滑らかな常微分方程式の計算量

太田浩行[*]　　河村彰星[†]　　マルチン・ツィーグラー[‡]

カルステン・レースニク[§]

平成 24 年 1 月 31 日

概要

常微分方程式 $h(0) = 0,\ h'(t) = g(t, h(t))$ の解 h の計算量と, 関数 g の計算量及び制限の関係は, 常微分方程式を数値的に解くことの本質的な難しさを表しているとして調べられている. 本稿では河村が 2010 年の論旋の中で Lipschitz 条件を満たす多項式時間計算可能な関数 g の常微分方程式の解が **PSPACE** 困難たりうるという結果をしめすために用いた手法を, 微分可能な g に拡張する. これにより多項式時間計算可能で 1 回連続微分可能な関数の常微分方程式が, **PSPACE** 困難な解を持ちうることがわかる. また任意の k について, 多項式時間計算可能で k 回微分可能な関数の常微分方程式は, 本稿で定義される計算量 **DIVP(log)** について困難な解を持ちうることをしめす. **DIVP(log)** = **PSPACE** であるかどうかは未解決である.

1　導入

1.1　計算可能解析

計算可能解析 (Computable Analysis) では計算可能性理論や計算量理論の視点から解析学を扱う. 「計算可能な実数」や「多項式時間計算可能な実関数」といった概念を定義し, 解析学に現れる様々な実数や実関数の本質的な難しさを分析する.

離散的な対象においては「計算できる関数」はモデルによらず, すべてチューリング機械で計算できるものと同値であることが知られているが, 実数計算においては, 計算できる関数が互いに異なる, いくつかのモデルが提唱されている. 本稿では, 「機械が実関数を計算する」ことを次のように定義する.

実関数 $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ を計算するといっても, 実数は有限の旋字列で表されないため, 機械がその完全な値を読み書きすることはできない. そこで実数を近似値の列で表現する. 有理数の列 $(r_n)_n$ が

* 東京大学

† 第 1 著者に同じ

‡ ダルムシュタット工科大学

§ 第 3 著者に同じ

表 1.1　多項式時間計算可能関数 g の常微分方程式 (1.1) の解 h の計算量

制限	上界	下界
—	—	計算不可能たりうる [?]
h が g の唯一解	計算可能 [?]	任意の時間がかかりうる [?] [?]
g が Lipschitz 条件を満たす	多項式領域計算可能	**PSPACE** 困難になりうる [1]
g が $(0,1)$ 回連続微分可能	多項式領域計算可能	**PSPACE** 困難になりうる [本稿定理 1.1]
g が $(0,k)$ 回連続微分可能	多項式領域計算可能	**DIVP(log)** 困難たりうる [本稿定理 1.2]
g が解析的	多項式時間計算可能 [?] [?]	—

x を表現するとは, $(r_n)_n$ が x へ速く収束すること, すなわち $|r_n - x| \le 2^{-n}$ を満たすこととする. 数列は $n \in \mathbf{N}$ を $r_n \in \mathbf{Q}$ へ移す関数と考えることもでき, そのような関数または数列を実数の名と呼ぶ.

実関数を計算するモデルとしては神託チューリング機械を用いる. ある機械が関数 $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ を計算するとは, 入力となる実数 x の名を神託として与えられ, 求める精度 n を入力として与えられたとき, 有理数 s_n で $|s_n - f(x)| \le 2^{-n}$ を満たすものを出力することとする.

この神託機械の資源を制限することで, 実関数が多項式時間計算可能, 或いは多項式領域計算可能であることを定義できる (2 節).

1.2　問題と関連研究

連続実関数 $g\colon [0,1] \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ にたいして次の常微分方程式を考える.

$$h(0) = 0, \qquad h'(t) = g(t, h(t)) \quad (t \in [0,1]) \tag{1.1}$$

本稿では g が多項式時間計算可能であるとき, 解 h がどれほど複雑でありうるかを考える.

g に他に何の制限も設けない場合, 解 h (一般に一意でない) は計算不能たりうるため, 様々な制限のもと h の計算量が研究されている (表 1.1). この表では下に向うにつれて左列の条件が強まっている. Lipschitz 条件とは解 h が一意であるための十分条件であり, これが満たされるときには, 解 h は多項式領域計算可能であり, **PSPACE** 困難 (2 節で定義) でありうることがわかっている. つまり上界と下界が一致しているといえる (詳しくは河村 [1]). 一方で g が解析的であるとき, 解 h も解析的となり, このとき h は多項式時間計算可能である.

そこで本稿ではこの隔たりを埋めるため, 滑らかな関数, つまり微分可能な g について h の計算量がどれほどになりうるかを調べ, 以下の結果を得た.

定理 1.1. 多項式時間計算可能かつ $(\infty, 1)$ 回連続的微分可能な実関数 $g\colon [0,1]\times[-1,1]\to\mathbf{R}$ であって, 常微分方程式 (1.1) が **PSPACE** 困難な解 $h\colon[0,1]\to\mathbf{R}$ をもつものが存在する.

定理 1.2. 任意の自然数 $k\geq 2$ にたいして, 多項式時間計算可能かつ (∞, k) 回連続的微分可能な実関数 $g\colon [0,1]\times[-1,1]\to\mathbf{R}$ であって, 常微分方程式 (1.1) が **DIVP(log)** 困難な解 $h\colon[0,1]\to\mathbf{R}$ をもつものが存在する.

ここで $g\colon [0,1]\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ でなく $g\colon [0,1]\times[-1,1]\to\mathbf{R}$ と書いたのは, 本稿では実関数の多項式時間計算可能性を, 定義域が有界閉領域のときにのみ定義するからである. このため h が区間 $[-1,1]$ の外に値を取ることがあると方程式 (1.1) が意味をなさなくなるが, 定理 1.1, 1.2 において h が解であるというのは, 任意の $t\in[0,1]$ について $h(t)\in[-1,1]$ が満たされることも含めて述べている. なお両定理とも Lipschitz 条件よりも強い仮定を置いているため, そのような h は g に対して, 存在すれば唯一である.

DIVP(log) とは本稿において定義される計算量クラスであり, $\mathbf{DIVP(log)}\subseteq\mathbf{PSPACE}$ であるが, $\mathbf{DIVP(log)}=\mathbf{PSPACE}$ か否かは未解決であるため, (∞, k) 回連続微分可能関数の常微分方程式の解が **PSPACE** 困難になりうるかはわからない. 厳密な定義は次節で導入する.

二変数関数 g が (i, j) 階連続微分可能であるとは, 第一変数について i 回, 第二変数について j 回微分可能であり, その導関数が連続であることと定義する. この定義は一般的な多変数関数における k 階連続的微分可能の定義 (任意の k 階導関数が存在し, それらがすべて連続) とは異なる. (i, j) 回連続微分可能であれば $\min\{i, j\}$ 回連続微分可能であるため, 定理 1.1, 1.2 はそれぞれ 1 回連続微分可能, k 回連続微分可能と置き換えても成り立つ.

また定理 1.2 において任意の k に対して (∞, k) 階微分可能な関数を考えているが, 一つの関数が任意の k にたいして k 階微分であることを求めているわけではない. つまり g が無限回微分可能であると制限しているわけではない. 無限回微分可能な関数に対する常微分方程式の計算量は今後の課題である.

1.3 差分方程式

定理 1.1 と定理 1.2 の証明では, まず滑らかな実関数の常微分方程式によってある種の「離散版」常微分方程式を模倣できることを示し, その離散版の方程式がある **PSPACE** 困難ないし **DIVP(log)** 困難であることを示す. この節ではその離散版の方程式である「差分方程式」を定義する.

$[n]=\{0,\ldots,n-1\}$ と書く. 関数 $G\colon[P]\times[Q]\times[R]\to\{-1,0,1\}$ にたいして, 関数 $H\colon[P+1]\times[Q+1]\to[R]$ が任意の $i\in[P]$, $T\in[Q]$ について以下を満たすとき, H を G の差分方程式の解と呼ぶ.

$$H(i,0)=H(0,T)=0 \tag{1.2}$$

$$H(i+1,T+1)=H(i+1,T)+G(i,T,H(i,T)) \tag{1.3}$$

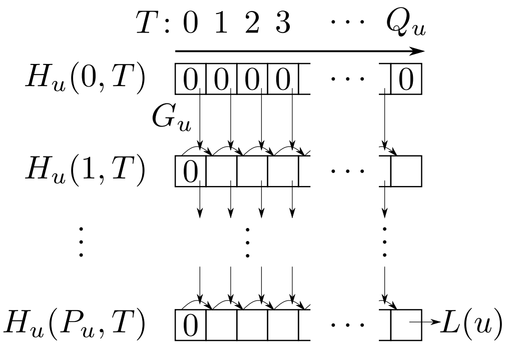

図 1.1　差分方程式

P, Q, R をそれぞれ行数, 列数, 欄の大きさと呼ぶ. G と H が常微分方程式の g と h に対応し, $H(i,0) = 0$ と言う条件が $h(0) = 0$, 式 (1.3) と同値である $H(i+1, T+1) - H(i+1, T) = G(i, T, H(i, T))$ と言う条件が $h'(t) = g(t, h(t))$ と対応する.

