Математический анализ 1. Лекции 1 – 2.
Приложение 2. Школьные и околошкольные сведения, которые необходимы для успешного прохождения курса

Бином Ньютона

Утверждение

Для любого $n \in \mathbb{N}$ *и* $x \in \mathbb{R}$ *верна формула бинома Ньютона:*

$$(x+1)^n = C_n^0 + C_n^1 x^1 + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m x^m,$$

где $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ *для всех* $0 \leqslant m \leqslant n$.

Замечание

$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$, $0! = 1$.

Доказательство.

База индукции. При $n = 1$ равенство, очевидно, верно.

Шаг индукции. Сначала докажем формулу

$$C_k^{m-1} + C_k^m = C_{k+1}^m$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
C_k^{m-1} + C_k^m &= \frac{k!}{(m-1)!(k-m+1)!} + \frac{k!}{m!(k-m)!} = \\
&= \frac{k!}{(m-1)!(k-m)!} \cdot \left(\frac{1}{k-m+1} + \frac{1}{m}\right) = \\
&= \frac{k!}{(m-1)!(k-m)!} \cdot \frac{k+1}{(k-m+1)m} = \\
&= \frac{(k+1)!}{m!(k-m+1)!} = C_{k+1}^m.
\end{aligned}$$

Теперь можно доказать шаг индукции.

Пусть $(x+1)^k = C_k^0 + C_k^1 x^1 + C_k^2 x^2 + \ldots + C_k^k x^k$.

Тогда

$$(x+1)^{k+1} = (x+1)^k \cdot (x+1) =$$
$$= \left(C_k^0 + C_k^1 x^1 + C_k^2 x^2 + \ldots + C_k^k x^k\right)(x+1) =$$

(раскрываем скобки)

$$= C_k^0 x + C_k^1 x^2 + C_k^2 x^3 + \ldots + C_k^k x^{k+1} +$$
$$+ C_k^0 + C_k^1 x^1 + C_k^2 x^2 + \ldots + C_k^k x^k =$$

(приводим подобные слагаемые)

$$= C_k^0 + \left(C_k^0 + C_k^1\right) x^1 + \ldots + \left(C_k^{k-1} + C_k^k\right) x^k + C_k^k x^{k+1} =$$

(используем ранее доказанную формулу)

$$= C_k^0 + C_{k+1}^1 x^1 + \ldots + C_{k+1}^k x^k + C_k^k x^{k+1} =$$

(преобразуем первое и последнее слагаемые)

$$= C_{k+1}^0 + C_{k+1}^1 x^1 + \ldots + C_{k+1}^k x^k + C_{k+1}^{k+1} x^{k+1}$$

Шаг индукции доказан.

Следствие

$$(a+b)^n = C_n^0 a^0 b^n + C_n^1 a^1 b^{n-1} + C_n^2 a^2 b^{n-2} + \ldots + C_n^n a^n b^0 = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}.$$

Частные случаи

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$
- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3.$
- $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4.$

Многочлены и рациональные функции

Многочлен (полином) степени n (от одной переменной) это выражение вида

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

где $a_n \neq 0$. Степень многочлена p обозначается $\deg(p)$.

Для многочленов определены естественные операции сложения и умножения, например,

$$(2x^2 + x - 1) + (-x^2 + 2x + 3) = x^2 + 3x + 2,$$
$$(2x^2 + x - 1) \cdot (-x^2 + 2x + 3) = -2x^4 + 3x^3 + 9x^2 + x - 3.$$

При этом

$$\deg(p+q) \leqslant \max\{\deg(p), \deg(q)\},$$
$$\deg(p) \neq \deg(q) \Rightarrow \deg(p+q) = \max\{\deg(p), \deg(q)\},$$
$$\deg(p \cdot q) = \deg(p) + \deg(q).$$

Деление с остатком

Теорема

Для любой пары многочленов f и g (где $g \neq 0$) существует единственная пара многочленов q и r с условиями:

1. $f = gq + r$;
2. $\deg(r) < \deg(g)$.

Многочлен q называют (неполным) частным от деления f на g, а многочлен r называют остатком от деления f на g. Если $r = 0$, говорят, что многочлен f *делится* на многочлен g.

Деление многочленов в столбик

Пример

$$
\begin{array}{l|l}
10x^5+3x^4-12x^3+25x^2-2x+5 & 5x^2-x+2 \\
\underline{10x^5-2x^4+4x^3} & \overline{2x^3+x^2-3x+4} \\
\qquad 5x^4-16x^3+25x^2-2x+5 & \\
\qquad \underline{5x^4-x^3+2x^2} & \\
\qquad\qquad -15x^3+23x^2-2x+5 & \\
\qquad\qquad \underline{-15x^3+3x^2-6x} & \\
\qquad\qquad\qquad 20x^2+4x+5 & \\
\qquad\qquad\qquad \underline{20x^2-4x+8} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 8x-3 &
\end{array}
$$

$$10x^5+3x^4-12x^3+25x^2-2x+5=(5x^2-x+2)\cdot(2x^3+x^2-3x+4)+(8x-3).$$

Корни многочленов

Теорема Безу

Остаток от деления многочлена f на одночлен $x - a$ равен $f(a)$.

