

GEL4200: Communications numériques 2011 Examen final

*Mercredi le 27 avril 2011; Durée: 13h30 à 15h20
Documentation fournie; une calculatrice permise*

Problème 1 (25 points sur 100)

Supposons que nous avons un PLL d'ordre deux où le filtre de la boucle est

$$F(\omega) = \frac{1}{j\omega + 1}$$

et le gain est unitaire (soit $K_0=1$).

- A. (10 points) Donnez l'estimé de la phase $\hat{\theta}(t)$ quand il y a une saute de phase de .1 radian à $t=0$.
- B. (5 points) Quelle est l'erreur asymptotique?
- C. (10 points) Quelle est l'excursion maximale de l'estimé de la phase en pourcentage de la saute de .1 radian?

$g(t)$	$G(j\omega)$
$\frac{1}{\omega_0} u(t) [1 - e^{-\omega_0 t}]$	$\frac{1}{j\omega} \frac{1}{j\omega + \omega_0}$
$\frac{1}{\omega_0} u(t) \left[t - \frac{1 - e^{-\omega_0 t}}{\omega_0} \right]$	$\frac{1}{(j\omega)^2} \frac{1}{j\omega + \omega_0}$
$1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\left(\omega_n t \sqrt{1-\zeta^2} + \cos^{-1} \zeta\right)$	$\frac{1}{j\omega} \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + j\omega 2\zeta\omega_n + \omega_n^2}$

GEL4200: Communications numériques 2011 Examen final

*Mercredi le 27 avril 2011; Durée: 13h30 à 15h20
Documentation fournie; une calculatrice permise*

Problème 1 (25 points sur 100)

Suppose we have a second order PLL whose loop filter has frequency response :

$$F(\omega) = \frac{1}{j\omega + 1}$$

and unitary loop gain (that is, $K_0=1$).

- A. (10 points) Give the phase estimate $\hat{\theta}(t)$ when there is a phase jump of height .1 radians at $t=0$.
- B. (5 points) What is the asymptotic error?
- C. (10 points) What is the maximal excursion of the phase estimate as a percentage of the phase jump of .1 radians?

$g(t)$	$G(j\omega)$
$\frac{1}{\omega_0} u(t) [1 - e^{-\omega_0 t}]$	$\frac{1}{j\omega} \frac{1}{j\omega + \omega_0}$
$\frac{1}{\omega_0} u(t) \left[t - \frac{1 - e^{-\omega_0 t}}{\omega_0} \right]$	$\frac{1}{(j\omega)^2} \frac{1}{j\omega + \omega_0}$
$1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\left(\omega_n t \sqrt{1-\zeta^2} + \cos^{-1} \zeta\right)$	$\frac{1}{j\omega} \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + j\omega 2\zeta\omega_n + \omega_n^2}$

Problème 2 (30 points sur 100)

Voici la matrice de contrôle pour un code en bloc:

$$H^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- A. (10 points) Quelle est l'implémentation en registres à décalage de l'encodeur?
- A. (10 points) Quelle est la distance minimale?
- B. (10 points) Donnez la table des syndromes.

Problème 2 (30 points sur 100)

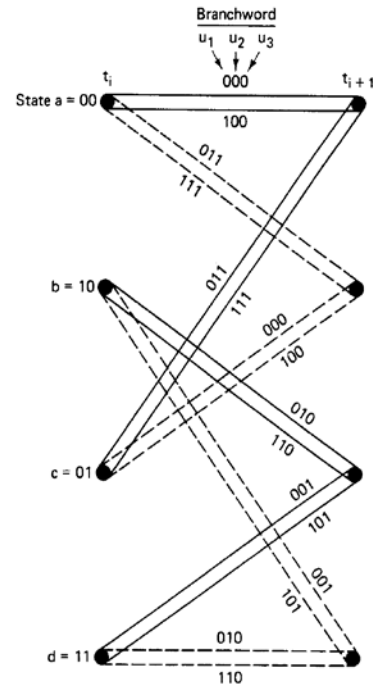
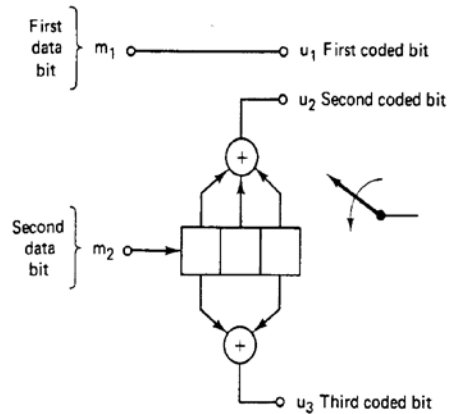
Consider the following parity control matrix for a block code:

$$H^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

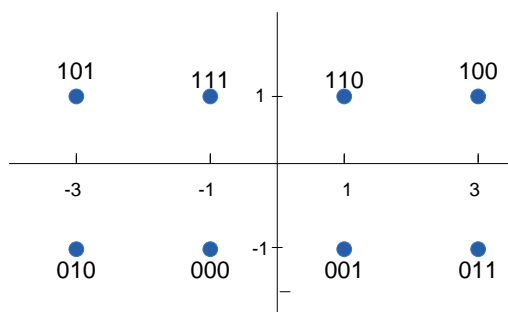
- A. (10 points) What is the shift register implementation of the encoder?
- A. (10 points) What is the minimal distance?
- B. (10 points) Give the syndrome table.

Problème 3 (20 points sur 100)

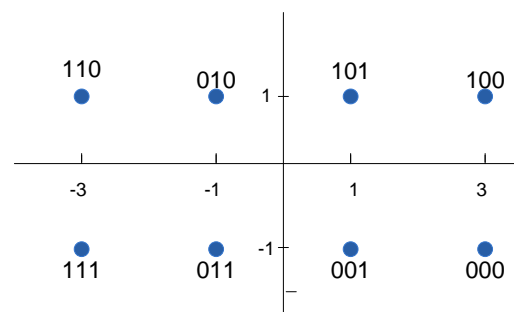
Voici un encodeur TCM.



Considérez pour le 8 QAM les deux correspondances suivantes entre les symboles logiques et les coordonnées I/Q. Laquelle des deux correspondances sera la plus performante pour le TCM, et pourquoi?



