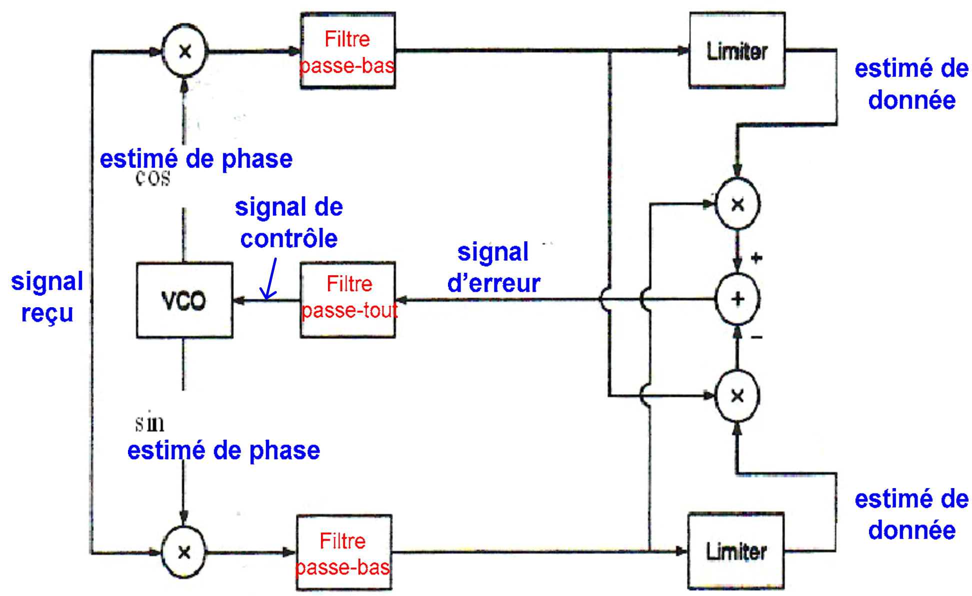
2004 Examen final – *Solutionnaire*

Problème 1



Pour la rampe comme entrée nous avons

$$\Theta(\omega) = \frac{\Delta\omega}{(j\omega)^2}$$

L'erreur est

$$E(\omega) = \frac{\Delta\omega}{(j\omega)^2 + j\omega K_0 F(\omega)}$$

donc l'erreur asymptotique est

$$\lim_{j\omega\to 0} j\omega E(\omega) = \lim_{j\omega\to 0} \frac{\Delta\omega}{j\omega + K_0 F(\omega)} = \lim_{j\omega\to 0} \frac{\Delta\omega}{j\omega + K_0 \dfrac{N(\omega)}{D(\omega)}}$$

$$= \lim_{j\omega\to 0} \frac{\Delta\omega D(\omega)}{j\omega D(\omega) + K_0 N(\omega)}$$

$$= \frac{\Delta\omega D(0)}{K_0 N(0)} \text{ pour PLL d'ordre} > 1$$

Pour une erreur asymptotique nulle nous avons besoin d'un PLL d'ordre supérieur à 1 et un filtre de boucle avec $D(0) = 0$.

Problème 2

La première colonne de la « parity array » est déterminée par la première équation. Pour les codes que nous avons vu en classe, la matrice génératrice et la matrice de contrôle sont

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{I}_{4\times 4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Le code est systématique. Nous savons que le code est un code Hamming parce que pour n=7 et k=4 nous respectons la relation $(n,k) = (2^m - 1, 2^m - 1 - m)$. Les codes de Hamming peuvent corriger une erreur. Pour déterminer les syndromes nous avons besoin de la matrice de control. La matrice de control nous trouvons à partir de G:

$$\mathrm{H}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Nous cherchons les 7 syndromes (un pour l'erreur dans chaque des sept positions de vecteur reçu, soit 7 vecteurs d'erreur). Confirmons les syndromes dans la simulation :

$$e\mathrm{H}^T = \begin{bmatrix} 0\,0\,0\,0\,0\,0\,1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

erreur	syndrome
0 0 0 0 0 0 0	0 0 0
0 0 0 0 0 0 1	1 1 1
0 0 0 0 0 1 0	0 1 1
0 0 0 0 1 0 0	1 0 1
0 0 0 1 0 0 0	1 1 0
0 0 1 0 0 0 0	0 0 1
0 1 0 0 0 0 0	0 1 0
1 0 0 0 0 0 0	1 0 0

Le syndrome de $\begin{bmatrix} 0\,1\,0\,0\,0\,1\,1 \end{bmatrix}$ est

$$eH^T = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow$$

erreur	syndrome
0 0 0 0 0 0 0	0 0 0
0 0 0 0 0 0 1	1 1 1
0 0 0 0 0 1 0	0 1 1
0 0 0 0 1 0 0	1 0 1
0 0 0 1 0 0 0	1 1 0
0 0 1 0 0 0 0	0 0 1
0 1 0 0 0 0 0	0 1 0
1 0 0 0 0 0 0	1 0 0

