Математический анализ 1. Лекции 1 – 2. Введение. Множества и функции. Числовые множества. Последовательности. Предел последовательности

Э.Л. Хабина

ВШЭ, ФЭН, Москва

2025

Общая информация

- Программа дисциплины: https://www.hse.ru/edu/courses/1048941615

  Формула итоговой оценки:

  $$\text{О}_{\text{итог.}} = 0,1 \cdot \text{О}_{\text{актив.}} + 0,15 \cdot \text{О}_{\text{МКР 1}} + 0,15 \cdot \text{О}_{\text{МКР 2}} + 0,2 \cdot \text{О}_{\text{КР}} + 0,4 \cdot \text{О}_{\text{экз.}}.$$

  Итоговый результат округляется по обычным арифметическим правилам.

  Шкалы перевода баллов в оценки по десятибалльной шкале по каждой форме контроля разные, они подробно описаны в программе учебной дисциплины.
- Лектор: Хабина Элла Львовна

  E-mail: khabina@hse.ru
- Просьба к старостам: выслать тестовое письмо с групповых почтовых адресов на почту лектора
- Полезные внешние ссылки: WolframAlpha https://www.wolframalpha.com

Математический анализ – это классический раздел высшей математики, посвященный исследованию числовых функций одной и нескольких переменных с использованием операции предельного перехода. Математический анализ состоит из двух взаимосвязанных частей: *дифференциального исчисления* и *интегрального исчисления*; в рамках этой дисциплины изучаются пределы, производные, интегралы, бесконечные ряды и др.

Исторически математический анализ оформился на рубеже XVII и XVIII вв., прежде всего, благодаря трудам Исаака Ньютона (1642 – 1727) и Готфрида Вильгельма Лейбница (1646 – 1716), которые (помимо прочего) систематизировали предшествующие достижения в этой области, ввели основные понятия, разработали удобную систему обозначений и нашли впечатляющие приложения к естественным наукам. Как законченная система знаний математический анализ практически полностью сформировался ко второй половине XIX в.

Области применения

- Естественные науки: физика, биология, химия и др.
- Общественные науки: экономика, социология
- Информационные технологии
- Etc.

Множества и отношение принадлежности

Основные математические понятия – это *множество* и *отношение принадлежности*. Множества и отношение принадлежности на универсуме всех множеств обычно считаются неопределяемыми понятиями.

Содержательно, множество X – это произвольная совокупность каких-либо объектов, которые называются его *элементами* (эти элементы *принадлежат* множеству X). Формально, свойства множеств и отношения принадлежности задаются с помощью *аксиом*.

Основной аксиомой теории множеств является *аксиома объемности*:

Множество однозначно определяется своими элементами, иначе говоря, если два множества X *и* Y *имеют одни и те же элементы, то эти множества равны.*

Остальные аксиомы декларируют существование некоторых специальных множеств и допустимость различных операций над множествами.

Основные обозначения

- $\in$ – символ для обозначения отношения принадлежности. Выражение "$x \in X$" означает, что x есть элемент множества X.
- $\varnothing$ – пустое множество: множество не содержащее ни одного элемента.
- $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ – множество, элементы которого это a_1, a_2, $\ldots$, a_n, например, $\{3, 9, 1\}$.
  По аксиоме объемности такое множество единственно.
- $\{x : \varphi(x)\}$ – множество всех элементов, удовлетворяющих условию φ. Например, $\{x : x \neq x\}$.
- $\{x \in X : \varphi(x)\}$ – множество всех элементов множества X, удовлетворяющих условию φ. Например, $\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x + 2 < 0\}$, где $\mathbb{R}$ – множество действительных чисел.
- $\subseteq$ – символ для обозначения отношения включения (не путать с принадлежностью!). $X \subseteq Y$ тогда и только тогда, когда каждый элемент множества X является и элементом множества Y:

$$X \subseteq Y \Leftrightarrow \forall x\,(x \in X \Rightarrow x \in Y).$$

- Логические символы: связки $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\neg$ и кванторы $\forall$, $\exists$.

Свойства отношения включения

- Если $X \subseteq Y$ и $Y \subseteq X$, то $X = Y$ (антисимметричность отношения включения, аксиома объемности!).
- Если $X \subseteq Y$ и $Y \subseteq Z$, то $X \subseteq Z$ (транзитивность отношения включения).
- $X \subseteq X$ (рефлексивность отношения включения).
- $\varnothing \subseteq X$.

