Математический анализ 1. Лекции 3 – 4. Предел последовательности (продолжение). Числовые функции. Предел функции

Э.Л. Хабина

ВШЭ, ФЭН, Москва

2025

Напоминание: предел последовательности

Окрестность точки $x \in \mathbb{R}$ – любой открытый интервал (a, b), содержащий точку x. Эпсилон-окрестность точки x: $O_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$.

Определение

$$\lim_{n \to \infty} a_n = c \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)\,(\exists N \in \mathbb{N})\,(\forall n \geqslant N)\,|a_n - c| < \varepsilon,$$

равносильно

$$\lim_{n \to \infty} a_n = c \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)\,(\exists N \in \mathbb{N})\,\{a_n : n \geqslant N\} \subseteq O_\varepsilon(c)$$

(в каждой окрестности числа c целиком лежит некоторый «хвост» последовательности a, где под «хвостом» последовательности a понимается множество всех ее членов, начиная с некоторого N).

Напоминание: основные свойства пределов

1. **Единственность предела.** Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ существует, то он единственный.
2. **Независимость предела от конечного числа членов последовательности.** Существование и значение $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ не зависит от любого конечного числа членов последовательности a. Это можно выразить следующим образом. Пусть $a_n = b_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$, начиная с некоторого номера N. Тогда пределы $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ существуют и не существуют одновременно и, если эти пределы существуют, то они равны.
3. **Ограниченность сходящейся последовательности.** Если последовательность сходится (т.е. имеет предел), то она ограничена.
4. **Равенство пределов последовательности и ее подпоследовательности.** Если последовательность b есть подпоследовательность последовательности a и, при этом, существует $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, то существует и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$, причем $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.
5. **Существование пределов монотонных ограниченных последовательностей.** Если последовательность a монотонно возрастает и ограничена сверху (или монотонно убывает и ограничена снизу), то существует $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Второй замечательный предел

Теорема

Существует $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ *(второй замечательный предел).*

Доказательство. Достаточно показать, что последовательность $P_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ монотонно возрастает и ограничена сверху. Для доказательства этой теоремы нам понадобится формула *бинома Ньютона*:

$$(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x^1+C_n^2x^2+\ldots+C_n^nx^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^kx^k,$$

где $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ $(0\leqslant k\leqslant n)$.

Замечание

$n!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$, $0!=1$.

Более наглядно формулу бинома Ньютона можно записать так:

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x^1 + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots 1}{n!}x^n.$$

Тогда $\left(\text{при } x = \dfrac{1}{n}\right)$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) +$$
$$+ \frac{1}{4!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right) + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

При переходе от n к $n+1$ каждое слагаемое (начиная с третьего) увеличивается и, к тому же, добавляется еще одно (положительное!) слагаемое, следовательно,

$$P_n < P_{n+1},$$

последовательность строго возрастает.

Первая часть теоремы доказана.

Для доказательства ограниченности сверху последовательности P_n, заменим в предыдущем выражении каждый член вида $\left(1 - \frac{k}{n}\right)$ единицей, а каждый член вида $\frac{1}{l!}$ выражением $\frac{1}{2^{l-1}}$. Поскольку

$$\left(1 - \frac{k}{n}\right) < 1$$

и

$$\frac{1}{l!} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot l} \leqslant \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2} = \frac{1}{2^{l-1}},$$

мы только увеличим число P_n. Значит,

$$P_n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} < 3.$$

(Здесь использована формула суммы геометрической прогрессии).

Теорема окончательно доказана.

Число e и его экономический смысл

Определение. $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n.$

$$e = 2,718281828459045235360287471352662497757 2\dots$$

Экономический смысл числа e. Допустим, что некоторый банк выплачивает вкладчикам 100% годовых. Если вкладчик положит на счет 1 у.е., то через год сумма на счете составит 2 у.е.
Однако, если банк будет выплачивать проценты по вкладу дважды за год, а вкладчик будет капитализировать полученные за полгода средства, то через год сумма на счете составит:

$$1\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)=\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 \text{ у.е.}$$

Если же банк будет выплачивать (начислять) проценты по вкладу n раз за год, то через год на счете вкладчика окажется сумма $P_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n.$

С ростом n эта величина будет стремиться к числу e.

