GEL-16132 Circuits

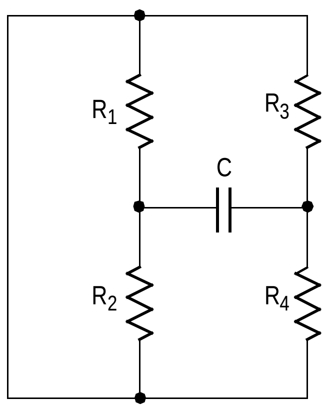
Corrigé de l'examen final Hiver 2000

Problème no. 1 (20 points)

a) La source v_s est une fonction échelon. Par conséquent, le courant $i_3(t)$ sera de la forme suivante:

$$i_3(t) = \left[A + Be^{\frac{-t}{\tau}}\right]u(t)$$

τ = RC est la constante de temps du circuit que l'on détermine à l'aide du circuit de base:



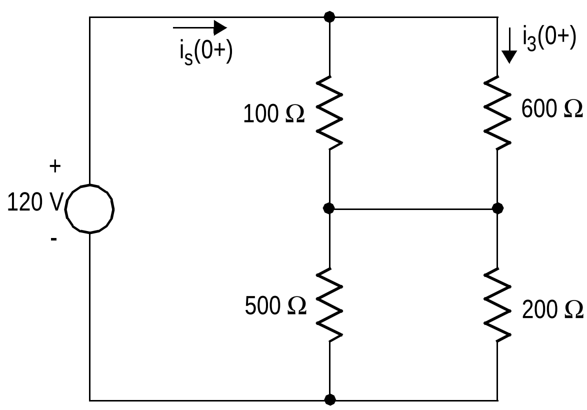
C = 100 µF
R_1 = 100 Ω
R_2 = 500 Ω
R_3 = 600 Ω
R_4 = 200 Ω

$$R = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3R_4}{R_3 + R_4} = 233.33\Omega$$

$$\tau = RC = 233.33 \times 1\times10^{-4} = 0.0233s$$

Les constantes A et B sont déterminées par les valeurs de $i_3(t)$ à t = 0 et à t → ∞.

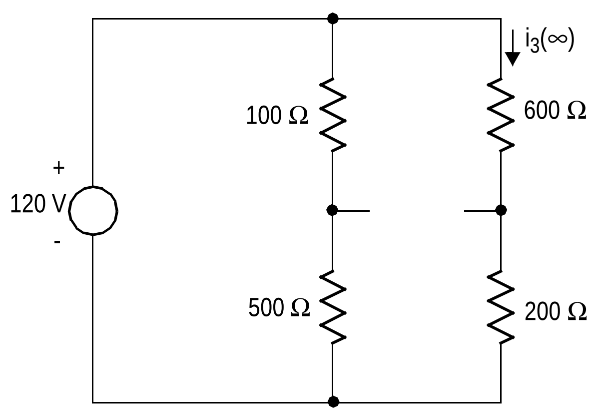
<u>à t = 0+</u>



$$i_s(0+) = \frac{120}{\frac{100\times600}{100+600} + \frac{500\times200}{500+200}} = 0.525A$$

