GEL-2000 ÉLECTROMAGNÉTISME

EXAMEN PARTIEL
Mercredi le 22 octobre 2014

NOM :

Instructions :

- Le seul document permis à l'examen est l'aide-mémoire.
- Répondez dans le cahier d'examen sur la page de droite uniquement.
- Indiquez votre nom et remettez ce questionnaire en même temps que votre cahier.
- Cet examen comporte **5 questions. Vous devez faire les 3 premières questions, et vous choisissez une question entre la 4^e et la 5^e.**

Question 1 (30 points):

On considère un système constitué d'un matériau diélectrique, ayant une permittivité de $2\varepsilon_0$, qui a la forme d'une coquille sphérique de rayon intérieur r=A et de rayon extérieur r=2A. Une électrode métallique, placée sur la surface interne, porte une charge +2Q. Une électrode métallique placée sur la surface externe porte une charge +Q. La permittivité est ε_0 l'extérieur du diélectrique.

surface $= 4\pi r^2$

Volume $= \dfrac{4\pi r^3}{3}$

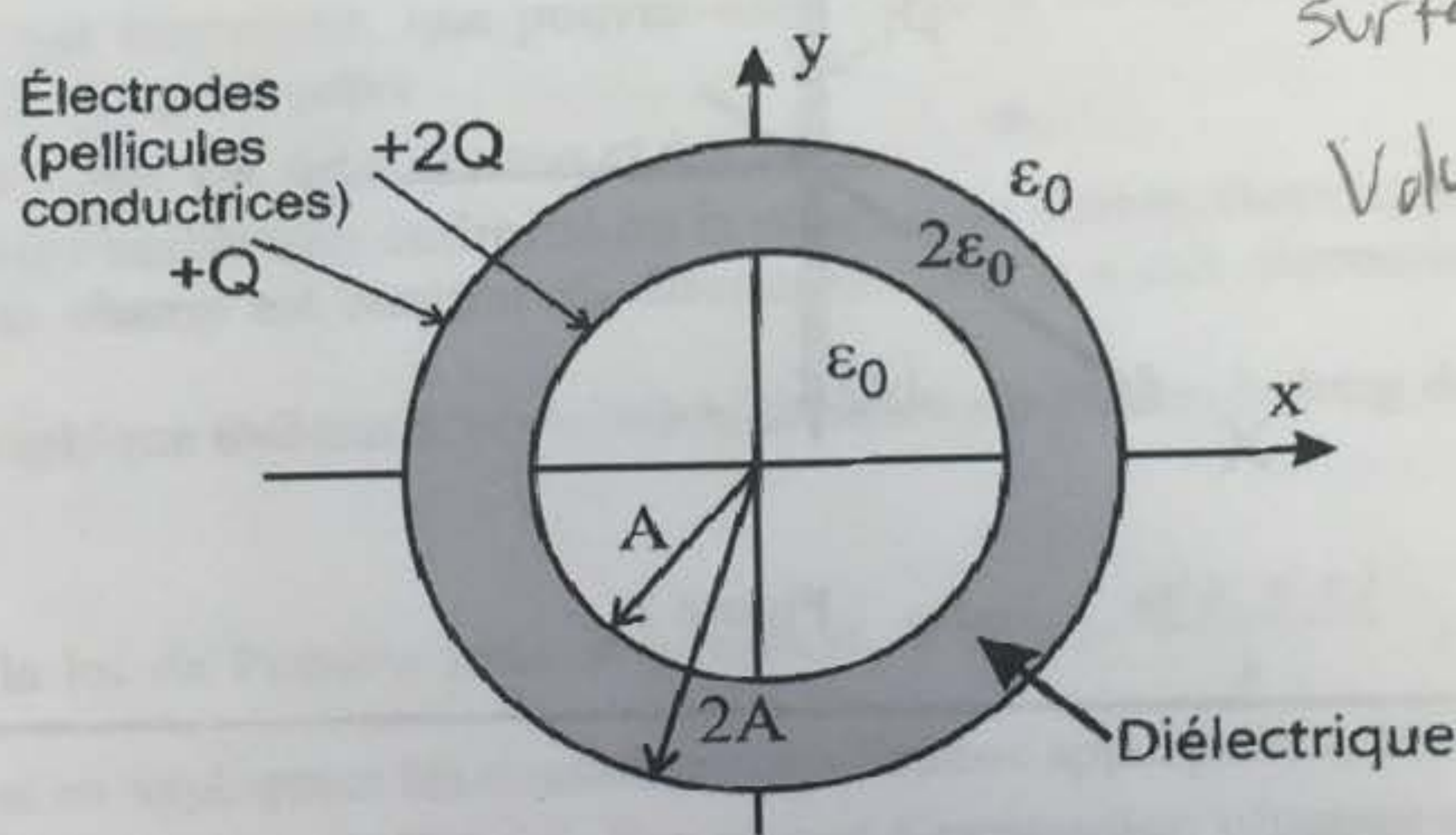


Figure 1

a) Comment la charge se répartit-elle dans le système? Spécifiez les densités de charge présentes.

b) Quelle est l'expression du champ électrique, $\vec{E}$, partout dans l'espace (de r=0 à r=∞)? **(Q1.2.2)**

c) Faites le graphique de l'amplitude du champ en fonction du rayon. Y a-t-il des discontinuités? Si oui à quel endroit et pourquoi.

d) En utilisant le résultat trouvé en b), quelle est l'énergie contenue dans ce système électrostatique?

symétrie sphérique $\oint E \cdot d\vec{s} = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} E(r) r^2 \sin\theta \, d\phi \, d\theta = 2\pi r^2 E(r) \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta$
$= 4\pi r^2 E(r)$

Question 2 (30 points)

On considère un fil d'une longueur finie (L), placé le long de l'axe z, qui porte une densité linéique de charge uniforme ρ_l. On s'intéresse à calculer le champ électrique à un point situé dans le plan y-z tel qu'indiqué sur la Figure 2.

a) En coordonnées cartésiennes, l'expression générale du champ est donnée par

$$\vec{E}(0,y,z) = E_x(0,y,z)\hat{a}_x + E_y(0,y,z)\hat{a}_y + E_z(0,y,z)\hat{a}_z$$

Y a-t-il une ou plusieurs des composantes du champ (E_x, E_y ou E_z) qui sont nulles au point considéré dans le plan y-z? **(Q1.2.1)**

b) Écrivez les intégrales permettant de calculer la ou les composantes non-nulles du champ. Il n'est pas nécessaire de résoudre les intégrales.

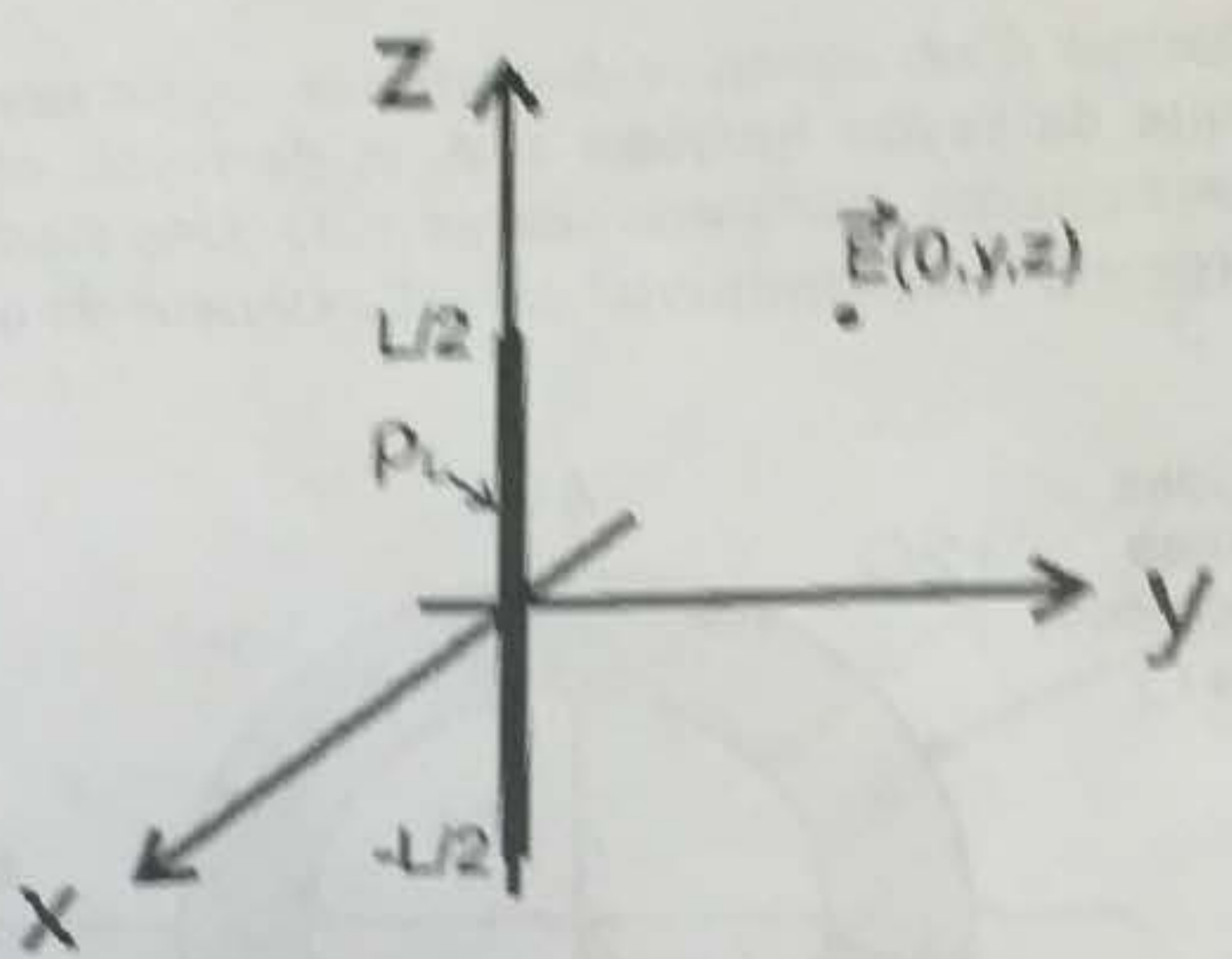


Figure 2

Question 3 (10 points) (Q1.2.3)

a) Décrivez ce qu'est la susceptibilité électrique d'un matériau?

b) Sachant que la permittivité réduite de l'eau est ε_r=80, si on applique un champ électrique $|\vec{E}|$=10 V/m , quelle sera la polarisation $|\vec{P}|$ dans l'eau? $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$ $\varepsilon_r = 1 + \chi_e$

c) Si le dipôle permanent de l'eau a une valeur $|\vec{p}| = 6.16\text{x}10^{-30}$ Cm et que la densité des molécules d'eau est de $33\text{x}10^{27}$ molécules/m^3, quel est le pourcentage effectif de molécules qui ont leur dipôle aligné sur le champ?

$\vec{P} = \langle\vec{p}\rangle \cdot N$

Question 4 (30 points)

On considère un semi-conducteur, de permittivité ε, portant une densité de charge volumique en [C/m^3] telle que représentée sur le Figure 4. C'est-à-dire une région chargée négativement avec une densité de charge volumique uniforme $\rho_v=-\rho_0$ entre $-a<x<-a/2$, un matériau chargé positivement avec une densité de charge volumique uniforme $\rho_v=\rho_0$ entre $-a/2<x<a/2$, et une densité de charge volumique uniforme $\rho_v=-\rho_0$ entre $a/2<x<a$. On considère que le matériau a des dimensions infinies, c'est-à-dire des longueurs >>2a, dans les directions y et z.

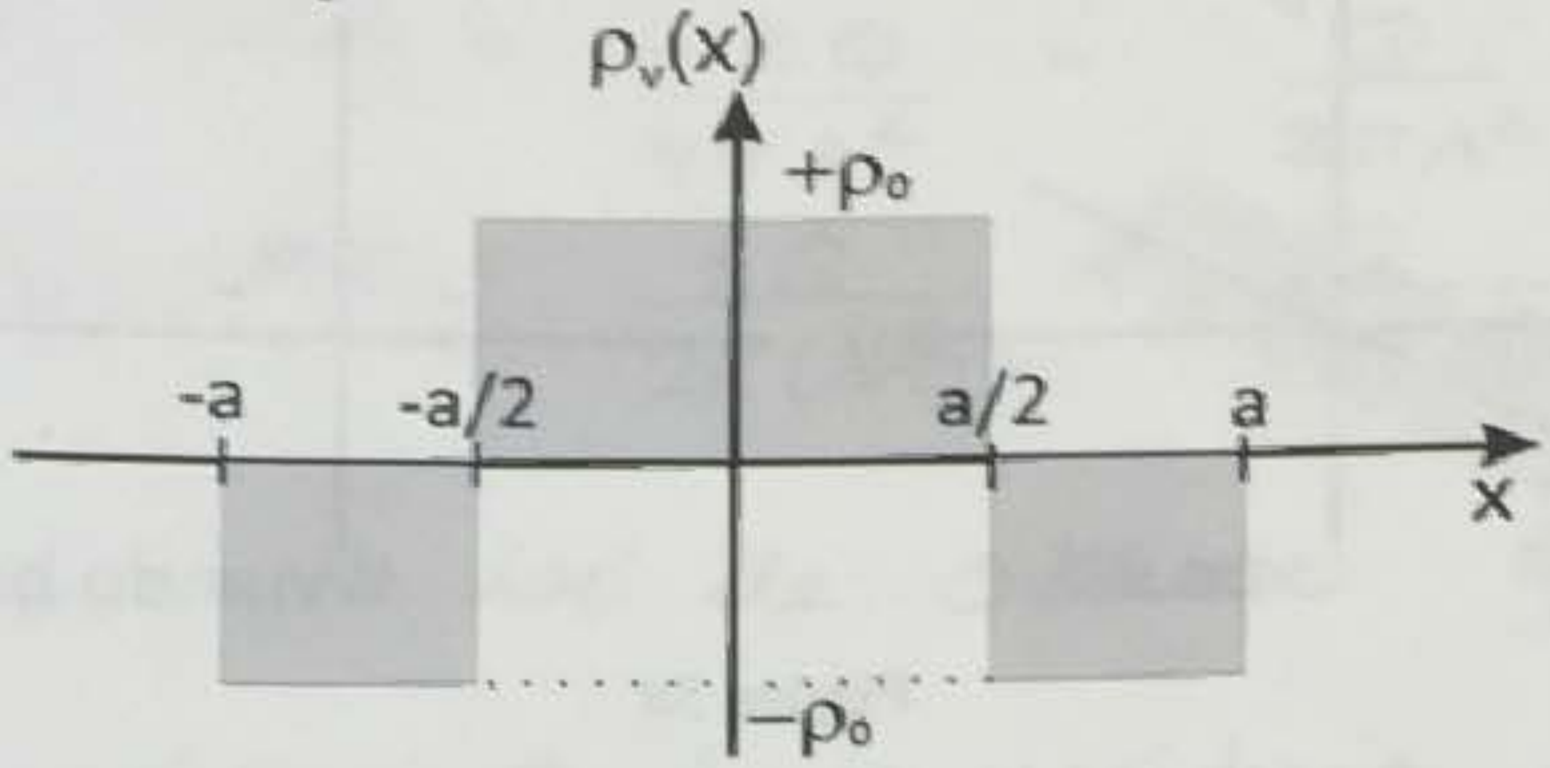


Figure 4

a) En procédant par inspection, que pouvez-vous déduire sur la variation du champ électrique le long de l'axe x. En particulier :
- Quelle est la valeur de $\vec{E}(x)$ à x=-a et à x=a? Gauss
- Quel est(sont) l'endroit(les endroits) où le module du champ électrique est maximal?
- Est-ce que le champ est continu ou discontinu. S'il y a des discontinuités, à quel endroit et pourquoi.
- Faites un graphique indiquant la variation attendue du champ le long de l'axe x.

b) En utilisant la loi de Poisson pour le potentiel, $\nabla^2 V = -\dfrac{\rho(x,y,z)}{\varepsilon}$, en vous souvenant que $\vec{E} = -\nabla V$, et en appliquant les conditions aux limites appropriées, trouvez l'expression précise du champ $\vec{E}(x)$ le long de l'axe x. Est-ce que l'expression obtenue est en accord avec votre graphique en a).

Question 5 (30 points):

On considère une électrode plane placée dans le plan x-y. L'électrode a une dimension infinie suivant $\hat{a}_x$ et une de largeur w suivant $\hat{a}_y$. Cette électrode transporte un courant total I_0 , en [A], suivant + $\hat{a}_x$ (Fig. 5a).

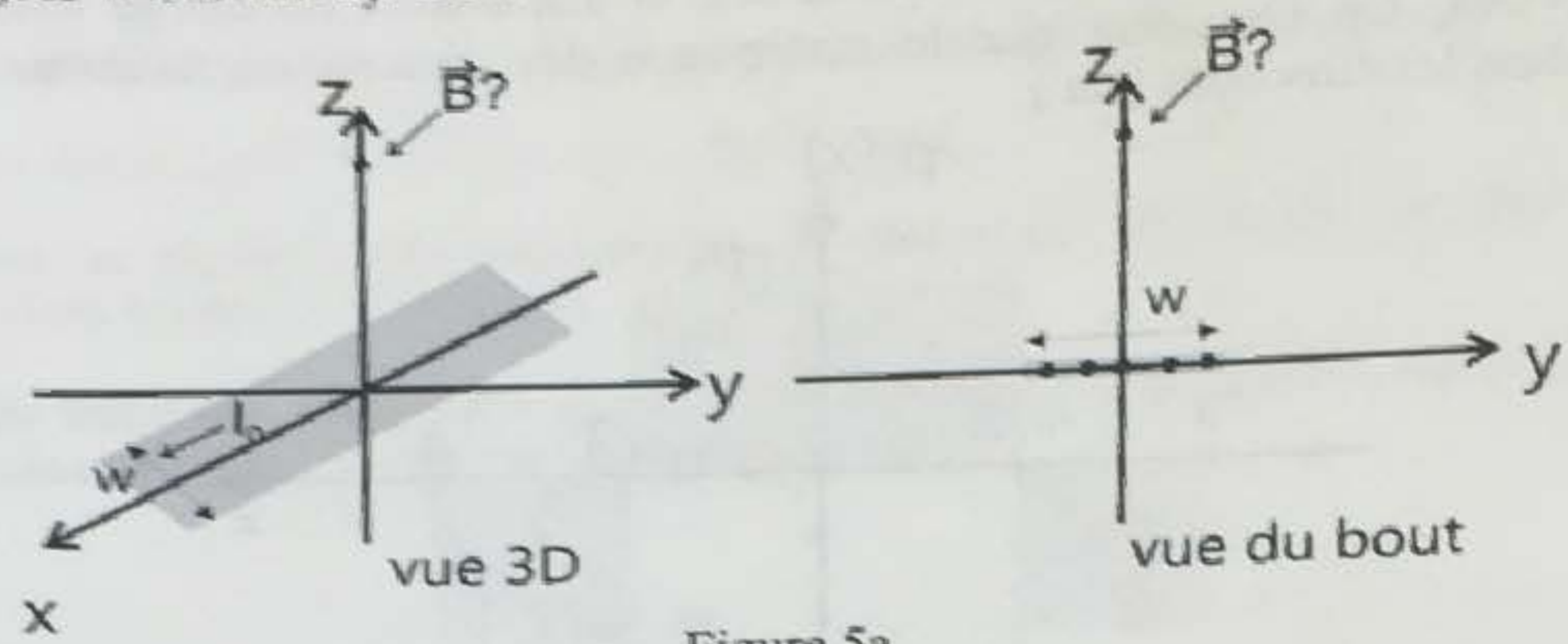


Figure 5a

a) Quelle est la densité de courant de surface, $\vec{J}_s$, sur l'électrode?

b) Quelle est l'orientation du champ magnétique $\vec{B}$ pour un point situé le long d'un axe passant en son centre (axe z sur la Figure 5a)? Considérez z>0 et z<0.

c) Quelle est l'expression du champ magnétique $\vec{B}$ pour un point situé le long d'un axe passant en son centre (axe z sur la Figure 5a)?

On considère maintenant deux électrodes planes infinies placées dans le plan x-y. Ces électrodes, de largeur w suivant $\hat{a}_y$, transportent des courants I_0 , en [A], suivant $+\hat{a}_x$ et sont espacées d'une distance w (Fig.5b).

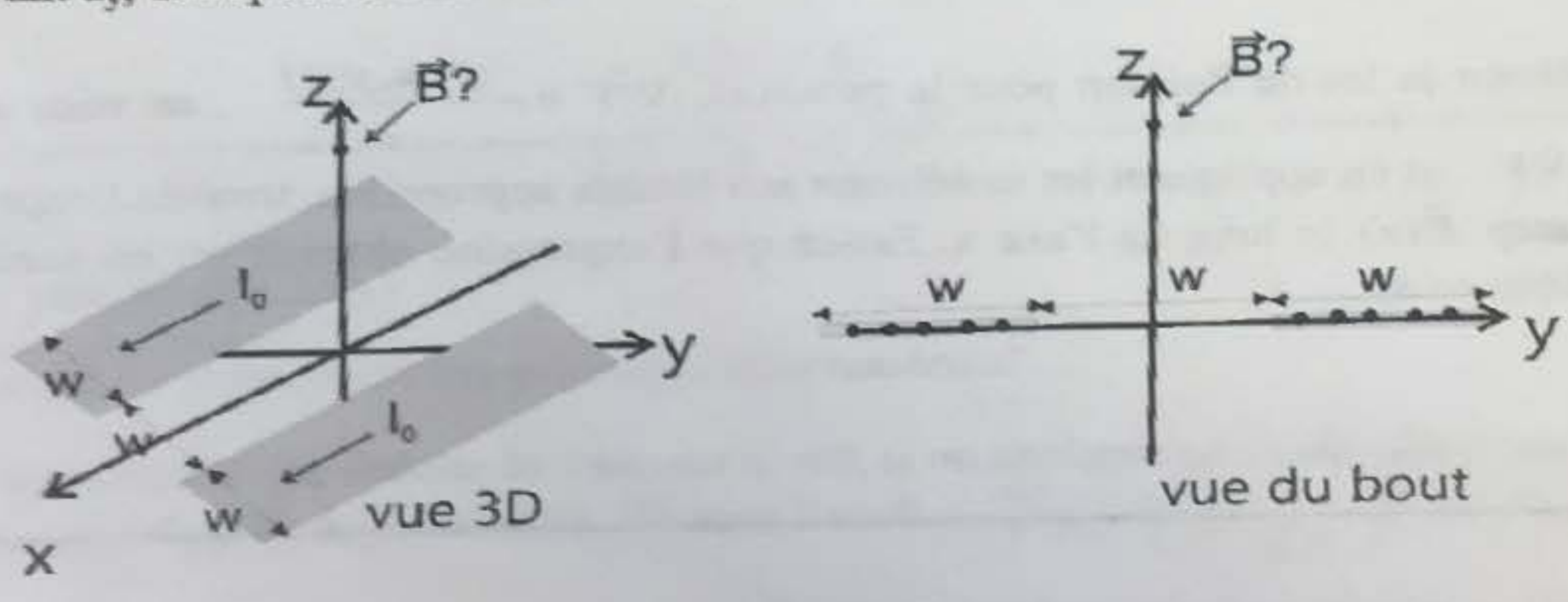


Figure 5b

d) Quel sera l'orientation du champ $\vec{B}$ le long de l'axe z situé à mi-chemin entre les deux électrodes?

e) À partir du calcul ou de l'expression trouvés en b), comment feriez-vous pour calculer le champ sur l'axe? Expliquez. Il n'est pas nécessaire de faire le calcul.

Examen partiel 2014

a) La charge présente sur les électrodes se répartit uniformément à la surface de celles-ci

$$\rho_s(r=A) = \frac{+2Q}{4\pi A^2} = \frac{Q}{2\pi A^2}$$

$$\rho_s(r=2A) = \frac{+Q}{2\pi(2A)^2} = \frac{Q}{8\pi A^2}$$

b) On utilise la loi de Gauss $\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{\int \rho_v dv}{\varepsilon}$

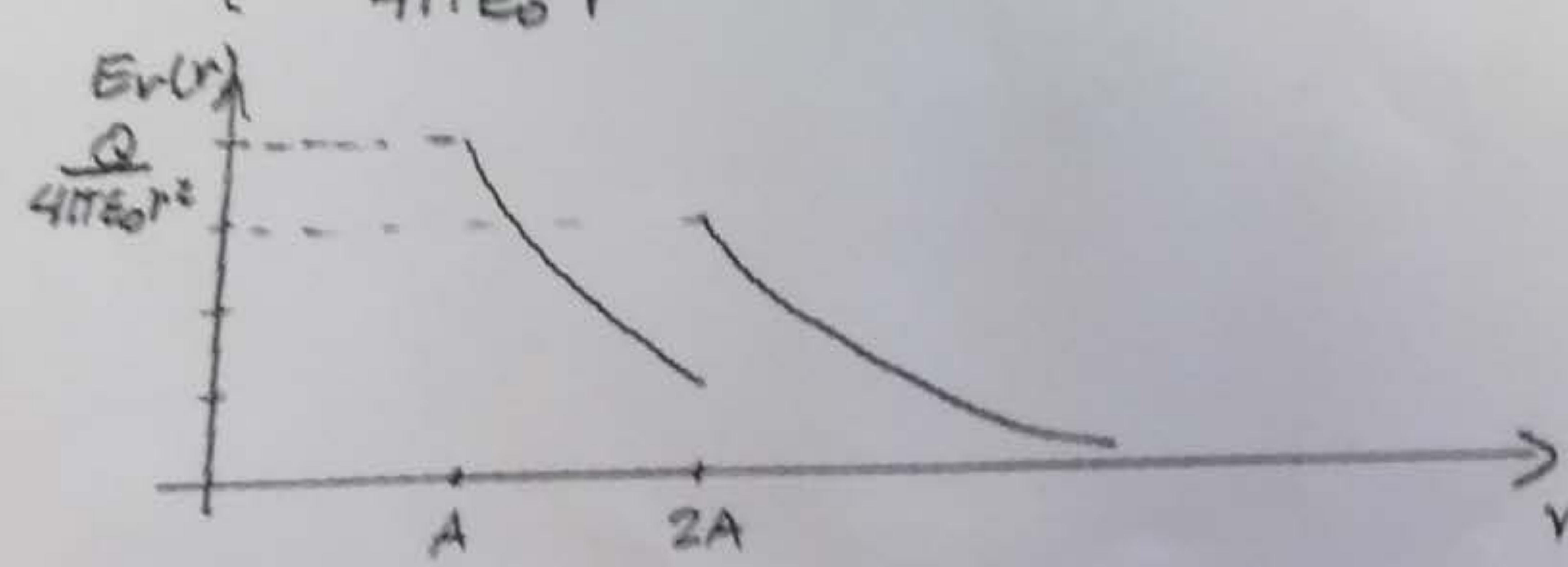
En considérant la symétrie sphérique
$\vec{E}(r) = E_r(r)\,\hat{a}_r \Rightarrow \oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = 4\pi r^2 E(r)$

On considère les trois régions

$$\frac{Q_{enc}}{\varepsilon} = \begin{cases} 0 & r < A \\ +\frac{2Q}{2\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0} & A < r < 2A \\ +\frac{3Q}{\varepsilon_0} & 2A < r \end{cases}$$

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} 0 & r < A \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\hat{a}_r & A < r < 2A \\ \frac{3Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\hat{a}_r & 2A < r \end{cases}$$

c)



d) $$W_e = \frac{1}{2}\iiint \varepsilon |E|^2 \, dv$$

$$W_e = \frac{1}{2}\left[4\pi\int_A^{2A} \frac{(2\varepsilon_0)\,Q^2\,r^2}{(4\pi)^2\,\varepsilon_0^2\,r^4}\,dr + 4\pi\int_{2A}^{\infty} \frac{\varepsilon_0\, 9Q^2\, r^2\,dr}{(4\pi)^2\varepsilon_0^2 r^4}\right]$$

$$W_e = \frac{1}{2}\left[\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\, 2\int_A^{2A} \frac{1}{r^2}\,dr + \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\, 9\int_{2A}^{\infty} \frac{1}{r^2}\,dr\right]$$

$$W_e = \frac{1}{2}\,\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left[2\left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_A^{2A} + 9\left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_{2A}^{\infty}\right]$$

$$W_e = \frac{1}{2}\,\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left[2\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{2A}\right) + 9\left(\frac{1}{2A} - \frac{1}{\infty}\right)\right]$$

$$W_e = \frac{1}{2}\,\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{A} + \frac{9}{2A}\right)$$

$$\boxed{W_e = \frac{11\,Q^2}{16\pi\varepsilon_0 A}}$$

Question 2:

a) $E_x(0,y,z) = 0, \; E_y(0,y,z) \neq 0, \; E_z(0,y,z) \neq 0$

b) $\vec{r} = 0\,\hat{a}_x + y\,\hat{a}_y + z\,\hat{a}_z = y\,\hat{a}_y + z\,\hat{a}_z$

$\vec{r}\,' = z'\,\hat{a}_z$

$dl = dz$

$$\vec{E}(0,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_{-L/2}^{L/2} \frac{\rho_L\, dl\, (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}\right]$$

$$\vec{E}(0,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_{-L/2}^{L/2} \frac{\rho_L\, dz'\,(y\,\hat{a}_y + (z-z')\,\hat{a}_z)}{(y^2 + (z-z')^2)^{3/2}}\right]$$

donc $$E_y(0,y,z) = \frac{y\,\rho_L}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-L/2}^{L/2} \frac{dz'}{(y^2 + (z-z')^2)^{3/2}}$$

$$E_z(0,y,z) = \frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-L/2}^{L/2} \frac{(z-z')\,dz'}{(y^2 + (z-z')^2)^{3/2}}$$

Question 3

a) La susceptibilité électrique représente la facilité avec laquelle le matériau est polarisé suite à l'application d'un champ électrique.

b) $|\vec{P}| = \varepsilon_0 \chi_e |\vec{E}|$

$\varepsilon_r = 1 + \chi_e$
$\Rightarrow \chi_e = \varepsilon_r - 1 = 79$

$|\vec{P}| = 79\, \varepsilon_0 |\vec{E}|$
$= 790 \times 8.85 \times 10^{-12}$
$= 7 \times 10^{-9} \left[\frac{C}{m^2}\right]$

c) $|\vec{P}| = N \langle \vec{p} \rangle \Rightarrow \langle \vec{p} \rangle = \frac{|\vec{P}|}{N}$

$\% = \frac{\langle \vec{p} \rangle}{|\vec{p}|} = \frac{|\vec{P}|}{N |\vec{p}|} = \frac{7 \times 10^{-9} \times 100}{33 \times 10^{27} \times 6.16 \times 10^{-30}}$

$\% = 3.4 \times 10^{-6}$

Question 4

a) $E(x=-a)=0$

$E(x=a)=0$

Linearly maximized & $x=-a/2$ at $x=a/2$
is linearly not continuous

b)

$$\nabla^2 V(x) = -\frac{\rho_v(x)}{\varepsilon} = \begin{cases} 0 & x<-a \\ +\frac{\rho_0}{\varepsilon} & -a<x<-a/2 \\ -\frac{\rho_0}{\varepsilon} & -a/2<x<a/2 \\ +\frac{\rho_0}{\varepsilon} & a/2<x<a \\ 0 & a<x \end{cases}$$

$$\frac{dV(x)}{dx} = \begin{cases} C_0 \\ \frac{\rho_0}{\varepsilon}x + C_1 \\ -\frac{\rho_0}{\varepsilon}x + C_2 \\ \frac{\rho_0}{\varepsilon}x + C_3 \\ C_4 \end{cases} \qquad E_x(x) = \begin{cases} -C_0 \\ -\frac{\rho_0}{\varepsilon}x - C_1 \\ \frac{\rho_0 x}{\varepsilon} - C_2 \\ -\frac{\rho_0 x}{\varepsilon} - C_3 \\ -C_4 \end{cases}$$

à $x = -a$ $\vec{E} = 0$ $\Rightarrow C_1 = 0$

continuité à $x = -a$ $\Rightarrow$ $C_1 = \frac{\rho_0 a}{\varepsilon}$

continuité à $x = -\frac{a}{2}$ $\Rightarrow$ $\frac{\rho_0 a}{2\varepsilon} - \frac{\rho_0 a}{\varepsilon} = -\frac{\rho_0 a}{2\varepsilon} - C_2$

$C_2 = 0$

continuité à $x = \frac{a}{2}$ $\Rightarrow$ $\frac{\rho_0 a}{2\varepsilon} = -\frac{\rho_0 a}{2\varepsilon} - C_3$

$C_3 = -\frac{\rho_0 a}{\varepsilon}$

continuité à $x = a$ $\Rightarrow$ $C_4 = 0$

donc

$$\vec{E}(x) = \begin{cases} 0 & x < -a \\ -\frac{\rho_0}{\varepsilon}(x+a)\,\vec{u}_x & -a < x < -a/2 \\ \frac{\rho_0 x}{\varepsilon}\,\vec{u}_x & -a/2 < x < a/2 \\ -\frac{\rho_0}{\varepsilon}(x-a)\,\vec{u}_x & a/2 < x < a \\ 0 & a < x \end{cases}$$

$\Rightarrow$ oui

Question 5

a) $\vec{J}_s = \frac{I_o}{W} \hat{a}_x$

b) suivant $(-\hat{a}_y)$

c) On utilise $\quad d\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \iint \frac{\vec{J}_s \times (\vec{r} - \vec{r}\,')\, ds}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}$

$\vec{r} = z\,\hat{a}_z$
$\vec{r}\,' = x'\hat{a}_x + y'\hat{a}_y \qquad (z=0)$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_{-W/2}^{W/2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(I_o/W)\ \hat{a}_x \times (-x'\hat{a}_x - y'\hat{a}_y + z\hat{a}_z)\, dx'dy'}{(x'^2 + y'^2 + z^2)^{3/2}}$$

$\hat{a}_x \times \hat{a}_x = 0 \qquad \hat{a}_x \times \hat{a}_y = \hat{a}_z \qquad \hat{a}_x \times \hat{a}_z = -\hat{a}_y$

$$\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{I_o}{W} \left[\cancel{\int_{-W/2}^{W/2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{-y'\hat{a}_z\, dx'dy'}{(x'^2 + y'^2 + z^2)^{3/2}}}^{\,0} + \int_{-W/2}^{W/2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z(-\hat{a}_y)\, dx'dy'}{(x'^2 + y'^2 + z^2)^{3/2}} \right]$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{I_o}{W} z(-\hat{a}_y) \left[\int_{-W/2}^{W/2} \left[\frac{x'}{(y'^2+z^2)\sqrt{x'^2+y'^2+z^2}} \right]_{-\infty}^{\infty} dy' \right]$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_o I_o}{\cancel{4}\pi W} z(-\hat{a}_y) \left[\int_{-W/2}^{W/2} \frac{\cancel{2}}{(y'^2+z^2)}\, dy' \right]$$

2

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_0 z}{2\pi W}(-\hat{a}_y) \quad \frac{1}{z}\tan^{-1}\left(\frac{y'}{z}\right)\Bigg|_{-W/2}^{W/2}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi W}(-\hat{a}_y)\ 2\tan^{-1}\left(\frac{W}{2z}\right)$$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I_0}{\pi W}\tan^{-1}\left(\frac{W}{2z}\right)(-\hat{a}_y)}$$

d) suivant $-\hat{a}_y$

e) on peut modifier les limites de l'intégrale

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_0 z}{2\pi W}(-\hat{a}_y)\left[\int_{-3W/2}^{-W/2}\frac{2}{(y'^2+z^2)}dy' + \int_{W/2}^{3W/2}\frac{2}{(y'^2+z^2)}dy'\right]$$

ou utiliser le principe de superposition

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{\pi}\frac{3I_0}{3W}\tan^{-1}\left(\frac{3W}{2z}\right)(-\hat{a}_y) + \frac{\mu_0}{\pi}\frac{I_0}{W}\tan^{-1}\left(\frac{W}{2z}\right)\hat{a}_y$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{\pi}\frac{I_0}{W}\left[\tan^{-1}\left(\frac{3W}{2z}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{W}{2z}\right)\right](-\hat{a}_y)$$