以下では旋字列 u ごとに差分方程式 G_u を一つ定めた族 $(G_u)_u$ を考える. 言語 L がこの族 $(G_u)_u$ によって認識されるとは, 各 u にたいして G_u の段数と列数, 解をそれぞれ P_u, Q_u, H_u としたとき, $H_u(P_u, Q_u) = L(u)$ をみたすこととする [表 1.3]. ここで言語 $L \subseteq \{0,1\}^*$ は関数 $L\colon \{0,1\}^* \to \{0,1\}$ と同一視し, $u \in L$ のとき $L(u) = 1$ としている.

段数が $|u|$ の多項式で抑えられ, G_u が多項式時間計算可能な差分方程式について考えたい. $(G_u)_u$ が**一様**であるとは, 任意の u について, u を入力として見做した関数 $G(u, i, T, Y) = G_u(i, T, Y)$ が $|u|$ の多項式時間計算可能であることと定義する. $(G_u)_u$ が一様であるとき, G_u は $|u|$ の多項式時間計算可能であることから, 段数, 列数及び欄の大きさは $|u|$ の多項式の指数 $(2^{\mathrm{poly}(|u|)})$ で抑えられる.

G_u の段数が $|u|$ の多項式で抑えられるとき (G_u) は**多項式段**であるという.

河村の論旋において多項式段かつ一様な関数族の差分方程式族によって認識される言語のクラスは **PSPACE** であることが示されている.

補題 1.3 (補題 4.7. [1])**.** 任意の言語 L について以下は同値.

- $L \in \mathbf{PSPACE}$
- 多項式段かつ一様な関数族 $(G_u)_u$ で, 差分方程式が L を認識するものが存在する.

さらに段数が対数によって制限された差分方程式を考えたい. $(G_u)_u$ が**対数段**であるとは, G_u の段数が $|u|$ の対数で抑えられることと定義する. 対数段かつ一様なる関数族 $(G_u)_u$ の差分方程式によって認識される言語のクラスを **DIVP(log)** と名付ける.

段数が多項式である差分方程式が認識する言語は **PSPACE** であったため, $\mathbf{DIVP(log)} \subseteq \mathbf{PSPACE}$ であるが, $\mathbf{DIVP(log)} = \mathbf{PSPACE}$ か否かは未解決である. 段数が 2 段の差分方程式を考えると, H_u の最後の欄の値は $|u|$ の多項式サイズの 各 $t \in \{0,1\}^*$ について $G_u(0, t, 0) \in$

$\{-1,0,1\}$ の和になっている. つまり $\sharp\mathbf{P}$ と同程度の能力を持つと言える. よって $\mathbf{DIVP(log)}$ は $\sharp\mathbf{P}$ よりも強いクラスであると考えられる.

2　準備

2.1　表記

自然数の集合を $\mathbf{N}$, 整数の集合を $\mathbf{Z}$, 実数の集合を $\mathbf{R}$, 有理数の集合を $\mathbf{Q}$, $\{0\}^* = \{0^n \mid n \in \mathbf{N}\}$ で表す.

$A \subset \mathbf{R}$ とする. 一変数関数 $f\colon A \to \mathbf{R}$ が i 回微分可能であるとき, その i 階導関数を $\mathcal{D}^{(i)}f$ と表記する.

二変数関数 $g\colon A \times B \to \mathbf{R}$ が (i,j) 回連続微分可能であるとき, 第一変数について i 階, 第二変数について j 階の導関数はその微分の順序によらず等しい [3]. その導関数を $\mathcal{D}^{(i,j)}g$ で表す.

実関数 $f\colon A \to \mathbf{R}$ にたいして $|f| = \sup_{x\in A} f(x)$ と書く.

2.2　実数の名

実数は有限な旋字列に符号化できない. そこで旋字列から旋字列への関数に符号化する.

定義 2.1 (実数の名)**.** 関数 $\phi\colon \{0\}^* \to \mathbf{Z}$ が実数 $x \in [0,1]$ の名であるとは, $\phi(0^n) = \lfloor x \cdot 2^n \rfloor$ または $\phi(0^n) = \lceil x \cdot 2^n \rceil$ を満たすこと.

ここで $\lfloor\cdot\rfloor, \lceil\cdot\rceil$ とはそれぞれ整数への切り捨て関数と切り上げ関数である. つまり実質的には実数 x の名は, サイズ n の入力を受け取ると, 精度 n 桁の x の近似値を返す. 以下では ϕ の値を二進数で表すことにし, ϕ を旋字列から旋字列への関数として扱う.

2.3　計算可能実関数, 多項式時間実関数

実数を受け取り実数を返す関数を機械が計算するとはどういうことか定義しよう. 実数自体が関数として符号化されているため, それを読み書きする機構として, 神託チューリング機械 (以下単に機械という) を使う [図 2.3].

機械 M に, 旋字列から旋字列への関数 ϕ を神託として与え, 旋字列 0^n を入力として与えたとき, 出力される旋字列を $M^\phi(0^n)$ で表す. つまり M^ϕ をやはり旋字列から旋字列への関数とみる.

定義 2.2. A を $\mathbf{R}$ の有界閉区間とする. 機械 M が実関数 $f\colon A \to \mathbf{R}$ を計算するとは, 任意の実数 $x \in A$, 任意の x の名 ϕ_x にたいして, M^{ϕ_x} が $f(x)$ の名であること.

A が $\mathbf{R}^2$ のコンパクトな部分集合であるときにも, 神託を二つ取る機械を考えて同様に定義する.

計算可能な実関数は Grzegorczyk によって初めて形式的に定義され, [**?**].

ある実関数が計算可能であるとは, その関数を計算する神託機械が存在することである. 同様に,

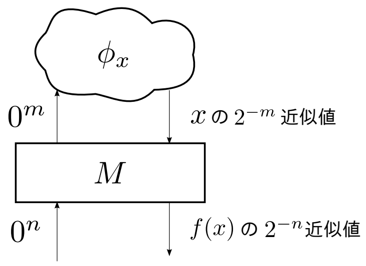

図 2.1　実関数を計算する機械

ある実関数が多項式時間計算可能であるとは, その関数を計算する多項式時間神託機械が存在することである.

旋字列 u で添字づけられた実関数 $f_u\colon A \to \mathbf{R}$ の族 $(f_u)_u$ を機械 M が計算するとは, 任意の実数 $x \in A$, 任意の x の名 ϕ_x にたいして, 旋字列 v を $M^{\phi_x}(u,v)$ へ移す関数が, $f_u(x)$ の名であることをいう. 実関数族が多項式時間計算可能であるとは, その実関数族を計算する多項式時間神託機械が存在することである.

神託機械 M で f を計算するとき, 求める精度 n にたいして, x の近似値に必要な精度 m が定まるため, 計算可能な関数は連続である. また n と m の対応関係と有理数における近似値を与えることで, 計算可能実関数や多項式時間計算可能実関数にたいして, 神託機械を用いない同値な特徴付けが可能である.

補題 2.3. 実関数 $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ にたいして, $\phi_f\colon (\mathbf{Q} \cap [0,1]) \times \{0\}^* \to \mathbf{Q}$, $m_f\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ は

$$|\phi_f(d, 0^n) - f(d)| \le 2^{-n} \qquad (d \in (\mathbf{Q} \cap [0,1]), \quad n \in \mathbf{N}) \tag{2.1}$$

$$|x-y| \le 2^{-p_f(m)} \Rightarrow |f(x)-f(y)| \le 2^{-m} \qquad (x,y \in [0,1], \quad m \in \mathbf{N}) \tag{2.2}$$

をみたす関数とする.

- f が計算可能であることは, 計算可能な ϕ_f, m_f が存在することと同値である.
- f が多項式時間計算可能であることは, 多項式時間計算可能な ϕ_f, 多項式 m_f が存在することと同値である.

2.4　困難性

実関数の計算量の下界を述べるために, 困難性を定義する.