Определение

Число c называется корнем многочлена f, если $f(c) = 0$.

Следствие (из теоремы Безу)

Число c является корнем многочлена f тогда и только тогда, когда f (нацело) делится на $x - c$.

Определение

Кратность корня c многочлена f есть наибольшее натуральное число k, для которого f делится на $(x - c)^k$.

Упражнение. Убедившись, что 2 есть корень многочлена $x^3 - x^2 - 8x + 12$, найдите его кратность.

Теорема

*Пусть $c_1, c_2, \ldots, c_s$ есть все различные **комплексные** корни многочлена*

$$f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

а $k_1, k_2, \ldots, k_s$ – это их соответственные кратности. Тогда

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_s = n.$$

Иначе говоря, многочлен степени n имеет ровно n комплексных корней, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность.

Следствие

Пусть f и g – многочлены степени не более n, и пусть они принимают одинаковые значения в $n+1$ различных точках, т.е. $f(x_1) = g(x_1)$, $f(x_2) = g(x_2)$, …, $f(x_{n+1}) = g(x_{n+1})$ для некоторых различных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Тогда $f = g$.

Пример

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} = 1$$

(здесь a, b, c – произвольные различные действительные числа).

Разложение многочленов на множители

Теорема

Пусть $c_1, c_2, \ldots, c_s$ *есть все различные* ***комплексные*** *корни многочлена*

$$f = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

а $k_1, k_2, \ldots, k_s -$ *это их соответственные кратности. Тогда*

$$f = a_n (x - c_1)^{k_1}(x - c_2)^{k_2} \ldots (x - c_s)^{k_s}.$$

Теорема

Каждый многочлен ***с действительными коэффициентами*** *может быть представлен в виде произведения многочленов первой степени и многочленов второй степени, не имеющих корней.*

Теорема

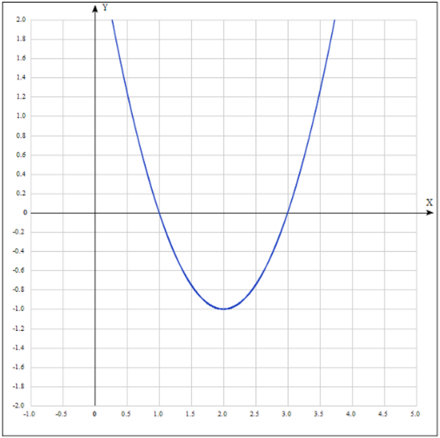
Целые корни многочлена с целыми действительными коэффициентами и коэффициентом a_n*, при старшей степени* x *равным единице, есть делители свободного члена* a_0*.*

Графики простейших многочленов

График многочлена первой степени – прямая.
График многочлена второй степени – парабола.

$f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$

- $a > 0 \Rightarrow$ ветви вверх;
- $a < 0 \Rightarrow$ ветви вниз;
- корни: $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$; (абсциссы точек пересечения с осью Ox)
- вершина: $\left(\dfrac{-b}{2a}, \dfrac{4ac - b^2}{4a}\right)$.



Рациональные функции

Рациональным выражением называется дробь $\frac{p(x)}{q(x)}$, где $p(x)$ и $q(x)$ – многочлены ($\deg(q) > 0$). Рациональной функцией называется числовая функция f, которая задается формулой $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, где $\frac{p(x)}{q(x)}$ есть рациональное выражение.

Определение

- Дробь $\frac{p(x)}{q(x)}$ называется правильной, если $\deg(p) < \deg(q)$.
- Элементарными дробями называются дроби вида

$$\frac{a}{(x-b)^k} \text{ и } \frac{ax+b}{(x^2+cx+d)^k},$$

где квадратный трехчлен $x^2 + cx + d$ не имеет действительных корней (т.е. $c^2 - 4d < 0$).

Мы будем рассматривать только рациональные функции с действительными коэффициентами.

Представление рационального выражения в виде суммы многочлена и элементарных дробей

1. **Выделение целой части с помощью деления с остатком**: каждое рациональное выражение $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ можно представить в виде $\dfrac{p(x)}{q(x)} = p_1(x) + \dfrac{p_2(x)}{q(x)}$, где $p_1(x)$ есть многочлен, а $\dfrac{p_2(x)}{q(x)}$ есть правильная дробь.
2. **Разложение правильной дроби в сумму элементарных дробей**: каждую правильную дробь $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ можно представить в виде суммы элементарных дробей $\dfrac{a}{(x-b)^k}$ и $\dfrac{ax+b}{(x^2+cx+d)^k}$, знаменатели которых являются делителями многочлена $q(x)$.

