Математический анализ 1. Лекции 5 – 6.
Предел функции (продолжение). Символы Ландау.
Непрерывные функции и их свойства

Э.Л. Хабина

ВШЭ, ФЭН, Москва

2025

Напоминание: элементарная техника вычисления пределов

- $$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{3x^2+x-4}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(3x+4)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+3}{3x+4}=\frac{4}{7}.$$
- $$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+6}}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+6})}=\frac{1}{6}.$$
- $$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos 4x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\sin 3x}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot 3\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=$$
  $$6\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=6.$$
- $$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}(1+(\cos x-1))^{\frac{1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}}=$$
  $$e^{-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}}=e^{-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}}=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Элементарная техника полагается на удачное преобразование подпредельного выражения. Успех на этом пути зависит от случайной догадки и везения. Мы будем прокладывать путь к более систематическому вычислению пределов.

Эквивалентность функций

Определение

Пусть $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ и функции f и g определены в некоторой проколотой окрестности точки c. Тогда $f \sim g$ при $x \to c$, если существует такая числовая функция φ, что:

1) φ определена в некоторой (проколотой) окрестности точки c;
2) $f(x) = g(x)\varphi(x)$ для всех x из некоторой (проколотой) окрестности точки c;
3) $\lim\limits_{x \to c} \varphi(x) = 1$.

Основные эквивалентности при $x \to 0$ (их надо запомнить!)

1. $\sin(x) \sim x$,
2. $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$,
3. $a^x - 1 \sim x \ln a$,
4. $\log_a(1 + x) \sim \dfrac{x}{\ln a}$,
5. $(1 + x)^a - 1 \sim ax$,
6. $\arcsin x \sim x$,
7. $\operatorname{arctg} x \sim x$.

Основные свойства эквивалентности

Ниже предполагается, что все функции $f, g, \ldots$ определены в некоторой проколотой окрестности точки c.

1. Если $g(x) \neq 0$ для всех x из некоторой проколотой окрестности точки c, то при $x \to c$
$$f \sim g \Leftrightarrow \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$
2. Если $f \sim g$ при $x \to c$ и, при этом, хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x \to c} f(x)$, $\lim\limits_{x \to c} g(x)$ существует, то существует и второй, и эти пределы равны. В частности, если $f \sim g$ при $x \to c$ и функции непрерывны в точке c, то $f(c) = g(c)$.
3. Если существуют, равны и отличны от нуля пределы $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to c} g(x)$, то $f \sim g$ при $x \to c$. В частности, если существует $\lim\limits_{x \to c} f(x) = a \neq 0$, то $f \sim a$ при $x \to c$.
4. Для любых функций f, g, h при $x \to c$:
   - 4.1 $f \sim f$ (рефлексивность);
   - 4.2 $f \sim g \Rightarrow g \sim f$ (симметричность);
   - 4.3 $(f \sim g \wedge g \sim h) \Rightarrow f \sim h$ (транзитивность).

5. **Замена переменных.** Пусть $f \sim g$ при $x \to c$, а функция h определена в некоторой окрестности точки $d \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, существует $\lim\limits_{x \to d} h(x) = c$ и $h(x) \neq c$ в некоторой проколотой окрестности точки d. Тогда

$$f(h(x)) \sim g(h(x))$$

при $x \to d$.

Пример 1. $\sin(x) \sim x$ при $x \to 0$. Значит,

$$\sin\left(\frac{x^2 + 3x - 4}{x + \ln(x^2)}\right) \sim \frac{x^2 + 3x - 4}{x + \ln(x^2)}$$

при $x \to 1$.

Пример 2. При $x \to 0$ имеем:

$$\sin(1 - \cos x) \sim 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}.$$

Далее, по транзитивности,

$$\sin(1 - \cos x) \sim \frac{x^2}{2}.$$

6. Если $f_1 \sim g_1$ и $f_2 \sim g_2$ при $x \to c$, то $f_1 f_2 \sim g_1 g_2$ при $x \to c$.
7. Если $f_1 \sim g_1$ и $f_2 \sim g_2$ при $x \to c$ и, при этом, $f_2(x) \neq 0$ и $g_2(x) \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности точки c, то $\dfrac{f_1}{f_2} \sim \dfrac{g_1}{g_2}$ при $x \to c$.