まず実関数に言語が還元することを定義する. 言語 $L\colon \{0,1\}^* \to \{0,1\}$ が実関数 $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ に多項式時間還元可能であるとは, f を計算する機械を使って $L(u)$ を多項式時間で計算可能であることである. つまり f を計算する機械があるとしたとき, 入力 u にたいして, 精度 n をこの機械に与え, ある実数 x_u の神託を模倣し, $f(x_u)$ の n 桁近似値から, u が L に属するか否かを多項式時間で計算可能であることである [図 2.4]. 厳密には以下のように定義する.

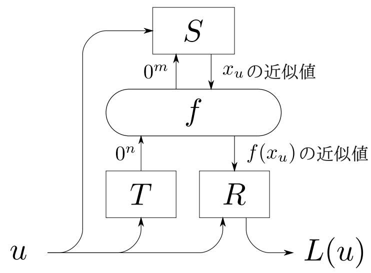

図 2.2　言語 L から関数 f への還元

定義 2.4 (多項式時間還元可能)**.** 言語 L が実関数 $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ に多項式時間還元可能であるとは, 多項式時間計算可能な関数 R, S, T が存在し, 任意の旗字列 u にたいして以下を満たすことをいう.

- $S(u, \cdot)$ はある実数 x_u の名
- $f(x_u)$ の任意の名 ϕ にたいして

$$L(u) = R(u, \phi(T(u))).$$

以下単に言語が実関数に還元可能といった場合, 多項式時間還元可能を指す. 計算量 C にたいして, 関数 f が C 困難であるとは, C に属する任意の言語が f に還元可能であることと定義する.

3　微分可能関数と常微分方程式

3.1　多項式段一様関数族の差分方程式と PSPACE

任意の **PSPACE** に含まれる言語 L について, その差分方程式が L を認識する多項式段一様な関数族 $(G_u)_u$ が存在すること (補題 1.3) は河村の論旋のなかで示されているが, その証明の概略をしめす.

任意の L ではなく **PSPACE** 完全な言語である量化論理式 QBF を認識する $(G_u)_u$ を構成することを考える. ここで QBF とは, 旗字列 u を $Q_1x_1 \cdots Q_nx_n\phi(x_1, \ldots, x_n)$ と解釈したとき $u \in \mathrm{QBF} \Leftrightarrow Q_1x_1 \cdots Q_nx_n\phi(x_1, \ldots, x_n) = T$ によって定義される言語である. ただし $Q_i \in \{\exists, \forall\}$, $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ は x_i 以外の変数を含まない論理式.

論理式 $Q_1x_1 \cdots Q_nx_n\phi(x_1, \ldots, x_n)$ の値を二分木によって計算することを考える. x_1 を T と F に置き換えた式の値 $Q_2x_2 \cdots Q_nx_n\phi(T, x_2, \ldots, x_n)$ と $Q_2x_2 \cdots Q_nx_n\phi(F, x_2, \ldots, x_n)$ によってもとの論理式の値は決まる. つまり変数を真偽値で置き換えた 2 つの論理式の値と量化子によってもとの論理式の値も決まるため, 深さ n の二分木を葉からたどっていくことで計算可能である. この過程は二分木の深さが段数に, 幅が列数に対応する形で多項式段一様な関数による差分方程式で模倣可能であるため, QBF を認識する多項式段一様関数の差分方程式が存在する.

3.2 離散初期値問題を模倣する関数族

証明の基本的な流れは, 任意の言語 $L \in \mathbf{PSPACE}$ にたいし, 補題 1.3 を用いて L を認識する差分方程式 $(G_u)_u$ 及びその解 $(H_u)_u$ を得る. 各 G_u, H_u にから, その差分方程式の計算過程を模倣する $(\infty, 1)$ 階連続微分可能な $g_u\colon [0,1] \times [-1,1] \to \mathbf{R}$ とその常微分方程式の解 $h_u\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ を構成する. $(G_u)_u$ の一様性から $(g_u)_u$ の多項式時間計算可能性をしめす.

ここで実関数族 $(g_u)_u$ ($g_u\colon [0,1] \times [-1,1] \to \mathbf{R}$) が多項式時間計算可能であることを, 実関数の多項式時間計算可能性から自然に定義する. つまりある神託機械 M が実関数族 $(g_u)_u$ を計算するとは, 実数 t, y の名 ϕ, ψ を神託として受けとり, 旗字列 u, 求める精度 n を入力として受けとったとき, $|M^{\phi,\psi}(u, 0^n) - g_u(t,y)| \leq 2^{-n}$ を満たすことである. そして実関数族が多項式時間計算可能であるとは, 実関数族を計算し, $|u|$ と n の多項式時間で動作する神託機械が存在することと定義する.

そうして得た $(g_u)_u$ と $(h_u)_u$ から $(\infty, 1)$ 階連続微分可能な $g\colon [0,1] \times [-1,1] \to \mathbf{R}$ とその常微分方程式の解で $\mathbf{PSPACE}$ 困難な $h\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ を構成する. 各 $h_u(1)$ には $L(u)$ の情報が含まれるため, すべての g_u, h_u をそれぞれ一つの関数 g, h に埋め込みたい, そこで [0,1] を無限の区間に分割し, 各 u に対応する区間に g_u, h_u を縮小して埋め込む. また次の旗字列 u' の計算に影響を与えないために, h_u を t 方向 (第二変数方向) について反転したものも埋め込むことで, 影響を相殺する.

ここまで説明した証明の流れは基本的に, 河村によるリプシッツ連続な関数の常微分方程式の解が $\mathbf{PSPACE}$ 困難たりうることの証明とかわらない.

違いの一つ目は g_u が単に $(\infty, 1)$ 階連続微分可能であるだけでは, 縮小して埋め込まれる g が $(\infty, 1)$ 階連続微分可能であるとは限らないため, より特殊な条件をつけたことである (補題 3.1 (v)).

補題 3.1. 任意の言語 $L \in \mathbf{PSPACE}$ にたいして, 係数のみに i を含む多項式 μ_i が存在して, 任意の多項式 γ にたいして, 多項式 ρ, 関数族 $(g_u)_u, (h_u)_u$ で, $(g_u)_u$ は多項式時間計算可能であり, 各二進旗字列 u にたいして以下を満たすものが存在する.

(i) $g_u\colon [0,1] \times [-1,1] \to \mathbf{R}, \quad h_u\colon [0,1] \to [-1,1]$;

(ii) h_u は g_u の常微分方程式 (1.1) の解;

(iii) g_u は $(\infty, 1)$ 階連続微分可能;

(iv) 任意の $i \in \mathbf{N}$, $y \in [-1,1]$ にたいして

$$\mathcal{D}^{(i,0)} g_u(0, y) = \mathcal{D}^{(i,0)} g_u(1, y) = 0$$

(v) 任意の $i \in \mathbf{N}$ にたいして

$$|\mathcal{D}^{(i,1)} g_u| \leq 2^{\mu_i(|u|) - \gamma(|u|)}, \qquad |\mathcal{D}^{(i,0)} g_u| \leq 2^{\mu_i(|u|) - \gamma(|u|)}$$

(vi) $h_u(1) = 2^{-\rho(|u|)}L(u)$.

また本の論旋では連続なだけの関数によって構成していた g_u, h_u を滑らかな多項式時間実関数 $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ を用いて構成することで, 滑らかにしている.

補題 3.2 (補題 3.6. [2])**.** 以下を満たす多項式時間無限回微分可能実関数 $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ が存在する.

(i) $f(0) = 0, \quad f(1) = 1$;
(ii) 任意の $n \geq 1$ で $f^{(n)}(0) = f^{(n)}(1) = 0$;
(iii) f は $[0,1]$ で単調増加;
(iv) 任意の $n \geq 1$ で $f^{(n)}$ は多項式時間実関数.