Простейшие операции над множествами

- Объединение: $X \cup Y = \{z : z \in X$ или $z \in Y\}$.
- Пересечение: $X \cap Y = \{z : z \in X$ и $z \in Y\}$.
- Разность: $X \setminus Y = \{z : z \in X$ и $z \notin Y\}$.
- Дополнение (относительно фиксированного универсального множества Ω): $\overline{X} = \Omega \setminus X$ (для множеств $X \subseteq \Omega$).
- Симметрическая разность: $X \Delta Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$.

Упорядоченные пары, декартово произведение

Из аксиомы объемности следует, что элементы принадлежат множеству "без учета порядка": $\{1, 2\} = \{2, 1\}$. Но, конечно, можно определить и упорядоченную пару (x, y) элементов x и y. Основное свойство упорядоченных пар:

$$(x, y) = (x', y') \text{ тогда и только тогда, когда } x = x' \text{ и } y = y'.$$

Таким образом, $(1, 2) \neq (2, 1)$.

Декартово произведение (прямое произведение) множеств X и Y – это множество

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X \text{ и } y \in Y\}.$$

Например: $\{1, 2\} \times \{2, 3\} = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3)\}$.

Декартова степень множества X – это множество

$$X^n = \underbrace{X \times X \times \ldots \times X}_{n \text{ раз}}.$$

Его элементы отождествляют с упорядоченными n-ками элементов множества X. Например,

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

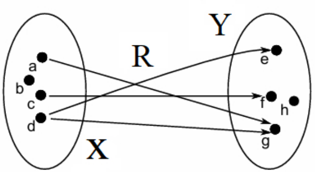
Соответствия и функции

Соответствием из множества X в множество Y называется любое подмножество декартова произведения $X \times Y$. Для наглядности соответствия $R \subseteq X \times Y$ иногда изображают в виде схем, состоящих из изображения множеств X и Y и стрелок, которые соединяют элементы x и y для каждой пары $(x, y) \in R$.

Пример. На следующей картинке изображено соответствие

$$R = \{(a, g), (c, f), (d, e), (d, g)\}$$

из множества $X = \{a, b, c, d\}$ в множество $Y = \{e, f, g, h\}$.



Обратным соответствием к соответствию R из множества X в множество Y называется соответствие

$$R^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X : (x, y) \in R\}.$$

из множества Y в множество X. В нашем примере

$$R^{-1} = \{(g, a), (f, c), (e, d), (g, d)\}.$$

Соответствие f называется *функциональным* или просто **функцией** из множества X в множество Y, если каждому элементу $x \in X$ поставлен в соответствие *ровно один элемент* $y \in Y$, т.е.

1. для каждого $x \in X$ существует такой $y \in Y$, что $(x, y) \in f$;
2. для всех $x \in X$, $y_1, y_2 \in Y$ если $(x, y_1) \in f$ и $(x, y_2) \in f$, то $y_1 = y_2$.

Обозначения:

$$f : X \to Y, \quad y = f(x) \text{ (вместо } (x, y) \in f\text{)}$$

Замечание

Это *классическое* определение функции. При таком определении понятия "функция" и "график функции" тождественны. Иногда функцию определяют как способ получения по каждому $x \in X$ некоторого $y = f(x) \in Y$. Такое определение больше соответствует интуиции, однако понятие *способа* с трудом поддается строгому определению.

Определения. Функция $f : X \to Y$

1. *сюръективна*, если для каждого $y \in Y$ существует $x \in X$ такой, что $f(x) = y$,
2. *инъективна*, если $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ для всех $x_1, x_2 \in X$.
3. *биективна* (взаимно однозначна), если инъективна и сюръективна одновременно.
4. *обратима*, если обратное соответствие f^{-1} функционально.

Теорема

Функция обратима тогда и только тогда, когда она биективна.

Определения. Пусть дана функция $f : X \to Y$. Тогда

1. Область определения: $\operatorname{dom} f = X$. Другие обозначения: $D(f)$, D_f.
2. Образ множества $A \subseteq X$: $f(A) = \{f(a) : a \in A\}$.
3. Область значений: $\operatorname{ran} f = f(X)$. Другие обозначения: $E(f)$, E_f.

Композиция функций

Пусть даны функции $f : X \to Y$ и $g : U \to V$. Тогда $g \circ f$ есть функция из множества $X_0 \subseteq X$ в множество V, которая определяется следующим образом:

1. $X_0 = \operatorname{dom}(g \circ f) = \{x \in X : f(x) \in \operatorname{dom} g\}$,
2. $g \circ f\,(x) = g(f(x))$ для любого $x \in X_0$.