Экономический смысл числа e: предельное значение средств на счете вкладчика в банке, выплачивающем 100% годовых с неограниченной возможностью капитализации.

Замечание

Для практического вычисления пределов обычно используют следующие более сильные формы теоремы о втором замечательном пределе:

- $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{n}\right)^n = e^a$.
- Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{a_n}\right)^{a_n} = e^a$.
- Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{a_n}\right)^{b_n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}}$.
- Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(1+a_n)^{b_n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}(b_n a_n)}$.

Пример

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{2n-1}\right)^{3n+1} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2(3n+1)}{2n-1}} = e^3.$$

Дальнейшие свойства пределов

6. Если $a_n = c$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ существует и равен c.

   Напоминания. Последовательность a называется **бесконечно малой**, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что $|a_n| < \varepsilon$ для всех $n \geqslant N$.
   Последовательность a называется **бесконечно большой**, если для любого числа C существует такой номер N, что $|a_n| > C$ для всех $n \geqslant N$.
   Последовательность a называется **ограниченной** (сверху и снизу), если множество $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ ограничено (сверху и снизу), т.е. существует такое число C, что $|a_n| \leqslant C$ для всех n.

7. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$ тогда и только тогда, когда $a_n = c + b_n$, где b есть бесконечно малая последовательность. В частности, последовательность a бесконечно малая тогда и только тогда, когда ее предел равен нулю.

8. Пусть a – ограниченная последовательность, а b – бесконечно малая последовательность. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n$ существует и равен нулю.

   Пусть a – ограниченная последовательность, а b – бесконечно большая последовательность. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ существует и равен нулю.

Пример

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \cos n = \lim_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n} = 0.$$

9. **Лемма “о двух полицейских”.** Пусть даны последовательности a, b, c, причем для всех $n \in \mathbb{N}$ выполнено

$$a_n \leqslant b_n \leqslant c_n.$$

Пусть еще существуют пределы $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$ и, кроме того,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n.$$

Тогда существует $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$, причем $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$.

Пример применения леммы о двух полицейских

Докажем, что
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1.$$

Для этого достаточно доказать, что последовательность
$$a_n = \sqrt[n]{2} - 1$$

бесконечно малая.
Из неравенства Бернулли имеем:
$$2 = (1 + a_n)^n \geqslant 1 + na_n > na_n,$$

значит,
$$a_n < \frac{2}{n}.$$

С другой стороны, $a_n \geqslant 0$ поскольку $2 \geqslant 1$. Таким образом, $0 \leqslant a_n \leqslant \dfrac{2}{n}$, и, значит, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ по лемме о двух полицейских.
Аналогично, можно доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, (a > 0)$.

Утверждение (показательная функция “забивает” степенную, а степенная – логарифм)

1. Пусть $a > 1$, а $k \in \mathbb{R}$, тогда
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0.$$
2. Пусть $a > 0$, $a \neq 1$, $k > 0$, тогда
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n^k} = 0.$$

Пределы и алгебраические операции

Нижеприведенные равенства имеют следующий смысл: **если определена правая часть равенства, то определена и левая, и тогда эти части равны.**

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n.$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n.$
3. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n.$
4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$
5. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^{b_n} = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)^{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$

Практическое вычисление пределов

Используя найденные ранее пределы и свойства коммутирования предела и алгебраических операций, можно легко подсчитывать некоторые сложные (с виду!) пределы.

Пример. Вычислите предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 + 3n\sin 3n + \ln n}{(2n^2-1)(n+1)}.$$

Хотелось бы "протащить" сквозь алгебраические операции, но это не приведет к успеху: полученные пределы не существуют. Надо преобразовать выражение.

