Московский физико-технический институт
Физтех-школа прикладной математики и информатики

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

I СЕМЕСТР

Лектор: *Тюленев Александр Иванович*

h\nu

Авторы: *Шарипов Артем*,
Шмакова Екатерина
Проект на Github

осень 2023

Содержание

1 Множество действительных чисел

1.1 Кванторы и множества

Определим следующие символы:

$\wedge$ — логическое «и»	$\vee$ — логическое «или»
$\Rightarrow$ — «следует»	$\leftrightarrow$ — «тогда и только тогда»
$\neg$ — «отрицание»	$\forall$ — «для любого»
$\exists$ — «существует»	$:$ — «такой, что»
$:=$ — «равно по определению»	$\exists!$ — «существует и единственно»
$\hookrightarrow$ — «выполняется»	$\varnothing$ — пустое множество

Множества можно задавать перечислением, если они конечны, $X = \{x_1, x_2, \dots x_n\}$ или как набор условий $X = \{x : P(x)\}$.

Для множеств будем использовать следующие операции:

1. $X \cup Y := \{z\colon z \in X \vee z \in Y\}$ — объединение;
2. $X \cap Y := \{z\colon z \in X \wedge z \in Y\}$ — пересечение;
3. $X \setminus Y := \{z\colon z \in X \wedge z \notin Y\}$ — разность.

Определение 1.1. Множество называется бесконечным если $\forall n \in \mathbb{N}$ X содержит n различных элементов.

Определение 1.2. Пусть X, Y — непустые множества. Тогда $X \times Y = \{(x,y)\colon x \in X, y \in Y\}$ — декартово произведение.

Определение 1.3. Будем говорить, что задано соответствие f из X в Y, если $X \times Y$ выделено подмножество $G_f \subset X \times Y$.

При этом, если $(x,y) \in G_f$, то говорят, что y поставлен в соответствие x.
$D_f := \{x \in X\colon \exists y \in Y \hookrightarrow (x,y) \in G_f\}$ — область определения.
$E_f := \{y \in Y\colon \exists x \in X \hookrightarrow (x,y) \in G_f\}$ — область значений.

Определение 1.4. Если $D_f = X$, то говорят, что задано отображение (многозначное) из X в Y $f\colon X \mapsto Y$.

Определение 1.5. $X, Y \neq \varnothing$. Будем говорить, что $f\colon X \mapsto Y$ — *отображение*, если $D_f = X$ и $\forall x \in X$ $\exists! y \in Y\colon (x,y) \in G_f$. Последнее можно интерпретировать как $y = f(x)$. Если не сказано обратного, то отображение считать однозначным.

Определение 1.6. $X, Y, Z \neq \varnothing$. $f\colon X \mapsto Y$, $y\colon Y \mapsto Z$ — отображения. *Композицией отображений* f и g назовём отображение $h = g \circ f$, если $h(x) = g(f(x)) \quad \forall x \in X$.

Определение 1.7. Отображение $f\colon X \mapsto Y$ — *инъекция*, если $\forall x_1, x_2 \in X \hookrightarrow x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Определение 1.8. Отображение $f\colon X \mapsto Y$ — *сюръекция*, если $E_f = Y$. Каждый элемент множества X вляется образом хотя бы одного элемента множества Y.

Определение 1.9. Отображение $f\colon X \mapsto Y$ называется *обратимым*, если $\exists f^{-1}\colon Y \mapsto X$, такое, что

$$\begin{cases} f \circ f^{-1} = Id_Y \\ f^{-1} \circ f = Id_X \end{cases} \quad \text{при этом } f^{-1} \text{ называется обратной к } f.$$

1.2 Аксиомы действительных чисел

Определение 1.10. *Множеством действительных чисел* называется непустое множество $\mathbb{R}$, в котором введены 2 бинарные операции:

«+»: $\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$

«·»: $\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$

и отношение порядка "$\leqslant$". Удовлетворяют 15 аксиомам:

1. $a + b = b + a$ $\quad \forall a, b \in \mathbb{R}$
2. $a + (b + c) = (a + b) + c$ $\quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$
3. $\exists 0 \in \mathbb{R}\colon a + 0 = 0 + a = 0$ $\quad \forall a \in \mathbb{R}$
4. $\exists (-a)\colon a + (-a) = 0$ $\quad \forall a \in \mathbb{R}$
5. $a \cdot b = b \cdot a$ $\quad \forall a, b \in \mathbb{R}$
6. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ $\quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$
7. $\exists 1 \neq 0\colon a \cdot 1 = a$ $\quad \forall a \in \mathbb{R}$
8. $\exists \frac{1}{a}\colon a \cdot \frac{1}{a} = 1$ $\quad \forall a \neq 0$
9. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ $\quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$
10. $a \leqslant b \vee b \leqslant a$ $\quad \forall a, b \in \mathbb{R}$
11. если $a \leqslant b \Rightarrow a + c \leqslant b + c$ $\quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$
12. если $a \leqslant b \Rightarrow ac \leqslant bc$ $\quad \forall a, b \in \mathbb{R} \wedge \forall c \geqslant 0$
13. если $a \leqslant b \wedge b \leqslant c \Rightarrow a \leqslant c$ $\quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$
14. если $a \leqslant b \wedge b \leqslant a \Rightarrow a = b$ $\quad \forall a, b \in \mathbb{R}$
15. Аксиома непрерывности $\quad \forall A, B \subset \mathbb{R}$

Определение 1.11. *Аксиома непрерывности.*

$\forall A, B \subset \mathbb{R} : A, B \neq \varnothing$ и $\forall a \in A, \forall b \in B \hookrightarrow a \leqslant b$. $\exists c \in \mathbb{R}\colon a \leqslant c \leqslant b$. То есть существует «разделительное число».

Примечание. Аксиома непрерывности не справедлива для рациональных чисел ($\mathbb{Q}$).

Доказательство. Предположим, что $\mathbb{Q}$ удовлетворяет аксиоме непрерывности.

$A := \{x \in \mathbb{Q}\colon x \geqslant 0, x^2 < 2\}$, $B := \{x \in \mathbb{Q}\colon x^2 > 2\}$.

Если аксиома непрерывности верна для $\mathbb{Q}$, то это означает, что $\exists c \in \mathbb{Q}\colon \forall a \in A$, $\forall b \in B \hookrightarrow a \leqslant c \leqslant b$. Возьмём наши множества A, B, тогда $c^2 = 2$, но $!\exists c \in \mathbb{Q}\colon c^2 = 2 \Rightarrow$ противоречие. □

Определение 1.12. $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$. Притом $\forall x \in \overline{\mathbb{R}} \neq \pm\infty \hookrightarrow -\infty < x < +\infty$.

Определение 1.13. $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Определение 1.14. $[a, b] := \{x \in \mathbb{R}\colon a \leqslant x \leqslant b\}$.

Определение 1.15. $[a, b) := \{x \in \mathbb{R}\colon a \leqslant x < b\}$.

Определение 1.16. $(a, b] := \{x \in \mathbb{R}\colon a < x \leqslant b\}$.

Определение 1.17. $(a, b) := \{x \in \mathbb{R}\colon a < x < b\}$.

Определение 1.18. $a = b \Rightarrow (a, b) = \varnothing$.

1.3 Супремумы, инфимумы и грани числовых множеств

Определение 1.19. Множество $A \subset \mathbb{R}$ называется *ограниченным сверху*, если $\exists M \in \mathbb{R}$: $a \leqslant M \quad \forall a \in A$.

Примечание. Множество неограниченно сверху, если $\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists a \in A$: $a(M) > M$. Где $a \equiv a(M)$. Т.е. мы как бы "подбираем" a в зависимости от данного M.

Определение 1.20. Множество $A \subset \mathbb{R}$ называется *ограниченным снизу*, если $\exists m \in \mathbb{R}$: $m \leqslant a \quad \forall a \in A$.

Определение 1.21. Множество $A \subset \mathbb{R}$ называется *ограниченным*, если оно ограниченно и сверху, и снизу.

Определение 1.22. Число $M(m)$ называется *верхней (нижней) гранью* числового непустого множества $A \subset \mathbb{R}$, если $x \leqslant M$ $(x \geqslant m) \quad \forall x \in A$.

Определение 1.23. Пусть A — ограниченное сверху множество. Число $M \in \mathbb{R}$ называется супремумом A и записывается $M = supA$, если выполняется:

1. M является верхней гранью, то есть $\forall x \in A \hookrightarrow x \leqslant M$.
2. $\forall M' < M \quad \exists a(M') \in A$: $M' < a(M') \leqslant M$. То есть никакое другое число не является верхней гранью.

Определение 1.24. Если A — неограниченное сверху множество, то $supA := +\infty$.

Теорема 1.1. *(о существовании и единственности супремума) Супремум существует и единственен.*

$$\forall A \subset \mathbb{R} : A \neq \varnothing \hookrightarrow \exists! \sup A.$$

Доказательство. В случае неограниченного множества A верность теоремы следует из определения. Рассмотрим случай ограниченного множества $A \Rightarrow$ существует хотя бы одна верхняя грань.

Пусть $B := \{M \in \mathbb{R} : M - \text{верняя грань } A\}. \quad B \neq \varnothing$.

Кроме того A расположенно левее B. Тогда в силу аксиомы непрерывности $\exists c \in \mathbb{R}$: $a \leqslant c \leqslant M \quad \forall a \in A, \quad \forall M \in B$.

Покажем, что $c = \sup A$. Действительно, так как $a \leqslant c \ \forall a \in A \Rightarrow c$ — верхняя грань, тогда 1 пункт определния супремума проверен.

Предположим $\exists c' < c$: c' — верхняя грань. Тогда $c' \in B$, но c было выбранно так, что $c \leqslant M \quad \forall M \in B \Rightarrow c \leqslant c'$ — противоречие $\Rightarrow \forall c' < c \hookrightarrow c \notin B \Leftrightarrow \neg(c' \in B) \Leftrightarrow \neg(\forall a \in A \hookrightarrow a \leqslant c') \Leftrightarrow \exists a(c') \in A : a(c') > c'$, но так как $a(c') \in A$, то $a(c') \leqslant c$. И тогда мы показали, что $\forall c' < c \quad \exists a(c') \in A$: $c' < a(c') \leqslant c$. Значит, мы проверили определние супремума с заменой M на $c \Rightarrow$ он существует.

Докажем единственность супремума. Предположим, что $\exists M_1, M_2 \in \mathbb{R}$: $M_1 = \sup A$ и $M_2 = \sup A$.

Пусть $M_1 > M_2$. Тогда по (2) пункту определения супремума (для M_1) $\exists a(M_2) \in A$: $a(M_2) > M_2 \Rightarrow$ это противоречит тому, что M_2 — верхняя грань (то есть (1) пункт определения M_2 как супремума) $\Rightarrow$ такого быть не может.

Случай $M_2 > M_1$ аналогичен $\Rightarrow M_1 = M_2$, то есть супремум существует и единственнен. $\square$

Утверждение 1.1. *$M = \sup A$ ($M \in \overline{\mathbb{R}},\ A \subset \mathbb{R},\ A \neq \varnothing$) тогда и только тогда, когда*

$$\begin{cases} a \leqslant M \quad \forall a \in A \\ \forall M' < M\ \exists a(M') \in A : M' < a(M') \leqslant M \end{cases}$$

Для случая A — ограниченное множество, это просто определние супремума.

Пусть A — неограниченно сверху, тогда $+\infty = \sup A$, но тогда система выше выполняется при замене M на $+\infty$ по отношению порядка $\overline{\mathbb{R}}$.

И наоборот если система выполнена для $M = +\infty$, то тогда A — неограниченно сверху, и тогда $+\infty = \sup A$.

Лемма 1.1. *(Лемма Архимеда) Множество натуральных чисел неограниченно сверху.*

$$\forall M' \in \mathbb{R}\ \exists N(M') \in \mathbb{N} : N(M') > M'.$$

Доказательство. Предположим, что $\mathbb{N}$ — ограниченно сверху $\Rightarrow$ существует верхняя грань и более того существует конечный супремум $M = \sup \mathbb{N} < +\infty$. Тогда в силу второго пункта определения суппрерума: $\forall M' < M$ найдётся натуральное число его больше. Но так как это верно $\forall M'$, то можем взять $M' = M - 1$.
Тогда $\exists N(M') \in \mathbb{N}$: $N(M') > M - 1 \Rightarrow N(M') + 1 > M \Rightarrow M$ — не супремум. Противоречие. $\square$

Определение 1.25. $m \in \mathbb{R}$ называется *инфимумом ограниченного снизу множества A*, если

$$m = \inf A \Longleftrightarrow \begin{cases} a \geqslant m \quad \forall a \in A \\ \forall m' > m,\ \exists a(m') \in A : m' > a(m') \geqslant m \end{cases}$$

Определение 1.26. Если A — неограниченное снизу множество, то $\inf A := -\infty$.

Теорема 1.2. *(о существовании и единственности инфимума) Инфимум существует и единственнен.*

$$\forall A \subset \mathbb{R} : A \neq \varnothing \hookrightarrow \exists!\inf A.$$

Доказательство. Аналогично супремуму с точностью до замены знаков. $\square$

Утверждение 1.2. *$m = \inf A$ ($m \in \overline{\mathbb{R}},\ A \subset \mathbb{R},\ A \neq \varnothing$) тогда и только тогда, когда*

$$\begin{cases} a \geqslant m \quad \forall a \in A \\ \forall m' > m\ \exists a(m') \in A : m' > a(m') \geqslant m \end{cases}$$

Определение 1.27. Число M называется *максимумом (максимальным элементом)* множества $E \subset \mathbb{R} \Leftrightarrow M = maxE$, если

1. $M \in E$;
2. $M \geqslant x\ \forall x \in E$.

Аналогично определяется минимум.

1.4 Вложенные отрезки

Всегда предплогается, что $a_n \leqslant b_n$.

Определение 1.28. Отображение из $\mathbb{N}$ в множество всех отрезков на числовой прямой $\mathbb{R}$ назовём *последовательностью отрезков* и обозначим $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$

Определение 1.29. Будем говорить, что $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность *вложенных отрезков*, если $\{[a_{n+1}, b_{n+1}]\} \subset \{[a_n, b_n]\} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Лемма 1.2. *(Лемма Кантора или принцип вложенных отрезков) Любая последовательность вложенных отрезков имеет непустое пересечение (точка лежит сразу во всех отрезках), то есть*

$$\forall \text{ вложенной } \{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty} \quad \exists x \in \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] \Longleftrightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] \neq \varnothing$$

Доказательство. $\forall n \in \mathbb{N}$ справедливы неравенства:

$$-\infty < a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n < +\infty.$$

Заметим следующий факт (*):

$$\forall n, m \in \mathbb{N} \hookrightarrow -\infty < a_n \leqslant b_m < +\infty$$

Действительно, предположим $m \geqslant n \Rightarrow$ по индукции $b_m \leqslant b_n \Rightarrow a_m \leqslant b_m \leqslant b_n$.
Если же $m < n$, то $a_m \leqslant a_n \leqslant b_n$.
$A := \{a_1, a_2 \ldots, a_n, \ldots\}$ — множество «левых» концов.
$B := \{b_1, b_2 \ldots, b_m, \ldots\}$ — множество «правых» концов.
Из (*) получаем, что A расположенно «левее» $B \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}$: $a_n \leqslant c \leqslant b_m$ $\forall n, m \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow a_n \leqslant c \leqslant b_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow c \in [a_n, b_n]$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow c \in \displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$ □

Примечание. Лемма Кантора о вложенных отрезках может не работать для интервалов.

Пример: $a_n = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = \dfrac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

$(a_n, b_n) = \left(0, \dfrac{1}{n}\right)$. $\quad \displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] = \varnothing$.

Действительно, предположим $\exists x > 0$: $x \in \displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(0, \frac{1}{n}\right) \Rightarrow 0 < x < \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow n < \dfrac{1}{x}$ — противоречие с леммой Архимеда.

Определение 1.30. Последовательность вложенных отрезков $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$ называется *стягивающейся*, если $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists [a_{m(n)}, b_{m(n)}]$: $l < \dfrac{1}{n}$, где $l = (b_i - a_i)$. l — длина.

Теорема 1.3. *Стягивающаяся последовательность вложенных отрезков* $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ *имеет единственную общую точку, то есть*

$$\exists! x \in \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$$

Доказательство. Ранее было доказано, что пересечение не пусто $\left(\exists x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]\right)$.

Тогда предположим, что $\exists x_1, x_2 \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] \quad (x_1 \neq x_2)$.

Так как $x_1 \neq x_2 \Rightarrow |x_1 - x_2| > 0$. Пусть $|x_1 - x_2| = \dfrac{1}{M}$. Но тогда по лемма Архимеда $\exists N \in \mathbb{N}$: $N > M \Rightarrow \dfrac{1}{N} < |x_1 - x_2| \Rightarrow$ в силу того, что система отрезков стягивающаяся, то $\exists [a_{m(N)}, b_{m(N)}]$ длина которого $< \dfrac{1}{N}$, но по предположению x_1, x_2 принадлежат всем отрезкам этой последовательности, в частности $x_1, x_2 \in [a_{m(N)}, b_{m(N)}] \Rightarrow |x_1 - x_2| < \dfrac{1}{N} \Rightarrow$ $|x_1 - x_2| < |x_1 - x_2|$ — противоречие. Получается $x_1 = x_2$. □

Теорема 1.4. *(3 принципа непрерывности числовой прямой) Следующие утверждения эквивалентны:*

1. *Аксиома непрерывности.*
2. *Существование* inf *и* sup *у любого непустого множества.*
3. *Лемма Кантора о непустоте пересечения вложенной системы и лемма Архимеда.*

Примечание. Ранее было доказанно, что $(1) \to (2), (2) \to (3), (1) \to (3)$. Рассмотрим более сложный переход: $(3) \to (1)$.

Теорема 1.5. *Из леммы Кантора и леммы Архимеда следует аксиома непрерывности.*

Доказательство. Зафиксируем такие непустые множества $A, B \subset \mathbb{R}$, что A расположенно левее B. Разобьём доказательство на несколько шагов.

Шаг 1. Поскольку A и B — непустые множества, зафиксируем произвольные $a_0 \in A$ и $b_0 \in B$. Поскольку A расположенно левее B, то $a_0 \leqslant b_0$.

Шаг 2. Если $a_0 = b_0$, то полагаем $c = a_0 = b_0$ и завершаем доказательство. Действительно, если последовательнось A «левее» последовательности B, то из $a \leqslant b\ \forall a \in A, \forall b \in B$ и $a_0 \in A$ следует, что $\forall b \hookrightarrow b \geqslant a_0 = c$. Аналогично, $\forall a \hookrightarrow a \leqslant b_0 = c$.

Шаг 3. Пусть теперь $a_0 < b_0$.

База индукции. Положим $J^0 := [a_0, b_0]$. По построению отрезок J^0 имеет непустое пересечение с множеством A и множеством B.

Шаг индукции. Предположим, что при некотором $n \in \mathbb{N}_0$ мы построили (при $n = 0$ мы это уже проверили) такие отрезки

$$J^0 = [a_0, b_0] \supset \ldots \supset J^n = [a_n, b_n],$$

что справедливо неравенство

$$l(J^j) = |a_j - b_j| \leqslant \frac{|a_0 - b_0|}{2^j} \quad \forall j \in \{0, \ldots, n\}.$$

Кроме того,

$$J^j \cap A \neq \varnothing \ \text{ и } J^j \cap B \neq \varnothing \quad \forall j \in \{0, \ldots, n\}.$$

Поделим отрезок J^n на две равные части. Обозначим соответствующие отрезки символами I_1^{n+1}, I_2^{n+1} в порядке следования (слева направо). Возможны 2 случая.

В первом случае найдётся такой индекс $k^* \in \{1, 2\}$, что

$$I_{k^*}^{n+1} \cap A \neq \varnothing \quad \text{и} \quad I_{k^*}^{n+1} \cap B \neq \varnothing.$$

Тогда положим

$$J^{n+1} := I_{k^*}^{n+1}.$$

Во втором случае I_1^{n+1} имеет непустое пересечение только с A, а I_2^{n+1} имеет непустое пересечение только с B. Тогда положим $c_n := \frac{a_n+b_n}{2}$. Мы утверждаем, что

$$a < c_n < b \quad \forall a \in A, \forall b \in B.$$

Действительно, поскольку $I_1^{n+1} \cap A \neq \varnothing$ и A расположенно левее B, то заведомо $B \subset [a_n, +\infty)$.

С другой стороны, $I_1^{n+1} \cap B \neq \varnothing$, откуда следует, что

$$B \subset [a_n, +\infty) \setminus [c_n, b_n] = \left(\frac{a_n + b_n}{2}, +\infty\right).$$

Аналогично доказывается, что $A \subset (-\infty, \frac{a_n+b_n}{2})$. Таким образом, выполнено условие $a < c_n < b$. В частности, число c_n разделяет множества A и B.

Шаг 4. В итоге, возможны два случая. В первом случае (назовём его *C1*), существует число $n_0 \in \mathbb{N}$, для которого левая половина отрезка $[a_{n_0}, b_{n_0}]$ имеет непустое пересечение только с A, а правая половина имеет непустое пересечение только с B.

Во втором случае (назовём его *C2*), мы получим бесконечную последовательность отрезков $\{J^n\}_{n=0}^{\infty}$, для которой выполнены следующие свойства:

(P1)
$$J^{n+1} \subset J^n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0;$$

(P2)
$$J^n \cap A \neq \varnothing \ \text{ и } \ J^n \cap B \neq \varnothing \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

(P3)
$$l(J^n) = \frac{|a_0 - b_0|}{2^n} \leqslant \frac{|a_0 - b_0|}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Шаг 5. В случае (*C1*) мы полагаем $c := \frac{a_{n_0}+b_{n_0}}{2}$ и завершаем построение, поскольку c разделяет A и B.

Шаг 6. В случае (*C2*) заметим, что в силу (P1) и (P3) последовательность $\{J^n\}_{n=0}^{\infty}$ является стягивающейся последовательностью вложенных отрезков. Имея в виду теорему о существовании и единственности общей точки для стягивающейся последовательности вложенных отрезков, положим

$$c := \bigcap_{n=0}^{\infty} J^n. \tag{2}$$

Покажем, что в этом случае c разделяет A и B. Рассуждая методом от противного, предположим, что найдётся $a^* \in A$ такое, что $a^* > c$. В силу леммы Архимеда и (1) получим, что найдётся $n^* \in \mathbb{N}$ такое, что

$$l(J^{n^*}) < |c - a^*| \tag{3}$$

Но тогда, имеем

$$x < a^* \ \forall x \in J^{n^*}. \qquad (4)$$

Действительно, в противном случае мы имели бы $|c - x| \geqslant |c - a^*|$ для некоторой точки $x \in J^{n^*}$, что в комбинации с (2) приводит к неравенству $l(J^{n^*}) \geqslant |c - a^*|$, которое противоречит (3).

В силу (P2) отрезок J^{n^*} имеет непустое пересечение с B, а значит существует $b^* \in J^{n^*} \cap B$. Учитывая (4) получаем, что

$$\exists b^* \in B : \quad b^* < a^* \in A.$$

Это противоречит тому, что множество A расположено левее множесва B. Наше противоречие возникло от предположения, что существует точка $a^* \in A$, удовлетворяющая неравенству $a^* > c$. Значит наше предположение было неверно. Поэтому

$$a \leqslant c \quad \forall a \in A.$$

Аналогично доказывается, что

$$c \leqslant b \quad \forall b \in B.$$

Комбинируя последние два вывода, получаем аксиому непрерывности. □

1.5 Счётные и несчётные множества

Определение 1.31. Отображение f: $X \mapsto Y$ называется *биекцией* X на Y, если оно и инъекция, и сюръекция $\Leftrightarrow$ оно обратимо.

Определение 1.32. Множество X называется *конечным*, если $\exists N \in \mathbb{N}$ и биекция X на $\{1, \dots, N\}$. В противном случае множество называется *бесконечным.*

Определение 1.33. Будем говорить, что *множества X и Y равномощны*, если существует биекция X на Y.

Определение 1.34. Будем говорить, что *мощность множества Y не меньше мощности множества X*, если существует множество $Y' \subset Y$ такое, что X и Y' равномощны.

Определение 1.35. Множество X называется *счётным*, если X равномощно $\mathbb{N}$.

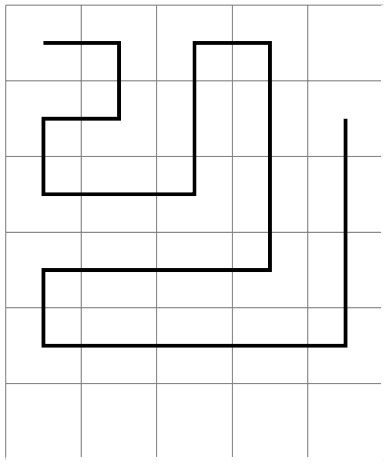
Определение 1.36. Множество X называется *несчётным*, если X бесконечно и неравномощно $\mathbb{N}$.

Теорема 1.6. $\mathbb{Q}$ — *счётно.*

Доказательство. Построим бесконечную таблицу. Где по горизонтали отложим целые числа, по вектикали — натуральные, а в клетках — их частное.

$\mathbb{N}\backslash\mathbb{Z}$	**0**	**1**	**-1**	**2**	**-2**	**3**	**-3**	**. . .**
1	0/1	1/1	-1/1	2/1	-2/1	3/1	-3/1	...
2	0/2	1/2	-1/2	2/2	-2/2	3/2	-3/2	...
3	0/3	1/3	-1/3	2/3	-2/3	3/3	-3/3	...
4	0/4	1/4	-1/4	2/4	-2/4	3/4	-3/4	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

Будем двигаться по «змейке» из левого верхнего угла $(0/1)$, нумеруя все попадающиеся рациональные числа, пропуская при этом те, которые встречались ранее.



Таким способом мы занумеруем все рациональные числа, засчёт чего получим инъекцию $\mathbb{N} \mapsto \mathbb{Q}$.

Так как для любого рационального числа найдётся «квадрат», в которое это число попадает, то «змейка» через него пройдёт $\Rightarrow$ получаем сюръекцию.

Итого это инъекция и сюръекция, получаем биекцию $\Rightarrow \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{Q}$ ($\mathbb{N}$ равномощно $\mathbb{Q}$.) $\square$

Теорема 1.7. $\mathbb{R}$ — *несчётно.*

Доказательство. $\mathbb{R}$ — бесконечно, поскольку содержит $\mathbb{N}$. Покажем, что $\mathbb{R} \not\leftrightarrow \mathbb{N}$.

Предположим противное, то есть существует биекция $\mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{R}$. То есть все точки оказались пронумерованы натуральными числами. Тогда рассмотрим точку x_1 и отрезок J^1, не содержащий её. Внутри J^1 найдём отрезок J^2, не содержащий x_2, и заметим, что он не содержит и x_1. Продолжая по индукции, построим последовательность $J^1 \supset J^2 \supset \ldots \supset J^k \supset \ldots$ со следующим свойством:

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad x_k \notin J^k$$

Следовательно $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \cap J^k = \varnothing \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

По лемме Кантора существует точка c — пересечение последовательности вложенных отрезков ($c \in J^k\ \forall k \in \mathbb{N}$) $\Rightarrow c \neq x_k\ \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow$ мы нашли точку c, которой не присвоен никакой номер $\Rightarrow$ противоречие с тем, что все числа занумерованы. $\square$

2 Предел числовой последовательности

2.1 Определение предела последовательности

Определение 2.1. *Последовательностью* будет называть отображение $x\colon \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$.

Примечание. При этом $x(n) \equiv x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Элементом последовательности называется пара (n, x_n). При этом числа x_n называются значениями элементов последовательности.

Вся последовательность обозначается $\{x_n\} \equiv \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$

Определение 2.2. $\hat{\mathbb{R}} := \overline{\mathbb{R}} \cup \{\infty\} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\} \cup \{\infty\}$ — *расширенная числовая прямая.*

Примечание. Притом $\infty \neq \{-\infty\}$, $\infty \neq \{+\infty\}$.

Определение 2.3. (*Эпсилон окрестность из* $\hat{\mathbb{R}}$) пусть $\varepsilon > 0$, тогда

$$\text{если } a \in \mathbb{R}, \text{то } U_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$$

$$\text{если } a = +\infty, \text{то } U_\varepsilon(a) = \left(\frac{1}{\varepsilon},\ +\infty\right)$$

$$\text{если } a = -\infty, \text{то } U_\varepsilon(a) = \left(-\infty,\ \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

$$\text{если } a = \infty, \text{то } U_\varepsilon(a) = U_\varepsilon(-\infty) \cup U_\varepsilon(+\infty)$$

Определение 2.4. Пусть $\{x_n\}$ — числовая последовательность. Будем говорить, что элемент $a \in \hat{\mathbb{R}}$ является *пределом последовательности* $\{x_n\}$ и писать $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow$ $x_n \to a, n \to \infty$, если выполнено следующее:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} :\ \forall n \geqslant N(\varepsilon) \hookrightarrow x_n \in U_\varepsilon(a)$$

Примечание. То есть начиная с какого-то номера $N(\varepsilon)$ все элементы последовательности с большим номером ($n \geqslant N(\varepsilon)$) попадут в заданный интервал ($U_\varepsilon(a)$). Необязательно искать именно минимальный номер N.

Пример. Рассмотрим последовательность $\{x_n\} = \{\frac{1}{n}\}$.

Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 : \forall n \geqslant N(\varepsilon) \hookrightarrow \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{N(\varepsilon)} \leqslant \frac{1}{[\frac{1}{\varepsilon}] + 1} \leqslant \frac{1}{\varepsilon} = \varepsilon.$$

Утверждение 2.1. *Пусть* $a \in \hat{\mathbb{R}}, c \geqslant 1,\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. *Следующие условия эквивалентны:*

1. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$: $\forall n \geqslant N(\varepsilon) \hookrightarrow |x_n| \in U_\varepsilon(a)$;

2. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \tilde{N}(\varepsilon) \in \mathbb{N}$: $\forall n \geqslant \tilde{N}(\varepsilon) \hookrightarrow |x_n| \in U_{c\varepsilon}(a)$.

Доказательство. Так как $c \geqslant 1$, то $U_\varepsilon \subset U_{c\varepsilon}$, откуда получаем импликацию $(1) \to (2)$ (при $\tilde{N}(\varepsilon) = N(\varepsilon)$).

Теперь докажем $(2) \to (1)$. Так как для любого ε, то возьмём ε/c, то $\forall \varepsilon > 0\ N(\varepsilon) := \tilde{N}(\varepsilon/c)$: $\forall n \geqslant \tilde{N}(\varepsilon/c) \hookrightarrow x_n \in U_{c\varepsilon/}(a) = U_\varepsilon(a)$. $\square$

Определение 2.5. Последовательность $\{x_n\}$ называется *сходящейся*, если она имеет конечный предел. В противном случае она называется *расходящейся*.

Определение 2.6. Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной*, если множество значений её элементов ограничено. То есть

$$\exists M \in [0; +\infty) : \ \forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow |x_n| \leqslant M.$$

Определение 2.7. Последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно большой*, если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Примечание. Притом

$$\left[\begin{aligned} &\exists \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \\ &\exists \lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \end{aligned}\right. \quad \Rightarrow \{x_n\} - \textit{бесконечно большая.}$$

Обратное неверно. Контрпример: $\{x_n\} = \{(-1)^n \cdot n\}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Она бесконечно большая, но при этом $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq -\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq +\infty$.

Задача. *Как связаны условия:*

1. *Последовательность $\{x_n\}$ — неограничена;*

2. *Последовательность $\{x_n\}$ — бесконечно большая?*

Решение. (2) $\to$ (1). Но (1) $\nrightarrow$ (2). Контрпример: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{(1 + (-1)^n) \cdot n\}_{n=1}^{\infty}$ — неограничена, но и не бесконечно большая.

Лемма 2.1. *(Лемма о непересекающихся окрестностях)*

$$\forall a, b \in \overline{\mathbb{R}}, \ a \neq b \ \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \varnothing.$$

Доказательство. Возможны 4 случая:

1. $a, b \in \mathbb{R}$, $-\infty < a < b < +\infty$. Тогда возьмём $\varepsilon = \dfrac{b-a}{2}$.

$$U_\varepsilon(a) = \left(a - \frac{b-a}{2}, \ a + \frac{b-a}{2}\right) \cap U_\varepsilon(b) = \left(a + \frac{b-a}{2}, \ b + \frac{b-a}{2}\right) = \varnothing.$$

2. $-\infty < a < b = +\infty$. Рассмотрим $\varepsilon = \dfrac{1}{|a|+1}$ и заметим, что тогда $\varepsilon \leqslant 1$.

$$U_\varepsilon(b) = (|a| + 1, \ +\infty) \cap U_\varepsilon(a) = \left(a - \frac{1}{|a|+1}, \ a + \frac{1}{|a|+1}\right) = \varnothing,$$

так как $U_\varepsilon(a) \subset (a-1, \ a+1)$, который не пересекается с $U_\varepsilon(b)$.

3. $-\infty = a < b < +\infty$. Тогда действуем по аналогии с пунктом выше и рассматриваем $\varepsilon = \dfrac{1}{|b|+1}$.

4. $-\infty = a < b = +\infty$. Рассмотрим $\varepsilon = 1$.

$$U_\varepsilon(a) = (-\infty,\ -1) \cap U_\varepsilon(b) = (1,\ +\infty) = \varnothing.$$

□

Теорема 2.1. *Если у последовательности $\{x_n\}$ существует предел в $\overline{\mathbb{R}}$, то он единственен в $\overline{\mathbb{R}}$.*

Доказательство. Предположим, что $\exists a, b \in \overline{\mathbb{R}} \hookrightarrow a \neq b$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$.

Тогда по лемме о непересекающихся окрестностях $\exists \varepsilon^* > 0$: $U_{\varepsilon^*}(a) \cap U_{\varepsilon^*}(b) = \varnothing$.

Запишем определение предела:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \ \Leftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}:\ \forall n \geqslant N_1(\varepsilon) \hookrightarrow |x_n| \in U_\varepsilon(a)$$
$$\lim_{n\to\infty} x_n = b \ \Leftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}:\ \forall n \geqslant N_2(\varepsilon) \hookrightarrow |x_n| \in U_\varepsilon(b)$$

Подставим $\varepsilon = \varepsilon^*$.

Следовательно, если мы возьмём $n > max\{N_1(\varepsilon^*), N_2(\varepsilon^*)\}$, то $x_n \in (U_{\varepsilon^*}(a) \cap U_{\varepsilon^*}(b)) = \varnothing$. Противоречие. Следовательно $a = b$. □

Примечание. В $\hat{\mathbb{R}}$ предел может быть не единственен. (Так как если $+\infty$ — предел, то и ∞ — предел).

Если $\{x_n = n\}_{n=1}^{\infty}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Теорема 2.2. *Если последовательность $\{x_n\}$ сходится, то она ограничена. Обратное неверно.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится, значит у неё есть предел, назовём его a, и этот предел — число. Но тогда по определению

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N(\varepsilon) \hookrightarrow x_n \in U_\varepsilon(a).$$

Тогда в частности $\exists N = N(1)$: $\forall n \geqslant N(1) \hookrightarrow |x_n| \leqslant |a| + 1$.

Поскольку вне хвоста конечное число элементов, то возьмём $M := max\{|x_1|, |x_2, \ldots, |x_{N(1)}|, |a| + 1\}$. Отсюда следует, $|x_n| \leqslant M\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Контрпример: $\{x_n\} = \{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ — ограничена, но не является сходящейся. Более того эта последовательность не имеет предела в $\hat{\mathbb{R}}$. □

2.2 Свойства пределов сходящихся последовательностей, связанные с арифметическими операциями

Определение 2.8. Последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно малой*, если её предел равен 0.

Лемма 2.2. *Произведение ограниченной и бесконечно малой последовательностей есть бесконечно малая последовательность. То есть, если $\{x_n\}$ — ограниченная последовательность, а $\{y_n\}$ бесконечно малая, то $\{z_n\} := \{x_n \cdot y_n\}_{n=1}^{\infty}$ — бесконечно малая последовательность.*

Доказательство.

$$\{x_n\} \text{ — ограниченная последовательность} \Leftrightarrow \exists M \geqslant 0 : \forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow |x_n| \leqslant M.$$

$\{y_n\}$ — бесконечно малая последовательность $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} :\ \forall n \geqslant N(\varepsilon) \hookrightarrow |y_n - 0| < \varepsilon$.

Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$: $\forall n \geqslant N(\varepsilon) \hookrightarrow |x_n \cdot y_n| < M \cdot \varepsilon$, а тогда по утверждению 2.1 $\forall \varepsilon > 0\ \exists \tilde{N}(\varepsilon) = N(\varepsilon),\ M < 1$ или $\tilde{N}(\varepsilon) = N(\varepsilon/M),\ M \geqslant 1$. Итого $\forall n \geqslant \tilde{N}(\varepsilon) \hookrightarrow |x_n \cdot y_n| < \varepsilon$. □

Лемма 2.3. *Сумма, разность и произведение бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность, то есть, если*

$$\begin{cases} \{x_n\} \text{ — бесконечно малая} \\ \{y_n\} \text{ — бесконечно малая} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \{x_n \pm y_n\} \text{ — бесконечно малая} \\ \{x_n \cdot y_n\} \text{ — бесконечно малая} \end{cases}$$

Доказательство. Докажем для суммы и разности. Тогда с учётом утверждения 2.1:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} :\ \forall n \geqslant N_1(\varepsilon) \hookrightarrow |x_n| \in U_{\varepsilon/2}(0)$$
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} :\ \forall n \geqslant N_2(\varepsilon) \hookrightarrow |y_n| \in U_{\varepsilon/2}(0)$$

Возьмём $N(\varepsilon) := max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$. Получим

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} :\ \forall n \geqslant N(\varepsilon) \hookrightarrow x_n \pm y_n \in U_\varepsilon(0).$$

Тот факт, что $\{x_n \cdot y_n\}$ — бесконечно малая следует из того, что $\{x_n\}$ ограничена (а это следует из того, что она сходящаяся, так как она бесконечно малая) и $\{y_n\}$ — бесконечно малая, а по лемме 2.2 их произведение будет бесконечно малой последовательностью. □

Лемма 2.4.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \text{последовательность } \{a - x_n\} \text{ — бесконечно малая.}$$

Лемма 2.5. *Пусть $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, при этом $a, b \in \mathbb{R}$. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$$

Доказательство. Для суммы и разности нужно лишь заметить, что последовательность $\{(a_n \pm b_n) - (a \pm b)\}_{n=1}^{\infty}$ — бесконечно малая (можно убедиться, раскрыв скобки и воспользовавшись леммой 2.4).

Покажем для произведения. Для этого достаточно доказать, что $\{(a_n b_n) - (ab)\}_{n=1}^{\infty}$ — бесконечно малая последовательность.

Заметим, что $a_nb_n - ab = a_nb_n - a_nb + a_nb - ab = a_n \cdot (b_n - b) + b \cdot (a_n - a)$.

Рассмотрим последовательность $\{a_n \cdot (b_n - b)\}_{n=1}^{\infty}$. Она бесконечно малая, как произведение ограниченной на бесконечно малую (так как $\{a_n\}$ — это бесконечно малая последовательность, то она является сходящейся, как следствие и ограниченной), а $\{b_n - b\}$ — бесконечно малая).

Теперь рассмотрим последовательность $\{b \cdot (a_n - a)\}_{n=1}^{\infty}$ и стационарную последовательность, которая равна b при всех $n \in N$, тогда снова получаем произведение ограниченной последовательности на бесконечно малую ($\{b\}$ — ограничена, $\{a_n - a\}$ — бесконечно малая), что есть бесконечно малая последовательность.

Итого получаем разность двух бесконечно малых последовательностей, которая есть бесконечно малая последовательность, что мы и хотели. Правило для произведения теперь доказано. $\square$

Лемма 2.6. *Пусть* $x_n \neq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ *и* $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$*:* $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$. *Тогда* $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{x_n} = \dfrac{1}{x}$.

Доказательство. Покажем, что последовательность $\{\frac{1}{x_n}\}$ — ограничена.

Действительно, по определению предела получаем

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N \hookrightarrow x_n \in U_\varepsilon(x).$$

Возьмём $\varepsilon = \frac{|x|}{2}$, то $\exists N^* \in \mathbb{N}$: $\forall n \geqslant N^* \hookrightarrow x_n \in U_{\frac{|x|}{2}}(x) \Leftrightarrow x - \frac{|x|}{2} < x_n < x + \frac{|x|}{2}$.

$$\forall n \geqslant N^* \hookrightarrow |x_n| \geqslant \frac{|x|}{2} \Rightarrow \forall n \geqslant N^* \hookrightarrow \frac{1}{|x_n|} \leqslant \frac{2}{|x|}.$$

Возьмём $M := max\{\frac{1}{|x_1|}, \frac{1}{|x_2|}, \ldots, \frac{1}{|x_{N^*}|}, \frac{2}{|x|}\} \Rightarrow \frac{1}{|x_n|} \leqslant M\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ последовательность $\{\frac{1}{x_n}\}$ — ограничена.

Рассмотрим $\dfrac{1}{x_n} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x - x_n}{x \cdot x_n} = \dfrac{1}{x \cdot x_n} \cdot (x - x_n)$ и заметим, что $\{x - x_n\}$ — бесконечно малая последовательность, а $\dfrac{1}{x \cdot x_n}$ — ограничена, так как $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ — ограничена.

Итого получаем $\dfrac{1}{x_n} - \dfrac{1}{x}$ — бесконечно малая $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{x_n} = \dfrac{1}{x}$. $\square$

Следствие. Пусть $\exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, $y \in \mathbb{R}$; $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ и $x_n \neq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Тогда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{y_n}{x_n} = \dfrac{y}{x}$.

Доказательство. Достаточно воспользоваться предыдущей леммой и леммой о пределе произведения последовательностей и рассмотреть $\dfrac{y_n}{x_n}$, как $y_n \cdot \dfrac{1}{x_n}$. $\square$

2.3 Предельный переход в неравенствах

Лемма 2.7. *Пусть есть два элемента $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$ и две числовые последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ такие, что:*

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n = A, \quad \exists \lim_{n\to\infty} y_n = B, \quad A < B.$$

Тогда $\exists N \in \mathbb{N}$: $\forall n \geqslant N \hookrightarrow x_n < y_n$.