$$i_3(0+) = \frac{100}{100+600} \times i_s(0+) = 0.075A$$

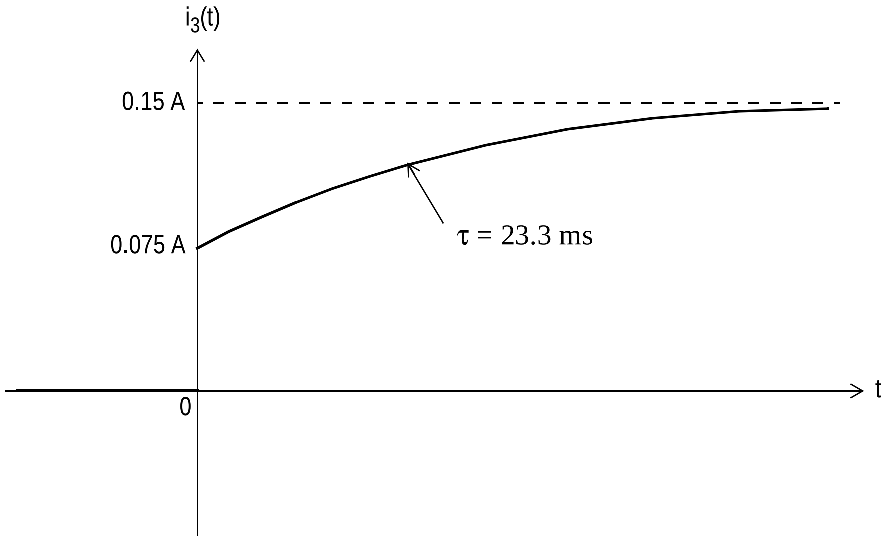
<u>à t → ∞</u>



$$i_3(\infty) = \frac{120}{600+200} = 0.15A$$

On déduit: A = 0.15 et B = -0.075

Finalement: $$i_3(t) = \left[0.15 - 0.075e^{\frac{-t}{\tau}}\right]u(t)$$ avec τ = 23.3 ms

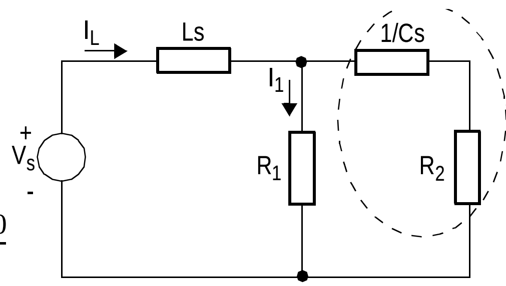


b) La durée du régime transitoire est égale à 5 fois la constante de temps du circuit:

$$d_{transitoire} = 5 \times \tau = 5 \times 23.3\text{ms} = 116.7\text{ ms}$$

Problème no. 2 (20 points)

a) Circuit transformé (domaine de Laplace):



$$V_s = \frac{50}{s}$$

$$Z_2 = \frac{R_2Cs + 1}{Cs}$$

L = 10 mH

C = 10 μF

R_1 = 200 Ω

R_2 = 20 Ω

Le courant I_L est donné par:
$$I_L = \frac{V_s}{Ls + \dfrac{R_1Z_2}{R_1 + Z_2}} = \frac{V_s(R_1 + Z_2)}{Ls(R_1 + Z_2) + R_1Z_2}$$

Le courant I_1 est calculé à l'aide de la loi du diviseur de courant:

$$I_1 = \frac{Z_2}{R_1 + Z_2} \times I_L = \frac{Z_2}{R_1 + Z_2} \times \frac{V_s(R_1 + Z_2)}{Ls(R_1 + Z_2) + R_1Z_2} = \frac{Z_2}{Ls(R_1 + Z_2) + R_1Z_2} \times V_s$$

$$I_1 = \frac{\dfrac{R_2Cs + 1}{Cs}}{Ls\left(R_1 + \dfrac{R_2Cs + 1}{Cs}\right) + R_1\dfrac{R_2Cs + 1}{Cs}} \times V_s = \frac{R_2Cs + 1}{Ls(R_1Cs + R_2Cs + 1) + R_1(R_2Cs + 1)} \times V_s$$

$$I_1 = \frac{R_2Cs + 1}{(R_1 + R_2)LCs^2 + (L + R_1R_2C)s + R_1} \times V_s$$

Avec les valeurs numériques, on a:

$$I_1 = \frac{2\times10^{-4}s + 1}{2.2\times10^{-5}s^2 + 0.05s + 200} \times \frac{50}{s} = \frac{0.01s + 50}{s(2.2\times10^{-5}s^2 + 0.05s + 200)}$$

$$I_1 = \frac{0.01s + 50}{2.2\times10^{-5}s(s^2 + 2272.73s + 9.091\times10^6)}$$

Les pôles de I_1 sont: $p_1 = 0$ $p_2 = -1136.4 + j2792.8$ $p_3 = -1136.4 - j2792.8$

On décompose I_1 en fractions partielles:

$$I_1 = \frac{0.01s + 50}{2.2\times10^{-5}s(s + 1136.4 - j2792.8)(s + 1136.4 + j2792.8)}$$

$$I_1 = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + 1136.4 - j2792.8} + \frac{B^*}{s + 1136.4 + j2792.8}$$

