x_n)$, $\psi_F = Q_2 x_2 \cdots Q_n x_n \phi(F, x_2, \ldots, x_n)$ と置くと $Q_1 = \forall$ ならば $\psi = \psi_T \wedge \psi_F$, $Q_1 = \exists$ ならば $\psi = \psi_T \vee \psi_F$. つまり変数の 1 つ少ない 2 つの論理式と量化子によってもとの論理式の値も決まる. これを再帰的に繰り返すことで ψ は計算可能であり, それは深さ n の二分木を葉から根へ値を定めていくことと同じである. この過程は二分木の深さが段数に, 幅が列数に対応する形で多項式段一様な関数による差分方程式で模倣可能であるため, QBF を認識する多項式段一様関数族が存在する.

3.3　多項式段差分方程式を模倣する関数族

補題 3.2. 任意の言語 $L \in$ **PSPACE** に対して, 係数のみに i を含む多項式 μ_i が存在して, 任意の多項式 γ に対して, 多項式 ρ, 実関数族 $(g_u)_u, (h_u)_u$ で, $(g_u)_u$ は多項式時間計算可能であり, 各旋字列 u に対して以下を満たすものが存在する.

(i) $g_u\colon [0,1]\times[-1,1] \to \mathbf{R}$, $h_u\colon [0,1] \to [-1,1]$;
(ii) h_u は g_u の常微分方程式 (1.1) の解;
(iii) g_u は $(\infty,1)$ 回連続微分可能;
(iv) 任意の $i\in\mathbf{N}$, $y\in[-1,1]$ に対して

$$D^{(i,0)}g_u(0,y) = D^{(i,0)}g_u(1,y) = 0;$$

(v) 任意の $i\in\mathbf{N}$, $j\in\{0,1\}$ に対して

$$|D^{(i,j)}g_u| \le 2^{\mu_i(|u|)-\gamma(|u|)};$$

(vi) $h_u(1) = 2^{-\rho(|u|)}L(u)$.

この補題より各 h_u が g_u の常微分方程式の解であり, $h_u(1)$ に $L(u)$ の情報を持つ実関数族 $(g_u)_u, (h_u)_u$ の存在が示される. 条件 (iii) – (v) はすべて定理 1.1 の g を $(\infty,1)$ 回連続微分可能とするために必要となる条件である. 詳細については定理の証明の際に説明する.

この補題の証明の基本的な流れを説明する. 任意の言語 $L\in\mathbf{PSPACE}$ に対し, 補題 3.1 を用いて L を認識する $(G_u)_u$ 及びその差分方程式の解 $(H_u)_u$ を得る. そして各 G_u, H_u を模倣する実関数 $g_u\colon[0,1]\times[-1,1]\to\mathbf{R}$ とその常微分方程式の解 $h_u\colon[0,1]\to\mathbf{R}$ を構成する. また $(G_u)_u$ の一様性から $(g_u)_u$ の多項式時間計算可能性を示す.

上記の証明は基本的に, Lipschitz 条件の場合の証明と変わらない. 違いは g_u を滑らかな関数にするため, 以下のような無限回微分可能な多項式時間実関数 $f\colon[0,1]\to\mathbf{R}$ を用いて g_u を構成している点である.

補題 3.3 (補題 3.6. [7])**.** 以下を満たす多項式時間計算可能で無限回微分可能な実関数 $f\colon[0,1]\to\mathbf{R}$ が存在する.

(i) $f(0)=0,\quad f(1)=1$;
(ii) 任意の $n\ge1$ で $f^{(n)}(0)=f^{(n)}(1)=0$;
(iii) f は $[0,1]$ で単調増加;
(iv) 任意の $n\ge1$ で $f^{(n)}$ は多項式時間実関数.

3.4 定理 1.1 の証明

補題 3.2 を用いて $\mathbf{PSPACE}$ 完全な言語 QBF についての情報を含む, 実関数族 $(g_u)_u$ と $(h_u)_u$ を得る. それらから実関数 g と h を構成する. 各 $h_u(1)$ には $L(u)$ の情報が含まれており, h を $\mathbf{PSPACE}$ 困難にするため, すべての h_u を一つの関数 h に埋め込みたい. そこで [0,1] を無限の区間に分割し, 各旋字列 u に対応する区間 $[l_u^-, c_u]$ へ h_u を縮小して埋め込む. ただし次の旋字列 u' の計算に影響を与えないために, h_u を反転したものを区間 $[c_u, l_u^+]$ に埋め込むことで影響を相殺する. つまり $h(l_u^-)=0$, $h(c_u)=2^{-\rho'(|u|)}L(u)$, $h(l_u^+)=0$ を満たすように $h_u(t)$ 埋め込む. ただし ρ' とは ρ に h_u の縮小率をかけたものとする. 同様に g は h が常微分方程式の解となるよう, 各旋字列 u に対応する区間に g_u を縮小して埋め込む.

Lipschitz 条件の場合と異なる点は, g_u を構成する時点で $(\infty,1)$ 回連続微分可能にするために, $|D^{(i,0)}g_u|, |D^{(i,0)}g_u|$ の大きさを制限する点である (補題 3.2 の (v)).

謝辞

本研究を遂行し発表するにあたり河村は科学研究費補助金若手研究 (B) 23700009 による援助を受けた. 記して謝意を表する.

参考杭献

[1] E.A. Coddington and N. Levinson. *Theory of Ordinary Differential Equations*. McGraw-Hill, 1955.

[2] A. Grzegorczyk. Computable functionals. *Fund. Math*, 42(19553):168–202, 1955.

[3] A. Kawamura. Complexity of initial value problems, 2010.

[4] A. Kawamura. Lipschitz continuous ordinary differential equations are polynomial-space complete. *Computa-*

tional Complexity, 19(2):305–332, 2010.

[5] A. Kawamura and S. Cook. Complexity theory for operators in analysis. In *Proceedings of the 42nd ACM Symposium on Theory of Computing*, pages 495–502. ACM, 2010.

[6] K.I. Ko. On the computational complexity of ordinary differential equations. *Information and Control*, 58(1-3):157–194, 1983.

[7] K.I. Ko. *Complexity Theory of Real Functions*. Birkhäuser Boston, 1991.

[8] K.I. Ko and H. Friedman. Computing power series in polynomial time. *Advances in Applied Mathematics*, 9(1):40–50, 1988.

[9] W. Miller. Recursive function theory and numerical analysis. *Journal of Computer and System Sciences*, 4(5):465–472, 1970.

[10] M.B. Pour-el and I. Richards. A computable ordinary differential equation which possesses no computable solution. *Annals of Mathematical Logic*, 17(1-2):61–90, 1979.

[11] Klaus Weihrauch. *Computable Analysis: An Introduction*. Texts in Theoretical Computer Science. Springer, 2000.

[12] 高木貞治. **解析概論**. 岩波書店, 1968.