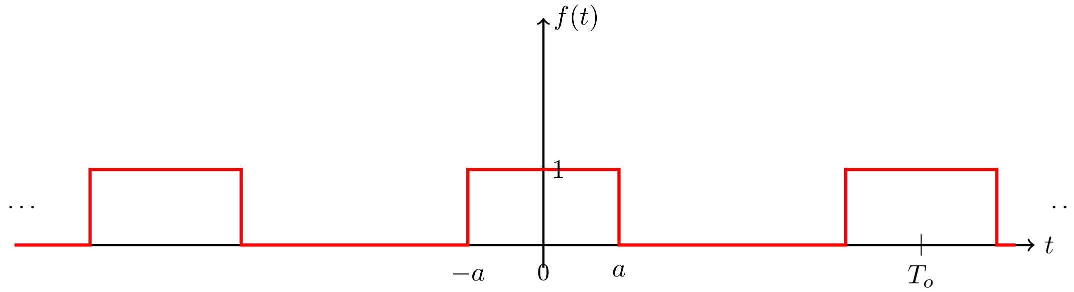
GEL-2001 83320 : Analyse des signaux

Examen 1 A2011 : Solutions

Département de génie électrique et de génie informatique

Problème 1

On a la fonction $f(t)$ suivante :



a)

On demande de calculer la transformée de Fourier de $f(t)$.

On commence par calculer la transformée de Fourier de la fonction restreinte à une période $f_r(t) = \mathrm{rect}(\frac{t}{2a}) \Longleftrightarrow 2a\mathrm{Sa}(a\omega) = F_r(\omega)$

La série de Fourier de la fonction périodisée est donc $F(n) = \frac{1}{T_0}F_r(n\omega_0) = \frac{2a}{T_0}\mathrm{Sa}(\frac{2\pi na}{T_0})$.

À partir de la série de Fourier, on obtient la transformée en insérant des Dirac d'amplitude $2\pi F(n)$ aux fréquences $n\omega_0$:

$$F(\omega) = \frac{4\pi a}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{Sa}(\frac{2\pi na}{T_0})\delta(\omega - n\omega_0),$$

où $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$.

b)

On cherche la puissance à la fréquence fondamentale. On utilise le fait que, pour une fonction réelle, la puissance dans l'harmonique négative est la même que dans l'harmonique positive : $P(1) = 2|F(1)|^2 = 2(\frac{2a}{T_0})^2\mathrm{Sa}^2(\frac{2\pi a}{T_0})$

c)

Pour $T_0 = 4a$, $F(\omega) = \pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{Sa}(\frac{\pi n}{2})\delta(\omega - n\omega_0)$. Le spectre étant réel, on peut tracer directement la transformée de Fourier sur un seul graphique (les segments bleus représentent des Dirac) :

d)

Pour $T_0 = 2a$, $F(\omega) = 2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{Sa}(\pi n)\delta(\omega - n\omega_0) = 2\pi\delta(\omega)$. Ce cas étant celui où les rectangles périodisés se touchent sans se chevaucher, $f(t)$ est une constante. Il est donc normal que la transformée de Fourier ait un terme seulement pour $\omega = 0$. Les segments bleus dans le graphiques représentent des Dirac.