Пример 1. При $x \to 0$ имеем:

$$\frac{\sin 2x \cdot (1 - \cos 3x)}{\ln(1 - 5x)} \sim \frac{2x \cdot \frac{1}{2}(3x)^2}{-5x} \sim -\frac{9}{5}x^2.$$

Пример 2. При $x \to 2$ имеем:

$$\ln\left(\frac{2x+3}{x+5}\right) = \ln\left(1 + \frac{x-2}{x+5}\right) \sim \frac{x-2}{x+5} \sim \frac{x-2}{7}.$$

Замена на эквивалентные в пределах

Пусть при $x \to c$

$$f_1 \sim f_1^*, f_2 \sim f_2^*, \dots, f_n \sim f_n^*,$$
$$g_1 \sim g_1^*, g_2 \sim g_2^*, \dots, g_m \sim g_m^*,$$

$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\forall j \in \{1, 2, \dots, m\}$ $g_i \neq 0, g_j^* \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности точки c.

Тогда

$$\lim_{x \to c} \frac{f_1 f_2 \dots f_n}{g_1 g_2 \dots g_m} = \lim_{x \to c} \frac{f_1^* f_2^* \dots f_n^*}{g_1^* g_2^* \dots g_m^*}.$$

Пример 1.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x \cdot \sin 3x \cdot \sin 5x}{\sin 2x \cdot \sin 4x \cdot \sin 6x} = \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot 3x \cdot 5x}{2x \cdot 4x \cdot 6x} = \frac{5}{16}.$$

Пример 2.

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos 3x) \ln^2(1 - \sin x)}{(2^x - 1)(\sqrt{1 + x^3} - 1)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{(3x)^2}{2} \cdot x^2}{(x \ln 2) \cdot \frac{x^3}{2}} = \frac{9}{\ln 2}.$$

Важные "тонкости"

Пусть функции f, g эквивалентны при $x \to c$, а функция h определена (и, если угодно, непрерывна) при всех $x \in \mathbb{R}$. Верно ли, что

$$h(f(x)) \sim h(g(x))$$

при $x \to c$?   Нет.

Пример. Поскольку $\lim\limits_{x \to 0}(1+x) = \lim\limits_{x \to 0}(1+x^2) = 1 \neq 0$, имеем

$$1 + x \sim 1 + x^2 \text{ при } x \to 0.$$

Пусть $h(x) = x - 1$. Тогда

$$h(1+x) = x \not\sim x^2 = h(1+x^2) \text{ при } x \to 0.$$

Впрочем, для некоторых функций h этот принцип работает.

- Пусть функции $f \sim g$ при $x \to c$, и выражения f^α и g^α определены в некоторой проколотой окрестности точки c. Тогда $f^\alpha \sim g^\alpha$ при $x \to c$.

Верно ли, что если $f_1 \sim g_1$ и $f_2 \sim g_2$ при $x \to c$, то $f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$ при $x \to c$? Нет.

Пример. При $x \to 0$:

- $x \sim x$,
- $-x + x^2 \sim -x$,
- $x^2 = x + (-x + x^2) \nsim x + (-x) = 0$.

Замечание. Ошибочная замена на эквивалентные в суммах и разностях может привести к неверному вычислению предела. Например, следуюшие вычисления ошибочны:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x - x}{x^3} = 0.$$

Ошибка! На самом деле $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3} = \dfrac{1}{6}$ (этот предел научимся находить позднее).

Распространить на суммы и разности технику замены эквивалентных помогают *порядки малости*.

Порядки малости

Определение

Пусть $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ и функции f и g определены в некоторой проколотой окрестности точки c. Тогда $f = o(g)$ при $x \to c$, если существует такая числовая функция φ, что:

1) φ определена в некоторой (проколотой) окрестности точки c;
2) $f(x) = g(x)\varphi(x)$ для всех x из некоторой (проколотой) окрестности точки c;
3) $\lim\limits_{x \to c} \varphi(x) = 0$.