Метод неопределенных коэффициентов

Примеры

1. $f(x) = \dfrac{2x}{x^3 - x^2 + x - 1}$.

- Раскладываем знаменатель на множители: $f(x) = \dfrac{2x}{(x-1)(x^2+1)}$.

  Значит, решение надо искать в виде $\dfrac{A}{x-1} + \dfrac{Bx+C}{x^2+1}$;

$$\frac{2x}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

- Правую часть приводим к общему знаменателю:

$$\frac{2x}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{(A+B)x^2 + (C-B)x + (A-C)}{(x-1)(x^2+1)}.$$

- Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях в числителе, составляем систему
$$\begin{cases} A + B = 0, \\ C - B = 2, \\ A - C = 0. \end{cases}$$
- Решаем систему и записываем окончательный результат: $A = 1, B = -1, C = 1,$
$$f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{x-1}{x^2+1}.$$

2. $f(x) = \dfrac{2x}{x^3 + x^2 - x - 1}$.

- Раскладываем знаменатель на множители: $f(x) = \dfrac{2x}{(x-1)(x+1)^2}$.

  Значит, решение надо искать в виде $\dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+1} + \dfrac{C}{(x+1)^2}$;

$$\frac{2x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}.$$

- Правую часть приводим к общему знаменателю:

$$\frac{2x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{(A+B)x^2 + (2A+C)x + (A-B-C)}{(x-1)(x^2+1)}.$$

- Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях в числителе, составляем систему
$$\begin{cases} A + B = 0, \\ 2A + C = 2, \\ A - B - C = 0. \end{cases}$$
- Решаем систему и записываем окончательный результат:
$A = \dfrac{1}{2}, B = -\dfrac{1}{2}, C = 1,$
$$f(x) = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2}.$$

Частный случай

$$q(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n),$$

где все числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ различны. В этом случае

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2} + \ldots + \frac{A_n}{x - x_n},$$

где для каждого i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ число A_i может быть вычислено по формуле

$$A_i = \frac{p(x_i)}{(x_i - x_1)(x_i - x_2)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}.$$

Рекомендуемые задачи

1. Разделите с остатком многочлен $x^4 + 2x + 1$ на многочлен $x^2 - x + 2$.
2. Найдите все корни многочлена $x^3 - x^2 - 5x + 6$, предварительно угадав один из них.
3. Убедившись, что 2 есть корень многочлена $x^3 - x^2 - 8x + 12$, найдите его кратность.
4. Разложите многочлен $2x^3 - 3x^2 - 5x + 6$ в произведение неприводимых многочленов.
5. Разложите многочлен $x^4 + 1$ в произведение многочленов второй степени.
6. Найдите многочлен степени не выше 3, график которого проходит через точки $(0, -1), (1, 1), (2, 1), (3, -1)$.
7. Представьте в виде суммы элементарных дробей (и, быть может, многочлена) рациональные выражения: $\dfrac{x^3 + 2x + 1}{x^2 - 5x + 6}$, $\dfrac{x^3 + x + 1}{(x-2)(x+1)^2}$, $\dfrac{x+3}{(x-3)(x^2+1)}$, $\dfrac{1}{x^4+1}$.

Степенная функция с произвольным показателем

Степенная функция с произвольным показателем это функция

$$f(x) = x^a.$$

Область определения:

- если a – натуральное число, то $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$;
- если a – целое неположительное число, то $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
- если a – не целое положительное число, то $\operatorname{dom} f = [0, \infty)$;
- если a – не целое отрицательное число, то $\operatorname{dom} f = (0, \infty)$.

Замечание

В некоторых случаях на практике функции $x^{\frac{1}{k}}$ и $\sqrt[k]{x}$ отождествляют (здесь k натуральное число). Тогда при нечетном k областью определения функции $x^{\frac{1}{k}}$ становится все множество $\mathbb{R}$. Но это не совсем корректно.

Определения

- Если $a = n$, где $n \in \mathbb{N}$, то $x^a = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ раз}}$;
- $x^0 = 1$;
- если $a = -n$, где $n \in \mathbb{N}$, то $x^a = \dfrac{1}{x^n}$;
- если $a = \dfrac{p}{q}$, где $p \in \mathbb{Z}$, а $q \in \mathbb{N}$, то x^a есть такое неотрицательное число y, что $y^q = x^p$;
- если $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, то

$$x^a = \sup\{x^r : r \in \mathbb{Q} \text{ и } r < a\} = \inf\{x^r : r \in \mathbb{Q} \text{ и } r > a\}.$$

Замечание

В этих определениях считается, что x принадлежит области определения функции x^a, см. предыдущий слайд.