Интуитивно определяем порядок роста/убывания числителя и знаменателя. В данном случае это n^3. Делим числитель и знаменатель на n^3, "распределяя" n^3 между сомножителями в знаменателе:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 + 3n\sin 3n + \ln n}{(2n^2-1)(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{3\sin 3n}{n^2} + \frac{\ln n}{n^3}}{\left(2 - \frac{1}{n^2}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)}.$$

Теперь "протаскиваем" предел сквозь алгебраические операции. Равенство, однако, будет верным, только если все полученные пределы существуют, и знаменатель не окажется равным нулю.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{3\sin 3n}{n^2}+\frac{\ln n}{n^3}}{\left(2-\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)} \stackrel{?}{=} \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3\sin 3n}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^3}}{\left(\lim\limits_{n\to\infty} 2-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\right)\left(\lim\limits_{n\to\infty} 1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)}.$$

Убеждаемся, что все полученные пределы существуют, и знаменатель не окажется равным нулю. Подставляем значения (теперь равенство настоящее!):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{3\sin 3n}{n^2}+\frac{\ln n}{n^3}}{\left(2-\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{1+0+0}{(2-0)(1+0)} = \frac{1}{2}.$$

Для того, чтобы провести рассуждение совсем строго, надо идти от конца к началу, начиная с существования и значений входящих в эту формулу простых пределов.

На практике детали можно опускать.

Замечания

- Иногда при вычислении пределов приходится изобретать преобразования совсем другого типа.

  Пример. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} =$
  $= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0.$

- Для корректного и несложного вычисления пределов последовательностей полезны сведения о пределах функций действительного аргумента и о непрерывных функциях.

  Пример.

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n) = \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1} \stackrel{?}{=}$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1}{\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}} + \lim\limits_{n\to\infty} 1} = \frac{1}{2}.$$

Какой фрагмент вычислений на предыдущем слайде не был обоснован?

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}=1.$$

Для того, чтобы эту цепочку равенств использовать без дополнительных (и не самых простых!) обоснований, нужно знать, что функция $y=\sqrt{x}$ *непрерывна*. Об этом будем говорить в разделе «пределы функций».

- Не существует алгоритма вычисления пределов по заданной последовательности. Более того, не существует алгоритма распознавания сходимости/расходимости последовательности. Про некоторые (на первый взгляд!) простые последовательности неизвестно, сходятся они или нет. Например, неизвестно, существует ли предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3\sin^2(n)}.$$

Пределы и неравенства

Частные случаи несуществования предела.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, если для
$$(\forall C \in \mathbb{R})\,(\exists N \in \mathbb{N})\,(\forall n \geqslant N)\, a_n > C.$$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, если для
$$(\forall C \in \mathbb{R})\,(\exists N \in \mathbb{N})\,(\forall n \geqslant N)\, a_n < C.$$

Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$, то последовательность a бесконечно большая. Обратное, вообще говоря, неверно. Например, для последовательности $a_n = (-1)^n \cdot n$.

Теорема

Если $a_n \leqslant b_n$ для всех n (начиная с некоторого N), то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Теорема

Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n < \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, то $a_n < b_n$ для всех n, начиная с некоторого N .

Предел функции

Напоминание. Окрестность точки $x \in \mathbb{R}$ – любой открытый интервал, содержащий точку x. Эпсилон-окрестность точки $O_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$.

Проколотая окрестность точки x – это любое множество

$$U = O \setminus \{x\},$$

где O есть окрестность точки x. Проколотая ε-окрестность:

$$O^\circ_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x) \cup (x, x + \varepsilon).$$

Окрестности плюс и минус бесконечности – это интервалы $(\varepsilon, +\infty)$ и $(-\infty, \varepsilon)$ соответственно (где $\varepsilon \in \mathbb{R}$). Окрестности плюс и минус бесконечности можно считать проколотыми.

Определение (предел функции по Коши)

Пусть b есть действительное число или один из символов $\pm\infty$, c есть действительное число, а f есть числовая функция, которая определена в некоторой проколотой окрестности точки b. Тогда $\lim\limits_{x \to b} f(x) = c$, если для каждой окрестности $O_\varepsilon(c)$ найдется такая проколотая окрестность $O^\circ_\delta(b)$, что $f(x) \in O_\varepsilon(c)$ для всех $x \in O^\circ_\delta(b)$.

Эквивалентные формулировки.

- $\lim_{x \to b} f(x) = c$ тогда и только тогда, когда
$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall x \in \mathbb{R})\, 0 < |x - b| < \delta \Rightarrow |f(x) - c| < \varepsilon.$$
- $\lim_{x \to b} f(x) = c$ тогда и только тогда, когда для любой окрестности U точки c существует проколотая окрестность O° точки b, для которой
$$\{f(x) : x \in O^{\circ}\} \subseteq U.$$

Замечание

Если допустить, что c также может принимать значение $+\infty$ и $-\infty$, мы определим смысл выражений $\lim\limits_{x\to b} f(x) = +\infty$ и $\lim\limits_{x\to b} f(x) = -\infty$. Однако эти два случая есть частные случаи несуществования предела.

