Математический анализ 1. Лекции 7 – 8. Производная и дифференциал. Свойства дифференцируемых функций

Э.Л. Хабина

ВШЭ, ФЭН, Москва

2025

Производная

Определение

Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки x_0. Тогда ее *производная* в точке x_0 есть число

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

(если этот предел существует).

Интуитивный смысл: производная функции f в точке x_0 – это мгновенная скорость изменения функции f в точке x_0. Впрочем, слово "скорость" здесь надо понимать в самом широком смысле слова.

В экономике производную $f'(x)$ произвольной функции $f(x)$ (которую рассматривают как суммарную величину) обычно называют предельной или маржинальной величиной.

Например, если производственная функция $Q(L)$ выражает объем выпускаемой продукции в зависимости от объема труда L, то ее производная $Q'(L)$ есть скорость изменения объема выпуска или предельная (маржинальная) производительность труда (Marginal product of labor, MP_L).

Если функция $C(Q)$ описывает издержки производства в зависимости от объема продукции Q, ее производная $C'(Q)-$ это предельные издержки, обозначаемые как $MC(Q)$, и т.д.

Производная

Определения

1. Если функция f определена в некоторой окрестности точки x_0 и имеет в точке x_0 производную, то говорят, что она *дифференцируема* в точке x_0. В противном случае говорят, что f не дифференцируема в точке x_0.

2. *Производной* (функцией) функции f называют функцию f', которая определена во всех точках $x \in \mathbb{R}$, в которых функция f дифференцируема, и в каждой такой точке x равна $f'(x)$.

Пример 1. Найдите по определению производную функции $f(x) = x^2$ в точке 1 или докажите, что она не дифференцируема в этой точке.

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2h + h^2}{h} = 2.$$

Пример 1. Найдите по определению производную функции $f(x) = x^2$ в точке 1 или докажите, что она не дифференцируема в этой точке.

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2h + h^2}{h} = 2.$$

Пример 2. Найдите по определению производную функции $f(x) = |x|$ в точке 0 или докажите, что она не дифференцируема в этой точке.

$f'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{|0+h| - |0|}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{|h|}{h}$ не существует.(**Упражнение.** Почему?)

Пример 1. Найдите по определению производную функции $f(x) = x^2$ в точке 1 или докажите, что она не дифференцируема в этой точке.

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h+h^2}{h} = 2.$$

Пример 2. Найдите по определению производную функции $f(x) = |x|$ в точке 0 или докажите, что она не дифференцируема в этой точке.

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$$ не существует.(**Упражнение.** Почему?)

Пример 3. Найдите по определению производную функции $f(x) = x^2$.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xh+h^2}{h} = 2x.$$

Значит, $f'(x) = 2x$ (определена в каждой точке $x \in \mathbb{R}$).

Пример 1. Найдите по определению производную функции $f(x) = x^2$ в точке 1 или докажите, что она не дифференцируема в этой точке.

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h + h^2}{h} = 2.$$

Пример 2. Найдите по определению производную функции $f(x) = |x|$ в точке 0 или докажите, что она не дифференцируема в этой точке.

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$$ не существует.(**Упражнение.** Почему?)

Пример 3. Найдите по определению производную функции $f(x) = x^2$.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = 2x.$$

Значит, $f'(x) = 2x$ (определена в каждой точке $x \in \mathbb{R}$).

Теорема

Если функция f имеет производную в точке x_0, то при $h \to 0$

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h).$$

Наоборот, если при $h \to 0$

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Ah + o(h),$$

то существует $f'(x_0) = A$.

Доказательство. Пусть существует $f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$. Тогда при $h \to 0$

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) + o(1).$$

Следовательно,

$$f(x_0+h) - f(x_0) = (f'(x_0) + o(1))h = f'(x_0)h + o(h),$$

и, значит,

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h)$$

(при $h \to 0$).

Пусть теперь $f(x_0+h) = f(x_0) + Ah + o(h)$ при $h \to 0$. Тогда

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = A + o(1)$$

и, значит,

$$A = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0).$$

Интуитивный смысл: производная функции f в точке x_0 – это коэффициент при переменной h (наилучшего) линейного приближения функции $f(x_0+h)$.

Дифференциал

Этот подход приводит к определению понятия **дифференциал**.

Определение

Дифференциал функции f в точке x – это такая линейная функция $D(h) = Ah$, что

$$f(x+h) = f(x) + D(h) + o(h).$$

По доказанной теореме, дифференциал функции f в точке x существует тогда и только тогда, когда в точке x существует производная $f'(x)$, при этом если дифференциал $D(h)$ функции f в точке x существует, то он единственный, и $D(h) = f'(x)h$.

