UNIVERSITÉ
LAVAL

Faculté des Sciences et de génie
Département de génie électrique et de génie informatique

GEL-2001 Analyse des signaux
Jérôme Genest

Examen final

Date: Jeudi le 10 décembre 2020

Durée: de 8h30 à 11h00

Salle: PLT-1112

Cet examen vaut 45% de la note finale.

Remarques:

i) L'utilisation d'une calculatrice est permise.

ii) Aucun document n'est permis durant l'examen.

iii) Seule la liste des formules fournie à la fin du questionnaire est permise.

iv) Votre carte d'identité doit être placée sur votre bureau en conformité avec le règlement de la Faculté.

Problème 1 (10 points)

On échantillonne la réponse impulsionnelle $h(t)$ d'un filtre de 1er ordre tel que $RC = 1$.

a) Calculez et tracez $|H(\omega)|$, le module de la fonction de transfert du filtre.

b) Si la fréquence d'échantillonnage est ω_s, tracez $|H_s(\omega)|^2$ le module au carré de la fonction de transfert de la réponse impulsionnelle échantillonnée $h_s(t)$.

c) Quelle est la fréquence d'échantillonnage minimale si on désire que la distortion sur la densité spectrale d'énergie soit inférieure à 1% en tout point ? (notez qu'il n'y a pas d'autre filtre antialiasing que le RC considéré dans ce problème)

Problème 2 (12 points)

Un filtre séparant le signal en deux parties et combinant les deux portions après un délai différentiel est très commun dans plusieurs domaines. En optique c'est l'interféromètre de Michelson, en acoustique c'est un écho, en traitement du signal on parle de filtre à 2 coefficients (taps). Dans tous les cas, on peut écrire:

$$y(t) = a_1 x(t - \tau_1) + a_2 x(t - \tau_2)$$

a) Écrire ce filtre linéaire et invariant dans le temps sous forme de réponse impulsionnelle.

b) Tracez la réponse impulsionnelle de ce filtre.

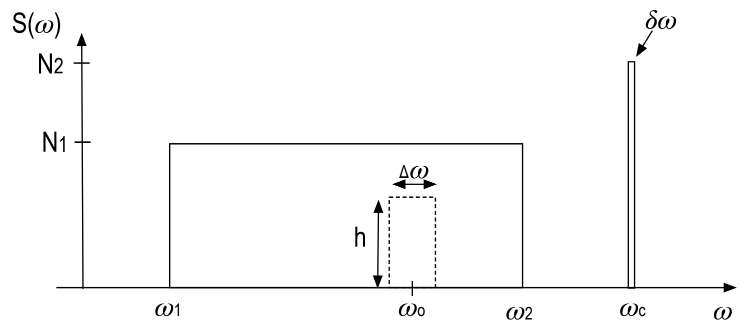
c) Calculez et tracez la fonction de transfert en module et en phase pour $a_1 = 1/2$, $a_2 = -1/2$, $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = 1\,\mu$s.

d) Avec les valeurs utilisées en c), quelle est la sortie du filtre pour une entrée sinusoïdale de fréquence $f = 1$ MHz ($\omega = 2\pi f$)?

e) Commentez la réponse obtenue en d) en fournissant une interprétation temporelle.

f) Comparez ce filtre à un dérivateur en supposant par exemple que la sortie est échantillonnée à 1 MHz.

Problème 3 (11 points)



Un appareil qui mesure le spectre d'un signal est nommé analyseur de spectre. De manière générale, on peut conceptualiser un analyseur de spectre comme un filtre ayant une largeur étroite en fréquence et ayant une fréquence centrale accordable. Le filtre est balayé en fréquence et l'affichage de l'appareil donne l'énergie passant dans la bande du filtre en fonction de la fréquence centrale ω_0

La figure ci-haut montre par exemple un filtre en boite de largeur $\Delta\omega$ et de hauteur h positionné à une fréquence ω_0. L'aire de la boite est $A = h\Delta\omega$. Le signal $S(\omega)$ est composé de 2 boites: une de niveau N_1 entre ω_1 et ω_2 et une ayant un niveau N_2 centrée sur ω_c de largeur $\delta\omega$.