Определение (предел функции по Гейне)

Пусть b есть действительное число или один из символов $\pm\infty$, c есть действительное число, а f есть числовая функция, которая определена в некоторой проколотой окрестности b. Тогда $\lim\limits_{x\to b} f(x) = c$, если для каждой последовательности a

$$\lim_{n\to\infty} a_n = b \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n) = c.$$

Предел по Коши и предел по Гейне – эквивалентные понятия (при некоторых предположениях о структуре числовых множеств).

Простейшие свойства пределов функций

- **Единственность предела.** Если $\lim\limits_{x\to b} f(x)$ существует, то он единственный.
- **Локальность предела.** Существование и значение $\lim\limits_{x\to b} f(x)$ зависят только от поведения функции в любой сколь угодно малой проколотой окрестности точки b.

Это можно выразить следующим образом. Пусть $f(x) = g(x)$ для всех x из некоторой проколотой окрестности точки b. Тогда пределы

$$\lim_{x\to b} f(x) \text{ и } \lim_{x\to b} g(x)$$

существуют и не существуют одновременно и, если эти пределы существуют, то они равны.

В частности, существование и значение $\lim\limits_{x\to b} f(x)$ не зависит от определенности и значения функции f в точке b.

Пример. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$. Под знаком предела некоторые некорректные сокращения становятся корректны!

- Пусть функция f определена в некоторой проколотой окрестности точки b. Она называется *ограниченной* в окрестности точки b, если существует такое (положительное) число $C \in \mathbb{R}$, что $|f(x)| \leqslant C$ для всех x из некоторой проколотой окрестности точки b.

  Если существует (конечный) $\lim\limits_{x\to b} f(x)$, то функция f ограничена в окрестности точки b.

- **Лемма «о двух полицейских».** Пусть даны функции f, g, h, причем для всех x из некоторой проколотой окрестности точки b выполнено

  $$f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x).$$

  Пусть еще существуют пределы $\lim\limits_{x\to b} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to b} h(x)$ и, кроме того,

  $$\lim_{x\to b} f(x) = \lim_{x\to b} h(x).$$

  Тогда существует $\lim\limits_{x\to b} g(x)$, причем

  $$\lim_{x\to b} f(x) = \lim_{x\to b} h(x) = \lim_{x\to b} g(x).$$

Пределы и неравенства

1. Если $f(x) \leqslant g(x)$ для всех x из некоторой проколотой окрестности точки b, то $\lim\limits_{x \to b} f(x) \leqslant \lim\limits_{x \to b} g(x)$, если эти пределы существуют.
2. Если функции f и g определены в некоторой проколотой окрестности точки b и имеют в этой точке пределы, причем $\lim\limits_{x \to b} f(x) < \lim\limits_{x \to b} g(x)$, то $f(x) < g(x)$ для всех x из некоторой проколотой окрестности точки b.
3. Если существует $\lim\limits_{x \to b} f(x) = c \neq 0$, то существует такая проколотая окрестность O точки b, что $f(x)$ имеет тот же знак, что и c для всех $x \in O$.

Вычисление пределов

- Если $f(x) = c$ для всех x из некоторой (проколотой) окрестности точки b, то предел $\lim\limits_{x \to b} f(x)$ существует и равен c.
- Функция f называется *бесконечно большой* в окрестности точки b, если для любого (положительного) числа $C \in \mathbb{R}$ выполнено $|f(x)| \geqslant C$ для всех x из некоторой проколотой окрестности точки b. Функция f называется *бесконечно малой* в окрестности точки b, если для любого положительного числа $\varepsilon \in \mathbb{R}$ выполнено $|f(x)| < \varepsilon$ для всех x из некоторой проколотой окрестности точки b.

  Пусть f – ограниченная, а g – бесконечно большая функция в окрестности точки b. Тогда $\lim\limits_{x \to b} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ существует и равен нулю.