Замечания

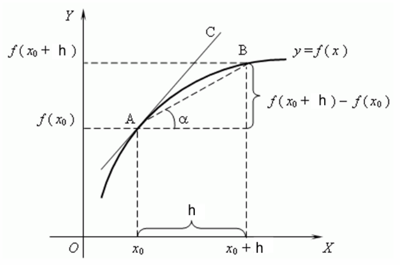
- Понятие производной в строгом смысле не обобщается на высшие размерности, а понятие дифференциала обобщается.
- Дифференциал функции f часто обозначают символом df, а его аргумент символом dx. Таким образом, $df = f'(x)dx$. Отсюда другое обозначение производной:

$$f' = \frac{df}{dx}.$$

Геометрический смысл производной

Производная функции f в точке x_0 – это предельное значение тангенса угла наклона секущей к графику функции $y = f(x)$, проходящей через точки $(x_0, f(x_0))$ и $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ при $h \to 0$:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$



Иначе говоря, производная функции f в точке x_0 – это тангенс угла наклона касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0.

Уравнение касательной к (графику) функции f в точке x_0:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \text{ или } y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Производные основных элементарных функций

1. $C' = 0$.

Производные основных элементарных функций

1. $C' = 0.$

   Доказательство.

   $$\lim_{h\to 0} \frac{C - C}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

Производные основных элементарных функций

1. $C' = 0$.

   Доказательство.

   $$\lim_{h \to 0} \frac{C - C}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0.$$

2. $(x^a)' = ax^{a-1}$.

Производные основных элементарных функций

1. $C' = 0.$

   Доказательство.

   $$\lim_{h\to 0} \frac{C - C}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

2. $(x^a)' = ax^{a-1}.$

   Доказательство.

   $$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^a - x^a}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^a\left(\left(1+\frac{h}{x}\right)^a - 1\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^a \cdot \frac{ah}{x}}{h} = ax^{a-1}.$$

Производные основных элементарных функций

1. $C' = 0.$

   Доказательство.

   $$\lim_{h\to 0} \frac{C - C}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

2. $(x^a)' = ax^{a-1}.$

   Доказательство.

   $$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^a - x^a}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^a\left(\left(1+\frac{h}{x}\right)^a - 1\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^a \cdot \frac{ah}{x}}{h} = ax^{a-1}.$$

3. $(a^x)' = a^x \ln(a).$

Производные основных элементарных функций

1. $C' = 0.$

   Доказательство.

   $$\lim_{h \to 0} \frac{C - C}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0.$$

2. $(x^a)' = ax^{a-1}.$

   Доказательство.

   $$\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^a - x^a}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^a \left(\left(1 + \frac{h}{x}\right)^a - 1\right)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^a \cdot \frac{ah}{x}}{h} = ax^{a-1}.$$

3. $(a^x)' = a^x \ln(a).$

   Доказательство.

   $$\lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^x \left(a^h - 1\right)}{h} = a^x \ln(a).$$

4. $(\sin x)' = \cos x$.

Доказательство.

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cdot\cos h + \cos x\cdot\sin h - \sin x}{h} =$$
$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cdot(\cos h - 1)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{\cos x\cdot\sin h}{h} = \cos x.$$

4. $(\sin x)' = \cos x.$

Доказательство.

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cdot \cos h + \cos x \cdot \sin h - \sin x}{h} =$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cdot (\cos h - 1)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{\cos x \cdot \sin h}{h} = \cos x.$$

5. $(\cos x)' = -\sin x,$

Доказательство.

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos x \cdot \cos h - \sin x \cdot \sin h - \cos x}{h} =$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos x \cdot (\cos h - 1)}{h} - \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cdot \sin h}{h} = -\sin x.$$

4. $(\sin x)' = \cos x.$

Доказательство.

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cdot \cos h + \cos x \cdot \sin h - \sin x}{h} =$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cdot (\cos h - 1)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{\cos x \cdot \sin h}{h} = \cos x.$$

5. $(\cos x)' = -\sin x,$

Доказательство.

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos x \cdot \cos h - \sin x \cdot \sin h - \cos x}{h} =$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos x \cdot (\cos h - 1)}{h} - \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cdot \sin h}{h} = -\sin x.$$

6. $(\log_a(x))' = \dfrac{1}{x\ln(a)},\ x > 0.$

Докажем это позже.

4. $(\sin x)' = \cos x.$

Доказательство.

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cdot \cos h + \cos x \cdot \sin h - \sin x}{h} =$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cdot (\cos h - 1)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{\cos x \cdot \sin h}{h} = \cos x.$$

5. $(\cos x)' = -\sin x,$

Доказательство.