Nous voyons que l'erreur est dans le quatrième bit, donc le mot de code corriger est $\begin{bmatrix}0\,1\,0\,1\,0\,1\,1\end{bmatrix}$. Le code est systématique, donc nous lisons les quatre bits de message directement, soit $[1011]$. Nous confirmons

$$\mathbf{u} = \mathbf{mG} = [1011]\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = [0101011]$$

Problème 3

Le rapport signal à bruit plus interférence est:

$$SNIR = \frac{E}{N+I} = \frac{E}{\frac{(K-1)E_I}{G}+N}$$

Ici l'energie par interfèrent E_I est le double de l'énergie de l'usager désiré, E. Donc,

$$SNIR = \frac{E}{\frac{(K-1)2E}{G}+N} = \frac{1}{\frac{(K-1)2}{G}+\frac{N}{E}} = \frac{1}{\frac{(K-1)2}{G}+\frac{1}{SNR}}$$

La probabilité d'erreur pour BPSK sans interférence est :

$$Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{2\cdot SNR}\right)$$

Ici, il y a aussi l'interférence, donc, nous utilisons $Q\left(\sqrt{2\cdot SNIR}\right)$. Avec le rapport SNIR, nous calculons comme :

$$\frac{1}{\mathrm{SNIR}} = \frac{1}{\mathrm{SNR}} + 2\frac{K-1}{G}$$

$$K = 1+\frac{G}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{SNIR}}-\frac{1}{\mathrm{SNR}}\right)$$

L'exigence de $P_c < 10^{-3}$ correspond à :

$$\mathrm{SNIR} \geq \frac{(3.1)^2}{2} = 4.8$$

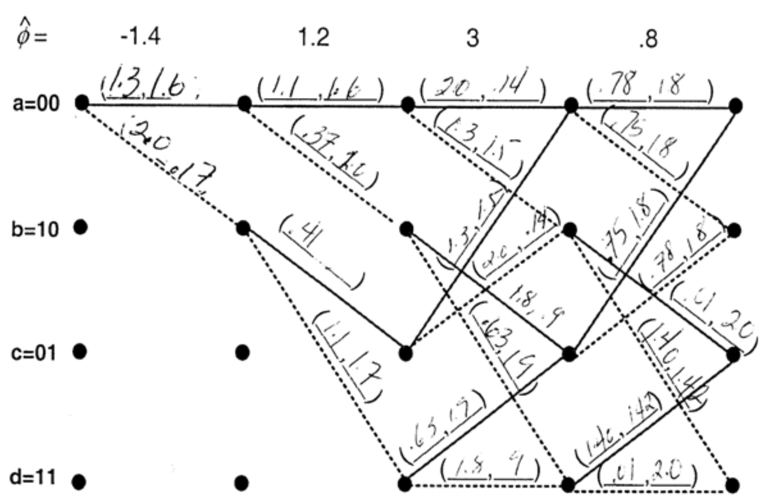
Pour $\mathrm{SNR} = 15dB = 31.6$, nous avons,

$$\begin{aligned} K &= 1+\frac{127}{2}\left(\frac{1}{4.8}-\frac{1}{31.6}\right) \\ &= 12.2 \end{aligned}$$

Donc, le système peut supporter 12 usagers simultanés.

Problème 4

Partie A – calculer les distances locales



Exemple:

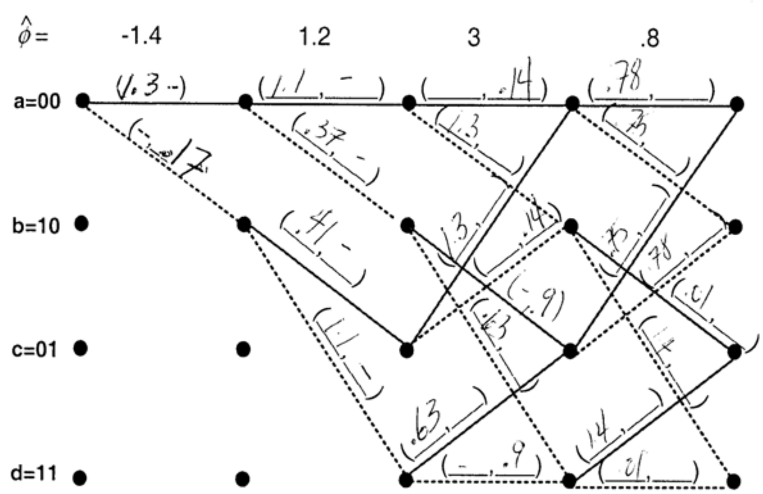
$2\sin\left|\frac{0+1.4}{2}\right| = 1.3$