補題 3.1 の証明. 補題 1.3 から, L を認識する離散初期値問題 $\langle d, p, q, (G_u)_u \rangle$ とその解 $(H_u)_u$ を得る. 各ステップを $p(u)$ 個に分割することで, $G_u(i, T, Y) \neq 0$ を満たす i を各 T にたいしてたかだか 1 つにすることができる. そのような i のことを $j_u l(T)$ と表現する. 任意の i で $G_u(i, T, Y) = 0$ ならば $j_u(T)$ は任意の値を取るとする. さらに以下を満たすとしても一般性を失わない.

$$H_u(i, 2^{q(|u|)}) = \begin{cases} L(u) & (i = p(|u|)) \\ 0 & (i < p(|u|)) \end{cases} \tag{3.1}$$

$$G_u(i, 2 \cdot 2^{q(|u|)} - 1 - T, Y) = \begin{cases} 0 & (i = p(|u|) - 1) \\ -G_u(i, T, Y) & (i < p(|u|) - 1) \end{cases} \tag{3.2}$$

$$H_u(i, 2 \cdot 2^{q(|u|)} - T) = \begin{cases} H_u(p(|u|), 2^{q(|u|)}) & (i = p(|u|)) \\ H_u(i, T) & (i < p(|u|)) \end{cases} \tag{3.3}$$

補題 3.2 の f にたいして, 自然数 c_i を各 $i \in \mathbf{N}$ にたいして $|\mathcal{D}^{(i)} f(x)| \leq 2^{c_i}$ を満たす最小の自然数と定める. 定数 $d' = \lceil \log(4d+1) \rceil$, $B = 2^{\gamma(|u|)+d'}$ とおき, 各 $(t, y) \in [0,1] \times [-1,1]$ にたいして, 自然数 N, $\theta \in [0,1]$, 整数 Y, $\eta \in [-1/4, 3/4]$ を $t = (T+\theta)2^{-q(|u|)}$, $y = (Y+\eta)B^{-j_u(T)}$ を満たすように定める.

そのとき,

$$\delta_{u,Y}(t) = \frac{2^{q(|u|)} f'(\theta)}{B^{j_u(T)+1}} G_u\left(j_u(T), T, \min\left(Y \bmod 2^{d'}, d-1\right)\right) \tag{3.4}$$

とおき g_u, h_u を以下のように定義する.

$$g_u(t, y) = \begin{cases} \delta_{u,Y}(t) & (\eta \leq \frac{1}{4}) \\ (1 - f(\frac{4\eta - 1}{2}))\delta_{u,Y}(t) + f(\frac{4\eta-1}{2})\delta_{u,Y+1}(t) & (\eta > \frac{1}{4}) \end{cases} \tag{3.5}$$

$$h_u(t) = \sum_{i=0}^{p(|u|)} \frac{H_u(i, T)}{B^i} + \frac{f(\theta)}{B^{j_u(T)+1}} G_u(j_u(T), T, H_u(j_u(T), T)) \tag{3.6}$$

上記のように定義した g_u, h_u が補題 3.1 で求める性質を満たすことを示す．(i) は自明．$(g_u)_u$ が多項式時間計算可能であることは補題 2.3 によって示される．

h_u は g_u の常微分方程式の解であることを示す． まず h_u について解析する． $h_u(t) = (Y+\eta)B^{-j_u(T)}$ とおくときの, η の範囲がどうなるか, つまり式 (3.5) のどちらのケースを使うかを考える．式 (4.4) の一つ目の項において $i \leq j_u(T)$ の合計は $B^{j_u(T)}$ の倍数なので η に影響はない．$i > j_u(T)$ の合計は,

$$\begin{aligned}\sum_{i>j_u(T)} \frac{H_u(i,T)}{B^i} &\leq \sum_{i>j_u(T)} \frac{d-1}{B^i} = \sum_{i>j_u(T)} \frac{d-1}{B^{i-j_u(T)}} B^{-j_u(T)} \\ &\leq \sum_{i>j_u(T)} \frac{(d-1)}{(4d+1)^{i-j_u(T)}} B^{-j_u(T)} \\ &= \frac{d-1}{4d} B^{-j_u(T)}\end{aligned}$$

二つ目の項の絶対値は

$$\left| \frac{f(\theta)}{B^{j_u(T)+1}} G_u(j_u(T), T, H_u(j_u(T), T)) \right| \leq \frac{1}{B^{j_u(T)+1}} \leq \frac{B^{-j_u(T)}}{4d+1} \tag{3.7}$$

$(\frac{d-1}{4d} + \frac{1}{4d+1})B^{-j_u(T)} \leq \frac{1}{4}B^{-j_u(T)}$ より $h_u(t) = (Y+\eta)B^{-j_u(T)}$ を満たす $\eta \in [-1/4, 1/4]$ が存在する．このとき,

$$Y = \sum_{i=0}^{j_u(T)} H_u(i,T) \cdot B^{j_u(T)-i}. \tag{3.8}$$

B は $2^{d'}$ の倍数なので, $\min(Y \bmod 2^{d'}, d-1) = \min(H_u(j_u), d-1) = H_u(j_u)$．(3.5) へ Y と η を代入すると,

$$\begin{aligned}g_u(t, h_u(t)) &= \frac{2^{q(|u|)} f'(\theta)}{B^{j_u(T)+1}} G_u(j_u(T), T, H_u(j_u(T), T)) \\ &= \mathcal{D}^{(1)} h_u(t).\end{aligned}$$

よって h_u は g_u の常微分方程式の解．

g_u が $(\infty, 1)$ 階連続的微分可能であることを証明する．η が $[-1/4, 1/4]$ と $[1/4, 3/4]$ である区間それぞれにおいて微分する．

$$\mathcal{D}^{(i)} \delta_{u,Y}(t) = \frac{2^{(i+1)q(|u|)} \mathcal{D}^{(i+1)} f(\theta)}{B^{j_u(T)+1}} G_u\left(j_u(T), T, \min\left(Y \bmod 2^{d'}, d-1\right)\right) \tag{3.9}$$

$$\mathcal{D}^{(i,0)} g_u(t,y) = \begin{cases} \mathcal{D}^{(i)}\delta_{u,Y}(t) & (-\frac{1}{4} < \eta < \frac{1}{4}) \\ \left(1 - f\left(\frac{4\eta-1}{2}\right)\right) \mathcal{D}^{(i)}\delta_{u,Y}(t) + f\left(\frac{4\eta-1}{2}\right) \mathcal{D}^{(i)}\delta_{u,Y+1}(t) & \\ & (\frac{1}{4} < \eta < \frac{3}{4}) \end{cases} \tag{3.10}$$

$$\mathcal{D}^{(i,1)} g_u(t,y) = \begin{cases} 0 & (-\frac{1}{4} < \eta < \frac{1}{4}) \\ 2B^{j_u(T)} \mathcal{D}^{(1)} f(\frac{4\eta-1}{2})(\mathcal{D}^{(i)}\delta_{u,Y+1}(t) - \mathcal{D}^{(i)}\delta_{u,Y}(t)) & \\ & (\frac{1}{4} < \eta < \frac{3}{4}) \end{cases} \tag{3.11}$$

f は 無限回微分可能であるため, $\delta_{u,Y}$ も無限回微分可能である. よって 区間 $[-1/4, 1/4]$, $[1/4, 3/4]$ において $\mathcal{D}^{(i,0)} g_u$, $\mathcal{D}^{(i,1)} g_u$ は連続. $\eta = 1/4$ および $\eta = 3/4(-1/4)$ においても連続であることは自明. よって g_u は $(\infty, 1)$ 階連続的微分可能.

式 (4.8) に $t = 0$ を代入して $\mathcal{D}^{(i,0)} g_u(0, y) = \mathcal{D}^{(i,0)} g_u(1, y) = 0$.

$|\mathcal{D}^{(i,1)} g_u| \le 2^{\mu_i(|u|)-\gamma(|u|)}$ および $|\mathcal{D}^{(i,0)} g_u| \le 2^{\mu_i(|u|)-\gamma(|u|)}$ を示す.

$$|\mathcal{D}^{(i)} \delta_{u,Y}(t)| \le \left| \frac{2^{(i+1)q(|u|)} \mathcal{D}^{(i+1)} f(\theta)}{B^{j_u(T)+1}} \right| \le \frac{2^{(i+1)q(|u|)+c_i}}{B^{j_u(T)+1}} \tag{3.12}$$

$\mu_i(k) = (i+1)q(k) + c_i + c_1 + 2$ とおく. これは λ に依存しない. B の定義より

$$\left| \mathcal{D}^{(i,0)} g_u \right| \le |\mathcal{D}^{(i)} \delta_{u,Y}(t)| \le \frac{2^{(i+1)q(|u|)+c_i}}{B} \le 2^{\mu_i(|u|)-\gamma(|u|)} \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned} \left| \mathcal{D}^{(i,1)} g_u \right| &\le 2B^{j_u(T)} \left| \mathcal{D}^{(1)} f\left(\frac{4\eta - 1}{2} \right) \right| \cdot \left| \mathcal{D}^{(i)} \delta_{u,Y+1}(t) - \mathcal{D}^{(i)} \delta_{u,Y}(t) \right| \\ &\le 2B^{j_u(T)} \cdot 2^{c_1} \cdot 2 \cdot \frac{2^{(i+1)q(|u|)+c_i}}{B^{j_u(T)+1}} \\ &= \frac{2^{(i+1)q(|u|)+c_i+c_1+2}}{B} \le 2^{\mu_i(|u|)-\gamma(|u|)}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