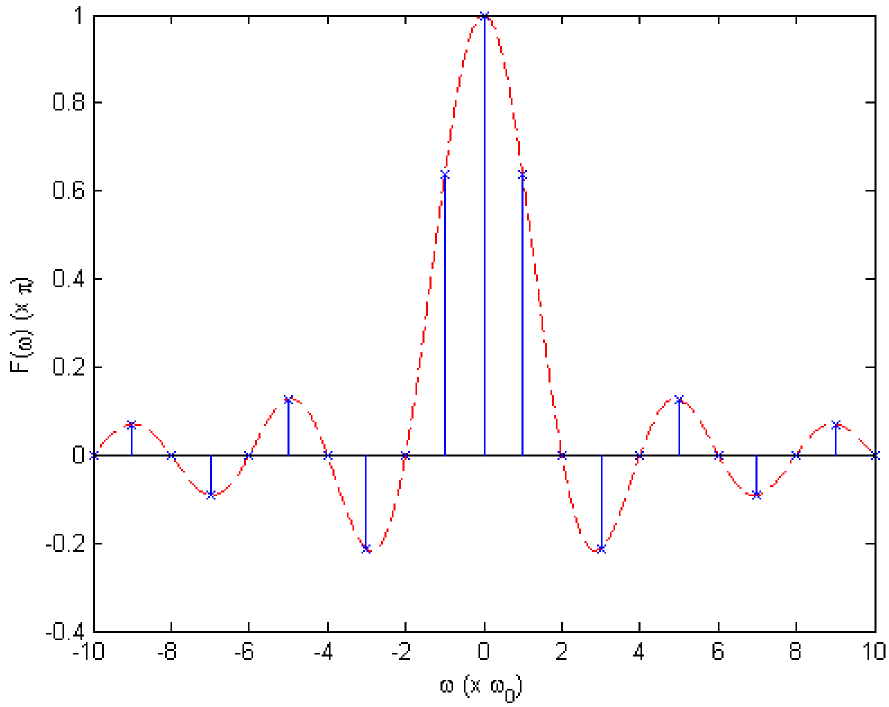


FIGURE 1 – $F(\omega)$ pour $T_0 = 4a$

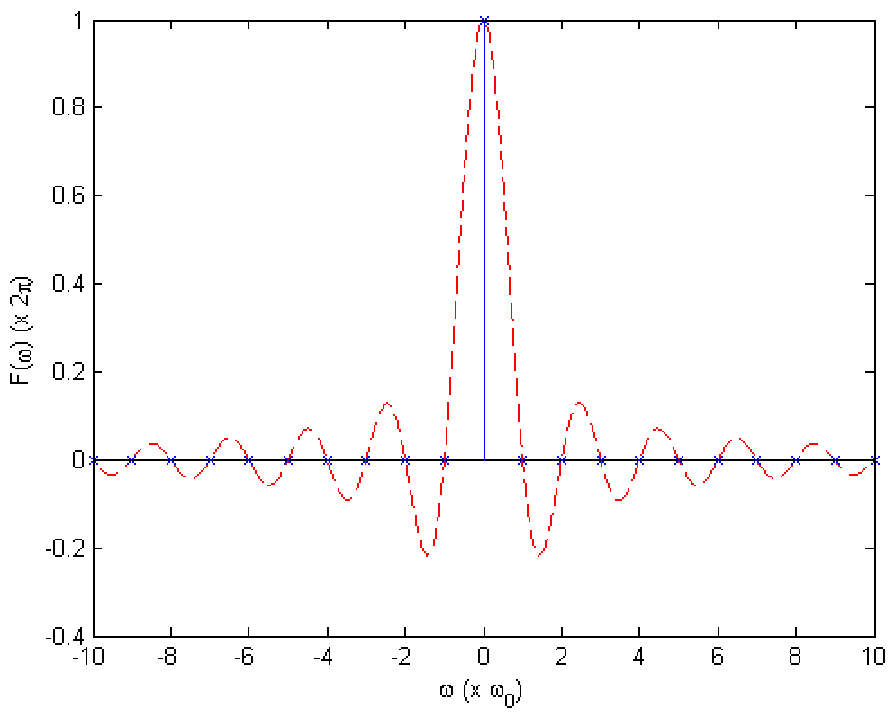


FIGURE 2 – $F(\omega)$ pour $T_0 = 2a$

Problème 2

On a la relation de transformée de Fourier suivante :

$$f(t) \quad \Longleftrightarrow \quad F(\omega)$$

$$\frac{1}{\sqrt{|t|}} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{|\omega|}}$$

a)

En utilisant la propriété de décalage, on obtient $f(t-3) \Longleftrightarrow F(\omega)\exp(-3j\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{|\omega|}}\exp(-3j\omega)$