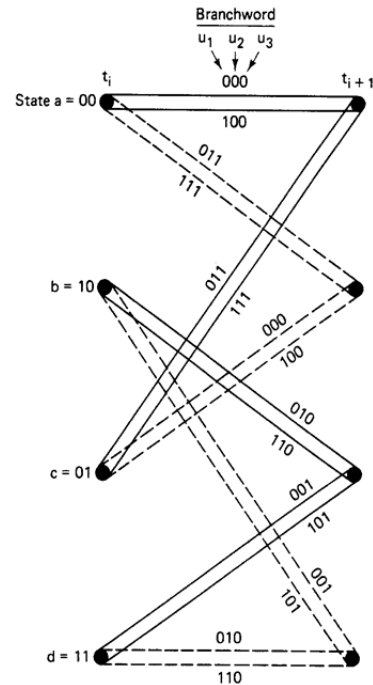
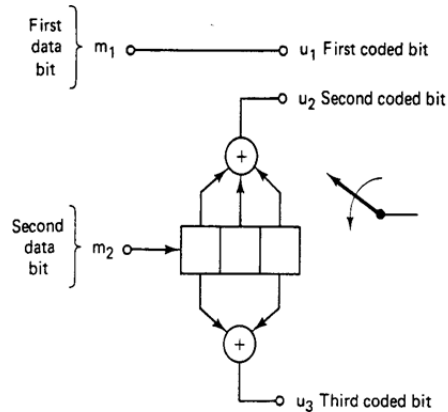
Option A



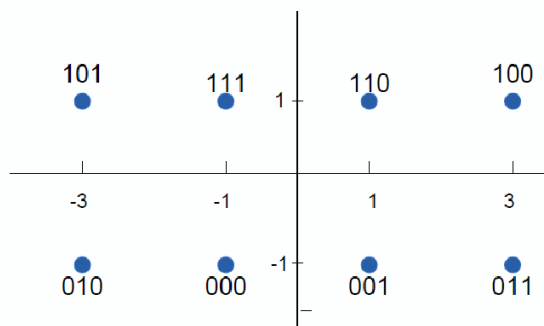
Option B

Problème 3 (20 points sur 100)

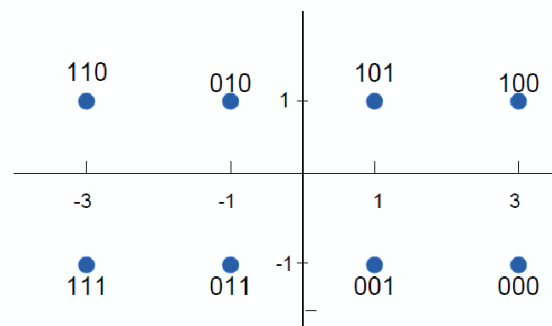
TCM encoder



Consider the use of 8 QAM with either of the two following constellation mappings between the logical symbols and the I/Q coordinates. Which of the mappings is most appropriate for TCM and why?



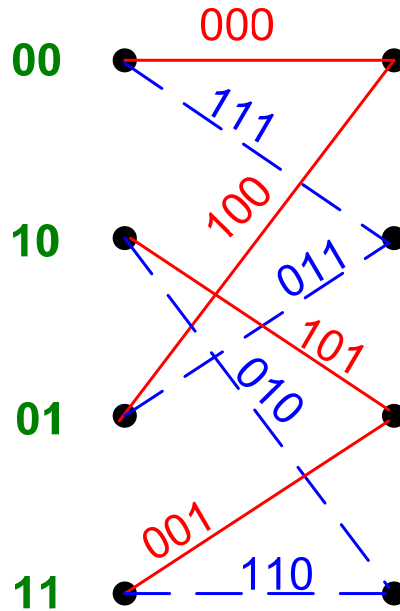
Option A



Option B

Problème 4 (25 points sur 100)

Considérons le treillis d'encodage suivant pour un code convolutif.

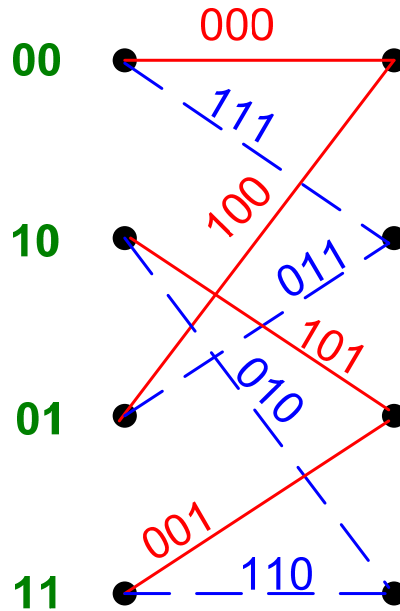


- A. (5 points) Quel est le taux de codage? Quel est la longueur de contrainte?
- B. (20 points) Trouvez la distance libre d_f du code convolutif en supposant que les décisions sont fermes. Combien de chemins y a-t-il à cette distance minimale?

SVP utilisez les feuilles de treillis de décodage fournies. Mettez ces feuilles dans votre cahier bleu.

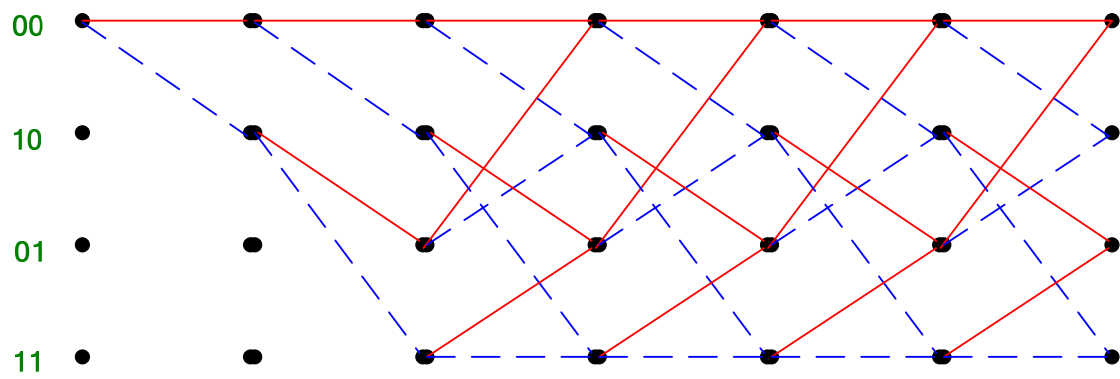
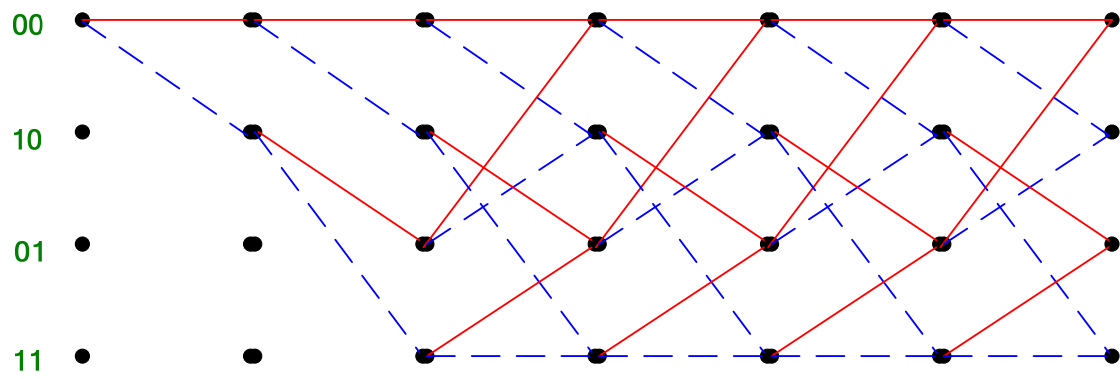
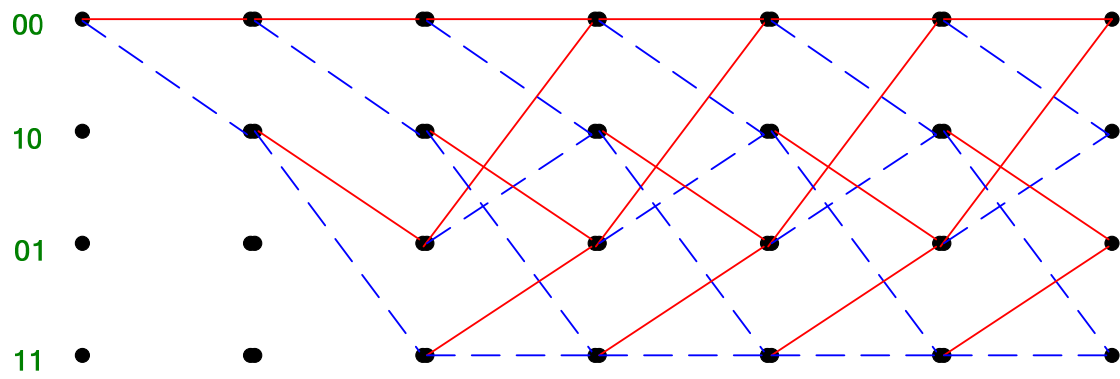
Problème 4 (25 points sur 100)