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos x \cdot \cos h - \sin x \cdot \sin h - \cos x}{h} =$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos x \cdot (\cos h - 1)}{h} - \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cdot \sin h}{h} = -\sin x.$$

6. $(\log_a(x))' = \dfrac{1}{x\ln(a)},\ x > 0.$

Докажем это позже.

Полезные частные случаи:

$$(x^2)' = 2x, \quad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, \quad (e^x)' = e^x, \quad (\ln(x))' = \frac{1}{x}.$$

Правила вычисления производных

Все нижеследующие равенства имеют следующий смысл: если определена правая часть, то определена и левая, и они равны.

1. $(f+g)' = f' + g'$ (производная суммы).

Правила вычисления производных

Все нижеследующие равенства имеют следующий смысл: если определена правая часть, то определена и левая, и они равны.

1. $(f+g)' = f' + g'$ (производная суммы).

   Доказательство.

   $$(f(x)+g(x))' = \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h)+g(x+h)) - (f(x)+g(x))}{h} =$$
   $$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(x) + g'(x).$$

Правила вычисления производных

Все нижеследующие равенства имеют следующий смысл: если определена правая часть, то определена и левая, и они равны.

1. $(f+g)' = f' + g'$ (производная суммы).

   Доказательство.

   $$(f(x)+g(x))' = \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h)+g(x+h)) - (f(x)+g(x))}{h} =$$
   $$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(x) + g'(x).$$

2. $(fg)' = f'g + fg'$ (производная произведения).

Правила вычисления производных

Все нижеследующие равенства имеют следующий смысл: если определена правая часть, то определена и левая, и они равны.

1. $(f+g)' = f' + g'$ (производная суммы).

   Доказательство.

   $$(f(x)+g(x))' = \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h)+g(x+h)) - (f(x)+g(x))}{h} =$$
   $$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(x) + g'(x).$$

2. $(fg)' = f'g + fg'$ (производная произведения).

   Доказательство.

   $$(f(x)g(x))' = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$$
   $$\lim_{h\to 0} \frac{(f(x)+f'(x)h+o(h))(g(x)+g'(x)h+o(h)) - f(x)g(x)}{h} =$$
   $$\lim_{h\to 0} \frac{(f(x)g'(x)+f'(x)g(x))h + o(h)}{h} = f(x)g'(x) + f'(x)g(x).$$

3. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ (производная частного).

3. $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$ (производная частного).

Доказательство.

$f' = \left(g \cdot \dfrac{f}{g}\right)' = g \cdot \left(\dfrac{f}{g}\right)' + g' \cdot \dfrac{f}{g}$. Следовательно, $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$.

3. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ (производная частного).

   Доказательство.

   $f' = \left(g \cdot \frac{f}{g}\right)' = g \cdot \left(\frac{f}{g}\right)' + g' \cdot \frac{f}{g}$. Следовательно, $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

4. $(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$ (производная композиции).

3. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ (производная частного).

Доказательство.

$f' = \left(g \cdot \frac{f}{g}\right)' = g \cdot \left(\frac{f}{g}\right)' + g' \cdot \frac{f}{g}$. Следовательно, $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

4. $(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$ (производная композиции).

Доказательство.

При $h \to 0$ имеем: $f(g(x+h)) = f(g(x) + g'(x)h + o(h)) =$

$f(g(x)) + f'(g(x))(g'(x)h + o(h)) + o(g'(x)h + o(h)) =$

$f(g(x)) + f'(g(x))g'(x)h + o(h)$. Значит, $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

3. $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$ (производная частного).

Доказательство.

$f' = \left(g \cdot \dfrac{f}{g}\right)' = g \cdot \left(\dfrac{f}{g}\right)' + g' \cdot \dfrac{f}{g}$. Следовательно, $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$.

4. $(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$ (производная композиции).

Доказательство.

При $h \to 0$ имеем: $f(g(x+h)) = f(g(x) + g'(x)h + o(h)) =$

$f(g(x)) + f'(g(x))(g'(x)h + o(h)) + o(g'(x)h + o(h)) =$

$f(g(x)) + f'(g(x))g'(x)h + o(h)$. Значит, $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Упражнение. Укажите явно, какие свойства классов малости использованы в этом выводе, и где именно.

Следствие

Производная любой элементарной функции есть элементарная функция.