$$H(\omega) = h\text{Rect}\left(\frac{\omega - \omega_o}{\Delta\omega}\right) \qquad S(\omega) = N_1\text{Rect}\left(\frac{\omega - (\omega_1 + \omega_2)/2}{\omega_2 - \omega_1}\right) + N_2\text{Rect}\left(\frac{\omega - \omega_c}{\delta\omega}\right).$$

Dans tout le problème, on a $\delta\omega << \Delta\omega << \omega_2 - \omega_1$.

Notes sur les unités: Tout est défini tel que vu au cours. Vous pouvez supposer que $s(t)$ est un signal en Volts dans une résistance de 1 Ω si cela vous aide. Le spectre $S(\omega)$ est défini comme la TF de $s(t)$ selon la définition utilisée au cours: $s(t) \leftrightarrow S(\omega)$.

a) Tracez l'énergie passant dans le filtre en fonction de la fréquence ω_o, pour toutes les fréquences entre ω_1 et ω_c.

b) Le balayage de la fréquence ω_o du filtre sur le signal revient à faire quelle opération sur le spectre qu'on désire mesurer ?

c) Si vous êtes intéressé à la densité spectrale d'énergie entre ω_1 et ω_2, que devez vous faire avec la mesure obtenue en a) pour calibrer correctement l'échelle verticale de votre mesure?

d) Si au contraire, vous désirez obtenir l'énergie totale autour de ω_c, comment tenez vos compte de l'effet du filtre passe-bande?

e) Commentez sur la difficulté à calibrer simultanément un spectre mesuré selon que le contenu spectral est beaucoup plus large ou beaucoup plus étroit que la résolution (la largeur spectrale du filtre) de l'instrument.

Problème 4 (12 points)

Soit un message $m(t) = \mathrm{Sa}^3(2\pi f t/3)$, avec $f = 100$ kHz.

Vous devez transmettre ce message en modulation d'amplitude (AM) en bande latérale unique (BLU) supérieure sans porteuse.

Pour la question b), vous disposez uniquement de deux oscillateurs (opération $\times \cos(\omega_x t)$) pour lesquels vous pouvez décider les fréquences selon vos besoins. Vous avez également un filtre passe-bande de 100 kHz de large, centré sur 20 MHz.

Pour la question d) vous avez le droit aux mêmes composantes (2 nouveaux oscillateurs qui peuvent avoir des paramètres différents et un nouveau filtre identique).

a) Tracez le spectre du message $M(\omega)$ (Nous ne sommes pas tant intéressés par la hauteur, montrez que vous savez la largeur et la forme du spectre);

b) Décrivez, via un diagramme en blocs, le schéma de modulation requis pour transmettre le message en BLU à l'aide d'une porteuse à $f_c = 50$ MHz (la porteuse n'étant pas transmise). Expliquez l'utilité de chaque bloc et notez les valeurs importantes;

c) Tracez le spectre du signal ainsi transmis, que vous noterez $S(\omega)$;

d) Décrivez, toujours à l'aide d'un diagramme en blocs, le schéma de démodulation nécessaire pour retrouver le message, en supposant qu'il y a d'autres canaux de part et d'autre du votre à ω_c;

e) À quoi sert le filtre à l'étape de démodulation. Est-ce qu'il y a une autre problème potentiel?

f) Étant donné que la porteuse n'est pas explicitement transmise, discutez les impacts d'une erreur de fréquence et/ou de phase à la démodulation.

