NOM :

Gel-2000: Électromagnétisme

Mini-test #1

Mercredi le 25 septembre 2013

Ce test comprend 4 questions. Total :

Question 1 (1 point):

On considère un champ vectoriel exprimé en coordonnées sphériques par $\vec{A}(r,\theta,\phi) = \frac{A_0}{r^2} \sin\theta \; \hat{\boldsymbol{a}}_\phi$

Calculez le champ donné par $\vec{B}(r,\theta,\phi) = \nabla \times \vec{A}$

$$\vec{A}(r,\theta,\varphi) = A_\varphi(r)\, \hat{a}_\varphi$$

$$\vec{B}(r,\theta,\varphi) = \begin{vmatrix} \frac{\hat{a}_r}{r^2 \sin\theta} & \frac{a_\theta}{r\sin\theta} & \frac{a_\varphi}{r} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \cancel{A_r} \to 0 & \cancel{r A_\theta} \to 0 & \underbrace{r\sin\theta A_\varphi}_{\frac{A_0}{r}\sin^2\theta} \end{vmatrix}$$

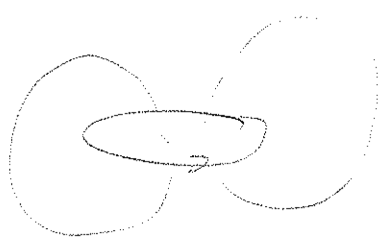
Good def + $A_r = 0$ and $A_\theta = 0$

0.5

$$\vec{B}(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{r^2 \cancel{\sin\theta}} \frac{2A_0 \cancel{\sin\theta}\cos\theta}{r}\, \hat{a}_r - \frac{1}{r\sin\theta} A_0 \sin^2\theta \left(\frac{-1}{r^2}\right) \hat{a}_\theta$$

$$\boxed{\vec{B}(r,\theta,\varphi) = \frac{A_0}{r^3}\left(2\cos\theta\, \hat{a}_r + \sin\theta\, \hat{a}_\theta\right)}$$

0.5



Question 2 (2 points) :

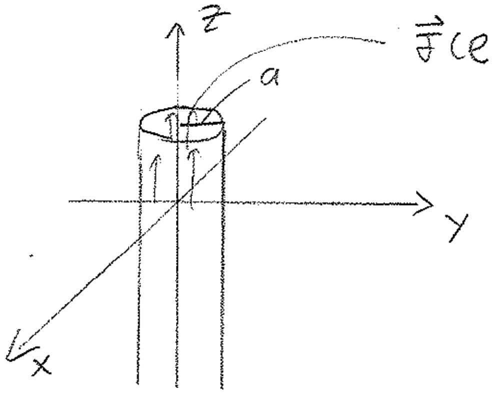
On considère un fil conducteur droit de rayon a, orienté suivant l'axe z, dans lequel circule un courant caractérisé par une densité de courant de volume

$$\vec{J}_v(\rho,\phi,z) = J_0\,\rho^3\,\hat{\boldsymbol{a}}_z \quad \left[\frac{A}{m^2}\right]$$

a) Faites un schéma du système.

b) Calculez le courant total I, en A, transporté par le fil.

a)



$\vec{J}(\rho,\varphi,z) = J_0\,\rho^3\,\hat{a}_z$

0.5pt

b) $I = \iint \vec{J}_v \cdot d\vec{s} \qquad d\vec{s} = \rho\, d\rho\, d\varphi\, \hat{a}_z$ 0.5 ($d\vec{s}$)

$I = \int_0^{2\pi}\int_0^{a} J_0\,\rho^3\,\hat{a}_z \cdot \rho\, d\rho\, d\varphi\, \hat{a}_z$ 0.5 (limits)

$I = 2\pi J_0 \int_0^a \rho^4\, d\rho$

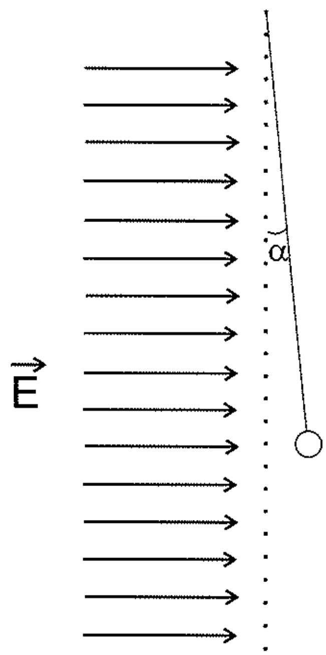
$\boxed{I = \dfrac{2\pi J_0\, \rho^5}{5} \ \text{A}}$ 0.5