Доказательство. По лемме о непересекающихся окрестностях

$$\exists \varepsilon^* > 0 : U_{\varepsilon^*}(A) \cap U_{\varepsilon^*}(B) = \varnothing.$$

А так как $A < B$, то $\forall x \in U_{\varepsilon^*}(A)$ и $\forall y \in U_{\varepsilon^*}(B) \hookrightarrow x < y$.
Запишем определение предела:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N_1(\varepsilon) \hookrightarrow x_n \in U_\varepsilon(A);$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N_2(\varepsilon) \hookrightarrow y_n \in U_\varepsilon(B).$$

Возьмём $N := max\{N_1(\varepsilon^*), N_2(\varepsilon^*)\} \Rightarrow \forall n \geqslant N \hookrightarrow x_n \in U_{\varepsilon^*}(A)$ и $y_n \in U_{\varepsilon^*}(B) \Rightarrow x_n < y_n$, что нам и надо было. □

Теорема 2.3. *(Теорема о предельном переходе в неравенстве) Пусть $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = A,\ A \in \overline{\mathbb{R}}$ и $\exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n = B,\ B \in \overline{\mathbb{R}}$. Пусть $\exists N \in \mathbb{N}$: $x_n \leqslant y_n\ \forall n \geqslant N$. Тогда $A \leqslant B$.*

Доказательство. Предположим $A > B$. Тогда по только что доказанной выше лемме $\exists N^*$: $\forall n \geqslant N^* \hookrightarrow x_n > y_n$.
Положим $\tilde{N} := max\{N, N^*\}$. Тогда $\forall n \geqslant \tilde{N} \hookrightarrow x_n \leqslant y_n$ (по условию) и $x_n > y_n$ (по предположению), а такого быть не может, то есть предположение было неверно. □

Задача. *Пусть $\exists N \in \mathbb{N}$: $x_n < y_n\ \forall n \geqslant N$. При этом $x_n \to A$, $n \to \infty$ и $y_n \to B$, $n \to \infty$. Верно ли, что $A < B$?*

Решение. Нет. Контрпример: $x_n = -\dfrac{1}{n}$, $y_n = \dfrac{1}{n}$.
$x_n \to 0$, $n \to \infty$ и $y_n \to 0$, $n \to \infty$, но $y_n > x_n\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Примечание. Предельный переход может портить строгие неравенства и превращать их в нестрогие.

Следствие. Если $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow x_n \geqslant a$, $a \in \mathbb{R}$ и $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = A,\ A \in \overline{\mathbb{R}}$, то $A \geqslant a$.

Доказательство. Положим $y := a\ \forall n \in \mathbb{N}$ и применим предыдущее утверждение. □

Теорема 2.4. *(Теорема о трёх последовательностях или о двух миллиционерах) Пусть $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ — числовые последовательности. Пусть $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c,\ c \in \mathbb{R}$. Пусть $\exists N \in \mathbb{N}$: $\forall n \geqslant N \hookrightarrow a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$. Тогда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$.*

Доказательство. Распишем определение предела:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = c \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N_1(\varepsilon) \hookrightarrow a_n \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon);$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = c \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N_2(\varepsilon) \hookrightarrow b_n \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon);$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \tilde{N}(\varepsilon) := max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon), N\} \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant \tilde{N}(\varepsilon) \hookrightarrow \begin{cases} a_n \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon); \\ b_n \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon); \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_n \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon) \Leftrightarrow \exists \lim_{n\to\infty} c_n = c.$$

□

Теорема 2.5. *Пусть* $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ *и* $\exists N \in \mathbb{N}$*:* $\forall n \geqslant N \hookrightarrow y_n \geqslant x_n$*. Тогда* $\exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$*. Аналогично для* $-\infty$*.*

Доказательство. Вновь распишем определение предела:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N(\varepsilon) \hookrightarrow x_n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Но тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists \tilde{N} := max\{N(\varepsilon), N\} : \forall n \geqslant \tilde{N}(\varepsilon) \hookrightarrow y_n \geqslant x_n > \dfrac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty.$

□

2.4 Пределы монотонных последовательностей

Определение 2.9. Последовательность $\{x_n\}$ называется *нестрого возрастающей (нестрого убывающей)*, если $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow x_{n+1} \geqslant x_n$ ($x_{n+1} \leqslant x_n$). Соответственно, если поставить строгое неравенство, то получим определения *строго возрастающей (строго убывающей)* последовательности.

Определение 2.10. Последовательность $\{x_n\}$ называется *монотонной*, если она нестрого возрастает или нестрого убывает. Соответственно она называется *строго монотонной*, если она строго возрастает или строго убывает.

Теорема 2.6. *(Теорема Вейерштрасса) Любая монотонная последовательность* $\{x_n\}$ *имеет предел в* $\overline{\mathbb{R}}$*. При этом если* $\{x_n\}$ *нестрого возрастает, то* $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n\}$*. Соответственно, если* $\{x_n\}$ *нестрого убывает, то* $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n\}$*.*

Доказательство. Докажем для нестрого возрастающей последовательности. Для нестрого убывающей аналогично.

Сначала рассмотрим случай ограниченной сверху последовательности. По теореме о существовании супремума $\exists M = \sup\{x_n\}$. Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = M$. В силу второго пункта определения супремума $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$: $x_N > M - \varepsilon$. Отсюда в силу возрастания последовательности $\{x_n\}$ имеем $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$: $\forall n \geqslant N \hookrightarrow x_n \geqslant x_N > M - \varepsilon$. В силу первого пункта определения супремума $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow x_n \leqslant M$. Поэтому $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$: $\forall n \geqslant N \hookrightarrow x_n \in U_\varepsilon(M)$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = M$.

Теперь рассмотрим теперь случай, когда последовательность $\{x_n\}$ неограничена сверху. Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists N$: $x_N > \frac{1}{\varepsilon}$. Отсюда в силу возрастания последовательности $\{x_n\}$ имеем $\forall \varepsilon > 0\ \exists N$: $\forall n \geqslant N \hookrightarrow x_n \geqslant x_N > \frac{1}{\varepsilon}$, то есть $x_n \in U_\varepsilon(+\infty)$, а значит $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. □

Примечание. Здесь мы переписали второй пункт определения супремума в виде $\forall \varepsilon > 0\ \exists a(\varepsilon)$: $a \in (U_\varepsilon(M) \cap A)$, что равносильно «оригинальному» определению.

2.5 Подпоследовательности и частичные пределы

Определение 2.11. Пусть дана числовая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Последовательность $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется *подпоследовательностью* последовательности $\{x_n\}$, если существует строго возрастающая последовательность чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$: $y_k = x_{n_k}$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

Определение 2.12. Будем говорить, что элемент $A \in \overline{\mathbb{R}}$ — *частичный предел последовательности* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, если $\exists \{x_{n_k}\}$ — подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$: $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = A$.

Пример. $\{x_n\} = \{(-1)^n\}$. Её частичными пределами являются $\{-1\}$, $\{1\}$.

Теорема 2.7. *(Критерий частичного предела) Пусть $\{x_n\}$ — числовая последовательность. Пусть $A \in \overline{\mathbb{R}}$. Следующие условия эквивалентны:*

1. *A является частичным пределом последовательности $\{x_n\}$;*
2. *$\forall \varepsilon > 0$ в $U_\varepsilon(A)$ содержатся значения бесконечного количества элементов последовательности $\{x_n\}$;*
3. *$\forall \varepsilon > 0$ $\forall N \in \mathbb{N}$ $\exists n(\varepsilon, N) \geqslant N$: $x_n \in U_\varepsilon(A)$.*

Доказательство. Доказывать будем в следующем порядке: (1) $\to$ (2), (2) $\to$ (3), (3) $\to$ (1).

Шаг 1. Пусть A — частичный предел $\Rightarrow$ существует строго возрастающая последовательность $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$: $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = A$.

Это равносильно тому, что $\forall \varepsilon > 0$ $\exists K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$: $\forall k \geqslant K(\varepsilon) \hookrightarrow x_{n_k} \in U_\varepsilon(A)$. Но так как $\forall \varepsilon > 0$ в силу леммы Архимеда существует бесконечно много чисел $k \in \mathbb{N}$ удовлетворяющих неравенству $k \geqslant K(\varepsilon)$, то, получается, в $U_\varepsilon(A)$ содержатся значения бесконечного количества элементов последовательности $\{x_n\}$.

Шаг 2. Пусть выполнено (2). Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$, следовательно в $U_\varepsilon(A)$ содержатся значения бесконечного количества элементов последовательности $\{x_n\}$.

Пусть $I(\varepsilon)$ — это такие натуральные индексы, что $\{x_n \in U_\varepsilon(A)\ \forall n \in I(\varepsilon)\}$. А так как $I(\varepsilon)$ бесконечно по условию (2), то $\forall N \in \mathbb{N}$ $\exists n \in I(\varepsilon)$: $n \geqslant N$. Можно доказать, предположив противное и получив противоречие с тем, что $I(\varepsilon)$ бесконечно.

А так как $\varepsilon > 0$ было выбрано произвольно, получаем, что $\forall \varepsilon > 0$ $\forall N \in \mathbb{N}$ $\exists n \geqslant N$: $x_n \in U_\varepsilon(A)$.

Шаг 3. Пусть выполнено (3). Покажем, что выполнено (1). Построим подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ такую, что $\exists \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = A$. Строить будем индуктивно.

Определим $n_1 = n(1, 1)$. При $\varepsilon = \frac{1}{2}$ $N = 1 + n_1$ $\exists n \geqslant 1 + n_1$: $x_n \in U_{1/2}(A)$. Если построены $n_1 (= 1) \leqslant \ldots \leqslant n_k$: $x_{n_i} \in U_{1/i}(A)$, то выберем $n_{k+1}\left(\frac{1}{k+1}, n_k + 1\right) \Rightarrow x_{n_{k+1}} \in U_{\frac{1}{k+1}}(A)$.

В итоге $\forall k \in \mathbb{N}$ $\exists n_k = n\left(\frac{1}{k}, n_{k-1} + 1\right)$: $x_{n_k} \in U_{1/k}(A) \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}$ $\exists n_k \in \mathbb{N}$: $\forall j \geqslant k \hookrightarrow x_{n_j} \in U_{1/k}(A)$.

Получаем, что $\forall \varepsilon > 0$ $\exists K(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$: $\forall k \geqslant K(\varepsilon) \hookrightarrow x_{n_k} \in U_\varepsilon(A)$. $\square$

Теорема 2.8. *(Теорема Больцано-Вейерштрасса) Пусть $\{x_n\}$ — ограниченная числовая последовательность. Тогда она имеет хотя бы один конечный частичный предел.*

Примечание. Иначе можно сформулировать как: из любой ограниченной числовой последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство. Поскольку $\{x_n\}$ — ограниченная числовая последовательность, то найдётся такое $M \geqslant 0$, что
$$|x_n| \leqslant M \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Считаем далее, что $M \neq 0$, так как в данном случае доказательно тривиально (получается стационарная последовательность, предел которой равен 0).

Разделим отрезок $I^1 := [-M, M]$ пополам и через I^2 обозначим ту половину, в которой находятся значения бесконечного количества элементов последовательности. Такая обязательно найдётся, потому что в противном случае в обеих половинах содержались бы значения лишь конечного числа элементов последовательности $\{x_n\}$, но тогда и на всём отрезке I^1 содержались бы значения лишь конечного числа элементов, а такого быть не может, так как $\{x_n\} \subset I^1$.

Небольшое замечание: если в обеих половинах оказалось бесконечное число элементов последовательности, то берём любую.

Далее рассуждаем по индукции. Базу мы уже сделали, теперь сделаем шаг. Предположим при некотором $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$ мы методом половинного деления построили последовательность отрезков $I^1 \supset I^2 \supset \ldots \supset I^k$: $\forall j \in \{1, \ldots, k\}$ отрезок I^j содержит значения бесконечного количества элементов последовательности $\{x_n\}$.

Теперь разделим I^{k+1} на два конгруэнтных отрезка и выберем ту половинку, в которой содержатся значения бесконечного значения элементов последовательности $\{x_n\}$. Такая найдётся, потому что в противном случае получится, что и весь отрезок I^k содержит лишь конечное число элементов последовательности, что не так по построению.

Получаем бесконечную последовательность вложенных отрезков $I^1 \supset \ldots \supset I^k \supset \ldots$, которая является стягивающейся, поскольку
$$l(I^k) = \frac{l(I^1)}{2^{k-1}}, \quad 2^k > k \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, $\exists x^* = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} I^k$. Покажем, что x^* — частичный предел. В силу критерия частичного предела достаточно доказать, что $\forall \varepsilon > 0$ в $U_\varepsilon(x^*)$ содержатся значения бесконечного количества элементов последовательности $\{x_n\}$.

Действительно, из определения предела и того, что $x^* \in I^k \ \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists k(\varepsilon)$: $x^* \in I^{k(\varepsilon)} \subset U_\varepsilon(x^*)$. Следовательно, по построению получаем, что $I^{k(\varepsilon)}$ содержатся бесконечно много значений элементов последовательности, а значит и в $U_\varepsilon(x^*)$. Получаем, что хотя бы один частичный предел существует. □

Лемма 2.8. *Если последовательность $\{x_n\}$ — неограничена сверху, то $+\infty$ является её частичным пределом. Если $\{x_n\}$ неограничена снизу, то $-\infty$ является её частичным пределом.*

Доказательство. Докажем для случая неограниченности сверху, так как случай неограниченности снизу рассматривается аналогично.

Заметим, что если $\{x_n\}$ неограничена сверху, то $\forall N \in \mathbb{N}$ отбросим первые N элементов и снова получим последовательность, неограниченную сверху. Рассмотрим последовательность $\{y_n\} = \{x_{n+N}\} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ n \in \mathbb{N}$: $y_n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \forall N \in \mathbb{N} \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists k > N$: $x_k > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow$

по критерию частичного предела $+\infty$ является частичным пределом последовательности $\{x_n\}$. $\square$

Определение 2.13. $PL(\{x_n\}) := \{L \in \mathbb{R}\colon L$ — частичный предел $\{x_n\}\}$ — *множество всех частичных пределов.*

Теорема 2.9. *(Обобщённая теорема Больцано-Вейерштрасса) Любая числовая последовательность имеет хотя бы один частичный предел в $\overline{\mathbb{R}}$.*

Доказательство. Доказательство состоит в применении критерия частичного предела и леммы 2.8. $\square$

Определение 2.14. Пусть $A \subset \overline{\mathbb{R}}$. $M \in \overline{\mathbb{R}}$ — супремум A.

$$M = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} a \leqslant M, \ \forall a \in A; \\ \forall M' < M \ \exists a \in A : M' < a. \end{cases}$$

Определение 2.15. Пусть $A \subset \overline{\mathbb{R}}$. $m \in \overline{\mathbb{R}}$ — инфимум A.

$$m = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} a \geqslant m, \ \forall a \in A; \\ \forall m' > m \ \exists a \in A : m' > a. \end{cases}$$

Определение 2.16. *Верхним и нижним пределом* последовательности $\{x_n\}$ называются соответственно

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \sup PL(\{x_n\});$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \inf PL(\{x_n\}).$$

Лемма 2.9. *Пусть последовательность $\{x_n\}$ имеет предел равный A, $A \in \overline{\mathbb{R}}$. Тогда $PL(\{x_n\}) = \{A\}$.*

Доказательство. Запишем определение предела:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N \hookrightarrow x_n \in U_\varepsilon(A).$$

Возьмём произвольную подпоследовательность x_{n_k} последовательности $\{x_n\}$ и покажем, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = A$.

Из того, что $\{n_k\}$ строго возрастает, то по индукции легко доказать, что $\forall k \in \mathbb{N} \ \ n_k \geqslant k \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists K(\varepsilon) = N(\varepsilon)\colon \forall k \geqslant K(\varepsilon) (\Rightarrow n_k \geqslant N(\varepsilon)) \hookrightarrow x_{n_k} \in U_\varepsilon(A)$. $\square$

Теорема 2.10. *Пусть дана числовая последовательность $\{x_n\}$. Тогда $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n \in PL(\{x_n\})$ и $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n \in PL(\{x_n\})$.*

Доказательство. Докажем для верхнего предела, а для нижнего аналогично.

Обозначим $M = \sup PL(\{x_n\})$. Из определения супремума следует, что $\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow U_{\varepsilon/2}(M) \cap PL(\{x_n\}) \neq \varnothing$. Следовательно, $\exists c \in PL(\{x_n\})\colon c \in U_{\varepsilon/2}(M) \Rightarrow$ по критерию частичного предела в $U_{\varepsilon/2}(c)$ содержатся значения бесконечного количества элементов последовательности $\{x_n\}$.

$U_{\varepsilon/2}(c) \subset U_{\varepsilon/2}(M)$, так как $c \in U_\varepsilon(M)$. Тогда в $U_\varepsilon(M)$ содержатся значения бесконечного количества элементов последовательности $\{x_n\}$, но ε был выбран произвольно $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ в $U_\varepsilon(M)$ содержатся значения бесконечного количества элементов последовательности $\{x_n\} \Rightarrow$ по критерию частичного предела M — частичный предел. $\square$

Теорема 2.11. *Пусть $\{x_n\}$ — числовая последовательность. Тогда для верхнего предела справедливо равенство*

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n = \inf_{n\in\mathbb{N}}(\sup_{k\geqslant n} x_k),$$

а для нижнего предела

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = \sup_{n\in\mathbb{N}}(\inf_{k\geqslant n} x_k).$$

Доказательство. Докажем для верхнего предела, а для нижнего аналогично.

Шаг 0. При каждом $n \in \mathbb{N}$ положим

$$y_n := \sup_{k\geqslant n} x_k := \sup\{x_k : k \geqslant n\}.$$

Заметим, что $y_{n^*} = +\infty$ при каком-то $n^* \in \mathbb{N} \Leftrightarrow y_n = +\infty\ \forall n \in \mathbb{N}$. Действительно, это легко следует из того, что хвосты $\{x_k\colon k \geqslant n_1\}$ и $\{x_k\colon k \geqslant n_2\}$ отличаются не более, чем на конечное число элементов. Если $y_n = +\infty$ при всех $n \in \mathbb{N}$, то, очевидно, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. С другой стороны, из определения супремума и равенства $y_n = +\infty$ при всех $n \in \mathbb{N}$ вытекает, что $\forall\varepsilon > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ \exists k \geqslant n$ такой, что $x_k > \frac{1}{\varepsilon}$. По критерию частичного предела это означает, что $+\infty$ является частичным пределом последовательности $\{x_n\}$, а значит $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. Резюмируя, получаем, что, если $\exists n \in \mathbb{N}$: $y_n = +\infty$, то требуемое равенство выполнено.

Шаг 1. Заметим, что $y_n \geqslant x_n > -\infty\ \forall n \in \mathbb{N}$. Так как случай $y_n = +\infty$ уже рассмотрен выше, *до конца доказательства предполагаем, что* $\{y_n\} \subset \mathbb{R}$. Ключевым же для нас наблюдением будет монотонность последовательности $\{y_n\}$. Действительно, из включения

$$\{k \in \mathbb{N} : k \geqslant n + 1\} \subset \{k \in \mathbb{N} : k \geqslant n\}$$

вытекает неравенство

$$y_{n+1} \leqslant y_n\ \forall n \in \mathbb{N}. \qquad (1)$$

Шаг 2. Установим неравенство

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n \leqslant \inf_{n\in\mathbb{N}}(\sup_{k\geqslant n} x_k).$$

По теореме 2.10 верхний предел сам является частичным пределом. Фиксируем произвольную подпоследовательность $\{x_{n_j}\}$ последовательности $\{x_n\}$, для которой

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{j\to\infty} x_{n_j}. \qquad (2)$$

Из положенного нами определения y_n (в шаге 0) очевидно, что

$$x_{n_j} \leqslant y_{n_j}.$$

Поскольку в силу неравенства (1) последовательность $\{y_n\}$ монотонно убывает (нестрого), она имеет предел. А значит имеет предел и подпоследовательность $\{y_{n_j}\}$. Более того,

$$\lim_{j\to\infty} y_{n_j} = \lim_{n\to\infty} y_n. \quad (3)$$

Переходя к пределу в неравенстве $x_{n_j} \leqslant y_{n_j}$ и используя (2) и (3), получим

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n \leqslant \lim_{j\to\infty} y_{n_j} = \lim_{n\to\infty} y_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} y_n.$$

Из положенного нами определения y_n и неравенства выше и вытекает требуемое в начале шага 2 неравенство.

Шаг 3. Установим неравенство

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n \geqslant \inf_{n\in\mathbb{N}}(\sup_{k\geqslant n} x_k).$$

Покажем, что правая часть этого неравенства является частичным пределом. Тогда, учитывая, что верхний предел - это наибольший (в смысле $\overline{\mathbb{R}}$) частичный предел, получаем требуемое неравенство.

Обозначим правую часть неравенства за M. Тогда в силу монотонности $\{y_n\}$ и теоремы Вейерштрасса получим

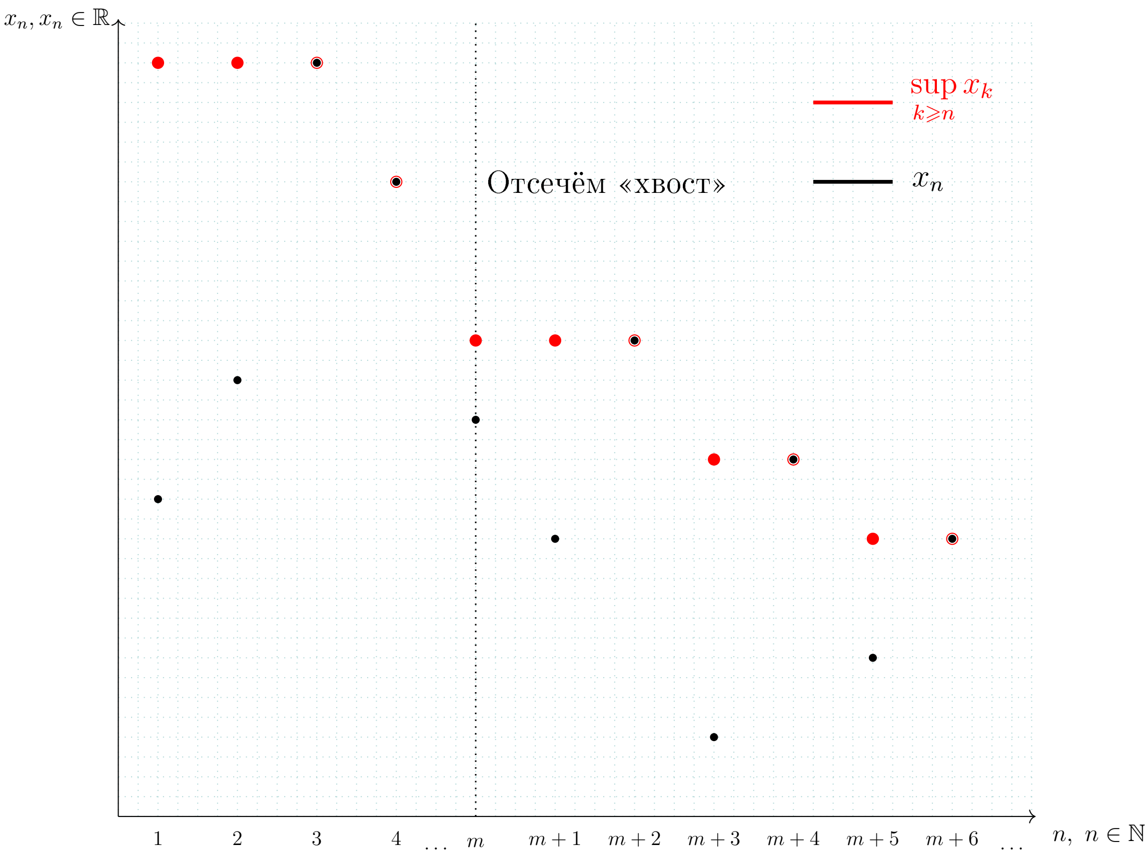
$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N} : \forall n \geqslant N(\varepsilon) \hookrightarrow y_n \in U_{\varepsilon/2}(M). \quad (4)$$

Используя определение супремума и наше определение y_n, получим, что

$$\forall\varepsilon > 0\ \forall n \geqslant N(\varepsilon)\ \exists k \geqslant n : x_k \in U_{\varepsilon/2}(y_n). \quad (5)$$

Заметим, что, если $y_n \in U_{\varepsilon/2}(M)$ и $x_k \in U_{\varepsilon/2}(y_n)$, то $x_k \in U_\varepsilon(M)$. Следовательно, учитывая (4) и (5), получаем, что $\forall\varepsilon > 0\ U_\varepsilon(M)$ содержит значения бесконечного числа элементов последовательности $\{x_n\}$. По критерию частичного предела это означает, что M — частичный предел. Тогда требуемое неравенство доказано.

Шаг 4. Объединяя доказанные в шагах 2 и 3 неравенства, получаем требуемое равенство. □



Теорема 2.12. *Пусть* $\{x_n\}$ *— числовая последовательность. Пусть* $A \in \overline{\mathbb{R}}$. *Следующие условия эквивалентны:*

1. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$;
2. $PL(\{x_n\}) = \{A\}$;
3. $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = A$.

Доказательство. Заметим, что (2) $\Leftrightarrow$ (3) просто из определений. Покажем (3) $\to$ (2). Пусть $c \in PL(\{x_n\})$.

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n \leqslant c \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} x_n, \text{ но они равны по (3)} \Rightarrow c = A.$$

Переход (2) $\to$ (3) очевиден. Множество PL состоит всего из одного элемента, то есть крайне легко взять его супремум и инфимум (и они равны).

Переход (1) $\to$ (2) доказали ранее (лемма 2.9).

Покажем (3) $\to$ (1), тогда мы докажем равносительность всех условий.

Сначала рассмотрим случай $A \in \mathbb{R}$. Тогда, используя рассуждения шага 1 теоремы 2.11, легко видеть, что $z_n := \inf\{x_k\colon\, k \geqslant n\} \in \mathbb{R}$ и $y_n := \sup\{x_k\colon\, k \geqslant n\} \in \mathbb{R}$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Используя монотонность последовательностей $\{z_n\}$, $\{y_n\}$ и учитывая теорему 2.10, получаем, что

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = \varlimsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = A.$$

Тогда, используя очевидное неравенство $z_n \leqslant x_n \leqslant y_n$, справедливое при всех $n \in \mathbb{N}$, и теорему о трёх последовательностях, получаем, что $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$.

Рассмотрим случай $A = +\infty$, так как случай $A = -\infty$ рассматривается аналогично. Если $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, то по теореме 2.11 в силу определения инфимума получаем, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\colon\, z_{N(\varepsilon)} \in U_\varepsilon(+\infty)$. По построению последовательности z_n получаем, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\colon\, \forall n \geqslant N(\varepsilon) \hookrightarrow x_n \in U_\varepsilon(+\infty)$, а значит $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. $\square$

2.6 Критерий Коши

Определение 2.17. Последовательность $\{x_n\}$ называется *фундаментальной*, если выполнено *условие Коши*:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N, \forall m \geqslant N \hookrightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Лемма 2.10. *Пусть* $\{x_n\}$ *— сходящаяся последовательность. Тогда она фундаментальна.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ — сходится к числу c. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N(\varepsilon) \hookrightarrow |x_n - c| < \varepsilon/2$$

следовательно, $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N\ \forall m \geqslant N \hookrightarrow |x_n - x_m| \leqslant |x_n - c| + |x_m - c| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$ $\square$

Лемма 2.11. *Если последовательность* $\{x_n\}$ *фундаментальна, то она ограничена.*

Доказательство. Поскольку условие фундаментальности сформулировано для любого ε, то возьмём $\varepsilon = 1$.

$$\exists N(1) : \forall n, m \geqslant N(1) \hookrightarrow |x_n - x_m| < 1, \text{ возьмём } m = N(1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |x_n - x_{N(1)}| < 1 \ \forall n \geqslant N(1) \Rightarrow |x_n| < 1 + |x_{N(1)}| \ \forall n \geqslant N(1)$$

Положим $M := max\{x_1, x_2, \ldots, |x_{N(1)}|, 1 + |x_{N(1)}|\} \Rightarrow |x_n| \leqslant M \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \{x_n\}$ — ограниченная последовательность. □

Теорема 2.13. *(Критерий Коши) Последовательность сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.*

Доказательство. В одну сторону мы уже доказали (лемма 2.10). Докажем в другую сторону.

Пусть последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна $\Rightarrow$ она ограничена по лемме 2.11, а тогда у $\{x_n\}$ есть конечный частичный предел по теореме Больцано-Вейерштрасса $\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}$ и $\exists\{x_{n_k}\}$: $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = c \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}$: $n_k \geqslant N(\varepsilon)$ и $|x_{n_k} - c| < \varepsilon/2$.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n, m \geqslant N(\varepsilon) \hookrightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon/2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N(\varepsilon) \hookrightarrow |x_n - c| \leqslant |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - c| \Rightarrow |x_n - c| < \varepsilon.$$

Теперь мы доказали утверждение в обе стороны. □

3 Топология числовой прямой

Определение 3.1. Пусть E — непустое множество. Тогда $x \in \mathbb{R}$ называется *точкой прикосновения* множества E, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ U_\varepsilon(x) \cap E \neq \varnothing.$$

Определение 3.2. *Замыканием множества* E называется множество всех точек прикосновения E и обозначается $\mathrm{cl}E$ (также можно встретить обозначение $\overline{E}$).

Определение 3.3. Множество называется *замкнутым*, если оно совпадает со своим замыканием.

Примечание. Множество E всегда содержится в своём замыкании ($E \subset \mathrm{cl}E$).

Примечание. По определению пустое множество и всё пространство $\mathbb{R}$ считаются замкнутыми.

Пример. Возьмём два числа $a, b \in \mathbb{R}$: $a < b$. $[a, b]$ — замкнутое множество.

Покажем, что $\forall c \notin [a, b]$ не является точкой прикосновения.

Действительно, возьмём $\varepsilon^* = min\{\frac{|c-b|}{2}, \frac{|a-c|}{2}\}$. Тогда $U_{\varepsilon^*}(c) \cap [a, b] = \varnothing \Rightarrow$ она не является точкой прикосновения $\Rightarrow \mathrm{cl}[a, b] \subset [a, b]$, а поскольку обратное включение ($[a, b] \subset \mathrm{cl}[a, b]$) выполнено автоматически, то получаем, что отрезок замкнут.

Определение 3.4. Пусть G — непустое множество. Будем говорить, что x — *внутренняя точка* G, если

$$\exists \varepsilon > 0 : \ U_\varepsilon(x) \subset G.$$

Определение 3.5. *Внутренностью* множества G называется множество всех его внутренних точек и обозначается $\mathrm{int}G$.

Определение 3.6. Множество $G \subset \mathbb{R}$ называется *открытым*, если оно совпадает со своей внутренностью.

Примечание. По определению $\{\varnothing\}$ и $\mathbb{R}$ открыты.

Примечание. Внутренность всегда содержится в своём множестве ($\text{int}G \subset G$).

Пример. Возьмём два числа $a, b \in \mathbb{R}$: $a < b$. (a, b) — открытое множество.

Действительно, пусть $x \in (a, b)$. Возьмём $\varepsilon = \min\{|x - a|, |b - x|\}$. Раскрыв модульные неравенства, получим $U_\varepsilon(x) \subset (a, b)$, то есть $\text{int}(a, b) \subset (a, b)$, а так как $\forall c \notin (a, b) \hookrightarrow c$ — не внутренняя точка, то $(a, b) \subset \text{int}(a, b) \Rightarrow (a, b) = \text{int}(a, b) \Rightarrow (a, b)$ — открытое множество.

Задача. *Может ли множество быть и не открытым, и не замкнутым?*

Решение. Может. К примеру, полуинтервал. Возьмём $(a, b]$, $a < b$. Заметим, что a — точка прикосновения по определению, она принадлежит замыканию, но не принадлежит множеству $\Rightarrow$ оно не является замкнутым. А $b \notin \text{int}(a, b]$, так как $\forall \varepsilon > 0\ U_\varepsilon(b) \not\subset (a, b] \Rightarrow$ оно не является открытым. Итого получаем, что это и не открытое, и не замкнутое множество.

Пример. Возьмём множество $\mathbb{Q}$. $\text{cl}\mathbb{Q} = \mathbb{R}$, $\text{int}\mathbb{Q} = \varnothing \Rightarrow$ оно и не открыто, и не замкнуто.

$\text{int}\mathbb{Q} = \varnothing$ очевидно, так как в любом интервале найдётся иррациональная точка.

$\text{cl}\mathbb{Q} = \mathbb{R}$ потому, что в любом интервале найдётся рациональная точка.

Пусть дано $\varepsilon > 0$. Покажем, что любой интервал длины не более ε содержит как рациональную, так и иррациональную точку. Возьмём $k \geqslant [\frac{1}{\varepsilon}] + 1 \Rightarrow \frac{1}{k} < \varepsilon$. Разобьём всю числовую прямую на равные отрезки длины $\frac{1}{2k}$. Концы этих отрезков, очевидно, рациональны. А иррациональное число в каждом отрезке содержится потому, что мы можем прогомотетировать (домножением на рациональное и прибавлением рационального) отрезок $[0, 2]$ в любой такой отрезок, а в отрезке $[0, 2]$ содержится как минимум $\sqrt{2}$, являющийся иррациональным числом.

А поскольку длина каждого отрезка $\frac{1}{2k}$, а $\varepsilon > \frac{1}{k}$, то этот отрезок содержится в эпсилон окрестности $\Rightarrow$ для любого интервала найдётся как рациональная, так иррациональная точка внутри.

Определение 3.7. $x \in \mathbb{R}$ называется *изолированной точкой* множества E, если

$$\exists \varepsilon > 0 :\ U_\varepsilon(x) \cap E = \{x\}.$$

Определение 3.8. $x \in \mathbb{R}$ называется *предельной точкой* множества E, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \big(U_\varepsilon(x) \backslash \{x\}\big) \cap E \neq \varnothing.$$

Утверждение 3.1. *x — точка прикосновения (1)* $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \text{ — изолированная точка} \\ x \text{ — предельная точка} \end{array}\right.$

Доказательство. Из совокупности в (1) очевидно (просто по определениям).

Докажем из (1) в совокупность.

Пусть x — точка прикосновения $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ U_\varepsilon(x) \cap E \neq \varnothing$. Возможны два случая: если $\exists \varepsilon > 0$: $U_\varepsilon(x) \cap E = \{x\} \Rightarrow$ она изолированная, либо $\forall \varepsilon > 0\ U_\varepsilon(x) \cap E$ содержит не только x, но тогда она предельная. $\square$

Задача. *Пусть $\{x_n\}$ — числовая последовательность. Доказать, что замыкание множества значений последовательности — это объединение множества всех значений последовательности и его частичных пределов, то есть $cl\{x_n\} = \{x_n\} \cup PL(\{x_n\})$.*

Теорема 3.1. *(Критерий точки прикосновения) Пусть E — множество, $E \neq \varnothing$. Точка x является точкой прикосновения $E \Leftrightarrow \exists \{x_n\} \subset E$: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.*

Доказательство. Пусть $\exists \{x_n\} \subset E$: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$: $\forall n \geqslant N(\varepsilon) \hookrightarrow$ $\hookrightarrow x_n \in U_\varepsilon(x) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists x = x_{N(\varepsilon)}$: $x \in \big(U_\varepsilon(x) \cap E\big)$.

Пусть обратно, x — точка прикосновения множества E. Построим последовательность, сходящуюся к x.

$\forall k \in \mathbb{N}$ в силу определения точки прикосновения $U_{\frac{1}{k}}(x) \cap E \neq \varnothing \Rightarrow \exists x_k \in \big(E \cap U_{\frac{1}{k}}(x)\big)$. Тогда рассмотрим неравенство $0 \leqslant |x - x_k| \leqslant \frac{1}{k}\ \forall k \in \mathbb{N}$ по построению. Но $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0 \Rightarrow$ по теореме о двух милиционерах $\exists \lim\limits_{k\to\infty} |x - x_k| = 0 \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} x_k - x = 0 \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$. □

Определение 3.9. Множество $K \subset \mathbb{R}$ называется *компактом*, если из любой последовательности значений точек $\{x_n\} \subset K$ можно выделить сходящуюся в K подпоследовательность. То есть

$$\exists \{x_{n_k}\} :\ \exists \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x,\ x \in K.$$

Теорема 3.2. *(Критерий компактности в $\mathbb{R}$) Множество $K \subset \mathbb{R}$ — компактно $\Leftrightarrow$ оно ограниченно и замкнуто.*

Доказательство. Шаг 1. Пусть K — ограничено и замкнуто. Докажем, что K — компакт. Возьмём произвольную последовательность $\{x_n\} \subset K$. Покажем, что из неё можно выделить сходящуюся в K подпоследовательность.

Так как $\{x_n\}$ является последовательностью в K, а K ограничено, то $\{x_n\}$ — ограничено, тогда по теореме Больцано-Вейерштрасса существует подпоследовательность x_{n_j}, которая сходится "куда-то".

Пусть $x^* = \lim\limits_{j\to\infty} x_{n_j}$. Тогда в силу критерия точки прикосновения x^* — точка прикосновения K, а K замкнуто $\Rightarrow x^* \in K$.

Шаг 2. Докажем в обратную сторону. Пусть K — компакт. Докажем, что K — ограничено и замкнуто. Будем доказывать от противного.

Предположим, что K — неограничено. Тогда $\forall j \in \mathbb{N}\ \exists x_j \in K$: $|x_j| > j \Rightarrow \exists \{x_j\} \subset K\ \lim\limits_{j\to\infty} |x_j| = +\infty \Rightarrow$ не существует сходящейся подпоследовательности $\{x_j\}$. Получили противоречие с компактностью $\Rightarrow K$ — ограничено.

Предположим, что K — не замкнуто. Тогда $\exists x^*$ — точка прикосновения K: $x^* \notin K$. Тогда в силу критерия точки прикосновения $\exists \{x_n\} \subset K$: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^* \Rightarrow$ любая подпоследовательность $\{x_{n_j}\}$ последовательности $\{x_n\}$ тоже сходится к $x^* \notin K$. Получили последовательность $\{x_n\}$ из которой нельзя выделить сходящейся в K подпоследовательность. Противоречие. Получаем, что K — замкнуто. □

Определение 3.10. Система множеств $\{V_\alpha\}_{\alpha\in I}$ называется *покрытием* множества E, если $\bigcup\limits_{\alpha\in I} V_\alpha \supset E$.

Определение 3.11. Система $\{V_\beta\}_{\beta\in J}$ называется *подпокрытием* покрытия $\{V_\alpha\}_{\alpha\in I}$, если $J \subset I$ и $\bigcup\limits_{\beta\in J} V_\beta \supset E$.

Определение 3.12. Покрытие называется *открытым*, если все V_α открыты.

Определение 3.13. Подпокрытие называется *открытым*, если все V_β открыты.

Лемма 3.1. *(Лемма Гейне-Бореля) Из любого открытого покрытия компакта K можно выделить конечное подпокрытие (открытое).*

Доказательство. Будем доказывать от противного. Пусть $\{V_\alpha\}_{\alpha\in I}$ — открытое покрытие компакта K, из которого нельзя выделить конечного подпокрытия. Так как K компакт, то K ограничен (по критерию компактности), то есть $\exists[a,b]\subset\mathbb{R}$: $K\subset[a,b]$.

Для удобства $I^0:=[a,b]$, разделим его пополам: получаем I^0_1 и I^0_2. Заметим, что $I^0_1\cap K$ покрывается $\{V_\alpha\}_{\alpha\in I}$ и $I^0_2\cap K$ покрывается $\{V_\alpha\}_{\alpha\in I}$. Хотя бы для одного одного из них из $\{V_\alpha\}_{\alpha\in I}$ невозможно выделить конечное подпокрытие, потому что иначе можно было бы выделить конечное подпокрытие $\{V_\alpha\}_{\alpha\in I}$.

Примечание. Если из обеих частей невозможно выделить конечное подпокрытие, то берём любую.

Пусть I^1 — та половинка отрезка I^0, что из покрытия $\{V_\alpha\}_{\alpha\in I}$ нельзя выделить конечное подпокрытие $I^1\cap K$.

Предположим, что мы построили отрезки $I^0\supset\ldots\supset I^m$: $|I^j|=\frac{1}{2}|I^{j-1}|$ и в то же время из $\{V_\alpha\}_{\alpha\in I}$ нельзя выделить конечного подпокрытия множества $K\cap I^j$ $\forall j\in\{0,1,\ldots,m\}$. На $m+1$ шаге поделим отрезок I^m пополам и выберем ту половину, пересечение которой с K не может быть покрыто конечным поднабором $\{V_\alpha\}_{\alpha\in I}$. Получили стягивающуюся последовательность вложенных отрезков $\{I^m\}$. Тогда по лемме Кантора $\exists x=\bigcap\limits_{m=1}^{\infty}I^m$.

Поскольку $x\in K$ (так как K замкнут и $\forall m\in\mathbb{N}$ $x_m\in(I_m\cap K)$, тогда $\lim\limits_{m\to\infty}x_m=x$), а значит $\exists\alpha(x)\in I$: $x\in V_{\alpha(x)}$, но $V_{\alpha(x)}$ — открытое, то есть $\exists\varepsilon>0$: $U_\varepsilon(x)\subset U_{\alpha(x)}$. Так как $|I^m|\to 0$, $m\to\infty$ и $x\in I^m$ $\forall m\in\mathbb{N}$, то $\exists m(\varepsilon)\in\mathbb{N}$: $I^{m(\varepsilon)}\subset U_\varepsilon(x)\subset V_{\alpha(x)}\Rightarrow I^{m(\varepsilon)}\cap K$ покрывается одним $U_{\alpha(x)}$, что противоречит построению, то есть исходное предположение было неверно.

□

Задача. *Доказать, что если из любого открытого покрытия множества можно выделить конечное подпокрытие, то это множество компакт.*

Утверждение 3.2. *Пусть $\{x_n\}$ — числовая последовательность. Множество её частичных пределов образуют замкнутое множество.*

То есть: $\{x_n\}$ - произвольная числовая последовательность, то $(PL(\{x_n\}))$ - замкнутое множетво.

$$\{x_n\}\cup PL(\{x_n\})=cl(\{x_n\})$$

Задача. *Существует ли последовательность, у которой множество частичных пределов несчётно?*

Решение. Да. Например, рациональные точки на числовой прямой: $\mathbb{Q}\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ множество пределов последовательности $PL(\{r_n\})=\mathbb{R}$. Это следует из того, что в любой U_ε любой точки содержится как бесконечно много рациональных, так и иррациональных точек.