  Пусть f – ограниченная, а g – бесконечно малая функция в окрестности точки b. Тогда $\lim\limits_{x \to b} f(x)g(x)$ существует и равен нулю.

  Примеры. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\ln|x|} = 0$; $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x}{\ln|x|} = 0$.

- **Замена переменных под знаком предела.**
  Пусть
  1) существует $\lim\limits_{x\to b} f(x) = c$;
  2) существует $\lim\limits_{y\to c} g(y) = d$;
  3) $f(x) \neq c$ в некоторой (проколотой) окрестности точки b.

  Тогда существует $\lim\limits_{x\to b} g(f(x))$, причем $\lim\limits_{x\to b} g(f(x)) = \lim\limits_{y\to c} g(y) = d$.

  Пример. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{1+\frac{1}{x}} = \lim\limits_{y\to 1} \dfrac{1}{y} = 1$. Здесь $y = 1 + \dfrac{1}{x}, y \to 1$.

  Пример. Пусть

$$g(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y \neq 0 \\ 1, & \text{если } y = 0 \end{cases}$$

  и

$$f(x) \equiv 0 \Rightarrow g(f(x)) \equiv 1.$$

  Тогда $\lim\limits_{x\to 0} g(f(x)) = 1$, но $\lim\limits_{y\to 0} g(y) = 0$. Правило замены переменных не работает (нарушено условие 3).

Пределы и алгебраические операции. Нижеприведенные равенства имеют следующий смысл: если определена правая часть равенства, то определена и левая, и тогда эти части равны.

1. $\lim\limits_{x\to b}(f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to b} f(x) + \lim\limits_{x\to b} g(x).$
2. $\lim\limits_{x\to b}(f(x)-g(x)) = \lim\limits_{x\to b} f(x) - \lim\limits_{x\to b} g(x).$
3. $\lim\limits_{x\to b}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to b} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to b} g(x).$
4. $\lim\limits_{x\to b} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to b} f(x)}{\lim\limits_{x\to b} g(x)}.$
5. $\lim\limits_{x\to b}(f(x))^{g(x)} = \left(\lim\limits_{x\to b} f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to b} g(x)}.$

«Базовые» пределы

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^a}{b^x} = 0$, где $b > 1$.
2. $\lim\limits_{x\to 0} x^a \log_b |x| = 0$, где $a, b > 0$, $b \neq 1$.
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ (первый замечательный предел).
4. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{a}{x}\right)^x = \lim\limits_{y\to 0} (1 + ay)^{\frac{1}{y}} = e^a$;

   если $\lim\limits_{x\to b} g(x) = \infty$, то $\lim\limits_{x\to b} \left(1 + \dfrac{1}{g(x)}\right)^{f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)}}$;

   если $\lim\limits_{x\to b} g(x) = 0$, то $\lim\limits_{x\to b} (1 + g(x))^{f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to b} f(x)g(x)}$.
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$.
6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln(a)$, где $a > 0$.
7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log_b(1+x)}{x} = \dfrac{1}{\ln b}$, где $b > 0$, $b \neq 1$.
8. Функция называется непрерывной в точке b, если она определена в точке b, имеет предел в точке b и $\lim\limits_{x\to b} f(x) = f(b)$. Если f – **элементарная** функция и f определена в некоторой окрестности точки b, то она непрерывна в точке b.

Примеры

- $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{3x^2+x-4}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(3x+4)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+3}{3x+4}=\dfrac{4}{7}.$
- $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+6}}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{(x-3)(\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+6})}=\dfrac{1}{6}.$
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos 4x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x\sin 3x}{x^2}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot 3\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}=$ $6\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin y}{y}=6.$
- $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}(1+(\cos x-1))^{\frac{1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}}=$ $e^{-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}}=e^{-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}}=e^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{e}}.$

Связь пределов числовых функций и пределов последовательностей

Если существует $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=c$ и $a_n=f(n)$, то предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ существует и равен c. Обратное, вообще говоря, неверно. **Например,**

$$\lim_{n\to\infty}\sin(2\pi n)=\ldots 0,\ \text{но}\ \lim_{x\to\infty}\sin(2\pi x)\ldots\ \text{не существует.}$$

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!