Les constantes A et B sont calculées:

$$A = \left.\frac{0.01s + 50}{2.2\times10^{-5}(s^2 + 2272.73s + 9.091\times10^6)}\right|_{s = 0} = 0.25$$

$$B = \left.\frac{0.01s + 50}{2.2\times10^{-5}s(s + 1136.4 + j2792.8)}\right|_{s = -1136.4 + j2792.8} = 0.1287\angle -2.902$$

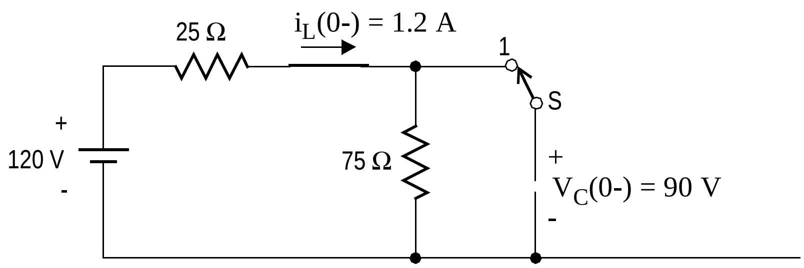
Le courant $i_1(t)$ est égale à la transformée Laplace inverse de I_1:

$$i_1(t) = [0.25 + 0.2574e^{-1136.4t}\cos(2792.8t - 2.902)]u(t)$$

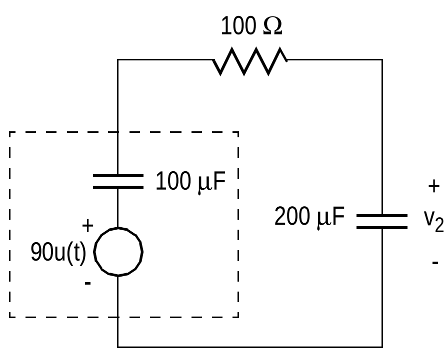
b) La durée du régime transitoire est $d_{transitoire} = \frac{5}{1136.4} = 4.4\,\text{ms}$

Problème no. 3 (20 points)

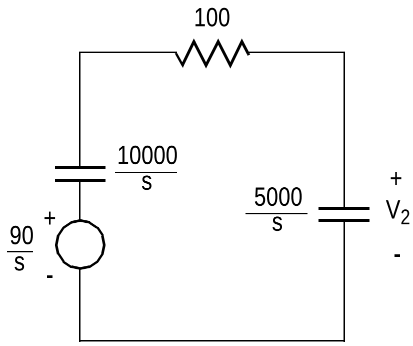
Le commutateur S est à la position 1 depuis très longtemps. Le circuit équivalent à t = 0- est montré ci-dessous.



À t = 0, S change de position de 1 à 2 et demeure à cette position pour le reste du temps. Le circuit équivalent pour t > 0 est montré dans la figure suivante.



Circuit transformé (domaine de Laplace):



La tension V_2 est calculée à l'aide de la loi du diviseur de tension:

$$V_2 = \frac{\frac{5000}{s}}{\frac{5000}{s} + \frac{10000}{s} + 100} \times \frac{90}{s} = \frac{450000}{s(100s + 15000)} = \frac{4500}{s(s + 150)}$$

On décompose V_2 en fractions partielles:

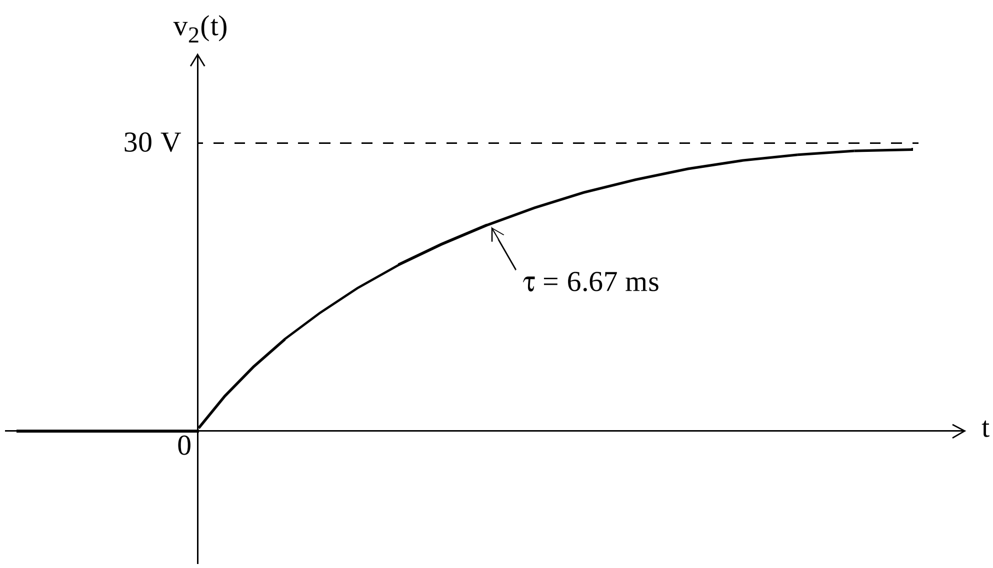
$$V_2 = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + 150}$$

Les constantes A et B sont calculées:

$$A = \left.\frac{4500}{(s + 150)}\right|_{s = 0} = 30$$

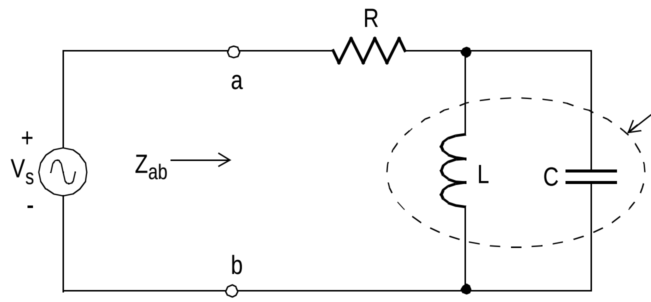
$$B = \left.\frac{4500}{s}\right|_{s = -150} = -30$$

La tension $v_2(t)$ est: $v_2(t) = [30 - 30e^{-150t}]u(t)$



Problème no. 4 (20 points)

a) Calcul de l'impédance $Z_{ab}(j\omega)$ vue par la source V_s:



$$Z_x = \frac{Ls}{LCs^2 + 1}$$

R = 200 Ω
L = 10 mH
C = 10 μF

On calcule d'abord l'impédance $Z_{ab}(s)$: $$Z_{ab}(s) = R + \frac{Ls \times \frac{1}{Cs}}{Ls + \frac{1}{Cs}} = R + \frac{Ls}{LCs^2 + 1}$$

On déduit l'impédance $Z_{ab}(j\omega)$: $$Z_{ab}(j\omega) = R + j\frac{\omega L}{1 - LC\omega^2} = 200 + j\frac{0.01\omega}{1 - 1\times10^{-7}\omega^2}$$

