Математический анализ 1. Лекции 5 – 6.
Приложение 1. Доказательства некоторых утверждений

Первая теорема Вейерштрасса

Теорема

Пусть функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке отрезка $[a, b]$. Тогда функция f ограничена на отрезке $[a, b]$, т.е. для некоторого $C > 0$ $|f(x)| < C$ для всех $x \in [a, b]$.

Доказательство. Пусть функция f не ограничена на $[a, b]$. Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует $x_n \in [a, b]$, для которого

$$f(x_n) > n.$$

Последовательность x_n ограничена. Следовательно, их нее можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $y_n = x_{\varphi(n)}$. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = c$. Тогда $c \in [a, b]$. Поскольку функция f непрерывна, имеем

$$\lim_{n\to\infty} f(y_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} y_n\right) = f(c).$$

Однако, последовательность $f(y_n)$ не ограничена. Противоречие.

Замечание **(теорема Больцано-Вейерштрасса)**. Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Вторая теорема Вейерштрасса

Теорема

Пусть функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке отрезка $[a, b]$. Тогда функция f достигает на отрезке своих максимального и минимального значений, т.е. существуют такие $c, d \in [a, b]$, что

$$f(c) = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\},$$
$$f(d) = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}.$$

Доказательство. Пусть $\sup\{f(x) : x \in [a, b]\} = M$. По определению супремума, для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует $x_n \in [a, b]$, для которого

$$M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leqslant M.$$

Последовательность x_n ограничена, следовательно, из нее можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $y_n = x_{\varphi(n)}$. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = c$. Тогда $c \in [a, b]$. Поскольку функция f непрерывна, вновь имеем

$$\lim_{n\to\infty} f(y_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} y_n\right) = f(c).$$

При этом $M - \dfrac{1}{n} < f(y_n) \leqslant M$, откуда $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = M$. Значит, $f(c) = M$. Вторая часть теоремы доказывается аналогично.

Теоремы Коши

Теорема Коши о нулях непрерывной функции. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке отрезка $[a, b]$ и в точках a и b принимает значения разного знака. Тогда существует такое число $c \in [a, b]$, что $f(c) = 0$.

Теорема Коши о промежуточных значениях. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке отрезка $[a, b]$. Тогда функция f принимает все промежуточные значения, т.е. для любого числа p

$$\inf\{f(x) : x \in [a, b]\} \leqslant p \leqslant \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$$

существует число $c \in [a, b]$, для которого

$$f(c) = p.$$

Доказательство. Применим теорему Коши о нулях непрерывной функции к функции $g(x) = f(x) - p$.