−0.25

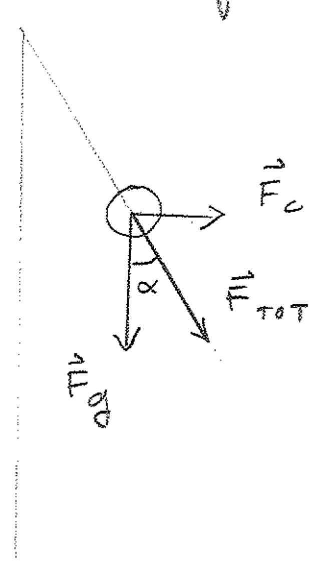
Question 3 (3 points)

On considère une pendule constitué d'une sphère de polystyrène chargée ayant une masse de 5 g suspendue au bout d'un fil de de 20 cm. On place la sphère dans un champ électrique uniforme de 1 V/cm orienté suivant l'horizontal. On observe que la sphère s'écarte de la normale par un angle $\alpha =$ ~~de~~ 2 degrés.

Quelle est la charge électrique portée par la sphère? ($g=9.8$ m/s^2)



Somme des forces



1

$$\vec{F}_{TOT} = \vec{F}_c + \vec{F}_g$$

et $$\frac{|\vec{F}_c|}{|\vec{F}_g|} = \tan\alpha$$ 1

$$Q|\vec{E}| = mg\tan\alpha$$

$$Q = \frac{mg\tan(\alpha)}{|\vec{E}|}$$

$$= \frac{0.005 \times 9.8 \times \tan(2°)}{1\,\frac{V}{cm} \times 10^2\,\frac{cm}{m}}$$

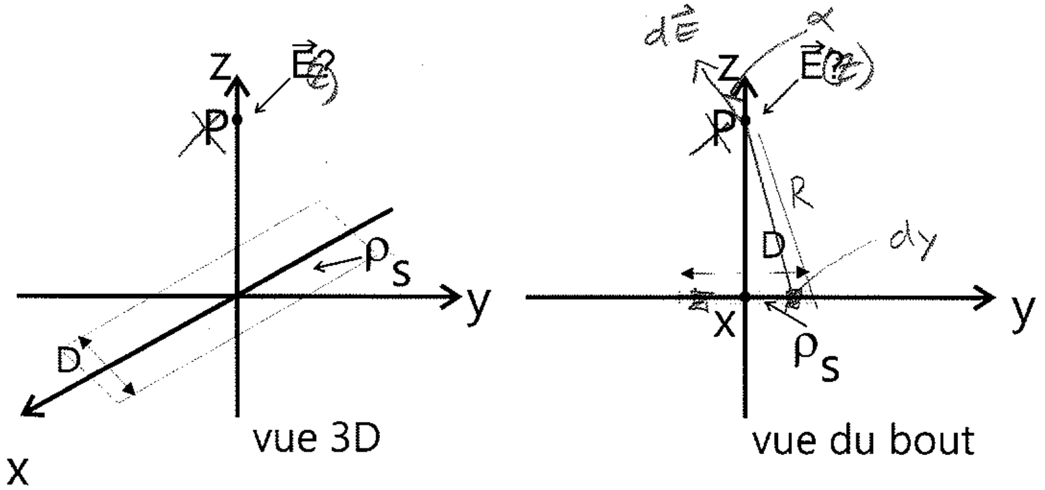
$$Q = 17 \times 10^{-6}\ C$$

$$\boxed{Q = 17\,\mu C}$$ 1

Question 4 (4 points)

a) On considère un ruban uniformément chargé avec une densité surfacique de charge ρ_s. Le ruban est infini le long de l'axe y et a une largeur D dans la direction x (de x=-D/2 à x=+D/2) .