fonction temporelle	transformée
$\mathrm{Rect}\left(t/\tau\right)^{(1)}$	$\tau\,\mathrm{Sa}\left(\omega\tau/2\right)$
$\mathrm{Tri}\left(t/\tau\right)^{(2)}$	$\tau\,\mathrm{Sa}^2\left(\omega\tau/2\right)$
$\delta\left(t\right)$	1
1	$2\pi\delta\left(\omega\right)$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta\left(\omega-\omega_0\right)$
$\mathrm{U}(t)$	$1/j\omega+\pi\delta\left(\omega\right)$
$\mathrm{Sgn}(t)$	$2/j\omega$
$\delta_{T_0}\left(t\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta\left(t-nT_0\right)$	$\omega_0\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega-n\omega_0\right)$
$e^{-\beta t}\,\mathrm{U}\left(t\right)$	$\dfrac{1}{\beta+j\omega}$
$e^{-\beta\lvert t\rvert}$	$\dfrac{2\beta}{\beta^2+\omega^2}$
$\cos\left(\omega_0 t\right)$	$\pi\delta\left(\omega-\omega_0\right)+\pi\delta\left(\omega+\omega_0\right)$
$\sin\left(\omega_0 t\right)$	$j\pi\delta\left(\omega+\omega_0\right)-j\pi\delta\left(\omega-\omega_0\right)$
$\delta'\left(t\right)$	$j\omega$
$\delta''\left(t\right)$	$\left(j\omega\right)^2$

domaine temporelle	domaine fréquentiel
$f\left(t\right)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F\left(\omega\right)e^{j\omega t}d\omega$	$F\left(\omega\right)=\int_{-\infty}^{\infty}f\left(t\right)e^{-j\omega t}dt$
$f\left(t\right)$	$F\left(\omega\right)$
$F\left(t\right)$	$2\pi f\left(-\omega\right)$
$f\left(t+a\right)$	$e^{ja\omega}F(\omega)$
$e^{jbt}f\left(t\right)$	$F\left(\omega-b\right)$
$f\left(at\right)$	$\dfrac{1}{\lvert a\rvert}F\left(\dfrac{\omega}{a}\right)$
$t^n f\left(t\right)$	$\left(j\right)^n\dfrac{d^n}{d\omega^n}F\left(\omega\right)$
$\dfrac{d^n}{dt^n}f\left(t\right)$	$\left(j\omega\right)^n F\left(\omega\right)$
$f\left(t\right)\cos\left(\omega_0 t\right)$	$½F\left(\omega-\omega_0\right)+½F\left(\omega+\omega_0\right)$
$f\left(t\right)\sin\left(\omega_0 t\right)$	$\dfrac{1}{2j}F\left(\omega-\omega_0\right)-\dfrac{1}{2j}F\left(\omega+\omega_0\right)$
$f\left(t\right)*g\left(t\right)$	$F\left(\omega\right)G\left(\omega\right)$
$f\left(t\right)g\left(t\right)$	$\dfrac{1}{2\pi}\cdot\left\{F\left(\omega\right)*G\left(\omega\right)\right\}$
$\omega_0\,\mathrm{Sa}\left(t\omega_0\right)$	$\pi\mathrm{Rect}\left(\omega/2\omega_0\right)$
$\omega_0\,\mathrm{Sa}^2\left(t\omega_0\right)$	$\pi\,\mathrm{Tri}\left(\omega/2\omega_0\right)$

---

[1] $\mathrm{Rect}\left(\dfrac{t-t_0}{\tau}\right)$ rectangle de hauteur un, centré sur $t=t_0$, et de longueur τ.

[2] $\mathrm{Tri}\left(\dfrac{t-t_0}{\tau}\right)$ triangle de hauteur un, τ centré sur $t=t_0$, avec un base de longueur 2τ.