Заметим, что если $a < b$, то:

- $x^a = o(x^b)$ при $x \to \infty$,
- $x^b = o(x^a)$ при $x \to 0$.

Например,

- $x^{2025} = o(x^{2026})$ при $x \to \infty$,
- $x^{2026} = o(x^{2025})$ при $x \to 0$.

Замечание

Запись $f = o(1)$ при $x \to c$ означает, что функция f бесконечно малая при $x \to c$.

Замечание

Запись $f = o(g)$, вообще говоря, не вполне корректна. Правильнее было бы писать $f \in o(g)$. Тем не менее, соотношение $f = o(g)$ используют как равенство, заменяя в формулах f на $o(g)$. Это удобно, но требует осторожности.

Используя такую подстановку, необходимо помнить, что разные вхождения одного и того же символа $o(g)$ обозначают, вообще говоря, разные функции. Поэтому, в частности, неверно, что $o(g) - o(g) = 0$.

Основные свойства отношения o

1. Если $g(x) \neq 0$ для всех x из некоторой проколотой окрестности точки c, то при $x \to c$
$$f = o(g) \Leftrightarrow \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$
2. При $x \to c$ для любых $C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:
   2.1 $o(Cg) = o(g)$,

   2.2 $o(g) \pm o(g) = o(g)$,

   2.3 $o(o(g)) = o(g)$,

   2.4 $o(g + o(g)) = o(g)$,

   2.5 $fo(g) = o(fg)$,

   2.6 $o(f)o(g) = o(fg)$,

   2.7 если $f \sim g$ при $x \to c$, то $o(f) = o(g)$.

   Внимание: это, вообще говоря, «направленные» равенства.

Теорема

Пусть функции f и g определены в некоторой проколотой окрестности точки c. Тогда при $x \to c$

$$f \sim g \Leftrightarrow f = g + o(g).$$

Доказательство (для случая $g \neq 0$ в некоторой окрестности точки c).

$$f \sim g \Leftrightarrow \lim_{x \to c} \frac{f}{g} = 1 \Leftrightarrow \frac{f}{g} = 1 + o(1) \Leftrightarrow f = g + g \cdot o(1) \Leftrightarrow f = g + o(g).$$

Следствия. При $x \to 0$:

1. $\sin x = x + o(x)$,
2. $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$,
3. $a^x = 1 + x \ln a + o(x)$,
4. $\log_a(1 + x) = \dfrac{x}{\ln a} + o(x)$,
5. $(1 + x)^a = 1 + ax + o(x)$,
6. $\arcsin x = x + o(x)$,
7. $\operatorname{arctg} x = x + o(x)$.

Применение к вычислению пределов

- Найдите предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x - \sin x}{\sin 3x - \sin x}$.
  - Поскольку при $x \to 0$ выполнено
  $$\sin ax \sim ax$$
  (замена переменных в основной эквивалентности), имеем:
  $$\sin ax = ax + o(ax) = ax + o(x) \text{ при } x \to 0.$$
  - Поэтому $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x - \sin x}{\sin 3x - \sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x + o(x) - (x + o(x))}{3x + o(x) - (x + o(x))} =$
  $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x + o(x)}{2x + o(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x + o(x)}{2x + o(2x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{2x} = \dfrac{1}{2}$.
- Замечание. Эта стратегия не всегда приводит к успеху.

  Пример.
  $$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{o(x)}{x^2} =?$$

- Найдите предел $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x-2}-\sqrt{x+2}}{x-2}$.
  - Делаем замену переменной $y=x-2$, чтобы получить предел при $y\to 0$:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{3x-2}-\sqrt{x+2}}{x-2}=\lim_{y\to 0}\frac{\sqrt{4+3y}-\sqrt{4+y}}{y}.$$

  - Преобразуем подпредельное выражение так, чтобы иметь под корнями выражения вида $1+ay$:

$$\lim_{y\to 0}\frac{\sqrt{4+3y}-\sqrt{4+y}}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{2\left(\sqrt{1+\frac{3y}{4}}-\sqrt{1+\frac{y}{4}}\right)}{y}.$$