Основные алгебраические формулы. Следующие равенства верны для всех значений x и y, при которых обе части равенства имеют смысл:

- $(xy)^a = x^a y^a$, $\left(\dfrac{x}{y}\right)^a = \dfrac{x^a}{y^a}$,
- $(x^a)^b = x^{ab}$.

Уравнения. Если $a \neq 0$, то

$$x, y > 0 \Rightarrow (x^a = y \Leftrightarrow x = y^{\frac{1}{a}}).$$

Упражнение. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^{0,2} y^{-0,7} = 10, \\ x^{-0,8} y^{0,3} = 5. \end{cases}$

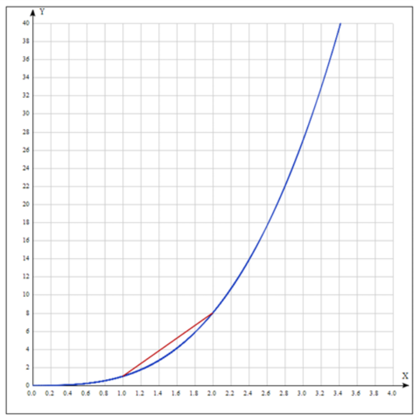
Степенная функция в экономике, пример. Функция Кобба-Дугласа

$$Q = AK^{\alpha} L^{\beta},$$

где Q – объем производства, K – капитал, L – труд, A, α, β – параметры.

Функция $f(x) = x^a$ и ее график (при неотрицательных значениях x)

$f(x) = x^a$, $a > 1$. Возрастающая, выпуклая (вниз).



Замечание

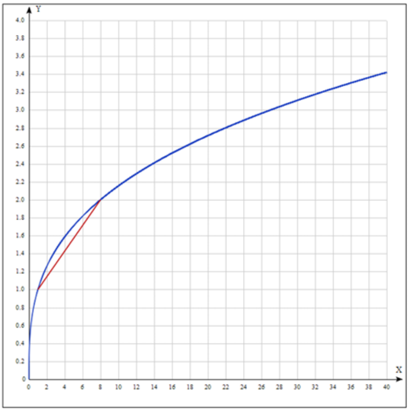
Функция называется выпуклой (вниз), если любая хорда ее графика лежит выше графика.

Замечание

График проходит через точку $(1, 1)$.

Функция $f(x) = x^a$ и ее график (при неотрицательных значениях x)

$f(x) = x^a$, $0 < a < 1$. Возрастающая, вогнутая (выпуклая вверх).



Замечание

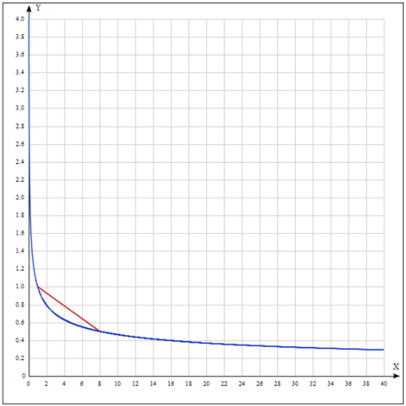
Функция называется вогнутой (выпуклой вверх), если любая хорда ее графика лежит ниже графика.

Замечание

График проходит через точку $(1, 1)$.

Функция $f(x) = x^a$ и ее график (при неотрицательных значениях x)

$f(x) = x^a$, $a < 0$. Убывающая, выпуклая (вниз).



Замечание

При $a < 0$ функция $f(x) = x^a$ стремится к нулю при $x \to \infty$ и к бесконечности при $x \to 0$. Оси координат являются *асимпототами*.

Замечание

График проходит через точку $(1, 1)$.

Показательная и логарифмическая функции

Показательная функция с основанием a это функция

$$f(x) = a^x.$$

Параметр a должен удовлетворять условиям: $a > 0, a \neq 1$.
Логарифмическая функция с основанием a это функция, обратная к функции $f(x) = a^x$. Обозначение: $f(x) = \log_a(x)$. Из определения логарифмической функции следует, что:

- $a^{\log_a(x)} = x$ для всех $x \in \operatorname{dom}(\log_a(x))$;
- $\log_a(a^x) = x$ для всех $x \in \operatorname{dom}(a^x)$.

Область определения и область значений.

- $\operatorname{dom}(a^x) = \mathbb{R}$, $\operatorname{ran}(a^x) = (0, \infty)$;
- $\operatorname{dom}(\log_a(x)) = (0, \infty)$, $\operatorname{ran}(\log_a(x)) = \mathbb{R}$.

