Математический анализ 1. Лекции 3 – 4.
Приложение 1. Доказательства некоторых утверждений

Утверждение. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$ тогда и только тогда, когда $a_n = c + b_n$, где b есть бесконечно малая последовательность. В частности, последовательность a бесконечно малая тогда и только тогда, когда ее предел равен нулю.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$ и ε есть произвольное положительное число. Тогда существует такой номер N, что для всех $n \geqslant N$ выполнено неравенство $|a_n - c| < \varepsilon$. Значит, последовательность $b_n = a_n - c$ бесконечно малая. Остается заметить, что $a_n = c + (a_n - c) = c + b_n$.

Пусть, наоборот, $a_n = c + b_n$, где b есть бесконечно малая последовательность. Тогда существует такой номер N, что для всех $n \geqslant N$ выполнено неравенство $|b_n| < \varepsilon$, т.е. $|a_n - c| < \varepsilon$. Имеем $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$ по определению.

Утверждение. Пусть a – ограниченная последовательность, а b – бесконечно малая последовательность. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n$ существует и равен нулю.

Доказательство. Пусть C есть такое (положительное) число, что $|a_n| < C$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Пусть ε есть произвольное положительное число. Поскольку b есть бесконечно малая последовательность, для каждого положительного числа ε' существует такое число N, что $|b_n| < \varepsilon'$ для всех $n \geqslant N$. Выберем такое число N для $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{C}$. Тогда для всех $n \geqslant N$ имеем

$$|a_n b_n| = |a_n| \cdot |b_n| < C \cdot \frac{\varepsilon}{C}.$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$ по определению.

Утверждение. Пусть даны последовательности a, b, c, причем для всех $n \in \mathbb{N}$ выполнено $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$. Пусть еще существуют пределы $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$ и, кроме того, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$. Тогда существует $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$, причем $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$ (**лемма "о двух полицейских"**).

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = l$. Пусть ε есть произвольное положительное число. Тогда существуют такие числа N_1 и N_2, что

$$l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$$

для всех $n \geqslant N_1$ и

$$l - \varepsilon < b_n < l + \varepsilon$$

для всех $n \geqslant N_2$.
Тогда для всех $n \geqslant N_3 = \max\{N_1, N_2\}$

$$l - \varepsilon < a_n \leqslant b_n \leqslant c_n < l + \varepsilon.$$

Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = l$.

Утверждение. Пусть $a > 1$, а $k \in \mathbb{N}$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{a^n} = 0$.

Доказательство. Пусть $\alpha = a - 1$. Тогда $\alpha > 0$ и $a = 1 + \alpha$. Из формулы бинома Ньютона имеем, что при $n > k$

$$a^n = (1+\alpha)^n > C_n^{k+1}\alpha^{k+1}.$$

Пусть $n > 2k$. Тогда

$$C_n^{k+1} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k)}{(k+1)!} > \frac{n}{(k+1)!} \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^k.$$

Отсюда при $n > 2k$

$$0 < \frac{n^k}{a^n} < \frac{2^k(k+1)!}{\alpha^{k+1}} \cdot \frac{1}{n}.$$

Применяем лемму о двух полицейских.

Теорема о пределе суммы. Пусть существуют пределы $\lim_{n\to\infty} a_n$ и $\lim_{n\to\infty} b_n$. Тогда существует предел $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)$, причем

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

Доказательство. Вначале докажем, что сумма двух бесконечно малых последовательностей вновь является бесконечно малой. Пусть последовательности a'_n и b'_n бесконечно малые, ε есть произвольное положительное число. Тогда существуют такие числа N_1 и N_2, что $|a'_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ для всех $n \geqslant N_1$, а $|b'_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ для всех $n \geqslant N_2$. Положим $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда для всех $n \geqslant N$ выполнено

$$|a'_n + b'_n| \leqslant |a'_n| + |b'_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Значит, последовательность $a'_n + b'_n$ бесконечно малая.

Пусть теперь $\lim_{n\to\infty} a_n = c$ и $\lim_{n\to\infty} b_n = d$. Тогда по свойству (G) имеем: $a_n = c + a'_n$ и $b_n = d + b'_n$ для некоторых бесконечно малых последовательностей a' и b'. Тогда

$$a_n + b_n = (c+d) + (a'_n + b'_n)$$

По доказанному выше последовательность $a'_n + b'_n$ бесконечно малая. Значит, по свойству предела $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = c + d$.

Теорема о пределе произведения. Пусть существуют пределы $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Тогда существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n)$, причем

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = d$. Тогда по свойству предела имеем: $a_n = c + a'_n$ и $b_n = d + b'_n$ для некоторых бесконечно малых последовательностей a' и b'. Значит,

$$a_n b_n = cd + cb'_n + da'_n + a'_n b'_n.$$

По свойствам пределов последовательности cb'_n, da'_n бесконечно малые. Последовательность $(a'_n b'_n)$ тоже бесконечно малая (это несложно доказать, применяя свойства 3 и 8 пределов последовательностей). Значит, по теореме о сумме пределов последовательность $cb'_n + da'_n + a'_n b'_n$ бесконечно малая, и, следовательно, по свойству предела

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = cd.$$

Теорема о пределе частного. Пусть существуют пределы $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$. Тогда существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$, причем

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

Доказательство. См. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. – Курс математического анализа – Издательство "Физматлит"– 2001, глава II, параграф 5, раздел 3.

Замена переменных под знаком предела. Пусть

1) существует $\lim\limits_{x\to b} f(x) = c$;
2) существует $\lim\limits_{y\to c} g(y) = d$;
3) $f(x) \neq c$ в некоторой (проколотой) окрестности точки b.

Тогда существует $\lim\limits_{x\to b} g(f(x))$, причем $\lim\limits_{x\to b} g(f(x)) = \lim\limits_{y\to c} g(y) = d$.

Доказательство. Поскольку $\lim\limits_{y\to c} g(y) = d$, для каждой окрестности O точки d существует проколотая окрестность U° точки c, для которой

$$\{g(y) : y \in U^\circ\} \subseteq O.$$

Поскольку $\lim\limits_{x\to b} f(x) = c$, для окрестности $U = U^\circ \cup \{c\}$ существует проколотая окрестность V° точки b, для которой

$$\{f(x) : x \in V^\circ\} \subseteq U.$$

Поскольку $f(x) \neq c$ в некоторой (проколотой) окрестности W° точки b, имеем

$$\{f(x) : x \in V^\circ \cap W^\circ\} \subseteq U^\circ.$$

Тогда

$$\{g(f(x)) : x \in V^\circ \cap W^\circ\} \subseteq O,$$

что и доказывает утверждение.