  - Используем равенство $\sqrt{1+ay}=1+\dfrac{ay}{2}+o(y)$ при $y\to 0$.

$$\lim_{y\to 0}\frac{2\left(\sqrt{1+\frac{3y}{4}}-\sqrt{1+\frac{y}{4}}\right)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{2\left(1+\frac{3y}{8}+o(y)-\left(1+\frac{y}{8}+o(y)\right)\right)}{y}=\frac{1}{2}.$$

- Найдите предел $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt[3]{3x-2}-\sqrt[3]{x+2}}{x-2}$.
  - Делаем замену переменной $y = x - 2$, чтобы получить предел при $y \to 0$:

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt[3]{3x-2}-\sqrt[3]{x+2}}{x-2} = \lim_{y\to 0} \frac{\sqrt[3]{4+3y}-\sqrt[3]{4+y}}{y}.$$

  - Преобразуем подпредельное выражение так, чтобы иметь под корнями выражения вида $1 + ay$:

$$\lim_{y\to 0} \frac{\sqrt[3]{4+3y}-\sqrt[3]{4+y}}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{\sqrt[3]{4}\left(\sqrt[3]{1+\frac{3y}{4}}-\sqrt[3]{1+\frac{y}{4}}\right)}{y}.$$

  - Используем равенство $\sqrt[3]{1+ay} = 1 + \dfrac{ay}{3} + o(y)$ при $y \to 0$.

$$\lim_{y\to 0} \frac{\sqrt[3]{4}\left(\sqrt[3]{1+\frac{3y}{4}}-\sqrt[3]{1+\frac{y}{4}}\right)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{\sqrt[3]{4}\left(1+\frac{3y}{12}+o(y)-\left(1+\frac{y}{12}+o(y)\right)\right)}{y} = \frac{\sqrt[3]{4}}{6}.$$

- “Большие уничтожают маленьких”. Найдите предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x + x^2 \ln x + \sin(x^2)}{x + 1 - \cos x}.$$

Заметим, что

- $\lim\limits_{x\to 0} x \ln x = 0$, поэтому $x^2 \ln x = x \cdot x \ln x = o(x) = o(3x)$ при $x \to 0$,
- $\sin(x^2) \sim x^2$ при $x \to 0$, поэтому
  $\sin(x^2) = x^2 + o(x^2) = o(x) = o(3x)$ при $x \to 0$,
- $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$ при $x \to 0$, поэтому
  $1 - \cos x = \dfrac{x^2}{2} + o(x^2) = o(x)$ при $x \to 0$.

Следовательно, при $x \to 0$

$$3x + x^2 \ln x + \sin(x^2) \sim 3x \text{ и } x + 1 - \cos x \sim x.$$

Значит,

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x + x^2 \ln x + \sin(x^2)}{x + 1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{3x}{x} = 3.$$

Внимание. Не перепутайте эквивалентности при $x \to 0$ и при $x \to \infty$! По тем же соображениям “отсечения бесконечно малых высшего порядка” имеет место равенство:

$$\lim_{x\to \infty} \frac{3x + x^2 \ln x + \sin(x^2)}{x + 1 - \cos x} = \lim_{x\to \infty} \frac{x^2 \ln x}{x} = \infty.$$

- Найдите предел **последовательности** $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\left(2\pi\sqrt{n^2+1}\right)$.
  - Преобразуем: $\sin\left(2\pi\sqrt{n^2+1}\right) = \sin\left(2\pi n\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}\right)$.
  - При $x \to 0$ верно $\sqrt{1+x}-1 \sim \dfrac{x}{2}$. Делаем замену: $x = \frac{1}{t}$.

$$\text{При } t\to\infty \qquad \sqrt{1+\frac{1}{t^2}}-1 \sim \frac{1}{2t^2}.$$

  - Следовательно, при $t \to \infty$

$$\sqrt{1+\frac{1}{t^2}} = 1 + \frac{1}{2t^2} + o\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

  - Значит, при $n \to \infty$ (n натуральное!)

$$\sin\left(2\pi n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right) = \sin\left(2\pi n\left(1+\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) =$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{n}+o\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) \sim \frac{\pi}{n}+o\left(\frac{\pi}{n}\right) \sim \frac{\pi}{n}.$$

  - Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\left(2\pi\sqrt{n^2+1}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\dfrac{\pi}{n} = \pi$.