Примеры

- $(\sin(\cos x))' = \sin'(\cos x) \cdot \cos' x = -\cos(\cos x) \cdot \sin x.$

- Правило вычисления производной композиции функций легко применять многократно, например:

$$(\sin(\sin(\ln x)))' = \sin'(\sin(\ln x)) \cdot (\sin(\ln x))' =$$

$$\sin'(\sin(\ln x)) \cdot \sin'(\ln x) \cdot \ln' x = \cos(\sin(\ln x)) \cdot \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x}.$$

- Пусть $f(x) = e^{\sqrt{x^2+1}}$. Найдите $f'(x)$.

$$\left(e^{\sqrt{x^2+1}}\right)' = e^{\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(\sqrt{x^2+1}\right)' = e^{\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x.$$

5. Если $f \circ g = x$, то $g' = \dfrac{1}{f' \circ g}$ (производная обратной функции).

Доказательство.

$$f \circ g = x \Rightarrow (f' \circ g) \cdot g' = 1 \Rightarrow g' = \frac{1}{f' \circ g}.$$

5. Если $f \circ g = x$, то $g' = \dfrac{1}{f' \circ g}$ (производная обратной функции).

Доказательство.

$$f \circ g = x \Rightarrow (f' \circ g) \cdot g' = 1 \Rightarrow g' = \frac{1}{f' \circ g}.$$

Примеры

- $(e^x)' = e^x$. Следовательно, $(\ln x)' = \dfrac{1}{e^{\ln x}} = \dfrac{1}{x}$, $x > 0$.
- $(\sin x)' = \cos x$. Следовательно,
$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$
- $(\cos x)' = -\sin x$. Следовательно,
$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sin(\arccos x)} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Правила вычисления дифференциалов

Все нижеследующие равенства имеют следующий смысл: если определена правая часть, то определена и левая, и они равны.

1. $d(f+g) = df + dg$;
2. $d(f-g) = df - dg$;
3. $d(fg) = gdf + fdg$;
4. $d\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{gdf - fdg}{g^2}$

   (здесь аргумент x опущен в левой и правой частях формул);
5. (**инвариантность формы 1-го дифференциала**) формула $df(x) = f'(x)dx$ верна как в случае, когда $x-$ независимая переменная, так и в случае, когда $x = \varphi(t)-$ дифференцируемая функция t, т.е. когда $dx = \varphi'(t)dt$ и

$$d\left(f\left(\varphi(t)\right)\right) = f'\left(\varphi(t)\right) \cdot d\varphi(t) = f'\left(\varphi(t)\right) \cdot \varphi'(t)dt.$$

Применение дифференциалов в экономике

Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0. Тогда можно заметить, что $\Delta f(x_0) \approx df(x_0)$.

Напомним, что $\Delta f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0)$ или в других обозначениях $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Тот факт, что $\Delta f(x_0) \approx df(x_0)$, часто используется в экономических задачах для приближенной оценки изменения значения функции при изменении ее аргумента.

Пример. Пусть $R(Q)-$ функция выручки, про которую известно, что она дифференцируема при всех $Q \geqslant 0$. Также известно, что при продаже 100 единиц продукции выручка составляет 2000 у.е., а предельная (маржинальная) выручка составляет при этом 1,5, т.е.

$$R(100) = 2000, MR(Q) = 1,5.$$

Оцените размер выручки при продаже 102 единиц той же продукции.

Решение. Заметим, что сама функции выручки нам неизвестна, поэтому просто вычислить ее значение при $Q = 102$ не получится.
Используем свойство дифференциала для функции $R(Q)$:

$$\Delta R(100) \approx dR(100).$$

$$\Delta R(100) = R(102) - R(100) = R(102) - 2000,$$

$$dR(100) = R'(100) \cdot dQ = MR(100) \cdot \Delta Q = 1,5 \cdot (102 - 100) = 3.$$

Следовательно, $R(102) - 2000 \approx 3$.

Таким образом, имеем, что $R(102) \approx 2003$ у.е., т.е. выручка при продаже 102 единиц продукции составит примерно 2003 у.е.

Замечание. Оставим здесь без обсуждения вопрос о том, насколько точной будет эта приближенная оценка.

Производные неявных и параметрических функций

Пусть F есть некоторая функция из множества $X \subseteq \mathbb{R}^2$ в множество $\mathbb{R}$. Функция $y(x)$ **задана неявно**, если она удовлетворяет условию

$$F(x, y) = 0,$$

а также, быть может, каким-то дополнительным условиям.

Вопрос о существовании и области определения неявно заданной функции остается пока за скобками. Если функция F "достаточно хорошая" в окрестности точки $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, неявно заданная функция существует в некоторой окрестности точки x_0. Поэтому, если функцию $y(x)$ задают неявно, обычно дополнительно указывают условие вида $y(x_0) = y_0$. Правила вычисления производных позволяют иногда вычислять производные функций, заданных неявно.

