Problème 1 (20 points sur 100)

A. (10 points) Quelle est la transformée de Fourier de la fonction $f(t)=\frac{1}{1+t^2}$.

B. (5 points) Quelle est l'énergie entre $-1<\omega<1$ pour la fonction $f(t)=\frac{1}{1+t^2}$.

C. (5 points) Quelle est l'énergie à DC pour la fonction $f(t)=\frac{1}{1+t^2}$.

$e^{-\beta\|t\|}$	$\frac{2\beta}{\beta^2+\omega^2}$

Prenons $\beta = 1$

$$e^{-|t|} \Leftrightarrow \frac{2}{1+\omega^2}$$

en appliquant la dualité

$F(t)$	$2\pi f(-\omega)$

nous avons

$$\frac{2}{1+t^2} \Leftrightarrow 2\pi e^{-|-\omega|} = 2\pi e^{-|\omega|}$$

$$\frac{1}{1+t^2} \Leftrightarrow \pi e^{-|\omega|}$$

B. $$E(\omega) = \frac{|F(\omega)|^2}{2\pi} = \frac{|\pi e^{-|\omega|}|^2}{2\pi} = \frac{\pi^2}{2\pi} e^{-2|\omega|} = \frac{\pi}{2} e^{-2|\omega|}$$

$$E(-1<\omega<1) = \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1} e^{-2|\omega|} d\omega = \pi \int_0^1 e^{-2\omega} d\omega$$

$$= \pi \frac{e^{-2w}}{-2} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} \left[e^0 - e^{-2} \right] = \frac{\pi}{2} \left[1 - e^{-2} \right]$$

$$= \frac{\pi}{2} \times .86 = 1.35$$

C. $F(0) = \pi e^{-|0|} = \pi$

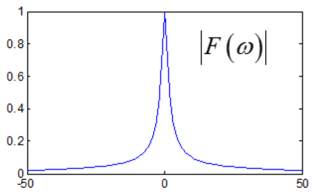
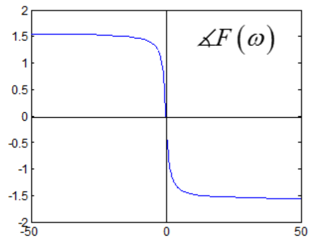
$$E(0) = \frac{1}{2\pi} \left| F(0) \right|^2 = \frac{1}{2\pi} \cdot \pi^2 = \pi/2$$

2015 Examen1 Pr2

November-01-15 5:36 PM

Problème 2 (20 points sur 100)

Voici le spectre d'amplitude, le spectre de phase de $f(t)=e^{-t}U(t)$,

spectre d'amplitude	spectre de la phase
	

A. (10 points) Trouvez la transformée de Fourier de $\cos(25t)f(t)$.

B. (10 points) Tracez le spectre d'amplitude et le spectre de phase de $\cos(25t)f(t)$.

A. Avec l'équation d Euler, nous avons

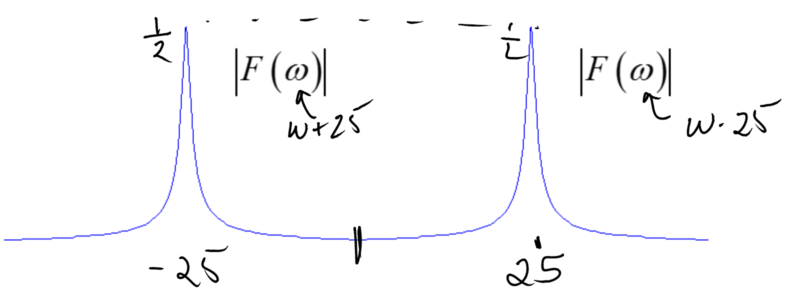
$$\cos x = \frac{e^{jx}+e^{-jx}}{2}$$ donc $\cos 25t\, e^{-t}U(t) = \frac{1}{2}e^{j25t}e^{-t}U(t) + \frac{1}{2}e^{-j25t}e^{-t}U(t)$

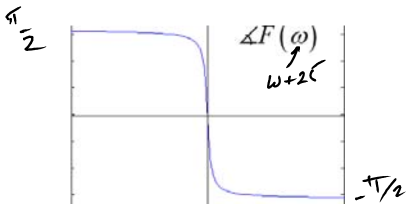
La propriété de décalage fréquentiel donne

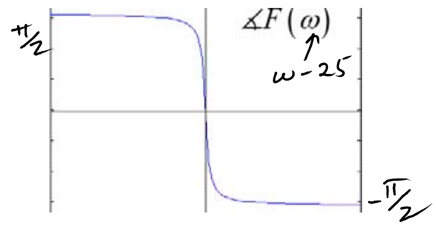
$e^{jbt}f(t)$	$F(\omega-b)$

$$\cos 25t\, e^{-t}U(t) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\frac{1}{1+j(\omega-25)} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+j(\omega+25)}$$

B. Le spectre d'amplitude a deux copies du spectre original – une copie à droite (moitié d'hauteur) et une copie à gauche (moitié d'hauteur). Les copies sont centrées à $\pm 25 = \omega$.