Если речь идет о числовых функциях, то композицию иногда называют "сложной функцией".

Пример. Пусть функция $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ задается формулой $g(x) = \sqrt{x}$, а функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задается формулой $f(x) = 1 - x$. Тогда композиция $g \circ f$ определена на множестве $(-\infty, 1]$ и задается формулой $g \circ f(x) = \sqrt{1 - x}$.

Теорема

Пусть функция $f : X \to Y$ обратима. Тогда

1. *$f^{-1} \circ f$ есть тождественная функция из множества X в множество X, т.е. $f^{-1}(f(x)) = x$ для всех $x \in X$,*
2. *$f \circ f^{-1}$ есть тождественная функция из множества Y в множество Y, т.е. $f(f^{-1}(y)) = y$ для всех $y \in Y$.*

Числовые множества

В курсе математического анализа в основном изучаются *числовые* множества (и заданные на них функции). Под *числовым множеством* понимается произвольное подмножество множества действительных чисел $\mathbb{R}$. Наиболее важные числовые множества это:

- $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел,
- $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел,
- $\mathbb{Q}$ – множество рациональных чисел,
- $\mathbb{R}$ – множество действительных чисел.

Каждое из этих множеств расширяет предыдущее:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ это множество, состоящее из чисел

$$1, 2, 3, \ldots$$

Ноль также иногда считают натуральным числом. Что мы еще знаем о натуральных числах? Мы умеем их складывать, умножать, сравнивать между собой, решать некоторые уравнения.

Достаточна ли такая характеризация множества натуральных чисел?

Нет, поскольку она не дает возможности обосновать, что какое-то свойство выполнено *для всех* натуральных чисел. Как, например, проверить справедливость следующего высказывания:

Для любого натурального числа n число $7^n + 3n - 1$ делится на 9?

Если оно неверно, то, перебирая подряд все натуральные числа, мы найдем контрпример. Но, если оно верно, то для того, чтобы доказать его "методом перебора" нам потребуется бесконечно много времени!

Принцип математической индукции

Пусть:

1. Высказывание $\varphi(n)$ верно для $n = 1$ (*база индукции*).
2. Из того, что высказывание $\varphi(n)$ верно для $n = k$ следует, что оно верно при $n = k + 1$ (*шаг индукции*).

Тогда высказывание $\varphi(n)$ верно при всех $n \in \mathbb{N}$.

Равносильная формулировка

Пусть:

1. Высказывание $\varphi(n)$ верно для $n = n_0$ (*база индукции*).
2. Из того, что высказывание $\varphi(n)$ верно для $n = k \geqslant n_0$ следует, что оно верно при $n = k + 1$ (*шаг индукции*).

Тогда высказывание $\varphi(n)$ верно при всех натуральных чисел $n \geqslant n_0$.

Пример

Утверждение

Для любого натурального числа n и действительного числа $p \geqslant -1$ выполнено неравенство

$$(1+p)^n \geqslant 1+np$$

(неравенство Бернулли).

Пример

Утверждение

Для любого натурального числа n и действительного числа $p \geqslant -1$ выполнено неравенство

$$(1+p)^n \geqslant 1+np$$

(неравенство Бернулли).

База индукции. При $n = 1$ получаем верное числовое неравенство

$$1+p \geqslant 1+p.$$

Пример

Утверждение

Для любого натурального числа n и действительного числа $p \geqslant -1$ выполнено неравенство

$$(1+p)^n \geqslant 1+np$$

(неравенство Бернулли).

База индукции. При $n=1$ получаем верное числовое неравенство

$$1+p \geqslant 1+p.$$

Шаг индукции. Пусть $(1+p)^k \geqslant 1+kp$. Тогда

$$(1+p)^{k+1} = (1+p)^k(1+p) \geqslant (1+kp)(1+p) =$$
$$1+kp+p+kp^2 = 1+(k+1)p+kp^2 \geqslant 1+(k+1)p,$$

так как $kp^2 \geqslant 0$.

Целые и рациональные числа

1. $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$. Для целых a, b уравнение $a + x = b$ имеет единственное решение, т.е. определено вычитание $b - a$.
2. $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\right\}$, $\frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2} \Leftrightarrow p_1 q_2 = p_2 q_1$. Для рациональных a, b уравнение $a + x = b$ имеет единственное решение, т.е. определено вычитание $b - a$, и, если $a \neq 0$, то уравнение $a \cdot x = b$ тоже имеет единственное решение, т.е. определено деление $\frac{b}{a}$.