Пример. Пусть функция $y(x)$ задана уравнением

$$x^2 - 3xy + y^2 = -1$$

и условием $y(1) = 1$. Тогда имеем:

$$(x^2 - 3xy + y^2)' = 0 \Rightarrow 2x - 3y - 3xy' + 2yy' = 0 \Rightarrow$$

$$y' = \frac{3y - 2x}{2y - 3x} \Rightarrow y'(1) = \frac{3 - 2}{2 - 3} = -1.$$

Функция $y(x)$ **задана параметрически**, если ее аргумент и значение связаны следующими соотношениями:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad \text{где } t \in X.$$

Вопрос о существовании и области определения тоже оставляем пока за скобками.

Производную $y'(x)$ параметрически заданной функции $y(x)$ можно задать параметрически следующим образом:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \end{cases} \quad \text{где } t \in X.$$

Символически $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt} \Big/ \dfrac{dx}{dt}$.

Пример. Пусть $y(x)$ задана так: $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} \quad \text{где } t \in [0, \pi].$

Тогда $y'(x)$ задается параметрически так: $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = -\operatorname{ctg} t, \end{cases} \quad \text{где } t \in (0, \pi).$

Например, при $t = \dfrac{\pi}{6}$ имеем $f'\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{3}$.

Уравнение касательной

Напоминание. Если функция $y(x)$ задана аналитически, то уравнение касательной к ее графику в точке $P(x_0, y_0)$, где $y_0 = y(x_0)$, есть

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0).$$

Уравнение касательной к функции (кривой), заданной параметрически или неявно, находится по этой же формуле.

Пример

Найдите уравнение касательной к кривой $2x^2 - xy + y^2 = 4$ в точке $P(1, 2)$.

1. Находим производную y' как функцию от x и y:

$$(2x^2 - xy + y^2)' = 4' \Rightarrow 4x - (y + xy') + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = \frac{y - 4x}{2y - x}.$$

2. Подставляем точку:
$y'(1,2) = \dfrac{2 - 4 \cdot 1}{2 \cdot 2 - 1} = -\dfrac{2}{3}$.

3. Выписываем уравнение касательной и приводим его к привычному виду:
$y - 2 = -\dfrac{2}{3} \cdot (x - 1)$; $y = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{8}{3}$.

Логарифмическая производная

Определение. $L(f) = \dfrac{f'}{f}$.

Пример. $L(x^a) = \dfrac{ax^{a-1}}{x^a} = \dfrac{a}{x}$.

Замечание. Если $f > 0$, то
$L(f) = (\ln(f))'$.

Свойства

1. $L(fg) = L(f) + L(g)$.
2. $L\left(\dfrac{f}{g}\right) = L(f) - L(g)$.
3. $L(f^a) = aL(f)$.

Логарифмическая производная и эластичность

Логарифмическая производная

Определение. $L(f) = \dfrac{f'}{f}$.

Пример. $L(x^a) = \dfrac{ax^{a-1}}{x^a} = \dfrac{a}{x}$.

Замечание. Если $f > 0$, то $L(f) = (\ln(f))'$.

Свойства

1. $L(fg) = L(f) + L(g)$.
2. $L\left(\dfrac{f}{g}\right) = L(f) - L(g)$.
3. $L(f^a) = aL(f)$.

Эластичность

Определение. $E(f) = x\dfrac{f'}{f}$.

Пример. $E(x^a) = x\dfrac{ax^{a-1}}{x^a} = a$.

Экономический смысл

$$E_f(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{(f(x) - f(x_0))/f(x_0)}{(x - x_0)/x_0}.$$

Свойства

1. $E(fg) = E(f) + E(g)$.
2. $E\left(\dfrac{f}{g}\right) = E(f) - E(g)$.
3. $E(f^a) = aE(f)$.

Применение. Вычисление производных функций вида $\dfrac{f_1 f_2 \ldots f_n}{g_1 g_2 \ldots g_m}$.

Пример. Найдите производную функции $f(x) = \dfrac{x \sin x}{e^x \ln x}$. Многократно применять формулу производной суммы и частного долго и чревато ошибками! Поступаем иным образом.

1. Вычисляем логарифмическую производную функции f. Для этого вычисляем отдельно логарифмические производные функций, из которых она составлена:

   1.1 $L(x) = \dfrac{x'}{x} = \dfrac{1}{x}$;

   1.2 $L(\sin x) = \dfrac{\sin' x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x$;

   1.3 $L(e^x) = \dfrac{(e^x)'}{e^x} = 1$;

   1.4 $L(\ln x) = \dfrac{\ln' x}{\ln x} = \dfrac{1}{x \ln x}$.