- Докажите, что предел **функции** $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\left(2\pi\sqrt{x^2+1}\right)$ не существует.
  - Допустим, что предел существует и равен c. Тогда используя определение предела по Гейне, имеем: для любой последовательности a
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \sin\left(2\pi\sqrt{a_n^2+1}\right) = c.$$
  - Мы уже нашли этот предел при $a_n = n$. Он равен π. Остается найти другую последовательность a_n, стремящуюся к бесконечности, для которой
$$\lim_{n\to\infty} a_n \sin\left(2\pi\sqrt{a_n^2+1}\right) \neq \pi$$
(или не существует).
  - Положим $a_n = \dfrac{2n+1}{2}$.

Тогда, рассуждая аналогично, при $n \to \infty$ имеем:

$$\sin\left(2\pi\sqrt{a_n^2+1}\right) = \sin\left(2\pi\sqrt{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2+1}\right) =$$

$$\sin\left(2\pi \cdot \frac{2n+1}{2}\sqrt{1+\frac{4}{(2n+1)^2}}\right) =$$

$$\sin\left(\pi(2n+1)\left(1+\frac{2}{(2n+1)^2}+o\left(\frac{2}{(2n+1)^2}\right)\right)\right) =$$

$$\sin\left(2\pi n+\pi+\frac{2\pi}{2n+1}+o\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)\right) = -\sin\left(\frac{2\pi}{2n+1}+o\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)\right) \sim$$

$$-\frac{2\pi}{2n+1}+o\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right) \sim -\frac{2\pi}{2n+1}.$$

И, значит,

$$\lim_{n\to\infty} a_n \sin\left(2\pi\sqrt{a_n^2+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2}\cdot\left(-\frac{2\pi}{2n+1}\right) = -\pi.$$

Все доказано: предел $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\left(2\pi\sqrt{x^2+1}\right)$ не существует.

Односторонние пределы

Определение

1. Пусть b и c есть действительные числа, а f есть числовая функция, которая определена в некоторой окрестности $(b, b+\varepsilon')$, где $\varepsilon' > 0$. Тогда $\lim\limits_{x \to b+0} f(x) = c$, если для каждой окрестности $O_\varepsilon(c)$ найдется такая окрестность $(b, b+\delta)$, где $\delta > 0$, что $f(x) \in O_\varepsilon(c)$ для всех $x \in (b, b+\delta)$.
2. Пусть b и c есть действительные числа, а f есть числовая функция, которая определена в некоторой окрестности $(b-\varepsilon', b)$, где $\varepsilon' > 0$. Тогда $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = c$, если для каждой окрестности $O_\varepsilon(c)$ найдется такая окрестность $(b-\delta, b)$, где $\delta > 0$, что $f(x) \in O_\varepsilon(c)$ для всех $x \in (b-\delta, b)$.
3. Если допустить, что c также может принимать значение $+\infty$ и $-\infty$, мы определим смысл выражений $\lim\limits_{x \to b+0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to b+0} f(x) = -\infty$ и $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = -\infty$. Однако надо помнить, что эти два случая есть частные случаи несуществования предела.

Замечание. Можно дать эквивалентное определение односторонних пределов типа определения предела по Гейне.