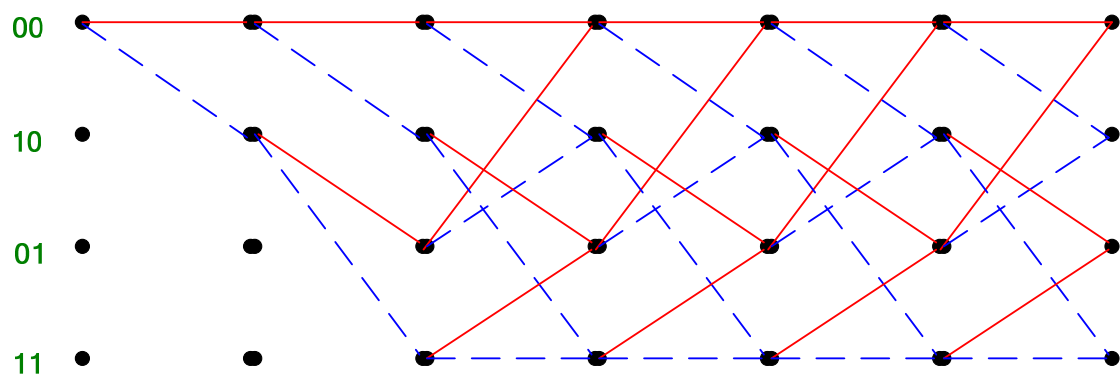
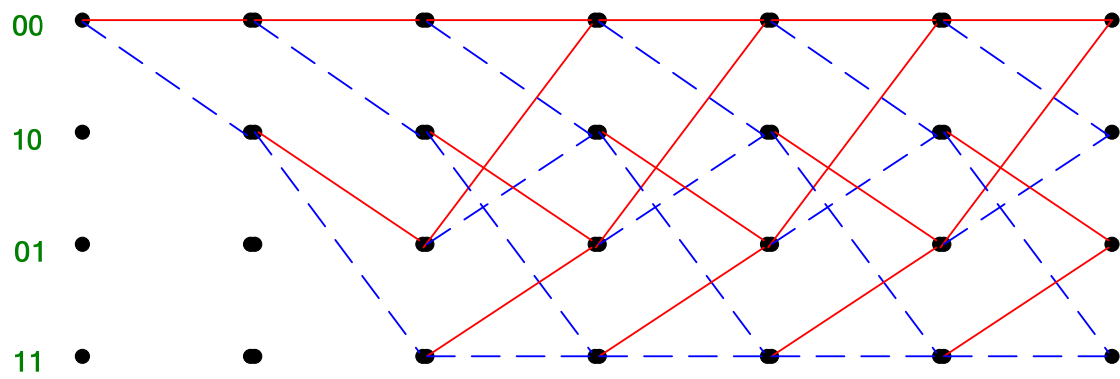
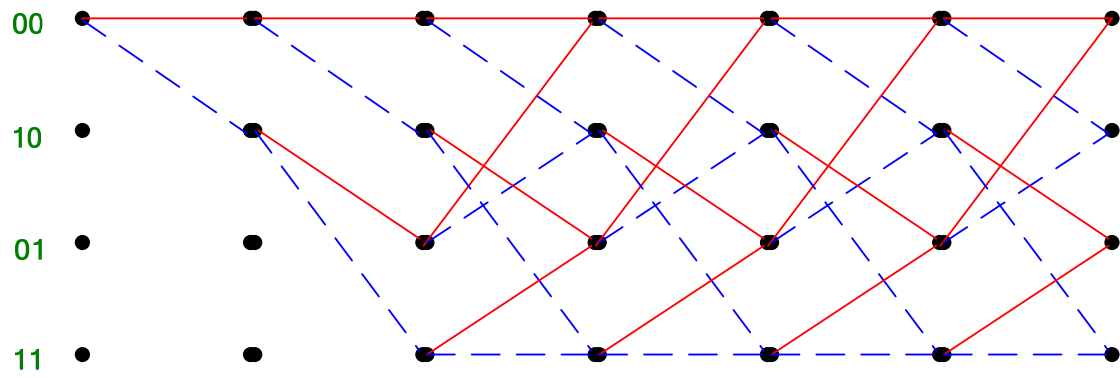
Consider the following encoding trellis for a convolutional code.



- A. (5 points) What is the code rate? What is the constraint length?
- B. (20 points) Find the free distance (or minimal distance) d_f of the convolutional code using hard decisions. How many paths are there at the minimal distance?

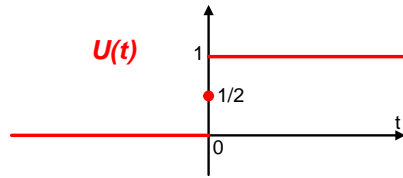
Please use the trellis decoding sheets that are provided and place them in your exam booklet.