   Теперь можно вычислить
   $$L(f) = L(x) + L(\sin x) - L(e^x) - L(\ln x) = \frac{1}{x} + \operatorname{ctg} x - 1 - \frac{1}{x \ln x}.$$

2. Используя определение логарифмической производной, получаем:
   $$f'(x) = \left(\frac{1}{x} + \operatorname{ctg} x - 1 - \frac{1}{x \ln x}\right) \frac{x \sin x}{e^x \ln x}.$$

Пример. Вычислим эластичность функции $f(x) = 3x^7 \cdot e^{2x}$.

Способ I:

$$E(f) = x \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} = x \cdot \frac{(21x^6 \cdot e^{2x} + 6x^7 \cdot e^{2x})}{3x^7 \cdot e^{2x}} = \frac{x \cdot 3x^6 \cdot e^{2x}(7+2x)}{3x^7 \cdot e^{2x}} = 7+2x.$$

Способ II:

$$E(f) = E(3x^7 \cdot e^{2x}) = E(3x^7) + E(e^{2x}) = x \cdot \frac{21x^6}{3x^7} + x \cdot \frac{2e^{2x}}{e^{2x}} = 7 + 2x.$$

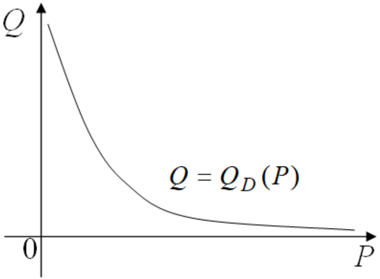
Применение эластичности в экономике

Определение. Зависимость спроса (количества покупаемого товара) от его цены называется функцией спроса $Q_D(P)$.

$$E_P(Q) = \frac{P}{Q(P)} \cdot Q'(P)$$

Функция спроса – убывающая функция, ее производная отрицательна (об этом будем говорить далее). Поэтому эластичность спроса тоже отрицательна.

Эластичность спроса по цене приближенно показывает относительное изменение (в $\%$) величины спроса на какое-либо благо при изменении цены этого блага на 1% и характеризует чувствительность потребителей к изменению цен на продукцию.



Пример. Пусть $E_P(Q) = -3$, тогда если цена увеличится на 2 $\%$, то спрос уменьшится примерно на 6%.

Свойства дифференцируемых функций

Теорема

Если функция f дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в точке x_0. Обратное, вообще говоря, неверно.

Теорема

Если функция f дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в точке x_0. Обратное, вообще говоря, неверно.

Доказательство. Пусть функция f дифференцируема в точке x_0. Тогда при $h \to 0$

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(1) \cdot h.$$

Поскольку $f'(x_0)h = o(1)$, при $h \to 0$ имеем

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + o(1),$$

что доказывает, что функция f непрерывна в точке x_0.

Чтобы доказать, что обратное в общем случае неверно, рассмотрим функцию $f(x) = |x|$. Поскольку

$$\lim_{h\to 0+0} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1 \text{ и } \lim_{h\to 0-0} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h} = -1,$$

предел $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{|h|}{h}$ не существует, что доказывает, что функция f не дифференцируема в точке 0.

С другой стороны,

$$\lim_{h\to 0+0} |h| = \lim_{h\to 0} h = 0 \text{ и } \lim_{h\to 0-0} |h| = \lim_{h\to 0} (-h) = 0,$$

поэтому предел $\lim\limits_{h\to 0} |h|$ существует и равен нулю, что совпадает со значением функции f в нуле. Значит, функция $f(x) = |x|$ в нуле непрерывна.

Возрастание, убывание, экстремумы: определения

Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки x_0. Тогда функция f

- (строго) возрастает в точке x_0, если найдется такая окрестность $\mathcal{O}$ точки x_0, что функция f определена при каждом $x \in \mathcal{O}$ и для всех $x \in \mathcal{O}$
$$x < x_0 \Rightarrow f(x) < f(x_0) \text{ и } x > x_0 \Rightarrow f(x) > f(x_0).$$
- не убывает (нестрого возрастает) в точке x_0, если найдется такая окрестность $\mathcal{O}$ точки x_0, что функция f определена при каждом $x \in \mathcal{O}$ и для всех $x \in \mathcal{O}$
$$x < x_0 \Rightarrow f(x) \leqslant f(x_0) \text{ и } x > x_0 \Rightarrow f(x) \geqslant f(x_0).$$
- (строго) убывает в точке x_0, если найдется такая окрестность $\mathcal{O}$ точки x_0, что функция f определена при каждом $x \in \mathcal{O}$ и для всех $x \in \mathcal{O}$
$$x < x_0 \Rightarrow f(x) > f(x_0) \text{ и } x > x_0 \Rightarrow f(x) < f(x_0).$$
- не возрастает (нестрого убывает) в точке x_0, если найдется такая окрестность $\mathcal{O}$ точки x_0, что функция f определена при каждом $x \in \mathcal{O}$ и для всех $x \in \mathcal{O}$
$$x < x_0 \Rightarrow f(x) \geqslant f(x_0) \text{ и } x > x_0 \Rightarrow f(x) \leqslant f(x_0).$$