Основные свойства и способы вычисления

1. Односторонние пределы, в целом, имеют те же свойства, что и обычные пределы.
2. Предел $\lim\limits_{x\to b} f(x)$ существует тогда и только тогда, когда существуют и равны между собой $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to b+0} f(x)$. В этом случае $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \lim\limits_{x\to b-0} f(x) = \lim\limits_{x\to b+0} f(x)$.
3. Пусть $f(x) = \begin{cases} g(x), & \text{если } x < b \\ h(x), & \text{если } x > b \end{cases}$ (в точке b функция f определена как угодно или не определена вовсе), причем существуют $\lim\limits_{x\to b} g(x)$ и $\lim\limits_{x\to b} h(x)$. Тогда $\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = \lim\limits_{x\to b} g(x)$ и $\lim\limits_{x\to b+0} f(x) = \lim\limits_{x\to b} h(x)$.
4. С помощью замены переменной $t = \dfrac{1}{x-b}$ односторонний предел можно свести к пределу при $t \to \pm\infty$:

   4.1 $\lim\limits_{x\to b+0} f(x) = \lim\limits_{t\to\infty} f\left(b + \dfrac{1}{t}\right)$.

   4.2 $\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = \lim\limits_{t\to-\infty} f\left(b + \dfrac{1}{t}\right) = \lim\limits_{t\to\infty} f\left(b - \dfrac{1}{t}\right)$.

Примеры

- $\lim\limits_{x\to 0+0} \frac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1,$
- $\lim\limits_{x\to 0-0} \frac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-x}{x} = -1,$
- $\lim\limits_{x\to 0+0} \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}+1} = \lim\limits_{t\to +\infty} \frac{1}{e^t+1} = 0,$
- $\lim\limits_{x\to 0-0} \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}+1} = \lim\limits_{t\to -\infty} \frac{1}{e^t+1} = \lim\limits_{y\to \infty} \frac{1}{e^{-y}+1} = \lim\limits_{y\to \infty} \frac{1}{\frac{1}{e^y}+1} = 1.$

Замечание

Распространенные обозначения:

- $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$ вместо $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$,
- $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$ вместо $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$.

Определение

Пусть функция f определена в некоторой проколотой окрестности точки b. Тогда f **непрерывна** в точке $b \in \mathbb{R}$, если:

1) функция f определена в точке b;
2) существует $\lim\limits_{x \to b} f(x)$;
3) $\lim\limits_{x \to b} f(x) = f(b)$.

Последние два условия равносильны условию

$$f(b+h) = f(b) + o(1)$$

при $h \to 0$.

Определение

Если функция f определена в некоторой проколотой окрестности точки b, но не является непрерывной в этой точке, то b называется **точкой разрыва** функции f. При этом говорят, что функция f **разрывна** в точке b.

Примеры

1. Пусть функция f элементарна и определена в некоторой окрестности точки b. Тогда функция f непрерывна в точке b.

2. Функция Дирихле

$$d(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{если } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

   определена при всех $x \in \mathbb{R}$ и разрывна в каждой точке.

Классификация точек разрыва

Пусть b есть точка разрыва функции f. Тогда:

1. Если существуют $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to b+0} f(x)$, то b называется **точкой разрыва первого рода**.
2. При этом, если $\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = \lim\limits_{x\to b+0} f(x)$ (что влечет существование $\lim\limits_{x\to b} f(x)$), то точка b называется **устранимой точкой разрыва** (первого рода).

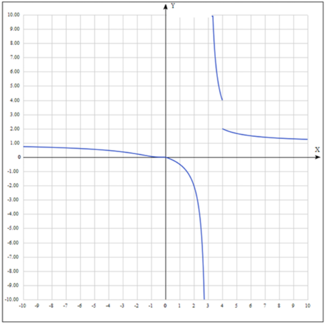
   Замечание. Поскольку точка b устранимого разрыва есть все-таки *точка разрыва*, в точке b функция f не определена или $\lim\limits_{x\to b} f(x) \neq f(b)$.
3. Все остальные точки разрыва называются **точками разрыва второго рода**.

Пример

Найдите и исследуйте все точки разрыва функции

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{3}{x}}, & \text{если } x \in (-\infty, 0), \\ \frac{x}{x-3}, & \text{если } x \in [0, 4), \\ \frac{x}{x-2}, & \text{если } x \in [4, +\infty). \end{cases}$$

Докажите, что функция имеет в точке 3 разрыв второго рода, в точке 4 – разрыв первого рода, в точке 0 разрыва нет.