$f(t) \quad \Leftrightarrow \quad F(\omega)=TF\left\{f(t)\right\}$ $F(\omega)=A(\omega)+jB(\omega)=\left|F(\omega)\right|e^{jArg(\omega)}$ $E(\omega)=\dfrac{1}{2\pi}\left|F(\omega)\right|^{2}$

fonction réelle en temps

$f(t)$ réelle $\Leftrightarrow \quad F^{*}(\omega)=F(-\omega)$	
paire	**impaire**
$A(\omega)=\operatorname{Re}F(\omega)$	$B(\omega)=\operatorname{Im}F(\omega)$
$\left|F(\omega)\right|$	$\operatorname{Arg}F(\omega)$
$f(t)=f_{paire}(t)+f_{impaire}(t)$	
$f_{paire}(t) \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Re}F(\omega)$	$f_{impaire}(t) \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Im}F(\omega)$

fonction delta, etc.
$f_p(t) \Leftrightarrow 2\pi \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} F_{Série}(n)\,\delta(\omega-n\omega_0)$ $f_p(t)$ périodique avec période T_0, $T_0\omega_0=2\pi$ $F_{Série}(n)=\dfrac{1}{T_0}\cdot F_r(\omega)\Big|_{\omega=n\omega_0}$, $f_r(t)=\begin{cases} f_p(t) & \dfrac{-T_o}{2}<t<\dfrac{T_o}{2} \\ 0 & ailleurs \end{cases}$
$f'(a)=\left[\lim\limits_{t\to a^{+}} f(t)-\lim\limits_{t\to a^{-}} f(t)\right]\delta(t-a)$ $t=a$ est un point de discontinuité de $f(t)$
$h(t)\,\delta(t-t_0)=h(t_0)\,\delta(t-t_0)$ propriété d'échantillonnage
$x_0 \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-nx_0)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi nx/x_0}$

domaine temporelle	**domaine fréquentiel**
$f(t)$ pas continue	décroissance $1/\omega$
$f(t)$ continue $f'(t)$ pas continue	décroissance $1/\omega^{2}$
$f(t), f'(t)$ continue $f''(t)$ pas continue	décroissance $1/\omega^{3}$
$E=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|f(t)\right|^{2}dt$	$E=\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|F(\omega)\right|^{2}d\omega$

convolution
$f(t)*g(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u)\,g(t-u)\,du$
$g(t)*\delta(t-t_0)=g(t-t_0)$
$\dfrac{d}{dt}\left\{f(t)*g(t)\right\}=\left\{\dfrac{d}{dt}f(t)\right\}*g(t)$

$\cos x = \dfrac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$	$e^{jx} = \cos x + j \sin x$
$\sin x = \dfrac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$	$e^{jn\pi} = (-1)^n$
$\cos^2\theta = \dfrac{1}{2}[1 + \cos 2\theta]$	$\sin^2\theta = \dfrac{1}{2}[1 - \cos 2\theta]$
$\sin\theta\cos\varphi = \dfrac{1}{2}\left[\sin(\theta-\varphi) + \sin(\theta+\varphi)\right]$	$\cos\theta = \sin(\pi/2 - \theta)$
$\sin\theta\sin\varphi = \dfrac{1}{2}\left[\cos(\theta-\varphi) - \cos(\theta+\varphi)\right]$	$\sin(\theta \pm \varphi) = \sin\theta\cos\varphi \pm \cos\theta\sin\varphi$
$\cos\theta\cos\varphi = \dfrac{1}{2}\left[\cos(\theta-\varphi) + \cos(\theta+\varphi)\right]$	$\cos(\theta \pm \varphi) = \cos\theta\cos\varphi \mp \sin\theta\sin\varphi$

$\displaystyle\int e^{ax} \quad dx = \frac{1}{a} e^{ax}$	$\displaystyle\int x\cos ax \quad dx = \frac{1}{a^2}\cos ax + \frac{x}{a}\sin ax$
$\displaystyle\int e^{bx}\sin ax \quad dx = \frac{1}{a^2+b^2} e^{bx}(b\sin ax - a\cos ax)$	$\displaystyle\int xe^{ax} \quad dx = \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2}\right)e^{ax}$
$\displaystyle\int e^{bx}\cos ax \quad dx = \frac{1}{a^2+b^2} e^{bx}(a\sin ax + b\cos ax)$	$\displaystyle\int x^2 e^{ax} \quad dx = \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3}\right)e^{ax}$