4 Предел функций

4.1 Классические определения предела

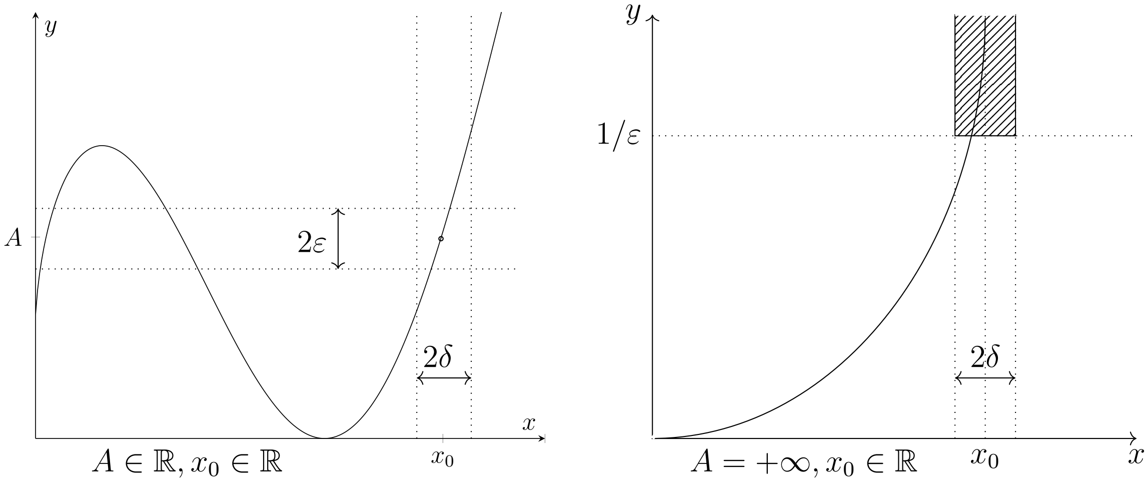
Определение 4.1. Под *функцией*, если не оговорено обратное, понимаем однозначное отображение $f : E \mapsto \mathbb{R}$, где $E \subset \mathbb{R}, E \neq \varnothing$.

Определение 4.2. Пусть $\delta > 0,\ x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Тогда *проколотой дельта-окрестностью* точки x_0 называется множество $\mathring{U}_\delta(x_0) := U_\delta(x_0)\backslash\{x_0\}$

Примечание. Если $x_0 = \pm\infty$ или $x_0 = \infty$, то проколотая окрестность совпадает с непроколотой. Если же $x_0 \in \mathbb{R}$, то $\mathring{U}_\delta = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$.

Определение 4.3. (По Коши/в терминах окрестностей) Пусть $x_0 \in \hat{\mathbb{R}}$ и пусть $A \in \hat{\mathbb{R}}$. Пусть $f\colon \mathring{U}_{\delta_0} \mapsto \mathbb{R}$. Будем говорить, что A — предел функции f в точке x_0 и записывать:

$$\left[\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \\ f(x) \to A, x \to x_0\end{array}\right. \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\ \delta(\varepsilon) \in (0;\delta_0] :\ \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0)\ \hookrightarrow\ f(x) \in U_\varepsilon(A)$$



Определение 4.4. *Последовательностью Гейне* в точке $x_0 \in \hat{\mathbb{R}}$ называется такая числовая последовательность $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$, что выполнено два условия:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$;
2. $x_n \neq x_0\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Определение 4.5. (По Гейне/в терминах последовательностей) Пусть $x_0 \in \hat{\mathbb{R}}$ и $A \in \hat{\mathbb{R}}$. Пусть $f\colon \mathring{U}_{\delta_0}(x_0) \mapsto \mathbb{R}$. Будем говорить, что f имеет предел в точке x_0 равный A, если для любой последовательности Гейне $\{x_n\} \subset \mathring{U}_{\delta_0}(x_0)$ в точке x_0 $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$. Пишем:

$$\left[\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \\ f(x) \to A, x \to x_0\end{array}\right.$$

Теорема 4.1. *(Эквивалентность определений по Коши и по Гейне) Пусть $x_0 \in \hat{\mathbb{R}}$, $A \in \hat{\mathbb{R}}$. Пусть $f\colon \mathring{U}_{\delta_0}(x_0) \mapsto \mathbb{R}$. Тогда $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ (по Коши) $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ (по Гейне).*

Доказательство. Шаг 1. Докажем сначала, что из Коши следует Гейне. Распишем определение:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) \in (0;\delta_0] : \forall x \in \mathring{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A). \quad (1)$$

Возьмём произвольную последовательность Гейне $\{x_n\} \subset \mathring{U}_{\delta_0}(x_0)$ в точке x_0. Первый пункт определения выполнен автоматически (так как мы берём из проколотой дельта-окрестности). Запишем определение предела последовательности:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \forall \delta \in (0; \delta_0]\ \exists N(\delta) \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N(\delta) \hookrightarrow x_n \in \mathring{U}_\delta(x_0).$$

В частности, если фиксирован произвольный $\varepsilon > 0$, то $\forall n \geqslant N(\delta(\varepsilon)) \hookrightarrow x_n \in \mathring{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0)$. Положим $\tilde{N}(\varepsilon) := N(\delta(\varepsilon))$. Из (1) $\implies \forall n \geqslant \tilde{N}(\varepsilon) \hookrightarrow f(x_n) \in U_\varepsilon(A)$. Но поскольку $\varepsilon > 0$ был выбран произвольно, то

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \tilde{N}(\varepsilon) = N(\delta(\varepsilon)) \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant \tilde{N}(\varepsilon) \hookrightarrow f(x_n) \in U_\varepsilon(A) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A.$$

Но так как $\{x_n\}$ — последовательность Гейне в точке x_0 была выбрана произвольно, то $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$ по Гейне.

Шаг 2. Докажем, что из Гейне следует Коши. Предположим, что $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ по Гейне, но не по Коши. Запишем отрицание к Коши:

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta \in (0; \delta_0]\ \exists x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \hookrightarrow f(x) \notin U_\varepsilon(A).$$

Раз это верно для любого δ, то возьмём $\delta = \frac{\delta_0}{n}$. Получаем:

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in \mathring{U}_{\frac{\delta_0}{n}}(x_0) : f(x_n) \notin U_\varepsilon(A).$$

(Примечание на лекции: здесь в неявной форме используется аксиома выбора) Получится последовательность $\{x_n\} \subset \mathring{U}_{\delta_0}(x_0)$. А по построению $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \{x_n\}$ — последовательность Гейне в точке x_0. Но $\forall n \in \mathbb{N}\ f(x_n) \notin U_\varepsilon(A) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq A$. Получаем противоречие с существованием предела по Гейне. Значит предположение было неверно и из Гейне следует Коши. □

4.2 Предел по множеству

Определение 4.6. Пусть $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \varnothing$, а $x_0 \in \hat{\mathbb{R}}$. Будем говорить, что x_0 — *предельная точка* множества E, если

$$\forall \delta > 0\ \mathring{U}_\delta(x_0) \cap E \neq \varnothing.$$

Лемма 4.1. *Пусть $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \varnothing$. $x_0 \in \hat{\mathbb{R}}$ — предельная точка $\Leftrightarrow \exists \{x_n\} \in E \backslash \{x_0\}$: $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Любую такую последовательность будем называть последовательностью Гейне в точке x_0 для множества E.*

Определение 4.7. (Предел по множеству) Пусть $A \in \hat{\mathbb{R}}$, $x_0 \in \hat{\mathbb{R}}$. Пусть $f\colon E \mapsto \mathbb{R}$, $E \neq \varnothing$ и x_0 — предельная точка множества E. Будем говорить, что A — предел f по множеству E при $x \to x_0$ и записывать это $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x\in E}} f(x) = A$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in E \cap \mathring{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A) \text{ — по Коши.}$$

$$\forall \text{ последовательности Гейне } \{x_n\} \subset E \text{ в точке } x_0 \hookrightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A.$$

Теорема 4.2. *Определения предела по множеству в терминах Коши и Гейне эквивалентны.*

Доказательство. Абсолютно аналогично доказательству теоремы 4.1. □

Лемма 4.2. *Пусть E_1, $E_2 \subset \mathbb{R}$. Пусть $A \in \hat{\mathbb{R}}$ и $x_0 \in \hat{\mathbb{R}}$. Пусть x_0 — предельная точка и для E_1, и для E_2. Тогда следующие условия эквивалентны:*

$$(1) \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E_1 \cup E_2}} f(x) = A \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E_1}} f(x) = A \\ \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E_2}} f(x) = A \end{cases} \quad (2)$$

Доказательство. Докажем сначала (1) $\to$ (2). Распишем (1) по определению:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in (E_1 \cup E_2) \cap \mathring{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A).$$

$$\text{Тогда} \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in E_1 \cap \mathring{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A) \\ \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in E_2 \cap \mathring{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E_1}} f(x) = A \\ \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E_2}} f(x) = A \end{cases}$$

Теперь докажем (2) $\to$ (1). То есть выполнена система

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E_1}} f(x) = A \\ \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E_2}} f(x) = A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta_1(\varepsilon) > 0 : \forall x \in E_1 \cap \mathring{U}_{\delta_1(\varepsilon)}(x_0) \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A) \\ \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta_2(\varepsilon) > 0 : \forall x \in E_2 \cap \mathring{U}_{\delta_2(\varepsilon)}(x_0) \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A) \end{cases}$$

Получается

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta(\varepsilon) = min\{\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon)\} > 0 : \forall x \in (E_1 \cup E_2) \cap \mathring{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) = (E_1 \cap \mathring{U}_\delta(\varepsilon)) \cup (E_2 \cap \mathring{U}_\delta(\varepsilon)) \hookrightarrow$$

$$\hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A).$$

□

Определение 4.8. *Функция Дирихле* $f = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$

Утверждение 4.1. *Функция Дирихле не имеет предела ни в какой точке.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in \hat{\mathbb{R}}$.

$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \mathbb{Q}}} f(x) = 1$, а $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}}} f(x) = 0$. По только что доказанной нами лемме $\nexists \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \mathbb{R}}} f(x) \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$. □

4.3 Критерий Коши для функций

Лемма 4.3. *Пусть $f \colon E \mapsto \mathbb{R}$. Пусть x_0 — предельная точка множества E. Пусть для любой последовательности Гейне $\{x_n\} \subset E$ в точке x_0 $\exists \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$, $A \in \hat{\mathbb{R}}$. Тогда A не зависит от выбора $\{x_n\}$. То есть A одинаково при выборе любого $\{x_n\}$.*

Доказательство. Пусть есть две последовательности Гейне $\{x_n\}$, $\{y_n\} \subset E$ в точке x_0.

Положим $\{z_n\} = \begin{cases} x_k, & n = 2k \\ y_k, & n = 2k - 1 \end{cases}$

Тогда $\{z_n\} \subset E$ и $\{z_n\}$ — последовательность Гейне в точке x_0.

По условию $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = A$. Но тогда $\{f(x_k)\}$ и $\{f(y_k)\}$ — подпоследовательности последовательности $\{f(z_n)\}_{n=1}^{\infty}$. Тогда $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = \lim\limits_{k\to\infty} f(y_k) = \lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = A$. Но мы взяли две произвольные последовательности Гейне $\Rightarrow A$ один и тот же. $\square$

Примечание. По умолчанию $x_0 \in \hat{\mathbb{R}}$, $\delta_0 > 0$.

Определение 4.9. Пусть $f\colon \mathring{U}_{\delta_0}(x_0) \mapsto \mathbb{R}$. *Условием Коши для f в точке x_0* назовём:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) \in (0, \delta_0] : \quad \forall x_1, x_2 \in \mathring{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \hookrightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Теорема 4.3. *(Критерий Коши) Пусть $f\colon \mathring{U}_{\delta_0}(x_0) \mapsto \mathbb{R}$. Следующие условия эквивалентны:*

1. *f удовлетворяет условию Коши в точке x_0;*
2. *$\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$.*

Примечание. Коши даёт критерий именно конечного предела.

Доказательство. Докажем сначала $(2) \to (1)$. Пусть $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) \in [0, \delta_0]\ \ \forall x \in \mathring{U}_{\delta_0}(x_0) \hookrightarrow |f(x) - a| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) \in [0, \delta_0]\ \ \forall x_1, x_2 \in \mathring{U}_{\delta_0}(x_0) \hookrightarrow \begin{cases} |f(x_1) - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \\ |f(x_2) - a| < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

Важное примечание. $\delta(\varepsilon)$ в следствии тот же самый.

По теореме о неравенстве треугольника имеем:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant |f(x_1) - a| + |f(x_2) - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Итого,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) \in (0, \delta_0] : \quad \forall x_1, x_2 \in \mathring{U}_{\delta_0}(x_0) \hookrightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon,$$

Следовательно, выполнено условие Коши.

Теперь докажем $(1) \to (2)$. Поскольку определение предела по Коши и по Гейне эквивалентны, нам достаточно доказать, что из условия Коши следует существование конечного предела по Гейне.

Зафиксируем произвольную последовательность Гейне в точке x_0:

$$\{x_n\} : \begin{cases} x_n \to x_0,\ n \to \infty \\ x_n \neq x_0 \end{cases}$$

$$\text{Тогда}\ \ \forall \delta > 0\ \exists N(\delta) \in \mathbb{N} : \ \forall n \geqslant N(\delta) \hookrightarrow x_n \in \mathring{U}_{\delta}(x_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N(\delta(\varepsilon)) : \quad \forall n,\, m > N(\delta(\varepsilon)) \hookrightarrow |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon.$$

Следовательно, получилось условие Коши для $\{f(x_n)\}$, значит

$$\exists \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A(\{x_n\}),\ \ A(\{x_n\}) \in \mathbb{R}.$$

В итоге, для любой $\{x_n\}$ — произвольной последовательности Гейне в точке x_0:

$$\exists \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A(\{x_n\}),\ \ A(\{x_n\} \in \mathbb{R}.$$

В силу леммы 4.3 $A(\{x_n\})$ не зависит от выбора $\{x_n\}$, то есть $\exists A \in \mathbb{R}$: $\forall \{x_n\}$ - последовательности Гейне в точке $x_0 \hookrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A \in \mathbb{R}$.

Значит, $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$. $\square$

Примечание. Критерий Коши работает и для пределов по множеству. Доказательство точно такое же.

То есть, пусть $f\colon X \mapsto \mathbb{R}$, x_0 — предельная точка для X. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \quad \forall x_1, x_2 \in \mathring{U}_{\delta_0} \cap X \hookrightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$;
2. $\exists \lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x\in X}} f(x) \in \mathbb{R}$.

Теорема 4.4. *(Принцип локализации) Пусть* $\exists \overline{\delta} \in (0, +\infty)$: $f(x) = g(x)$ $\forall x \in \mathring{U}_{\overline{\delta}}(x_0)$. *Тогда* $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \Leftrightarrow \exists \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$. *И если они существуют, то равны.*

Доказательство. Очевидно расписывается по определению предела. $\square$

Примечание. Тоже самое можно сформулировать по множеству.

4.4 Односторонние пределы и теорема Вейерштрасса

В данном параграфе, если не сказано обратного, $x_0 \in \mathbb{R}$.

Определение 4.10. Пусть $f\colon \mathring{U}^+_{\delta_0}(x_0) \mapsto \mathbb{R}$, где $\mathring{U}^+_{\delta_0}(x_0) = (x_0, x_0 + \delta_0)$. Будем говорить, что $A \in \hat{\mathbb{R}}$ является *правосторонним пределом* f *в точке* x_0, если $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x\in \mathring{U}^+_{\delta_0}(x_0)}} f(x) = A$, и записывать $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = A$. Аналогично определяется определяется *левосторонний предел.*

Примечание. Для $-\infty$ по определению предел только левосторонний, для $+\infty$ — правосторонний.

Определение 4.11. Функция называется *нестрого возрастающей (нестрого убывающей) на* $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \varnothing$, если

$$\forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2) \ \Big(f(x_1) \geqslant f(x_2)\Big)$$

Определение 4.12. Функция $f\colon X \mapsto \mathbb{R}$ называется *монотонной на* X, если либо нестрого возрастает, либо нестрого убывает.

Определение 4.13. Аналогично можно ввести понятия *строгого убывания на* X, *строгого возрастания на* X, *строгой монотонности на* X.

Определение 4.14.

$$\sup_{x\in X} f(x) := \sup\{f(x) :\ x \in X\}$$

$$\inf_{x\in X} f(x) := \inf\{f(x) :\ x \in X\}$$

$$\mathop{max}_{x\in X} f(x) := max\{f(x) :\ x \in X\}, \text{ если он существует}$$

$$\mathop{min}_{x\in X} f(x) := min\{f(x) :\ x \in X\}, \text{ если он существует}$$

Запишем в кванторах:

$$\sup_{x\in X} f(x) = M \in \overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leqslant M \quad \forall x \in X \\ \forall M' < M\ \exists x' \in X:\ \ f(x') > M' \end{cases}$$

Аналогично для инфимума.

Примечание. Максимум и минимум могут быть только из $\mathbb{R}$, в отличие от супремума и инфимума, которые могут быть из $\overline{\mathbb{R}}$.

Утверждение 4.2. *Можно переформулировать определение в терминах окрестностей (вместо M' берём $M-\varepsilon$ или $\frac{1}{\varepsilon}$, в случае $M=+\infty$).*

$$M = \sup_{x\in X} f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leqslant M\ \forall x \in X \\ \forall \varepsilon > 0\ \exists x_\varepsilon \in X : f(x_\varepsilon) \in U_\varepsilon(M) \end{cases}$$

Теорема 4.5. *(Теорема Вейерштрасса) Пусть $-\infty < a < b < +\infty$. Пусть f нестрого возрастает на (a,b). Тогда*

$$\exists \lim_{x\to b-0} f(x) = \sup_{x\in(a,b)} f(x) \qquad (1)$$

$$\exists \lim_{x\to a+0} f(x) = \inf_{x\in(a,b)} f(x) \qquad (2)$$

Примечание. $f\uparrow$ на (a,b) — нестрогое возрастание
$f\downarrow$ на (a,b) — нестрогое убывание

Примечание. Для односторонних пределов доказательство аналогично. Интервал (a,b) заменяется на $(x_0,\ x_0\pm\delta)$.

Доказательство. Докажем (1), так как (2) аналогично. Пусть

$$E = \{f(x) : x \in (a,b)\}.$$

$$\text{Поскольку } \exists \sup E = M \Rightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists x_\varepsilon \in (a,b):\ \ f(x_\varepsilon) \in U_\varepsilon(M),$$

но f нестрого возрастает на $(a,b) \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(M)\ \ \forall x \in [x_\varepsilon, b)$.
Действительно, если M — число, $M-\varepsilon < f(x_\varepsilon) \leqslant f(x) \leqslant M$.
Если $M=+\infty$, $\frac{1}{\varepsilon} < f(x)\ \forall x \in [x_\varepsilon, b) \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(+\infty)$.
Но тогда $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) = b - x_\varepsilon$: $\ \forall x \in \overset{\circ}{U}{}^{-}_{\delta(\varepsilon)}(b) \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(M) \Rightarrow \lim\limits_{x\to b-0} f(x) = M$. □

4.5 Арифметические операции с пределами функций

Теорема 4.6. *Пусть $X \neq \varnothing$, x_0 — предельная точка. Пусть* $\begin{cases} \exists \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} f_1(x) = a_1 \in \mathbb{R}, \\ \exists \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} f_2(x) = a_2 \in \mathbb{R}, \end{cases}$

Тогда 1. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} (f_1(x) \pm f_2(x)) = a_1 \pm a_2$; *2.* $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} (f_1(x)\cdot f_2(x)) = a_1\cdot a_2$.

Доказательство. Для доказательства достаточно проверить условие определения предела по Гейне. То есть возьмём проивольную $\{x_n\}$ — последовательность Гейне в точке x_0. Тогда

$$\exists \lim_{n\to\infty} \big(f_1(x_n) \pm f_2(x_n)\big) = a_1 \pm a_2$$

$$\exists \lim_{n\to\infty} \big(f_1(x_n)\cdot f_2(x_n)\big) = a_1\cdot a_2$$

Так как последовательность Гейне выбиралась произвольно, то в силу эквивалентности определения по Коши и по Гейне получили утверждение теоремы. □

Лемма 4.4. *(О сохранении знака) Пусть* $f : X \mapsto \mathbb{R}$, x_0 *— предельная точка* X*. Пусть* $\exists \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} f(x) = a \neq 0$. $a\in\mathbb{R}$ *(для удобства).*

$$\text{Тогда } \exists\overline{\delta}>0: \quad \forall x\in \overset{\circ}{U}_{\overline{\delta}}(x_0)\cap X \hookrightarrow \begin{cases} f(x)\neq 0,\\ sign(f(x)) = sign(a).\end{cases}$$

Доказательство. Запишем определение предела:

$$\forall\varepsilon>0:\ \exists\delta(\varepsilon)>0 : \forall x\in \overset{\circ}{U}_{\overline{\delta}}(x_0)\cap X \hookrightarrow |f(x)-a|<\varepsilon$$

Поскольку $\forall\varepsilon$, то возьмём $\varepsilon = \frac{|a|}{2}$. Тогда

$$\overline{\delta} = \delta\Big(\frac{|a|}{2}\Big) > 0 \Rightarrow \forall x\in \overset{\circ}{U}_{\overline{\delta}}(x_0)\cap X \hookrightarrow |f(x)-a| < \frac{|a|}{2} \Leftrightarrow a - \frac{|a|}{2} < f(x) < \frac{|a|}{2} + a.$$

То есть знак сохраняется. □

Следствие. Пусть f, g: $X\mapsto\mathbb{R}, X\neq\varnothing$, x_0 — предельная точка X. Пусть $\exists \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} f(x) = B\neq 0$ $\exists \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} g(x) = A\neq 0$. Тогда $\exists\overline{\delta}>0$: $g(x)\neq 0$ $\forall x\in \overset{\circ}{U}_{\overline{\delta}}(x_0)\cap X$ и $\exists \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$

Доказательство. Следует из леммы о сохранении знака, леммы о пределе частного для последовательности и эквивалентности по Коши и по Гейне □

4.6 Предельные переходы в неравенствах

Теорема 4.7. *(О трёх функциях или о двух милиционерах) Пусть* $f,g,h : X\mapsto\mathbb{R}, x_0$ *— предельная точка для* X*. Пусть* $\exists \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} g(x) = A,\ A\in\overline{\mathbb{R}}$*. Пусть* $f(x)\leqslant h(x)\leqslant g(x)\ \ \forall x\in X$*. Тогда* $\exists \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} h(x) = A$.

Доказательство. Достаточно теоремы о трёх последовательностях и эквивалентности по Коши и по Гейне. □

Теорема 4.8. *(О предельном переходе в неравестве) Пусть* $f,g : X\mapsto\mathbb{R}, x_0$ *— предельная точка для* X*. Пусть* $\begin{cases}\exists \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} f(x) = A\in\overline{\mathbb{R}};\\ \exists \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} g(x) = B\in\overline{\mathbb{R}}.\end{cases}$ *Тогда, если* $f(x)\leqslant g(x)\ \ \forall x\in X \Rightarrow\ A\leqslant B$.

Доказательство. Достаточно теоремы о предельном переходе в неравенство и эквивалентности по Коши и по Гейне. □

Примечание. Строгое неравенство может не сохраниться при предельном переходе.

Пример.

$$f(x) = \frac{1}{x}\to 0, x\to+\infty, \quad g(x) = -\frac{1}{x}\to 0, x\to+\infty.$$

4.7 Верхние и нижние пределы для функции

Для удобства записи в данном параграфе обозначим $E \equiv \mathring{U}_\delta(x_0) \cap X$. То есть вместо E нужно подставить вот эту конструкцию.

Определение 4.15. Пусть $f : X \mapsto \mathbb{R}$, x_0 — предельная точка для X.

$$\varliminf_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} f(x) := \sup_{\delta > 0} \left\{ \inf_{x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \cap X} f(x) \right\} \in \overline{\mathbb{R}}$$

$$\varlimsup_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} f(x) := \inf_{\delta > 0} \left\{ \sup_{x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \cap X} f(x) \right\} \in \overline{\mathbb{R}}$$

Также введём обозначения: $\underline{g_{x_0}}(\delta) = \inf\limits_{x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \cap X} f(x)$ и $\overline{g_{x_0}}(\delta) = \sup\limits_{x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \cap X} f(x)$.

Лемма 4.5. *Если $\delta_1 < \delta_2$, то $\overline{g_{x_0}}(\delta_1) \leqslant \overline{g_{x_0}}(\delta_2)$ и $\underline{g_{x_0}}(\delta_1) \geqslant \underline{g_{x_0}}(\delta_2)$.*

Доказательство. Доказательство очевидно из определений супремума и инфимума (так как супремум по меньшему множеству не может стать больше). □

Лемма 4.6.

$$\forall \overline{\delta} > 0 \Rightarrow \inf_{\delta > 0} \overline{g_{x_0}}(\delta) = \inf_{\delta \in (0, \overline{\delta})} \overline{g_{x_0}}(\delta)$$

$$\sup_{\delta > 0} \underline{g_{x_0}}(\delta) = \sup_{\delta \in (0, \overline{\delta})} \underline{g_{x_0}}(\delta)$$

Доказательство. Докажем первое равенство, так как второе аналогично.

$$\overline{g_{x_0}}(\delta') \leqslant \overline{g_{x_0}}(\delta''), \text{ если } \delta' \in (0, \delta_1),\ \delta'' \in (0, \delta_2) \qquad 0 < \delta_1 < \delta_2$$

$$\sup_{\delta' \in (0, \delta_1)} \underline{g_{x_0}}(\delta) = \sup_{\delta'' \in (0, \delta_2)} \underline{g_{x_0}}(\delta)$$

□

Теорема 4.9. *Пусть $f\colon X \mapsto \mathbb{R}$. Тогда*

$$\varlimsup_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} f(x) = \sup\{\varlimsup_{n \to \infty} f(x_n) : \{x_n\} \subset X,\ \{x_n\} \ \text{— последовательность Гейне в точке } x_0\}$$

$$\varliminf_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} f(x) = \inf\{\varliminf_{n \to \infty} f(x_n) : \{x_n\} \subset X,\ \{x_n\} \ \text{— последовательность Гейне в точке } x_0\}$$

Доказательство. Докажем теорему для верхнего предела, так как для нижнего доказательство аналогично.

Обозначим $\sup\{\varlimsup\limits_{n \to \infty} f(x_n) : \{x_n\} \subset X, \{x_n\}$ — последовательность Гейне в точке $x_0\}$ как J, а также $E \equiv \mathring{U}_\delta(x_0) \cap X$.

Чтобы доказать утверждение нужно проверить два неравенства: $\begin{cases} \varlimsup\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} f(x) \leqslant J, \\ \varlimsup\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} f(x) \geqslant J. \end{cases}$

Докажем второе неравенство. Возьмём произвольную $\delta > 0$ и произвольную последовательность Гейне $\{x_n\} \subset X$ в точке x_0.

Так как $\{x_n\}$ — последовательность Гейне, то

$$\exists N(\delta) \in \mathbb{N} :\ \forall n \geqslant N(\delta) \hookrightarrow x_n \in E$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} f(x_n) = \inf_{N\in\mathbb{N}} \sup_{n\geqslant N} f(x_n) \leqslant \sup_{n\geqslant N(\delta)} f(x_n)$$

$$\sup_E f(x) \geqslant \sup_{n\geqslant N(\delta)} f(x_n) = \overline{\lim_{n\to\infty}} f(x_n)$$

«Заморозим» x_n и будем менять $\delta > 0$. Можно взять inf от обеих частей:

$$\inf_{\delta>0} \sup_E f(x) \geqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} f(x_n)$$

Левая часть не зависит от выбора x_n, следовательно, беря супремум по всем $\{x_n\}$, получим нужное неравенство:

$$\overline{\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}}} f(x) \geqslant J,$$

Покажем теперь, что:

$$\overline{\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}}} f(x) \leqslant J.$$

Найдём последовательность Гейне в точке x_0, которая «в точности даст левую часть». В силу леммы 4.6:

$$\forall n \in \mathbb{N} \inf_{\delta\in(0,\frac{1}{n})} \sup_E f(x) = \overline{\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}}} f(x) \qquad (1)$$

По определению инфимума $\forall n \in \mathbb{N}$ в силу равенства (1):

$$\exists \delta \in (0, \frac{1}{n}) : \sup_E f(x) \in U_{\frac{1}{n}}\left(\overline{\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}}} f(x)\right)$$

Но по определению супремума

$$\exists x_n \in E : \quad f(x_n) \in U_{\frac{1}{2n}}\left(\overline{\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}}} f(x)\right).$$

Получается, мы построили последовательность $\{\overline{x_n}\} \subset X$, которая является последовательностью Гейне в точке x_0, и при этом $\lim\limits_{n\to\infty} f(\overline{x_n}) = \overline{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}}} f(x)$, значит,

$$\exists \overline{\lim_{n\to\infty}} f(\overline{x_n}) = \lim_{n\to\infty} f(\overline{x_n}) = \overline{\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}}} f(x).$$

$\square$

Теорема 4.10. *(О верхнем и нижнем пределе для функции) Пусть $f \colon X \mapsto \mathbb{R}$, $A \in \hat{\mathbb{R}}$. Следующие условия эквивалентны:*

1. $\exists \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} f(x) = A$;
2. $\overline{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}}} f(x) = \underline{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}}} f(x) = A.$

Доказательство. (1) $\Leftrightarrow \forall$ последовательности Гейне $\{x_n\} \subset X$ в точке x_0

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} f(x_n) = A, \\ \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} f(x_n) = A, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}}} f(x) = A, \\ \underline{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}}} f(x) = A. \end{cases} \Leftrightarrow (2)$$

$\square$

4.8 Непрерывность функции в точке и на множестве

Определение 4.16. Пусть $f : U_{\delta_0}(x_0) \mapsto \mathbb{R}$.

Функция f называется *непрерывной в точке* x_0, если $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) \in (0, \delta_0] : \ \forall x \in U_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \hookrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Определение 4.17. Функция $f : U_{\delta_0}(x_0) \mapsto \mathbb{R}$, не являющаяся непрерывной в точке x_0, называется *разрывной в точке* x_0.

Классификация точек разрыва

Определение 4.18. Точка x_0 называется *точкой устранимого разрыва*, если:

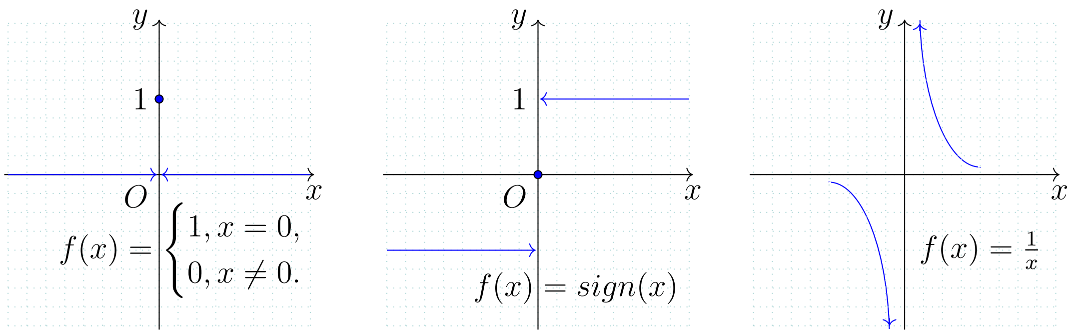
$$\begin{cases} \exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \in \mathbb{R}, \\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0). \end{cases}$$

Определение 4.19. Точка x_0 называется *точкой разрыва первого рода*, если:

$$\begin{cases} \exists \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) \in \mathbb{R}, \\ \exists \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) \in \mathbb{R}, \\ \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x). \end{cases}$$

Определение 4.20. Точка x_0 называется *точкой разрыва второго рода*, если хотя бы один из односторонних пределов не существует, либо бесконечен.

Примеры точек разрыва



Устранимый разрыв Разрыв первого рода Разрыв второго рода

Определение 4.21. Пусть $X \subset \mathbb{R}, X \neq \varnothing$.

Будем говорить, что $f\colon X \mapsto \mathbb{R}$ *непрерывна в точке* $x_0 \in X$ *по множеству* X, если

$$\left[\begin{array}{l} x_0 \text{ — изолированная точка } X, \\ \exists \lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x\in X}} f(x) = f(x_0). \end{array}\right.$$

Определение 4.22. Функция $f\colon X \in \mathbb{R}$ называется *непрерывной на* X, если она непрерывна в каждой точке $x_0 \in X$ по множеству X.

Лемма 4.7. *Пусть $X \subset \mathbb{R}, X \neq \varnothing, x_n \in X$. Следующие условия эквивалентны:*

1. *f непрерывна в точке x_0 по множеству X;*

2. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0:\ \forall x \in U_\delta(x_0) \cap X \hookrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

3. $\forall \{x_n\} \subset X : \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \hookrightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Доказательство. (1) $\Leftrightarrow$ (2) следует из определения $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ по Коши; в данном случае условие $x \neq x_0$ можно не писать, так как при $x = x_0$ выполняется $|f(x) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$;

(2) $\Leftrightarrow$ (2) следует из определения $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ по Гейне; в данном случае условие $x_n \neq x_0$ можно не писать, так как при $x_n = x_0$ выполняется $f(x_n) = f(x_0)$. $\square$

Теорема 4.11. *Пусть $K \subset \mathbb{R}$ — компакт, $K \neq \varnothing$.*

Пусть f непрерывна на K. Тогда $f(K) := \{f(x) : x \in K\}$ — компакт.

Доказательство. Пусть $y_n \subset \{f(K)\} \Rightarrow \exists \{x_n\} \subset K$: $f(x_n) = y_n\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists \{x_{n_j}\} \subset K(\{x_{nj}\} \text{ — подпоследовательность } \{x_n\}) \text{ и } \exists\, x^* \in K : x_{n_j} \to x^*, j \to \infty.$$

Тогда так как f непрерывна в точке x^*, то $\lim\limits_{j\to\infty} f(x_{n_j}) = f(x^*) \in f(K)$.

$$f(x_{n_j}) = y_{n_j} \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

$$y_{n_j} \to f(x^*) \in f(K), j \to \infty.$$

Поскольку $\{y_n\} \subset f(K)$ выбрана произвольно, то $f(K)$ — компакт. $\square$

Примечание. Здесь использовалась непрерывность в терминах Гейне.

Определение 4.23. Пусть $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \varnothing$, $x_0 \in X$. Функция f: $X \mapsto \mathbb{R}$ называется *полунепрерывной сверху в точке x_0 по множеству X*, если

$$\left[\begin{array}{l} x_0 \text{ — изолирована,} \\ \overline{\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x\in X}}} f(x) \leqslant f(x_0). \end{array}\right.$$

Определение 4.24. Пусть $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \varnothing$, $x_0 \in X$. Функция f: $X \mapsto \mathbb{R}$ называется *полунепрерывной снизу в точке x_0 по множеству X*, если

$$\left[\begin{array}{l} x_0 \text{ — изолирована,} \\ \underline{\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x\in X}}} f(x) \geqslant f(x_0). \end{array}\right.$$

Определение 4.25. *Характеристическая функция множества (индикатор).*

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, x \in E, \\ 0, x \notin E, \end{cases} \quad \text{где } E \subset \mathbb{R} \text{ — множество.}$$

Пример. Пусть $G \subset R$ — непустое открытое множество. Тогда χ_G — полунепрерывна снизу в каждой точке.

Если $x_0 \in G$, то $\exists U_\delta(x_0) \subset G$ в ней очевидно.

Если $x_0 \notin G$, то $f(x_0) = 0$ и $f(x) \geqslant 0$, так как она является характеристической функцией.

Пример. Пусть $F \subset \mathbb{R}$ — непустое замкнутое множество. χ_F — полунепрерывна сверху в каждой точке.

Теорема 4.12. *Пусть $f\colon X \mapsto \mathbb{R}, x_0 \in X$. Тогда f непрерывна в точке x_0 по множеству $X \Leftrightarrow$ она полунепрерывна снизу в точке x_0 по множеству X и полунепрерывна сверху в точке x_0 по множеству X.*

Доказательство. Если x_0 — изолированнная точка, то доказательство очевидно.

Если x_0 — предельная точка, то непрерывность в ней по множеству $X \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \exists \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\subset X}} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \begin{cases} \varlimsup\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} f(x) = f(x_0),\\ \varliminf\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} f(x) = f(x_0). \end{cases} \qquad (*)$$

По теореме о верхнем и нижнем пределе для функции.

Заметим, что:

$$f(x_0) \leqslant \varliminf_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} f(x) \leqslant \varlimsup_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} f(x) \leqslant f(x_0) \Leftrightarrow (*)$$

□

Теорема 4.13. *Пусть K — компакт, $K \neq \varnothing$. Пусть $f\colon K \mapsto R$. Если f — полунепрерывна снизу на компакте, то она достигает своего минимума, а если полунепрерывна сверху, то — максимума.*

Доказательство. Докажем для полунепрерывности сверху, так как для полунепрерывности снизу доказательство аналогично.

Пусть $f(K) := \{f(x)\colon x \in K\} \subset \mathbb{R}$. Тогда $\exists \sup f(K) = M$. Пока знаем, что $M \in \overline{\mathbb{R}}$. Из утверждения 4.2 получаем: $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists y_n \in f(K)\colon y_n \in U_{\frac{1}{n}}(M)$. Но тогда $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in K$: $f(x_n) \in U_{\frac{1}{n}}(M) \Rightarrow$ построили последовательность точек $\{x_n\} \subset K\colon f(x_n) \to M,\ n \to \infty$. (Примечание: обычно такая последовательность называется «максимизирующая»)

Так как K — компакт, то существует подпоследовательность $\{x_{n_j}\}$ последовательности $\{x_n\}$ и точка $x^* \in K\colon x_{n_j} \to x^*, j \to \infty$. Но f — полунепрерывна сверху в точке $x^* \Rightarrow \varlimsup\limits_{j\to\infty} f(x_{n_j}) \leqslant \varlimsup\limits_{\substack{x\to x^*\\ x\in K}} f(x) \leqslant f(x^*)$. Но на самом деле $\varlimsup\limits_{j\to\infty} f(x_{n_j}) = \lim\limits_{j\to\infty} f(x_{n_j}) = M$. А тогда $f(x^*) \geqslant M$, но $f(x^*) \in f(K) \Rightarrow f(x^*) \leqslant M$. Итого получаем, $f(x^*) = M$. То есть она достигает максимума. □

Следствие. Если функция непрерывна на непустом компакте K, то она достигает и максимума, и минимума. В частности, функция непрерывная на отрезке достигает на нём своего максимума и минимума.

Введём следующие обозначения: если $f\colon E \mapsto \mathbb{R}$ и непрерывна на нём, то $f \in \mathrm{C}(E)$.

Теорема 4.14. *(Теорема Больцано-Коши/о промежуточном значении) Пусть $a < b$. Пусть $f \in C([a,b])$. Тогда $\forall y^* \in \big[min\big[f(a), f(b)\big], max\big[f(a), f(b)\big]\big]\ \exists x^* \in [a,b]\colon f(x^*) = y^*$.*

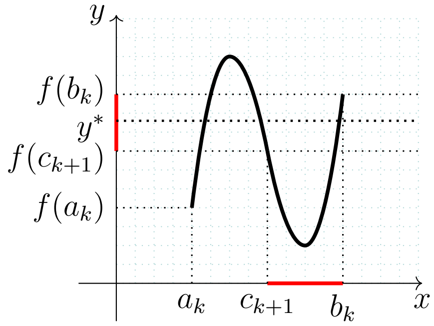
Доказательство. Для удобства доказательства положим $f(a) < f(b)$, в противном случае доказательство не изменится с точностью до знаков.

Примечание. В доказательстве запись $[l, r]$ подразумевает отрезок $[min(l, r), max(l, r)]$. Опять же исключительно для удобства записи мы так сокращаем.

Пусть $[a, b] = I^0$. Поделим I^0 пополам, то есть рассмотрим $c_1 = \frac{a+b}{2}$.

Возможно 2 варианта: $\left[\begin{array}{l} y^* \in [f(c_1), f(b)]; \\ y^* \in [f(a), f(c_1)]. \end{array}\right.$ Выберем такую половину I^0, что y^* принадлежит отрезку, образованному значениями f в концах половинок, назовём его I^1. Такой отрезок обязательно найдётся, иначе мы бы пришли к противоречию с тем, что $y^* \in I^0$.

Пусть построено $k+1$ отрезков: $I^0 \supset I^1 \supset \ldots \supset I^k$. $I^k = [a_k, b_k]$, при этом $y^* \in [a_j, b_j]$ $\forall j \in \{0, 1, \ldots, k\}$. $|I^j| = \frac{|b-a|}{2^j}$ $\forall j \in \{0, 1, \ldots, k\}$.



На $k+1$ шаге делим I^k пополам. Пусть $c_{k+1} = \frac{a_k+b_k}{2}$.

Возможно 2 случая: $\left[\begin{array}{l} y^* \in [f(c_{k+1}), f(b_k)]; \\ y^* \in [f(a_k), f(c_{k+1})]. \end{array}\right.$

Обязательно найдётся половина, для которой y^* будет принадлежать отрезку, образованному значениями функции в концах этой половины, иначе $y^* \notin [a_k, b_k]$, что противоречит построению.

По индукции мы построили стягивающуюся последовательность вложенных отрезков $\{I^k\}_{k=1}^{\infty} \Rightarrow \exists! x^* = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} I^k$. По построению $\forall k \in \mathbb{N}$ $y^* \in [f(a_k), f(b_k)]$.

Но f непрерывна в точке x^*, то есть $a_k \to x^*,\ k \to \infty$ и $b_k \to x^*,\ k \to \infty \Rightarrow f(a_k) \to f(x^*),\ k \to \infty$ и $f(b_k) \to f(x^*),\ k \to \infty$. Тогда по теореме о двух миллиционерах и так как y^* — стационарная последовательность, то $y^* = f(x^*)$.

□

Определение 4.26. *Промежутком* назовём либо отрезок, либо инвервал, либо полуинтервал, то есть $\lfloor a, b \rceil \Leftrightarrow [a, b]$ или (a, b), или $[a, b)$, или $(a, b]$.