Программа поддержания уровня доходов населения

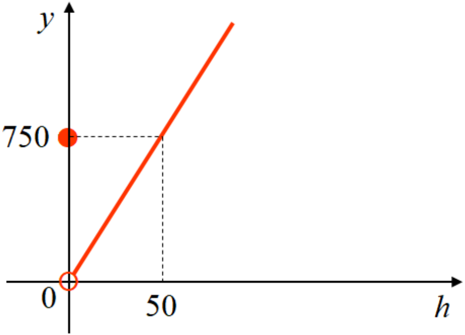
- Такие программы предлагают тем, кто не работает, определенную фиксированную сумму, которая выплачивается, если получатель не имеет никакого дохода.
- Пусть ежемесячная выплата составляет 750 у.е., при условии, что получатель совсем не работает. Однако получатель может найти работу, оплачиваемую в размере 15 у.е. в час, причем количество часов, которые он работает, зависит только от него. Тогда получаемый доход может быть записан в виде функции:

$$y = \begin{cases} 750, & \text{если } h = 0, \\ 15h, & \text{если } h > 0, \end{cases}$$

где y — получаемый доход (в у.е.), а h — количество отработанных часов.

Применение непрерывных и разрывных функций в экономике

График данной функции выглядит следующим образом.



Очевидно, что в точке $h = 0$ функция y разрывна (справа).

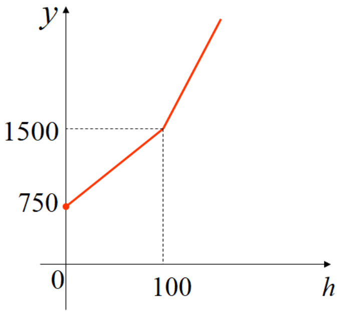
Если индивидуум предпочитает работать, то восполнить утрату выплат в размере 750 у.е. он может, только отработав 50 часов!

Применение непрерывных и разрывных функций в экономике

Альтернативная схема устроена следующим образом: определенная часть дохода (например, 50%) возвращается в органы социального обеспечения до тех пор, пока сумма возвращенных средств не сравнится с выплачиваемой суммой. С этого момента 750 у.е. не выплачиваются, но и возврата средств не происходит. Функция y в этом случае выглядит так:

$$y = \begin{cases} 750 + 7,5h, & \text{если } 0 \leqslant h \leqslant 100, \\ 15h, & \text{если } h > 100. \end{cases}$$

Эта функция непрерывна:



Локальные свойства непрерывных функций

1. Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки b и непрерывна в точке b. Тогда:
   1.1 $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right) = f(b)$ для любой последовательности a_n, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$.
   1.2 $\lim\limits_{x\to c} f(g(x)) = f\left(\lim\limits_{x\to c} g(x)\right) = f(b)$ для любой функции g, для которой $\lim\limits_{x\to c} g(x) = b$.
   1.3 Функция f ограничена в некоторой окрестности точки b.
   1.4 Если $f(b) \neq 0$, то для всех x из некоторой окрестности точки b значение $f(x)$ имеет тот же знак, что и $f(b)$.
2. Пусть функции f и g определены в некоторой окрестности точки b и непрерывны в точке b. Тогда в точке b непрерывны функции

$$f+g, \quad fg, \quad \frac{f}{g}$$

   (в последнем случае если $g(x) \neq 0$ в некоторой окрестности точки b).
3. Пусть функция g непрерывна в точке c, а функция f непрерывна в точке $b = g(c)$. Тогда функция $f \circ g$ непрерывна в точке c.