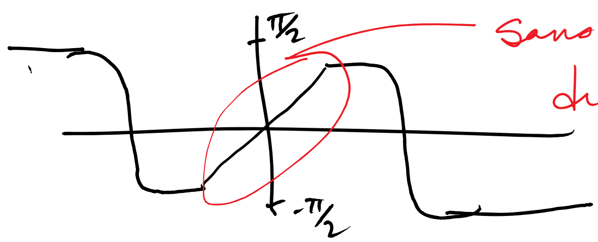
Pour $\omega < 0$, le spectre est dominé par

$$\frac{1}{1+j(\omega+25)} \gg \frac{1}{1+j(\omega-25)} \Rightarrow \theta \sim \measuredangle F(\omega+25)$$

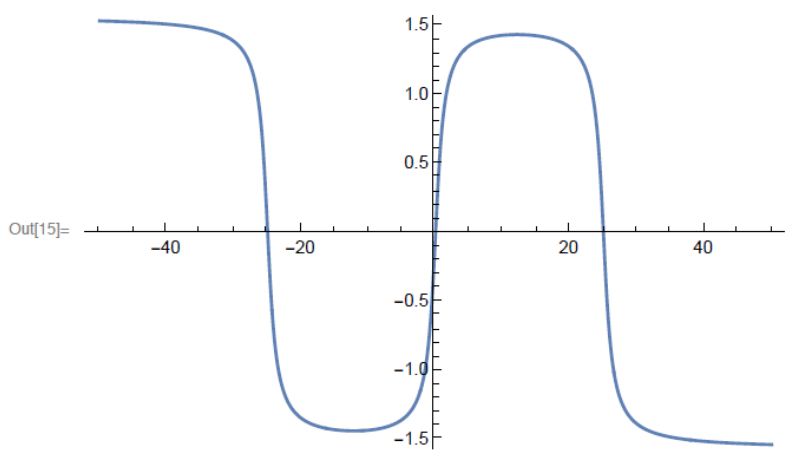
Pour $\omega > 0$ le spectre est dominé par

$$\frac{1}{1+j(\omega-25)} \gg \frac{1}{1+j(\omega+25)} \Rightarrow \theta \sim \measuredangle F(\omega-25)$$

pour $\omega \approx 0$ les deux contributions sont egale



Sans Matlab, difficile à tracer




```
func[ω_] := 1 / 2 (1 / (1 + I (ω - 25)) + 1 / (1 + I (ω + 25)) )
Plot[{Arg[func[ω]]}, {ω, -50, 50}, PlotRange → {-Pi / 2, Pi / 2}]
```

Problème 3 (30 points sur 100)

En sachant que $\omega_0 T_0 = 2\pi$

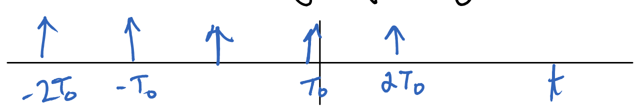
A. (10 points) Trouvez la transformée de Fourier de la fonction $f(t) = \cos(\omega_0 t)\delta_{T_0}(t)$.

B. (20 points) Trouvez la transformée de Fourier de la fonction $g(t) = \cos(\omega_0 t)\delta_{T_0}(t - T_0/8)$.

	$x = -\pi/4$	$x = 0$	$x = \pi/4$	$x = \pi/2$	$x = 3\pi/4$	$x = \pi$	$x = 5\pi/4$	$x = 3\pi/2$
$\cos x$	$1/\sqrt{2}$	1	$1/\sqrt{2}$	0	$-1/\sqrt{2}$	-1	$-1/\sqrt{2}$	0

Considerons le produit $\cos \omega_0 t \cdot \delta_{T_0}(t)$

Voici le graphique de $\delta_{T_0}(t)$



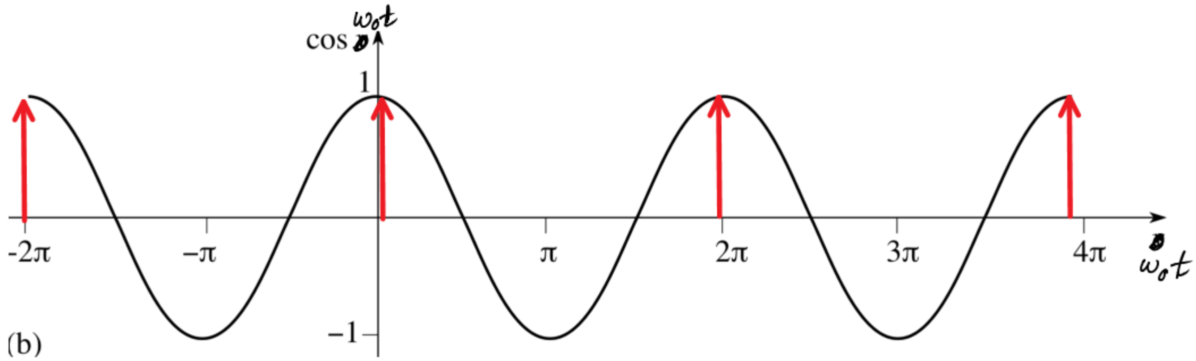
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos \omega_0 t \, \delta(t - nT_0)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos \omega_0 n T_0 \, \delta(t - nT_0)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos 2\pi n \, \delta(t - nT_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0)$$