Теорема 4.15. *(Обобщённая теорема о промежуточном значении) Пусть $f\colon \lfloor a, b \rceil \mapsto \mathbb{R}$. Пусть $f \in C(\lfloor a, b \rceil)$. Пусть $m = \inf\limits_{x \in \lfloor a, b \rceil} f(x)$, $M = \sup\limits_{x \in \lfloor a, b \rceil} f(x)$. Тогда $\forall y^* \in (m, M)$ $\exists x^* \in \lfloor a, b \rceil\colon f(x^*) = y^*$.*

Доказательство. По определению инфимума $\exists a_1 \in \lfloor a, b \rceil$: $m \leqslant f(a_1) < y^*$. Аналогично по определению супремума $\exists b_1 \in \lfloor a, b \rceil$: $M \geqslant f(b_1) > y^*$. Следовательно $y^* \in [f(a_1), f(b_1)]$. И при этом $f \in \mathrm{C}([a_1, b_1]) \Rightarrow$ по теореме Больцано-Коши $\exists x^* \in [a_1, b_1]$: $f(x^*) = y^*$, что и требовалось. □

Следствие. Если $f \in \mathrm{C}([a, b])$, то $f([a, b]) = [\underset{x \in [a,b]}{min} f(x), \underset{x \in [a,b]}{max} f(x)]$.

Доказательство. Было доказано, что (так как f непрерывна на $[a, b]$, а отрезок компакт) $\exists x_m \in [a, b]$: $\forall x \in [a, b] \hookrightarrow f(x) \geqslant f(x_m)$ и $\exists x_M \in [a, b]$: $\forall x \in [a, b] \hookrightarrow f(x_M) \geqslant f(x)$.

Получается, $\forall x \in [a, b] \hookrightarrow f(x) \in [f(x_m), f(x_M)]$. Но по теореме Больцано-Коши получаем сюръекцию (все значения принимаются), то есть $\forall y \in [f(x_m, f(x_M)]$ $\exists x \in [a, b]$: $f(x) = y$. Значит $f([a, b]) = [f(x_m), f(x_M)]$. □

Задача. *Верно ли, что образ интервала — интервал?*

Решение. Нет. К примеру, $f(x) = \sin(x)$, $x \in (-\pi, \pi)$. Но для монотонных функций это верно.

4.9 Колебания

Определение 4.27. Пусть $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \varnothing$. Пусть $f\colon E \mapsto \mathbb{R}$.

Колебание f на E — $\omega_E[f] := \sup\limits_{x_1, x_2 \in E} |f(x_1) - f(x_2)|$.

Определение 4.28. Пусть $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \varnothing$, $x_0 \in X$. Тогда *колебанием функции в точке* назовём $\omega_{x_0}[f] := \inf\limits_{\delta > 0} \omega_{U_\delta(x_0)}[f]$.

Теорема 4.16. *Функция непрерывна в точке по множеству $\Leftrightarrow$ колебание в ней 0. То есть пусть $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \varnothing$, $x_0 \in X$, f — непрерывна в точке x_0 по множеству $X \Leftrightarrow \omega_{x_0}[f] = 0$.*

Доказательство. Шаг 1. Пусть f непрерывна в точке $x_0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0\colon \forall x \in U_\delta(x_0) \cap X \hookrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0\colon \forall x_1, x_2 \in U_\delta(x_0 \cap X \hookrightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ по неравенству треугольника.

Получается $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon)\colon \omega_{U_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \cap X}[f] \leqslant \varepsilon$, но так как есть монотонность по δ, то $\exists \lim\limits_{\delta \to +0} \omega_{U_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \cap X}[f] = 0 = \inf\limits_{\delta > 0} \omega_{U_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \cap X}[f]$ по теореме Вейерштрасса. В одну сторону доказали.

Шаг 2. Пусть $\omega_{x_0}[f] = 0$. Покажем непрерывность.

В силу монотонности $\omega_{U_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \cap X}[f]$ по δ получаем, что $\exists \lim\limits_{\delta \to +0} \omega_{U_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \cap X}[f] = 0$. Тогда по определению получаем:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall \delta \in \big(0, \delta(\varepsilon)\big] \hookrightarrow \omega_{U_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \cap X}[f] < \varepsilon.$$

Тогда, взяв $x_1 = x_0$, а $\delta = \delta(\varepsilon)$, получим

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \sup_{x_2 \in U_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \cap X} |f(x_2) - f(x_0)| < \varepsilon \Rightarrow f \text{ — непрерывна в точке } x_0.$$

$\square$

Примечание. Можно легко доказать разрывность функции Дирихле в каждой точке.

Заметим, что $\forall \underline{x} \in \mathbb{R}\ \omega_{U_\delta(\underline{x})}[D] = 1$, поскольку любой невырожденный интервал на числовой прямой содержит как рациональные, так иррациональные точки $\Rightarrow \omega_{\underline{x}}[D] = 1$ $\forall \underline{x} \in \mathbb{R}$, а значит по теореме 4.16 функция Дирихле разрывна в каждой точке.

Определение 4.29. *Функцией Римана* назовём:

$$R(x) := \begin{cases} 0, & \forall x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q}, & \forall x \in \mathbb{Q}\ (x = \frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N},\ (p, q) = 1) \end{cases}$$

Задача. *Доказать, что функция Римана непрерывна в $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ и разрывна в $\mathbb{Q}$.*

Решение. Поскольку в любой окрестности любой точки содержатся иррациональные числа, получаем

$$\omega_x[R] \geqslant \frac{1}{q} \quad \forall x \in \mathbb{Q}.$$

Тогда в силу теоремы 4.16 получаем, что функция Римана разрывна в каждой рациональной точке.

Покажем, что функция Римана непрерывна в каждой иррациональной точке. Зафиксируем $\underline{x} \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$. Заметим, что $\forall q \in \mathbb{N}\ \exists \delta(\underline{x}, q) > 0\colon U_{\delta(\underline{x}, q)}(\underline{x})$ не содержит несократимых дробей со знаменателями $q' \in \{1, \ldots, q\}$. Действительно, положим

$$\delta(\underline{x}, q) := min\{|\underline{x} - \frac{p'}{q'}| : 1 \leqslant q' \leqslant q, \frac{p'}{q'} \text{ — несократимая дробь.}\}$$

Но тогда получается, что $R(\underline{x}) - R(x) = 0 \; \forall x \in (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \cap U_{\delta(\underline{x},q)}(\underline{x})$. Если же $x \in \mathbb{Q} \cap U_{\delta(\underline{x},q)}(\underline{x})$, то $|R(\underline{x}) - R(x)| < \frac{1}{q}$. В итоге получаем, что $\forall n \in \mathbb{N} \forall \underline{x} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \; \exists \delta(\underline{x}, n) > 0$: $\omega_{U_{\delta(\underline{x},n)}(\underline{x})}[R] < \frac{1}{n}$. Отсюда получаем

$$\omega_x[R] = 0 \; \forall x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}.$$

Задача. *Доказать, что не существует функции, непрерывной в $\mathbb{Q}$ и разрывной в $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.*

Теорема 4.17. *(О замене переменной под знаком предела) Пусть $x_0, y_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Пусть y: $\overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0) \mapsto \mathbb{R}$, f: $\overset{\circ}{U}_{\delta_0}(y_0) \mapsto \mathbb{R}$.*

Пусть $\exists \lim\limits_{y \to y_0} f(y) = A$, $A \in \hat{\mathbb{R}}$ и $y(x) \neq y_0 \; \forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0)$. Тогда $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(y(x)) = A$.

Доказательство. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как $\lim_{y \to y_0} f(y) = A$, то

$$\exists \beta \in (0; \beta_0) : \forall y \in U_\beta(y_0) \hookrightarrow f(y) \in U_\varepsilon(A).$$

По определению предела $\square$

Теорема 4.18. *(Предел композиции 2) Пусть $f : U_{\sigma_0}(y_0) \mapsto \mathbb{R}$, $y : \overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0) \mapsto U_{\sigma_0}(y_0)$.*

Пусть f непрерывна в точке y_0 и $\lim\limits_{x \to x_0} y(x) = y_0$, Тогда:

$$\exists \lim_{x \to x_0} f \circ y(x) = \lim_{x \to x_0} f(y(x)) = f(y_0)$$

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \; \exists \sigma(\varepsilon) \in (0, \sigma_0) : \; \forall y \in U_{\sigma(\varepsilon)}(y_0) \hookrightarrow |f(y) - f(y_0)| < \varepsilon \\ \forall \sigma > 0 \; \exists \delta(\sigma) \in (0, \delta_0) : \; \forall y \in U_{\delta(\sigma)}(x_0) \hookrightarrow |y(x) - y_0| < \sigma \end{cases}$$

Объединяя высказывания, получим:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \widetilde{\delta}(\varepsilon) = \delta(\sigma(\varepsilon)) \in (0, \delta_0)$$
$$\forall x \in \overset{\circ}{U}_{\widetilde{\delta}_\varepsilon}(x_0) \hookrightarrow y(x) \in U_{\sigma(\varepsilon)}(y_0), \quad \text{а значит} \quad |f(y(x)) - f(y_0)| < \varepsilon$$

В итоге, получаем:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \widetilde{\delta}(\varepsilon) \in (0, \delta_0) : \forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \hookrightarrow |f(y(x)) - f(y_0)| < \varepsilon \Leftrightarrow \exists \lim_{x \to x_0} f(y(x)) = f(y_0).$$

$\square$

Следствие. Если $f : U_{\sigma_0}(y_0) \mapsto \mathbb{R}$, где $y_0 = y(x_0)$, $\; y : U_{\delta_0}(x_0) \mapsto \mathbb{R}$, то $\exists \; \overline{\delta} \in (0, \delta_0) : f \circ y$ определена в некоторой $U_{\overline{\delta}}(x_0)$ и $f \circ y$ непрерывна в точке x_0.

Доказательство. Так как y непрерывна в $y_0 = y(x_0) \Rightarrow \exists \lim\limits_{x \to x_0} y(x) = y_0$.

Значит, $\exists \overline{\delta} > 0 : \; \forall x \in U_{\overline{\delta}}(x_0) \hookrightarrow y(x) \in U_{\sigma_0}(y_0) \Rightarrow f \circ y(x)$ определена $\forall x \in U_{\overline{\delta}}(x_0)$

Так как f непрерывна в точке y_0 и $y(x) \to y_0 = y(x_0), x \to x_0$, можно воспользоваться предыдущей теоремой. Получается,

$$\lim_{x \to x_0} f(y(x)) = f(y_0) = f(y(x_0))$$

Следовательно, $f \circ y$ непрерывна в точке x_0 $\square$

4.10 Обратная функция

Лемма 4.8. *$f : X \mapsto Y$ — обратима на X, когда f — сюрьекция и инъекция.*

Доказательство. Шаг 1. Пусть f — сюръекция и инъекция, докажем, что f обратима.

Рассмотрим $y \in Y$. Так как f — сюръекция, $\exists x \in X : f(x) = y$. Но так как f — инъекция, то этот x единственный ($\forall x' \neq x\ f(x') \neq f(x) = y$). Следовательно, определим $f^{-1}(y) = x$ (единственный). В одну строну доказали.

Шаг 2. Пусть f обратима, докажем, что f — сюръекция и инъекция.

Так как f обратима, то $\exists f^{-1} : Y \mapsto X \Rightarrow f$ — сюръекция.

$$\forall y \in Y\ \exists x = f^{-1}(y) : f(f^{-1}(y)) = f(x) = y.$$

Покажем, что f — инъекция. Возьмем $x_1, x_2 \in X$

$$f(x_1) = f(x_2) = y \Rightarrow f^{-1}(f(x_1)) = f^{-1}(f(x_2)) = f^{-1}(y) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

□

Лемма 4.9. *Пусть $X \subset \mathbb{R}, X \neq \varnothing$. Пусть $f\colon X \mapsto \mathbb{R}$ строго монотонна. Тогда f обратима, то есть $\exists f^{-1} : f(X) \mapsto X$.*

Более того, если f строго возрастает на X, то f^{-1} строго возрастает на $f(X)$. Если f строго убывает на X, то f^{-1} строго убывает на $f(X)$.

Примечание. Лемма неверна, если не требовать строгой монотонности.

Пример. $f(x) \equiv 1$ на $\mathbb{R}$. Это нестрого монотонная функция и она необратима на $\mathbb{R}$.

Доказательство. Из строгой монотонности f следует, что $f\colon X \mapsto f(X)$ инъективно (так как иначе $\exists x_1, x_2 \in X\colon x_1 < x_2$ и $f(x_1) = f(x_2)$, то есть нарушается строгая монотонность).

Рассмотрим случай возрастания на X, так как случай строго убывания аналогичен.

Обратная $f^{-1}\colon f(X) \mapsto X$ существует в силу инъективности f (сюръективность очевидна, так как мы используем отображение в $f(X)$). Покажем, что она тоже строго возрастает. Возьмём $y_1, y_2 \in f(x)$. Пусть $y_2 > y_1$. Предположим , что $f^{-1}(y_2) < f^{-1}(y_1)$ (равно быть не может в силу обратимости f)

Так как f строго возрастает, то $f\Big(f^{-1}(y_2)\Big) < f\Big(f^{-1}(y_1)\Big)$, то есть $y_2 < y_1$. Получили противоречие с нашим предположением, следовательно, $\forall y_1, y_2 \in f(X)$ из $y_1 < y_2 \Rightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$. То есть обратная функция имеет тот же характер монотонности. □

Теорема 4.19. *(Об обратной функции) Пусть $f \in C\big([a, b]\big)$ строго монотонна на $[a, b]$. Тогда $\exists f^{-1} \in C\big([m, M]\big)$ (где $m = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, а $M = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$) и имеет характер монотонности тот же, что и у f.*

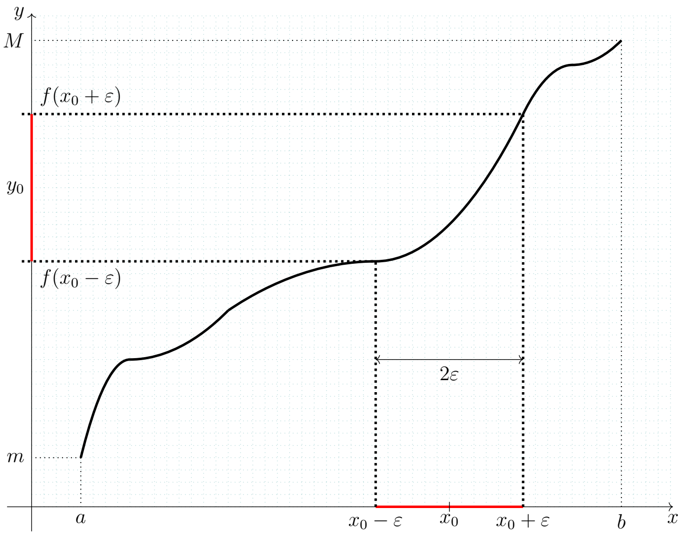
Доказательство. Тот факт, что $\exists f^{-1}$ и она имеет тот же характер монотонности, что f, вытекает из предыдущей леммы.

$f([a, b]) = [m, M]$ следует из теоремы Больцано-Коши.

Остаётся показать $f^{-1} \in ([m, M])$. Рассмотрим случай $y_0 \in \Big(m, M\Big)$

Так как $y_0 \in \Big(m, M\Big)$, то $x_0 \in (a, b)$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ такое, что $U_\varepsilon(x_0) \subset (a, b)$.

Рассмотрим отрезок $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset (a, b)$. На нём f строго возрастает и непрерывна.



Следовательно, f осуществляет биекцию $[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]$ на $[f(x_0-\varepsilon), f(x_0+\varepsilon)]$

$$\delta(\varepsilon) = \min\{f(x_0) - f(x_0-\varepsilon), f(x_0+\varepsilon) - f(x_0)\}.$$

Рассмотрим интервал $\Big(f(x_0) - \delta(\varepsilon), f(x_0) + \delta(\varepsilon)\Big) \subset \Big(f(x_0-\varepsilon), f(x_0+\varepsilon)\Big) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \forall y \in \Big(f(x_0) - \delta(\varepsilon), f(x_0) + \delta(\varepsilon)\Big) \hookrightarrow f^{-1}(y) \in U_\varepsilon(x_0) = U_\varepsilon\Big(f^{-1}(y_0)\Big)$$

Следовательно, f^{-1} непрерывна в точке y_0.
Для концевых точек аналогично, только в них будет односторонняя непрерывность. $\square$

Следствие. Пусть $f \in C\Big([a,b]\Big), a, b \in \hat{\mathbb{R}}$ и строго монотонна. Тогда $\exists f^{-1} \in C\Big((m, M)\Big)$ и строго монотонна с тем же характером монотонности, что и у f.

Доказательство. Так как f строго монотонна, то $\exists f^{-1}$, имеющая тот же характер монотонности. Покажем, что $f\Big((a,b)\Big) = \Big(m, M\Big)$.

$$m = \inf_{x \in (a,b)} f(x) \in \hat{\mathbb{R}}$$

$$M = \sup_{x \in (a,b)} f(x) \in \hat{\mathbb{R}}$$

В силу обобщённой теоремы о промежуточном значении.

$$f\Big((a,b)\Big) \supset \Big(m, M\Big).$$

Но m и M не могут приниматься. Рассмотрим случай строгого возрастания (для убывания аналогично).

$$\text{Если } \exists x^* \in (a,b): \ M = f(x^*) \Rightarrow \exists x^{**} \in (x^*, b) : f(x^{**}) > f(x^*) = M,$$

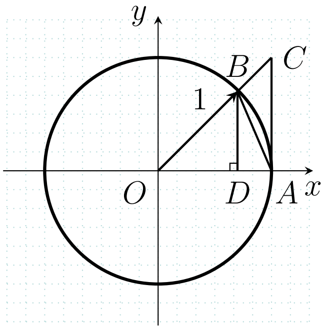
но это противоречит тому, что $M = \sup\limits_{x \in (a,b)} f(x)$. $\Rightarrow f\Big((a,b)\Big) \subset \Big(m, M\Big) \Rightarrow$

$$\Rightarrow f\Big((a,b)\Big) = \Big(m, M\Big).$$

Непрерывность f^{-1} доказывается так же, как в предыдущей теореме. $\square$

4.11 Первый замечательный предел и непрерывность элементарных функций

Примечание. В этом параграфе утверждения доказываются неточно (но для экзамена и так сойдёт).



Лемма 4.10.

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Доказательство.

$$S_{OAB} < S_{\text{сектора}} < S_{OAC}$$

$$\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2}$$

□

Следствие. (Первый замечательный предел)

$$\exists \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Доказательство. Так как мы работаем в проколотой окрестности нуля, то $\frac{\sin x}{x}$ определена. В силу принципа локализации достаточно считать, что мы изучаем $\frac{\sin x}{x}$ в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\}$; $\frac{\sin x}{x}$ — чётная.

$$\frac{\sin x}{\operatorname{tg} x} < \frac{\sin x}{x} < 1 \Leftrightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

В силу чётности:

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad (*)$$

В силу непрерывности $\cos x$ в нуле $\exists \lim\limits_{x\to 0} \cos x = \cos 0 = 1$.

Пользуясь $(*)$ и теоремой о двух милиционерах получаем, что $\exists \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ □

Теорема 4.20. *$\sin x$ и $\cos x$ непрерывны по всей своей области определения.*

Доказательство. В силу теоремы о композиции непрерывных функций достаточно доказать непрерывность синуса в каждой точке, так как $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$: $|\sin x_1 - \sin x_2| = \left|2\sin\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)\cos\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)\right| \leqslant 2\left|\sin\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)\right| \leqslant 2 \cdot \frac{|x_1 - x_2|}{2} = |x_1 - x_2|$

Следовательно, если зафиксировать x_0, то

$$0 \leqslant |\sin x - \sin x_0| \leqslant |x - x_0| \to 0, x \to x_0.$$

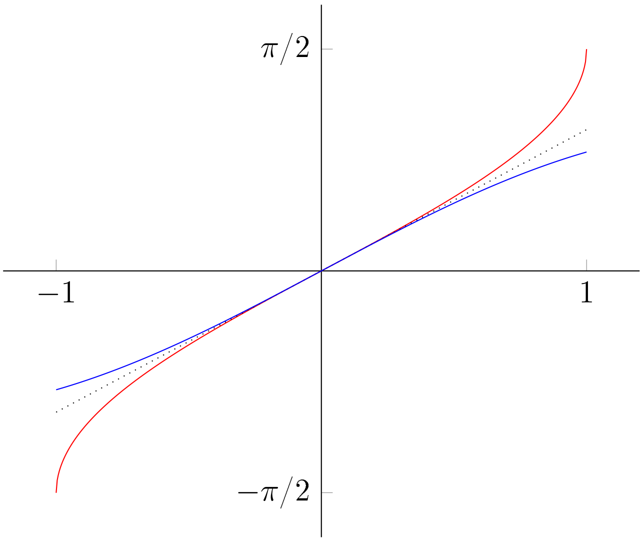
По теореме о двух милиционерах $\lim\limits_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0$. □

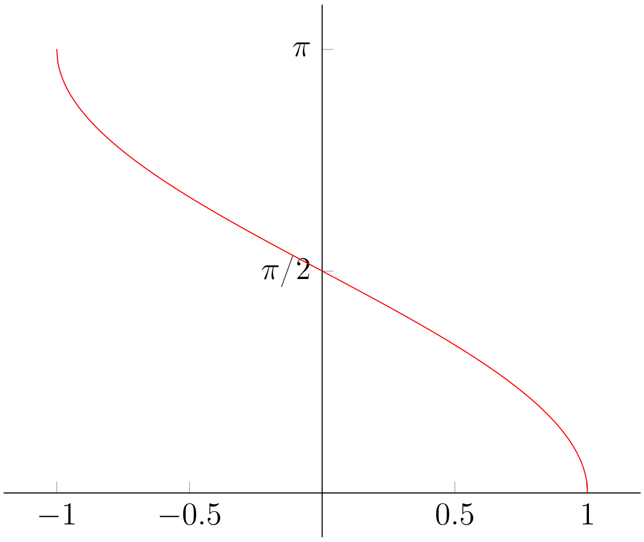
Определение 4.30. Функция $\arcsin x$ по определению обратна к $\sin x$ на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$

Она существует, так как $\sin x$ монотонен и непрерывен на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$

Следовательно, $arcsinx$ строго возрастает и непрерывна на $[-1, 1]$.

Определение 4.31. Функция $\arccos x$ по определению обратна к $\sin x$ на отрезке $[0, \pi]$
Она существует, так как $\cos x$ монотонен и непрерывен на отрезке $[0, \pi]$.
Следовательно, $arccosx$ строго убывает и непрерывна на $[-1, 1]$.





4.12 Число e

Лемма 4.11. *(Неравенство Бернулли)*

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx, \quad \forall x \geqslant -1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Доказательство. Будем доказывать по индукции:
При $n = 1$ верно.
Предположим, что доказали при $n = k \in \mathbb{N}$. Покажем, что для $n = k + 1$ верно.

$(1+x)^{k+1} = (1+x)(1+x)^k \geqslant (1+x)(1+kx) = 1+(k+1)x+kx^2 \geqslant 1+(k+1)x$, так как $kx^2 \geqslant 0$.

Следовательно, по индукции верно для всех $n \in \mathbb{N}$. □

Теорема 4.21. *Последовательность:*

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \qquad n \in \mathbb{N}$$

ограничена снизу и монотонно не возрастает.

Доказательство.

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \geqslant 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Значит, она ограничена снизу.

Докажем монотонное возрастание (нестрогое убывание) для $n \geqslant 2$:

$$\frac{x_{n-1}}{x_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \frac{n-1}{n} \cdot \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} =$$

$$\frac{n-1}{n} \cdot \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n+1} = \frac{n-1}{n} \cdot \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1} \geqslant \left(1+\frac{n+1}{(n+1)(n-1)}\right) \cdot \frac{n-1}{n} = 1$$

По неравенству Бернулли для $x = \dfrac{1}{n^2-1}$.

$$\text{Итого получаем: } \forall n \geqslant 2 \quad \frac{x_{n-1}}{x_n} \geqslant 1.$$

Следовательно, последовательность нестрого убывает. □

Теорема-определение 4.1. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geqslant 2$ *и это число называется «числом e».*

Доказательство.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geqslant 2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ из неравенства Бернулли.}$$

В силу предыдущей теоремы и теоремы Вейерштрасса о монотонной последовательности

$$\exists \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \inf\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\} \in \mathbb{R}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n}} \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Переходя к пределу в неравенстве:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geqslant 2.$$

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e,\ n \to \infty$ и $2 \to 2,\ n \to \infty$, откуда получаем $e \geqslant 2$. □

4.13 Показательная функция

Лемма 4.12. *$\forall n \in \mathbb{N}$ функция $f(x) = x^n$ непрерывна на $\mathbb{R}$.*
Кроме того, $f\left([0, +\infty)\right) = [0, +\infty) \quad (*)$

Доказательство. Непрерывность следует по индукции из непрерывности произведения непрерывных функций.

Докажем $(*)$. Так как $x \geqslant 0$, то, очевидно, $f\left([0, +\infty)\right) \subset [0, +\infty)$.

Из $f \in C\big([0, +\infty)\big)$ и теоремы о промежуточном значении:

$$\left(\inf_{x\in[0,+\infty)} f(x), \sup_{x\in[0,+\infty)} f(x)\right) \subset f\left([0, +\infty)\right)$$

$$\begin{matrix} \inf\limits_{x\in[0,+\infty)} x^n = 0 \\ \sup\limits_{x\in[0,+\infty)} x^n = +\infty \end{matrix} \Rightarrow (0, +\infty) \subset f\left([0, +\infty)\right)$$

Но кроме того $f(0) = 0$, следовательно:

$$[0, +\infty) \subset f\left([0, +\infty)\right)$$

Из $f([0, +\infty)) \subset [0, +\infty)$ и $[0, +\infty) \subset f([0, +\infty))$ следует, что $f([0, +\infty)) = [0, +\infty)$. □

Лемма 4.13. *$\forall n \in \mathbb{N}$ $f(x) = x^n$ строго возрастает на луче $[0, +\infty)$*

Доказательство. Из только что доказанного следует, $\exists f^{-1} : [0, +\infty) \mapsto [0, +\infty)$, обратная к $f(x) = x^n$. □

Определение 4.32. Корень n-ой степени: $f^{-1}(x^n) := \sqrt[n]{x}$.

Примечание. $f(x) = \sqrt[n]{x}$ строго возрастает на $[0, +\infty)$ и $C\big([0, +\infty)\big)$.

Определение 4.33. Пусть $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{m}{n}$ — несократимая дробь.

$$f(x) = x^{\frac{m}{n}} := \left(\sqrt[n]{x}\right)^m, \quad x \in [0, +\infty).$$

Определение 4.34. $x^{-\frac{m}{n}} := \dfrac{1}{\left(\sqrt[n]{x}\right)^m}, \quad x \in (0, +\infty).$

Примечание. Следующие свойства являются «школьными»:

Пусть $a \in (0; +\infty), b \in (0; +\infty)$.

1. $a^{r_1} < a^{r_2},\ a > 1,$ $\quad r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$: $r_1 < r_2$
2. $a^{r_1} > a^{r_2},\ a \in (0, 1),$ $\quad r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$: $r_1 < r_2$
3. $a^{r_1} \cdot a^{r_2} = a^{r_1 + r_2}$ $\quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$
4. $(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 \cdot r_2}$ $\quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$
5. $(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$ $\quad \forall r \in \mathbb{Q}$
6. $a^0 = 1$

Доказательство. Докажем свойство 1. Так как $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$, то мы всегда можем представить их в виде дробей $\dfrac{m_1}{n}$ и $\dfrac{m_2}{n}$ соответственно, где $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, притом $m_1 < m_2$.

Тогда нам нужно доказать, что $\sqrt[n]{a^{m_1}} < \sqrt[n]{a^{m_2}}$ (1), а для этого доказать, что $a^{m_1} < a^{m_2}$ и $\sqrt[n]{b} < \sqrt[n]{c}$ (2), где $b, c \in (0; +\infty)$:

Шаг 1. Докажем (1).

Для случая $m_1, m_2 > 0$ очевидно, так как исходное неравенство преобразуется к виду $a^{m_1} \cdot (a^{m_2 - m_1} - 1) > 0$, где оба множителя положительные.

Для случая $m_1 < 0, m_2 > 0$: рассмотрим $a^{-|m_1|} \vee a^{m_2} \Leftrightarrow 0 \vee \dfrac{a^{m_2} \cdot a^{|m_1|} - 1}{a^{|m_1|}}$, а так как слева и делимое, и делитель положительные, то должен стоять знак $<$, что нам и нужно было.

Случай $m_1, m_2 < 0$ делается аналогично предыдущему (рассмотрением $a^{-|m_1|}$ и $a^{-|m_2|}$).

Шаг 2. Неравенство (2) следует из строгого возрастания $f(x) = \sqrt[n]{x}$ на луче $[0; +\infty)$.

Объединяя, получаем $a^{r_1} < a^{r_2}$, $a > 1$, $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$. □

Лемма 4.14. *(Неравенство Бернулли 2) Пусть $a > 1$, $|r| \leqslant 1$, $r \in \mathbb{Q}$. Тогда*

$$|a^r - 1| \leqslant 2|r| \cdot (a - 1) \quad (*)$$

Доказательство. Сначала докажем для $r = \dfrac{1}{n}$. Поскольку $a > 1$, то $a^{\frac{1}{n}} = 1 + \alpha$, $\alpha > 0$.

$$a = (1 + \alpha)^n \geqslant 1 + n \cdot \alpha \Rightarrow \alpha \leqslant \left(\frac{a - 1}{n}\right), \text{ значит при } r = \frac{1}{n} \ (*) \text{ выполняется.}$$

Пусть $r \in (0,1]$. Следовательно, $\exists!\ n \in \mathbb{N}:\ r \in \left(\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n}\right]$. И $2r \geqslant \dfrac{1}{n}$.

$$a^r - 1 \leqslant a^{\frac{1}{n}} - 1 \leqslant \frac{1}{n} \cdot (a - 1) \leqslant 2r \cdot (a - 1), \text{ получается при } r \in (0,1] \text{ доказали.}$$

Для $r = 0$ очевидно.

Рассмотрим случай $r \in [-1, 0)$. Тогда $a^r = a^{-|r|} = \dfrac{1}{a^{|r|}}$.

$$|a^r - 1| = 1 - \frac{1}{a^{|r|}} = \frac{1}{a^{|r|}} \cdot (a^{|r|} - 1) \leqslant \frac{2|r| \cdot (a - 1)}{a^{|r|}} \leqslant 2|r| \cdot (a - 1)$$

□

Чтобы доказать неравенство для произвольных действительных $|r| \leqslant 1$, нужно $\forall x \in (-1; 1)$ взять рациональную последовательность r_n, сходящуюся к x, так как для рациональных неравнество верно. А далее предельный переход в неравенстве.

Теорема-определение 4.2. *Пусть $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$. Тогда $\forall \{r_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{Q}$: $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x$.*

$$\exists \lim_{n\to\infty} a^{r_n} =: a^x$$

и этот предел не зависит от выбора последовательности $\{r_n\}$.

Доказательство. Рассмотрим случай $a > 1$. Зафиксируем $x \in \mathbb{R}$ и произвольную последовательность $\{r_n\} \subset \mathbb{Q}$: $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x$.

Так как сходящаяся последовательность ограничена, то

$$\exists M \in \mathbb{N} : |r_n| \leqslant M \Rightarrow \frac{1}{a^M} \leqslant a^{r_n} \leqslant a^M \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Пусть $n, m \in \mathbb{N}$.

$$|a^{r_n} - a^{r_m}| = a^{r_m} \cdot |a^{r_n - r_m} - 1| \leqslant a^M \cdot |a^{r_n - r_m} - 1|.$$

Так как $\{r_n\}$ — сходящаяся последовательность, то она фундаментальна. Значит,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}:\ \forall n, m \geqslant N(\varepsilon) \hookrightarrow |r_n - r_m| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{при } n, m \geqslant N(1) \hookrightarrow |r_n - r_m| < 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \text{при } n, m \geqslant N(1) \hookrightarrow |a^{r_n} - a^{r_m}| \leqslant 2a^M |r_n - r_m| \cdot (a-1)$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \tilde{N}(\varepsilon) = N\left(\frac{\varepsilon}{2a^M \cdot (a-1)}\right) : \forall n, m \geqslant \tilde{N}(\varepsilon) \hookrightarrow |a^{r_n} - a^{r_m}| \leqslant \frac{\varepsilon \cdot 2a^M \cdot (a-1)}{2a^M \cdot (a-1)} = \varepsilon$$

Следовательно, $\{a^{r_n}\}$ фундаментальна. Значит, по критерию коши:

$$\exists \lim_{n\to\infty} a^{r_n} = a^x.$$

Проверим корректность, то есть независимость от выбора последовательности $\{r_n\}$. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} r'_n = x$ и $\lim\limits_{n\to\infty} r''_n = x$.

$$\exists \tilde{N} \in \mathbb{N}:\ \forall n \geqslant \tilde{N} \hookrightarrow |r'_n - r''_n| \leqslant 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall n \geqslant \tilde{N}:\ |a^{r'_n} - a^{r''_n}| = a^{r'_n} \cdot |a^{r''_n - r'_n} - 1| \leqslant 2a^{r'_n} \cdot |r'_n - r''_n| \cdot (a-1)$$

Так как $\{a^{r'_n}\}_{n=1}^{\infty}$ — сходящаяся последовательность, то она ограничена, значит

$$\exists C > 0:\ a^{r'_n} \leqslant C \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 \leqslant |a^{r'_n} - a^{r''_n}| \leqslant 2C \cdot (a-1) \cdot |r'_n - r''_n| \to 0, n \to \infty$$

По теореме о двух миллиционерах:

$$\lim_{n\to\infty} a^{r'_n} = \lim_{n\to\infty} a^{r''_n} = a^x.$$

Случай $a = 1$ тривиален.
Случай $a \in (0,1)$ сводится к только что рассмотренному, если учесть, что

$$a^r = \left(\frac{1}{\frac{1}{a}}\right)^r, \quad \frac{1}{a} > 1.$$

□

Лемма 4.15. *Новое определение совпадает с предыдущим при $x \in \mathbb{Q}$.*

Доказательство. При $x \in \mathbb{Q}$ рассмотрим стационарную последовательность $\{r_n\}_{n=1}^{\infty} = x$.

Тогда по новому определению $a^x = \lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}$ для любой последовательности $\{r_n\}$, сходящейся к x, в частности и для последовательности $\{r_n\} = x$.

Но тогда $a^x = \lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}$ по старому определению. □

Таким образом, мы построили при любом $a > 0$ функцию $a^x : \mathbb{R} \mapsto (0, +\infty)$.

Теорема 4.22. *Пусть $a > 0$. Функция $f(x) = a^x$ непрерывна в каждой точке числовой прямой.*

Доказательство. Пусть $a > 1$. Фиксируем точку $x_0 \in \mathbb{R}$.

Тогда по неравенству Бернулли:

$$\forall x \in U_1(x_0) \hookrightarrow |a^x - a^{x_0}| = a^{x_0} \cdot |a^{x-x_0} - 1| \leqslant 2a^{x_0} \cdot |x - x_0| \cdot (a-1)$$

$$0 \leqslant |a^x - a^{x_0}| \leqslant 2a^{x_0} \cdot |x - x_0| \to 0, x \to x_0 \Rightarrow a^x \to a_{x_0} \cdot (a-1), x \to x_0$$

Следовательно, a^x непрерывна в точке x_0. Но x_0 была выбрана произвольно. При $a > 1$ доказано.

Случай $a = 1$ тривиален, так как $1 = 1^r \quad \forall r \in \mathbb{Q} \Rightarrow 1^x = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Случай $a \in (0, 1)$ сводится к только что рассмотренному, если учесть, что

$$a^r = \left(\frac{1}{\frac{1}{a}}\right)^r, \quad \frac{1}{a} > 1.$$

□

4.14 Свойства показательной функции

Теорема 4.23. *Докажем свойства показательной функции. Считаем* $a, b, c \in (0; +\infty)$, *если не сказано обратного.*

1.	a^x — строго возрастает	$a \in (1; +\infty)$
2.	a^x — строго убывает	$a \in (0, 1)$
3.	$a^x > 0$	$\forall x \in \mathbb{R}$
4.	$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$	$\forall x, y \in \mathbb{R}$
5.	$(a^x)^y = a^{xy}$	$\forall x, y \in \mathbb{R}$
6.	$(bc)^x = b^x \cdot c^x$	$\forall x \in \mathbb{R}$
7.	$a^x \in \mathrm{C}\big(\mathbb{R}\big)$	(доказали используя третье)

Доказательство. 1. Докажем первое свойство, $a \in (1; +\infty)$, второе анологично. Возьмём $x, y \in \mathbb{R}$: $x < y$.

Так как $x < y \Rightarrow \exists p, q \in \mathbb{Q}$: $p \geqslant x$ и $q \leqslant y$: $x < p < q < y$.

Возьмем последовательность $\{r'_n\} \subset \mathbb{Q}$: $\lim\limits_{n\to\infty} r'_n = x$. Тогда $x \leqslant r'_n \leqslant p\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Возьмем последовательность $\{r''_n\} \subset \mathbb{Q}$: $\lim\limits_{n\to\infty} r''_n = y$. Тогда $q \leqslant r''_n \leqslant y\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Пользуясь свойством монотонности a^r по $r \in \mathbb{Q}$

$a^x := \lim\limits_{n\to\infty} a^{r'_n}$, $a^y := \lim\limits_{n\to\infty} a^{r''_n}$.

$a^{r'_n} \leqslant a^p < a^q \leqslant a^{r''_n}\ \forall n \in \mathbb{N}$

Из предельного перехода в неравенствах и используя определения a^x и a^y получаем:

$$\begin{cases} a^x \leqslant a^p \\ a^q \leqslant a^y \end{cases} \Rightarrow a^x \leqslant a^p < a^q \leqslant a^y$$

2. Докажем третье свойство:

$a > 1$, $a \in (0, 1)$ аналогично

Пусть $x \in \mathbb{R}$. Тогда $\exists p \in \mathbb{Q} : p \leqslant x$, но для любого рационального числа: $0 < a^p \leqslant a^x$.

3. Докажем четвертое свойство:

Пусть $x, y \in \mathbb{R}$. Возьмем аппроксимирующие последовательности:

$$\{r'_n\}, \{r''_n\} \subset \mathbb{Q} : \lim_{n\to\infty} r'_n = x, \ \lim_{n\to\infty} r''_n = y.$$

$a^{r'_n} \cdot a^{r''_n} = a^{r'_n + r''_n}, \forall n \in \mathbb{N}$
Переходим к пределу в равенстве:
$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
Так как x и y - произвольные, верно для всех
4. Докажем пятое свойство: Фиксируем произвольные x,$y \in \mathbb{R}$ Возьмем две аппроксимирующие последовательности для x
Обозначим $r'_n \downarrow x, \ , n \to \infty$ Последовательность r'_n монотонно убывает к x
Обозначим $r''_n \uparrow x, \ , n \to \infty$ Последовательность r''_n монотонно возрастает к x
$\rho'_n \uparrow y, \ n \to \infty$
$\rho''_n \uparrow y, \ n \to \infty$

$$(a^{r''_n})^{\rho''_n} \leqslant (a^x)^{\rho''_n} \leqslant (a^x)^y \leqslant (a^{r'_n})^y \leqslant a^{r'_n \cdot \rho'_n}$$

В итоге

$$(a^{r''_n})^{\rho''_n} \leqslant (a^x)^y \leqslant a^{r'_n \cdot \rho'_n}$$

Переходим к переделу при $n \to \infty$ в этих двух неравенствах

$$a^{x \cdot y} \leqslant (a^x)^y \leqslant a^{x \cdot y} \Rightarrow (a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

5. Шестое свойство доказывается также предельным переходом
$\{r'_n\} \subset \mathbb{Q}: \quad r'_n \to x, n \to \infty$

$$(bc)^x = \lim_{n \to \infty} (bc)^{r'_n} = \lim_{n \to \infty} b^{r'_n} c^{r'_n} = \lim_{n \to \infty} b^{r'_n} \cdot \lim_{n \to \infty} c^{r'_n} = b^x c^x$$

6. Седьмое свойство (о непрерывности) доказано.

□

Определение 4.35. Если в показательной функции $a = e$, то функция вида e^x называется экспонентой

Определение 4.36. Пусть $a > 0, a \neq 1$, тогда существует обратная функия к a^x, называется логарифмом и записывается как $\log_a x$

Примечание. Если $a = 1$ разрешить, то теряется инъективность. Так как 1^x это константа, которая отображает все x в одну точку.

Теорема 4.24. *Если $a > 1$, то $\log_a x$ корректно определена, строго возрастает и непрерывна на луче $(0, +\infty)$, а ее область значений — $\mathbb{R}$;*

Если $a \in (0, 1)$ то $\log_a x$ корректно определена, строго убывает и непрерывна н луче $(0, +\infty)$, а ее область значений — $\mathbb{R}$.

Доказательство. Докажем при $a > 1$, при $a \in (0, 1)$, аналогично.
Так как a^x - строго возрастает и непрерывна, то существует обратная к ней
Область значений луч $(0, +\infty)$
При $n \in \mathbb{N}$, $a^n \geqslant 1 + (a-1)n \to +\infty, \ n \to +\infty$
$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \leqslant \frac{1}{(a-1)n} \to +0, \ n \to +\infty$
$\inf\limits_{x \in \mathbb{R}} a^x = 0$
$\sup\limits_{x \in \mathbb{R}} a^x = +\infty$
По обобщенной теореме о промежуточном значении для a^x и теоремы об обратной функции. $\log_a x$ -непрерывен строго возратает на луче $(0, +\infty)$, и область значений $\mathbb{R}$ □

Определение 4.37. $lnx := \log_e x$ и называется натуральным логарифмом

Определение 4.38. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$. Рассмотим функцию:

$$x^\alpha := e^{\alpha lnx},\ x > 0$$

Эта функция строго монотонна (за исключением случая $\alpha = 0$). Она непрерывна на луче $(0, +\infty)$ как композиция непрерывных функций.