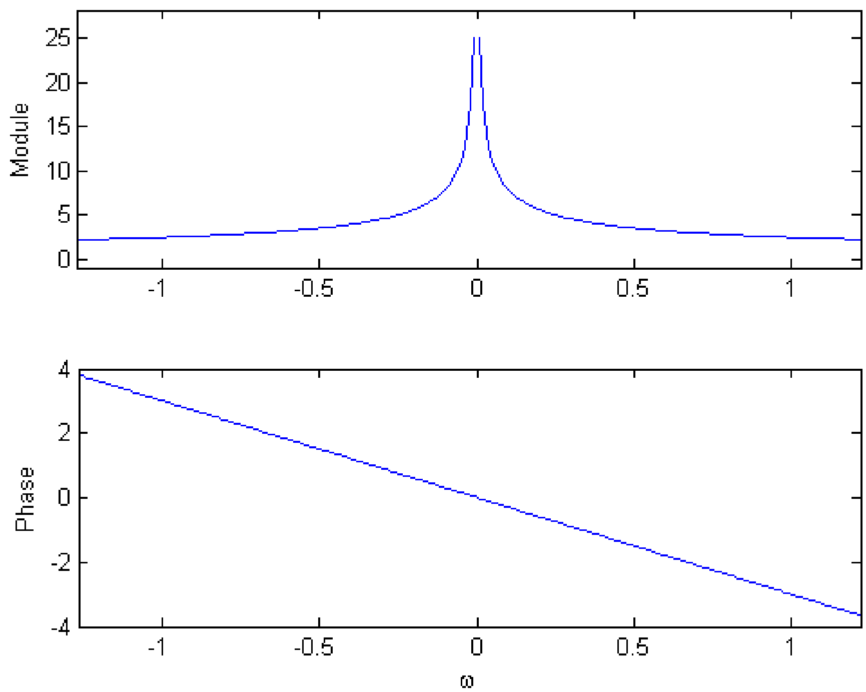


Figure 3 – Module et phase de $F(\omega)$

b)

On pourrait répondre à la question en utilisant la propriété de dilatation. Dans ce cas-ci, c'est plus facile de procéder de la façon suivante :

$$f(2\pi t) = \frac{1}{\sqrt{|2\pi t|}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{|t|}} \Longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{|\omega|}}$$

Puisque la fonction est réelle, on peut la tracer directement sur un seul graphique :

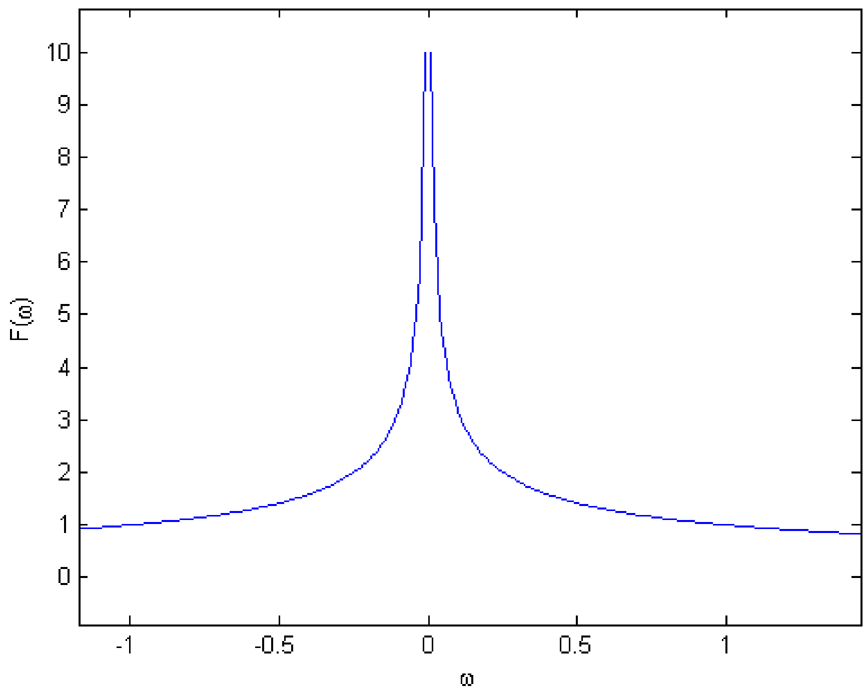
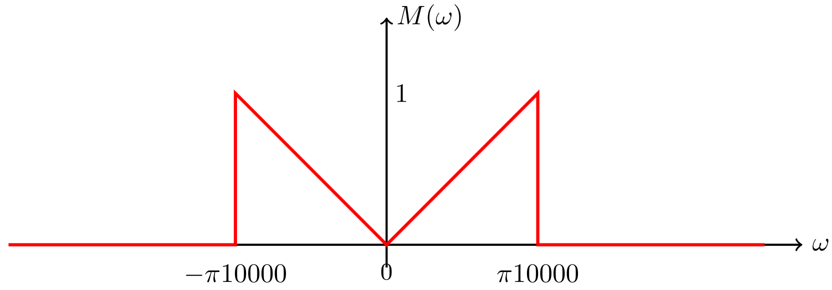


FIGURE 4 – $F(\omega)$

Problème 3 (12 pt)

Pour commencer, nous allons mettre le graphique en fonction de ω au lieu de f.



a)

On demande de calculer l'énergie et la puissance du signal $m(t)$. Premièrement, comme il s'agit d'un signal à énergie finie, la puissance est nulle. L'énergie est :