$2\sin\left|\frac{\pi+1.4}{2}\right| = 1.6$

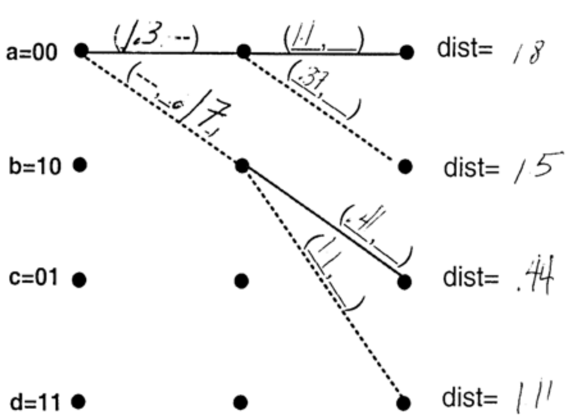
$2\sin\left|\frac{\pi/2+1.4}{2}\right| = .20$

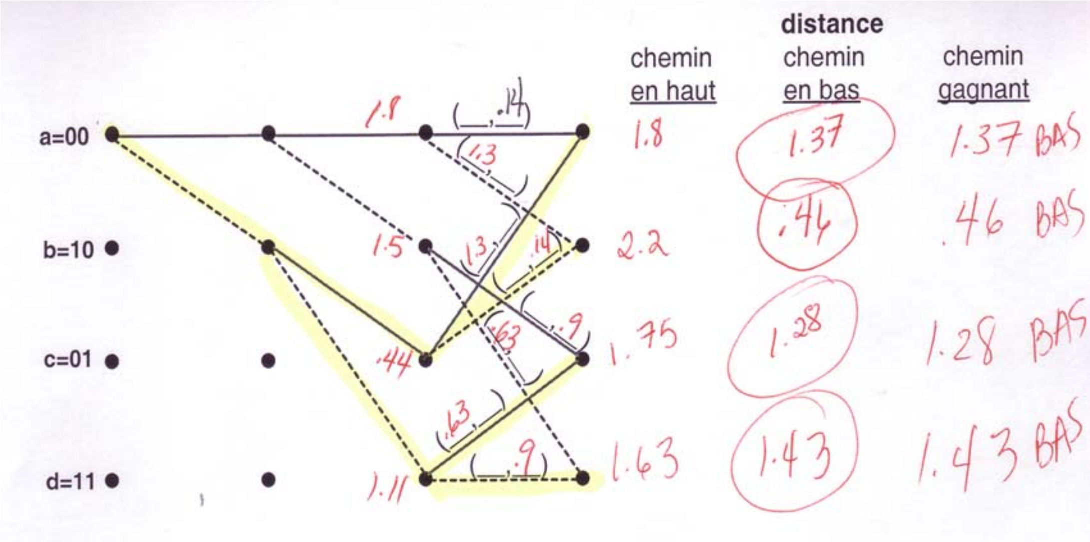
$2\sin\left|\frac{-\pi/2+1.4}{2}\right| = .17$

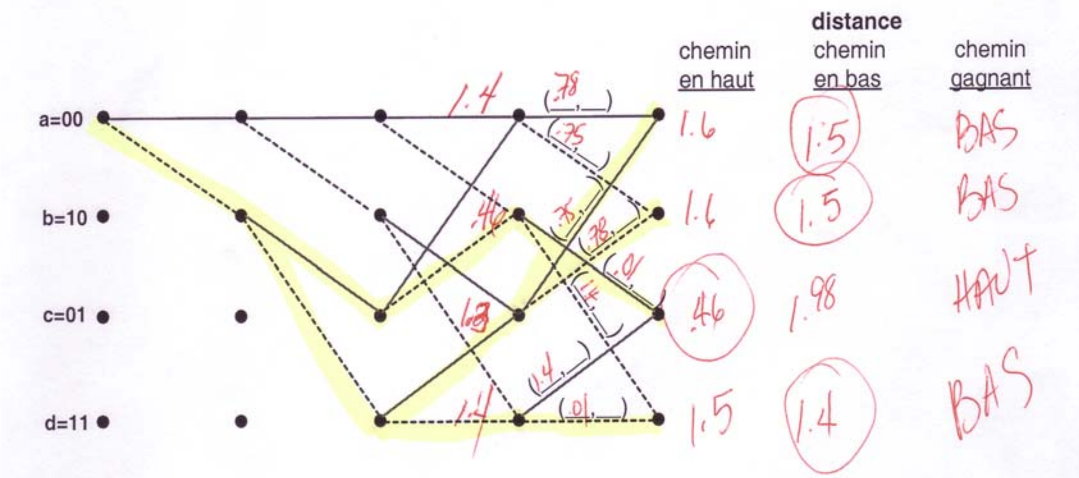
Partie B – éliminer les distances locales plus grandes



Partie C – calculer les distances globales







Partie D – indiquer le chemin le plus probable (gagnant)