Если $\alpha \geqslant 0$, то x^α можно рассмотреть на луче $[0, +\infty)$, полагая $0^\alpha := 0$

Теорема 4.25. *Доказательство некоторых школьных свойства логарифма по определению*

1. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y,\ a > 0, a \neq 1,\ \forall x,y > 0$
2. $\log_a b \cdot \log_b a = 1 \quad a > 0, a \neq 1, \quad b > 0, b \neq 1$
3. $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x,\ x > 0, a > 0, a \neq 1, \alpha \in \mathbb{R}$

Доказательство. 1. Фиксируем произвольные x, y, по определнию логарифма (обратная функция):

$$xy = a^{\log_a(xy)}$$

$$a^{\log_a x + \log_a y} = (a^{\log_a x})(a^{\log_a y}) = xy = a^{\log_a x}$$

Так как a^x инъективно

$$a^{\log_a(xy)} = a^{\log_a x + \log_a y} \Rightarrow \log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

2. В силу инъективности a^x

$$a^{\log_a b \cdot \log_b a} = \left(a^{\log_a b}\right)^{\log_b a} = b^{\log_b a} = a = a^1$$

3. $a^{\log_a x^\alpha} = x^\alpha$

$a^{\alpha \log_a x} = \left(a^{\log_a x}\right)^\alpha = x^\alpha$

$\square$

4.15 Второй замечательный предел

Лемма 4.16. *Пусть* $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$ — *последовательность натуральных числел, такая что* $\exists \lim\limits_{k\to\infty} n_k = +\infty$. *Тогда:*

$$\exists \lim_{k\to\infty} = \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k} = e$$

Доказательство. По определению числа e:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \hookrightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \in U_\varepsilon(e)$$

Так как $\lim\limits_{k\to\infty} n_k = +\infty$, то $\exists K(\varepsilon) : \forall k \geqslant K(\varepsilon) \hookrightarrow n_k \geqslant N(\varepsilon) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists K(\varepsilon) : \forall k \geqslant K(\varepsilon) \hookrightarrow \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k} \in U_\varepsilon(e) \Rightarrow \exists \lim_{k\to\infty} = \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k} = e$$

$\square$

Лемма 4.17. $\exists \lim\limits_{x\to 0+0} (1+x)^{1/x} = e$

Доказательство. Возьмем последовательность Гейне в нуле (справа) $\{x_k\}$, то есть $x_k \to 0, k \to \infty$ и $x_k > 0\ \forall k \in \mathbb{N}$

Так как $x_k \to +0, k \to \infty \Rightarrow \exists K_0 \in \mathbb{N}:\ \forall k \geqslant K_0 \hookrightarrow x_k \in (0,1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \forall k \geqslant K_0\ \exists n_k \in \mathbb{N}:\ (x_k)^{-1} \in [n_k, n_{k+1})$$

$$\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k} \leqslant (1+x)^{1/x_k} \leqslant \left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}$$

$$\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k} = \frac{\left(1+\dfrac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}}{1+\dfrac{1}{n_k+1}} \to e, k \to \infty \text{ по предыдущей лемме}$$

$$\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1} \to e, k \to \infty \text{ аналогично предыдущему}$$

Так как последовательность Гейне была выбрана произвольно, то вышенаписанное справедливо для любой последовательности Гейне, значит, по теореме об эквивалетности определений по Коши и по Гейне для одностороннего предела функции (аналогична теореме об эквивалетности определений по Коши и по Гейне для предела функции) получаем $\exists \lim\limits_{x\to 0+0} (1+x)^{1/x} = e$ $\square$

Лемма 4.18. $\exists \lim\limits_{x\to 0-0} (1+x)^{1/x} = e$

Доказательство. Возьмем последовательность Гейне $\{x_k\}$ такую, что $x_k \to 0, k \to \infty$ и $x_k < 0\ \forall k \in \mathbb{N}$

Рассмотрим последовательность $y_k = \dfrac{-x_k}{1+x_k} > 0 \Rightarrow x_k = \dfrac{-y_k}{1+y_k}$

$$(1+x_k)(1+y_k) = 1\ \forall f \in \mathbb{N}$$

$$(1+x_k)^{1/x_k} = \left[(1+y_k)^{-1}\right]^{-\dfrac{1+y_k}{y_k}} = (1+y_k)^{\frac{1}{y_k}+1} = (1+y_k)^{\frac{1}{y_k}} \cdot (1+y_k) \to e, k \to \infty$$

$$(1+y_k)^{\frac{1}{y_k}} \to e, k \to \infty, \qquad (1+y_k) \to 1, k \to \infty$$

Следовательно, $\exists \lim\limits_{k\to\infty} (1+x_k)^{1/x_k} = e$. Значит, $\exists \lim\limits_{x\to 0-0} (1+x)^{1/x} = e$. $\square$

Следствие. $\exists \lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e$ — *второй замечательный предел*

Пример. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \ln(1+x)^{1/x}$$

$y(x) = (1+x)^{1/x}$ корректно определена в проколотой окрестности 0, $\exists \lim\limits_{x\to 0} y(x) = e$
$\ln(y)$ непрерывна на всей числовой прямой, в частности непрерывна в точке e.
Значит, по теореме о замене переменной при вычислении предела

$$\exists \lim_{x\to 0} \ln(y(x)) = \lim_{y\to e} \ln(y) = \ln e = 1$$

Пример. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$$\begin{matrix} y(x) = e^x - 1 \\ x = \ln(1+y(x)) \end{matrix} \Rightarrow \frac{e^x-1}{x} = \frac{y(x)}{\ln(1+y(x))}$$

Так как e^x строго растет, то $e^x - 1$ тоже. Значит, $y(x)$ — инъекция. Следовательно, если $x \neq 0$, то $y(x) \neq 0 \Rightarrow \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(0) \hookrightarrow y(x) \neq 0$.

Значит, можно воспользоваться теоремой о замене переменной при вычислении предела:

$$\exists \lim_{x\to 0} \frac{y(x)}{\ln(1+y(x))} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\ln(1+y)} = 1$$

4.16 Эквивалентность функций

Определение 4.39. Пусть $\delta_0 > 0,\ x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Пусть $\begin{matrix} f : \overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0) \mapsto \mathbb{R}, \\ g : \overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0) \mapsto \mathbb{R}, \end{matrix}$

Будем говорить, что $f(x) \sim g(x)$, $x \to x_0$, если $\exists \theta$: $\overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0) \mapsto \mathbb{R}$, такая что

1. $\lim\limits_{x\to x_0} \theta(x) = 1$;

2. $f(x) = \theta(x) \cdot g(x) \quad \forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0)$.

Определение 4.40. *(Из стандартных книжек).*

$f(x) \sim g(x), x \to x_0$, если $\exists \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1,\ g(x) \neq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Примечание. «$\sim$» — действительно отношения эквивалентности на множестве функций, заданных в $\overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0)$.

a) Рефлексивность: $f(x) \sim f(x), x \to x_0$

Доказательство. Возьмём $\theta \equiv 1$. □

b) Симметрия: $f(x) \sim g(x)$, $x \to x_0 \Rightarrow g(x) \sim f(x)$, $x \to x_0$.

Доказательство. $f(x) \sim g(x)$, $x \to x_0 \Rightarrow \exists \theta(x) : \begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0} \theta(x) = 1 \\ f(x) = \theta(x) g(x) \end{cases}$

Тогда пусть $\overline{\theta}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta(x)},\ \theta(x) \neq 0 \\ 1,\ \theta(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0} \overline{\theta}(x) = 1 \\ g(x) = \overline{\theta}(x) f(x) \quad \forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0) \end{cases}$ □

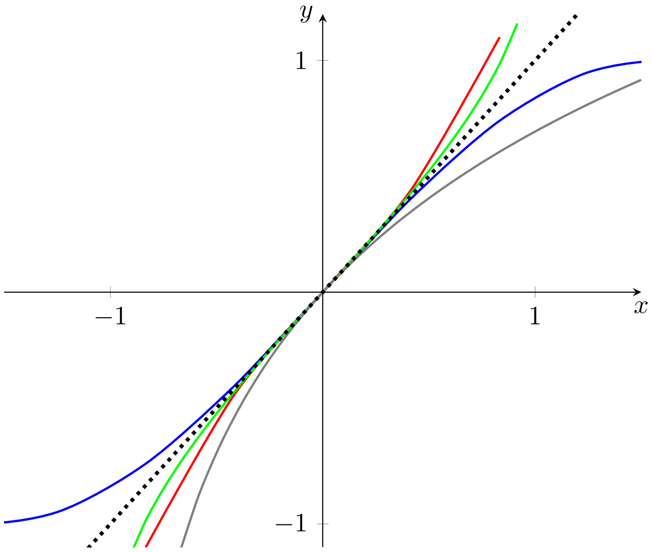
c) Транзитивность: $f(x) \sim g(x), x \to x_0$ и $g(x) \sim h(x), x \to x_0 \Rightarrow f(x) \sim h(x), x \to x_0$

Доказательство. $\begin{array}{l}\exists \theta_1(x):\ \ f(x) = \theta_1(x) g(x) \\ \exists \theta_2(x):\ \ g(x) = \theta_2(x) h(x) \\ \lim\limits_{x\to x_0} \theta_1(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \theta_2(x) = 1\end{array} \Rightarrow \theta(x) := \theta_1(x)\theta_2(x),$

Так как $\begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0} \theta(x) = 1 \\ f(x) = \theta(x)h(x) \quad \forall x \in \mathring{U}_{\delta_0}(x_0) \end{cases} \Rightarrow f(x) \sim h(x), x \to x_0$ □

Примеры.

1. $\sin x \sim x,\ x \to 0$
2. $\cos x \sim 1,\ x \to 0$
3. $\tan x \sim x,\ x \to 0$
4. $\arcsin x \sim x,\ x \to 0$
5. $e^x \sim 1 + x,\ x \to 0$
6. $\ln(1+x) \sim x,\ x \to 0$



Лемма 4.19. *Пусть* $x_0 \in \overline{\mathbb{R}},\ \delta_0 > 0 \quad f_1,\ f_2,\ g_1,\ g_2\colon \mathring{U}_{\delta_0}(x_0) \mapsto \mathbb{R} \leftarrow$ *но так писать не следует, лучше каждую отдельно.*

Пусть $\begin{cases} f_1(x) \sim g_1(x),\ x \to x_0 \\ f_2(x) \sim g_2(x),\ x \to x_0 \end{cases}$, *тогда* $f_1(x)\cdot f_2(x) \sim g_1(x)\cdot g_2(x), x \to x_0$.

Если дополнительно $f_2(x) \neq 0,\ g_2(x) \neq 0,\ \forall x \in \mathring{U}_{\delta_0}(x_0)$, *тогда* $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} \sim \dfrac{g_1(x)}{g_2(x)},\ x \to x_0$.

Доказательство. $f_i(x) \sim g_i(x), x \to x_0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow\ \ i = 1,2 \quad \exists \theta_i(x): \begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0} \theta_i(x) = 1 \\ f_i(x) = \theta_i(x) g_i(x) \quad \forall x \in \mathring{U}_{\delta_0}(x_0), \end{cases}$$

$$\theta(x) = \theta_1(x)\theta_2(x): \begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0} \theta(x) = 1 \\ f_1(x) f_2(x) = \theta(x) g_1(x) g_2(x) \quad \forall x \in \mathring{U}_{\delta_0}(x_0) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_1(x)f_2(x) \sim g_1(x)g_2(x), x \to x_0$$

Для частного рассуждения аналогичны. □

Примечание. Если $\begin{cases} f_1(x) \sim g_1(x), x \to x_0 \\ f_2(x) \sim g_2(x), x \to x_0 \end{cases}$, то из этого **не** следует, что $f_1(x) \pm f_2(x) \sim g_1(x) \pm g_2(x),\ x \to x_0$

Пример. Возьмём $x^3 + x \sim x + x^2,\ x \to 0$ и $x \sim x,\ x \to 0$.
Вычтем одно из другого. Неверно, что $x^3 \sim x^2,\ x \to 0$.

Примечание. Эквивалентность исходных функций в $\mathring{U}_{\delta_0}(x)$ доказывается легко по «книжному» определению.

Замена на эквивалентность позволяет относительно легко вычислять пределы.

Примера не будет. Автор устал((

Лемма 4.20. *Пусть* $\delta_0 > 0,\ x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. *Пусть* $\begin{matrix} f : \mathring{U}_{\delta_0}(x_0) \mapsto \mathbb{R}, \\ g : \mathring{U}_{\delta_0}(x_0) \mapsto \mathbb{R} \end{matrix}$ *и* $f(x) \sim g(x), x \to x_0$

Тогда $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x_0) \in \overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \exists \lim\limits_{x \to x_0} g(x) \in \overline{\mathbb{R}}$ *и если они оба существуют, то равны.*

Доказательство. Задание на дом) □

Определение 4.41. (о-малое) Пусть $\delta_0 > 0,\ x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Пусть $f, g : \mathring{U}_{\delta_0}(x_0) \mapsto \mathbb{R}$.

Говорят, что f является *бесконечно малой функцией по сравнению с* g *при* $x \to x_0$, и записывается это как $f(x) = o(g(x)), x \to x_0$, если $\exists \varepsilon(x)$: $\mathring{U}_{\delta_0}(x_0) \mapsto \mathbb{R}$ такая что:

1. $\varepsilon(x) \to 0, x \to x_0$;
2. $f(x) = \varepsilon(x) g(x) \quad \forall x \in \mathring{U}_{\delta_0}(x_0)$.

Примечание. $f(x) = o(g(x)),\ x \to x_0$ необратимо, то есть нельзя писать $o(g(x)) = f(x)$, потому что $o(g(x))$ — это не индивидуально взятая функция, а целый класс функций.

Лемма 4.21. *Пусть* $\delta_0 > 0$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. *Пусть* f, g: $\mathring{U}_{\delta_0}(x_0) \mapsto \mathbb{R}$. *Тогда если* $f(x) \sim g(x), x \to x_0$, *то* $f(x) - g(x) = o(g(x))$, $x \to x_0$.

Доказательство.

$$\exists \theta(x) : \begin{cases} o(x) = 1 \\ f(x) = \theta(x) g(x) \quad \forall x \in \mathring{U}_{\delta_0}(x_0), \end{cases} \Leftrightarrow f(x) - g(x) = (\theta(x) - 1) g(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon(x) = \theta(x) - 1 \to 0,\ x \to x_0.$$

□

Примеры.

1. $\sin x = x + o(x),\ x \to 0$;
2. $\cos x = 1 + o(x)$, $x \to 0$;
3. $\tan x = x + o(x)$, $x \to 0$;
4. $\arcsin x = x + o(x)$, $x \to 0$;
5. $e^x = 1 + x + o(x)$, $x \to 0$;
6. $\ln(1 + x) = x + o(x)$, $x \to 0$.

Определение 4.42. Пусть $\delta_0 > 0,\ x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Пусть $f, g : \mathring{U}_{\delta_0}(x_0) \mapsto \mathbb{R}$.

Будем говорить, что f *ограничена относительно* g *в окрестности точки* x_0 и записывать $f(x) = O(g(x)), x \to x_0$, если

$$\begin{cases} \exists C > 0 : \\ \exists \delta \in (0, \delta_0) \end{cases} \quad |f(x)| \leqslant C |g(x)| \quad \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0)$$

Примечание. $f(x) = O(g(x)), x \to x_0$ необратимо, то есть нельзя писать $O(g(x)) = f(x)$, потому что $O(g(x))$ — это не индивидуально взятая функция, а целый класс функций.

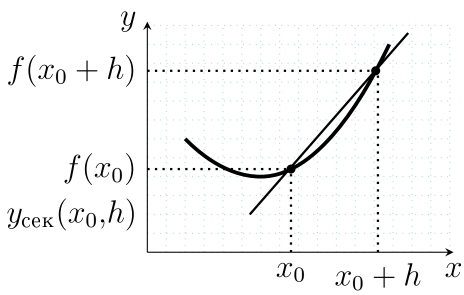
1. $o(f) \pm o(f) = o(f), x \to x_0$
2. $o(f) \cdot o(f) = o(f^2), x \to x_0$
3. $O(f) \pm O(f) = O(f), x \to x_0$
4. $O(f) \cdot O(f) = O(f^2), x \to x_0$
5. $o(f) \cdot O(g) = o(f \cdot g), x \to x_0$
6. $o(f) \pm O(f) = O(f), x \to x_0$
7. $o(f) \cdot o(g) = o(f \cdot g), x \to x_0$

5 Производная функции в точке. Дифференциал. Дифференцируемость

Определение 5.1. Пусть $f : U_{\delta_0}(x_0) \mapsto \mathbb{R},\ x_0 \in \mathbb{R}, \delta_0 > 0$. *Производной функции* f *в точке* x_0 называется:

$$\frac{df}{dx}(x_0) = f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \overline{\mathbb{R}}$$

Определение 5.2. Пусть $x_0 \in \mathbb{R},\ \delta_0 > 0\quad x_0, x_0 + h \in U_{\delta_0}(x_0)$. *Секущей* называется прямая, проходящая через точки $(x_0, f(x_0))$ и $(x_0 + h, f(x_0 + h))$



$$y_{\text{сек.}}[x_0, h](x) = f(x_0) + \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}(x - x_0)$$

Примечание. *Геометрический смысл производной —* предельное положение секущей, то есть прямая, тангенс угла наклона которой является пределом тангенсов углов наклона секущих в зависимости от h

Определение 5.3. Пусть $f : U_{\delta_0}(x_0) \mapsto \mathbb{R},\ x_0 \in \mathbb{R}, \delta_0 > 0$. Будем говорить, что f *дифференцируема в точке* x_0, если $\exists A \in \mathbb{R} : f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0), x \to x_0$

Теорема 5.1. *Функция* $f : U_{\delta_0}(x_0) \mapsto \mathbb{R}$ *дифференцируема в точке* $x_0 \Leftrightarrow f'(x_0) \in \mathbb{R}$. *При этом* $A = f'(x_0)$.

Доказательство. Функция дифференцируема в точке x_0 значит:

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + \varepsilon(x)(x - x_0),\ \forall x \in U_{\delta_0}(x_0),\ \text{и } \varepsilon \to 0, x \to x_0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A + \varepsilon(x), \varepsilon \to 0, x \to x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A$$

□

Определение 5.4. Пусть f дифференцируема в точке x_0. Тогда *дифференциалом* f *в точке* x_0 называется функция $df_{x_0}(h) = f'(x_0)h$

На практике обычно используют обозначения $df(x_0, dx) = f'(x_0)dx$

Задача. *Как связаны условия:*

1. *f дифференцируема в точке x_0*
2. *f непрерывна в точке x_0*

Решение. 1) $\Leftrightarrow \exists A \in \mathbb{R}$: $f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0) \to f(x_0)$, $A(x - x_0) \to 0$, $o(x - x_0) \to 0$, $x \to x_0 \Rightarrow 2)$.

Из 2) не следует 1). Действительно, дифференцируемость равносильна существованию конечной производной. Следовательно, достаточно предъявить функцию непрерывную в точке, но не имеющую в ней конечной производной.

Например, $f(x) = |x|$ непрерывна в каждой точке, но в нуле не имеет производной.

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

$$\frac{|x| - 0}{x} = \mathrm{sign} x.$$

Но $\mathrm{sign} x$ в нуле не имеет предела.

Ответ: из 1) следует 2)

5.1 Односторонние производные

Определение 5.5. *Односторонние окрестности:*

$$U_\delta^+(x_0) := [x_0, x_0 + \delta)$$

$$U_\delta^-(x_0) := (x_0 - \delta, x_0]$$

Определение 5.6. Пусть $f : U_{\delta_0}^+(x_0) \mapsto \mathbb{R}$. Тогда если

$$\exists \lim_{x\to x_0+0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \overline{R},$$

то он называется *правосторонней производной функции f в точке x_0* и обозначается $f'_+(x_0)$

Аналогично определяется *левосторонняя производная функции f в точке x_0* и обозначается $f'_-(x_0)$

Пример. Рассмотрим $f(x) = |x|$.

$$f'_+(0) = \lim_{x\to+0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to+0} \frac{x}{x} = 1;$$

$$f'_-(0) = \lim_{x\to-0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to-0} \frac{-x}{x} = -1.$$

Теорема 5.2. *Пусть f дифференцируется в точке x_0. Тогда $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. Функция f дифференцируема в точке x_0:

$$\exists f'(x_0) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \exists \lim_{x\to x_0+0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0-0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

□

5.2 Правила вычисления производных и дифференциалов

Теорема 5.3. *Пусть функции f и g дифференцируемые в точке $x_0 \in \mathbb{R}$.*

Тогда $f \pm g$ и $f \cdot g$ дифференцируемые в точке x_0, если $g(x_0) \neq 0$, то $\dfrac{f}{g}$ дифференцируема в точке x_0

Более того справедливы равенства:

1. $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$
2. $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$
3. $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}, \qquad g'(x_0) \neq 0.$

Доказательство. Введем обозначения $\Delta f = f(x) - f(x_0)$, $\Delta g = g(x) - g(x_0)$, $\Delta x = x - x_0$.

1. $\dfrac{\Delta(f \pm g)}{\Delta x} = \dfrac{\Delta f \pm \Delta g}{\Delta x} = \dfrac{\Delta f}{\Delta x} \pm \dfrac{\Delta g}{\Delta x}$;

   $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} \to f'(x_0)$, $\Delta x \to 0 \qquad \dfrac{\Delta g}{\Delta x} \to g'(x_0)$, $\Delta x \to 0$;

   Тогда $\dfrac{\Delta(f \pm g)}{\Delta x} \to f'(x_0) \pm g'(x_0),\ x \to x_0 \Rightarrow (f \pm g)'(x_0) \to f'(x_0) \pm g'(x_0),\ x \to x_0$.

2. $\dfrac{\Delta(f \cdot g)}{\Delta x} = \dfrac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{\Delta x} = \dfrac{f(x)\left[g(x) - g(x_0)\right]}{\Delta x} + \dfrac{g(x_0)\left[f(x) - f(x_0)\right]}{\Delta x} =$

   $= f(x) \cdot \dfrac{\Delta g}{\Delta x} + g(x_0) \cdot \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$.

   $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} \to f'(x_0), \Delta x \to 0 \qquad \dfrac{\Delta g}{\Delta x} \to g'(x_0), \Delta x \to 0$

   $f(x) \to f(x_0), \Delta x \to 0$, так как из дифференцируемости в точке x_0 следует непрерывность

   Тогда $\dfrac{\Delta(f \cdot x)}{\Delta x} \to f(x_0)g'(x_0) + g(x_0)f'(x_0),\ \Delta x \to 0 \Rightarrow (f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$.

3. $\dfrac{\Delta\left(\dfrac{f}{g}\right)}{\Delta x} = \dfrac{\dfrac{f(x)}{g(x)} - \dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}}{\Delta x} = \dfrac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)\Delta x} =$

   $= \left(\dfrac{\left[f(x) - f(x_0)\right]g(x_0)}{\Delta x} - \dfrac{f(x_0)\left[g(x) - g(x_0)\right]}{\Delta x}\right) \cdot \dfrac{1}{g(x)g(x_0)},\ g(x_0) \neq 0,\ g$ непрерывна в точке x_0.

   Следовательно, переходя к пределу при $x \to x_0$ получим требуемое.

□

Следствие. $(cf)'(x_0) = c \cdot f'(x_0) \qquad \forall c \in \mathbb{R}$

Следствие. Пусть f и g дифференцируемы в точке x_0. Тогда выполнено следущее:

1. $d(f \pm g)(x_0) = df(x_0) \pm dg(x_0)$

2. $d(f\cdot g)(x_0) = df(x_0)\cdot g(x_0) + f(x_0)\cdot dg(x_0)$

3. $dg(x_0)\neq 0 \quad d\left(\dfrac{f}{g}\right)(x_0) = \dfrac{df(x_0)\cdot g(x_0) - f(x_0)\cdot dg(x_0)}{g^2(x_0)}$

Теорема 5.4. *(Производная сложной функции) Пусть f дифференцируема в точке y_0, g дифференцируем в точке x_0. Тогда композиция $f\circ g$ дифференцируема в точке x_0 и $(f\circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$.*

Примечание. Функция f дифференцируема в точке y_0, g — в точке x_0, значит они определены в некоторой окрестности. Значения функции g попадут в область определения функции f, потому что g непрерывна (так как дифференцируема). Значит, для любой окрестности, где определена f найдется такая окрестность, что как только x попадает в нее, то $g(x)$ попадает окрестность, где определена f.

Доказательство. Так как f дифференцируема в точке y_0, то $\exists f'(y_0)\in\mathbb{R}$.

$$f(y) = f(y_0) + f'(y_0)(y-y_0) + \varepsilon_1(y)(y-y_0) \qquad \forall y\in U_\delta(y_0) \quad \varepsilon_1(y)\to 0, \quad y\to y_0;$$

$$g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x-x_0) + \varepsilon_2(x)(x-x_0) \qquad \forall x\in U_\delta(x_0), \quad \varepsilon_2(x)\to 0, \quad x\to x_0.$$

Вместо y подставим $g(x)$

$$f(g(x)) = f(g(x_0)) + f'(g(x_0))\Big(g'(x_0)(x-x_0)+\varepsilon_2(x)(x-x_0)\Big)+$$

$$+\varepsilon_1(g(x))\Big(g'(x_0)(x-x_0)+\varepsilon_2(x)(x-x_0)\Big) = (f\circ g)(x_0) + f'(g(x_0))g(x_0)(x-x_0)+$$

$$+\Big\{\varepsilon_2(x)f'(g(x_0))(x-x_0) + \varepsilon_1(g(x))g'(x_0)(x-x_0) + \varepsilon_1(g(x))\varepsilon_2(x)(x-x_0)\Big\}$$

$$\{\} = (x-x_0)\Big[\varepsilon_2(x)f'(g(x_0)) + \varepsilon_1(g(x))g'(x_0) + \varepsilon_1(g(x))\varepsilon_2(x)\Big] = (x-x_0)\cdot\varepsilon(x) \quad \varepsilon(x)\to 0, x\to x_0$$

Доопределим $\varepsilon_1(g(x_0)) = \varepsilon_1(y_0) = 0$. Тогда ε_1 становится непрерывной в y_0. И по теореме о замене переменной при вычислении предела $\varepsilon_1(g(x))\to 0, x\to x_0$ □

Теорема 5.5. *(Производная обратной функции) Пусть $y: U_\delta(x_0)\mapsto\mathbb{R}$ строго монотонна и непрерывна в этой окрестности. Пусть $y'(x_0)\neq 0$. Тогда существует обратная функция $x: U_\sigma(y_0)\mapsto U_\delta(x_0)$ строго монотонна и непрерывна в $U_\sigma(y_0)$. При этом x дифференцируема в точке $y_0 = y(x_0)$ и $x'(y_0) = \dfrac{1}{y'(x_0)}$*

Доказательство. Первая часть теоремы была доказана ранее. Докажем существование производной.

$$\frac{y-y_0}{x(y)-x(y_0)} = \frac{1}{\dfrac{x(y)-x(y_0)}{y(x(y))-y(x(y_0))}} \Leftrightarrow \frac{x(y)-x(y_0)}{y-y_0} = \frac{1}{\dfrac{y(x(y))-y(x(y_0))}{x(y)-x(y_0)}}$$

$y(x)$ и $x(y)$ взаимообратны.

Так как $x(y)$ осуществляет биективное отображение $U_\delta(y_0)\mapsto U_\delta(x_0)$, то $x(y)\neq x_0$ при $y\neq y_0$. Из непрерывности $x(y)$ в точке y_0 следует $\exists \lim\limits_{x\to x_0} x(y) = x(y_0)$. Следовательно, можно воспользоваться теоремой о замене переменной при вычислении предела.

$$\exists \lim_{y\to y_0} \frac{1}{\dfrac{y(x(y)) - y(x(y_0))}{x(y) - x(y_0)}} = \lim_{x\to x_0} \left(\frac{y(x) - y(x_0)}{x - x_0}\right)^{-1} = \frac{1}{y'(x_0)} = x'(y_0)$$

$\square$

Следствие.

1. $a^x = a^x \cdot \ln a,\ \ \forall a \in (0; +\infty),\quad x \in \mathbb{R}$
2. $(\sin x)' = \cos x,\quad x \in \mathbb{R}$
3. $(\cos x)' = -\sin x,\quad x \in \mathbb{R}$
4. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x},\quad x \in \mathbb{R}$
5. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x},\quad x \in \mathbb{R}$
6. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$
7. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad x \in (0; \pi)$
8. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x},\quad x \in (0; +\infty)$
9. $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2},\quad x \in \mathbb{R}$
10. $(\operatorname{arcctg} x)' = \dfrac{-1}{1+x^2},\quad x \in \mathbb{R}$
11. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x,\quad x \in \mathbb{R}$
12. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x,\quad x \in \mathbb{R}$
13. $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x},\quad x \in \mathbb{R}$
14. $(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x},\quad x \in \mathbb{R}$

Доказательство.

1. $\dfrac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = e^{x_0}\dfrac{(e^{x-x_0} - 1)}{x - x_0} \to e^{x_0}, x \to x_0 \Rightarrow (e^x)' = e^x$

   $(a^x)' = (e^{\ln a \cdot x})' = e^{y(x)} \cdot y'(x) = a^x \cdot \ln a,\quad y(x) = \ln a \cdot x.$

2. $\dfrac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \dfrac{\sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0}{\Delta x} = \dfrac{\sin x_0 \cdot \cos(\Delta x) + \cos x_0 \cdot \sin(\Delta x) - \sin x_0}{\Delta x} = \cos x_0.$

3. Редукция с помощью сдвига на $\dfrac{\pi}{2}$.

4. $(\operatorname{tg} x)' = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)' = \dfrac{\cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot \sin x}{\cos^2 x}\dfrac{1}{\cos^2 x}$

5. Аналогично $(\operatorname{tg} x)'$.

6. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\cos(\arcsin x)} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

7. Аналогично $(\arcsin x)'$.

8. $y'(x) = (\ln x)' = \dfrac{1}{e^{y(x)}} = \dfrac{1}{e^{\ln x}} = \dfrac{1}{x}.$

9. $(\arctan x)' = \dfrac{1}{\dfrac{1}{\cos^2(\arctan x)}} = \dfrac{1}{1+x^2}.$

10. Аналогично $(\arctan x)'$.

11. Задание на дом:)

12. Задание на дом:)

13. $(\operatorname{th} x)' = \left(\dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \dfrac{\operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x} = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$.

14. $(\operatorname{th} x)' = \left(\dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}\right)' = \dfrac{\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x} = \dfrac{-1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

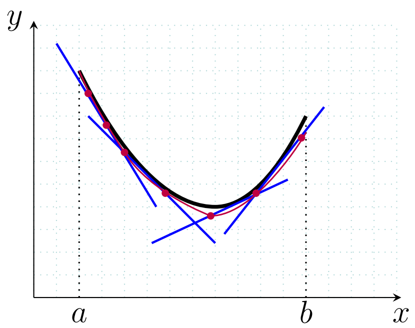
$\square$

5.3 Производные и дифференциалы высших порядков

Определение 5.7. $f^0 = f(x), f'(x)$ определили. ($f'(x)$ — функция точки x).

Далее по индукции. Если в некоторой окрестности точки x_0 определена $f^{(n)}(x)$, то $f^{(n+1)}(x_0) = \left(f^{(n)}\right)'(x_0)$

Определение 5.8. Пусть f дифференцируема в окрестности точки x_0 и $\exists f''(x_0)$. Тогда *дифференциалом 2-ого порядка функции f в точке x_0* называется дифференциал от дифференциала 1-ого порядка как функции точки x при фиксированном dx



То есть $d^2 f(x) := d\Big(df(x)\Big)$
В каждой точке графика построим касательную. Взять дифференциал от дифференциала означает следущее. $df(x)$ — семейство этих касательных. У каждой касательной нужно зафиксировать приращение (на рисунке отмечено жирными точками). Таким образом наша функция - огибающая этих приращений. Ее и нужно дифференцировать.

Определение 5.9. Если определён $d^{(n)}f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 и $\exists f^{(n+1)}(x_0)$, то $d^{(n+1)}f(x_0) := d\Big(d^{(n)}f(x)\Big)(x_0)$

Теорема 5.6. *Пусть $n \in N$, $\exists f^{(n)}(x_0)$. Тогда $d^{(n+1)}f(x_0) = f^{(n)}(x_0)(dx)^n$*

Доказательство. Докажем по индукции. При $n = 1$ очевидно.

При $n \geqslant 2$ пусть $\exists f^{(n)}(x_0)$.

$$d^2 f(x_0) = d\Big(df(x)\Big)\Big|_{x=x_0} = d\Big(f'(x)dx\Big)(x_0) = f''(x_0)(dx)^2$$

Пусть формула доказана при $k \in \mathbb{N}$

$$1 \leqslant k \leqslant n-1 \quad d^k f(x_0) = d\Big(d^k f(x)\Big)(x_0) = d\Big(f^{(k)}(x_0)(dx)^k\Big) = f^{(k+1)}(x_0)(dx)^{k+1}$$

$\square$

Теорема 5.7. *(Инвариантность формы первого дифференциала и неинвариантность формы высших дифференциалов) Пусть функция $y = y(x)$ дифференцируема в точке x_0, а функция $z = z(y)$ дифференцируема в точке $y_0 = y(x_0)$. Тогда дифференциал z, рассматриваемый как функция лишь от y в точке y_0, и дифференциал функции $z = z(y(x)) = f(x)$ в точке x_0 записываются одинаково, а именно $dz = z'(y_0)\ dy$. При этом в первом случае (когда $z = z(y)$) $dy = y - y_0$, а во втором dy — дифференциал функции $y(x)$ в точке x_0.*

Доказательство. Для функции $z = z(y)$ по определению дифференциала

$$dz(y_0) = z'(y_0)\ dy,\ dy = y - y_0.$$

Рассмотрим композицию функций $z = z(y(x)) = f(x)$.

$$dz = f'(x_0)\ dx = z'(y(x_0))\ y'(x_0)\ dx = z'(y(x_0))\ dy(x_0)$$

□

Примечание. Для второго дифференциала форма записи не инвариантна.

Доказательство. Действительно, пусть функция $z = z(y)$ дважды дифференцируема в точке y_0

$$d^2 = z''(y_0)\ (dy)^2,\ dy = y - y_0$$

Если же $z = z(y(x))$

$$d^2z = f''(x_0)\ (dx)^2 = \Big(z'(y(x)) \cdot y'(x)\Big)'\ (dx)^2, \Big|_{x=x_0}$$

$$= \Big[z''(y(x))\cdot(y'(x))^2 + z'(y(x))\cdot y''(x_0)\Big]\cdot(dx)^2 = z''(y_0)\cdot(y'(x_0))^2\cdot(dx)^2 + z'(y(x_0))\cdot y''(x_0)\cdot(dx)^2 =$$

$$= z''(y_0)(dy)^2 + z'(y_0)\ d^2y(x_0)$$

□

5.4 Формула Лейбница

Введём некоторые обозначения: $0! := 1,\ n! := 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n, \quad n \in \mathbb{N}$.

C_n^k — биномиальный коэффициент, $C_n^k := \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Соглашение: $u^{(0)}(x) \equiv u(x)$.

Теорема 5.8. *Формула Лейбница Пусть $\exists u^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R}$ и $\exists v^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R}$. Тогда $\exists (u \cdot v)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)}(x_0) \cdot v^{(n-k)}(x_0)$*

Доказательство. Будем доказывать по индукции.

База: при $n = 1$ верно (обычное правило дифференцирование произведения).

Пусть доказано при некотором $n = k \in \mathbb{N}$, установим при $k + 1$.

При k имеем:

$$(u \cdot v)^{(k)} = \sum_{s=0}^{k} C_k^s u^{(s)}(x_0) \cdot v^{(k-s)}(x_0)$$

$$(u \cdot v)^{(k+1)} = \left(\sum_{s=0}^{k} C_k^s u^{(s)}(x) \cdot v^{(k-s)}(x) \right)' \Bigg|_{x=x_0} =$$

$$= \sum_{s=0}^{k} C_k^s u^{(s+1)}(x_0) \cdot v^{(k-s)}(x_0) + \sum_{s=0}^{k} C_k^s u^{(s)}(x_0) \cdot v^{(k-s+1)}(x_0) = (*)$$

Произведем замену индексов: $s+1=j,\ s+j-1$. Получаем

$$(*) = \sum_{j=1}^{k+1} C_k^{j-1} u^{(j)}(x_0) \cdot v^{(k-j+1)}(x_0) + \sum_{j=0}^{k} C_k^{j} u^{(j)}(x_0) \cdot v^{(k-j+1)}(x_0) =$$

$$= C_k^k u^{(k+1)}(x_0) \cdot v(x_0) + C_k^0 u(x_0) \cdot v^{(k+1)}(x_0) + \sum_{j=1}^{k} \left(C_k^{j-1} + C_k^j \right) u^{(j)}(x_0) \cdot v^{(k+1-j)}(x_0) =$$

Заметим, что $C_k^k = C_{k+1}^{k+1} = 1,\ C_k^0 = C_{k+1}^0 = 1,\ C_k^{j-1} + C_k^j = \dfrac{k!}{(j-1)!(k-j+1)!} + \dfrac{k!}{(j)!(k-j)!} = \dfrac{k!}{(j)!(k-j+1)!} \cdot (k-j+1+j) = \dfrac{(k+1)!}{(j)!(k+1-j)!} = C_{k+1}^j$.

С учетом этого перепишем выражение $(*)$

$$(u \cdot v)^{(k+1)} = (*) = \sum_{j=0}^{k+1} C_{k+1}^j u^{(j)}(x_0) \cdot v^{(k+1-j)}(x_0)$$

Шаг индукции доказан. Значит, формула верна при всех $n \in \mathbb{N}$. □

5.5 Вычисление производных функций, заданных неявно

Определение 5.10. Будем говорить, что функция $y : X \mapsto \mathbb{R}$ *неявно задана уравнением* $F(x, y) = 0$, если $F(x, y(x)) = 0 \quad \forall x \in X$.

Пример.

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

$y_1(x) = \sqrt{1 - x^2}$ — функция, неявно заданная уравнением $F(x, y) = 0$
$y_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ — функция, неявно заданная уравнением $F(x, y) = 0$

Также заметим, что функций, неявно задающихся данным уравнением, бесконечно много.

Примечание. В домашних задачах априори предполагается, что неявно заданные функции существуют и они дифференцируемы. Однако в общем случае это нужно доказывать.

Чтобы найти производную неявно заданной функции, необходимо:

1. Продифференцировать обе части уравнения, вместо y подставляя $y(x)$. Так как оно является тождеством при всех значениях x,
2. Выразить производную $y'(x)$.

5.6 Производные функций, заданных параметрически

Пусть $\begin{matrix} y = y(t), \\ x = x(t) \end{matrix}$ определены в некоторой $U_\delta(t_0)$.

Если для x выполнены условия, требуемые для теоремы об обратной функции, то $\exists t = t(x)$, определенная в $U_\delta(x_0)$, $x_0 = x(t_0)$.

Пусть также выполнены все условия теоремы о дифференцировании обратной функции и теоремы о дифференцировании сложной функции. Тогда

$$f(x) = y(t(x))$$

$$y'_x(x_0) = \frac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)}, \text{где } t_0 = t(x_0)$$

5.7 Теоремы о среднем

Определение 5.11. Пусть $f : X \mapsto \mathbb{R}, X \subset \mathbb{R}$.

Будем говорить, что точка x_0 — точка локального максимума (локального минимума) функции f, то есть, точка локального экстремума, если

$$\exists \delta = \delta(x_0) > 0 : \begin{matrix} f(x) \leqslant f(x_0) \ \forall x \in U_\delta(x_0) \cap X \\ \Big(f(x) \geqslant f(x_0) \ \forall x \in U_\delta(x_0) \cap X\Big) \end{matrix}$$

Определение 5.12. Пусть $f : X \mapsto \mathbb{R}, X \subset \mathbb{R}$.

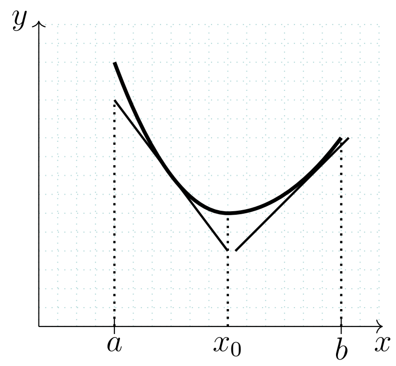
Будем говорить, что точка x_0 — точка строгого локального максимума (строгого локального минимума), то есть строгого экстремума функции f, если

$$\exists \delta = \delta(x_0) > 0 : \begin{matrix} f(x) < f(x_0) \ \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \cap X \\ \Big(f(x) > f(x_0) \ \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \cap X\Big) \end{matrix}$$

Лемма 5.1. *Пусть $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$. Пусть x_0 — точка локального минимума (локального максимума).*

Тогда, если $\begin{matrix} \exists f'_+(x_0), \text{то } f'_+(x_0) \geqslant 0 \\ \exists f'_-(x_0), \text{то } f'_-(x_0) \leqslant 0 \\ \left(\begin{matrix} \exists f'_+(x_0), \text{то } f'_+(x_0) \leqslant 0 \\ \exists f'_-(x_0), \text{то } f'_-(x_0) \geqslant 0 \end{matrix}\right) \end{matrix}$

Доказательство. .



Докажем для случая, когда x_0 — точка локального минимума, так как для локального максимума доказательство аналогично.

Пусь $\exists f'_+(x_0) \Rightarrow \exists \lim\limits_{x \to x_0+0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Так как x_0 — локальный максимум, то

$$\exists \delta > 0 : \ f(x) \geqslant f(x_0) \quad \forall x \in U_\delta(x_0) \cap [a,b]$$

А так как берется правсторонний предел, то $x > x_0$.

Следовательно, $\forall x \in \mathring{U}_\delta^+(x_0) \cap [a,b] \hookrightarrow \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0$

Следовательно, делая предельный переход в неравенстве, получим $f'_+ \geqslant 0$

Если $\exists f'_-(x_0) := \lim\limits_{x\to x_0-0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, то $\exists \delta > 0: \; f(x) \geqslant f(x_0) \quad \forall x \in U_\delta(x_0)$

Так как x приближается к x_0 слева, то $x - x_0 \leqslant 0$. Следовательно,

$$\forall x \in \mathring{U}_\delta^-(x_0) \cap [a,b] \hookrightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant 0$$

Следовательно, делая предельный переход в неравенстве, получим $f'_- \leqslant 0$ □

Теорема 5.9. *(Теорема Ферма) Пусть $f\colon U_\delta(x_0) \mapsto \mathbb{R}$ дифференцируема в точке x_0. Тогда если x_0 — локальный экстремум f, $f'(x_0) = 0$.*

Доказательство. В силу предыдущей леммы $\begin{cases} f'_+(x_0) \geqslant 0 \\ f'_-(x_0) \leqslant 0, \end{cases}$ если x_0 — локальный минимум. Следовательно, $\exists f'(x_0) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists f'_+(x_0) \in \mathbb{R} \\ \exists f'_-(x_0) \in \mathbb{R} \end{cases}$ и $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) \Rightarrow f'(x_0) = 0$.