Потребность в дальнейшем расширении множества рациональных чисел естественным образом возникает из геометрических и физических задач: например, диагональ единичного квадрата и длина единичной окружности не выражаются в рациональных числах.

Действительные числа

С практической точки зрения действительные числа – это бесконечные десятичные дроби.

Множество действительных чисел с операциями сложения и умножения можно определить как *упорядоченное поле*, которое удовлетворяет *принципу супремума* или (что равносильно) *принципу инфимума*.

Что это означает?

Тот факт, что действительные числа являются полем означает, что их можно складывать, умножать, вычитать и делить по обычным законам.

Упорядоченность означает, что на множестве действительных чисел определен линейный порядок $\geqslant$, удовлетворяющий условиям: для всех x, y, z

1. $x \geqslant y \Rightarrow x + z \geqslant y + z$,
2. $x, y \geqslant 0 \Rightarrow xy \geqslant 0$.

Аксиомы линейного порядка

1. если $x \geqslant y$ и $y \geqslant z$, то $x \geqslant z$,
2. если $x \geqslant y$ и $y \geqslant x$, то $x = y$,
3. $x \geqslant y$ или $y \geqslant x$.

$\leqslant$ есть обратное соответствие к $\geqslant$.

Принципы супремума и инфимума

Определения

- Число $C \in \mathbb{R}$ называется верхней гранью множества $X \subseteq \mathbb{R}$, если $x \leqslant C$ для всех $x \in X$.
- Множество $X \subseteq \mathbb{R}$ называется ограниченным сверху, если существует верхняя грань C множества X.
- Число $C \in \mathbb{R}$ называется точной верхней гранью (супремумом) множества $X \subseteq \mathbb{R}$, если C есть верхняя грань множества X и $C \leqslant D$ для всех верхних граней D множества X. Обозначение: $C = \sup X$.
- Число $C \in \mathbb{R}$ называется нижней гранью множества $X \subseteq \mathbb{R}$, если $x \geqslant C$ для всех $x \in X$.
- Множество $X \subseteq \mathbb{R}$ называется ограниченным снизу, если существует нижняя грань C множества X.
- Число $C \in \mathbb{R}$ называется точной нижней гранью (инфимумом) множества $X \subseteq \mathbb{R}$, если C есть нижняя грань множества X и $C \geqslant D$ для всех нижних граней D множества X. Обозначение: $C = \inf X$.

Замечание

Инфимум и супремум множества X (если они есть) не обязательно принадлежат множеству X. Если $\sup X \in X$, то $\sup X$ называется максимальным элементом множества X, а если $\inf X \in X$, то $\inf X$ называется минимальным элементом множества X

Принцип супремума

Для каждого ограниченного сверху множества $X \subset \mathbb{R}$ существует точная верхняя грань (супремум) $\sup X \in \mathbb{R}$.

Принцип инфимума

Для каждого ограниченного снизу множества $X \subset \mathbb{R}$ существует точная нижняя грань (инфимум) $\inf X \in \mathbb{R}$.

Принципы супремума и инфимума, в частности, гарантируют возможность извлекать квадратные корни, а также определять различные более сложные операции, например, возведение положительного числа в произвольную действительную степень. Например,

$$\sqrt{2} = \sup\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\} = \inf\{x \in \mathbb{Q} : x^2 > 2\}.$$

$$2^\pi = \sup\{2^q : q \in \mathbb{Q}, q < \pi\} = \inf\{2^q : q \in \mathbb{Q}, q > \pi\}.$$

Числовые последовательности

Последовательности – это функции $a : \mathbb{N} \to X$.
Последовательности $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ называются числовыми. Аргумент n такой функции a, как правило, записывается в виде нижнего индекса: a_n вместо $a(n)$.
Здесь символ a_n означает n-ый член последовательности a, т.е. значение функции $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ в точке n.
Последовательность можно обозначить просто a. Иногда она записывается (a_n) или, для наглядности, $a_1, a_2, \ldots$.
Можно встретить и обозначение $\{a_n\}$.

Примеры

- последовательность $1, 2, 3, \ldots$, $a_n = n$,
- последовательность $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$, $a_n = \frac{1}{n}$,
- последовательность $1, 1, 1, \ldots$, $a_n = 1$.

Замечание

Иногда для удобства последовательности “начинают” не с a_1, а с a_0 или с a_{n_0} для некоторого целого числа n_0.