$$= \delta_{T_0}(t)$$

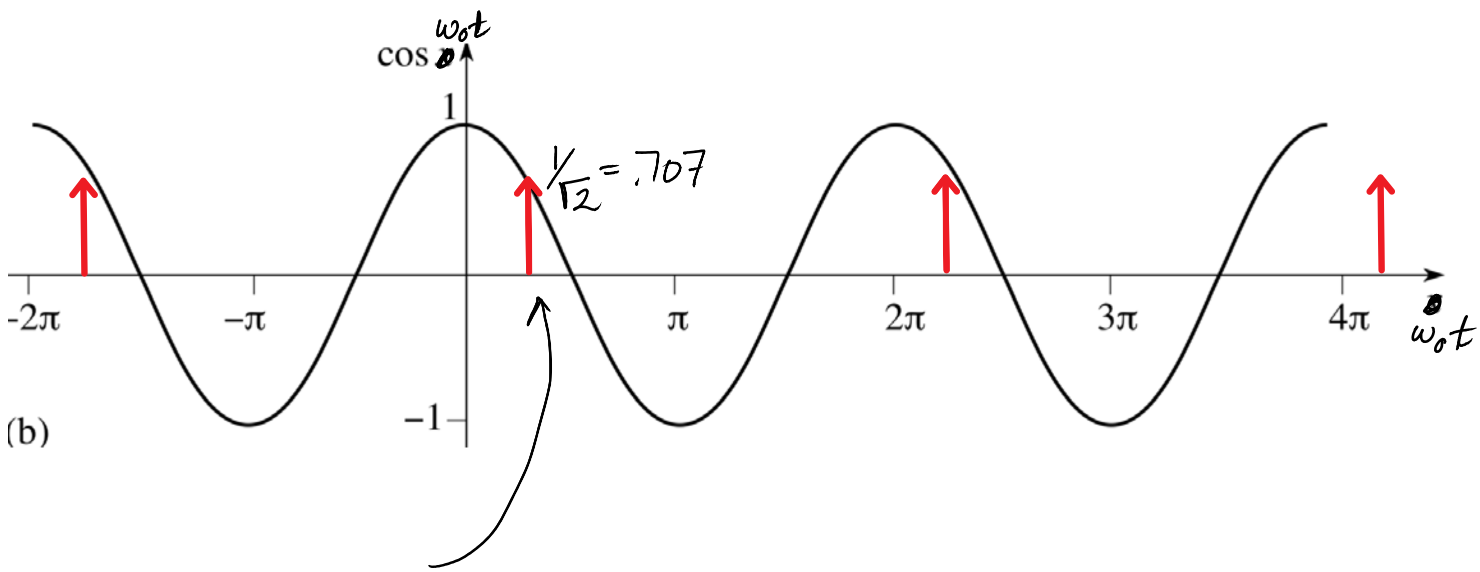
Le produit donne simplement le peigne de Dirac. Le peigne echantillon cosinus toujours aux valeurs de 1.



Donc nous cherchons la transformée de $\delta_{T_0}(t)$ dans la table...

$\delta_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_0)$	$\omega_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega_0)$

B. Maintenant le peigne de Dirac est décallé en temps



$$\omega_0 t = \omega_0 \frac{T_0}{8} = \frac{2\pi}{8} = \pi/4$$

$$\cos w_0 t\,\delta_{T_0}\left(t-\frac{T_0}{8}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\cos w_0 t\,\delta\left(t-\frac{T_0}{8}-nT_0\right)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\cos\left(w_0\left(\frac{T_0}{8}+nT_0\right)\right)\delta\left(t-T_0/8-nT_0\right)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi}{4}+2n\pi\right)\delta\left(t-\frac{T_0}{8}-nT_0\right)$$

$$=\sum^{\infty}\cos\pi/4\;\delta\left(t-T_0/8-nT_0\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(t-\frac{T_0}{8}-nT_0\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\,\delta_{T_0}\left(t-T_0/8\right)$$

En utilisant la propriété de décalage temporelle,

$f(t+a)$	$e^{ja\omega}F(\omega)$
$\delta_{T_0}(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT_0)$	$\omega_0\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-n\omega_0)$

$$\delta_{T_0}\left(t-T_0/8\right)\Leftrightarrow\omega_0\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-n\omega_0\right)\cdot e^{j\frac{T_0}{8}\omega}$$

$$=\omega_0\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{j\frac{T_0}{8}n\omega_0}\,\delta\left(\omega-n\omega_0\right)$$

$$=\omega_0\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{j\frac{\pi}{4}n}\,\delta\left(\omega-n\omega_0\right)$$

$$G(\omega)=TF\left\{1/\sqrt{2}\;\delta_{T_0}\left(t-T_0/8\right)\right\}=\frac{\omega_0}{\sqrt{2}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{j\frac{\pi}{4}n}\,\delta\left(\omega-n\omega_0\right)$$

Problème 3 (30 points sur 100)