Замечание. Параллельно данным определениям, существуют определения *глобального* строгого/нестрогого возрастания/убывания функции f. Пусть функция f определена на множестве $X \subseteq \mathbb{R}$. Тогда она, например, (строго) возрастает на множестве X тогда и только тогда, когда для всех $x_0, x_1 \in X$

$$x_0 < x_1 \Rightarrow f(x_0) < f(x_1).$$

Заметим, что если функция f определена на интервале (a, b), то она строго возрастает на интервале (a, b) тогда и только тогда, когда она строго возрастает в каждой точке интервала (a, b).

Пусть функция f опредлена в некоторой окрестности точки x_0. Тогда точка x_0 есть

- точка строго локального максимума функции f, если найдется такая окрестность $\mathcal{O}$ точки x_0, что функция f определена при каждом $x \in \mathcal{O}$ и
$$f(x_0) > f(x)$$
для всех $x \in \mathcal{O} \setminus \{x_0\}$.
- точка нестрого локального максимума функции f, если найдется такая окрестность $\mathcal{O}$ точки x_0, что функция f определена при каждом $x \in \mathcal{O}$ и
$$f(x_0) \geqslant f(x)$$
для всех $x \in \mathcal{O}$.
- точка строго локального минимума функции f, если найдется такая окрестность $\mathcal{O}$ точки x_0, что функция f определена при каждом $x \in \mathcal{O}$ и
$$f(x_0) < f(x)$$
для всех $x \in \mathcal{O} \setminus \{x_0\}$.
- точка нестрого локального минимума функции f, если найдется такая окрестность $\mathcal{O}$ точки x_0, что функция f определена при каждом $x \in \mathcal{O}$ и
$$f(x_0) \leqslant f(x)$$
для всех $x \in \mathcal{O}$.

- точка строго/нестрого экстремума функции f, если x_0 есть точка строго/нестрого максимума или минимума функции f.

Значение функции f в точке ее локального максимума (минимума) называется локальным максимумом (минимумом).

Теорема

Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки x_0 и дифференцируема в точке x_0.

1. *Если $f'(x_0) > 0$, то функция f строго возрастает в точке x_0. Если функция f возрастает в точке x_0, то $f'(x_0) \geqslant 0$.*
2. *Если $f'(x_0) < 0$, то функция f строго убывает в точке x_0. Если функция f убывает в точке x_0, то $f'(x_0) \leqslant 0$.*
3. *(Теорема Ферма) Если функция f имеет в точке x_0 локальный экстремум, то $f'(x_0) = 0$.*

Схема исследования функции f на локальные экстремумы

1. Находим все точки b, в которых функция f определена, но не дифференцируема или $f'(b) = 0$ (такие точки называются **критическими**).

2. Для каждой критической точки b проверяем условие смены знака:
   - если $f'(x) < 0$ для всех $x \in (b - \varepsilon, b)$ и $f'(x) > 0$ для всех $x \in (b, b + \varepsilon)$, где ε есть некоторое положительное действительное число, то b есть точка строго локального минимума;
   - если $f'(x) > 0$ для всех $x \in (b - \varepsilon, b)$ и $f'(x) < 0$ для всех $x \in (b, b + \varepsilon)$, где ε есть некоторое положительное действительное число, то b есть точка строго локального максимума;
   - если $f'(x) > 0$ для всех $x \in O_\varepsilon^\circ(b)$ или $f'(x) < 0$ для всех $x \in O_\varepsilon^\circ(b)$, то b не есть точка экстремума;
   - если ни одно из этих трех условий не выполняется, требуется дополнительное исследование.

Пример

Исследуйте на локальные экстремумы функцию

$$f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x + 1.$$

Решение.

Заметим, что $D(f) = \mathbb{R}$.

1. Находим критические точки.
   1.1 Находим производную: $f'(x) = 4x^3 - 12x + 8$.
   1.2 $f'(x)$ определена на $\mathbb{R}$, поэтому критические точки – это все решения уравнения $4x^3 - 12x + 8 = 0$. Один из корней легко угадывается: $x_1 = 1$, далее делим многочлен $4x^3 - 12x + 8$ на $x - 1$ и находим остальные корни: $x_2 = 1$, $x_3 = -2$.