Доказательство для локального максимума аналогично. □

Теорема 5.10. *Ролля (о среднем) Пусть $f \in C([a,b])$, дифференцируема на интервале и $f(a) = f(b)$. Тогда $\exists \xi \in (a,b)$: $f'(\xi) = 0$.*

Доказательство. Возможны два случая:

Случай 1. $f \equiv const$. $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b)$.

Значит, в качестве ξ можно взять любую точку из (a,b).

Случай 2. Если $f \neq const$, то в силу непрерывности f достигает наибольшего и наименьшего значения на $[a,b]$.

Следовательно, существует точка локального экстремума $\xi \in [a,b]$ (в котором достигается либо локальный максимум, либо локальный минимум).

Значит, так как f дифференцируема на интервале (a,b), по теореме Ферма $f'(\xi) = 0$. □

Теорема 5.11. *(Коши о среднем) Пусть $f, g \in C([a,b])$ и дифференцируема на интервале (a,b). Пусть $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a,b)$. Тогда $\exists \xi \in (a,b) : \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.*

Доказательство. Так как $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a,b]$, то $g(a) \neq g(b)$. Иначе получили противоречие теореме Ролля. Следовательно, формула корректна.

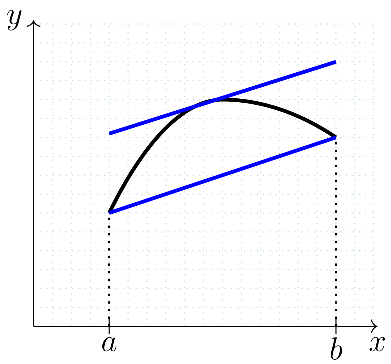
Рассмотрим функцию $h(x) = f(x) - k \cdot g(x)$, при $k = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

Заметим, что $h(b) = h(a)$.

Так как $h \in C([a,b])$ и дифференцируема на интервале (a,b), то по теореме Ролля

$$\exists \xi \in (a,b) : h'(\xi) = 0$$

$$h'(\xi) = f'(\xi) - kg'(\xi) = 0 \Rightarrow k = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \Rightarrow \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$ □



Предположим, что на малом интервале $x(t)$ обратима и удовлетворяет условиям теоремы об обратной функции

$$\begin{matrix} x = x(t) \\ y = y(t) \end{matrix} \qquad y'(x) = \left.\frac{y'(t)}{x'(t)}\right|_{t=t(x)}$$

Следствие. (Теорема Лагранжа о среднем) Пусть $f \in C([a,b])$ и дифференцируема на интервале (a,b). Тогда $\exists \xi \in (q,b): \ f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$.

Доказательство. Применить теорему Коши о среднем при $f = f$ и $g = x$. □

5.8 Следствия из теоремы Лагранжа о среднем

Теорема 5.12. *Пусть $f \in C(U_\delta(x_0))$, f дифференцируема в $\mathring{U}_\delta(x_0)$:*
Если $\exists \lim\limits_{x\to x_0+0} f'(x_0)$, то $\exists f'_+(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f'(x)$;
Если $\exists \lim\limits_{x\to x_0-0} f'(x_0)$, то $\exists f'_-(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0-0} f'(x)$.

Доказательство. Докажем для правосторонннеи производной, так как для левосторонней аналогично.

Фиксируем $x \in \mathring{U}^+_\delta(x_0)$. Выполнены все условия теоремы Лагранжа о среднем на отрезке $[x_0, x] \Rightarrow \xi(x) \in (x_0, x): \ \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(\xi(x)) \quad (*)$

Но x был выбран произвольно и $\xi(x) \neq x_0 \quad \forall x \in \mathring{U}^+_\delta(x_0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x\to x_0+0} f'(\xi(x)) = \lim_{\xi\to x_0+0} f'(\xi) \Leftrightarrow \exists \lim_{x\to x_0+0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_+(x_0)$$

Значит, в силу $(*)$ получаем $\lim\limits_{\xi\to x_0+0} f'(\xi) = f'_+(x_0)$

Аналогично для левосторонней производной. □

Следствие. Если f дифференцируема на интервале (a,b), то f' не имеет разрывов 1-ого рода и устранимых разрывов.

Доказательство. Из следствия теоремы Лагранжа о среднем вытекает, что если $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$, то он обязан быть равен $f'(x_0)$. Значит, устранимых разрывов быть не может.

При разрыве 1-ого рода односторонние пределы существуют, но не равны. Из следствия теоремы Лагранжа это значит, что существует прворосторонняя и левостороняя призводная, но они не равны. Но это противоречит условию, что f дифференцируема на (a,b). Значит, f' не имеет разрывов 1-ого рода.

□

Таким образом, если функция дифференцируема на интервале (a,b), то разрывы у нее могут быть только второго рода.

Пример. $f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin\dfrac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$

f дифференцируема всюду на $\mathbb{R}$, но производная имеет разрыв второго рода

Доказательство. Если $x \neq 0$, то $f'(x) = 2x \cdot \sin\frac{1}{x} + x^2 \cos\frac{1}{x} \cdot \left(\frac{-1}{x^2}\right) = 2x \cdot \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cdot \sin\frac{1}{x} - 0}{x} = \lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$$

$\nexists \lim\limits_{x\to 0} f'(x) \Rightarrow$ f' имеет в нуле разрыв второго рода □

5.9 Теорема Дарбу

Лемма 5.2. *Пусть f дифференцируема на интервале (a, b).*
Пусть $x, y \in (a, b)$ и $f'(x) \cdot f'(y) < 0$. Тогда $\exists \xi \in (x, y): \ f'(\xi) = 0$

Доказательство. Рассмотрим случай $f'(x) > 0$ $f'(y) < 0$. Так как $f \in C((a, b)) \Rightarrow f \in C([x,y])$. Значит, f достигает максимума и минимума на $[x,y]$. Точка максимума находится на (x,y), так как $\begin{cases} f'_+(x_M) \leqslant 0 \\ f'_-(x_M) \geqslant 0 \end{cases}$. То есть точка максимума $\begin{cases} x_M \neq x, \\ x_M \neq y. \end{cases}$

Следовательно, по теореме Ферма $f'(x_M) = 0$.

Аналогично рассматривается случай $f'(x) < 0$ $f'(y) > 0$. □

Теорема 5.13. *(Теорема Дарбу) Пусть f дифференцируема на интервале (a, b). Тогда если f' принимает какие-либо два значения, то она принимает все значения между ними.*

Доказательство. Пусть $\begin{cases} f'(x) = A \\ f'(y) = B \\ A \neq B \end{cases}$ Покажем, что $\forall C \in (A, B)$ $\exists x_c \in (x,y) : f'(x_c) = C$

Фиксируем $C \in (A, B)$. Рассмотрим $h(t) = f(t) - C \cdot t$.

h дифференцируема на (x,y).

$$\begin{matrix} h'(x) = f'(x) - C = A - C \\ h'(y) = f'(y) - C = B - C \end{matrix} \Rightarrow h'(x) \cdot h'(y) = (A - C)\,(B - C) < 0$$

Следовательно, по предыдущей лемме:

$$\exists \xi \in (x,y): \ h'(\xi) = 0 = f'(\xi) - C \Rightarrow f'(\xi) = 0$$

Тогда положим $x_c = \xi$ □

5.10 Формула Тейлора

Определение 5.13. Пусть $n \in \mathbb{N}_0$, $f : U_\delta(x_0) \mapsto \mathbb{R}$ имеет n-ую (конечную) производную в точке x_0. Тогда полиномом (многочленом) Тейлора функции f с центром в точке x_0 называется

$$T^n_{x_0}[f](x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Определение 5.14. *Формальным n-ым остаточным членом формулы Тейлора функции f с центром в точке x_0* называется

$$r^n_{x_0}[f](x) := f(x) - T^n_{x_0}[f](x),\ x \in U_{\delta_0}(x_0)$$

Лемма 5.3. $\varphi_n(x) = (x - x_0)^n$ *Тогда*

a) $\forall k \in \{0, \dots, n\} \hookrightarrow \varphi_n^{(k)} = n(n-1)\dots(x-k+1)(x-x_0)^{n-k}$,

$\forall k > n \hookrightarrow \varphi_n^{(k)}(x) \equiv 0$

b) $\varphi_n^{(k)}(x_0) = \begin{cases} 0, k \neq n \\ n!, k = n \end{cases}$

Доказательство. Пункт b) сразу следует из пункта a)

Пункт a) доказывается по индукции:

При $k = 1$ очевидно.

Пусть доказано при каком-то $k \in \mathbb{N},\ k \in \{1, \dots, n-1\}$

Тогда $\Big((x_0)^n\Big)^{(k+1)} = \Big(n(n-1)\dots(n-k+1)(x-x_0)^{n-1}\Big)' =$

$$= n(n-1)\dots(x-k+1)(x-x_0)^{n-(k+1)}$$

□

Лемма 5.4. *Пусть* $\exists f^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R}$. *Тогда* $\forall k \in \{0, \dots, n\} \hookrightarrow \Big(r_{x_0}^n[f](x)\Big)^{(k)}(x_0) = 0$

Доказательство. Фиксируем $k \in \{0, \dots, n\}$

$$r_{x_0}^n[f](x) = f(x_0) - \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}}{j!}(x-x_0)^j$$

$$\Big(r_{x_0}^n[f](x)\Big)^{(k)}\Bigg|_{x=x_0} = f^{(k)}(x_0) - \left(\sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}}{j!}(x-x_0)^j\right)^{(k)}\Bigg|_{x=x_0} = f^{(k)}(x_0) - f^{(k)}(x_0)\frac{k!}{k!} = 0$$

□

Теорема 5.14. *(Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано) Путь f дифференцируемо в точке x_0 n раз, $n \in \mathbb{N}_0$. Тогда*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)(x_0)}}{k!}(x-x_0)^k + o\Big((x-x_0)^n\Big), x \to x_0$$

Примечание. Запись $x \to x_0$ означает, что равенство справедливо в некоторой окрестности $U_\delta(x_0)$

$o\Big((x-x_0)^n\Big)$ — это «функция», предстваимая в виде

$$\varepsilon_{x_0}[f](x)(x-x_0)^n,\ \text{где } \varepsilon_{x_0}[f](x) \to 0, x \to x_0.$$

Доказательство. Так как $\exists f^{(n)}(x_0)$, то $\exists U_\delta(x_0)$, в которой определена $f^{(n-1)}(x)$.

По определению $r_{x_0}^n[f](x) = f(x_0) - T_{x_0}^n[f](x), \quad \varphi_n(x) = (x-x_0)^n$

Достаточно доказать, что $\dfrac{r_{x_0}^n[f](x)}{(x-x_0)^n} \to 0, x \to x_0$

Заметим, что $\varphi_n(x_0) = (x-x_0)^n = 0, \quad r_{x_0}^n[f](x_0) = 0$. Тогда

$$\frac{r_{x_0}^n[f](x)}{(x-x_0)^n} = \frac{r_{x_0}^n[f](x) - r_{x_0}^n[f](x_0)}{\varphi_n(x) - \varphi_n(x_0)}$$

Так как $r^n_{x_0}[f](x)$ дифференцируема n раз, то можно применить теорему Коши о среднем:

$$\frac{r^n_{x_0}[f](x) - r^n_{x_0}[f](x_0)}{\varphi_n(x) - \varphi_n(x_0)} = \frac{\left(r^n_{x_0}[f]\right)'(\xi)}{\varphi'_n(\xi)}, \text{ где } \xi \in (x, x_0)$$

По предыдущей лемме имеем $\forall k \in \{0, \dots, n\} \hookrightarrow \left(r^n_{x_0}[f](x)\right)^{(k)}(x_0) = 0$ и

$$\forall k \in \{0, \dots, n-1\} \hookrightarrow \varphi_n^{(k)}(x_0) = 0$$

$$\frac{\left(r^n_{x_0}[f]\right)'(\xi)}{\varphi'_n(\xi)} = \frac{r^{n-1}_{x_0}[f'](\xi)}{n \cdot \varphi_{n-1}(\xi)} = \frac{\left(r^n_{x_0}[f]\right)'(\xi_1) - \left(r^n_{x_0}[f]\right)'(x_0)}{n(\varphi_{n-1}(\xi_1) - \varphi_{n-1}(x_0))}$$

Тогда, снова применяя теорему Коши о среденем получаем:

$$\frac{\left(r^n_{x_0}[f]\right)'(\xi_1) - \left(r^n_{x_0}[f]\right)'(x_0)}{n(\varphi_{n-1}(\xi_1) - \varphi_{n-1}(x_0))} = \frac{\left(r^n_{x_0}[f]\right)^{(2)}(\xi_1)}{\varphi^2_n(\xi_1)}, \text{ где } \xi \in (\xi, x_0)$$

Повторяем предыдущий шаг $n-1$ раз. После него получим

$$\frac{r^n_{x_0}[f](x)}{(x-x_0)^n} = \ldots = \frac{\left(r^n_{x_0}[f]\right)^{(n-1)}(\xi_{n-1}) - \left(r^n_{x_0}[f]\right)^{(n-1)}(x_0)}{n!(\xi_{n-1} - x_0))}, \text{ где } \xi_{n-1} \in (\xi n - 2, x_0)$$

Заметим, что $\xi_{n-1}(x) \in (x_0, x)$. Следовательно, $\xi_{n-1}(x) \to x_0, x \to x_0$, но $\xi_{n-1}(x) \neq x_0$. Значит, $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\left(r^n_{x_0}[f]\right)^{(n-1)}(\xi_{n-1}) - \left(r^n_{x_0}[f]\right)^{(n-1)}(x_0)}{n!(\xi_{n-1} - x_0))}$. По теореме о замене переменной при вычислении предела он равен

$$\lim_{\xi_{n-1} \to x_0} \frac{\left(r^n_{x_0}[f]\right)^{(n-1)}(\xi_{n-1}) - \left(r^n_{x_0}[f]\right)^{(n-1)}(x_0)}{n!(\xi_{n-1} - x_0))} = \frac{\left(r^n_{x_0}[f]\right)^{(n)}(x_0)}{n!} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} \frac{r^n_{x_0}[f](x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

□

Теорема 5.15. *(Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа) Пусть* $\exists f^{(n+1)}$ *в некоторой* $U_\delta(x_0)$. *Тогда* $\forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0)$ *справедливо равенство*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{(n+1)}, \text{ где } \xi \in (x_0, x).$$

Доказательство. $\varphi_{n+1}(x) = (x-x_0)^{n+1}$

$$r^n_{x_0}[f](x) = f(x_0) - T^n_{x_0}[f](x)$$

Можно применить теорему Коши $n+1$ раз:

$$\frac{r^n_{x_0}[f](x)}{\varphi_{n+1}(x)} = \frac{\left(r^n_{x_0}[f]\right)^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{(n+1)!}$$

Так как $(n+1)$-ая произвдная полинома степени n равна нулю, то справедливо равенство

$$\frac{\left(r^n_{x_0}[f]\right)^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{(n+1)!} = \frac{f^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{(n+1)!}, \xi := \xi_{n+1}$$

□

Теорема 5.16. *(Теорема о единственности) Пусть* $\exists f^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R}$. *Тогда, если* $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k + o\Big((x-x_0)^n\Big), x \to x_0$, *то* $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$

Примечание. Теорема верна, только если выполняется условие $\exists f^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R}$. Может случиться так, что производная не существует, но разложение есть.

Пример. Задача на дом

Доказательство. Так как $\exists f^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R}$, можно воспользоваться формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. Тогда

$$\begin{cases} f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k + o\Big((x-x_0)^n\Big), x \to x_0, \\ f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o\Big((x-x_0)^n\Big), x \to x_0, \end{cases}$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a_0 = f(x_0)$$

$$\begin{cases} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k(x-x_0)^{k-1} + o\Big((x-x_0)^{n-1}\Big), x \to x_0 \\ \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^{k-1} + o\Big((x-x_0)^{n-1}\Big), x \to x_0 \end{cases}$$

$$a_1 = f'(x_0)$$

И так далее n шагов. Получим, что $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ □

Теорема 5.17. *(Почленное дифференцирование формулы Тейлора) Пусть* $n \in \mathbb{N}$ *и* $\exists f^{(n)}(x_0)$. *Тогда если* $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k + o\Big((x-x_0)^n\Big), x \to x_0$, *то*

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot k \cdot (x-x_0)^{k-1} + o\Big((x-x_0)^{n-1}\Big), x \to x_0.$$

Доказательство. В силу теоремы о единственности $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$.

По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, примененной к функции f', получим, что $f'(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{(f')^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o\Big((x-x_0)^{n-1}\Big), x \to x_0$

$$j = k+1$$

$$f'(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{(j-1)!}(x-x_0)^{j-1} + o\Big((x-x_0)^{n-1}\Big), x \to x_0$$

$$f'(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} \cdot j \cdot (x - x_0)^{j-1} + o\Big((x - x_0)^{n-1}\Big), x \to x_0$$

$$k = j$$

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot k \cdot (x - x_0)^{k-1} + o\Big((x - x_0)^{n-1}\Big), x \to x_0.$$

□

Теорема 5.18. *(Почленное интегрирование формулы Тейлора) Пусть* $\exists f^{(n+1)}(x_0)$ *и* $f'(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k(x - x_0)^k + o\Big((x - x_0)^n\Big)$. *Тогда*

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{k+1} \cdot (x - x_0)^{k+1} + o\Big((x - x_0)^{n+1}\Big), x \to x_0$$

Доказательство. В силу теоремы о единственности $b_k = \dfrac{(f')^{(k)}(x_0)}{k!}$.

По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, примененной к функции f, получим, что $f(x) = f(x_0) + \sum\limits_{k=1}^{n+1} \dfrac{(f)^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k + o\Big((x - x_0)^{n+1}\Big), x \to x_0$

$$j = k - 1$$

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{j=0}^{n} \frac{(f')^{(j)}(x_0)}{(j+1)!}(x - x_0)^{j+1} + o\Big((x - x_0)^{n+1}\Big), x \to x_0$$

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{j=0}^{n} \frac{(f')^{(j)}(x_0)}{j!} \cdot \frac{1}{j+1} \cdot (x - x_0)^{j+1} + o\Big((x - x_0)^{n+1}\Big), x \to x_0$$

$$k = j$$

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{k+1} \cdot (x - x_0)^{k+1} + o\Big((x - x_0)^{n+1}\Big), x \to x_0.$$

□

Задача. *Пусть* $f(x) = f(x_0) + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + o(x^2), x \to 0$. *Верно ли, что*

1. f *непрерывна о точке* 0
2. f *дифференцируема в точке* 0
3. f *дважды дифференцируема в точке* 0

5.11 Разложение основных элементарных функций по формуле Тейлора

Определение 5.15. Путем сдвига формулы Тейлора с центром в точке x_0 может быть редуцирована к формуле Тейлора с центром в нуле. Тогда такая формула называется *формулой Маклорена.* То есть если $\exists f^{(n)}(0) \in \mathbb{R}$, то

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k + o(x^n), x \to 0$$

Лемма 5.5. *Пусть f дифференцируема в окрестности 0. Тогда*

1. *Если f четная, то f' нечетна,*
2. *Если f нечетная, то f' четна*

Доказательство. Докажем пункт 1. так как пункт 2. аналогичен.

Пусть f — четная функция, тогда.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(-x-\Delta x) - f(-x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(-x+\Delta x) - f(-x)}{-\Delta x} = -f'(-x)$$

□

Примечание. Аналогично можно доказать, что если f четная и дифференцируема в нуле, то ее $f'(0) = 0$

Лемма 5.6. *Пусть f — четная и $\exists f^{(2n+1)}(0) \in \mathbb{R}$, тогда*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(2k)} \cdot x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}), x \to 0$$

Если f — нечетная и $\exists f^{(2n+2)}(0) \in \mathbb{R}$, тогда

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(2k+1)} \cdot x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}), x \to 0$$

Доказательство. f — четная, но f' — нечетная, f'' — четная, f''' — нечетная и так далее. Но в силу предыдущей леммы и замечания $f'(0) = f'''(0) = \ldots = f^{(2n+1)}(0) = 0$.

Значит, по формуле Тейлора с остаточным членом в форма Пеано

$$f(x) = \sum_{j=0}^{2n+1} \frac{f^{(j)}}{j!} x^j + o(x^{2n+1}), x \to 0$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(2k)} \cdot x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}), x \to 0$$

Для нечетной доказательство аналогично □

1. $(e^{x(n)})(0) = 1$

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \hookrightarrow e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n), x \to 0$$

2. $(\operatorname{sh} x)^{(j)}(0) = \begin{cases} 0, j = 2k \\ 1, j = 2k+1 \end{cases}$

$$\operatorname{sh} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}), x \to 0$$

Аналогично $\operatorname{ch} x$

$$\operatorname{ch} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}), x \to 0$$

3. $(\sin x)^{(j)}(0) = \begin{cases} 0, j = 2k \\ (-1)^k, j = 2k+1 \end{cases}$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1} + o(x^{2n+2}), x \to 0$$

Аналогично $\cos x$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot x^{2k} + o(x^{2n+1}), x \to 0$$

4. $\Big((1+x)^\alpha\Big)^{(n)} = \alpha \cdot \ldots \cdot (\alpha - n + 1), \qquad \alpha \in \mathbb{R}$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} C_\alpha^k x^k + 0(x^n), x \to 0,$$

где $\begin{cases} C_\alpha^k = \frac{\alpha \cdot \ldots \cdot (\alpha - n + 1)}{k!}, k \in \mathbb{N} \\ C_\alpha^0 = 1 \end{cases}$

5. $\ln(1+x)' = \dfrac{1}{1+x} \qquad (1+x)^{-1} = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n), x \to 0$

Тогда $\ln(1+x)$ получается из теоремы о почленном интегрировании форулы Тейлора с учетом, что $\ln(1) = 0$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} + o(x^n) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + o(x^n), x \to 0$$

Задача. *Пусть* $x_0 > 0$. *Разложить* $\ln x$ *по степеням* $(x - x_0)$ *с точностью до* $o\Big((x - x_0)^{n+1}\Big)$

Решение. $\ln(x_0 + x - x_0) = \ln x_0 + \ln\left(1 + \dfrac{x - x_0}{x_0}\right)$

$t(x) = \dfrac{x - x_0}{x_0}, \quad t(x) \to 0, \ x \to x_0$

$\ln x = \ln x_0 + \sum\limits_{k=1}^{n+1} \dfrac{(-1)^k \cdot (x - x_0)^k}{k \cdot x_0^k} + 0\Big((x - x_0)^{n+1}\Big), x \to x_0$

Примечание. Заметим, что разложение $\ln(1+x-1)$ не является решением данной задачи (если $x_0 \neq 1$), так как в условии просят разложить по степеням $x - x_0$, а $x - 1 \not\to 0$, при $x - x_0 \to 0$

Задача. *Разложить* $\operatorname{tg} x$ *в окрестности нуля с точностью до* $o(x^3)$

Решение. $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)}{1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^3)}$

$t(x) = -\dfrac{x^2}{2} + o(x^3), t(x) \to 0, x \to 0$

$(1 - t(x))^{-1} = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k (t(x))^k + o\Big((t(x))^n\Big), t(x) \to 0$

Условие $t(x) \to 0$ необходимо, так как оно влияет на величину «поправки » $o\Big((t(x))^n\Big) = \varepsilon\Big(t(x)\Big) t^n(x)$, где $\varepsilon\Big(t(x)\Big) \to 0, x \to 0$

$\left(1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^3)\right)^{-1} = (1 - t(x))^{-1} = 1 + \dfrac{x^2}{2} + o(x^3), x \to 0$

$\operatorname{tg} x = \left(x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\left(1 + \dfrac{x^2}{2} + o(x^3)\right) = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^3}{2} + o(x^3) = x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3), x \to 0$

5.12 Правило Лопиталя

Теорема 5.19. *(Раскрытие неопределенности вида $\frac{0}{0}$) Пусть $-\infty < a < b < +\infty$. Пусть f и g дифференцируемы на $(a{,}b)$, а также $\exists \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = 0$, $\exists \lim\limits_{x\to a+0} g(x) = 0$ и $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a{,}b)$. Тогда, если $\exists \lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = C \in \overline{\mathbb{R}}$, то $\exists \lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = C$*

Доказательство. Доопределим функции f и g нулем в точке a. Тогда f и g станут непрерывными справа в точке a. Значит, $\forall x \in (a,b)$ можно воспользоваться теоремой Коши о среднем: $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \dfrac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))}$, где $\xi(x) \in (a, x)$.

Так как $\lim\limits_{x\to a+0} \xi(x) = a$, $\xi(x) \neq a \quad \forall x \in (a,b)$, можно воспользоваться теоремой о замене переменной при вычислении предела, то есть $\lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))} = \lim\limits_{\xi\to a+0} \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = C$.

Следовательно, переходя к пределу равенства, получаем $\exists \lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = C$. □

Теорема 5.20. *Пусть f и g дифференцируемы на луче $(A, +\infty)$, $(A > 0)$ и $\exists \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Пусть $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (A, \infty)$. Тогда если $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = C \in \overline{\mathbb{R}}$, то $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = C$.*

Доказательство. Сделаем замену: $t = t(x) = \dfrac{1}{x}$, $\quad x(t) = \dfrac{1}{t}$. Получаем: $(A, +\infty) \to \left(0, \dfrac{1}{A}\right)$. Рассмотрим функции $f_1(t) = f\left(\dfrac{1}{t}\right)$, $\quad g_1(t) = g\left(\dfrac{1}{t}\right)$.

Теперь заметим, что $\lim\limits_{t\to+0} f_1(t) = \lim\limits_{t\to+0} f\left(\dfrac{1}{t}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Аналогично $\lim\limits_{t\to+0} g_1(t) = 0$.

f_1 и g_1 дифференцируемы на отрезке $\left(0, \dfrac{1}{A}\right)$ и $g_1'(t) = g'\left(\dfrac{1}{t}\right) \cdot \left(\dfrac{-1}{t^2}\right) \neq 0 \quad \forall t \in \left(0, \dfrac{1}{A}\right)$. Следовательно, можем воспользоваться предыдущей теоремой:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to+0} \frac{f_1(t)}{g_1(t)} = \lim_{t\to+0} \frac{f_1'(t)}{g_1'(t)} = \lim_{t\to+0} \frac{\frac{-1}{t^2} f'\left(\frac{1}{t}\right)}{\frac{-1}{t^2} g'\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(t)}$$

□

Теорема 5.21. *(неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$) Пусть $-\infty < a < b < +\infty$ и $\exists \lim\limits_{x\to a+0} |f(x)| = +\infty$, $\exists \lim\limits_{x\to+0} |g(x)| = +\infty$ Пусть f и g дифференцируемы на (a,b) и $g'(x) \neq 0\ \forall x \in (a,b)$ Тогда если $\exists \lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = C \in \overline{\mathbb{R}}$, то $\exists \lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = C$.*

Примечание. Правило Лопиталя справедливо не только для интервала (a,b), но также для лучей.

Доказательство. По определению предела $\forall \varepsilon > 0\ \exists a_\varepsilon \in (a,b) : \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \in U_\varepsilon(C)\ \forall (a, a_\varepsilon)$.

Зафиксируем $\varepsilon \in (0,1)$ и a_ε. Заметим, что если $x \in (a, a_\varepsilon)$, то по теореме Коши о среднем:

$$\frac{f(x)-f(a_\varepsilon)}{g(x)-g(a_\varepsilon)} = \frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))}, \text{где } \xi(x) \in (x, a_\varepsilon) \quad (*)$$

Из-за того, что $\lim\limits_{x\to a+0} |f(x)| = +\infty$ и $\exists \lim\limits_{x\to+0} |g(x)| = +\infty$, в окрестности a эти функции не равны нулю. Более того, $\exists \delta(\varepsilon) \in (a, a_\varepsilon) : \forall x \in (a, \delta(\varepsilon)) \hookrightarrow \begin{cases} \dfrac{|f(a_\varepsilon)|}{|f(x)|} < \dfrac{\varepsilon}{3} \\ \dfrac{|g(a_\varepsilon)|}{|g(x)|} < \dfrac{\varepsilon}{3} \end{cases}$

Из $(*)$ следует: $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{1-\frac{g(a_\varepsilon)}{g(x)}}{1-\frac{f(a_\varepsilon)}{f(x)}} \cdot \dfrac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))}$, где $\dfrac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))} \in U_\varepsilon(C)$ и

$$1-\varepsilon < \frac{1-\varepsilon/3}{1+\varepsilon/3} < \frac{1-\frac{g(a_\varepsilon)}{g(x)}}{1-\frac{f(a_\varepsilon)}{f(x)}} < \frac{1+\varepsilon/3}{1-\varepsilon/3} < 1+\varepsilon$$

Значит, $\forall x \in (a, \delta_\varepsilon) \hookrightarrow \dfrac{f(x)}{g(x)} \in \left[\begin{array}{l} \Big((c-\varepsilon)(1-\varepsilon), (c+\varepsilon)(1+\varepsilon)\Big),\ C \in \mathbb{R} \\ \left(\dfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon}, +\infty\right),\ C = +\infty \\ \left(-\infty, \dfrac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\right),\ C = -\infty \end{array}\right. \Rightarrow \lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = C$ $\square$

Пример. $\begin{array}{l} f(x) = x^n, n \in \mathbb{N} \\ g(x) = a^x, a > 1. \end{array}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} -?$

Решение. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{n \cdot x^{n-1}}{\ln a \cdot a^x} = \ldots = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{n!}{(\ln a)^n \cdot a^x} = 0$

Пример. $f(x) = \ln x, \quad g(x) = x^\varepsilon,\ \varepsilon > 0.$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} -?$

Решение. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1/x}{\varepsilon \cdot x^{\varepsilon-1}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{\varepsilon \cdot x^\varepsilon} = 0$

Пример. $\lim\limits_{x\to+0} x \cdot \ln x -?$

Решение. $\lim\limits_{x\to+0} x \cdot \ln x = \lim\limits_{x\to+0} \dfrac{\ln x}{1/x} = \lim\limits_{x\to+0} \dfrac{1/x}{-1/x^2} = 0$

5.13 Исследование функций

Теорема 5.22. *Пусть f дифференцируема на (a,b). Тогда:*

1. $f'(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in (a,b) \Leftrightarrow f$ *нестрого возрастает на* (a,b).
2. $f'(x) \leqslant 0 \quad \forall x \in (a,b) \Leftrightarrow f$ *нестрого убывает на* (a,b).
3. *Если* $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b)$, *то* f *строго возрастает на* (a,b)
4. *Если* $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (a,b)$, *то* f *строго убывает на* (a,b).

Доказательство. Докажем 1., 2 — аналогично.

Шаг 1. Пусть $f'(x) \geqslant 0 \forall x \in (a,b)$. Рассмотрим две точки $x, y \in (a,b)$. По теореме Лагранжа о среднем: $f(y) - f(x) = f'(\xi)(y-x)$, где $f'(\xi) \geqslant 0, (y-x) > 0 \Rightarrow f(y) \geqslant f(x)$ $(*)$

Шаг 2.Пусть f нестрого возрастает на (a,b). Фиксируем точку $x, x_0 \in (a,b)$.
$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0$, так как если $x > x_0$, то числитель неотрицательный, а знаменатель положительный, а если $x < x_0$, то числитель неположительный, а знаменатель отрицательный.

Так как по условию fо условию дифференцируема в точке x_0, переходя к пределу в неравенстве получим $f'(x_0) \geqslant 0$. Но x_0 можно выбрать произвольно.

Пункты 3. и 4. доказываются применением $(*)$ □

Пример. $f(x) = x^3$.

f строго возрастает на $\mathbb{R}$. $f'(0) = 0$. Поэтому из строгого возрастания не вытекает положительность производной

Теорема 5.23. *(Достаточное условие экстремума) Пусть $f \in C(U_\delta(x_0))$ и дифференцируема в $\mathring{U}_\delta(x_0)$. Тогда если производная меняет знак при переходе через точку x_0, то x_0 — точка локального экстремума (если знак меняется с «−» на «+», то локальный минумум, если с «+» на «−», то локальный максимум).*

Доказательство. Если $x \in \mathring{U}_\delta(x_0)$, то по теореме Лагранжа о среднем: $f(x) - f(x_0) = f'(\xi(x))(x-x_0)$. Если $\begin{matrix} f'(x) \geqslant 0 \ \forall x \in (x_0-\delta, x_0), \\ f'(x) \leqslant 0 \ \forall x \in (x_0, x_0+\delta) \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} f(x) \leqslant f(x_0) \ \forall x \in (x_0-\delta, x_0), \\ f(x) \leqslant f(x_0) \ \forall x \in (x_0, x_0+\delta). \end{matrix}$ Значит, x_0 — нестрогий локальный максимум.

Аналогично доказываются остальные случаи. □

Теорема 5.24. *(Достаточное условие экстремума в терминах высших производных) Пусть $\exists f^{(n)}(x_0)$, $n \in \mathbb{N}$. При этом $f^{(i)}(x_0) = 0 \ \forall i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тогда если n нечетно, то x_0 не является точкой экстремума, если n четно и $f^{(n)}(x_0) > 0$, то x_0 — строгий локальный минимум, если n четно и $f^{(n)}(x_0) < 0$, то x_0 — строгий локальный максимум.*

Доказательство. Так как $\exists f^{(n)}(x_0)$, то по теореме Тейлора с остаточным членом в форме Пеано $f(x) = f(x_0) + \sum\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o\Big((x-x_0)^n\Big)$.

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^n} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \varepsilon(x), \text{где } \varepsilon(x) \to 0, x \to x_0.$$

Если n четно и $f^{(n)}(x_0) > 0$, то $\exists \delta > 0 : \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \hookrightarrow \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \varepsilon(x) > 0$ и $(x-x_0)^n > 0$ Следовательно, $f(x) - f(x_0) > 0 \ \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0)$. Значит, x_0 — строгий локальный минимум.

Аналогично рассматривается случай $f^{(n)}(x_0) < 0$.

Если n нечетно, то знак правой части сохраниться в некоторой $U_\delta(x_0)$, но знак $(x - x_0)^n$ меняется при переходе через x_0. Тогда и знак числителя тоже меняется при переходе через x_0. Значит, x_0 не является точкой локального экстремума. □

Примечание. В теореме выше изложено лишь достаточное условие.

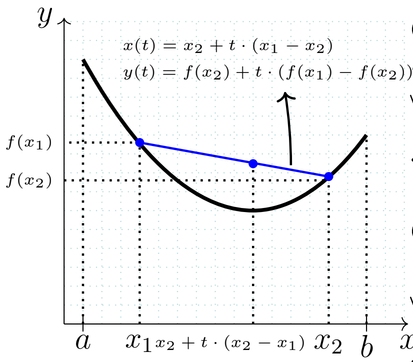
Теорема 5.25. *(Необходимое условие экстремума в терминах второй производной) Пусть* $\exists f''(x_0)$. *Тогда если* x_0 *— точка локального экстремума, то* $f'(x_0) = 0$ *и, если* x_0 *— локальный максимум,* $f''(x_0) \leqslant 0$, *а если локальный минимум, то* $f''(x_0) \geqslant 0$ *.*

Доказательство. То, что $f'(x_0) = 0$, следует из теоремы Ферма.

Докажем утверждение для локального минимума. Предположим противное: пусть если x_0 — локальный минимум, то $f''(x_0) < 0$. Но из этого условия по предыдущей теореме при производной порядка $n = 2$ получаем, что x_0 — строгий локальный максимум. Получили противоречие. Значит, наше предположение неверно и если x_0 — локальный минимум, то $f''(x_0) \geqslant 0$.

Доказательство для локального максимума аналогично. □

Выпуклости и точки перегиба.



Определение 5.16. Функция
нестрого выпуклой вниз (вверх)
$\forall x_1, x_2 \in (a, b) \hookrightarrow$
$f(t \cdot x_1 + (1 - t) \cdot x_2)\underset{\geqslant}{(\leqslant)}t \cdot f(x_1)$

Определение 5.17. Функция
строго выпуклой вниз (вверх)
$\forall x_1, x_2 \in (a, b) \hookrightarrow$
$f(t \cdot x_1 + (1 - t) \cdot x_2)\underset{(>)}{(<)}t \cdot f(x_1)$

Примечание. Выпуклые вверх функции иногда называют *вогнутыми*

Задача. *Доказать, что если* f *выпукла вверх (вниз) на* (a, b), *то она непрерывна на* (a, b)

Теорема 5.26. *Пусть* $f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ *дважды дифференцируема на* (a,b). *Тогда*

1. f *выпукла вниз на* $(a, b) \Leftrightarrow f''(x) \geqslant 0 \ \forall x \in (a, b)$
2. f *выпукла вверх на* $(a, b) \Leftrightarrow f''(x) \leqslant 0 \ \forall x \in (a, b)$

Доказательство. Докажем пункт 1., так как пункт 2. аналогичен.

Шаг 1. Пусть f выпукла вниз. Фиксируем $x_0 \in (a, b)$. Введем $u \in (0, \min\{x_0 - a, b - x_0\})$,

$$\begin{matrix} x_1 = x_0 - u \\ x_2 = x_0 - u \end{matrix} \Rightarrow x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Разложим функцию f по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано:

$$f(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)(-u) + \frac{f''(x_0) \cdot u^2}{2} + o(u^2), u \to 0$$

$$f(x_2) = f(x_0) + f'(x_0)(u) + \frac{f''(x_0) \cdot u^2}{2} + o(u^2), u \to 0$$

Используем условие выпуклости при $t = \dfrac{1}{2}$:

$$f(x_0) \leqslant \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} = \frac{2f(x_0) + f''(x_0) + o(u^2)}{2} = f(x_0) + f''(x_0)\frac{u^2}{2} + o(u^2)$$

$$f(x_0) \leqslant f(x_0) + f''(x_0)\frac{u^2}{2} + o(u^2) \Rightarrow f''(x_0)\frac{u^2}{2} + o(u^2) \geqslant 0 \Rightarrow \frac{f''(x_0)}{2} + 0(1)$$

Переходя к пределу в неравенстве получим $f''(x_0) \geqslant 0$
Шаг 2. Пусть наоборот $f''(x) \geqslant 0\ \forall x \in (a, b)$. Покажем, что f выпукла вниз на (a, b).
Фиксируем произвольные точки $x_1, x_2 \in (a, b)$ и $t \in (0, 1)$. Покажем, что выполняется

$$f(\underbrace{t \cdot x_1(1-t) \cdot x_2}_{x_0}) \leqslant t \cdot f(x_1) + (1-t) \cdot f(x_2)$$

Воспользуемся формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$f(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) + \frac{f''(\xi_1)}{2!}(x_1 - x_0)^2,\ \xi_1 \in (x_1, x_0)$$

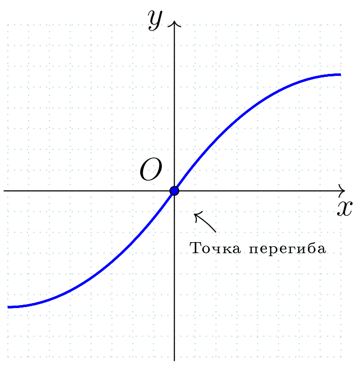
$$f(x_2) = f(x_0) + f'(x_0)(x_2 - x_0) + \frac{f''(\xi_2)}{2!}(x_2 - x_0)^2,\ \xi_2 \in (x_0, x_2)$$

Так как $\dfrac{f''(\xi_1)}{2!} \geqslant 0$ и $\dfrac{f''(\xi_2)}{2!} \geqslant 0$, то $\begin{matrix} f(x_1) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) \\ f(x_2) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x_2 - x_0). \end{matrix}$ Следовательно,

$$t \cdot f(x_1) + (1-t) \cdot f(x_2) \geqslant t \cdot f(x_0) + (1-t) \cdot f(x_0) + t \cdot f'(x_0)(x_1 - x_0) + (1-t) \cdot f'(x_0)(x_2 - x_0)$$

$$t \cdot f(x_1) + (1-t) \cdot f(x_2) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)\underbrace{\Big(t \cdot (x_1 - x_0) + (1-t) \cdot (x_2 - x_0)\Big)}_{0} = f(x_0)$$

Так как $t \in (0, 1)$ и точки x_1, x_2 выбраны произвольно, то теорема доказана. □



$sign x \cdot \sqrt{|x|}$

Определение 5.18. Пусть $f \in C\Big((a, b)\Big)$ и $\exists f'(x_0) \in \overline{\mathbb{R}}$. Пусть выполняется одно их двух условий:

1. f выпукла вниз на $U_\delta^-(x_0)$ и выпукла вверх на $U_\delta^+(x_0)$

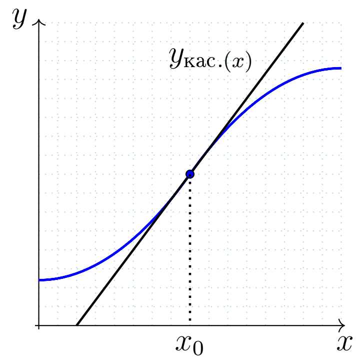
2. f выпукла вверх на $U_\delta^-(x_0)$ и выпукла вниз на $U_\delta^+(x_0)$

Тогда x_0 называется *точкой перегиба графика функции* f

Теорема 5.27. *(Критерий точки перегиба) Пусть $f \in C\Big(U_\delta(x_0)\Big)$ и $\exists f'(x_0) \in \overline{\mathbb{R}}$, f дважды дифференцируема в $\mathring{U}_\delta(x_0)$. Тогда x_0 — точка перегиба графика функции $f \Leftrightarrow$*

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f''(x) \geqslant 0\ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)\ \text{и}\ f''(x) \leqslant 0\ \forall (x_0, x_0 + \delta) \\ f''(x) \leqslant 0\ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)\ \text{и}\ f''(x) \geqslant 0\ \forall (x_0, x_0 + \delta) \end{array}\right.$$

Доказательство. Доказательство состоит в применении определения и критерия выпуклости. □



Определение 5.19. Пусть f дифференцируема в точке x_0. Будем говорить что, график функции f *переходит с одной стороны касательной на другую при переходе через точку* x_0, если $\exists \delta > 0:$

$$\left[\begin{array}{l} y_{\text{кас.}}(x) \leqslant f(x)\ \forall x \in (x_0-\delta, x_0) \text{ и } y_{\text{кас.}}(x) \geqslant f(x)\ \forall x \in (x_0, x_0+\delta) \\ y_{\text{кас.}}(x) \geqslant f(x)\ \forall x \in (x_0-\delta, x_0) \text{ и } y_{\text{кас.}}(x) \leqslant f(x)\ \forall x \in (x_0, x_0+\delta) \end{array}\right.$$

Теорема 5.28. *Пусть f дважды дифференцируема в $\mathring{U}_\delta(x_0)$ и дифференцируема в точке x_0. Тогда если x_0 — точка перегиба графика функции f, то график переходит с одной стороны касательной на другую.*

Обратное неверно.

