Université Laval
Professeur: Leslie A. Rusch

Département de Génie Électrique
et de Génie Informatique

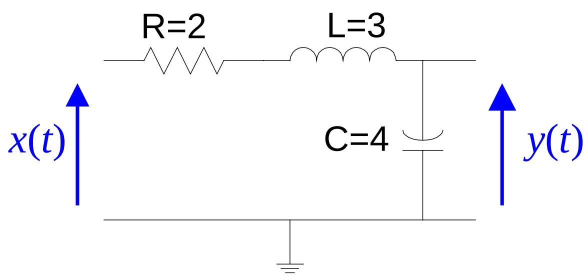
GEL19962: Analyse des signaux
1999 Examen Final

Mercredi le 15 décembre 1999; Durée: 13h30 à 15h20
Une feuille documentation permise; aucune calculatrice permise

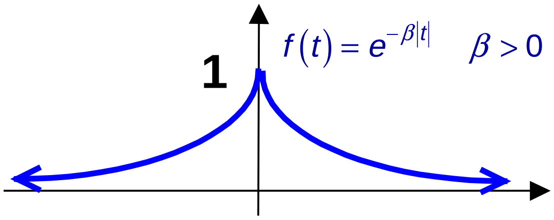
---

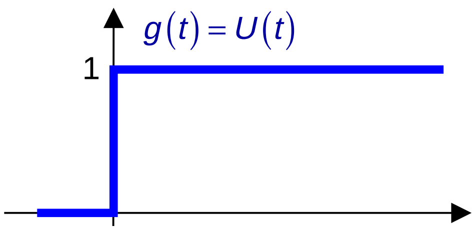
Problème 1 (9 points sur 45)

Trouvez la réponse impulsionnelle du circuit suivant.



Problème 2 (8 points sur 45)

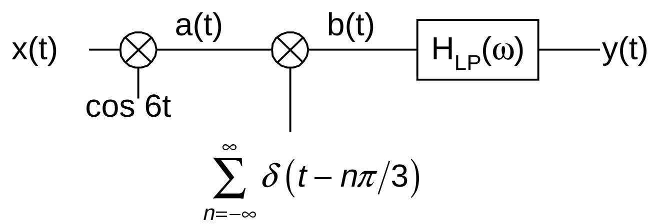


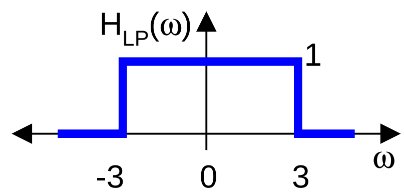


Trouvez la convolution $f(t) * g(t)$.

GEL19962: Analyse des signaux
1999 Examen Final

Problème 3 (12 points sur 45)





L'entrée est $x(t) = \frac{1}{\pi} Sa(t)$

Trouvez

(2 pts) a) $X(\omega)$ = transformée de Fourier de $x(t)$

(2 pts) b) $A(\omega)$ = transformée de Fourier de $a(t)$

(4 pts) c) $B(\omega)$ = transformée de Fourier de $b(t)$

(4 pts) d) $Y(\omega)$ = transformée de Fourier de $y(t)$ et
$y(t)$ comme une fonction de $x(t)$

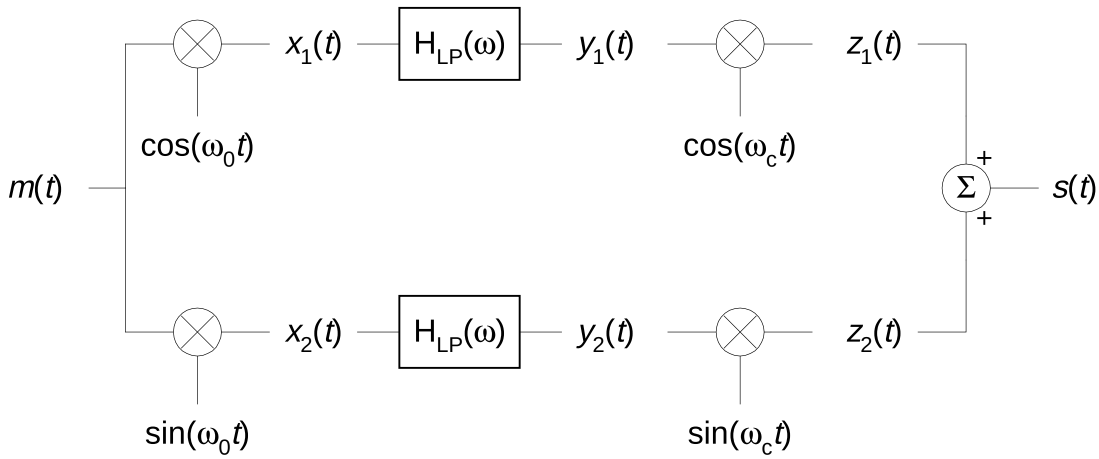
Si vous utilisez des graphiques pour identifier les transformées, faites attention d'indiquer tous les paramètres importants (poids, hauteur, position, etc.).