En sachant que $\omega_0 T_0 = 2\pi$

A. (10 points) Trouvez la transformée de Fourier de la fonction $f(t) = \cos(\omega_0 t)\delta_{T_0}(t)$.

B. (20 points) Trouvez la transformée de Fourier de la fonction $g(t) = \cos(\omega_0 t)\delta_{T_0}(t - T_0/8)$.

	$x=-\pi/4$	$x=0$	$x=\pi/4$	$x=\pi/2$	$x=3\pi/4$	$x=\pi$	$x=5\pi/4$	$x=3\pi/2$
$\cos x$	$1/\sqrt{2}$	1	$1/\sqrt{2}$	0	$-1/\sqrt{2}$	-1	$-1/\sqrt{2}$	0

$$\cos \omega_0 t = \frac{1}{2}\left[e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right]$$

Prenons $e^{j\omega_0 t}\delta_{T_0}(t)$ et la propriété de décalage fréquentiel $e^{jbt}f(t) \Leftrightarrow F(\omega - b)$

$\delta_{T_0}(t)$ dans le table... $\delta_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t - nT_0)$ | $\omega_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega - n\omega_0)$

Donc

$$e^{j\omega_0 t}\delta_{T_0}(t) \Leftrightarrow \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - n\omega_0 - \omega_0)$$

Mais $\delta_{\omega_0}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - n\omega_0)$ est un fonction périodique avec periode $\Rightarrow \sum\delta(\omega - n\omega_0 - \omega_0) = \sum\delta(\omega - n\omega_0)$

Donc $e^{j\omega_0 t}\delta_{T_0}(t) \Leftrightarrow \omega_0 \sum_{n=\infty}^{\infty}\delta(\omega - n\omega_0) = \omega_0\delta_{\omega_0}(\omega)$

Pareillement, $e^{-j\omega_0 t}\delta_{T_0}(t) \Leftrightarrow \omega_0\delta_{\omega_0}(\omega)$

Donc $\cos\omega_0\, \delta_{T_0}(t) = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right)\delta_{T_0}(t) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\omega_0\delta_{\omega_0}(\omega) + \frac{1}{2}\omega_0\delta_{\omega_0}(\omega)$

$$= \omega_0\delta_{\omega_0}(\omega)$$

B. Prenons $h(t) = \delta_{T_0}(t - T_0/8)$

$$f(t+a) \quad | \quad e^{ja\omega}F(\omega)$$

$$\delta_{T_0}(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT_0) \quad | \quad \omega_0\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-n\omega_0)$$

$$\delta_{T_0}\left(t-T_0/8\right) \Leftrightarrow \omega_0\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_0)\cdot e^{j\frac{T_0}{8}\omega} = H(\omega)$$

$$g_1(t) = e^{j\omega_0 t}h(t) \Rightarrow G_1(\omega)=H(\omega-\omega_0)$$

$$g_2(t) = e^{-j\omega_0 t}h(t) \Rightarrow G_2(\omega)=H(\omega+\omega_0)$$

$$G_1(\omega) = e^{j\frac{T_0}{8}(\omega-\omega_0)}\,\omega_0\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_0-\omega_0)$$

$$= e^{j\frac{T_0\omega}{8}}e^{-j\frac{T_0\omega_0}{8}}\,\omega_0\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_0)$$

$$= e^{j\frac{T_0\omega}{8}}e^{-j\frac{2\pi}{8}}\,\omega_0\,\delta_{\omega_0}(\omega)$$

$$G_2(\omega) = e^{j\frac{T_0\omega}{8}}e^{+j\frac{2\pi}{8}}\,\omega_0\,\delta_{\omega_0}(\omega)$$

$$G(\omega)=\frac{1}{2}G_1(\omega)+\frac{1}{2}G_2(\omega) = \frac{1}{2}\left[e^{j\pi/4}+e^{-j\pi/4}\right]e^{jT_0\omega/8}\,\omega_0\,\delta_{\omega_0}(\omega)$$

$$= \cos\pi/4\; e^{jT_0\omega/8}\,\omega_0\,\delta_{\omega_0}(\omega)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\,\omega_0\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{jT_0\omega/8}\,\delta(\omega-n\omega_0)$$

$$= \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{j\frac{n\omega_0T_0}{8}}\,\delta(\omega-n\omega_0)$$

$$= \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{\frac{j\pi n}{4}}\,\delta(\omega-n\omega_0)$$

2015 Examen1 Pr3 Attention

November-04-15 3:32 PM

$f(t+a)$	$e^{ja\omega}F(\omega)$
$e^{jbt}f(t)$	$F(\omega-b)$

$$\cancel{e^{jbt}f(t+a) \Leftrightarrow e^{jaw}F(w-b)}$$

$$h(t) = f(t+a) \Rightarrow H(w) = e^{jaw}F(w)$$

$$g(t) = e^{jbt}h(t) \Rightarrow G(w) = H(w-b)$$

$$= e^{ja(w-b)}F(w-b)$$

$$s(t) = e^{jbt}f(t) \Rightarrow S(w) = F(w-b)$$

$$s(t+a) = e^{jb(t+a)}f(t+a)$$

$$e^{jwa}S(w) \Leftrightarrow e^{jbt}f(t+a)\cdot e^{jba}$$

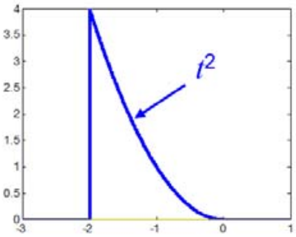
$$e^{jbt}f(t+a) \Leftrightarrow e^{jwa}\cdot e^{-jba}\cdot S(w)$$