Доказательство. Пусть x_0 — точка перегиба графика. Тогда в силу критерия точки перегиба $\exists \delta > 0 : f''(x) \leqslant 0\ \forall (x_0-\delta, x_0)$ и $f''(x) \geqslant 0\ \forall x \in (x_{0,x_0+\delta})$ (второй случай рассматривается аналогично).

По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа имеем:

$$\forall x \in (x_0-\delta, x_0) \hookrightarrow f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}_{y_{\text{кас.}}} + \frac{f''(\xi)(x-x_0)^2}{2},\ \frac{f''(\xi)(x-x_0)^2}{2} \leqslant 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) \leqslant y_{\text{кас.}}(x)\ \forall x \in (x_0-\delta, x_0)$$

$$\forall x \in (x_0, x_0+\delta) \hookrightarrow f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}_{y_{\text{кас.}}} + \frac{f''(\xi)(x-x_0)^2}{2},\ \frac{f''(\xi)(x-x_0)^2}{2} \geqslant 0 \Rightarrow$$

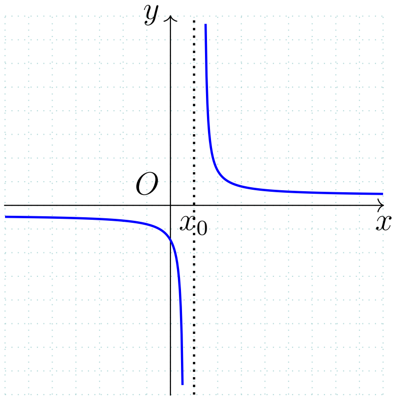
$$\Rightarrow f(x) \geqslant y_{\text{кас.}}(x)\ \forall x \in (x_0, x_0+\delta)$$

Следовательно, график перешел с одной стороны касательной на другую.

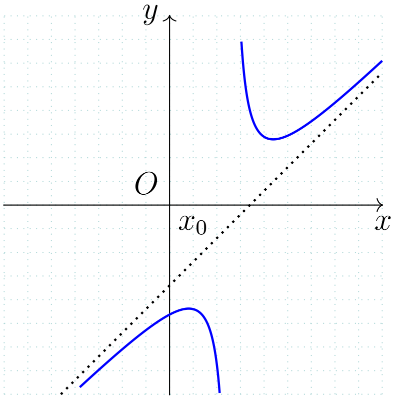
Почему обратное неверно?

□

Асимптоты



Вертикальная асимптота



Наклонная асимптота

Определение 5.20. Будем говорить, что график функции f имеет *вертикальную асимптоту в точке* x_0, если $\left[\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = \pm\infty \\ \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \pm\infty\end{array}\right.$

Определение 5.21. Прямая $y = k\cdot x + b$, $b, k \in \mathbb{R}$ называется *наклонной асимптотой графика функции* $f\colon (A, \infty)$, если $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - kx - b) = 0$.

Аналогично определяется *наклонная асимптота на* $-\infty$

Теорема 5.29. *(Критерий асимптоты)*

Прямая $y = kx+b$ *— асимптота функции* $f\colon (A, +\infty)$ $\Leftrightarrow (*)$ $\begin{cases}\exists \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k \\ \exists \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = b\end{cases}$

Доказательство. Шаг 1. Пусть $y = kx + b$ — асимптота. Следовательно,

$$\exists \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) - b = 0 \Rightarrow \exists \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = b \Rightarrow f(x) - kx = b + o(1), x \to +\infty$$

Разделив все на x, получаем

$$\frac{f(x)}{x} = k + \frac{b}{x} + \frac{1}{x}o(1), x \to \infty.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k$.

Шаг 2. Пусть обратно выполнена $(*)$. Тогда $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = b$. □

План построения графика

1. Найти область определения.
2. Найти точки пересечения с осями координат.
3. Построить асимптоты, если они есть.
4. Нарисовать эскиз графика.

5. Найти $f'(x)$, точки экстремума, интервалы возрастания и убывания функции.
6. Найти $f''(x)$, интервалы выгнутости и вогнутости, точки перегиба.
7. Строим уточненный график.

6 Первообразная, неопределенный интеграл, полиномы, комплексные числа

Определение 6.1. Будем говорить, что $f\colon (a,b) \mapsto \mathbb{R}$ имеет *первообразную* F на (a,b), если F — дифференцируема на (a,b) и $\forall x \in (a,b)$ $F'(x) = f(x)$.

Примечание. Бессмысленно считать первообазную в точке, мы всегда рассматриваем интервалы.

Примечание. Если $f\colon (a,b) \mapsto \mathbb{R}$ имеет устранимый разрыв или разрыв первого рода, то она не имеет на (a,b) первообразной (следствие из теоремы Лагранжа о среднем).

Определение 6.2. *Неопределенным интегралом* функции f на (a,b) будем называть множество всех первообразных на (a,b) и записывать $\displaystyle\int f(x)\,dx$.

Лемма 6.1. *Пусть f дифференцируема на (a,b). Тогда $f'(x) = 0$ $\forall x \in (a,b) \Leftrightarrow f(x) \equiv const$.*

Доказательство. 1. Если $f(x) = t$ $\forall x \in (a,b)$, то $f'(x) = 0$ $\forall x \in (a,b)$.

2. Пусть $f'(x) = 0$ $\forall x \in (a,b)$. Рассмотрим произвольные $x_1, x_2 \in (a,b)$, тогда по теореме Лагранжа $\exists \xi \in (a,b)$: $f(x_1) - f(x_2) = f'(\xi)(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$. А так как x_1 и x_2 были выбраны из (a,b) произвольно, то $f(x) = const$ на (a,b). $\square$

Следствие. Пусть F — первообразная f на (a,b). Тогда $\displaystyle\int f(x)\,dx = \{F(x) + C : C \in \mathbb{R}\}$.

Доказательство. Пусть F_1 и F_2 — две различные первообразные f. Тогда $F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0 \Rightarrow$ по лемме 2.1 $F_1 - F_2 = const \Rightarrow$ первообразные отличаются только на $C \in \mathbb{R}$. $\square$

6.1 Свойства неопределенного интеграла

1. Линейность

Теорема 6.1. *Пусть $a, b \in \mathbb{R}$: $a < b$ и существуют первообразные для f_1 на (a,b) и f_2 на (a,b). Тогда если $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$: $|\alpha_1| + |\alpha_2| > 0$, то существует первообразная для $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ и более того $\displaystyle\int \Big(\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)\Big)\,dx = \alpha_1 \int f_1(x)\,dx + \alpha_2 \int f_2(x)\,dx$.*

Доказательство. Пусть F_1 — первообразная для f_1, а F_2 — первообразная для f_2. Тогда $\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2$ — первообразная для $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ (так как производные обладают свойством линейности), можно убедиться в этом, взяв производную $\Rightarrow \displaystyle\int \Big(\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)\Big)\,dx = \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + C$. С другой стороны $\alpha_1 \displaystyle\int f_1(x)\,dx = \alpha_1 F_1(x) + C_1$ и $\alpha_2 \displaystyle\int f_2(x)\,dx = \alpha_2 F_2(x) + C_2$, сложив это, получим $\alpha_1 F_1(x) + C_1 + \alpha_2 F_2(x) + C_2$, что равно $\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + C$, так как что $C_1 + C_2$, что C «пробегают» все вещественные числа.

Примечание. Равенство надо понимать, как равенство семейств функций, то есть семейства совпадают. $\square$

Примечание.

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C$$
$$\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\arcsin x + C \text{ или же } \arccos x + C$$

но это не значит, что $-\arcsin x = \arccos x$. Это значит, что данные семейства равны (константы не равны).

2. Интегрирование подстановкой (замена переменной)

Теорема 6.2. *Пусть $a, b \in \mathbb{R}$: $a < b$ и f имеет первообразную F на (a, b). Пусть x: $(\alpha, \beta) \mapsto (a, b)$ дифференцируема на (α, β). Тогда $\int f\big(x(t)\big)x'(t)\,dt = \int f\big(x(t)\big)\,dx(t) = F\big(x(t)\big) + C$.*

Доказательство. По теореме о дифференцировании композиции функций получается $F\big(x(t)\big)' = F'\big(x(t)\big)x'(t)$ $\forall t \in (\alpha, \beta)$. Тогда отсюда и из структуры множества первообразных получаем искомое. □

3. Интегрирование по частям

Теорема 6.3. *Пусть $a, b \in \mathbb{R}$: $a < b$ и U, V дифференцируемы на (a, b). Тогда выполняется $\int U(x)\,dV(x) = U(x) \cdot V(x) - \int V(x)\,dU(x)$, где $dV(x) = V'(x)dx$, $dU(x) = U'(x)dx$.*

Доказательство. Так как U, V дифференцируемы на (a, b), то $\exists (UV)'(x) = U'(x)V(x) + V'(x)U(x)$ по формуле Лейбница, откуда в силу линейности интеграла $\int (UV)'\,dx = \int U'(x)V(x)\,dx + \int V'(x)U(x)\,dx \Rightarrow \int U(x)V'(x)\,dx = U(x)V(x) + C - \int U'(x)V(x)\,dx = U(x)V(x) - \int U'(x)V(x)\,dx$, где равенство понимается с точки зрения семейства функций. □

Стандартные интегралы

6.2 Комплексные числа

Определение 6.3. $\mathbb{C}$ — множество пар вещественных чисел (x_1, x_2) с введёнными следующим образом операциями:

1. $(x_1, x_2) \pm (y_1, y_2) = (x_1 \pm y_1, x_2 \pm y_2)$, $\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{C}$;
2. $\alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2)$, $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{C}, \alpha \in \mathbb{R}$;
3. $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1 y_1 - x_2 y_2, x_2 y_1 + x_1 y_2)$, $\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{C}$;
4. $\forall z \neq 0\ \exists! \frac{1}{z}$: $z \cdot \frac{1}{z} = 1$.

$$\int x^\alpha \, dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C, \;\; \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x+a} \, dx = \ln|x+a| + C$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \mathrm{tg} x + C, \;\; x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = \mathrm{ctg} x + C, \;\; x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\int \mathrm{sh} x = \mathrm{ch} x + C$$

$$\int \mathrm{ch} x = \mathrm{sh} x + C$$

$$\int \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x} \, dx = \mathrm{th} x + C$$

$$\int \frac{1}{\mathrm{sh}^2 x} \, dx = -\mathrm{cth} x + C, \;\; x \neq 0$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \mathrm{arctg} x + C$$

$$\int -\frac{1}{1+x^2} \, dx = \mathrm{arcctg} x + C$$

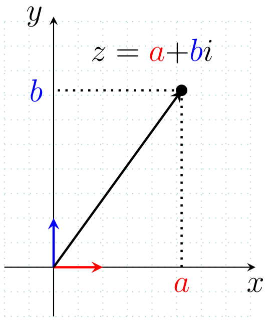
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x + C, \;\; |x| < 1$$

$$\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arccos x + C, \;\; |x| < 1$$

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \;\; a > 0, a \neq 1$$

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2} \, dx = \ln|\frac{x-a}{x+a}| + C, \;\; a \neq \pm a$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} \, dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C, \;\; x^2 + a > 0$$



Также $(1,0) \equiv 1$, $i := (0,1)$. *Действительной* частью назовём x_1 и будем обозначать $\mathrm{Re} z$, *мнимой* — x_2 и будем обозначать $\mathrm{Im} z$.

Свойства комплексных чисел:

1. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
2. $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1 \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
3. $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \quad \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$
4. $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 \quad \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$
5. $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3 \quad \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$

Если ввести на плоскости полярные координаты, то любой ненулевой вектор можно представить как $z = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$, где r — модуль вектора, φ — аргумент. То есть мы можем ввести *тригонометрическую форму записи комплексного числа* — $z = r\cos\varphi + i\sin\varphi$, где φ определено с точностью до 2π.

Определение 6.4. Пусть $z = x + iy$. Тогда $e^z := e^x \cdot (\cos y + i \sin y)$.

Следствие. $e^{i\varphi} := \cos\varphi + i\sin\varphi$ — формула Эйлера. Как следствие $z = re^{i\varphi}$ $\forall z \in \mathbb{C}$.

Свойства экспоненты комплексного числа: $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$, $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Доказательство. Пусть $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$.

Тогда $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = (e^{x_1} \cdot e^{x_2}) \cdot \big(\cos y_1 + i \sin y_1\big) \cdot \big(\cos y_2 + i\sin y_2\big) = e^{x_1+x_2} \cdot \big(\cos y_1 + y_2 + i \sin y_1 + y_2\big) = e^{z_1+z_2}$. □

Следствие. Пусть $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, то $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, а $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$.

Доказательство. Достаочно записать числа в экспоненциальном виде и воспользоваться свойством, которое мы доказали ранее $z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = (r_1 \cdot r_2) e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \Rightarrow |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| = r_1 \cdot r_2$, а $\arg z_1 \cdot z_2 = \arg z_1 + \arg z_2 = \varphi_1 + \varphi_2$. □

Следствие. Пусть $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_2 \neq 0$. Тогда $\exists! z = \dfrac{z_1}{z_2}$, при этом $|z| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, а $\arg z = \arg z_1 - \arg z_2$.

Доказательство. Представим исходную дробь как $z \cdot z_2 = z_1$. Пусть $z = re^{i\varphi}$, $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$. По правилам, выведенным ранее, получим $(r \cdot r_2)e^{i(\varphi+\varphi_2)} = r_1 e^{i\varphi_1} \Rightarrow r = \frac{r_1}{r_2}$, а $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$. □

Определение 6.5. Пусть $z \in \mathbb{C}$, $z = a + bi$. Тогда его *комплексно сопряженным* числом назовем $\overline{z} := a - bi$.

Свойства комплексных сопряжений:

1. $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$;
2. $\overline{\overline{z}} = z$;
3. $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$;
4. $z + \overline{z} = 2\text{Re}z$;
5. $z - \overline{z} = 2\text{Im}z$.

6.3 Полиномы

Определение 6.6. *Комплексным полиномом n-ой степени* назовём $P_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k z^k$, притом $\alpha_k \in \mathbb{C}$ $\forall k \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Утверждение 6.1. *Следующие условия эквивалентны:*

1. $P_n(z) = Q_n(z)$ $\forall z \in \mathbb{C}$;
2. $P_n(x) = Q_n(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$;
3. $a_k = b_k$ $\forall k \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2), (3) $\Rightarrow$ (1) очевидно.

Докажем (2) $\Rightarrow$ (3). Имеем $P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$, $Q_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k x^k$, подставим $x = 0$, тогда $a_0 = b_0$, тогда вычитая один полином из другого и деля на x, получим $a_1 = b_1$ и так далее. Итого $a_k = b_k$ $\forall k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. □

Определение 6.7. *Алгребраической дробью* назовём $R(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$. Притом, если $n \geqslant m$, то дробь называется *неправильной*, иначе *правильной*.

Теорема 6.4. *Для любых полиномов $P_n(z)$ и $Q_m(z)$: $n \geqslant m$, $\exists! D_{n-m}(z)$ и $R(z)$: $\dfrac{P_n(z)}{Q_m(z)} = D_{n-m}(z) + \dfrac{R(z)}{Q_m(z)}$, где $\deg R(z) < m$.*

Доказательство. Пусть $P_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$, $Q_m(z) = \sum\limits_{k=0}^{m} b_k z^k$. Воспользуемся методом неопределённых коэффициентов для поиска $D_{n-m}(z)$. Приведём к общему знаменателю, то есть умножим на $Q_m(z)$, получим $P_n(z) = D_{n-m}(z)Q_m(z) + R(z)$. Запишем $D_{n-m}(z)$ в виде $\sum\limits_{k=0}^{n-m} d_k z^k$, тогда имеем $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k = d_{n-m} z^{n-m} \cdot b_m z^m +$ младшие члены, так как степень $R(z)$ меньше, чем $n - m$. А так как полиномы равны, то $a_n = d_{n-m} \cdot b_m \Rightarrow d_{n-m} = \dfrac{a_n}{b_n}$ однозначно.

Рассмотрим разность $P_n(z) - d_{n-m}z^{n-m} \cdot Q_m(z) = \tilde{P}(z)$, так как от n-ой степени мы уже избавились, то степень $\tilde{P}(z)$ не выше $n-1$. Итого имеем $\dfrac{P_n(z)}{Q_m(z)} = d_{n-m}z^{n-m} + \dfrac{\tilde{P}(z)}{Q_m(z)}$, пока степень $\tilde{P} > Q_m$, то продолжаем по индукции с $\tilde{P}(z)$. Получаем, что требовалось. $\square$

Теорема 6.5. *(Теорема Безу) Число z_0 является корнем полинома $P_n(z) \Leftrightarrow P_n(z)$ делится на $(z - z_0)$ без остатка.*

Доказательство. В силу только что доказанной теоремы $\dfrac{P_n(z)}{z - z_0} = P_{n-1}(z) + \dfrac{C_0}{z - z_0} \Leftrightarrow$ $P_n(z) = P_{n-1}(z)(z - z_0) + C_0$, а как как z_0 корень, то $P_n(z_0) = 0 = C_0$, а значит есть деление без остатка. $\square$

Теорема 6.6. *(Основная теорема алгебры) Пусть $n \in \mathbb{N}$. Тогда любой полином $P_n(z)$ имеет хотя бы один комплексный корень.*

Следствие. Любой полином $P_n(z) = a\prod\limits_{k=1}^{n}(z - z_k)$ (без учёта кратности).

Доказательство. По основной теореме алгебры $P_n(z)$ имеет корень z_1, тогда в силу теоремы Безу можно поделить $P_n(z)$ на $(z - z_1)$ без остатка, то есть $P_n(z) = (z - z_1)P_{n-1}(z)$. Продолжая по индукции, получаем разложение многочлена на множители. $\square$

Далее до конца главы коэффициенты подразумеваются вещественные.

Определение 6.8. Пусть $P_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$, $a_k \in \mathbb{R}\ \forall k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Тогда $\overline{P_n(z)} = \overline{\sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k} = \sum\limits_{k=0}^{n} \overline{a_k z^k} = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \overline{z^k} = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k (\overline{z})^k = P_n(\overline{z})$.

Определение 6.9. Будем говорить, что z_0 — *корень кратности* k ($k \leqslant n$) полинома $P_n(z)$, если $P_n(z) = (z - z_0)^k \cdot Q(z)$, где $Q(z)$ не имеет в качестве корня z_0.

Теорема 6.7. *Пусть $P_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$, $a_k \in \mathbb{R}\ \forall k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ и z_0 — корень кратности $k \leqslant n$. Тогда $\overline{z}_0$ — корень кратности k.*

Доказательство. Так как z_0 — корень кратности k, то $P_n(z) = (z - z_0)^k \cdot Q(z)$. Тогда $\overline{P_n(z)} = \overline{(z - z_0)^k} \cdot \overline{Q(z)}$, но так как $\overline{P_n(z)} = P_n(\overline{z})$, то получаем $P_n(\overline{\overline{z}}) = (\overline{\overline{z}} - \overline{z_0})^k \cdot \overline{Q(\overline{z})} \Rightarrow$ $P_n(z) = (z - \overline{z_0})^k \cdot \overline{Q(\overline{z})}$, откуда получаем, что $\overline{z_0}$ — корень кратности k.

Примечание. Необходимо также убедиться, что $Q(\overline{z})$. Пусть $Q_1(z) = \overline{Q(\overline{z})}$. Тогда $Q_1(\overline{z_0}) = \overline{Q(\overline{\overline{z_0}})} = \overline{Q(z_0)} \neq 0$. $\square$

Следствие. Пусть $P_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$, $a_k \in \mathbb{R}\ \forall k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Тогда $P_n(x) = a(x - x_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x - x_s)^{k_s} \cdot (x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1} \cdot \ldots \cdot (x^2 + p_t x + q_t)^{l_t}$, $n = k_1 + \ldots + k_s + l_1 + \ldots + l_t$, где $\forall i \in \{1, 2, \ldots, t\} \hookrightarrow p_i^2 - 4q_i < 0$.

Доказательство. Рассмотрим $P_n(z) = a(z - x_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (z - x_s)^{k_s} \cdot (z - z_1)^{l_1} \cdot (z - \overline{z_1})^{l_1} \cdot \ldots \cdot (z - z_t)^{l_t} \cdot (z - \overline{z_t})^{l_t}$, где $x_i \in \mathbb{R}\ \forall i \in \{1, 2, \ldots, s\}$. Раскроем все полиномы $(z - z_i)(z - \overline{z_i})\ \forall i \in \{1, 2, \ldots, t\}$, получим $z^2 - (z_i + \overline{z_i})z + z_i\overline{z_i}$, тогда $p_i^2 - 4q_i = (z_i + \overline{z_i})^2 - 4z_i\overline{z_i} = (z_i - \overline{z_i})^2 = (2i \cdot \mathrm{Im} z_i)^2 = -4(\mathrm{Im} z_i)^2$, что меньше нуля. $\square$

Теорема 6.8. *Пусть $P(x)$, $Q(x)$ — полиномы с вещественными коэффициентами, $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ — правильная дробь и x_0 — корень кратности k знаменателя, то есть $Q(x) = (x-x_0)^k \cdot \tilde{Q}(x)$, где $\tilde{Q}(x_0) \neq 0$. Тогда $\exists! A \in \mathbb{R}$, $F(x)$: $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{A}{(x-x_0)^k} + \dfrac{F(x)}{(x-x_0)^{k-1} \cdot \tilde{Q}(x)}$, где $\deg F(x) < \deg \tilde{Q(x)} + k - 1$.*

Доказательство. Равенство теоремы равносильно $P(x) = A \cdot \tilde{Q}(x) + F(x) \cdot (x - x_0) \Leftrightarrow P(x) - A \cdot \tilde{Q}(x) = F(x) \cdot (x - x_0) \Leftrightarrow$ левая часть делится на $(x - x_0)$ без остатка, следовательно по теореме Безу $P(x_0) - A \cdot \tilde{Q}(x_0) = 0$, а так как $\tilde{Q}(x_0) \neq 0$, то $A = \dfrac{P(x_0)}{\tilde{Q}(x_0)}$ — однозначно, откуда однозначно определяется $F(x) = \dfrac{P(x) - A \cdot \tilde{Q}(x)}{x - x_0}$. Получаем $\deg P(x) - A \cdot \tilde{Q}(x) < \deg Q(x) \Rightarrow \deg F(x) < \deg Q(x) - 1 = \deg \tilde{Q(x)} + k - 1$. □

Теорема 6.9. *Пусть P и Q — полиномы с вещественными коэффициентами, $\dfrac{P}{Q}$ — правильная дробь и $z_0 \in \mathbb{C}$ ($Imz_0 \neq 0$) — корень кратности k. Тогда $\exists! B, C \in \mathbb{R}$ и полином F: $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{Bx + C}{(x^2 + p_0 x + q_0)^k} + \dfrac{F(x)}{(x^2 + p_0 x + q_0)^{k-1} \cdot \tilde{Q}(x)}$, где $\tilde{Q}(x)$ определяется из $Q(x) = (x^2 + p_0 x + q_0)^k \cdot \tilde{Q}(x)$, при этом второе слагаемое — правильная дробь.*

Доказательство. Равенство теоремы равносильно $P(x) = (Bx + C) \cdot \tilde{Q}(x) + F(x)(x^2 + p_0 x + q_0) \Leftrightarrow P(x) - (Bx + C) \cdot \tilde{Q}(x) = F(x)(x^2 + p_0 x + q_0) \Leftrightarrow P(x) - (Bx + C) \cdot \tilde{Q}(x)$ делится без остатка на $(x - z_0)$, что по теореме Безу равносильно $P(z_0) - (Bz_0 + C) \cdot \tilde{Q}(z_0) = 0$, но $\tilde{Q}(z_0) \neq 0$, тогда $Bz_0 + C = \dfrac{P(z_0)}{\tilde{Q}(z_0)} = x_1 + y_1 i$. Пусть $z_0 = x_0 + y_0 i$. Тогда $Bx_0 + By_0 i + C = x_1 + y_1 i \Rightarrow Bx_0 + C = x_1$ и $By_0 = y_1$. А так как $\mathrm{Im} z_0 \neq 0$, то $B = \dfrac{y_1}{y_0} \Rightarrow C = x_1 - \dfrac{y_1}{y_0} \cdot x_0$, то есть мы однозначно нашли коэффициенты, а тогда полином F тоже строится однозначно.

То, что второе слагаемое правильная дробь доказывается аналогично предыдущей теореме. □

Следствие. Пусть $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ — правильная дробь и $Q(x) = a(x - x_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x - x_s)^{k_s} \cdot (x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1} \cdot \ldots \cdot (x^2 + p_t x + q_t)^{l_t}$, $n = k_1 + \ldots + k_s + l_1 + \ldots + l_t$, где $\forall i \in \{1, 2, \ldots, t\} \hookrightarrow p_i^2 - 4q_i < 0$. Тогда $R(x) = \sum\limits_{i=1}^{s} \sum\limits_{j=1}^{k_i} \dfrac{A_j^i}{(x - x_i)^j} + \sum\limits_{i'=1}^{t} \sum\limits_{j'=1}^{l_{i'}} \dfrac{B_{j'}^{i'} x + C_{j'}^{i'}}{(x^2 + p_{i'} x + q_{i'})^{j'}}$.

Доказательство. «Доказывается многократным повторением теорем, которые только что были» (с) Тюленев А.И. □

6.4 Интегрирование дробей

Алгоритм работы с дробями: если дробь неправильная, значит надо поделить её в столбик.

$$\int \frac{1}{(x - x_0)^k} dx = \frac{1}{1 - k} \cdot \frac{1}{(x - x_0)^{k-1}} + C, \ k \neq 1.$$

$$\int \frac{1}{(x - x_0)^k} dx = \ln |x - x_0| + C.$$

Научимся считать $\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^l}$, $l \in \mathbb{R}$.

Вынесем $\frac{B}{2}$, получим $\frac{B}{2}\int \frac{2x+\frac{2C}{B}}{(x^2+px+q)^l}dx = \frac{B}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^l}dx + \left(C - \frac{B\cdot p}{2}\right)\int \frac{1}{(x^2+px+q)^l}$
Первый интеграл берётся заменой $t = x^2+px+q$, со вторым сложнее:
$\int \frac{1}{(x^2+px+q)^l}dx = \int \frac{1}{\left((x+\frac{p}{2})^2+(q-\frac{p^2}{4})\right)^l}dx$, так как $q - \frac{p^2}{4} > 0$, то оно представимо в виде a^2, $a \in \mathbb{R}_+$, сделаем замену $t = x + \frac{p}{2}$. Получаем $\int \frac{1}{(t^2+a^2)^l}dx$.

Если $l = 1$, то искомый интеграл равен $\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C$. Если $l > 1$, то будем интегрировать по частям. Обозначим $I_l(t) = \int \frac{1}{(t^2+a^2)^l}dt$. Получаем $\frac{t}{(t^2+a^2)^l} + l \cdot \int \frac{t\cdot 2t}{(t^2+a^2)^{l+1}}dt = \frac{t}{(t^2+a^2)^l} + 2l\cdot \int \frac{1}{(t^2+a^2)^l}dt - 2l\cdot a^2 \cdot \int \frac{1}{(t^2+a^2)^{l+1}}dx$.

Итого получаем $I_l(t) = \frac{t}{(t^2+a^2)^l} + 2l\cdot I_l(t) - 2l\cdot a^2\cdot I_{l+1}(t)$, то есть рекуррентное соотношение. Откуда $I_{l+1}(t) = \left[\frac{t}{(t^2+a^2)^l} + (2l-1)\cdot I_l(t)\right]\cdot \frac{1}{2l\cdot a^2}$.

1) $\int R(x^{1/n})\,dx$
делается замена $t = x^{1/n}$

2) $\int R(x,)\,dx$

3) Подстановки Чебышева $\int ax^m(bx^n+c)^p\,dx$

Теорема 6.10.

COMING SOON.......

7 Линейные пространства (векторные пространства)

Определение 7.1. $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ — пространство строк длины n из вещественных чисел, то есть $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

Примечание. В литературе можно ещё встретить $\mathbb{C}^n \sim \mathbb{R}^{2n}$, $z = (z_1, \ldots, z_n)$.

Определение 7.2. Пусть E — множество, на котором введены операции (отображения):
«+» : $\mathrm{E} \times \mathrm{E} \mapsto \mathrm{E}$
« · »: $\mathbb{R} \times \mathrm{E} \mapsto \mathrm{E}$
удовлетворяющее следующим условиям:

1. $a + b = b + a$ $\quad \forall a, b \in \mathrm{E}$
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ $\quad \forall a, b, c \in \mathrm{E}$
3. $\exists \overline{0} \in E$: $a + \overline{0} = a$ $\quad \forall a \in \mathrm{E}$
4. $\exists -a \in E$: $a + (-a) = \overline{0}$ $\quad \forall a \in \mathrm{E}$
5. $(\alpha\beta) \cdot a = \alpha \cdot (\beta \cdot a)$ $\quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathrm{E}$
6. $1 \cdot a = a$ $\quad 1 \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathrm{E}$
7. $(\alpha + \beta) \cdot a = \alpha \cdot a + \beta \cdot a$ $\quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathrm{E}$
8. $\alpha \cdot (a + b) = \alpha \cdot a + \alpha \cdot b$ $\quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall a, b \in \mathrm{E}$

то $(\mathrm{E}, +, \cdot)$ называется *вещественным векторным пространством* или *вещественным линейным пространством* или *линейным пространством над полем вещественных чисел* $(\mathbb{R})$.

Примечание. Заменяя вещественные числа на комплексные, можно получить определение *комплексного линейного пространства* или *линейного пространства над* $\mathbb{C}$.

Примеры. «Базовые» линейные пространства — $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$.

В $\mathbb{R}^n$ введём операцию «+» следующим образом: $\forall x, y \in \mathbb{R}^n \hookrightarrow x + y = (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$, - а «·» так: $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}^n \hookrightarrow \alpha \cdot x = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)$. Требуемым аксиомам $\mathbb{R}^n$ очевидно удовлетворяет.

Утверждение 7.1. *Элемент* $\overline{0}$ *единственен.*

Доказательство. Пусть $\exists \overline{0}_1, \overline{0}_2$: $\overline{0}_1 \neq \overline{0}_2$. Тогда по аксиомам 1 и 3 получаем $\overline{0}_1 = \overline{0}_1 + \overline{0}_2 = \overline{0}_2 + \overline{0}_1 = \overline{0}_2 \Rightarrow \overline{0}_1 = \overline{0}_2$, то есть исходное предположение было неверно и $\overline{0}$ единственен. □

Утверждение 7.2. $\forall a \in E$ *элемент* $-a$ *единственен.*

Доказательство. Пусть $\exists -a_1$ и $-a_2 \in \mathrm{E}$: $a + (-a_1) = 0$ и $a + (-a_2) = 0$. Тогда $-a_1 = -a_1 + 0 = -a_1 + a + (-a_2) = 0 + (-a_2) = -a_2 \Rightarrow -a_1 = -a_2$, то есть исходное предположение было неверно и $-a$ единственно. □

Утверждение 7.3. $0 \cdot a = \overline{0}$, $\forall a \in E$.

Доказательство. $0 \cdot a = (0 \cdot a) + \overline{0} = (0 \cdot a) + a + (-a) = (0 + 1) \cdot a + (-a) = a + (-a) = \overline{0}$. □

Линейные пространства — это не только $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$.

Примеры. Пусть $\mathrm{E} = \{P(x) \colon x \in \mathbb{R}\}$, то есть пространства всех полиномов $P(x)$. Это будет вещественным векторным пространством, так как удовлетворяет всем аксиомам. Также $\mathrm{F} = \{P(z) \colon z \in \mathbb{C}\}$ — комплексное векторное пространство.

Примечание. Эти примеры интересны тем, что они «бесконечномерны», но об этом позже.

7.1 Нормированное пространство

Определение 7.3. *Линейное нормированное пространство (ЛНП)* — это пара $(\mathrm{E}, \|\|)$, где E — вещественное линейное пространство, а $\|\|\colon \mathrm{E} \mapsto [0; +\infty)$ — отображение, удовлетворяющее свойствам (назовём это нормой):

1. $\|x\| \geqslant 0 \quad \forall x \in \mathrm{E};\ \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \overline{0}$
2. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathrm{E}$
3. $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in \mathrm{E}$

Пример. В $\mathbb{R}^n$ $\|x\|_1 = \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|$ и $\|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$. Проверка, почему эти нормы удовлетворяют свойствам, очевидна.

Примечание. $\forall p \in (1; +\infty)$ $\|x\|_p = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, но эту формулу тяжелее доказать.

Пример. $\mathrm{C}([a,b])$ — линейное пространство всех непрерывных на $[a,b]$ функций, будем рассматривать его как вещественное линейное пространство $(a, b \in \mathbb{R})$.

Пусть $f_1 \in \mathrm{C}([a,b])$, $f_2 \in ([a,b])$. Тогда $\begin{cases} (f_1+f_2)(x) := f_1(x) + f_2(x)\ \forall x \in [a,b] \\ (\alpha f_1)(x) := \alpha \cdot f_1(x)\ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in [a,b] \end{cases}$ — определение операций над функциями из $\mathrm{C}([a,b])$. Заметим, что данные операции корректно введены, так как сумма двух непрерывных функций — непрерывная функция и произведение числа на непрерывную функцию — непрерывная функция.

Таким образом мы наделяем множество непрерывных на $[a,b]$ функций структурой линейного пространства.

Также введём норму в $\mathrm{C}([a,b])$: $\|f\|_{\mathrm{C}([a,b])} := \max\limits_{x \in [a,b]} |f(x)|$. Заметим, что max непрерывной на отрезке функции достигается. Проверим аксиомы нормы:

1. $\|f\|_{\mathrm{C}([a,b])} \geqslant 0$ очевидно; $\|f\|_{\mathrm{C}([a,b])} = 0 \Leftrightarrow \max\limits_{x \in [a,b]} |f(x)| = 0 \Rightarrow f(x) \equiv 0$ на $[a,b]$;
2. $\|\alpha f\|_{\mathrm{C}([a,b])} = \max\limits_{x \in [a,b]} |\alpha f(x)| = |\alpha| \max\limits_{x \in [a,b]} |f(x)| = |\alpha| \|f\|_{\mathrm{C}([a,b])}$;
3. $\|f_1+f_2\|_{\mathrm{C}([a,b])} = \max\limits_{x \in [a,b]} |f_1(x)+f_2(x)| = |f_1(x^*)+f_2(x^*)| \leqslant |f_1(x^*)|+|f_2(x^*)| \leqslant \max\limits_{x \in [a,b]} |f_1(x)| + \max\limits_{x \in [a,b]} |f_2(x)| = \|f_1\|_{\mathrm{C}([a,b])} + \|f_2\|_{\mathrm{C}([a,b])}$.

Замечание: x^* — точка отрезка в которой достигается максимум (в силу непрерывности на отрезке).

7.2 Метрическое пространство

Определение 7.4. Пара (X, ρ) — *метрическое пространство (МП)*, где X — абстрактное множество, $X \neq \varnothing$, а $\rho\colon X \times X \mapsto [0; +\infty)$, удовлетворяющее следующим аксиомам:

1. $\rho(x,y) \geqslant 0 \quad \forall x, y \in X$
2. $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad \forall x, y \in X$
3. $\rho(x,y) = \rho(y,x) \quad \forall x, y \in X$
4. $\rho(x,z) \leqslant \rho(x,y) + \rho(y,z) \quad \forall x, y, z \in X$

Определение 7.5. Пусть (X, ρ) метрическое пространство. *Открытым шаром* с центром в точке $x \in X$ и радиуса $r \geqslant 0$ называется множество $B_r(x) := \{y \in X\colon \rho(x,y) < r\}$, $\overline{B}_r(x) := \{y \in X\colon \rho(x,y) \leqslant r\}$ — «замкнутый» шар, а $\mathring{B}_r(x) = B_r(x) \backslash \{x\}$ — проколотый шар.

Примеры.

1. $X = \mathbb{R}$, $\rho(x, y) = |x - y|$;
2. $X = \mathbb{Q}$, $\rho(x, y) = |x - y|$;
3. $X = [0; 1]$, $\rho(x, y) = |x - y|$;
4. $X = [0; 1] \cap Q$, $\rho(x, y) = |x - y|$;
5. $X = \mathbb{R}$, $\rho(x, y) = |e^x - e^y|$;
6. Любое линейно нормированное пространство $(E, \|\|)$ становится метрическим пространством, если $\rho(x, y) := \|x - y\|$.

Примечание. Если (X, ρ) — метрическое пространство, тогда $X' \subset X$ — непустое множество, X' само становится метрическим пространством если сузить метрику ρ на него.

Задача. *Может ли в метрическом пространстве шар меньшего радиуса внутри себя строго содержать шар большего радиуса?*

Решение. Да, может. Возьмём $X = [0; 1]$, $\rho(x, y) = |x-y|$, а $B_{\frac{3}{4}}\left(\frac{1}{2}\right) = [0; 1]$, $B_{\frac{7}{8}}(1) = \left(\frac{1}{8}; 1\right]$ — все условия выполнены.

Примечание. Шар в метрическом пространстве не однозначно определяет центр и радиус: так в $X = [0; 1]$, $\rho(x, y) = |x - y|$ получается $B_{\frac{3}{4}}(1) = B_2(1) = [0; 1]$.

Определение 7.6. Пусть (X, ρ) —[метрическое пространство, $\mathrm{E} \subset X$. $x_0 \in X$ — *точка прикосновения* E, если $\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow B_\varepsilon(x_0) \cap \mathrm{E} \neq \varnothing$.

Определение 7.7. Пусть (X, ρ) метрическое пространство, $\mathrm{E} \subset X$. $x_0 \in X$ — *предельная точка* E, если $\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \overset{\circ}{B}_\varepsilon(x_0) \cap \mathrm{E} \neq \varnothing$.

Определение 7.8. Пусть (X_1, ρ_1), (X_2, ρ_2) метрические пространства, $\mathrm{E} \subset X_1$, $f\colon \mathrm{E} \mapsto X_2$, $x_0 \in X_1$ — предельная точка E. Будем говорить, что $\exists \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \mathrm{E}}} f(x) = y_0 \in X_2$ по Коши, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in (\overset{\circ}{B}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \cap \mathrm{E}) \hookrightarrow f(x) \in B_\varepsilon(y_0).$$

Определение 7.9. Пусть (X_1, ρ_1), (X_2, ρ_2) метрические пространства, $\mathrm{E} \subset X_1$, $f\colon \mathrm{E}\colon X_2$, $x_0 \in X_1$ — предельная точка E. Будем говорить, что $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0 \in X_2$ по Гейне, если

$$\forall \text{ последовательности Гейне } \{x_n\} \subset \mathrm{E} \text{ в точке } x_0 \hookrightarrow \exists \lim_{n \to \infty} f(x_n) = y_0.$$

Примечание. Определение последовательности Гейне в точке x_0 остается тем же, за тем исключением, что $\exists \lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\colon \forall n \geqslant N(\varepsilon) \hookrightarrow x_n \in B_\varepsilon(x_0) \Leftrightarrow \exists \lim\limits_{n \to \infty} \rho(x_n, x_0) = 0$.

Определение 7.10. Пусть (X_1, ρ_1), (X_2, ρ_2) метрические пространства, $\mathrm{E} \subset X_1$, $\mathrm{E} \neq \varnothing$, $f\colon \mathrm{E} \mapsto X_2$, $x_0 \in E$. Будем говорить, что f непрерывно в точке x_0, если:

1. x_0 — изолированная точка E, то есть $\exists \varepsilon > 0\colon B_\varepsilon(x_0) \cap \mathrm{E} = \varnothing$;
2. x_0 — предельная точка E, то есть $\exists \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \mathrm{E}}} f(x) = f(x_0)$.

Определение 7.11. Пусть (X_1, ρ_1), (X_2, ρ_2) метрические пространства, $\mathrm{E} \subset X_1$, $\mathrm{E} \neq \varnothing$. Отображение $f\colon \mathrm{E} \mapsto X_2$ называется непрерывным на E, если оно непрерывно в каждой точке множества E.

7.3 Равномерная непрерывность

Определение 7.12. Пусть (X_1, ρ_1), (X_2, ρ_2) метрические пространства, $\mathrm{E} \subset X_1$, $\mathrm{E} \neq \varnothing$. Будем говорить, что отображение $f\colon \mathrm{E} \mapsto X_2$ *равномерно непрерывно* на E, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x', x'' \in E\ \ \rho_1(x', x'') < \delta(\varepsilon) \hookrightarrow \rho_2(f(x'), f(x'')) < \varepsilon.$$

Задача. *Как связаны условия?*

1. $f \in C(E)$;

2. f *равномерно непрерывна на* E.

Решение. Запишем в кванторах первое утверждение:

$$\forall x' \in \mathrm{E}, \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(x', \varepsilon) > 0 : \forall x'' \in \mathrm{E}\ \rho_1(x', x'') < \delta(\varepsilon, x') \hookrightarrow \rho_2(f(x'), f(x'')) < \varepsilon.$$

Отсюда видно, что из (2) $\Rightarrow$ (1), так как $\forall x' \in \mathrm{E}$ возьмём $\delta(x', \varepsilon) = \delta(\varepsilon)$ из равномерной непрерывности, но из (1) $\not\Rightarrow$ (2). В качестве примера возьмём $X_1 = \mathbb{R}$, $X_2 = \mathbb{R}$, $\rho_1 = |x_1 - y_1|$, $\rho_2 = |x_2 - y_2|$, где $x_1, y_1 \in X_1$, $x_2, y_2 \in X_2$ (обычные расстояния на $\mathbb{R}$). Отображение $f(x) = x^2$ — непрерывно в каждой точке числовой прямой, но равномерно непрерывно оно не будет. **Нужна КартинОчка**

Сформулируем отрицание к равномерной непрерывности:

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0\ \exists x', x'' \in \mathbb{R} : |x' - x''| < \delta,\ \ |f(x') - f(x'')| \geqslant \varepsilon,\ \text{то есть}\ |(x')^2 - (x'')^2| \geqslant \varepsilon,$$

$$(x')^2 - (x'')^2 = (x' - x'')(x' + x'').$$

$$\exists \varepsilon = 1 : \forall \delta > 0\ \exists x' = \frac{2}{\delta}, x'' = \frac{\delta}{2} + \frac{2}{\delta} : |x' - x''| < \delta,\ \ |(x')^2 - (x'')^2| \geqslant 1.$$

Значит равномерной непрерывности нет.