Основные алгебраические формулы. Следующие равенства верны для всех значений переменных x и y, а также параметров a, b, c, при которых обе части равенства имеют смысл:

- $\log_a(1) = 0$;
- $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$, $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$;
- $\log_a(x^b) = b\log_a(x)$;
- $\log_a(x) = \dfrac{\log_c(x)}{\log_c(a)}$.

Последнее равенство означает, что логарифмы с разными основаниями линейно связаны. Это позволяет все рассуждения и вычисления, связанные с логарифмами сводить к рассуждениям о логарифме с каким-либо фиксированным основанием, например о *десятичном* логарифме $\log_{10}(x) = \lg(x)$ или *натуральном* логарифме $\log_e(x) = \ln(x)$.

Упражнение. Докажите формулу $\log_{a^b}(x) = \dfrac{\log_a(x)}{b}$.

Уравнения. Если $a, b > 0$, $a \neq 1$, то

$$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a(b) = \frac{\ln(b)}{\ln(a)}.$$

Если $a > 0$, $a \neq 1$, то

$$\log_a(x) = b \Leftrightarrow x = a^b.$$

Показательная функция в экономике.

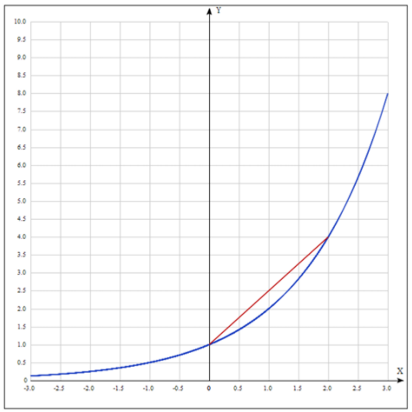
Мальтузианская модель роста:

$$P(t) = P_0 e^{kt},$$

где $P_0 = P(0)$ — исходная численность населения, k – темп прироста населения (“мальтузианский параметр”), t – время.

Функция $f(x) = a^x$ и ее график

$f(x) = a^x$, $a > 1$. Возрастающая, выпуклая (вниз).

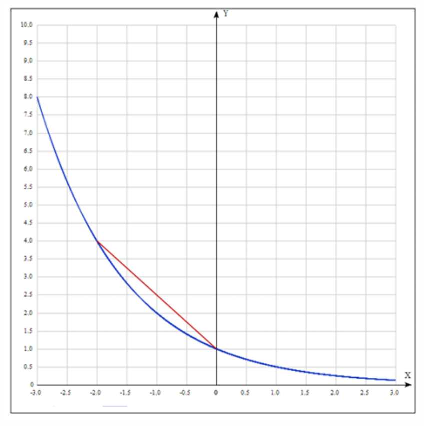


Замечание

График проходит через точку $(0, 1)$. При стремлении x к минус бесконечности, функция стремится к нулю. Ось Ox есть асимптота.

Функция $f(x) = a^x$ и ее график

$f(x) = a^x$, $0 < a < 1$. Убывающая, выпуклая (вниз).

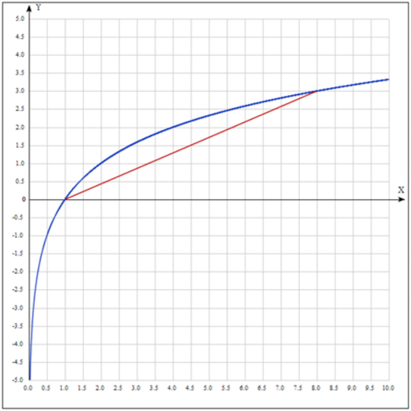


Замечание

График проходит через точку $(0, 1)$. При стремлении x к бесконечности, функция стремится к нулю. Ось Ox есть асимптота. График функции a^x симметричен графику функции $\left(\frac{1}{a}\right)^x$ относительно оси Oy.

Функция $f(x) = \log_a(x)$ и ее график

$f(x) = \log_a(x)$, $a > 1$. Возрастающая, вогнутая (выпуклая вверх).

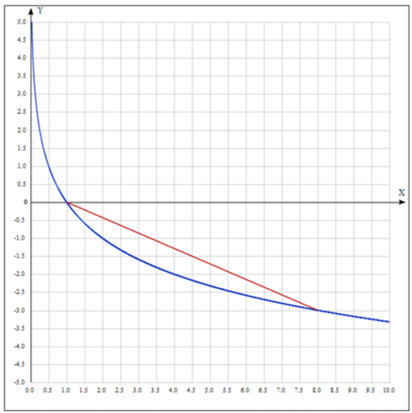


Замечание

График проходит через точку $(1, 0)$. При стремлении x к нулю, функция стремится к минус бесконечности. Ось Oy есть асимптота. График симметричен графику функции $f(x) = a^x$ относительно прямой $y = x$.