$$e^{ja(w-b)}\cdot S(w)$$

$$e^{ja(w-b)}\cdot F(w-b)$$

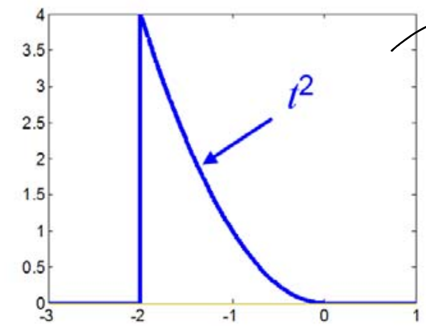
Problème 4 (30 points sur 100)

Trouvez la transformée de Fourier de la fonction suivante.

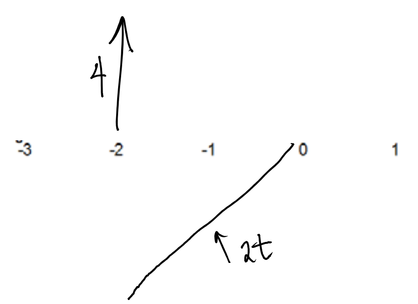


$$f(t) = t^2\,\mathrm{Rect}(t+1) = \begin{cases} t^2 & -2 < t < 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

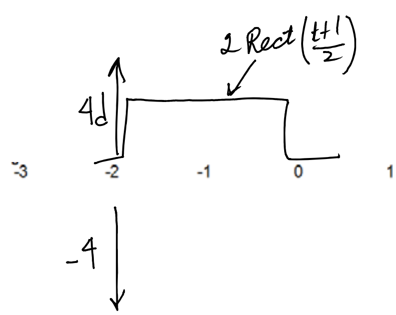
Approche des dérivées

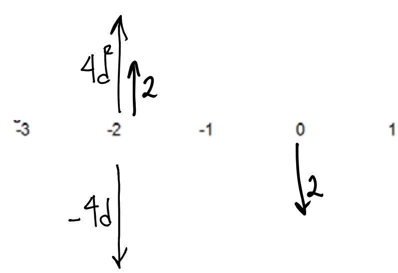


$\xrightarrow{d/dt}$



$\xrightarrow{d/dt}$





$4\delta''(t+2) - 4\delta'(t+2) + 2\delta(t+2) - 2\delta(t)$

$$(j\omega)^3 F(\omega) = TF\left\{4\delta''(t+2) - 4\delta'(t+2) + 2\delta(t+2) - 2\delta(t)\right\}$$

$$= 4(j\omega)^2 e^{2j\omega} - 4(j\omega)e^{j\omega 2} + 2e^{2j\omega} - 2$$

$$= 4e^{2j\omega}(j\omega)^2 - 4j\omega e^{2j\omega} + 2e^{j\omega}(e^{j\omega} - e^{-j\omega})$$

$$= 4e^{2j\omega}(j\omega)^2 - 4j\omega e^{2j\omega} + 4j e^{j\omega}\sin\omega$$

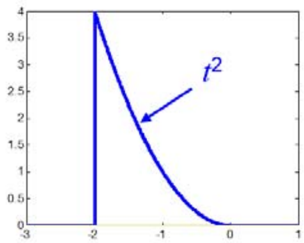
$$F(\omega) = \frac{4e^{j\omega}}{(j\omega)^3}\left[(j\omega)^2 e^{j\omega} - j\omega e^{j\omega} + j\sin\omega\right]$$

$$= \frac{4e^{j\omega}}{\omega}\left[\frac{e^{j\omega}}{j} + \frac{e^{j\omega}}{\omega} - \frac{\sin\omega}{\omega^2}\right]$$

$$= \frac{4e^{j\omega}}{\omega}\left[\frac{e^{j\omega}}{\omega} - je^{j\omega} - \frac{\sin\omega}{\omega^2}\right]$$