GEL19962: Analyse des signaux

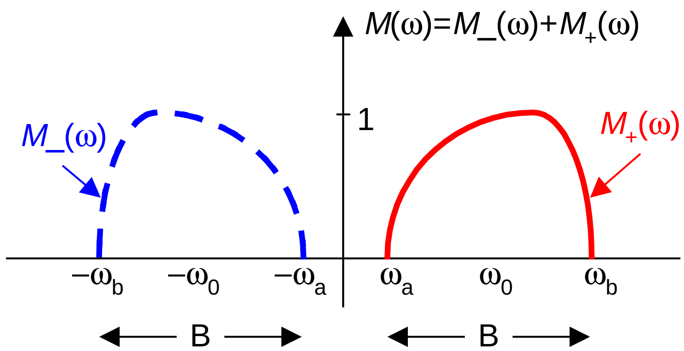
1999 Examen Final

Problème 4 (16 points sur 45)

Pour le système suivant



où $\omega_0 = \dfrac{\omega_a + \omega_b}{2}$, $\omega_a = \omega_0 - \dfrac{B}{2}$, $\omega_b = \omega_0 + \dfrac{B}{2}$ et



et

$$H_{LP}(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < B/2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} = \text{Rect}\left(\frac{\omega}{B}\right) \qquad \text{et} \qquad \omega_c >> B$$

et $\omega_c >> \omega_0$

GEL19962: Analyse des signaux
1999 Examen Final

Trouvez

(4 pts) a) $X_1(\omega)$ = transformée de Fourier de $x_1(t)$ et
$X_2(\omega)$ = transformée de Fourier de $x_2(t)$

(4 pts) b) $Y_1(\omega)$ = transformée de Fourier de $y_1(t)$ et
$Y_2(\omega)$ = transformée de Fourier de $y_2(t)$

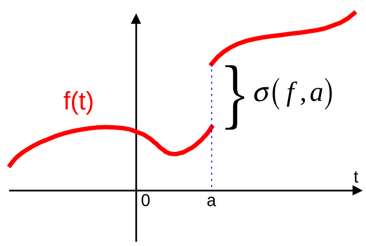
(4 pts) c) $Z_1(\omega)$ = transformée de Fourier de $z_1(t)$ et
$Z_2(\omega)$ = transformée de Fourier de $z_2(t)$

(4 pts) d) $S(\omega)$ = transformée de Fourier de $s(t)$

Si vous utilisez des graphiques pour identifier les transformées, faites attention d'indiquer tous les paramètres importants (poids, hauteur, position, etc.).

GEL19962: Analyse des signaux
1999 Examen Final

Dérivée d'une fonction discontinue



$$(D_f)' = D_{f'} + \sigma(f,a)\delta_a$$

Manipulation sur la fonction delta

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$$

et $f(t)\delta(t-a) = f(a)\delta(t-a)$

$$f(t) * \delta(t) = f(t)$$

et $f(t) * \delta(t-a) = f(t-a)$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-jn\tau\omega} = \frac{2\pi}{\tau} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi n}{\tau}\right)$$

Séries de Fourier

$F_{série}(n) = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f_p(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$ et $\quad f_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_{série}(n) e^{jn\omega_0 t}$

Théorème de Parseval : $\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} |f_p(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |F_{série}(n)|^2$

Calcul des coefficients de Fourier d'une fonction périodique

Soit $f_r(t)$ la restriction de la fonction $f_p(t)$ sur $[-T_0/2, T_0/2]$ et

$f_r(t) \Leftrightarrow F_r(\omega)$. Nous aurons: $F_{Série}(n) = \frac{F_r(n\omega_0)}{T_0}$

Transformée de Fourier

$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad$ et $\quad f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$

Théorème de Parseval : $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$

Produit de convolution

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) g(t-u) du = \int_{-\infty}^{\infty} g(u) f(t-u) du$$

GEL19962: Analyse des signaux
1999 Examen Final

Fonction	Transformée de Fourier	Fonction	Transformée de Fourier
$f(t)$	$F(\omega)$	$\delta(t)$	1
$F(t)$	$2\pi f(-\omega)$	1	$2\pi\delta(\omega)$
$f(t+a)$	$e^{ja\omega}F(\omega)$	$\delta_{T_0}(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT_0)$	$\omega_0\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-n\omega_0)$
$f(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$	$\mathrm{U}(t)$	$\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$
$e^{jbt}f(t)$	$F(\omega-b)$	$\mathrm{Sgn}(t)$	$\frac{2}{j\omega}$
$t^n f(t)$	$(j)^n\frac{d^n}{d\omega^n}F(\omega)$	$\mathrm{Rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)$ †	$\tau\,\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$
$\frac{d^n}{dt^n}f(t)$	$(j\omega)^n F(\omega)$	$\mathrm{Tri}\left(\frac{t}{\tau}\right)$ ‡	$\tau^2\,\mathrm{Sa}^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$
$f(t)\times g(t)$	$\frac{1}{2\pi}F(\omega)*G(\omega)$	$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\,\delta(\omega-\omega_0)$
$f(t)*g(t)$	$F(\omega)\times G(\omega)$	$\cos(\omega_0 t)$	$\pi\left[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right]$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\omega_0 t}$	$2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\delta(\omega-n\omega_0)$	$\sin(\omega_0 t)$	$\frac{\pi}{j}\left[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)\right]$
$e^{-\beta t}\mathrm{U}(t)$	$\frac{1}{\beta+j\omega}$	$\mathrm{Sa}(tB)$	$\frac{\pi}{B}\mathrm{Rect}\left(\frac{\omega}{2B}\right)$
$e^{-\beta\lvert t\rvert}$	$\frac{2\beta}{\beta^2+\omega^2}$	$\mathrm{Sa}^2(tB)$	$\frac{\pi}{2B^2}\mathrm{Tri}\left(\frac{\omega}{2B}\right)$

† $\mathrm{Rect}\left(\frac{t-t_0}{\tau}\right)$ est un rectangle de hauteur un, centré sur $t=t_0$, et de longueur τ.

‡ $\mathrm{Tri}\left(\frac{t-t_0}{\tau}\right)$ est un triangle de hauteur τ centré sur $t=t_0$, avec un base de longueur 2τ.