Функция $f(x) = \log_a(x)$ и ее график

$f(x) = \log_a(x)$, $0 < a < 1$. Убывающая, выпуклая (вниз).



Замечание

График проходит через точку $(1, 0)$. При стремлении x к нулю, функция стремится к бесконечности. Ось Oy есть асимптота. График симметричен графику функции $f(x) = a^x$ относительно прямой $y = x$ и графику функции $f(x) = \log_{\frac{1}{a}}(x)$ относительно оси Ox.

Сравнение роста показательной, степенной и логарифмической функций

Теорема

Пусть $a > 0$, $b > 1$. Тогда существует такое число x_0, что $b^{x_0} = (x_0)^a$ и с ростом $x > x_0$ разность $b^x - x^a$ будет монотонно увеличиваться и превзойдет любое наперед заданное число $C \in \mathbb{R}$.

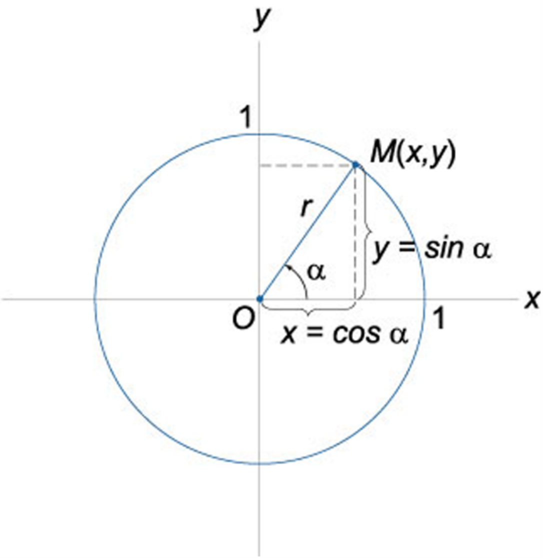
Следствие

Пусть $a > 0$, $b > 1$. Тогда существует такое число x_0, что $\log_b(x_0) = (x_0)^a$ и с ростом $x > x_0$ разность $\log_b(x) - x^a$ будет монотонно убывать и окажется меньше любого наперед заданного числа $C \in \mathbb{R}$.

Рекомендуемые задачи

1. Упростите выражение $\left(\dfrac{9^{\frac{1}{5}}27^{\frac{2}{3}}}{3^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{10}{11}}$.
2. Решите уравнение $64^x \cdot 2^{x^2} = 16^{-2}$.
3. Решите уравнение $25^x - 5^{x+1} + 6 = 0$.
4. Решите уравнение $\log_{\frac{1}{7}}(7 - x) = -2$.
5. Решите уравнение $(x+2)^{\log_2(x+2)} = 4(x+2)$.
6. Решите уравнение $5^{\log_2(x)} + x^{\log_2(5)} = 10$.
7. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^{0,2}y^{-0,7} = 10, \\ x^{-0,8}y^{0,3} = 5. \end{cases}$

Синус и косинус: определение



Основные формулы

Существует огромное количество тригонометрических формул. Чтобы не обременять свою память, уместно помнить только основные из них, а остальные выводить по мере необходимости.

- Основное тригонометрическое тождество:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

- Определения тангенса и котангенса

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

- Периодичность:

$$\begin{aligned} \sin(x + 2k\pi) &= \sin x, & \cos(x + 2k\pi) &= \cos x, \\ \operatorname{tg}(x + k\pi) &= \operatorname{tg} x, & \operatorname{ctg}(x + k\pi) &= \operatorname{ctg} x. \end{aligned}$$

- Четность/нечетность:

$$\sin(-x) = -\sin x, \qquad \cos(-x) = \cos x,$$
$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x, \qquad \operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x.$$

Замечание

Свойство периодичности и четности/нечетности позволяет свести значение любой тригонометрической функции от числа x к значению той же тригонометрической функции от некоторого числа y из отрезка $[0, \pi]$. Например,

$$\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right) = -\sin\left(2\pi - \frac{5\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right).$$

Кроме того, значение функций $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ можно свести к значению той же тригонометрической функции от некоторого числа y из отрезка $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Например,

$$\operatorname{tg}\left(\frac{23\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(5\pi + \frac{3\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\operatorname{tg}\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

- Значения функций $\sin x$ и $\cos x$ тоже можно свести к значению некой тригонометрической функции от некоторого числа y из отрезка $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Для этого нужны еще две тригонометрические формулы:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x, \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x.$$

Теперь можно получить все так называемые "формулы приведения". Например,

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - (-x)\right) = \cos(-x) = \cos x$$

$$\cos(\pi - x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= -\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos x.$$

- Полезно также помнить формулы:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{ctg} x, \qquad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{tg} x.$$

- Некоторые значения

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\mathrm{tg}(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	н/о	0
$\mathrm{ctg}(x)$	н/о	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	н/о

- Синус и косинус суммы

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y;$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$$

Следствия

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y;$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y.$$

Остальные формулы легко выводятся из вышеуказанных.