Типы последовательностей

Последовательность a называется:

- (строго) возрастающей, если $a_n < a_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$.
  Последовательность a возрастающая $\Leftrightarrow n < m \Rightarrow a_n < a_m$.
  Примеры. $a_n = n$, $b_n = 1 - \dfrac{1}{n}$.
- неубывающей, если $a_n \leqslant a_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$.
  Последовательность a неубывающая $\Leftrightarrow n < m \Rightarrow a_n \leqslant a_m$.
  Пример. $a_n = \left[\dfrac{n}{2}\right]$.
- (строго) убывающей, если $a_n > a_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$.
  Последовательность a убывающая $\Leftrightarrow n < m \Rightarrow a_n > a_m$.
  Примеры. $a_n = -n$, $b_n = \dfrac{1}{n}$.
- невозрастающей, если $a_n \geqslant a_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$.
  Последовательность a невозрастающая $\Leftrightarrow n < m \Rightarrow a_n \geqslant a_m$.
  Пример. $a_n = -\left[\dfrac{n}{2}\right]$.

Замечание

Символом $[\,x]$ обозначается целая часть числа x – наибольшее целое число, не превосходящее x. Например, $[\,2,7] = 2$, $[\,2] = 2$, $[\,-2,7] = -3$.

Последовательность a называется:

- ограниченной сверху (снизу), если множество

$$\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

ограничено сверху (снизу).

Примеры. Последовательность $a_n = \frac{1}{n}$ ограничена сверху и снизу, последовательность $a_n = n$ только снизу, последовательность $a_n = (-1)^n \cdot n$ ни снизу, ни сверху.

Последовательность a называется:

- бесконечно большой, если для любого числа $C \in \mathbb{R}$ выполнено

$$|a_n| > C,$$

начиная с некоторого номера N (т.е. для всех номеров $n \geqslant N$).

- бесконечно малой, если для любого числа $\varepsilon > 0$ выполнено

$$|a_n| < \varepsilon,$$

начиная с некоторого номера N (т.е. для всех номеров $n \geqslant N$).

Предел последовательности

Окрестность точки $x \in \mathbb{R}$ – любой открытый интервал (a, b), содержащий точку x. Эпсилон-окрестность точки x: $O_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$.

Определение

Пределом последовательности (a_n) называется число c такое, что

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists N \in \mathbb{N})\,(\forall n \geqslant N)\,|a_n - c| < \varepsilon.$$

Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$.

Это определение равносильно:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = c \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)\,(\exists N \in \mathbb{N})\,\{a_n : n \geqslant N\} \subseteq O_\varepsilon(c)$$

(в каждой окрестности числа c целиком лежит некоторый «хвост» последовательности a, где под «хвостом» последовательности a понимается множество всех ее членов, начиная с некоторого N).

Пример. Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. Пусть ε есть произвольное положительное число. Положим $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$. Тогда если $n \geqslant N$, то $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$, а значит, $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$.

Основные свойства пределов

1. **Единственность предела.** Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ существует, то он единственный.
2. **Независимость предела от конечного числа членов последовательности.** Существование и значение $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ не зависит от любого конечного числа членов последовательности a. Это можно выразить следующим образом.
   Пусть $a_n = b_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$, начиная с некоторого номера N. Тогда пределы $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ существуют и не существуют одновременно и, если эти пределы существуют, то они равны.
3. **Ограниченность сходящейся последовательности.** Если последовательность сходится (т.е. имеет предел), то она ограничена (сверху и снизу).

4. **Равенство пределов последовательности и ее подпоследовательности.** Подпоследовательностью последовательности $a = a_1, a_2, \ldots$ называется любая последовательность $b = a_{\varphi(1)}, a_{\varphi(2)}, \ldots$, где φ есть строго возрастающая функция из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$, т.е. такая последовательность b, что $b_n = a_{\varphi(n)}$.

   Пример. $b_n = n^2$ есть подпоследовательность последовательности $a_n = n$.

   Если последовательность b есть подпоследовательность последовательности a и, при этом, существует $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, то существует и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$, причем $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. В частности, если существует $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, то существуют и пределы $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n}$ и т.п., и все они равны $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

   Пример. $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$ не существует **(упражнение)**.

5. **Существование пределов монотонных ограниченных последовательностей.** Если последовательность a монотонно возрастает (быть может, нестрого) и ограничена сверху, то существует $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, причем $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Если последовательность a монотонно убывает и ограничена снизу, то существует $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, причем $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!