Глобальные свойства непрерывных функций

Пусть функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке отрезка $[a, b]$. Тогда:

1) функция f ограничена на отрезке $[a, b]$, т.е. для некоторого $C > 0$ $|f(x)| < C$ для всех $x \in [a, b]$ (**первая теорема Вейерштрасса**);

2) функция f достигает на отрезке своих максимального и минимального значений, т.е. существуют такие $c, d \in [a, b]$, что $f(c) = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}, \; f(d) = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$ (**вторая теорема Вейерштрасса**);

3) функция f принимает все промежуточные значения, т.е. для любого числа p

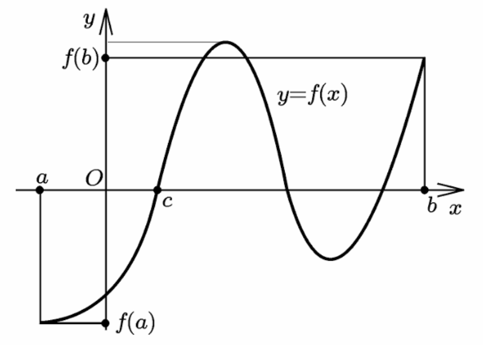
$$\inf\{f(x) : x \in [a, b]\} \leqslant p \leqslant \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$$

существует число $c \in [a, b]$, для которого $f(c) = p$ (**теорема Коши о промежуточных значениях**).

Объединяя все три свойства в одно, получаем следующую теорему.

Теорема

Образ отрезка при непрерывном отображении есть отрезок.



Теорема об обращении монотонной непрерывной функции

Теорема

Пусть функция f непрерывна и строго возрастает на отрезке $[a, b]$. Тогда на отрезке $[f(a), f(b)]$ определена обратная функция f^{-1}, причем она непрерывна и строго возрастает.

Пусть функция f непрерывна и строго убывает на отрезке $[a, b]$. Тогда на отрезке $[f(b), f(a)]$ определена обратная функция f^{-1}, причем она непрерывна и строго убывает.

Пример. На каждом отрезке $[a, b]$, где $0 < a < b$, функция $f(x) = x^2$ мнонотонно возрастает и непрерывна. Значит, на любом отрезке $[a^2, b^2]$, а значит, и на множестве $[0, +\infty)$, обратная функция $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ определена, непрерывна и строго возрастает.

Асимптоты

1. Неформальное определение: асимптота – это прямая, к которой график функции неограниченно приближается.
2. **Вертикальные асимптоты.** Прямая $x = a$ есть вертикальная асимптота функции f тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \pm\infty$ или $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \pm\infty$.
   Замечание. Функция может иметь любое (в том числе, бесконечное) количество вертикальных асимптот.
3. **Наклонные асимптоты.** Пусть $b \in \{-\infty, +\infty\}$. Прямая $y = kx + l$ есть наклонная асимптота функции f при $x \to b$, если

$$\lim_{x \to b}(f(x) - kx - l) = 0.$$

   Если прямая $y = kx + l$ есть наклонная асимптота функции f, то $k = \lim\limits_{x \to b} \dfrac{f(x)}{x}$ и $l = \lim\limits_{x \to b}(f(x) - kx)$. Если какой-либо из этих двух пределов не существует, асимптоты при $x \to b$ нет.
   Функция f может иметь не более двух наклонных асимптот.

Пример

- $f(x) = \dfrac{3x^3 - 2x - 3}{x^2 + x - 2}$.
  1. Вертикальные асимптоты: $x = 1$, $x = -2$ (проверьте самостоятельно).
  2. Ищем наклонную асимптоту при $x \to +\infty$:

     $$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^3 - 2x - 3}{(x^2 + x - 2)x} = 3.$$

     $$l = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x^3 - 2x - 3}{x^2 + x - 2} - 3x \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{-3x^2 + 4x - 3}{x^2 + x - 2} = -3.$$

     Асимптота: $y = 3x - 3$.
  3. Ищем наклонную асимптоту при $x \to -\infty$:

     $$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{3x^3 - 2x - 3}{(x^2 + x - 2)x} = \left\langle \begin{array}{c} y = -x, \\ y \to +\infty \end{array} \right\rangle =$$

     $$\lim_{y \to +\infty} \frac{-3y^3 + 2y - 3}{(y^2 - y - 2)(-y)} = 3.$$

     $$l = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{3x^3 - 2x - 3}{x^2 + x - 2} - 3x \right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{-3x^2 + 4x - 3}{x^2 + x - 2} = -3.$$

     Асимптота такая же: $y = 3x - 3$.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!