Математический анализ 1. Лекции 9 – 10.
Приложение 1. Доказательства некоторых утверждений

Теорема об остаточном члене формулы Тейлора в форме Лагранжа

Теорема

Пусть функция f определена и $(n+1)$ раз дифференцируема в каждой точке x из некоторой окрестности $\mathcal{O}$ точки x_0. Тогда для каждого $x \in \mathcal{O} \setminus \{x_0\}$ существует такая точка c, что c лежит строго между x_0 и x и

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

иначе говоря, остаточный член $r_n(x)$ многочлена Тейлора $T_n^f(x)$ функции f в точке x_0 может быть представлен в форме

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

(форме Лагранжа).

Лемма

Пусть функции g и h определены в некоторой окрестности $\mathcal{O}$ точки x_0 и удовлетворяют следующим условиям:

1) *функции g и h $(n+1)$ раз дифференцируемы в каждой точке $x \in \mathcal{O}$;*
2) $g(x_0) = g'(x_0) = \ldots = g^{(n)}(x_0) = 0$,
   $h(x_0) = h'(x_0) = \ldots = h^{(n)}(x_0) = 0$;
3) $h^{(k)}(x) \neq 0$ *для всех* $k \in \{0, 1, \ldots, n+1\}$ *и* $x \in \mathcal{O} \setminus \{x_0\}$.

Тогда для каждого $x \in \mathcal{O} \setminus \{x_0\}$ существует такая точка c, что c лежит строго между x_0 и x и

$$\frac{g(x)}{h(x)} = \frac{g^{(n+1)}(c)}{h^{(n+1)}(c)}.$$

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что $x > x_0$. Тогда, применяя теорему Коши о конечных приращениях к функциям g и h на отрезке $[x_0, x]$, имеем

$$\frac{g(x)}{h(x)} = \frac{g(x) - g(x_0)}{h(x) - h(x_0)} = \frac{g'(c_1)}{h'(c_1)},$$

где $c_1 \in (x_0, x)$. Аналогично, применяя теорему Коши о конечных приращениях к функциям g' и h' на отрезке $[x_0, x]$, имеем

$$\frac{g'(c_1)}{h'(c_1)} = \frac{g'(c_1) - g'(x_0)}{h'(c_1) - h'(x_0)} = \frac{g''(c_2)}{h''(c_2)},$$

где $c_2 \in (x_0, c_1)$.
Продолжая процесс,[1] имеем

$$\frac{g(x)}{h(x)} = \frac{g'(c_1)}{h'(c_1)} = \ldots = \frac{g^{(n+1)}(c_{n+1})}{h^{(n+1)}(c_{n+1})},$$

где $x_0 < c_{n+1} < c_n < \ldots < c_1 < \ldots < x$. Остается положить $c = c_{n+1}$.

---

[1] Более строгое рассуждение можно провести, используя принцип математической индукции.

Вернемся к доказательству теоремы об остаточном члене формулы Тейлора в форме Лагранжа. Напомним обозначения:

$$T_n^f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$
$$r_n(x) = f(x) - T_n^f(x).$$

Легко проверить, что функции $g(x) = r_n(x)$ и $h(x) = (x - x_0)^{n+1}$ удовлетворяют условиям леммы. Следовательно, для каждой точки $x \in \mathcal{O} \setminus \{x_0\}$

$$\frac{r_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{g^{(n+1)}(c)}{h^{(n+1)}(c)}$$

для некоторой точки c, лежащей между x и x_0.
Непосредственным вычислением находим:

$$g^{(n+1)}(c) = f^{(n+1)}(c) \text{ и } h^{(n+1)}(c) = (n + 1)!.$$

Отсюда

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n + 1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

что и требовалось доказать.

Теорема об остаточном члене формулы Тейлора в форме Пеано

Теорема

Пусть функция f определена в некоторой окрестности $\mathcal{O}$ точки x_0 и имеет все производные до n-го порядка включительно в точке x_0. Тогда при $x \to x_0$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n),$$

иначе говоря, остаточный член $r_n(x)$ формулы Тейлора $T_n^f(x)$ функции f в точке x_0 может быть представлен в форме

$$r_n(x) = o((x - x_0)^n)$$

(форме Пеано).

Доказательство. Из условия следует, что функция f определена и имеет производные до $(n-1)$ порядка включительно в некоторой окрестности $\mathcal{O}$ точки x_0. Тогда по доказанной лемме (в которой $n+1$ мы заменяем на $(n-1)$) для всех $x \in \mathcal{O} \setminus \{x_0\}$ имеем

$$\frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n} = \frac{r_n^{(n-1)}(c)}{n!(c-x_0)} = \frac{r_n^{(n-1)}(c) - r_n^{(n-1)}(x_0)}{n!(c-x_0)},$$

где $c = c(x)$ и c лежит между x и x_0.
Поскольку

$$\lim_{x\to x_0} \frac{r_n^{(n-1)}(c) - r_n^{(n-1)}(x_0)}{n!(c-x_0)} = \lim_{c\to x_0} \frac{r_n^{(n-1)}(c) - r_n^{(n-1)}(x_0)}{n!(c-x_0)} = \frac{r_n^{(n)}(x_0)}{n!} = 0,$$

имеем

$$\lim_{x\to x_0} \frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0,$$

т.е. $r_n(x) = o((x-x_0)^n)$.

Правило Лопиталя

Теорема

Пусть $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, *и числовые функции* f *и* g *определены в окрестности* x_0. *Тогда если:*

1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ *или* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$,
2) f *и* g *дифференцируемы в некоторой окрестности* x_0,
3) $g'(x) \neq 0$ *для всех* x *из некоторой окрестности* x_0,
4) *существует* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$,

то существует $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, *и, при этом,* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Доказательство. Для неопределенностей вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ при $x_0 \in \mathbb{R}$ сразу из леммы.
Для неопределенностей вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ см. глава IV, параграф 19, п.2 [2].

[2]Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. – Курс математического анализа – Издательство "Физматлит"– 2001

Второе достаточное условие экстремума

Теорема

Пусть функция f имеет все производные до n-го порядка включительно в точке x_0. Пусть, кроме того,

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Тогда:

1) *если n нечетное, то x_0 не точка экстремума;*
2) *если n четное и $f^{(n)}(x_0) < 0$, то x_0 точка максимума;*
3) *если n четное и $f^{(n)}(x_0) > 0$, то x_0 точка минимума.*

Доказательство. При $x \to x_0$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n) =$$
$$= f(x_0) + \left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + o(1)\right)(x - x_0)^n.$$

В некоторой окрестности точки x_0 выражение в скобках сохраняет знак. Остается воспользоваться определением.