Кратные углы и понижение степени

- Кратные углы:

$$\sin 2x = \sin(x+x) = \sin x \cos x + \cos x \sin x = 2 \sin x \cos x;$$
$$\cos 2x = \cos(x+x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x =$$
$$= 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x;$$
$$\sin 3x = \sin(2x+x) = \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x =$$
$$= 2 \sin x \cos^2 x + (1 - 2\sin^2 x) \sin x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$$

etc.

- Понижение степени:

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}; \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2};$$
$$\sin^3 x = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4} \quad \text{etc.}$$

Преобразование суммы в произведение, и наоборот

Сложим равенства

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,$$
$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y.$$

Получим равенство

$$\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2\sin x \cos y.$$

Если положить $x - y = a$ и $x + y = b$, получим равенство

$$\sin a + \sin b = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right).$$

Если "развернуть" равенство и перенести двойку справа налево, получим равенство

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y)).$$

Преобразование суммы в произведение, и наоборот

Сложим равенства

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y.$$

Получим равенство

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x \cos y.$$

Если положить $x - y = a$ и $x + y = b$, получим равенство

$$\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right).$$

Если "развернуть" равенство и перенести двойку справа налево, получим равенство

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y)).$$

Преобразование суммы в произведение, и наоборот

Вычтем из первого второе

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y.$$

Получим равенство

$$\cos(x+y) - \cos(x-y) = -2\sin x \sin y.$$

Если положить $x - y = a$ и $x + y = b$, получим равенство

$$\cos a - \cos b = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right).$$

Если “развернуть” равенство и перенести минус двойку справа налево, получим равенство

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y)).$$

Формула вспомогательного угла

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right) =$$
$$\sqrt{a^2+b^2}\,(\cos\varphi\sin x + \sin\varphi\cos x) = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi),$$

где

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Следствие

$$\max_{x\in\mathbb{R}}(a\sin x + b\cos x) = \sqrt{a^2+b^2},$$
$$\min_{x\in\mathbb{R}}(a\sin x + b\cos x) = -\sqrt{a^2+b^2}.$$

В частности,

$$-\sqrt{2} \leqslant \sin x + \cos x \leqslant \sqrt{2}.$$

Обратные тригонометрические функции

Взаимно-обратные функции:

$f(x) = \sin x,\ \operatorname{dom} f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	$f^{-1}(x) = \arcsin x,\ \operatorname{dom} f^{-1} = [-1, 1]$
$f(x) = \cos x,\ \operatorname{dom} f = [0, \pi]$	$f^{-1}(x) = \arccos x,\ \operatorname{dom} f^{-1} = [-1, 1]$
$f(x) = \operatorname{tg} x,\ \operatorname{dom} f = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	$f^{-1}(x) = \operatorname{arctg} x,\ \operatorname{dom} f^{-1} = \mathbb{R}$
$f(x) = \operatorname{ctg} x,\ \operatorname{dom} f = (0, \pi)$	$f^{-1}(x) = \operatorname{arcctg} x,\ \operatorname{dom} f^{-1} = \mathbb{R}$

Замечание

Важно помнить области определения функций из левой колонки (они же области значений функций из правой колонки).

Основные соотношения

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2},$$
$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

Решение уравнений

Уравнение $\sin x = a$.

- Если $|a| > 1$, решений нет (пустое множество);
- если $|a| \leqslant 1$, то множество решений есть

$$\{\arcsin a + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{(\pi - \arcsin a) + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} =$$
$$= \{(-1)^k \arcsin a + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

- Частные случаи:

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x \in \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\};$$
$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\};$$
$$\sin x = -1 \Leftrightarrow x \in \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Решение уравнений

Уравнение $\cos x = a$.

- Если $|a| > 1$, решений нет (пустое множество);
- если $|a| \leqslant 1$, то множество решений есть

$$\{\arccos a + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\arccos a + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} = \\ = \{\pm\arccos a + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

- Частные случаи:

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{\pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\};$$
$$\cos x = 1 \Leftrightarrow x \in \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\};$$
$$\cos x = -1 \Leftrightarrow x \in \{(2k+1)\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Решение уравнений

Уравнение $\operatorname{tg} x = a$.