Quel est le champ électrique le long de l'axe z traversant le ruban en son centre? Vous pouvez utiliser l'expression du champ du fil infini si nécessaire.



$$|d\vec{E}| = \frac{\rho_s dy}{2\pi\varepsilon_0 R} = \frac{\rho_s dy}{2\pi\varepsilon_0\sqrt{y^2+z^2}}$$ 1 (field due to 1 line)

$= 2\cos(\alpha)|d\vec{E}|$

$$|d\vec{E}_{tot}| = \frac{2\rho_s dy\cos\alpha}{2\pi\varepsilon_0\sqrt{y^2+z^2}} = \frac{\rho_s dy}{\pi\varepsilon_0}\frac{z}{(y^2+z^2)}$$ 1 (add both sides)

$$\vec{E}_{tot} = \int_0^{D/2}\frac{\rho_s z}{\pi\varepsilon_0}\frac{dy}{(y^2+z^2)}\hat{a}_z = \frac{\rho_s z}{\pi\varepsilon_0}\int_0^{D/2}\frac{dy}{(y^2+z^2)}\hat{a}_z$$

$$\vec{E}_{tot} = \frac{\rho_s z}{\pi\varepsilon_0}\frac{1}{z}\tan^{-1}\left(\frac{y}{z}\right)\Big|_0^{D/2}\hat{a}_z$$ 0.5 (limits)

-0.25

$$\boxed{\vec{E}_{tot} = \frac{\rho_s}{\pi\varepsilon_0}\tan^{-1}\left(\frac{D}{2z}\right)\hat{a}_z}$$ 0.5 (results)

V/m

6

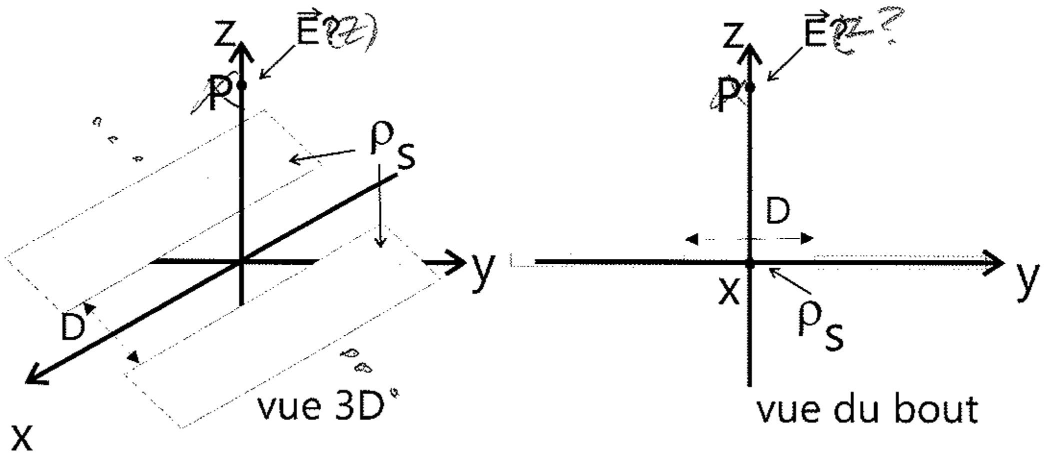
Par superposition

$$\vec{E}_{TOT} = \vec{E}_{\substack{plan\\infini}} - \vec{E}_{ruban} \qquad \underline{0.5}$$

$$= \left(\frac{\rho_s}{2\varepsilon_0} - \frac{\rho_s}{\pi\varepsilon_0} \tan^{-1}\left(\frac{D}{2z}\right)\right) \hat{a}_z$$

$$\boxed{\vec{E}_{tot} = \frac{\rho_s}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{D}{2z}\right)\right) \hat{a}_z} \qquad \underline{0.5}$$

b) On considère maintenant deux plans semi-infinis uniformément chargés avec une densité surfacique de charge ρ_s . Les plans semi-infinis sont placés dans le plan xy et occupent les régions x<-D/2 et x>+D/2) (Figure 2). En utilisant le résultat de a), quelle est l'expression du champ électrique le long de l'axe z produit par cette distribution de charges.



BROUILLON