   Итак, критические точки: 1 и -2.
2. Проверяем для критических точек условие смены знака. Для удобства представим $f'(x)$ в виде произведения:

$$4x^3 - 12x + 8 = 4(x-1)^2(x+2).$$

   2.1 В точке -2 знак меняется с $-$ на $+$, это точка минимума.
   2.2 В точке 1 знак не меняется, это не точка экстремума.

Схема нахождения глобальных экстремумов непрерывной функции f на отрезке $[a, b]$ и области значений непрерывной функции f на отрезке $[a, b]$

1. Находим все критические точки $c \in (a, b)$ функции f. Пусть C есть множество всех таких точек.
2. Для нахождения глобального максимума M функции f на отрезке $[a, b]$ используем, что

$$M = \max\{f(x) : x \in [a, b]\} = \max\{f(x) : x \in C \cup \{a, b\}\}.$$

   Для нахождения точек глобального максимума функции f на отрезке $[a, b]$ выбираем все точки $\xi \in C \cup \{a, b\}$, для которых $f(\xi) = M$.
3. Для нахождения глобального минимума m функции f на отрезке $[a, b]$ используем, что

$$m = \min\{f(x) : x \in [a, b]\} = \min\{f(x) : x \in C \cup \{a, b\}\}.$$

   Для нахождения точек глобального минимума функции f на отрезке $[a, b]$ выбираем все точки $\xi \in C \cup \{a, b\}$, для которых $f(\xi) = m$.
4. Область значений функции f на отрезке $[a, b]$ есть отрезок $[m, M]$.

Пример

Найдите $\max\limits_{[-1,2]} f(x)$ и $\min\limits_{[-1,2]} f(x)$, где $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x + 1$.

Решение.

1. Находим критические точки из интервала $(-1, 2)$.
   1.1 Находим производную: $f'(x) = 4x^3 - 12x + 8$.
   1.2 Критические точки уже найдены: это точки -2 и 1.
   1.3 Отбираем те критические точки, которые принадлежат интервалу $(-1, 2)$. Это только точка 1.
2. Вычисляем $f(-1) = -12$, $f(1) = 4$, $f(2) = 9$. Отбираем максимальное и минимальное значения:
$$\max_{[-1,2]} f(x) = 9, \quad \min_{[-1,2]} f(x) = -12.$$
   Они достигаются в точках 2 и -1 соответственно.

Замечание. Конечно, при нахождении точек глобального максимума (минимума) можно было бы отбросить критические точки, которые не являются точками локального максимума (соответственно, минимума). Например, в нашем примере точку 1 можно было бы не рассматривать. Однако, как правило, исследование критических точек на экстремум есть более трудоемкий процесс, чем вычисление значения функции в этих точках.

Теоремы о конечных приращениях

1. (**Теорема Лагранжа**) Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b). Тогда существует такая точка $\xi \in (a, b)$, что
$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$
2. (**Теорема Коши**) Пусть функции f и g непрерывны на отрезке $[a, b]$ и дифференцируемы на интервале (a, b), причем $g'(x) \neq 0$ для всех $x \in (a, b)$. Тогда существует такая точка $\xi \in (a, b)$, что
$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$
3. Некоторые следствия.
   3.1 Если функция f дифференцируема на интервале (a, b) и $f'(x) = 0$ для всех $x \in (a, b)$, то на интервале (a, b) функция f – константа.
   3.2 Пусть функции f и g непрерывны на отрезке $[a, b]$ и дифференцируемы на интервале (a, b), причем $f(a) \geqslant g(a)$ и $f'(x) > g'(x)$ для всех $x \in (a, b)$. Тогда $f(x) > g(x)$ для всех $x \in (a, b)$.

Замечание

Как известно, если функция f непрерывна в точке x, то при $h \to 0$

$$f(x+h) = f(x) + o(1).$$

Неформально (и в не вполне понятном смысле) к этой формуле можно относиться как к приближенному равенству:

$$f(x+h) \approx f(x).$$

Если функция f к тому же непрерывна на отрезке с концами x и $x+h$ и дифференцируема на открытом интервале Δ с концами x и $x+h$, то теорема Лагранжа позволяет придать этой приближенной формуле точный смысл. Пусть, для определенности, $h > 0$. Тогда

$$f(x) + h \cdot \min_{c \in \Delta} f'(c) \leqslant f(x+h) \leqslant f(x) + h \cdot \max_{c \in \Delta} f'(c).$$

Это неравенство хорошо согласуется с физическим смыслом производной как скорости движения. Например, при $h > 0$ имеем:

$$\sin(x) - h \leqslant \sin(x+h) \leqslant \sin(x) + h.$$

Эта тема будет развита чуть дальше.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!