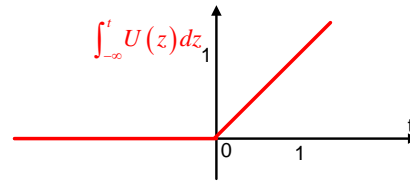
Fonction échelon

$$U(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t > 0 \end{cases} = \int_{-\infty}^t \delta(z) dz \Leftrightarrow \frac{1}{j\omega}$$

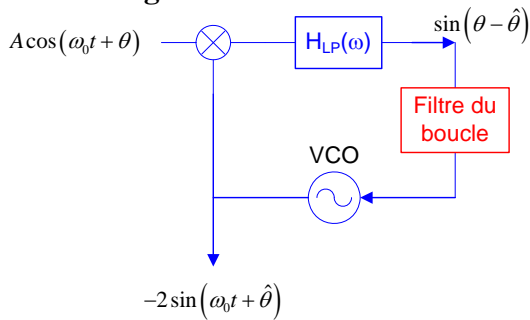


La Rampe:

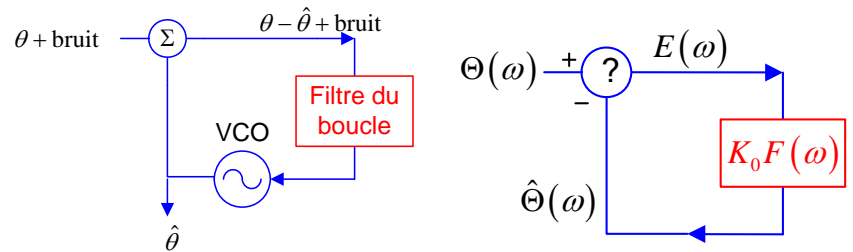
$$\int_{-\infty}^t U(z) dz = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{(j\omega)^2}$$



PLL forme générale



PLL forme linéaire



fonction de transfert en boucle fermée

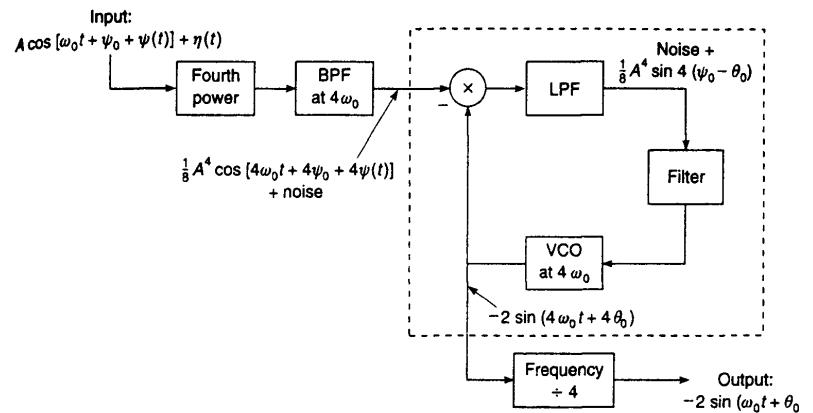
$$H(\omega) = \frac{\hat{\Theta}(\omega)}{\Theta(\omega)} = \frac{K_0 F(\omega)}{j\omega + K_0 F(\omega)}$$

erreur

$$E(\omega) = \frac{j\omega \Theta(\omega)}{j\omega + K_0 F(\omega)}$$

Théorème de la valeur finale

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{j\omega \rightarrow 0} j\omega E(\omega)$$



boucle passe-tout : $F(\omega) = 1$

$$\text{boucle passe-bas : } F(\omega) = \frac{\omega_1}{j\omega + \omega_1}$$

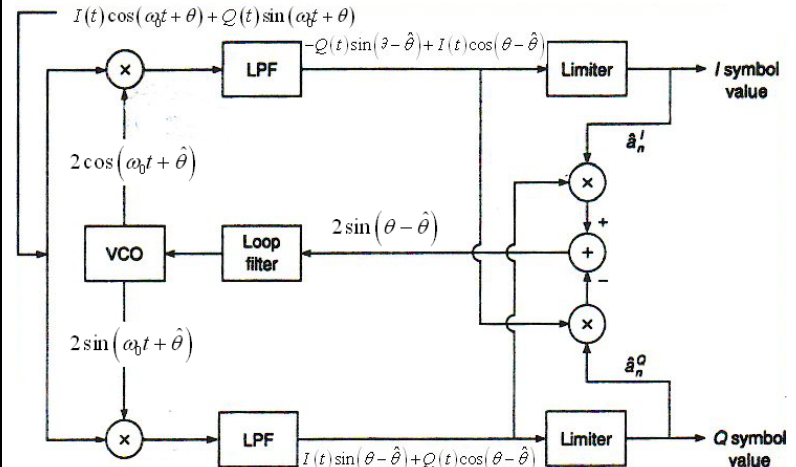
largeur equivalent du bruit:

$$B_N \triangleq \frac{1}{|H(0)|^2} \int_0^\infty |H(2\pi f)|^2 df$$

$$B_N = \frac{\omega_n}{8\zeta} \text{ pour}$$

$$H(\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n \cdot j\omega + \omega_n^2}$$

Boucle de Costas



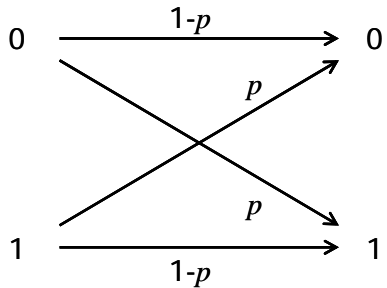
Corrélation croisée

$$z_{ij} \triangleq \int_0^T s_j(t) s_i(t) dt$$

Matrices de Hadamard

$$H_{n+1} = \begin{bmatrix} H_n & H_n \\ H_n & \bar{H}_n \end{bmatrix}$$

Le canal binaire symétrique (BSC)



BPSK avec AWGN: $p = Q(\sqrt{2E_b/N_0})$

Codes en bloc

\mathbf{m} = message à encoder, \mathbf{u} = mot de code généré

$$\mathbf{G} = [\mathbf{P} \mid \mathbf{I}_k] \quad \mathbf{U} = \mathbf{mG}$$

$$\mathbf{H} = [\mathbf{I}_{n-k} \mid \mathbf{P}^T] \quad \mathbf{S} = \mathbf{rH}^T$$

t = # d'erreurs qui peuvent être corrigés

$$t = \left\lfloor \frac{d_{\min} - 1}{2} \right\rfloor$$

Code Hamming $(n,k)=(2^m-1, 2^m-1-m)$

Distance de Hamming

$d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ = # de positions de bits avec des valeurs différents dans les deux vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v}

Distance minimale

$$\min_{i,j} d(\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_j) = \min_{j>2} w(\mathbf{u}_j)$$

Probabilité d'erreur de bit p

Probabilité d'avoir plus que t erreurs de bits parmi un block de N bits

$$\sum_{k=t+1}^N \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} \approx \binom{N}{t+1} p^{t+1} (1-p)^{N-t-1}$$

$$\binom{N}{k} \equiv \frac{N!}{k!(N-k)!}$$

Tableau Standard

- Première rangée – mots de codes valides
- Première colonne – erreurs corrigibles
- Tous les 2^n mots de codes possibles sont inclus dans la table
- Il n'y a pas de répétition des mots de code