(vii) は

$$\begin{aligned} h_u(1) &= \frac{H_u(p(|u|), 2^{q(|u|)})}{B^{p(|u|)}} \\ &= \frac{L(u)}{2^{p(|u|)(\gamma(|u|)+d')}} \end{aligned} \tag{3.15}$$

より, $\rho(k) = p(k)(\gamma(k) + d')$ とおくと成り立つ. □

3.3 定理 1.1 の証明

証明. L を **PSPACE** 完全な言語とおく. **PSPACE** 完全な言語 L にたいして補題 3.1 を用いて, まず多項式 μ_i をえる. μ_i は i を係数部にのみ持つ多項式であるため, $\mu_i(k) = O(k^c)$ をみたす最小の定数 c が存在する.

$$\lambda(k) = 2k + 2, \qquad \gamma(k) = k^{c+1} + k\lambda(k) \tag{3.16}$$

とおき, 各 u にたいして

$$\Lambda_u = 2^{\lambda(|u|)}, \qquad c_u = 1 - \frac{1}{2^{|u|}} + \frac{2\bar{u} + 1}{\Lambda_u}, \qquad l_u^{\mp} = c_u \mp \frac{1}{\Lambda_u} \tag{3.17}$$

とおく. ただし $\bar{u} \in \{0, \ldots, 2^{|u|} - 1\}$ は u を二進数として解釈した数. γ にたいして, 再び補題より ρ, $(g_u)_u$, $(h_u)_u$ を得る.

任意の $[0,1)$ の実数にたいして, $l_u^{\mp} \pm \frac{t}{\Lambda_u}$ がその実数と等しくなるような $u, \pm, t \in [0,1]$ が存在する. 関数 g, h を $t \in [0,1]$, $y \in \mathbf{R}$ にたいして, それぞれ $[0,1) \times [-1,1]$ の範囲と $[0,1)$ の範囲で下のように定義する.

$$g\left(l_u^{\mp} \pm \frac{t}{\Lambda_u}, \frac{y}{\Lambda_u}\right) = \begin{cases} \pm\left(g_u(t,1) + \mathcal{D}^{(0,1)} g_u(t,1)(y-1)\right) & (1 < y) \\ \pm g_u(t,y) & (-1 \le y \le 1) \\ \pm\left(g_u(t,-1) + \mathcal{D}^{(0,1)} g_u(t,-1)(y+1)\right) & (y < -1) \end{cases} \tag{3.18}$$

$$h\left(l_u^{\mp} \pm \frac{t}{\Lambda_u}\right) = \frac{h_u(t)}{\Lambda_u}. \tag{3.19}$$

任意の $y \in \mathbf{R}$ にたいして $g(1,y) = h(1) = 0$ と定義する.

この g と h が定理 1.1 で求める関数の性質を満たすことを示す.

まず g が多項式時間計算可能であることを補題 2.3 を用いて示す. 各有理数 T, Y について $g(T,Y)$ を求めるとき, $T = l_u^{\mp} \pm t/\Lambda_u$, $Y = y/\Lambda_u \Gamma_u$ を満たすような $u, \pm, t, y$ は, 多項式時間で計算可能であり, $(g_u)_u$ は多項式時間計算可能なので $g(T,Y)$ は多項式時間計算可能.

g が $(\infty, 1)$ 階連続的微分可能であることをしめすため, まず g が $(\infty, 0)$ 階連続的微分可能であることをしめす.

g_u は $(\infty,1)$ 階連続的微分可能であるため, 各区間においては $(\infty,1)$ 階連続的微分可能である. $t \in (0,1)$ において

$$\mathcal{D}^{(i,0)} g\left(l_u^{\mp} \pm \frac{t}{\Lambda_u}, \frac{y}{\Lambda_u}\right) = \begin{cases} \pm\Lambda_u^i\left(\mathcal{D}^{(i,0)} g_u(t,1) + \mathcal{D}^{(i,1)} g_u(t,1)(y-1)\right) & (1 < y) \\ \pm\Lambda_u^i \mathcal{D}^{(i,0)} g_u(t,y) & (-1 < y < 1) \\ \pm\Lambda_u^i\left(\mathcal{D}^{(i,0)} g_u(t,-1) + \mathcal{D}^{(i,1)} g_u(t,-1)(y+1)\right) & (y < -1) \end{cases} \tag{3.20}$$

$\mathcal{D}^{(i,0)} g_u$ は連続であるため $t \in (0,1)$, $y \neq -1, 1$ の区間において連続. 確認すべきなのは g_u 同士をつなぐ境界 $t = 0, 1$ と g_u の外側との境界 $y = 0, 1$, および極限 g_u の極限, つまり g の第一引数が 1 へ限りなく近づくとき発散せずに連続であることである.

$y = 1$ のとき $\mathcal{D}^{(i,0)} g\left(l_u^{\mp} \pm t/\Lambda_u, y/\Lambda_u\right) = \pm\Lambda_u^i \mathcal{D}^{(i,0)} g_u(t,1)$, $y = -1$ のとき $\mathcal{D}^{(i,0)} g\left(l_u^{\mp} \pm t/\Lambda_u, y/\Lambda_u\right) = \pm\Lambda_u^i \mathcal{D}^{(i,0)} g_u(t,-1)$ より $\mathcal{D}^{(i,0)} g$ は第二変数について連続である.

第一変数が $[0,1)$ の範囲にあるとき, つまり $l_u^{\mp} \pm t/\Lambda_u$ と表される範囲において連続であることをしめす. $t = 1$ において g_u と $-g_u$ が接続され, $t = 0$ において g_u とつぎの旋字 u' の関数 $g_{u'}$ が接続されているが, $\mathcal{D}^{(i,0)} g_u(0,y) = \mathcal{D}^{(i,0)} g_u(1,y) = 0$ より連続に接続されている.

最後に第一変数が 1 へ向かうとき発散しないことをしめす.

$$\begin{aligned}\left|\mathcal{D}^{(i,0)}g\left(l_u^{\mp}\pm\frac{t}{\Lambda_u},\frac{y}{\Lambda_u}\right)\right| &\le \Lambda_u^i(|\mathcal{D}^{(i,0)}g_u|+|\mathcal{D}^{(i,1)}g_u|(\Lambda_u+1))\\ &\le \Lambda_u^i(\Lambda_u+2)2^{\mu_i(|u|)-\gamma(|u|)}\\ &\le \Lambda_u^{(i+1)}2^{\mu_i(|u|)-\gamma(|u|)+1}\\ &= 2^{(i+1)\lambda(|u|)+\mu_i(|u|)+1-\gamma(|u|)} \end{aligned} \tag{3.21}$$

γ のとり方により, $|u|\to\infty$ のとき式 (3.21) は 0 に収束する. よって $\lim_{t\to 1-0}\mathcal{D}^{(i,0)}g(t,y)=0$. とくに $i=0$ のとき, $\lim_{t\to 1-0}g(t,y)=0=g(1,y)$ より 1 で連続. 以上により g が $(\infty,0)$ 階連続的微分可能であることをしめした.

g が $(\infty,1)$ 階連続的微分可能であることをしめす. $(\infty,0)$ 階連続的微分可能と同様に, 各区間において, $(\infty,1)$ 階連続的微分可能であるためそれぞれ導関数を求める. $t\in(0,1)$ において

$$\mathcal{D}^{(i,1)}g\left(l_u^{\mp}\pm\frac{t}{\Lambda_u},\frac{y}{\Lambda_u}\right)=\begin{cases}\pm\Lambda_u^{i+1}\mathcal{D}^{(i,1)}g_u(t,1) & (1<y)\\ \pm\Lambda_u^{i+1}\mathcal{D}^{(i,1)}g_u(t,y) & (-1<y<1)\\ \pm\Lambda_u^{i+1}\mathcal{D}^{(i,1)}g_u(t,-1) & (y<-1).\end{cases} \tag{3.22}$$

$\mathcal{D}^{(0,1)}g(t,1)=\pm\Lambda_u\mathcal{D}^{(0,1)}g_u(t,1)$, $\mathcal{D}^{(0,1)}g(t,-1)=\pm\Lambda_u\mathcal{D}^{(0,1)}g_u(t,-1)$ であり, 第二変数について連続.