- Решение существует при любом $a \in \mathbb{R}$.
- Множество решений есть

$$\{\operatorname{arctg} a + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

- Частный случай:

$$\operatorname{tg} x = 0 \Leftrightarrow x \in \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Рекомендуемые задачи

1. Представьте в виде суммы выражений вида $\sin ax$ и/или $\cos ax$ выражения:
   1.1 $\sin 2x \cdot \cos 4x$,
   1.2 $\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x$,
   1.3 $\sin^2 2x \cdot \cos 3x$.
2. Используя представление суммы или разности тригонометрических функций в виде произведения, решите уравнения:
   2.1 $\sin x + \sin 3x = 0$,
   2.2 $\sin x = \cos 2x$.
3. Найдите $\sin x$ и $\cos x$ из условия $3 \sin x + 4 \cos x = 0$.
4. Выразите $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ через $\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right)$. Решите уравнение $2 \cos x + 5 \sin x = 3$, используя найденные выражения.

Математический анализ 1. Лекции 1 – 2.
Приложение 1. Доказательства некоторых утверждений

Основные свойства пределов

1. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ существует, то он единственный.
   Доказательство.Допустим, что последовательность a имеет два различных предела c_1 и c_2. Выберем непересекающиеся окрестности $O_\varepsilon(c_1)$ и $O_\varepsilon(c_2)$ точек c_1 и c_2. Это всегда можно сделать, положив, например $\varepsilon = \dfrac{|c_2 - c_1|}{2}$. Тогда для некоторых номеров N_1 и N_2 выполнено $\{a_n : n \geqslant N_1\} \subseteq O_\varepsilon(c_1)$ и $\{a_n : n \geqslant N_2\} \subseteq O_\varepsilon(c_2)$. Пусть $N_3 = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда

   $$\{a_n : n \geqslant N_3\} \subseteq \{a_n : n \geqslant N_1\} \cap \{a_n : n \geqslant N_2\} \subseteq O_\varepsilon(c_1) \cap O_\varepsilon(c_2) = \varnothing.$$

   Значит, последовательность a не имеет членов с номерами большими или равными N_3, противоречие.
2. Существование и значение $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ не зависит от любого конечного числа членов последовательности a. Это можно выразить следующим образом. Пусть $a_n = b_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$, начиная с некоторого номера N. Тогда пределы $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ существуют и не существуют одновременно и, если эти пределы существуют, то они равны.
   Доказательство. см. определение.

3. Если последовательность сходится (т.е. имеет предел), то она ограничена (сверху и снизу).
Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$. Выберем некоторое фиксированное положительное число ε, например, пусть $\varepsilon = 1$. Тогда по определению существует такое число N, что для всех $n \geqslant N$ выполнено $|a_n - c| < 1$, т.е.
$$c - 1 < a_n < c + 1.$$
Следовательно, для всех $n \in \mathbb{N}$
$$|a_n| \leqslant \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{N-1}|, |c-1|, |c+1|\}.$$
4. Если последовательность b есть подпоследовательность последовательности a и, при этом, существует $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, то существует и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$, причем $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. В частности, если существует $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, то существуют и пределы $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n}$ и т.п., и все они равны $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.
Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$, и ε есть произвольное положительное число. Тогда существует такое число N, что $|a_n - c| < \varepsilon$ для всех $n \geqslant N$. Пусть K есть некоторое натуральное число, для которого $\varphi(K) \geqslant N$ (такое число существует в силу того, что φ строго возрастает). Тогда для всех $n \geqslant K$ выполнено $\varphi(n) \geqslant \varphi(K) \geqslant N$ и, следовательно, $|b_n - c| = |a_{\varphi(n)} - c| < \varepsilon$. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$.

5. Если последовательность a монотонно возрастает (быть может, нестрого) и ограничена сверху, то существует $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, причем $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Если последовательность a монотонно убывает и ограничена снизу, то существует $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, причем $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Доказательство. Обозначим $c = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Пусть ε есть произвольное положительное число. Тогда хотя бы один член a_N последовательности a лежит в интервале $(c-\varepsilon, c)$. Действительно, в противном случае число $c-\varepsilon$ есть верхняя грань множества $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, что противоречит тому, что c есть точная верхняя грань этого множества. Далее, поскольку последовательность возрастает, для каждого $n \geqslant N$ выполнено $a_n \geqslant c-\varepsilon$. С другой стороны, поскольку c есть верхняя грань множества $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, для всех $n \in \mathbb{N}$ выполнено $a_n \leqslant c < c+\varepsilon$. Значит, для всех $n \geqslant N$ выполнено

$$c-\varepsilon < a_n < c+\varepsilon,$$

т.е.

$$|a_n - c| < \varepsilon,$$

что доказывает первую часть утверждения. Вторая часть утверждения доказывается аналогично.