Corriger une erreur

1. Détecter l'erreur $\mathbf{S} = \mathbf{rH}^T \neq 0 \Rightarrow$ erreur \mathbf{v}
2. Identifier la rangée avec $\mathbf{e}_j \mathbf{H}^T = \mathbf{rH}^T$
i.e. le syndrome identifie le coset
3. Corriger l'erreur en calculant $\mathbf{U} = \mathbf{r} + \mathbf{e}_j$

(le mot de code dans la colonne de tableau standard où on trouve)

Codes convolutifs

Exemple: $k=1, n=2, K=3$

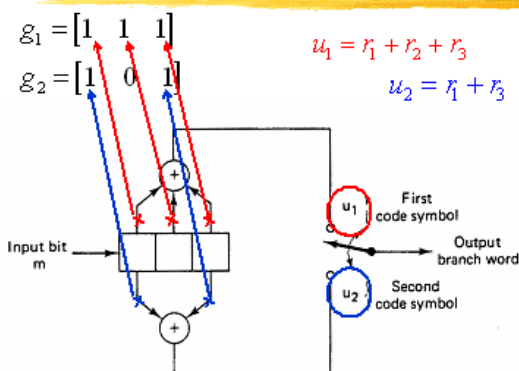
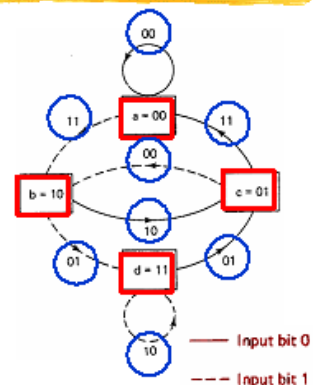


Diagramme de l'état

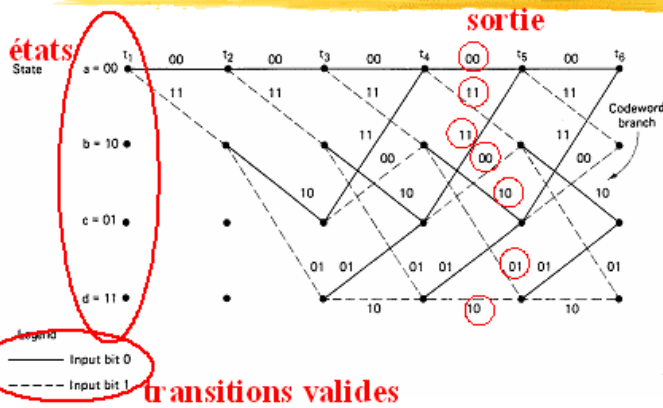
- Fixer les 2^{K-1} états
- Établir les transitions valides
- Générer les codes pour chaque transition

$$\mathbf{g}_1 = [1 \ 1 \ 1]$$

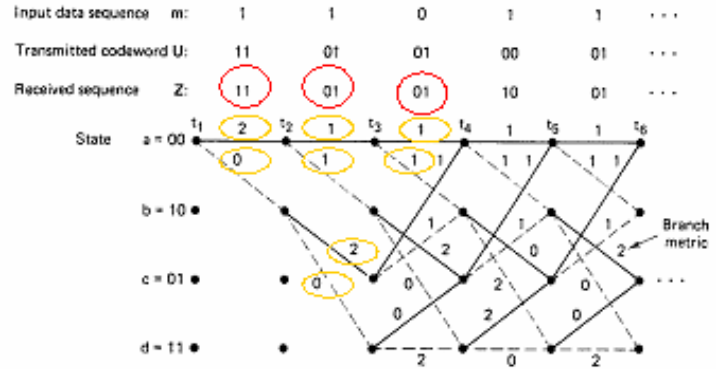
$$\mathbf{g}_2 = [1 \ 0 \ 1]$$



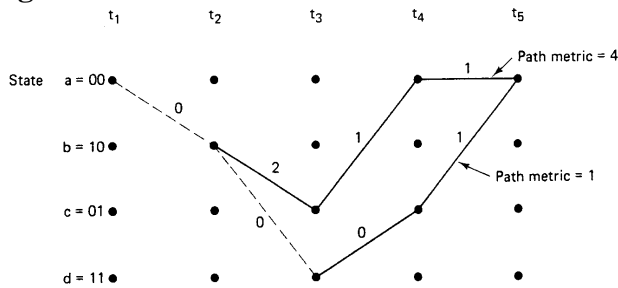
Treillis



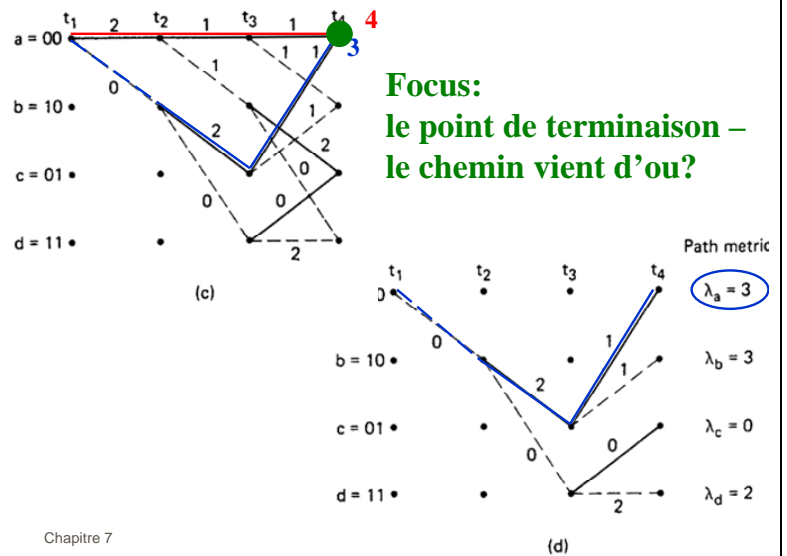
Algorithme de Viterbi



Algorithme de Viterbi



Algorithme de Viterbi



Chapitre 7

Gain de codage: $10 \log_{10} d_f^2 / d_{\min, \text{sans codage}}^2$

Deux métriques $dist(z_i, u_i)$

- Distance de Hamming
 - Pour les décisions fermes
 - $dist(\underline{z}_i, \underline{u}_i) = \# \text{ de bits différents}$
- Distance euclidienne
 - Pour les décisions souples
 - $dist(\underline{z}_i, \underline{u}_i) = \underline{z}_i^T \cdot \underline{u}_i = \sqrt{(z_{i,1} - u_{i,1})^2 + \dots + (z_{i,n} - u_{i,n})^2}$

