Математический анализ 1. Лекции 7 – 8.
Приложение 1. Доказательства некоторых утверждений

Теорема Ферма об экстремуме

Теорема

Пусть функция f дифференцируема в точке c и имеет локальный максимум в точке c. Тогда $f'(c) = 0$.

Доказательство. Пусть функция f имеет локальный максимум в точке c. Тогда существует такая ε-окрестность $\mathcal{O}_\varepsilon(c) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ точки c, что $f(c) \geqslant f(x)$ для всех $x \in \mathcal{O}_\varepsilon(c)$. Поэтому для всех $x \in (c - \varepsilon, c)$ выполнено

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geqslant 0, \tag{1}$$

а для всех $x \in (c, c + \varepsilon)$ выполнено

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leqslant 0. \tag{2}$$

Поскольку функция f дифференцируема в точке c, существует

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c),$$

а значит, существуют и $\lim\limits_{x \to c-0} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$ и $\lim\limits_{x \to c+0} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$, причем

$$\lim_{x \to c-0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c+0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c).$$

Теперь из неравенств (1) и (2) получаем: $f'(c) \geqslant 0$ и $f'(c) \leqslant 0$. Значит, $f'(c) = 0$

Теорема Ролля

Пусть функция f определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b) и, при этом, $f(a) = f(b)$. Тогда существует такая точка $c \in (a, b)$, что

$$f'(c) = 0.$$

Доказательство. По теореме Вейерштрасса функция f ограничена на отрезке $[a, b]$. Пусть $m = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$ и $M = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$. Тогда, вновь по теореме Вейерштрасса, существуют такие точки $p, q \in [a, b]$, что $f(p) = m$ и $f(q) = M$. Если $M = m$, то функция f есть константа на отрезке $[a, b]$, и в качестве c можно взять любую точку $c \in (a, b)$. В противном случае, поскольку $f(a) = f(b)$, хотя бы одна из точек p, q принадлежит интервалу (a, b). Положим c равным такому числу $z \in \{p, q\}$, что $z \in (a, b)$. Легко проверить, что эта точка является точкой экстремума. Тогда утверждение теоремы немедленно следует из теоремы Ферма об экстремуме.

Теорема Лагранжа о конечных приращениях

Теорема

Пусть функция f *определена и непрерывна на отрезке* $[a, b]$ *и дифференцируема на интервале* (a, b) *. Тогда существует такая точка* $c \in (a, b)$*, что*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x.$$

Легко проверить, что функция g удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Значит, для некоторой точки $c \in (a, b)$

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

откуда $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Теорема Коши о конечных приращениях

Теорема

Пусть функции f и g непрерывны на отрезке $[a, b]$ и дифференцируемы на интервале (a, b), причем $g'(x) \neq 0$ для всех $x \in (a, b)$. Тогда существует такая точка $c \in (a, b)$, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g(x).$$

Легко проверить, что функция h удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Значит, для некоторой точки $c \in (a, b)$

$$0 = h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} g'(c),$$

откуда $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.