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 \mathrm{d}\omega \,, \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi 10000}^{0} \left(\frac{-\omega}{\pi 10000} \right)^2 \mathrm{d}\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi 10000} \left(\frac{\omega}{\pi 10000} \right)^2 \mathrm{d}\omega, \\ &= \frac{2}{2\pi} \frac{1}{\pi^2 10000^2} \int_{0}^{\pi 10000} \omega^2 \mathrm{d}\omega \,, \end{aligned}$$

ce qui devient, après intégration :

$$= \frac{2}{2\pi} \frac{1}{\pi^2 10000^2} \left[\frac{\omega^3}{3} \right]_{\omega=0}^{\pi 10000} = \frac{10000}{3} \quad ,$$

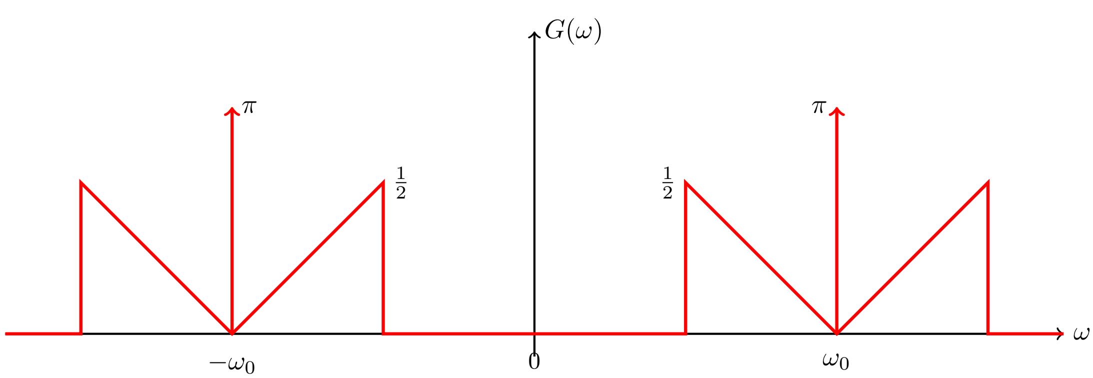
b)

Ensuite, on demande de calculer et de tracer la transformée de Fourier de $g(t) = (m(t) + 1)\cos(\omega_0 t)$. En utilisant la relation d'Euler $g(t)$ devient :

$$g(t) = \frac{m(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}}{2} + \frac{m(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}}{2} + \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}}{2} + \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}}{2} \,.$$

On trouve $G(\omega)$ en utilisant la propriété de décalage fréquentiel et la TF d'une constante :

$$G(\omega) = \frac{M(\omega - \omega_0)}{2} + \frac{M(\omega + \omega_0)}{2} + \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0) \,.$$



c)

On demande de calculer l'énergie et la puissance de $g(t)$. L'énergie est infinie, car lorsqu'on intègre $|G(\omega)|^2$, on doit faire l'intégrale d'impulsions au carré, ce qui donne l'infini. Ensuite, pour trouver la puissance on peut commencer par analyser la section $m(t)\cos(\omega_0 t)$ qui sera évidemment de puissance nulle. Donc, il reste la puissance de $\cos(\omega_0 t)$ qui est :

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} |f_p(t)|^2 \mathrm{d}t\,, \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\cos(\omega_0 t)|^2 \mathrm{d}t, \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos(2\omega_0 t)}{2}\right) \mathrm{d}t, \end{aligned}$$

ce qui devient, après intégration :

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \left[\frac{\sin(2\omega_0 t)}{2\omega_0}\right]_{t=-\pi}^{\pi}\right) = \frac{1}{2}\ .$$

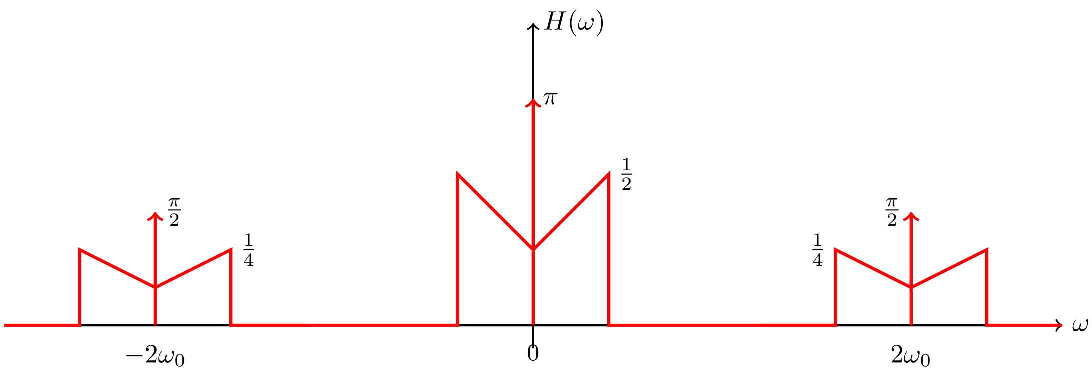
d)