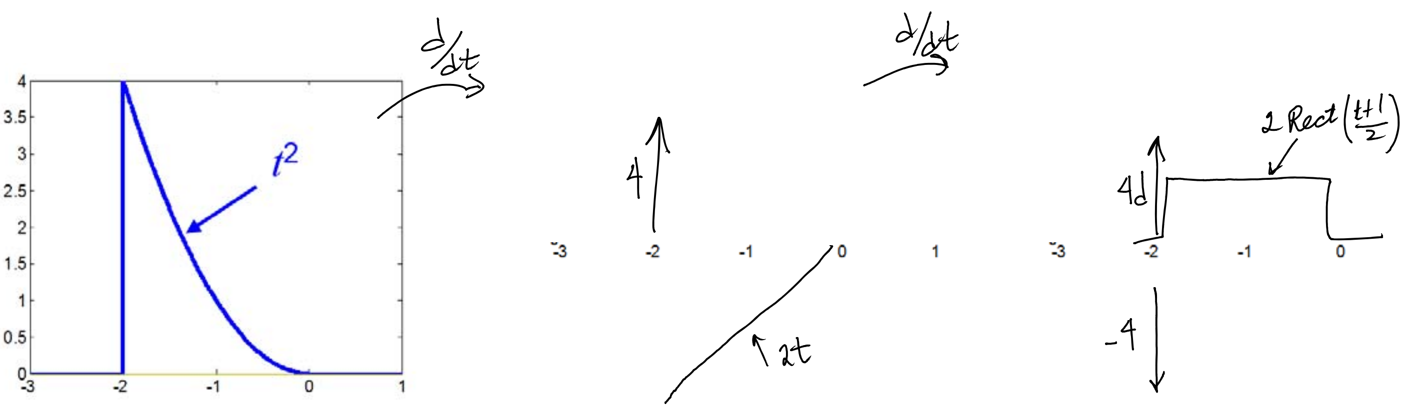
Problème 4 (30 points sur 100)

Trouvez la transformée de Fourier de la fonction suivante.



$$f(t) = t^2\,\mathrm{Rect}(t+1) = \begin{cases} t^2 & -2 < t < 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Approche des dérivées



$$(j\omega)^2 F(\omega) = \mathrm{TF}\left\{4\delta'(t+2) - 4\delta(t+2) + 2\,\mathrm{Rect}\left(\frac{t+1}{2}\right)\right\}$$

$\mathrm{Rect}(t/\tau)$	(1)	$\tau\,\mathrm{Sa}(\omega\tau/2)$	$\mathrm{Rect}\,\frac{t}{2} \Leftrightarrow 2\,\mathrm{Sa}\,\omega$
$f(t+a)$		$e^{ja\omega}F(\omega)$	$\mathrm{Rect}\,\frac{t+1}{2} \Leftrightarrow 2e^{j\omega}\,\mathrm{Sa}\,\omega$

$$\mathrm{Rect}\left(\frac{t+1}{2}\right) \Leftrightarrow 2e^{j\omega}\,\mathrm{Sa}\,\omega$$

$$(j\omega)^2 F(\omega) = \mathrm{TF}\left\{4\delta'(t+2) - 4\delta(t+2)\right\} + 4e^{j\omega}\,\mathrm{Sa}\,\omega$$

$\delta(t)$	1

$$\left.\begin{array}{c|c} \delta(t) & 1 \\ \frac{d^n}{dt^n} f(t) & (j\omega)^n F(\omega) \end{array}\right\} \delta'(t) \Leftrightarrow j\omega$$

avec le décalage temporel, $\delta'(t+2) \Leftrightarrow e^{2j\omega} j\omega$

$$\delta(t) \Leftrightarrow e^{2j\omega}$$

$$(j\omega)^2 F(\omega) = 4j\omega\, e^{2j\omega} - 4e^{2j\omega} + 4\, e^{j\omega}\, Sa\, \omega$$

$$= 4e^{j\omega}\left[j\omega e^{j\omega} - e^{j\omega} + \frac{\sin\omega}{\omega}\right]$$

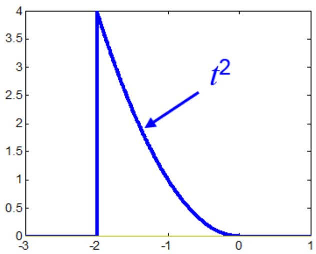
$$F(\omega) = \frac{4e^{j\omega}}{\omega}\left[\frac{e^{j\omega}}{\omega} - j e^{j\omega} - \frac{\sin\omega}{\omega^2}\right]$$

2015 Examen1 Pr4 Méthode C

November-01-15 5:37 PM

Problème 4 (30 points sur 100)

Trouvez la transformée de Fourier de la fonction suivante.



$$f(t) = t^2\,\mathrm{Rect}(t+1) = \begin{cases} t^2 & -2 < t < 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Approche

$t^n f(t)$	$(j)^n \dfrac{d^n}{d\omega^n} F(\omega)$	
$\mathrm{Rect}(t/\tau)$ (1)	$\tau\,\mathrm{Sa}(\omega\tau/2)$	$\mathrm{Rect}\,\frac{t}{2} \Leftrightarrow 2\,\mathrm{Sa}\,\omega$
$f(t+a)$	$e^{ja\omega}F(\omega)$	$\mathrm{Rect}\,\frac{t+1}{2} \Leftrightarrow 2e^{j\omega}\,\mathrm{Sa}\,\omega$

$$f(t) = \mathrm{Rect}\left(\frac{t+1}{2}\right) \Leftrightarrow 2\,e^{j\omega}\,\mathrm{Sa}\,\omega$$

$$t^2 f(t) \Leftrightarrow j^2 \frac{d^2}{d\omega^2} 2\,e^{j\omega}\,\mathrm{Sa}\,\omega = -2\,\frac{d^2}{d\omega^2}\, e^{j\omega}\frac{\sin\omega}{\omega}$$

$$= \frac{-2}{2j}\,\frac{d^2}{d\omega^2}\,\frac{e^{j\omega}(e^{j\omega}-e^{-j\omega})}{\omega} = j\,\frac{d^2}{d\omega^2}\left[\frac{e^{2j\omega}}{\omega} - \frac{1}{\omega}\right]$$