Borne supérieure de gain de codage (en dB)

$10 \log_{10} r d_f$ $r = \text{taux de codage} = k/n$

Valeurs typiques

- Décisions
 - Ferme
 - Souples avec 3 bits de quantification
- Longueur de contrainte : $3 \leq K \leq 9$
- Taux de code : $r \geq 1/3$
- Chemin maximale : $h \leq 5K$

Distance libre = distance minimale = d_f

- Codes linéaires
 - distance équivalent à la distance entre la séquence de zéros et n'importe quelle autre séquence
- Procédure
 - Commence en état a
 - Finir en état a
 - Trajet le plus court \Rightarrow longueur = distance libre

$t = \# \text{ d'erreurs qui peuvent être corrigés}$

$$t = \left\lfloor \frac{d_f - 1}{2} \right\rfloor$$

TCM

Taux de codage = $1/n$

➤ distance locale

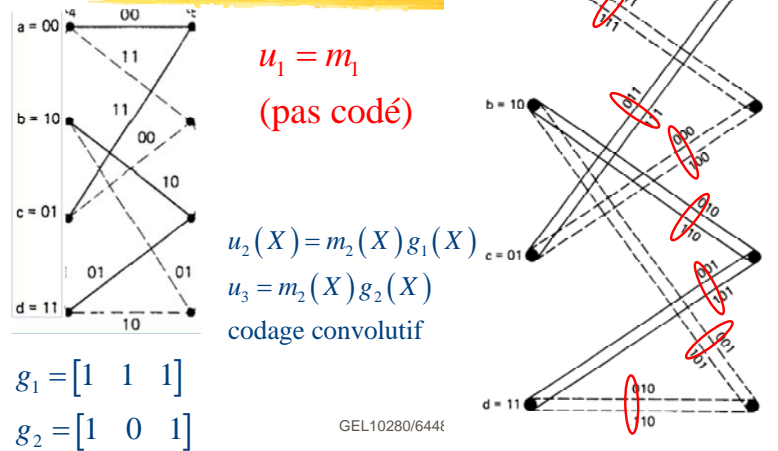
$$\text{dist}(\underline{u}, \underline{v}) = \sqrt{(u_{1,x} - v_{1,x})^2 + (u_{1,y} - v_{1,y})^2}$$

➤ Définition de la distance globale
(distance entre séquences,
ou *SED square Euclidean distance*)

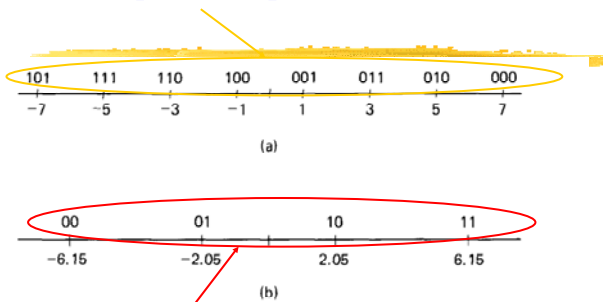
$$\text{dist}^2(U, V) = \text{dist}^2(\underline{u}_1, \underline{v}_1) + \text{dist}^2(\underline{u}_2, \underline{v}_2) + \text{dist}^2(\underline{u}_3, \underline{v}_3) + \dots$$