第一変数について連続性をしめす. $[0,1)$ 区間において $t\in(0,1)$ ならば $\mathcal{D}^{(i,1)}g_u$ が連続であるため $\mathcal{D}^{(i,1)}g$ も連続. $g_u(0,y)=g_u(1,y)=1$ より $\mathcal{D}^{(i,1)}g_u(0,y)=\mathcal{D}^{(i,1)}g_u(1,y)=0$ なので $\mathcal{D}^{(i,1)}g(0,y)=\mathcal{D}^{(i,1)}g(1,y)=0$ のため $t=0,1$ においても連続.

最後に第一変数が 1 へ向かうとき発散しないことをしめす.

$$\begin{aligned}\left|\mathcal{D}^{(i,1)}g\left(l_u^{\mp}\pm\frac{t}{\Lambda_u},\frac{y}{\Lambda_u}\right)\right| &\le \Lambda_u^{i+1}|\mathcal{D}^{(i,1)}g_u|\\ &\le 2^{(i+1)\lambda(|u|)+\mu_i(|u|)-\gamma(|u|)}\end{aligned} \tag{3.23}$$

γ のとり方により $|u|\to\infty$ のとき $2^{(i+1)\lambda(|u|)+\mu_i(|u|)-\gamma(|u|)}$ は 0 へ収束する. よって $\lim\limits_{t\to 1-0}\mathcal{D}^{(i,0)}g(t,y)=0$. 以上により g が $(\infty,1)$ 階連続的微分可能であることをしめした.

h が g の常微分方程式の解であることを示す. $h(0)=0,\quad \mathcal{D}^{(1)}h(1)=0=g(1,h(1))$ は自明.

$$\begin{aligned}h'\left(l_u^{\mp}\pm\frac{t}{\Lambda_u}\right) &= \pm\frac{h_u'(t)}{\Lambda_u}\\ &= \pm g_u\left(t,h_u(t)\right)\\ &= g\left(l_u^{\mp}\pm\frac{t}{\Lambda_u},\frac{h_u(t)}{\Lambda_u}\right)\\ &= g\left(l_u^{\mp}\pm\frac{t}{\Lambda_u},h\left(l_u^{\mp}\pm\frac{t}{\Lambda_u}\right)\right).\end{aligned} \tag{3.24}$$

L は h に還元可能であることを示す.

$$h(c_u)=\frac{h_u(1)}{\Lambda_u}=\frac{L(u)}{2^{\lambda(|u|)+\rho(|u|)}} \tag{3.25}$$

つまり R, S, T を以下のように定義することで, 還元可能.

$$R(u, v) = v \tag{3.26}$$

$$S(u, 0^n) = \lfloor 2^n c_u \rfloor \text{ を表す旋字列}, \tag{3.27}$$

$$T(u) = 0^{\lambda(|u|)+\rho(|u|)} \tag{3.28}$$

L は **PSPACE** 完全であるため, h は **PSPACE** 困難. □

4 任意回微分可能関数と常微分方程式

第二変数について任意回微分可能な関数の常微分方程式の解は, **DIVP(log)** 困難でありうることを証明する.

4.1 対数深さ離散初期値問題を模倣する関数族

証明の流れは $(\infty, 1)$ 階連続的微分可能の時と変わらない. 任意の言語 $L \in \mathbf{DIVP(log)}$, 旋字列 u にたいして, 上記の対数深さ離散初期値問題を模倣し $L(u)$ を計算する任意回微分可能な実関数 g_u を構成する.

補題 4.1. 任意の自然数 $k \geq 2$, 任意の言語 $L \in \mathbf{DIVP(log)}$ にたいして, 係数のみに i を含む多項式 μ_i が存在して, 任意の多項式 γ にたいして, 関数 $\rho\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, 関数族 g_u, h_u で, $\rho, (g_u)_u$ は多項式時間計算可能であり, 各二進旋字列 u にたいして以下を満たすものが存在する.

(i) $g_u\colon [0,1] \times [-1,1] \to \mathbf{R}$, $\quad h_u\colon [0,1] \to [-1,1]$;

(ii) h_u は g_u の常微分方程式 (1.1) の解;

(iii) g_u は (∞, k) 階連続微分可能;

(iv) 任意の $i \in \mathbf{N}$, $y \in [-1,1]$ にたいして

$$\mathcal{D}^{(i,0)} g_u(0, y) = \mathcal{D}^{(i,0)} g_u(1, y) = 0$$

(v) 任意の $i \in \mathbf{N}$, $j \in \{0, \dots, k\}$ にたいして

$$\left| \mathcal{D}^{(i,j)} g_u(t, y) \right| \leq 2^{\mu_i(|u|) - \gamma(|u|)}$$

(vi) $h_u(1) = 2^{-\rho(|u|)} L(u)$.

証明. $L \in \mathbf{DIVP(log)}$ を認識する対数深さ離散初期値問題 $\langle d, p, q, (G_u)_u \rangle$ とその解 $(H_u)_u$ を得る. さらに以下のように仮定する.

$$H_u(i, 2^{q(|u|)}) = \begin{cases} L(u) & (i = p(|u|)) \\ 0 & (i < p(|u|)). \end{cases} \tag{4.1}$$

補題 3.2 の f にたいして, 自然数の族 c_i を各 $i \in \mathbf{N}$ にたいして $|\mathcal{D}^{(i)} f(x)| \leq 2^{c_i}$ を満たす最小の自然数と定める. 定数 $d' = \lceil \log(4d+1) \rceil$, $B = 2^{\gamma(|u|)+d'}$ とおき, 各 $(t, y) \in [0,1] \times [-1,1]$ にたいして, 自然数 $N, \theta \in [0,1]$, 整数 $Y, \eta \in [-1/4, 3/4]$ を $t = (T+\theta)2^{-q(|u|)}$, $y = (Y+\eta)B^{-k^{j_u(T)}}$ を満たすように定める.

そのとき,

$$\delta_{u,Y}(t) = \frac{2^{q(|u|)} f'(\theta)}{B^{k^{j_u(T)+1}}} G_u \left(j_u(T), T, \min \left(Y \bmod 2^{d'}, d-1 \right) \right) \tag{4.2}$$

とおき g_u, h_u を以下のように定義する.

$$g_u(t, y) = \begin{cases} \delta_{u,Y}(t) & (\eta \leq \frac{1}{4}) \\ (1 - f(\frac{4\eta-1}{2}))\delta_{u,Y}(t) + f(\frac{4\eta-1}{2})\delta_{u,Y+1}(t) & (\eta > \frac{1}{4}) \end{cases} \tag{4.3}$$

$$h_u(t) = \sum_{i=0}^{p(|u|)} \frac{H_u(i, T)}{B^{k^i}} + \frac{f(\theta)}{B^{k^{j_u(T)+1}}} G_u(j_u(T), T, H_u(j_u(T), T)) \tag{4.4}$$

上記のように定義した g_u, h_u が補題 3.1 で求める性質を満たすことを示す. (i) は自明. $(g_u)_u$ が多項式時間計算可能であることは補題 2.3 によって示される.

h_u は g_u の常微分方程式の解であることを示す. まず h_u について解析する. $h_u(t) = (Y+\eta)B^{-k^{j_u(T)}}$ とおくときの, η の範囲がどうなるか, つまり式 (3.5) のどちらのケースを使うかを考える. 式 (4.4) の一つ目の項において $i \leq j_u(T)$ の合計は $B^{k^{j_u(T)}}$ の倍数なので η に影響はない. $i > j_u(T)$ の合計は,

$$\begin{aligned} \sum_{i>j_u(T)}^{p(|u|)} \frac{H_u(i,T)}{B^{k^i}} &\leq \sum_{i>j_u(T)}^{\infty} \frac{d-1}{B^{k^i}} \\ &\leq \sum_{i>j_u(T)}^{\infty} \frac{d-1}{B^i} = \sum_{i>j_u(T)}^{\infty} \frac{d-1}{B^{i-j_u(T)}} B^{-j_u(T)} \\ &\leq \sum_{i>j_u(T)}^{\infty} \frac{d-1}{(4d+1)^{i-j_u(T)}} B^{-j_u(T)} \\ &= \frac{d-1}{4d} B^{-j_u(T)} \end{aligned}$$

二つ目の項の絶対値は

$$\left| \frac{f(\theta)}{B^{k^{j_u(T)+1}}} G_u(j_u(T), T, H_u(j_u(T), T)) \right| \leq \frac{1}{B^{j_u(T)+1}} \leq \frac{B^{-j_u(T)}}{4d+1} \tag{4.5}$$