$$\frac{d^2}{d\omega^2}\,\frac{e^{2j\omega}}{\omega} = \frac{d}{d\omega}\left[\frac{2j\,e^{2j\omega}}{\omega} - \frac{e^{2j\omega}}{\omega^2}\right] = \frac{d}{d\omega}\left[e^{2j\omega}\left[\frac{2j}{\omega} - \frac{1}{\omega^2}\right]\right]$$

$$= 2j\,e^{2j\omega}\left[\frac{2j}{\omega} - \frac{1}{\omega^2}\right] + e^{2j\omega}\left[-\frac{2j}{\omega^2} + \frac{2}{\omega^3}\right]$$

$$= e^{2j\omega}\left[-\frac{4}{\omega} - \frac{2j}{\omega^2} - \frac{2j}{\omega^2} + \frac{2}{\omega^3}\right] = e^{2j\omega}\left[-\frac{4}{\omega} - \frac{4j}{\omega^2} + \frac{2}{\omega^3}\right]$$

$$\frac{d^2}{d\omega^2}\left(\frac{1}{\omega}\right) = \frac{d}{d\omega}\left(\frac{-1}{\omega^2}\right) = 2/\omega^3$$

$$G(\omega) = j\,e^{2j\omega}\left[-4/\omega - \frac{4j}{\omega^2} + 2/\omega^3\right] - j\,\frac{2}{\omega^3}$$

$$= j e^{2jw}\left[-\frac{4}{w} - \frac{4j}{w^2}\right] - \frac{j2}{w^3}\left[1 - e^{2jw}\right]$$

$$= j e^{2jw}\left[-\frac{4}{w} - \frac{4j}{w^2}\right] - \frac{2j\,e^{jw}}{w^3}\left[e^{-jw} - e^{jw}\right]$$

$$= j e^{2jw}\left[-\frac{4}{w} - \frac{4j}{w^2}\right] - \frac{4e^{jw}}{w^3}\,\text{sen}\,w$$

$$= \frac{4e^{jw}}{w}\left[-j e^{jw} - \frac{j^2}{w} e^{jw} - \frac{\text{sen}\,w}{w^2}\right]$$

$$= \frac{4e^{jw}}{w}\left[\frac{e^{jw}}{w} - j e^{jw} - \frac{\text{sen}\,w}{w^2}\right]$$

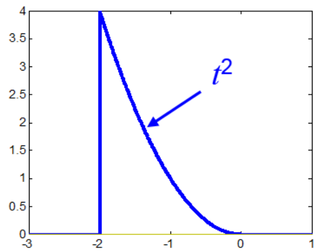
$$G(w) = \frac{4}{w} e^{jw}\left[\frac{e^{jw}}{w} - j e^{jw} - \frac{\text{sen}\,w}{w^2}\right]$$

2015 Examen1 Pr4 Méthode D

November-01-15 5:37 PM

Problème 4 (30 points sur 100)

Trouvez la transformée de Fourier de la fonction suivante.



$$f(t) = t^2\,\mathrm{Rect}(t+1) = \begin{cases} t^2 & -2 < t < 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Approche

$t^n f(t)$	$(j)^n \dfrac{d^n}{d\omega^n} F(\omega)$
$\mathrm{Rect}(t/\tau)$ (1)	$\tau\,\mathrm{Sa}(\omega\tau/2)$ $\mathrm{Rect}\,\frac{t}{2} \Leftrightarrow 2\,\mathrm{Sa}\,\omega$
$f(t+a)$	$e^{ja\omega} F(\omega)$ $\mathrm{Rect}\,\frac{t+1}{2} \Leftrightarrow 2 e^{j\omega}\,\mathrm{Sa}\,\omega$

$$f(t) = \mathrm{Rect}\left(\frac{t+1}{2}\right) \Leftrightarrow 2\,e^{j\omega}\,\mathrm{Sa}\,\omega$$

$$t^2 f(t) \Leftrightarrow j^2 \frac{d^2}{d\omega^2} 2\,e^{j\omega}\,\mathrm{Sa}\,\omega = -2 \frac{d^2}{d\omega^2} \frac{e^{j\omega}\sin\omega}{\omega}$$

$$G(\omega) = -2 \frac{d^2}{d\omega^2} \frac{e^{j\omega}\sin\omega}{\omega}$$

$$\frac{d}{d\omega} \frac{e^{j\omega}\sin\omega}{\omega} = j\frac{e^{j\omega}\sin\omega}{\omega} + \frac{e^{j\omega}\cos\omega}{\omega} - \frac{e^{j\omega}\sin\omega}{\omega^2}$$

$$\frac{d^2}{d\omega^2} \frac{e^{j\omega}\sin\omega}{\omega} = j\left[j\frac{e^{j\omega}\sin\omega}{\omega} + \frac{e^{j\omega}\cos\omega}{\omega} - \frac{e^{j\omega}\sin\omega}{\omega^2}\right]$$

$$+ j\frac{e^{j\omega}\cos\omega}{\omega} - \frac{e^{j\omega}\sin\omega}{\omega} - \frac{e^{j\omega}\cos\omega}{\omega^2}$$