*pour le TCM et
les décisions souples*

Exemple



Correspondence pour TCM



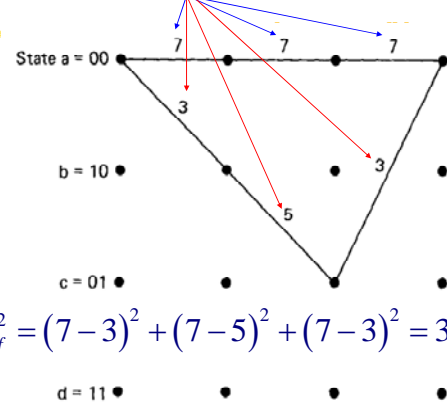
Correspondence de Gray

Chapitre 9

GEL10280/64486

10

Coordonnées dans l'espace du signal

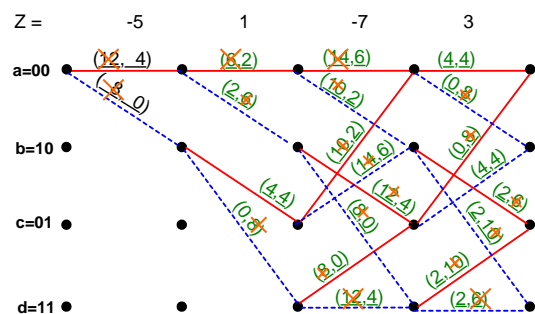


$$d_f^2 = (7-3)^2 + (7-5)^2 + (7-3)^2 = 36$$

Chapitre

13

Calculer les distances locales

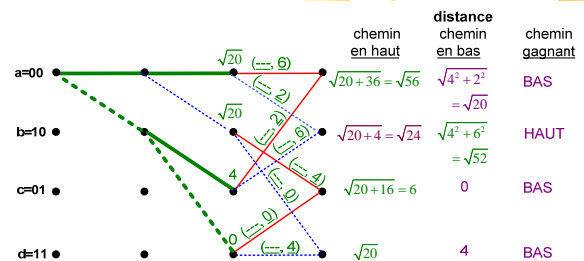


Chapitre 9

GEL10280/64486

22

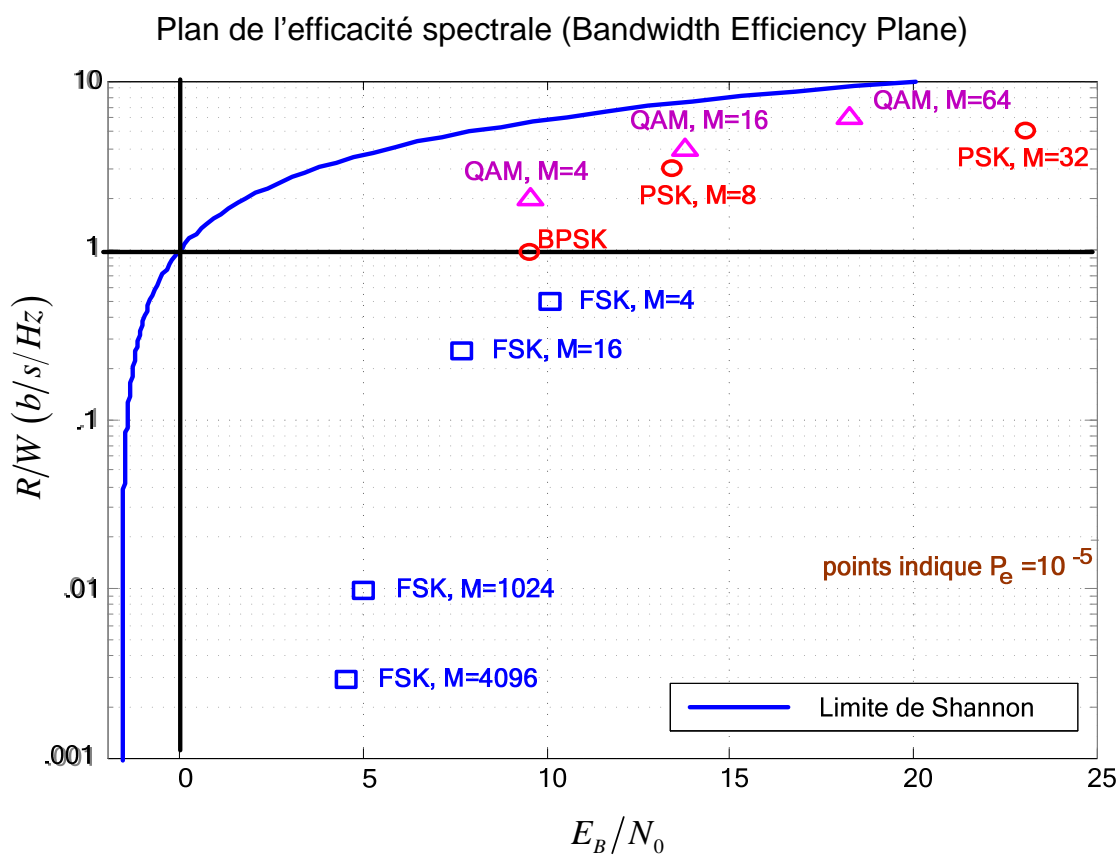
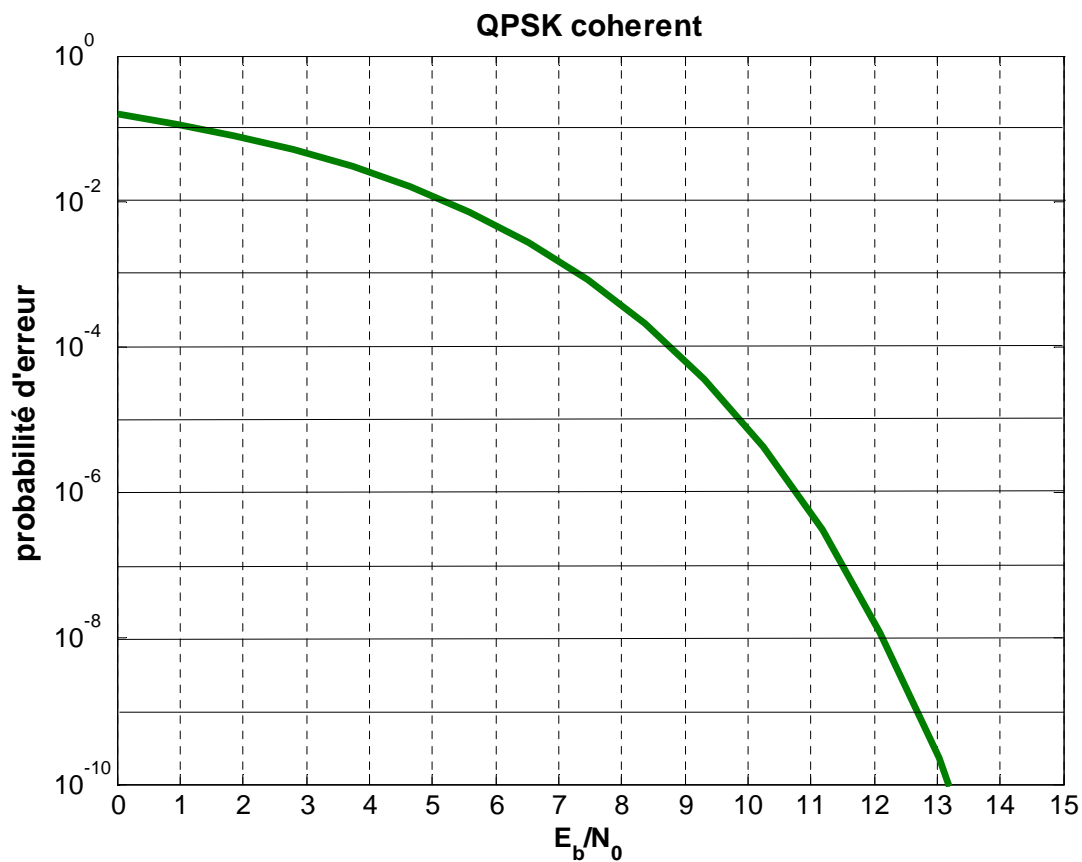
Calculer les distances globales $t=3$

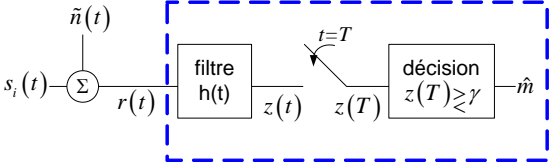
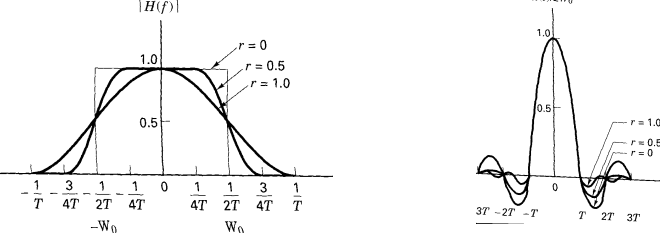