$(\frac{d-1}{4d} + \frac{1}{4d+1})B^{-j_u(T)} \leq \frac{1}{4} B^{-j_u(T)}$ より $h_u(t) = (Y+\eta)B^{-j_u(T)}$ を満たす $\eta \in [-1/4, 1/4]$ が存在する. このとき,

$$Y = \sum_{i=0}^{j_u(T)} H_u(i, T) \cdot B^{k^{j_u(T)} - k^i}. \tag{4.6}$$

B は $2^{d'}$ の倍数なので, $\min(Y \bmod 2^{d'}, d-1) = \min(H_u(j_u), d-1) = H_u(j_u)$. g_u に代入すると,

$$\begin{aligned} g_u(t, h_u(t)) &= \frac{2^{q(|u|)} f'(\theta)}{B^{k^{j_u(T)+1}}} G_u(j_u(T), T, H_u(j_u(T), T)) \\ &= \mathcal{D}^{(1)} h_u(t). \end{aligned}$$

よって h_u は g_u の常微分方程式の解.

g_u が (∞, k) 階連続的微分可能であることを証明する. η が $[-1/4, 1/4]$ と $[1/4, 3/4]$ である区間それぞれにおいて微分する. 任意の $i \in \mathbf{N}$ について

$$\mathcal{D}^{(i)} \delta_{u,Y}(t) = \frac{2^{(i+1)q(|u|)} \mathcal{D}^{(i+1)} f(\theta)}{B^{k^{j_u(T)+1}}} G_u \left(j_u(T), T, \min \left(Y \bmod 2^{d'}, d-1 \right) \right) \tag{4.7}$$

$$\mathcal{D}^{(i,0)} g_u(t, y) = \begin{cases} \mathcal{D}^{(i)} \delta_{u,Y}(\theta) & (-\frac{1}{4} < \eta < \frac{1}{4}) \\ \left(1 - f\left(\frac{4\eta-1}{2}\right)\right) \mathcal{D}^{(i)} \delta_{u,Y}(\theta) + f\left(\frac{4\eta-1}{2}\right) \mathcal{D}^{(i)} \delta_{u,Y+1}(\theta) & \\ & (\frac{1}{4} < \eta < \frac{3}{4}) \end{cases} \tag{4.8}$$

$j \in \{1, \ldots, k\}$ について,

$$\mathcal{D}^{(i,j)} g_u(t, y) = \begin{cases} 0 & (-\frac{1}{4} < \eta < \frac{1}{4}) \\ (2B^{j_u(T)})^j \mathcal{D}^{(j)} f(\frac{4\eta-1}{2})(\mathcal{D}^{(i)} \delta_{u,Y+1}(\theta) - \mathcal{D}^{(i)} \delta_{u,Y}(\theta)) & \\ & (\frac{1}{4} < \eta < \frac{3}{4}) \end{cases} \tag{4.9}$$

f は 無限回微分可能であるため, $\delta_{u,Y}$ も無限回微分可能である. よって 区間 $(-1/4, 1/4)$, $(1/4, 3/4)$ において $\mathcal{D}^{(i,0)} g_u$, $\mathcal{D}^{(i,j)} g_u$ は連続. $\eta = 1/4$ および $\eta = 3/4(-1/4)$ においても連続であることは自明. $\mathcal{D}^{(i+1,0)} f(0) = \mathcal{D}^{(i+1,0)} f(1) = 0$ より $\theta = 0$ または $\theta = 1$ において $\mathcal{D}^{(i,0)} g_u(t, y) = 0$, $\mathcal{D}^{(i,j)} g_u(t, y) = 0$, よって t についても連続. 以上により g_u は (∞, j) 階連続的微分可能であることがしめされた.

式 (4.8) に $t = 0, 1$ $(\theta = 0)$ を代入して $\mathcal{D}^{(i,0)} g_u(0, y) = \mathcal{D}^{(i,0)} g_u(1, y) = 0$.

任意の $i \in \mathbf{N}$, $j \in \{0, \ldots, k\}$ について $|\mathcal{D}^{(i,j)} g_u| \le 2^{\mu_i(|u|) - \gamma(|u|)}$ を示す.

$$|\mathcal{D}^{(i)} \delta_{u,Y}(t)| \le \left| \frac{2^{(i+1)q(|u|)} \mathcal{D}^{(i+1)} f(\theta)}{B^{k^{j_u(T)+1}}} \right| \le \frac{2^{(i+1)q(|u|)+c_i}}{B^{k^{j_u(T)+1}}} \tag{4.10}$$

$\mu_i(k) = (i+1)q(k) + \sum_{j=1}^{k} c_i + c_i + k + 1$ とおく. これは λ に依存しない. B の定義より

$$\left| \mathcal{D}^{(i,0)} g_u \right| \le |\mathcal{D}^{(i)} \delta_{u,Y}(t)| \le \frac{2^{(i+1)q(|u|)+c_i}}{B} \le 2^{\mu_i(|u|) - \gamma(|u|)} \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned} \left| \mathcal{D}^{(i,j)} g_u \right| &\le (2B^{j_u(T)})^j \left| \mathcal{D}^{(j)} f\left(\frac{4\eta - 1}{2} \right) \right| \cdot \left| \mathcal{D}^{(i)} \delta_{u,Y+1}(t) - \mathcal{D}^{(i)} \delta_{u,Y}(t) \right| \\ &\le 2^k B^{k \cdot j_u(T)} \cdot 2^{c_j} \cdot 2 \cdot \frac{2^{(i+1)q(|u|)+c_i}}{B^{k^{j_u(T)+1}}} \\ &\le \frac{2^{(i+1)q(|u|) + \sum_{j=1}^{k} c_j + c_i + k + 1}}{B} \le 2^{\mu_i(|u|) - \gamma(|u|)}. \end{aligned} \tag{4.12}$$

(vii) は

$$
\begin{aligned}
h_u(1) &= \frac{H_u(p(|u|), 2^{q(|u|)})}{B^{p(|u|)}} \\
&= \frac{L(u)}{2^{p(|u|)(\gamma(|u|)+d')}}
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

より, $\rho(k) = p(k)(\gamma(k) + d')$ とおくと成り立つ. $\square$

4.2　定理 1.2 の証明

補題 3.1 とくらべて補題 4.1 は **PSPACE** が **DIVP(log)** に置き換わり, $(\infty, 1)$ 回連続微分可能が (∞, k) 回連続微分可能に一般化されていること以外は変わらない. この関係は定理 1.1 と定理 1.2 との間の関係と等しい. よって証明も **PSPACE** を **DIVP(log)** で置き換え, $(\infty, 1)$ 回連続微分可能を (∞, k) 回連続微分可能に一般化させることで, 定理 1.1 の証明から定理 1.2 の証明が構成できる. [*1]

証明. L を **DIVP(log)** に含まれる言語, つまり対数深さ離散初期値問題によって認識される言語とおく. L にたいして補題 3.1 を用いて, まず多項式 μ_i をえる. μ_i は i を係数部にのみ持つ多項式であるため, $\mu_i(k) = O(k^c)$ をみたす最小の定数 c が存在する.

$$
\lambda(k) = 2k + 2, \qquad \gamma(k) = k^{c+1} + k\lambda(k) \tag{4.14}
$$

とおき, 各 u にたいして

$$
\Lambda_u = 2^{\lambda(|u|)}, \qquad c_u = 1 - \frac{1}{2^{|u|}} + \frac{2\bar{u}+1}{\Lambda_u}, \qquad l_u^{\mp} = c_u \mp \frac{1}{\Lambda_u} \tag{4.15}
$$

とおく. ただし $\bar{u} \in \{0, \ldots, 2^{|u|} - 1\}$ は u を二進数として解釈した数. γ にたいして, 再び補題より ρ, $(g_u)_u$, $(h_u)_u$ を得る.

任意の $[0, 1)$ の実数にたいして, $l_u^{\mp} \pm \frac{t}{\Lambda_u}$ がその実数と等しくなるような $u, \pm, t \in [0, 1]$ が存在する. 関数 g, h を $t \in [0, 1]$, $y \in \mathbf{R}$ にたいして, それぞれ $[0, 1) \times [-1, 1]$ の範囲と $[0, 1)$ の範囲で下のように定義する.

$$
g\left(l_u^{\mp} \pm \frac{t}{\Lambda_u}, \frac{y}{\Lambda_u}\right) = \begin{cases} \pm \displaystyle\sum_{l=0}^{k} \frac{\mathcal{D}^{(0,l)} g_u(t, 1)}{l!} (y-1)^l & (1 < y) \\ \pm g_u(t, y) & (-1 \le y \le 1) \\ \pm \displaystyle\sum_{l=0}^{k} \frac{\mathcal{D}^{(0,l)} g_u(t, -1)}{l!} (y+1)^l & (1 < y) \end{cases} \tag{4.16}
$$

$$
h\left(l_u^{\mp} \pm \frac{t}{\Lambda_u}\right) = \frac{h_u(t)}{\Lambda_u}. \tag{4.17}
$$

[*1] なのでこの章まるまる必要ない. しかしこちらの証明のほうが 1 回微分可能のときの証明より一般化されているため, どちらを採用するか要検討

任意の $y \in \mathbf{R}$ にたいして $g(1, y) = h(1) = 0$ と定義する.