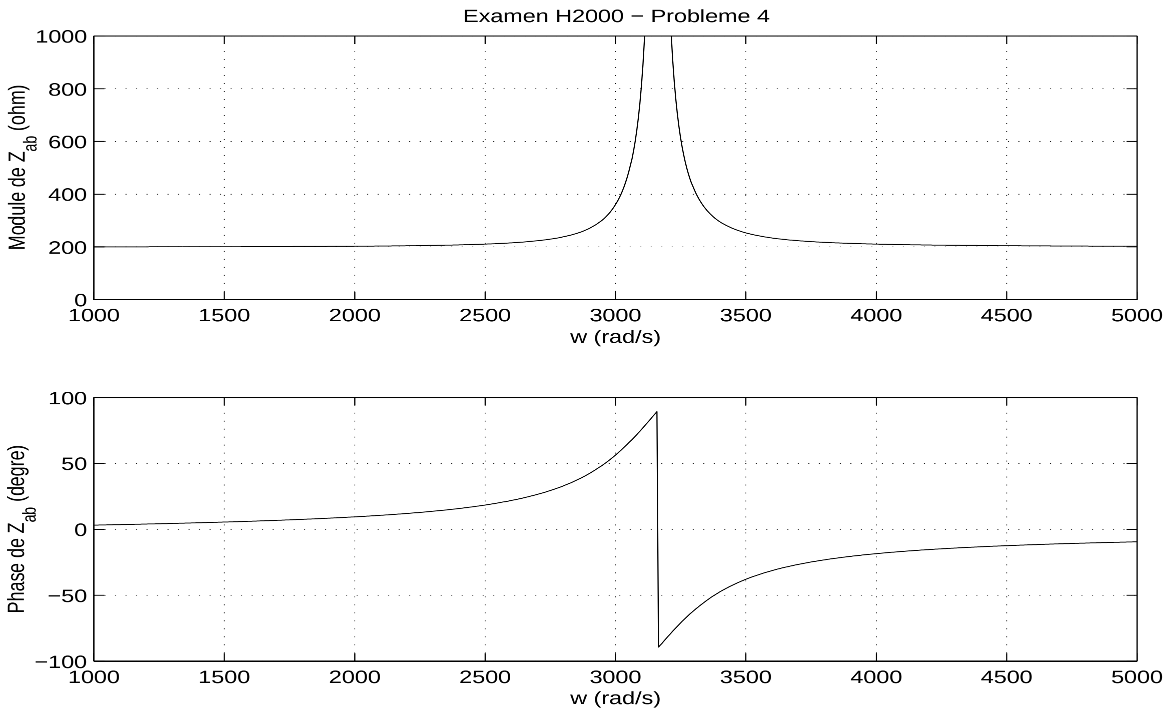
Le module de $Z_{ab}(j\omega)$: $$|Z_{ab}(j\omega)| = \sqrt{200^2 + \left(\frac{0.01\omega}{1 - 1\times10^{-7}\omega^2}\right)^2}$$

La phase de $Z_{ab}(j\omega)$: $$\angle Z_{ab}(j\omega) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\frac{0.01\omega}{1 - 1\times10^{-7}\omega^2}}{200}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{5\times10^{-5}\omega}{1 - 1\times10^{-7}\omega^2}\right)$$

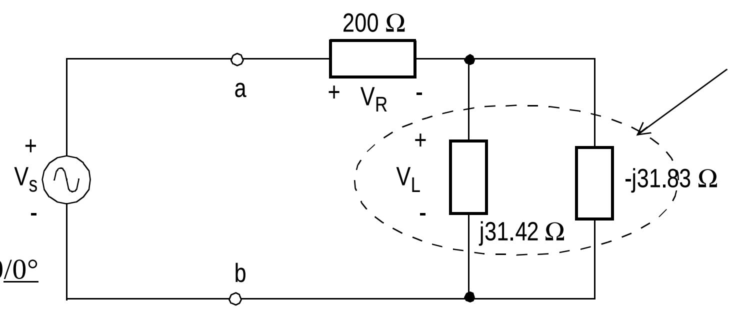
Calcul de $Z_{ab}(j\omega)$ pour quelques valeurs de ω:

ω	0	1000	3000	3200	5000	∞
$\|Z_{ab}(j\omega)\|$	200	200.31	365.5	1637	202.7	200
$\angle Z_{ab}(j\omega)$	0	3.2º	56.8º	-82.9º	-9.4º	0º

Avec ces quelques valeurs, on peut tracer approximativement le module et la phase de $Z_{ab}(j\omega)$ en fonction de ω. La figure suivante montre le module et la phase de $Z_{ab}(j\omega)$ en fonction de ω (tracé à l'ordinateur).



b) Circuit transformé en RSP avec ω =1000π rad/s:



$$Z_x = \frac{(j31.42)(-j31.83)}{j31.42 - j31.83} = j2409.3\Omega$$

$\mathbf{V}_s = 100\underline{/0°}$

La tension $\mathbf{V}_R$ est calculée par la loi du diviseur de tension:

$$V_R = \frac{R}{R + Z_x} \times V_s = \frac{200}{200 + j2409.3} \times 100\angle 0° = 8.27\angle{-85.2°}\text{ V}$$

La tension $\mathbf{V}_L$ est calculée par la loi du diviseur de tension:

$$V_L = \frac{Z_x}{R + Z_x} \times V_s = \frac{j2409.3}{200 + j2409.3} \times 100\angle 0° = 99.65\angle 4.8°\text{ V}$$

On vérifie que $V_R + V_L = V_s$: