Mathématiques de l'ingénieur I (MAT-1900)
Examen partiel du 3 février 2017 – solutions

Question 1

(5 + 5 + 10 = 20 points)

Soit $z = 2 - i$. Exprimer, sous forme cartésienne, les nombres suivants.

a) $|z^2 + 8i| + iz$

$$\begin{aligned}|z^2+8i|+iz &= |(2-i)^2+8i| + i(2-i) = |4-4i+i^2+8i| + 2i - i^2 = |3+4i| + 2i + 1\\ &= \sqrt{3^2+4^2} + 2i + 1 = 6 + 2i.\end{aligned}$$

b) $\dfrac{z+4+2i}{z-i}$

$$\frac{z+4+2i}{z-i} = \frac{(2-i)+4+2i}{(2-i)-i} = \frac{6+i}{2-2i} = \frac{(6+i)(\overline{2-2i})}{|2-2i|^2} = \frac{(6+i)(2+2i)}{2^2+(-2)^2} = \frac{10+14i}{8} = \frac{5}{4} + \frac{7}{4}i.$$

c) $w = \dfrac{(2i)^{18}}{\left(\sqrt{12}-2i\right)^8}$

On a $(2i)^{18} = 2^{18}(i^2)^9 = 2^{18}(-1)^9 = -2^{18} = 2^{18}e^{i\pi}$.

Aussi, $r = |\sqrt{12} - 2i| = \sqrt{(\sqrt{12})^2 + (-2)^2} = \sqrt{12+4} = 4$

et $\cos\theta = \frac{\sqrt{12}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$ et donc $\theta = -\frac{\pi}{6}$. Ainsi,

$$\sqrt{12} - 2i = 4\left(\cos(-\tfrac{\pi}{6}) + i\sin(-\tfrac{\pi}{6})\right) = 4e^{-i\frac{\pi}{6}}.$$

D'après De Moivre

$$z = \frac{2^{18}e^{i\pi}}{\left(4e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)^8} = \frac{2^{18}e^{i\pi}}{2^{2\times 8}\,e^{-i\frac{8\pi}{6}}} = 2^{18-16}e^{i\pi(1+\frac{4}{3})} = 4e^{i\frac{\pi}{3}} = 4\left(\cos\tfrac{\pi}{3} + i\sin\tfrac{\pi}{3}\right) = 4\left(\tfrac{1}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 + i2\sqrt{3}.$$

Question 2

(15 points)

Exprimer, sous forme exponentielle ou polaire, toutes les solutions complexes de l'équation $z^3 = 3i\overline{z}^2$.

Posons $z = re^{i\theta}$.
D'après De Moivre, on a $z^3 = r^3 e^{3i\theta}$.
Aussi,

$$3i\overline{z}^2 = 3e^{i\frac{\pi}{2}}(re^{-i\theta})^2 = 3r^2 e^{i\frac{\pi}{2}}e^{-2i\theta} = 3r^2 e^{i(\frac{\pi}{2}-2\theta)}.$$

Donc,

$$z^3 = 3i\overline{z}^2 \quad \Longleftrightarrow \quad r^3 e^{3i\theta} = 3r^2 e^{i(\frac{\pi}{2}-2\theta)}.$$

Cette équation est équivalente au système suivant :

$$\begin{array}{rrcll} \text{modules égaux :} & r^3 & = & 3r^2, & \\ \text{arguments équivalents :} & 3\theta & = & \frac{\pi}{2} - 2\theta + 2\pi k & \qquad (k \in \mathbb{Z}). \end{array}$$

Soit $r = 0$, soit $r = 3$.
De plus $5\theta = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ et donc $\theta = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi}{5}k$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Les solutions sont $z = 0$ et

$$z_k := 3e^{i(\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi}{5}k)} \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

Il y 6 solutions distinctes : 0, z_0, z_1, z_2, z_3 et z_4.

Question 3
(15 points)

Soit $p(z) = z^4 - 2\sqrt{2}z^3 + 6\sqrt{2}z - 9$. Sachant que $p(\sqrt{2} + i) = 0$, exprimer p comme un produit de facteurs réels irréductibles de degrés 1 ou 2.

$p(z)$ est à coefficients réels.
Comme $w = \sqrt{2} + i$ est une racine de $p(z)$, on a que $\overline{w} = \sqrt{2} - i$ est aussi une racine de $p(z)$.
Ainsi, $p(z)$ possède le facteur réel irréductible

$$(z - w)(z - \overline{w}) = z^2 - 2(\operatorname{Re} w)z + |w|^2 = z^2 - 2(\sqrt{2})z + (\sqrt{2})^2 + (1)^2 = z^2 - 2\sqrt{2}z + 3.$$

On divise $p(z)$ par ce facteur :

$$\begin{aligned} p(z) &= (z^2 - 2\sqrt{2}z + 3)z^2 - 3z^2 + 6\sqrt{2}z - 9 = (z^2 - 2\sqrt{2}z + 3)(z^2 - 3) \\ &= (z^2 - 2\sqrt{2}z + 3)(z - \sqrt{3})(z + \sqrt{3}). \quad (\star) \end{aligned}$$

Les deux derniers facteurs étant réels et linéaires, ils sont irréductible.
Donc $(\star)$ est la réponse.

Question 4
(5 points)

Montrer que $y(x) = x + e^{3x}$ est une solution particulière de l'équation différentielle

$$(y')^2 = 3(y' + 1)(y - x) + 1.$$

D'une part,

$$(y')^2 = (1+3e^{3x})^2 = 9e^{6x} + 6e^{3x} + 1.$$

D'autre part,

$$3(y'+1)(y-x)+1 = 3(1+3e^{3x}+1)(x+e^{3x}-x)+1 = 3(2+3e^{3x})e^{3x}+1 = 9e^{6x}+6e^{3x}+1.$$

Les deux membres étant égaux, l'équation différentielle est vérifiée et $y(x)$ est une SP de celle-ci.

Question 5

(10 + 10 + 5 = 25 points)

Un réservoir contient au départ 2 ℓ d'eau dans laquelle est dissout 100 g de sel. On verse dans ce réservoir, à un débit de 3 ℓ/min, une solution saline dont la concentration est de 100 g/ℓ. Simultanément, on laisse s'échapper du réservoir 2 ℓ/min de la solution gardée en tout temps homogène.

a) Montrer que l'équation différentielle pour $C(t)$, la concentration de sel dans le réservoir au temps t, est

$$(2+t)C'(t) + 3C(t) = 300.$$

Le débit entrant est de 3 ℓ/min et le débit sortant est de 2 ℓ/min. Ainsi, le volume $V(t)$ (ℓ) de solution dans le réservoir au temps t est

$$V(t) = 2 + 3t - 2t = 2 + t.$$

Soit $Q(t)$ la quantité de sel (g) dans le réservoir au temps t. On a

$$\frac{dQ}{dt} = \underbrace{3}_{\ell/\text{min}} \cdot \underbrace{100}_{\text{g}/\ell} - \underbrace{2}_{\ell/\text{min}} \cdot \underbrace{C}_{\text{g}/\ell} = 300 - 2C.$$

Puisque $C(t) = \frac{Q(t)}{V(t)}$, on a $Q = CV$ et

$$Q' = C'V + CV' = C'(2+t) + C.$$

Ainsi,

$$C'(2+t) + C = Q' = 300 - 2C \quad \Longleftrightarrow \quad (2+t)C' + 3C = 300.$$

b) Trouver la solution générale de l'équation différentielle précédente : $(2+t)C' + 3C = 300$.
Il s'agit d'une équation différentielle séparable.

$$\begin{aligned}
(2+t)C' &= -3(C-100) \\
\frac{C'}{C-100} &= -\frac{3}{2+t} \\
\int \frac{1}{C-100}\,dC &= -\int \frac{3}{2+t}\,dt + k_0 \qquad (k_0 \in \mathbb{R}) \\
\ln|C-100| &= -3\ln|2+t| + k_0 \\
C - 100 &= \frac{k_1}{(2+t)^3} \qquad (k_1 \in \mathbb{R}) \\
C &= 100 + \frac{k_1}{(2+t)^3}.
\end{aligned}$$

c) Trouver la concentration de sel dans le réservoir 8 minutes après le début de l'expérience.
Au temps $t = 0$ on a $C = \frac{100}{2} = 50$. Ainsi,

$$50 = 100 + \frac{k_1}{(2+0)^3} = 100 + \frac{k_1}{8} \quad \Longleftrightarrow \quad k_1 = 8(50 - 100) = -400.$$

La SP du problème est donc

$$C = 100 - \frac{400}{(2+t)^3}.$$

En $t = 8$, on trouve

$$C = 100 - \frac{400}{(2+8)^3} = 100 - \frac{400}{1000} = \frac{996}{10} = 99,6 \text{ (g/}\ell\text{)}.$$

Question 6

(20 points)

Compléter la grille suivante en inscrivant un et un seul $\times$ par colonne.

Une bonne réponse vaut +4 points, une mauvaise réponse −1 point et une absence de réponse 0 point. La note minimale pour cette question est de 0 point.

Aucune justification requise.

	a)	b)	c)	d)	e)
VRAI		$\times$	$\times$		$\times$
FAUX	$\times$			$\times$	

Pour chacun des énoncés suivants, dire s'il est vrai ou faux.

a) Le lieu géométrique dans $\mathbb{C}$ décrit par l'équation $|z + 5 + i| = |z|$ est un cercle.
FAUX. $0 = |z+5+i|^2 - |z|^2 = (x+5)^2 + (y+1)^2 - x^2 - y^2 = 10x + 25 + 2y + 1$ est une droite.

b) Si $z \neq 1$, alors nécessairement, $\left|\frac{1-\overline{z}}{1-z}\right| = 1$.

VRAI. $\left|\frac{1-\overline{z}}{1-z}\right| = \frac{|\overline{1-z}|}{|1-z|} = \frac{|1-z|}{|1-z|} = 1$.

c) $\tan\theta = i \cdot \frac{1-e^{2i\theta}}{1+e^{2i\theta}}$ pour tout θ tel que $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$.

VRAI. D'après Euler, $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} \cdot \frac{2}{e^{i\theta}+e^{-i\theta}} = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{e^{i\theta}+e^{-i\theta}} = (-i) \cdot \frac{e^{2i\theta}-1}{e^{2i\theta}+1} = i \cdot \frac{1-e^{2i\theta}}{1+e^{2i\theta}}$.

d) $\operatorname{Im}\left(e^{\sqrt{2}e^{3i\pi/4}}\right) = e$.

FAUX. $\operatorname{Im}(e^{\sqrt{2}e^{3i\pi/4}}) = \operatorname{Im}\left(e^{\sqrt{2}(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i)}\right) = \operatorname{Im}(e^{-1+i}) = \operatorname{Im}\left(e^{-1}(\cos 1 + i\sin 1)\right) = \frac{\sin 1}{e}$.

e) L'équation différentielle $(y')^3 + y'' = 2x + y^2$ est d'ordre 2.

VRAI. Elle est d'ordre 2 puisque y'' est présente, mais aucune dérivée d'ordre supérieur ne l'est.