この g と h が定理 1.2 で求める関数の性質を満たすことを示す.

まず g が多項式時間計算可能であることを補題 2.3 を用いて示す. 各有理数 T, Y について $g(T, Y)$ を求めるとき, $T = l_u^{\mp} \pm t/\Lambda_u$, $Y = y/\Lambda_u\Gamma_u$ を満たすような $u, \pm, t, y$ は, 多項式時間で計算可能であり, $(g_u)_u$ は多項式時間計算可能なので $g(T, Y)$ は多項式時間計算可能.

g が (∞, k) 階連続的微分可能であることをしめす.

g_u は (∞, k) 階連続的微分可能であるため, 各区間においては (∞, k) 階連続的微分可能である. $t \in (0, 1)$ において

$$\mathcal{D}^{(i,j)} g\left(l_u^{\mp} \pm \frac{t}{\Lambda_u}, \frac{y}{\Lambda_u}\right) = \begin{cases} \pm\Lambda_u^{i+j} \sum_{l=j}^{k} \frac{\mathcal{D}^{(i,l)} g_u(t,1)}{(l-j)!}(y-1)^{l-j} & (1 < y) \\ \pm\Lambda_u^{i+j} \mathcal{D}^{(i,j)} g_u(t, y)(y-1)^{l-j} & (-1 < y < 1) \\ \pm\Lambda_u^{i+j} \sum_{l=j}^{k} \frac{\mathcal{D}^{(i,l)} g_u(t,-1)}{(l-j)!}(y+1)^{l-j} & (y < -1) \end{cases} \tag{4.18}$$

$\mathcal{D}^{(i,j)} g_u$ は連続であるため $t \in (0, 1)$, $y \neq -1, 1$ の区間において連続. 確認すべきなのは g_u 同士をつなぐ境界 $t = 0, 1$ と g_u の外側との境界 $y = 0, 1$, および極限 g_u の極限, つまり g の第一引数が 1 へ限りなく近づくとき発散せずに連続であることである.

$y = 1$ のとき $\mathcal{D}^{(i,j)} g\left(l_u^{\mp} \pm t/\Lambda_u, y/\Lambda_u\right) = \pm\Lambda_u^{i+j} \mathcal{D}^{(i,j)} g_u(t, 1)$, $y = -1$ のとき $\mathcal{D}^{(i,j)} g\left(l_u^{\mp} \pm t/\Lambda_u, y/\Lambda_u\right) = \pm\Lambda_u^{i+j} \mathcal{D}^{(i,j)} g_u(t, -1)$ より $\mathcal{D}^{(i,j)} g$ は第二変数について連続である.

第一変数が $[0, 1)$ の範囲にあるとき, つまり $l_u^{\mp} \pm t/\Lambda_u$ と表される範囲において連続であることをしめす. $t = 1$ において g_u と $-g_u$ が接続され, $t = 0$ において g_u とつぎの旗字 u' の関数 $g_{u'}$ が接続されている. ここで $\mathcal{D}^{(i,0)} g_u(0, y) = \mathcal{D}^{(i,0)} g_u(1, y) = 0$ より $\mathcal{D}^{(i,j)} g_u(0, y) = \mathcal{D}^{(i,j)} g_u(1, y) = 0$. よって $\mathcal{D}^{(i,j)} g(0, y) = \mathcal{D}^{(i,j)} g(1, y) = 0$ なので $[0, 1)$ で連続.

最後に第一変数が 1 へ向かうとき発散しないことをしめす.

$$\begin{aligned} \left|\mathcal{D}^{(i,j)} g\left(l_u^{\mp} \pm \frac{t}{\Lambda_u}, \frac{y}{\Lambda_u}\right)\right| &\leq \Lambda_u^{i+j} \sum_{l=j}^{k} \frac{|\mathcal{D}^{(i,l)} g_u|}{(l-j)!}(|y|+1)^{l-j} \\ &\leq \Lambda_u^{i+j} 2^{\mu_i(|u|)-\gamma(|u|)} \sum_{l=j}^{k} (2\Lambda_u)^{l-j} \\ &\leq \Lambda_u^{i+j} 2^{\mu_i(|u|)-\gamma(|u|)} (2\Lambda_u)^{k-j+1} \\ &= 2^{\mu_i(|u|)+(i+k+1)\lambda(|u|)+k-j+1-\gamma(|u|)} \end{aligned} \tag{4.19}$$

γ のとり方により, $|u| \to \infty$ のとき 0 に収束する. よって $\lim_{t\to 1-0} \mathcal{D}^{(i,j)} g(t, y) = 0$. とくに $i = 0$ のとき, $\lim_{t\to 1-0} g(t, y) = 0 = g(1, y)$ より 1 で連続. 以上により g が (∞, k) 階連続的微分可能であることをしめした.

h が g の常微分方程式の解であることを示す. $h(0)=0, \quad \mathcal{D}^{(1)}h(1)=0=g(1,h(1))$ は自明.

$$\begin{aligned}
h'\left(l_u^{\mp} \pm \frac{t}{\Lambda_u}\right) &= \pm\frac{h_u'(t)}{\Lambda_u} \\
&= \pm g_u\left(t, h_u(t)\right) \\
&= g\left(l_u^{\mp} \pm \frac{t}{\Lambda_u}, \frac{h_u(t)}{\Lambda_u}\right) \\
&= g\left(l_u^{\mp} \pm \frac{t}{\Lambda_u}, h\left(l_u^{\mp} \pm \frac{t}{\Lambda_u}\right)\right). \qquad (4.20)
\end{aligned}$$

L は h に還元可能であることを示す.

$$h(c_u) = \frac{h_u(1)}{\Lambda_u} = \frac{L(u)}{2^{\lambda(|u|)+\rho(|u|)}} \qquad (4.21)$$

つまり R, S, T を以下のように定義することで, 還元可能.

$$\begin{aligned}
R(u,v) &= v \qquad (4.22) \\
S(u,0^n) &= \lfloor 2^n c_u \rfloor \text{ を表す旋字列,} \qquad (4.23) \\
T(u) &= 0^{\lambda(|u|)+\rho(|u|)} \qquad (4.24)
\end{aligned}$$

任意の $L \in \mathbf{DIVP(log)}$ について h へ還元可能であるため, h は $\mathbf{DIVP(log)}$ 困難. □

5 考察

5.1 議論

$(\infty,1)$ 回連続的微分可能な関数の常微分方程式の解は **PSPACE** 困難たりうることを本稿では示したが, しかし一回連続的微分可能と二回連続的微分可能の間に本質的なギャップがあるとは思えず, (∞,k) 回連続的微分可能以上に関しても **PSPACE** 困難たりうることを証明できるのではないかと考えている. 証明される可能性としてひとつは $\mathbf{PSPACE}=\mathbf{DIVP(log)}$ が示されることであるが, 重要なのは $\mathbf{PSPACE}\neq\mathbf{DIVP(log)}$ ならば (∞,k) 回連続的微分可能な関数の常微分方程式の解が **PSPACE** 困難になりえないというわけではないことである.

5.2 課題

任意階微分可能な関数の常微分方程式の解が **PSPACE** 困難たりうることを証明することが第一の課題である. しかし, 対数深さ離散初期値問題が任意階微分可能な関数の常微分方程式で模倣できる計算の最大限であるという保証はない. つまりまたはまったく別の **PSPACE** 困難な計算を, 任意回微分可能な関数の常微分方程式で模倣できる可能性も残っている.

依然として解が多項式時間実関数となる, 解析的であるという条件との間にはギャップが存在し, 例えば g が無限回連続微分可能でかつであるとき, 解はどうなるのか等の疑問が生まれる.

また g の第一引数 t に関して本稿では連続であることのみ要求したが, 微分可能になると解はどうなるか, 更に制限するとどうなるかは不明である.

6 謝辞

参考航献

[1] A. Kawamura. Lipschitz continuous ordinary differential equations are polynomial-space complete. *Computational Complexity*, 19(2):305–332, 2010.

[2] K.I. Ko. *Complexity theory of real functions.* Birkhauser Boston Inc., 1991.

[3] 高木貞治. **解析概論**. 岩波書店, 1968.