$$- j\frac{e^{j\omega}\sin\omega}{\omega^2} - \frac{e^{j\omega}\cos\omega}{\omega^2} + 2\frac{e^{j\omega}\sin\omega}{\omega^3}$$

$$\omega^2 \qquad\qquad \omega^2 \qquad\qquad \omega^3$$

$$= -\frac{e^{j\omega}\sin\omega}{\omega} + \frac{je^{j\omega}\cos\omega}{\omega} - j\frac{e^{j\omega}\sin\omega}{\omega^2}$$

$$-\frac{e^{j\omega}\sin\omega}{\omega} + j\frac{e^{j\omega}\cos\omega}{\omega} - \frac{e^{j\omega}\cos\omega}{\omega^2}$$

$$-j\frac{e^{j\omega}\sin\omega}{\omega^2} - \frac{e^{j\omega}\cos\omega}{\omega^2} + 2\frac{e^{j\omega}\sin\omega}{\omega^3}$$

$$-\frac{2e^{j\omega}\sin\omega}{\omega} + \frac{2j\,e^{j\omega}\cos\omega}{\omega} - \frac{2j\,e^{j\omega}\sin\omega}{\omega^2} - \frac{2e^{j\omega}\cos\omega}{\omega^2} + \frac{2e^{j\omega}\sin\omega}{\omega^3}$$

$$= \frac{2e^{j\omega}}{\omega}\left[-\sin\omega + j\cos\omega - \frac{j\sin\omega - \cos\omega}{\omega} + \frac{\sin\omega}{\omega^2}\right]$$

$$e^{j\omega} = \cos\omega + j\sin\omega \Rightarrow -\sin\omega + j\cos\omega = +je^{j\omega}$$

$$\frac{d^2}{d\omega^2}\,\frac{e^{j\omega}\sin\omega}{\omega} = \frac{2e^{j\omega}}{\omega}\left[je^{j\omega} - \frac{e^{j\omega}}{\omega} + \frac{\sin\omega}{\omega^2}\right]$$

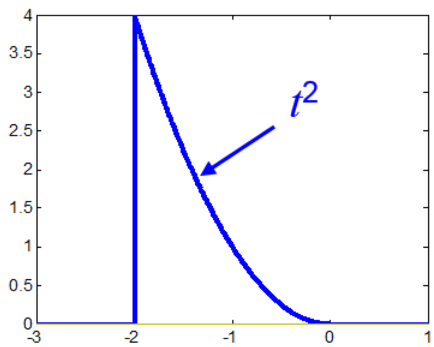
$$G(\omega) = \frac{4}{\omega}e^{j\omega}\left[\frac{e^{j\omega}}{\omega} - je^{j\omega} - \frac{\sin\omega}{\omega^2}\right]$$

2015 Examen1 Pr4 Méthode E

November-04-15 3:48 PM

Problème 4 (30 points sur 100)

Trouvez la transformée de Fourier de la fonction suivante.



$$f(t) = t^2\,\mathrm{Rect}(t+1) = \begin{cases} t^2 & -2 < t < 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-2}^{0} t^2 e^{-j\omega t}\, dt$$

$$\int x^2 e^{ax}\, dx = \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3}\right) e^{ax} \qquad a = -j\omega$$

$$F(\omega) = \left(\frac{t^2}{-j\omega} - \frac{2t}{(j\omega)^2} + \frac{2}{(j\omega)^3}\right) e^{-j\omega t} \Big|_{-2}^{0}$$

$$= \frac{2}{(j\omega)^3} \cdot e^{-0} - \left[\frac{(-2)^2}{-j\omega} - \frac{2(-2)}{(j\omega)^2} + \frac{2}{(j\omega)^3}\right] e^{-j\omega(-2)}$$

$$= \frac{2}{(j\omega)^3} + \frac{4e^{j2\omega}}{j\omega} - \frac{4e^{j2\omega}}{(j\omega)^2} - \frac{2e^{2j\omega}}{(j\omega)^3}$$

$$= \frac{2}{(j\omega)^3}\left(1 - e^{2j\omega}\right) + 4e^{2j\omega}\left[\frac{1}{j\omega} - \frac{1}{(j\omega)^2}\right]$$

$$= \frac{2e^{j\omega}}{(j\omega)^3}\left(e^{-j\omega} - e^{j\omega}\right) + 4e^{2j\omega}\left[\frac{1}{j\omega} - \frac{1}{(j\omega)^2}\right]$$

$$= \frac{-4j\, e^{j\omega} \sin\omega}{(j\omega)^3} + 4e^{2j\omega}\left[\frac{1}{j\omega} - \left(\frac{1}{j\omega}\right)^2\right]$$

$$= \frac{4e^{j\omega}}{\omega}\left[\frac{e^{j\omega}}{j} - \frac{e^{j\omega}}{(j)^2\omega} - \frac{\sin\omega}{\omega^2}\right]$$

$$= \frac{4e^{j\omega}}{\omega}\left[\frac{e^{j\omega}}{\omega} - j e^{j\omega} - \frac{\sin\omega}{\omega^2}\right]$$