Chapitre 9

GEL10280/64486

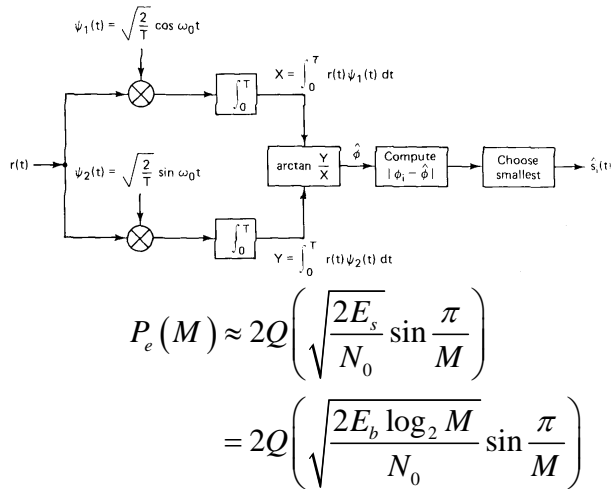
25



<p>Récepteur d'échantillonnage</p> 	<p>MAP: i qui maximise $p(z s_i) p(s_i)$ i qui minimise $\ \mathbf{r} - \mathbf{s}_i\ ^2 - N_0 \ln P(\mathbf{s}_i)$ $P(\mathbf{s}_i)$ = probabilité a priori de symbole \mathbf{s}_i</p> <p>ML: i qui maximise $p(z s_i)$ i qui minimise $\ \mathbf{r} - \mathbf{s}_i\ ^2$</p>
<p>Raised cosine $v(t) = \frac{\sin(\pi t/T_s)}{\pi t/T_s} \frac{\cos(r\pi t/T_s)}{1 - 4r^2 t^2/T_s^2}$</p> 	<p>Énergie moyenne</p> $E_{\text{moy}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \ \mathbf{s}_i\ ^2$ $= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M [\text{énergie du signal } i]$ <p>Énergie par bit v. énergie par symbole</p> $E_b \log_2 M = E_s$
<p>QAM $\eta = \log_2 M$ †</p> <p>Conversion de l'espace I/Q vers espace du signal</p> $\begin{pmatrix} \tilde{a}_n^I, \tilde{a}_n^Q \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{M \cdot E_s}{\sum_{i=1}^M [(a_n^I)^2 + (a_n^Q)^2]}} \begin{pmatrix} a_n^I, a_n^Q \end{pmatrix}$ <p>coordonnées, espace du signal (blue arrow pointing to $\tilde{a}_n^I, \tilde{a}_n^Q$)</p> <p>coordonnées, espace I/Q (red arrow pointing to a_n^I, a_n^Q)</p> <p>cas rectangulaire (carrée) $M=L^2$</p> $P_e = 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q \left(\sqrt{\frac{3 \log_2 M}{(M-1)}} \frac{E_b}{N_0} \right) \quad d_{\min} = \sqrt{\frac{6 \log_2 L}{L^2 - 1}}$	<p>Borne d'union</p> $P_e \approx \frac{2K}{M} Q \left(\frac{D_{\min}}{\sqrt{2N_0}} \right) = \frac{2K}{M} Q \left(d_{\min} \sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right)$ <p>K est le nombre des paires des signaux séparés par la distance minimale D_{\min}</p> <p>Distance minimale dans l'espace du signal</p> $D_{\min} = \min_{i \neq k} \ \mathbf{s}_i - \mathbf{s}_k\ \quad \text{et} \quad d_{\min} = \frac{D_{\min}}{\sqrt{2E_b}}$
$P_e(\text{BPSK}) = Q \left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}} \right)$ $P_e(\text{OOK}) = Q \left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right)$ $P_e(\text{QPSK}) \approx 2Q \left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}} \right)$ <p>Perte par rapport à QPSK</p> $d_{\min} = \sqrt{x} \sqrt{2} \quad \text{perte} = -10 \log_{10} x$	<p>Pour une modulation orthogonale</p> $P_e(\text{bit}) = P_b = P_e(\text{symbol}) \frac{M/2}{M-1}$ <p>Pour une modulation non-orthogonale avec codage de gray</p> $P_e(\text{bit}) = P_b = \frac{P_e(\text{symbol})}{\log_2 M}$ <hr/> <p>Efficacité spectrale</p> $\eta = \frac{R_b}{W} = \frac{1}{T_b} \frac{1}{W} \text{ bits/s}$

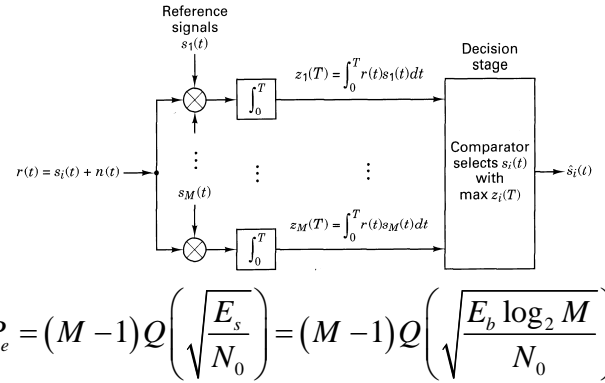
MPSK cohérent

$$\eta = \log_2 M^\dagger$$



MFSK cohérent

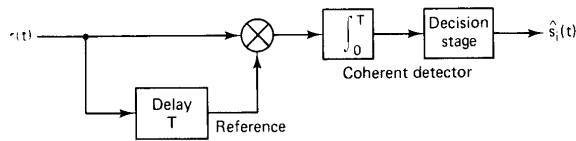
$$\eta = \frac{2 \log_2 M}{M+1}^\dagger$$



Séparation minimale $1/2T_s$

DPSK incohérent

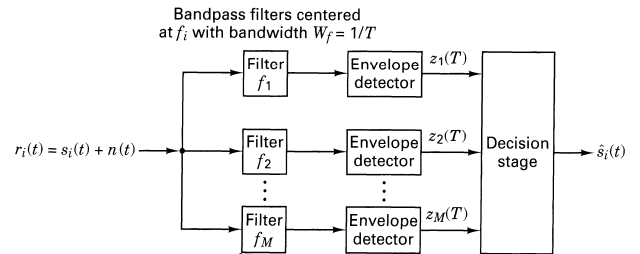
$$P_e = \frac{1}{2} e^{-E_b/N_0}$$



~1 dB de perte entre DPSK et BPSK

MFSK incohérent

$$\eta = \frac{\log_2 M}{M}^\dagger$$



$$P_e(BFSK) = \frac{1}{2} e^{-E_b/2N_0}$$

~1 dB de perte entre BFSK cohérente et incohérente

Séparation minimale $1/T_s$

Loi de Shannon

$$C = W \log_2(1 + SNR)$$

$$SNR = \frac{E_b}{N_0} \eta$$

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{W}{C} (2^{C/W} - 1) \quad \frac{C}{W} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{E_b}{N_0} \rightarrow -1.6 \text{ dB}$$

Relations trigonométriques

θ	$\cos \theta$	$\sin \theta$	$\tan \theta$
0	1	0	0
$\pi/8$.8536	.3827	.4142
$\pi/4$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	1
$\pi/3$	1/2	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}$
$\pi/2$	0	1	∞

$$\tan(y) = x \Leftrightarrow y = \arctan(x) + k\pi$$

Processus Gram Schmidt

$$\psi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{E_1}} s_1(t) \text{ où } E_1 \triangleq \int_0^T s_1^2(t) dt$$

$$\theta_2(t) \triangleq s_2(t) - \langle s_2(t), \psi_1(t) \rangle \psi_1(t)$$

$$E_2 \triangleq \int_0^T \theta_2^2(t) dt \quad \psi_2(t) = \frac{\theta_2(t)}{\sqrt{E_2}}$$

$$i. \quad \theta_i(t) = s_i(t) - \sum_{k=1}^{i-1} \langle s_i(t), \psi_k(t) \rangle \psi_k(t)$$

$$E_i \triangleq \int_0^T \theta_i^2(t) dt \quad \psi_i(t) = \frac{\theta_i(t)}{\sqrt{E_i}}$$

[†] en supposant une impulsion Nyquist idéale