Определение 7.13. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Множество $K \subset X$ называется *компактом*, если $\forall \{x_n\} \subset K\ \exists \{x_{n_j}\}$ — подпоследовательность, сходящаяся к некоторой точке $x^* \in K$.

Примечание. Критерий компактности, который мы ввели ранее, здесь не работает (компактность не эквивалетна ограниченности и замкнутости, но из компактности следует ограниченность и замкнутость).

Определение 7.14. Пустое множество $\varnothing$ по определению считаем компактом.

Теорема 7.1. *(Теорема Кантора) Пусть* (X_1, ρ_1), (X_2, ρ_2) *— метрические пространства,* $K \subset X_1$ *— компакт и* $f\colon K \mapsto X_2$. *Если* f *непрерывно на* K, *то оно равномерно непрерывно на* K.

Доказательство. Будем доказывать от противного. Пусть $f \in \mathrm{C}\,(K)$, но не равномерно непрерывно на K. Сформулируем отрицание к равномерной непрерывности, то есть

$$\exists \varepsilon^* > 0 : \forall \delta > 0\ \exists x', x'' \in K : \rho_1(x', x'') < \delta,\ \ \rho_2(f(x'), f(x'') \geqslant \varepsilon^*.$$

Раз $\forall \delta$, то возьмём δ вида $\frac{1}{n}$, где $n \in N$. Тогда $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n', x_n'' \in K$: $\begin{cases} \rho_1(x_n', x_n'') < \frac{1}{n} \\ \rho_2(f(x_n'), f(x_n'')) \geqslant \varepsilon^* \end{cases}$

Последовательность $\{x'_n\} \subset K$. Тогда по определению компактности $\exists\{x'_{n_j}\} \subset K$ — подпоследовательность и $\exists x^* \in K$: $\rho_1({x_{n_j}}', x^*) \to 0,\ j \to \infty$ (1), то есть сходится к x^*. Но f непрерывна к x^* по условию, тогда:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \big(B_{\delta(\varepsilon)}(x^*) \cap K\big) \hookrightarrow \rho_2(f(x^*), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall x', x'' \in \big(B_{\delta(\varepsilon)} \cap K\big) \hookrightarrow \rho_2(f(x'), f(x'')) \leqslant \rho_2(f(x^*), f(x')) + \rho_2(f(x^*), f(x'')) < \varepsilon \quad (2).$$

Из (1) и с учетом того, что $\rho_2(x''_{n_j}, x^*) \to 0,\ j \to \infty$ получается, что $\exists N \in \mathbb{N}$: $\forall j \geqslant N \hookrightarrow x'_{n_j}, x''_{n_j} \in B_{\delta(\varepsilon^*)}(x^*) \Rightarrow \rho_2(f(x'_{n_j}), f(x''_{n_j})) \geqslant \varepsilon^*,\ \forall j \geqslant N$.

С другой стороны из (2) $\forall j \geqslant N \hookrightarrow \rho_2(f(x'), f(x'')) < \varepsilon^*$. Противоречие. То есть исходное предположение было неверно. **Нужна картиночка.** □

Нужна картиночка.

7.4 Евклидово пространство

Определение 7.15. (*Вещественное евклидово пространство*) Пусть E — линейное пространство, а $<\cdot, \cdot>$: $\mathrm{E} \times \mathrm{E} \mapsto \mathbb{R}$ удовлетворяющее следующим условиям:

1. $<x, x> \in [0; +\infty)$ $\quad\forall x \in \mathrm{E}$
2. $<x, x> = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3. $<x, y> = <y, x>$ $\quad\forall x, y \in \mathrm{E}$
4. $<\alpha x + \beta y, z> = \alpha <x, z> + \beta <y, z>$ $\quad\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x, y, z \in \mathrm{E}$

тогда (E, $<\cdot, \cdot>$) называется *евклидовым пространством* со скалярным произведением $<\cdot, \cdot>$.

Определение 7.16. *Комплексное евклидово пространство* — пара (E, $<\cdot, \cdot>$), где E — линейное пространство, а $<\cdot, \cdot>$: $\mathrm{E} \times \mathrm{E} \mapsto \mathbb{C}$, удовлетворяющее следующим условиям:

1. $<x, x> \in [0; +\infty)$ $\quad\forall x \in \mathrm{E}$
2. $<x, x> = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3. $<x, y> = \overline{<y, x>}$ $\quad\forall x, y \in \mathrm{E}$
4. $<\alpha x + \beta y, z> = \alpha <x, z> + \beta <y, z>$ $\quad\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \forall x, y, z \in \mathrm{E}$

Далее будем работать с вещественными евклидовыми пространствами.

Теорема 7.2. *(Неравенство Коши-Буняковского-Шварца) Пусть (E, $<\cdot, \cdot>$) — евклидово пространство. Тогда справедливо*

$$|<x, y>| \leqslant \sqrt{<x, x>} \cdot \sqrt{<y, y>} \quad \forall x, y \in E.$$

Доказательство. Фиксируем x, y и рассмотрим $<x + ty, x + ty> \geqslant 0$ (по аксиомам скалярного произведения). Оно раскрывается как $<x, x> + 2t<x, y> + t^2<y, y> \geqslant 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$. Рассмотрим это как квадратный трехчлен относительно t, тогда дискриминант должен быть $\leqslant 0$, то есть $4 <x, y>^2 - 4<x, x>\cdot<y, y> \leqslant 0 \Rightarrow <x, y>^2 \leqslant <x, x>\cdot<y, y> \Rightarrow |<x, y>| \leqslant \sqrt{<x, x>} \cdot \sqrt{<y, y>}$. □

Пример. $\mathbb{R}^n$ становится евклидовым пространством, если ввести скалярное произведение следующим способом — $<x, y> := \sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k$. По определению проверяются все аксиомы.

Итого получаем следующее неравенство:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

Определение 7.17. Определим *евклидову норму*, как $\|x\|_e := \sqrt{<x, x>}$.

Теорема 7.3. *Объект, который мы только что определили, действительно задает норму.*

Доказательство. Просто проверим аксиомы нормы:

1. $\|x\|_e \geqslant 0 \; \forall x \in \mathrm{E}$ — верно;
2. $\|x\|_e = 0 \Leftrightarrow <x,\, x>= 0 \Leftrightarrow x = 0$ — верно;
3. $\|\alpha x\|_e = \sqrt{<\alpha x,\, \alpha x>} = \sqrt{\alpha^2 <x, x>} = |\alpha| <x, x>$ — верно;
4. $\|x+y\|_e^2 = <x,\, x> + 2<x,\, y> + <y,\, y> \leqslant <x,\, x> + 2\sqrt{<x, x><y, y>} + <y,\, y> = (<x, x> + <y, y>)^2$, то есть $\|x+y\|_e^2 \leqslant (\|x\|_e + \|y\|_e)^2$ — верно.

Итого получаем, что введённая нами норма удовлетворяет всем аксиомам нормы. □

Тут нужна картиночка

Определение 7.18. Под $\|x\|_2$ будем обозначать $\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2}$.

Задача. *Пусть $(E, \|\|)$ — линейное нормированное пространство. Можно ли в E ввести скалярное произведение так, чтобы $\|\|$ порождалось через скалярное произведение?*

Теорема 7.4. *(Критерий евклидовости) Пусть $E = (E, \|\|)$. Норма $\|\|$ является евклидовой $\Leftrightarrow$ выполнено тождество параллелограмма, то есть*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2, \quad \forall x, y \in E.$$

Доказательство. Шаг 1. Пусть $\|\|$ — евклидова норма. Тогда

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = <x+y, x+y> + <x-y, x-y> =$$

$$= <x, x> + 2<x, y> + <y, y> + <x, x> - 2<x, y> + <y, y> = 2<x, x> + 2<y, y> = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Шаг 2. Пусть выполнено тождество параллелограмма. Предъявим скалярное произведение. Рассмотрим $<x,\, y>= \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$, проверим, что выполнены аксиомы скалярного произведения. Покажем, что $<x+y,\, z> = <x,\, z> + <y,\, z>$:

$$<x, z> = \frac{1}{4}\left(\|x+z\|^2 - \|x-z\|^2\right)$$

$$<y, z> = \frac{1}{4}\left(\|y+z\|^2 - \|y-z\|^2\right)$$

Сложив, получим $<x, z> + <y, z> = \frac{1}{4}(\|x+z\|^2 - \|x-z\|^2 + \|y+z\|^2 - \|y-z\|^2)$ (1). Применим тождество параллелограмма:

$$\|x+z\|^2 + \|y+z\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|x+y+2z\|^2 + \|x-y\|^2\right)$$

$$\|x-z\|^2 + \|y-z\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|x+y-2z\|^2 + \|x-y\|^2\right)$$

Вычтем одно из другого и получим

$$(1) = \frac{1}{8}\left(\|x+y+2z\|^2 - \|x+y-2z\|^2\right) =$$

$$= \frac{1}{8}\left(4\left\|\frac{x+y}{2}+z\right\|^2 - 4\left\|\frac{x+y}{2}-z\right\|^2\right) = 2\cdot\frac{1}{4}\left(\left\|\frac{x+y}{2}+z\right\|^2 - \left\|\frac{x+y}{2}-z\right\|^2\right) =$$

$$= 2<\frac{x+y}{2}+z>.$$

Пока мы доказали, что $<x,\, z> + <y,\, z> = 2 <\frac{x+y}{2},\, z>$. Подставим $y = 0$. С учетом $<0,\, z>= 0$ получим $<x,\, z> = 2 <\frac{x}{2},\, z>\ \forall x, z \in \mathrm{E}$. Подставляя это в ранее доказанное нами тождество, получим то, что требовалось, то есть $<x,\, z>+<y,\, z> = <x+y,\, z>$.

Имеем:

1. $<x,\, y> = <y,\, x>\ \forall x, y \in \mathrm{E}$ — очевидно;
2. $<x+y,\, z> = <x,\, z> + <y,\, z>\ \forall x, y, z \in \mathrm{E}$ — проверили только что;
3. $<\frac{x}{2},\, z> = \frac{1}{2}<x,\, z> \Leftrightarrow <\frac{m}{2^n}x,\, z>= \frac{m}{2^n}<x,\, z>\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall m \in \mathbb{Z}$;
4. $<x,\, x>\geqslant 0$ и $<x,\, x>= 0 \Leftrightarrow x = 0\ \forall x \in \mathrm{E}$ — очевидно по тому, как мы ввели скалярное произведение.

Так как $f(\alpha) = \|\alpha x + y\|$ — непрерывна как функция от α (так как $|f(\alpha) - f(\beta)| = \||\alpha x + y| - |\beta x + y|\| \leqslant |\alpha - \beta|\|x\| \to 0, \beta \to \alpha$), а так как любое иррациональное число является пределом последовательности двоично рациональных чисел, то (3) с помощью предела преобразуется в $<\alpha x,\, z>= \alpha<x,\, z>\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall x, z \in \mathrm{E}$.

Итого теорема полностью доказана. □

Утверждение 7.4. *Вспомним про линейное пространство непрерывных на отрезке функций. Его норма $\|f\|_C$ является неевклидовой, то есть не может быть порождена каким-либо скалярным произведением.*

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что $a = 0$, $b = 1$, так как его всегда можно отмасштабировать к любому другому отрезку.

Нужна картиночка

Проверим тождество параллелограмма. Возьмём $f_1(x) = x$, а $f_2(x) = 1 - x$. $2\|f_1\|^2 = 2$, $2\|f_2\|^2 = 2$, $\|f_1+f_2\|^2 = 1$, $\|f_1-f_2\|^2 = 1$, но так как $4 \neq 2$ (подставляя значения в тождество параллелограмма) получаем, что норма не является евклидовой. □

7.5 Топология метрического пространства

Определение 7.19. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $E \subset X$ — множество. Точка $x_0 \in \mathrm{E}$ называется *внутренней*, если

$$\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x_0) \subset \mathrm{E}.$$

Определение 7.20. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $\mathrm{E} \subset X$ — множество. *Внутренностью* E будем называть множество всех внутренних точек E и обозначать $\mathrm{int}\mathrm{E}$.

Примечание. Определения точки прикосновения и предельной точки уже были даны.

Определение 7.21. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $\mathrm{E} \subset X$ — множество. *Замыканием* E будем называть множество всех точек прикосновения и обозначать clE или $\overline{\mathrm{E}}$.

Утверждение 7.5. *$intE \subset E \subset clE$.*

Определение 7.22. Множество E — открыто, если $\mathrm{E} \subset \mathrm{intE} \Leftrightarrow \mathrm{E} = \mathrm{intE}$.

Определение 7.23. Множество E — замкнуто, если $\mathrm{clE} \subset \mathrm{E} \Leftrightarrow \mathrm{E} = \mathrm{clE}$.

Примечание. Множества бывают и не открытые и не замкнутые, к примеру, $\mathbb{Q}$ или $(a; b]$ (полуинтервал).

Определение 7.24. Пустое множество $\varnothing$ и X считаются и открытыми, и замкнутыми.

Пример. Бывают нетривиальные множества, которые и открыты, и замкнуты. Пусть $X = [0; 1] \cap [2; 3], \rho = |x - y|$. Тогда $[0; 1]$ и $[2; 3]$ — и открыты, и замкнуты.

Нужна картинка.

Определение 7.25. Метрическое пространство (X, ρ) называется *топологически связным*, если его нельзя представить в виде непересекающегося (дизъюнктного) объединения двух и более множеств, которые одновременно и открыты, и замкнуты.

Лемма 7.1. *Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Тогда $\forall x \in X$, $\forall r > 0 \hookrightarrow B_r(x)$ — открытое множество.*

Доказательство. По определению $B_r(x) = \{y \in X\colon \rho(x, y) < r\}$.

Нужна картинка

Пусть $y \in B_r(x) \in B_r(x)$. Тогда $\rho(x, y) < r$. Пусть $\delta = r - \rho(x, y)2$. Докажем, что $B_\delta(y) \subset B_r(x)$:

Пусть $z \in B_\delta(y)$ $\rho(y, z) < \delta$. Тогда $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z) < \rho(x, y) + \delta = \rho(x, y) + r - \rho(x, y) = r \Leftrightarrow \rho(x, z) < r \Rightarrow z \in B_r(x)$, что и требовалось. □

Утверждение 7.6. *$E_1 \subset E_2 \Rightarrow intE_1 \subset intE_2$.*

Теорема 7.5. *Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $E \subset X$. Тогда*

1. *$intE$ — открытое множество $\Leftrightarrow intintE = intE$;*
2. *clE — замкнутое множество $\Leftrightarrow clclE$.*

Доказательство. Шаг 1. Пусть $x_0 \in \mathrm{intE} \Rightarrow \exists B_r(x_0) \subset \mathrm{E} \Rightarrow \mathrm{int}B_r(x_0) \subset \mathrm{intE}$, а $\mathrm{int}B_r(x_0) = B_r(x_0)$ по только что доказанной лемме$\Rightarrow$ intE — открытое множество.

Шаг 2. Пусть x_0 — точка прикосновения clE. Покажем, что $x_0 \in \mathrm{clE}$. Так как x_0 — точка прикосновения, то

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_0) \cap \mathrm{clE} \neq \varnothing \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists y \in \mathrm{clE} : y \in (B_{\frac{\varepsilon}{2}} \cap \mathrm{clE}).$$

Так как y — точка прикосновения E, то $\forall \varepsilon > 0 \ \ B_{\frac{\varepsilon}{2}} \cap \mathrm{E} \neq \varnothing \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists z \in \mathrm{E}$, $y \in \mathrm{clE}$:

$$\begin{cases} \rho(x_0, y) < \frac{\varepsilon}{2} \\ \rho(y, z) < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases} \Rightarrow \rho(x_0, z) \leqslant \rho_{x_0, y} + \rho(y, z) < \varepsilon.$$

Таким образом $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists z \in \mathrm{E}$: $\rho_{x_0, z} < \varepsilon \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ $B_\varepsilon(x_0) \cap \mathrm{E} \neq \varnothing \Rightarrow x_0 \in \mathrm{clE}$, то есть любая прикосновения принадлежит этому же множеству $\Rightarrow$ оно (clE) замкнуто.

Нужна картинка. □

Примечание. $\overline{B}_r(x)$ не всегда совпадает с замыканием открытого шара. Также стоит отметить, что происходит такая коллизия обозначений.

Пример. Пусть $X = [0;1] \cap \{2\}, \rho(x,y) = |x-y|$. Возьмём $B_1(1) = (0;1]$. $\mathrm{cl}B_1(1) = [0;1]$, но $\overline{B}_1(1) = X$, то есть замкнутый шар может быть «шире», чем замыкание открытого шара.

Лемма 7.2. *Пусть* (X,ρ) *— метрическое пространство. Тогда* $\forall E \subset X \hookrightarrow$

1. $X \backslash clE = int(X\backslash E)$;
2. $X \backslash intE = cl(X\backslash E)$.

Доказательство. Покажем (2), так как (1) аналогично.

$$\text{Пусть } x^* \in (X\backslash \mathrm{intE}).\ \text{Тогда} \begin{cases} x^* \in X \\ !(x^* \in \mathrm{intE}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^* \in X \\ \forall \varepsilon > 0\ B_\varepsilon(x^*) \not\subset \mathrm{E} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ B_\varepsilon(x^*) \cap (X\backslash \mathrm{E}) \neq \varnothing \Leftrightarrow x^* \text{ — точка прикосновения } X\backslash \mathrm{E} \Leftrightarrow x^* \in \mathrm{cl}(X\backslash \mathrm{E}).$$

□

Следствие. Пусть (X,ρ) — метрическое пространство. Тогда множество E замкнуто $\Leftrightarrow$ $(X\backslash \mathrm{E})$ открыто.

Доказательство. Так как E замкнуто, то оно совпадает со своим замыканием. В силу предыдущей леммы $X\backslash \mathrm{E} = X\backslash \mathrm{clE} = \mathrm{int}(X\backslash \mathrm{E})$ — $X\backslash \mathrm{E}$ открыто. □

Определение 7.26. Пусть E — множество в метрическом пространстве. Тогда *границей множества* назовём $\mathrm{clE}\backslash\mathrm{intE}$ и будем обозначать $\partial\mathrm{E}$.

Лемма 7.3. *Пусть* (X,ρ) *— метрическое пространство,* $E \subset X$*. Тогда* $x_0 \in \partial E \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \begin{cases} B_\varepsilon(x_0) \cap E \neq \varnothing \\ B_\varepsilon(x_0) \cap (X\backslash E) \neq \varnothing \end{cases}$$

Доказательство. Так как $x_0 \in \partial\mathrm{E}$, то по определению $\begin{cases} \forall \varepsilon > 0\ B_\varepsilon(x_0) \cap \mathrm{E} \neq \varnothing \\ !(\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x_0) \subset \mathrm{E}) \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0\ B_\varepsilon(x_0) \cap \mathrm{E} \neq \varnothing \\ \forall \varepsilon > 0\ B_\varepsilon(x_0) \cap (X\backslash \mathrm{E}) \neq \varnothing \end{cases}, \text{ что нам и нужно было.}$$

□

Теорема 7.6. *(Критерий точки прикосновения)* x_0 *— точка прикосновения множества* $E \Leftrightarrow \exists \{x_n\} \subset E$*:* $\rho(x_n, x_0) \to 0$*,* $n \to \infty$.

Доказательство. Ровно такое же, как и на числовой прямой. □

Теорема 7.7. *(Критерий предельной точки)* x_0 *— предельная точка множества* $E \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x_n \neq x_0\ \forall n \in \mathbb{N} \\ \rho(x_n, x_0) \to 0, n \to \infty \end{cases}$$

Доказательство. Точно такое же, как и на числовой прямой.

Я не смог его найти. □

Задача. *Пусть* (X,ρ) *— метрическое пространство. Доказать, что* $\forall E \subset X \hookrightarrow E \cup \partial E = clE$*,* $E \backslash \partial E = intE$.

Задача. *Верны ли следующие включения?*

1. $int(E_1 \cup E_2) \subset (intE_1 \cup intE_2)$;
2. $(intE_1 \cup intE_2) \subset int(E_1 \cup E_2)$;
3. $cl(E_1 \cup E_2) \subset (clE_1 \cup clE_2)$;
4. $(clE_1 \cup clE_2) \subset cl(E_1 \cup E_2)$;
5. $\partial(E_1 \cup E_2) \subset (\partial E_1 \cup \partial E_2)$;
6. $(\partial E_1 \cup \partial E_2) \subset \partial(E_1 \cup E_2)$.

Пример. Может быть так, что $\partial \mathrm{E} = \mathbb{R}$, а $\mathrm{int E} = \varnothing$. К примеру, $\mathrm{E} = \mathbb{Q}$.

Определение 7.27. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $\mathrm{E} \subset X$. Множество E называется *ограниченным*, если $\exists B_R(x_0)$: $\mathrm{E} \subset B_R(x_0)$.

Определение 7.28. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $\mathrm{E} \subset X$. Множество E *вполне ограничено*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \text{конечное число точек } \{x_1, \ldots, x_{N(\varepsilon)}\} : \mathrm{E} \subset \bigcup_{i=1}^{N(\varepsilon)} B_\varepsilon(x_i).$$

Примечание. И эти точки называются ε-сетью для E.

Лемма 7.4. *Если множество E — вполне ограничено, то E ограничено.*

Доказательство. Так как E вполне ограничено, то $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ конечная ε-сеть. Значит и для $\varepsilon = 1$ $\exists$ конечная 1-сеть $\{x_1, \ldots, x_N\}$. Мы можем взять, к примеру, $M = N + \max\limits_{i \in \{1, \ldots, N\}} \rho(x_1, x_i)$, тогда $\mathrm{E} \subset B_M(x_1)$ по неравенству треугольника $\Rightarrow$ E ограничено. □

Лемма 7.5. *Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, а $\{x_n\} \subset X$ сходится к $x^* \in X$. Тогда $\{x_n\}$ фундаментальна.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\} \to x^*$, $n \to \infty$, запишем это:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N(\varepsilon) \hookrightarrow \rho(x_n, x^*) < \varepsilon.$$

Тогда $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \tilde{N}(\varepsilon) = N(\frac{\varepsilon}{2})$: $\forall n, m \geqslant \tilde{N}(\varepsilon) \hookrightarrow \rho(x_n, x_m) \leqslant \rho(x_n, x^*) + \rho(x^*, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. □

Лемма 7.6. *Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $K \subset X$. Если множество K — компакт, то K — вполне ограниченное множество.*

Доказательство. Предположим противное. Будем считать, что $K \neq \varnothing$, так как пустое множество по определению компакт. Запишем отрицание к определению вполне ограниченного множества:

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \text{ конечное набора точек } \{x_1, \ldots, x_{N(\varepsilon)}\} : \mathrm{E} \not\subset \bigcup_{i=1}^{N(\varepsilon)} B_\varepsilon(x_i).$$

Пусть $x_1 \in K$. Возьмём $B_\varepsilon(x_1)$, он не покрывает $K \Rightarrow \exists x_2$: $x_2 \in (K \backslash B_\varepsilon(x_1))$, но $\{x_1, x_2\}$ тоже не ε-сеть $\Rightarrow \exists x_3 \in (K \backslash (B_\varepsilon(x_1) \cup B_\varepsilon(x_2)))$. Так продолжим по индукции. Пусть таким образом мы построили точки $x_1, \ldots, x_n$: $K \backslash \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_\varepsilon(x_i) \neq \varnothing$, тогда возьмём

$x_{n+1} \in \left(K \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_\varepsilon(x_i)\right)$, а $\{x_1, \ldots, x_{n+1}\}$ снова не ε-сеть. То есть мы построили последовательность $\{x_n\} \subset K$: $\rho(x_i, x_j) \geqslant \varepsilon$ $\forall i \neq j \Rightarrow$ любая её подпоследовательность не является фундаментальной, а значит сходящейся, а значит K — не компакт. Противоречие. □

Определение 7.29. Метрическое пространство (X, ρ) называется *полным*, если любая его фундаментальная последовательность сходится к некоторой точке этого пространства, в противном случае пространство называется *неполным.*

Примеры.

$X = \mathbb{R}$, $\rho(x, y) = |x - y|$ — полное (критерий Коши мы доказывали ранее).

$X = \mathbb{Q}$, $\rho(x, y) = |x - y|$ — неполное.

Утверждение 7.7. *В любом метрическом пространстве любая сфера — замкнутое множество.*

Пример. Множество, которое ограничено и замкнуто, но не является компактом:

$X = \{x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)\colon \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0\}$, $\rho(x, y) = \sup\limits_{i\in\mathbb{N}} |x_i - y_i|$.

Рвссмотрим $S_1(0) := \{x \in X\colon \sup\limits_{i\in\mathbb{N}} |x_i| = 1\}$, то есть единичную сферу. Оно является ограниченным и замкнутым множеством, но не вполне ограниченным, а значит, не компактом.

Замечание. Для доказательства того, что множество не является вполне ограниченным рассмотрим $e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$, то есть все 0, кроме 1 на n-ом месте. Тогда $\rho(e_n, e_m) = 1$, то есть мы получили бесконечную систему, между которыми попарные расстояния равны $1 \Rightarrow$ нет вполне ограниченности.

Теорема 7.8. *(Гейне-Борель 2.0) Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $K \subset X$ — компакт. Тогда для любого открытого покрытия $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ компакта существует конечное подпокрытие $\{U_{\alpha_i}\}_{i=1}^N$.*

Доказательство. Так как из компактности следует вполне ограниченность, то $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists$ конечная $\frac{1}{n}$-сеть, которую обозначим как $\{z_n(1), \ldots, z_n(N)\}$.

Предположим, что существует открытое покрытие $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ из которого нельзя извлечь конечное подпокрытие. Тогда существует шар радиуса $\frac{1}{n}$ в центром в какой-то точке $\frac{1}{n}$-сети, то есть $\exists i \in \{1, \ldots, N\}$: $B_{\frac{1}{n}}(z_n(i))$ нельзя покрыть конечным набором множеств из системы $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$, так как в противном случае каждый шар $B_{\frac{1}{n}}(z_n(i))$ покрывался бы конечным числом элементом из покрытия $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$, а так как шаров конечное число и они покрывают K, то получили бы конечное подпокрытие K, а мы предположили, что его нет.

Получается, $\forall n \in \mathbb{Z}$ $\exists z_n \in K$: $B_{\frac{1}{n}}(z_n)$ не может быть покрыт конечным числом элементов из $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$, получаем последовательность $\{z_n\}$, из неё, так как K компакт, можно извлечь сходящуюся подпоследовательность $\{z_{n_m}\} \Rightarrow \exists z^* \in K$: $\rho(z_{n_m}, z^*) \to 0$, $m \to \infty$. Так как $z^* \in K$, а $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — покрытие, то $\exists \alpha^* \in A$: $z^* \in U_{\alpha^*}$, но U_{α^*} открытое множество $\Rightarrow \varepsilon^* > 0$: $B_{\varepsilon^*}(z^*) \subset U_{\alpha^*}$.

Так как $\{z_{n_m}\}$ сходится к z^*, то начиная с некоторого номера $\rho(z_{n_m}, z^*)$ можно сделать меньше, чем $\frac{\varepsilon^*}{4}$. Запишем более формально: $\exists M \in \mathbb{N}$: $\forall m \geqslant M \hookrightarrow \rho(z_{n_m}, z^*) < \frac{\varepsilon^*}{4}$ и $\frac{1}{n_m} < \frac{\varepsilon^*}{4}$ по построению. Рассмотрим $B_{\frac{1}{n_m}}(z_{n_m})$. Заметим, что $B_{\frac{1}{n_m}}(z_{n_m}) \subset B_{\varepsilon^*}(z^*) \subset U_{\alpha^*} \Rightarrow \forall m \geqslant M \hookrightarrow B_{\frac{1}{n_m}}(z_{n_m}) \subset U_{\alpha^*}$ — противоречие с построением.

Замечание. Включение $B_{\frac{1}{n_m}}(z_{n_m}) \subset B_{\varepsilon^*}(z^*)$ верно по неравенству треугольника, то есть возьмём $y \in B_{\frac{1}{n_m}}(z_{n_m})$, тогда $\rho(z^*, y) \leqslant \rho(z^*, z_{n_m}) + \rho(z_{n_m}, y) < \frac{\varepsilon^*}{4} + \frac{1}{n_m} < \frac{\varepsilon^*}{4} + \frac{\varepsilon^*}{4} < \frac{\varepsilon^*}{2}$ □

Теорема 7.9. *Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Если K — компакт, то он ограничен и замкнут.*

Доказательство. Ограниченность уже была доказана ранее. Докажем замкнутость. Будем доказывать от противного.

Предположим противное, то есть $\exists x^* \notin K$ являющаяся его точкой прикосновения. Тогда по критерию точки прикосновения $\exists \{x_n\} \subset K$: $\rho(x^*, x_n) \to 0$, $n \to \infty \Rightarrow \forall \{x_{n_j}\}$ подпоследовательности последовательности $\{x_n\}$ тоже сходится к $x^* \notin K$ — противоречие с компактностью. □

Напоминание. На пространство $\mathbb{R}^n$ можно смотреть по-разному.

$\mathbb{R}^n := \{x = (x_1, \ldots, x_n)\colon x_i \in \mathbb{R}\ \forall i \in \{1, \ldots, n\}\}$.

$$\rho(x, y) := \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}. \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}. \quad <x,\, y>= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Лемма 7.7. *Последовательность $\{x^m\} \subset \mathbb{R}^n$ сходится к $x^* \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \ldots, n\}$ $x_i^m \to x_i^*$, $m \to \infty$.*

Доказательство. Шаг 1. Заметим, что $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ справедливо неравенство

$$|x_i^* - x_i^m| \leqslant \sqrt{|x_i^* - x_i^m|^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i^* - x_i^m|^2} = \rho(x^*, x^m).$$

Шаг 2. Пусть $\forall i \in \{1, \ldots, n\} \hookrightarrow x_i^m \to x_i^*$, $m \to \infty$. Тогда $\sum_{i=1}^{n} |x_i^* - x_i^m|^2 \to 0$, $m \to \infty$.

Извлекая корень, получаем

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i^* - x_i^m|^2} \to 0, m \to \infty.$$

□

Теорема 7.10. *(Теорема Больцано-Вейерштрасса в $\mathbb{R}^n$) Из любой ограниченной последовательности $\{x^m\}_{m=1}^{\infty}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x^{m_j}\}_{j=1}^{\infty}$.*

Доказательство. Доказательство будем проводить по индукции (по размерности пространства).

База: при $n = 1$ мы её уже доказали.

Предположим, что доказано при $n_0 \in \mathbb{N}$, докажем для $n_0 + 1$. Возьмём последовательность $x^m = (x_1^m, \ldots, x_{n_0+1}^m) \subset \mathbb{R}^{n_0+1}$ — она ограничена. Спроектируем теперь точки x^m на $\mathbb{R}^{n_0} \times \{0\}$, получим последовательность $\{\overline{x}^m\} \subset \mathbb{R}^{n_0}$, но эта последовательность тоже ограничена, так как $\|\overline{x}^m\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n_0} (\overline{x}_i^m)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n_0+1} (\overline{x}_i^m)^2} \leqslant C\ \forall m \in \mathbb{N}$.

По предположению индукции Больцано-Вейерштрасс работает для размерности n_0, тогда $\exists \{\overline{x}^{m_k}\}$ сходящаяся к $\overline{x}^* \in \mathbb{R}^{n_0}$.

Последовательность $\left\{x_{n_0+1}^{m_k}\right\}$ ограничена в $\mathbb{R} \Rightarrow$ по теореме Больцано-Вейерштрасса $\exists \left\{x_{n_0+1}^{m_{k_j}}\right\}\colon \left\{x_{n_0+1}^{m_{k_j}}\right\} \to x_{n_0+1}^*$, æ $\to \infty$. Рассмотрим вектор $x^* = (\overline{x}^*, x_{n_0+1}^*)$. В итоге так как $\{\overline{x}^{m_{k_j}}\} \to \overline{x}^*$, $j \to \infty$, получается, что $x^{m_{k_j}} \to x^*$, $j \to \infty$, то есть мы сделали шаг индукции. □

Теорема 7.11. *(Критерий компактности в $\mathbb{R}^n$) Множество $K \subset \mathbb{R}^n$ — компакт $\Leftrightarrow$ оно ограничено и замкнуто.*

Доказательство. <u>Шаг 1.</u> В одну сторону мы уже доказали в случае общих метрических пространств.

<u>Шаг 2.</u> Пусть K — ограничено и замкнуто. Возьмём произвольную последовательность $\{x^m\} \subset K$. Поскольку K ограничено, то по теореме Больцано-Вейерштрасса в $\mathbb{R}^n$ $\exists \{x^{m_j}\} \subset K$: она сходится к некоторой точке $x^* \in \mathbb{R}^n \Rightarrow$ в силу критерия точки прикосновения x^* — точка прикосновения для K, но в силу замкнутости K получаем $x^* \in K$. □

Теорема 7.12. *(Критерий Коши в $\mathbb{R}^n$) Последовательность $\{x^m\} \subset \mathbb{R}^n$ сходится $\Leftrightarrow$ когда выполнено условие Коши, то есть $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)$: $\forall m, l \geqslant N(\varepsilon) \hookrightarrow \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i^m - x_i^l)^2} \leqslant \varepsilon$.*

Доказательство. Точно такое же, как и в одномерном случае с учётом теоремы Больцано-Вейерштрасса. □

8 Кривые

8.1 Вектор-функции

Определение 8.1. Пусть $\mathrm{E} \subset \mathbb{R}$. *Вектор-функцией* будем называть $\overline{a}(t)$: $\mathrm{E} \mapsto \mathbb{R}^n$.

Примечание. Задать вектор-функцию $\overline{a}$: $\mathrm{E} \mapsto \mathbb{R}^n \Leftrightarrow$ задать набор скалярных функций $(\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n)$, где $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ $\overline{a}_i$: $\mathrm{E} \mapsto \mathbb{R}$.

Лемма 8.1. *Пусть $E \subset \mathbb{R}$ непустое множество и t_0 — предельная точка E. Тогда $\overline{A} \in \mathbb{R}^n$, $\lim\limits_{\substack{t \to t_0 \\ t \in E}} \overline{a}(t) = \overline{A} \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \ldots, n\} \hookrightarrow \lim\limits_{\substack{t \to t_0 \\ t \in E}} \overline{a}_i(t) = \overline{A}_i$*

Доказательство. Это следует из того, что предел по Коши и по Гейне равносильны и $x^m \to x^*$, $m \to \infty \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \ldots, n\} x_i^m \to x_i^*$, $m \to \infty$. □

Лемма 8.2. *Пусть $E \subset \mathbb{R}$, t_0 — предельная точка E, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и заданы $\overline{a}^1, \overline{a}^2$: $E \mapsto \mathbb{R}$. Тогда если $\exists \lim\limits_{\substack{t \to t_0 \\ t \in E}} \overline{a}^i(t) = \overline{A}^i$, $i \in \{1, 2\}$, то*

1. $\exists \lim\limits_{\substack{t \to t_0 \\ t \in E}} (\alpha \overline{a}^1(t) \pm \beta \overline{a}^2(t)) = \alpha \overline{A}^1 \pm \beta \overline{A}^2$;
2. $\exists \lim\limits_{\substack{t \to t_0 \\ t \in E}} \left(\overline{a}^1(t), \overline{a}^2(t)\right) = \left(\overline{A}^1, \overline{A}^2\right)$.

Доказательство.

1. следует из соответствующих теорем для скалярных функций и предыдущей леммы;
2. заметим, что $(\overline{a}^1(t), \overline{a}^2(t)) - \left(\overline{A}^1, \overline{A}^2\right) = \left(\overline{a}^1(t), \overline{a}^2(t) - \overline{A}^2\right) + \left(\overline{a}^1(t) - \overline{A}^1, \overline{A}^2\right)$. Тогда $|(\overline{a}^1(t), \overline{a}^2(t))| - \left|\left(\overline{A}^1, \overline{A}^2\right)\right| \leqslant \left|\left(\overline{a}^1(t), \overline{a}^2(t) - \overline{A}^2\right)\right| + \left|\left(\overline{a}^1(t) - \overline{A}^1, \overline{A}^2\right)\right| \leqslant \|\overline{a}^2(t) - \overline{A}^2\| \|\overline{a}^1(t)\| + \|\overline{A}^2\| \|\overline{a}^1(t) - \overline{A}^1\|$.

   Так как $\|\overline{a}^i(t) - \overline{A}^i\| \to 0$, $t \underset{t \in \mathrm{E}}{\to} t_0$, то второе слагаемое стремится к 0;

   В свою же очередь $\|\overline{a}^1(t)\| \|\overline{a}^2(t) - \overline{A}^2\| \to 0$, $t \underset{t \in \mathrm{E}}{\to} t_0$, так как $\|\overline{a}^1(t)\| \to \|\overline{A}^1\|$ (потому что $|\|\overline{a}^1(t) - \|\overline{A}^1\|| \leqslant \|\overline{a}^1(t) - \overline{A}^1\| \to 0$), а $\|\overline{a}^2(t) - \overline{A}^2\| \to 0$.

$\square$

Лемма 8.3. *Пусть* $\overline{a}$: $E \to \mathbb{R}^n$, φ: $E \mapsto \mathbb{R}$, $\exists \lim\limits_{\substack{t\to t_0\\ t\in E}} \varphi(t) = \varphi_0$ *и* $\exists \lim\limits_{\substack{t\to t_0\\ t\in E}} \overline{a}(t) = \overline{A}$. *Тогда* $\exists \lim\limits_{\substack{t\to t_0\\ t\in E}} \varphi(t)\overline{a}(t) = \varphi_0\overline{A}$.

Доказательство. В силу леммы $\exists \lim\limits_{\substack{t\to t_0\\ t\in \text{E}}} \varphi(t)\overline{a}(t) \Leftrightarrow \forall i \in \{1,\ldots,n\}$ $\exists \lim\limits_{\substack{t\to t_0\\ t\in \text{E}}} \varphi(t)\overline{a}_i(t) = \varphi_0\overline{A}_i$. Отсюда всё и следует. $\square$

Напоминание. Векторное произведение в $\mathbb{R}^3$. Пусть $\overline{a}, \overline{b} \in \mathbb{R}^3$. Тогда

$$[\overline{a},\overline{b}] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \overline{i}(a_2b_3 - a_3b_2) - \overline{j}(a_1b_3 - a_3b_1) + \overline{k}(a_1b_2 - a_2b_1).$$

Свойства векторного произведения:

1. $[\overline{a},\overline{b}] = -[\overline{b},\overline{a}]$ $\forall \overline{a},\overline{b} \in \mathbb{R}^3$;
2. $[\alpha\overline{a} + \beta\overline{b},\overline{c}] = \alpha[\overline{a},\overline{c}] + \beta[\overline{b},\overline{c}]$ $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $\forall \overline{a},\overline{b},\overline{c} \in \mathbb{R}^3$;
3. $|[\overline{a},\overline{b}]| \leqslant |\overline{a}|\cdot|\overline{b}|$ $\forall \overline{a},\overline{b} \in \mathbb{R}^3$.

Лемма 8.4. *Пусть* $\overline{a}$, $\overline{b}$: $E \mapsto \mathbb{R}^3$, t_0 *— предельная точка* E. *Тогда если* $\exists \lim\limits_{\substack{t\to t_0\\ t\in E}} \overline{a}(t) = \overline{A}$, $\exists \lim\limits_{\substack{t\to t_0\\ t\in E}} \overline{b}(t) = \overline{B}$, *то* $\exists \lim\limits_{\substack{t\to t_0\\ t\in E}} [\overline{a}(t),\overline{b}(t)] = [\overline{A},\overline{B}]$.

Доказательство. Точно такое же, как со скалярным произведением.

$$\big|[\overline{a}(t),\overline{b}(t)] - [\overline{A},\overline{B}]\big| \leqslant \big|[\overline{a}(t)-\overline{A},\overline{B}]\big| + \big|[\overline{a}(t),\overline{B}-\overline{b}(t)]\big| \leqslant |\overline{a}(t)-\overline{A}||\overline{b}(t)| + |\overline{a}(t)||\overline{B}-\overline{b}(t)| \to 0,\ t \underset{t\in \text{E}}{\to} t_0.$$

$\square$

Определение 8.2. Пусть $\overline{a}$: $U_{\delta_0}(t_0) \mapsto \mathbb{R}^n$. Будем говорить, что существует производная вектор-функции в точке t_0, если $\exists \lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{\overline{a}(t) - \overline{a}(t_0)}{t - t_0} \in \mathbb{R}^n$ и этот предел обозначается $\overline{a}'(t_0)$.

Определение 8.3. Пусть φ: $U_\delta(t_0) \mapsto \mathbb{R}$, $\overline{a}$: $U_\delta(t_0) \mapsto \mathbb{R}^n$. Будем говорить, что $\overline{a} = \overline{o}(\varphi(t))$, $t \to t_0$, если $\exists \overline{\varepsilon}$: $U_\delta(t_0) \mapsto \mathbb{R}^n$: $\lim\limits_{t\to t_0} \overline{\varepsilon}(t) = \overline{0}$ и $\overline{a}(t) = \varphi(t)\overline{a}(t)$ $\forall t \in U_\delta(t_0)$.

Определение 8.4. Будем говорить, что вектор-функция $\overline{a}(t)$: $U_\delta(t_0) \mapsto \mathbb{R}^n$ дифференцируема в точке t_0, если $\exists \overline{A} \in \mathbb{R}^n$: $\overline{a}(t) = \overline{a}(t_0) + \overline{A}(t - t_0) + \overline{o}((t - t_0))$, $t \to t_0$.

Теорема 8.1. *Вектор функция* $\overline{a}$: $U_\delta(t_0) \mapsto \mathbb{R}^n$ *дифференцируема в точке* $t_0 \Leftrightarrow \exists \overline{a}'(t_0) \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \exists \overline{a}_i'(t_0)$ $\forall i \in \{1,\ldots,n\}$.

Доказательство. Очевидно расписывается через лемму про предел компонент. $\square$

Теорема 8.2. *Пусть* $\overline{a}$: $U_\delta(t_0) \mapsto \mathbb{R}^n$, φ: $U_\delta(t_0) \mapsto \mathbb{R}$:

1. *если* $\overline{a}$ *дифференцируема в точке* t_0 *и* φ *дифференцируема в точке* t_0, *то* $\varphi\overline{a}$ *дифференцируема в точке* t_0 *и* $(\varphi\overline{a})'(t_0) = \varphi'(t_0)\overline{a}(t_0) + \varphi(t_0)\overline{a}'(t_0)$;
2.