Vendredi le 06 octobre 2017 Durée : 8h30-9h20

GEL-3003 – Signaux et systèmes discrets : Examen 1 (10% de la note finale)

Signature : ______________________________

Répondez sur le questionnaire.

Question 1

La réponse à l'impulsion d'un système linéaire et invariant est $h(n) = \{-1, 2, -1\}, -1 \leq n \leq 1$.
Le signal à l'entrée du système est $x(n) = \{2, 2, 2, 10, 2, 2\},\ -1 \leq n \leq 4$.

Calculez les sorties $y_1(n)$ et $y_2(n)$ aux entrées $x_1(n) = \{2, 2, 2\},\ -1 \leq n \leq 1$, et $x_2(n) = \{10, 2, 2\}$, $2 \leq n \leq 4$.

Calculez $y(n)$, la sortie à l'entrée $x(n)$, uniquement en utilisant les signaux $y_1(n)$ et $y_2(n)$.

$$y_1(n) = \{-2, 2, 0, 2, -2\}, \quad -2 \leq n \leq 2$$

$$y_2(n) = \{-10, 18, -8, 2, -2\}, \quad 1 \leq n \leq 5$$

$$y(n) = y_1(n) + y_2(n) = \{-2, 2, 0, -8, 16, -8, 2, -2\}, \quad -2 \leq n \leq 5$$

Question 2

a) Donnez la définition d'un système causal. Donnez un exemple d'un système causal, et un exemple d'un système non-causal.

b) Peut-on déterminer si un système linéaire et invariant est **stable** à partir de sa réponse à l'impulsion ? Si oui, expliquez comment.

c) Soit le signal $h(n) = \{1, 2, 3, 4, 5\}, -2 \leq n \leq 2$. Donnez sa transformée en *z*, soit $H(z)$ + la ROC. Peut-on déterminer si le signal $h(n)$ est **causal** à partir de cette transformée en *z* ? Si oui, expliquez comment.

a) $y(n_0) = \text{fct}\,\{x(n),\ n \leq n_0\}$

Les deux exemples de système doivent être corrects et conséquents avec la définition donnée.

b) Oui, il faut que $h(n)$ soit absolument sommable, i.e.,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| < \infty$$

c) $H(z) = z^2 + 2z + 3 + 4z^{-1} + 5z^{-2}$

Comme $h(n)$ est un signal de durée finie, la ROC est tout le plan z sauf possiblement 0 et ∞. Ici, les termes z^2, z font que $\infty \notin$ ROC, et les termes z^{-1}, z^{-2} font que $0 \notin$ ROC.

ROC : $0 < |z| < \infty$

Par la forme de $H(z)$ que j'ai donné ci-haut, on voit que le système n'est pas causal à cause des termes en "z" avec puissance positive (i.e., z^2 et $2z$), et qui font que $\infty \notin$ ROC.

Question 3

Le signal $x(t) = 2\cos(2\pi f_0 t) + 3\cos(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_2 t)$, $f_0 = 100\ Hz, f_1 = 150\ Hz,\ f_2 = 750\ Hz$, est échantillonné à la fréquence $f_s = 600\ Hz$ pour obtenir le signal discret $x(n)$.
Ce signal $x(n)$ est à l'entrée d'un système linéaire et invariant dont la fonction de transfert est $H(z) = z^2 - z + 1$.

a) Calculez $x(n)$
b) Donnez les zéros et les pôles de $H(z)$ en format polaire
c) Calculez la sortie du système.

a) $w_0 = 2\pi f_0/f_s = \pi/3$; $w_1 = 2\pi f_1/f_s = \pi/2$; $w_2 = \frac{2\pi f_2}{f_s} = \frac{5\pi}{2}$

Parce que la TF de signaux échantillonnés est périodique, la fréquence $5\pi/2$ est la même que $w_1 = \pi/2$ $\left(\cos(w_2 n) = \cos(w_1 n)\right)$

$x(n) = 2\cos(\pi/3\, n) + 4\cos(\pi/2\, n)$

b) $H(z) = z^2 - z + 1 = (z - z_1)(z - z_1^*)$ où $z_1 = e^{j\pi/3}$

Il n'y a pas de pôles.

c) $y(n) = |H(e^{j\pi/3})| \times 2 \times \cos(\pi/3\, n + \arg H(e^{j\pi/3}))$
$+ |H(e^{j\pi/2})| \times 4 \times \cos(\pi/2\, n + \arg H(e^{j\pi/2}))$

$H(e^{j\pi/3}) = 0$; $H(e^{j\pi/2}) = 1\angle{-\pi/2} = -j$

$y(n) = 4\cos\left(\frac{\pi}{2}n - \frac{\pi}{2}\right) = 4\cos\left(\frac{\pi}{2}(n-1)\right)$