On demande de calculer et de tracer la transformée de Fourier de $h(t) = g(t)\cos(\omega_0 t) = (m(t)+1)\cos(\omega_0 t)^2$. $h(t)$ devient :

$$h(t) = (m(t)+1)\left(\frac{1}{2} + \frac{\cos(2\omega_0 t)}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{m(t)}{2} + \frac{m(t)\cos(2\omega_0 t)}{2} + \frac{\cos(2\omega_0 t)}{2}\,.$$

On trouve $H(\omega)$ en utilisant la propriété de décalage fréquentiel et la TF d'une constante :

$$G(\omega) = \frac{M(\omega)}{2} + \frac{2\pi\delta(\omega)}{2} + \frac{M(\omega-2\omega_0)}{4} + \frac{M(\omega+2\omega_0)}{4} + \frac{\pi}{2}\delta(\omega-2\omega_0) + \frac{\pi}{2}\delta(\omega+2\omega_0)\,.$$



e)

Pour garder le contenu spectral autour de $\omega = 0$, on veut un $\mathrm{Rect}(\omega)$ centré à $\omega = 0$ avec une largeur totale minimale de $2\pi 10000$. Pour bien éliminer le contenu à $2\omega_0$ et à $-2\omega_0$, on veut un $\mathrm{Rect}(\omega)$ centré à $\omega = 0$ avec une largeur totale maximale de $2(2\omega_0 - \pi 10000)$. Donc, on veut $(\pi 10000 < \omega_f < 2\omega_0 - \pi 10000)$.

f)

Il y a deux différences entre $m(t)$ et $v(t)$. D'abord, l'impulsion de Dirac en fréquence va donner une constante de plus sur $v(t)$. Ensuite, $V(\omega)$ est à une multiplication près de $M(\omega)$, ce qui résulte à un $v(t)$ qui sera aussi différent de $m(t)$ à un facteur multiplicatif près.

Problème 4 (8 pt)

a)

On demande de trouver la transformée de Fourier inverse de :

$$F(\omega) = \frac{\sin(\omega)}{\omega + b}\,.$$

Pour commencer, on transforme le $\sin(\omega)$ avec la relation d'Euler.

$$F(\omega) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}}{2\,\mathrm{j}\omega + 2\,\mathrm{j}b} - \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}}{2\,\mathrm{j}\omega + 2\,\mathrm{j}b}\,.$$

Ensuite, plusieurs pourraient être tentés d'utiliser les deux propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-\beta t}U(t) &\Longleftrightarrow \frac{1}{\beta + \mathrm{j}\omega} \\ f(t+a) &\Longleftrightarrow \mathrm{e}^{\mathrm{j}a\omega}F(\omega) \end{aligned}$$

pour obtenir :

$$f(t) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}b(t+1)}U(t+1) - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}b(t-1)}U(t-1)\right)\,.$$

Toutefois, on ne peut pas utiliser la première propriété, car si la partie réelle de β est plus petite ou égale à 0 la fonction temporelle est de carré non intégrable, et la propriété n'est pas valide. Donc, pour être correct, on doit plutôt utiliser les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \mathrm{Sgn}(t) &\Longleftrightarrow \frac{2}{\mathrm{j}\omega} \\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}bt}f(t) &\Longleftrightarrow F(\omega - b) \\ f(t+a) &\Longleftrightarrow \mathrm{e}^{\mathrm{j}a\omega}F(\omega) \end{aligned}$$

pour obtenir :

$$f(t) = \frac{1}{4}\left(\mathrm{Sgn}(t+1)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}b(t+1)} - \mathrm{Sgn}(t-1)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}b(t-1)}\right)\,.$$

b)

En b), on demande l'aire de $f(t)$. Comme première option, on pourrait intégrer $f(t)$. Un moyen plus simple serait d'utiliser la définition de la transformée de Fourier à $\omega = 0$.

$$F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}0t}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t\,.$$

L'aire de $f(t)$ est donc :

$$F(0) = \frac{\sin(0)}{0 + b} = 0\,.$$