**Mat 10364, Mathématiques de l'ingénieur II : examen II, 4/04/08**

- Durée de l'examen : deux heures.
- Documentation permise : deux feuilles-résumé.
- Vous êtes priés de vous identifier (nom et numéro matricule) sur le cahier et de placer votre carte d'étudiant sur la table à côté de vous.
- **Chaque réponse devra être accompagnée des calculs détaillés. Dans le cas contraire, elle sera considérée comme nulle.**

---

**no 1** (15pts) Pour chacun des deux champs suivants, dire s'il est potentiel (=conservatif) et, le cas échéant, calculer le potentiel associé.

(a) $\vec{v}_1 = (x\,y^2\,z^2 - y, x^2\,y\,z^2 - y, x^2\,y^2\,z - z)$.

(b) $\vec{v}_3 = (x\,y^2\,z^2 - y, x^2\,y\,z^2 - x, x^2\,y^2\,z - z)$.

**no 2** (10 pts) Trouver une représentation paramétrique de la courbe d'intersection du cône

$$y = \sqrt{3}\sqrt{x^2 + z^2}, \quad \text{et du plan} \quad z + y = 1.$$

**no 3** (20 pts) On note $C$ la courbe paramétrée

$$\vec{r}(t) = (\cos t, 2\,\sin^2 t, \sqrt{3}\,\sin t), \ \ t \in [0, \pi].$$

$C$ coupe le plan $P$ d'équation $y - z = 0$ en un point $\vec{r}_0$.

(a) Montrer que

$$\vec{r}_0 = \vec{r}(\frac{\pi}{3}).$$

(b) Déterminer (à $\pi$ près) l'angle que fait la tangente à $C$ avec la normale à $P$ au point $\vec{r}_0$.

**no 4** (20 pts) Une éolienne expérimentale prend la forme indiquée à la figure 1.

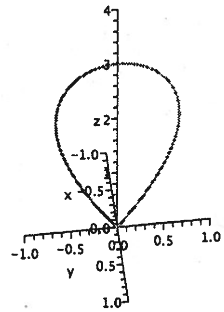

figure 1.

La courbe $C$ qui modélise cette éolienne a pour équation

$$\vec{r}(t) = (0, \sqrt{3}(t - t^3), 3(1 - t^2)), \ t \in [-1, 1].$$

(a) Montrer que l'élément de longueur sur la courbe $C$ s'écrit en termes du paramètre $t$ comme suit
$$ds = \sqrt{3}(1 + 3\,t^2)\,dt.$$
**Note :** On rappelle que $a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2$.

(b) Calculer la composante $\bar{z}$ du centre de gravité sous l'hypothèse que le matériau est homogène.

**no 5** (20 pts) On note $\vec{v}$ le champ défini par

$$\vec{v} = (x - z, z\,e^{y-1}, y - 1)$$

et par $C$ la courbe fermée constituée des portions $C_1$ et $C_2$ définies par

$$\begin{aligned} C_1: \quad \vec{r}_1(t) &= (-t, 1, 1), & t \in [-1, 1] \\ C_2: \quad \vec{r}_2(s) &= (s, 1, 2 - s^4), & s \in [-1, 1] \end{aligned}$$

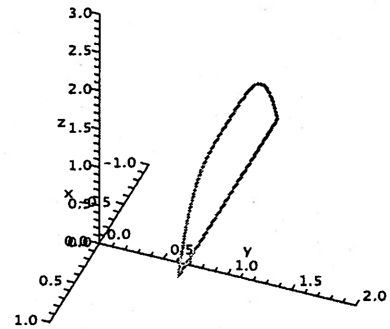


figure 2.

(a) Calculer le travail de $\vec{v}$ le long de $C$.

(b) Le champ $\vec{v}$ est-il conservatif ? Justifier.

**no 6** (15pts) On considère la surface $S$ paramétrée

$$\vec{r}(u,v) = (v\cos u, v\sin u, 27 - 3\,v^2), \quad (u,v) \in [0,2\pi] \times [0,3].$$

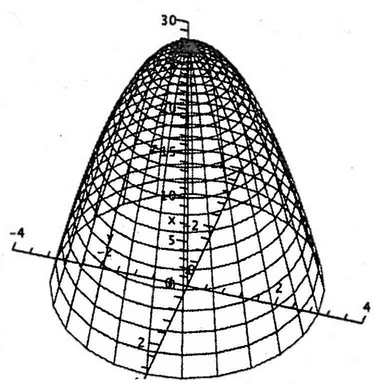


figure 3.

(a) Montrer que, sur $S$, l'élément d'aire s'écrit

$$dA = v\sqrt{36\,v^2+1}\,du\,dv.$$

(b) Calculer l'aire de $S$.

## I) Quelques angles remarquables

| $\theta$ | $\sin\theta$ | $\cos\theta$ | $\tan\theta$ |
|---|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $1$ | $0$ |
| $\pi/6$ | $1/2$ | $\sqrt{3}/2$ | $\sqrt{3}/3$ |
| $\pi/4$ | $\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{2}/2$ | $1$ |
| $\pi/3$ | $\sqrt{3}/2$ | $1/2$ | $\sqrt{3}$ |
| $\pi/2$ | $1$ | $0$ | $-$ |
| $2\pi/3$ | $\sqrt{3}/2$ | $-1/2$ | $-\sqrt{3}$ |
| $3\pi/4$ | $\sqrt{2}/2$ | $-\sqrt{2}/2$ | $-1$ |
| $5\pi/6$ | $1/2$ | $-\sqrt{3}/2$ | $-\sqrt{3}/3$ |
| $\pi$ | $0$ | $-1$ | $0$ |
| $3\pi/2$ | $-1$ | $0$ | $-$ |
| $2\pi$ | $0$ | $1$ | $0$ |

## II) Quelques intégrales utiles.

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int f'(x)(f(x))^n\,dx = \frac{1}{n+1}(f(x))^{n+1} + C, \quad \text{si } n \neq -1$$

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C$$

$$\int e^{f(x)}f'(x)\,dx = e^{f(x)} + C$$

$$\int x\ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

$$\int \sqrt{a^2x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2x^2+1} + \frac{1}{2a}\ln\left(ax + \sqrt{a^2x^2+1}\right) + C$$

Soit $a \neq 0$ ; alors

$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$

$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$

$\int \sin(ax)\, dx = -\frac{1}{a} \cos(ax) + C$

$\int \cos(ax)\, dx = \frac{1}{a} \sin(ax) + C$

$\int \tan(ax)\, dx = -\frac{1}{a} \ln|\cos(ax)| + C$

$\int \cot(ax)\, dx = \frac{1}{a} \ln|\sin(ax)| + C$

$\int \sec^2(ax)\, dx = \frac{1}{a} \tan(ax) + C$

$\int \csc^2(ax)\, dx = -\frac{1}{a} \cot(ax) + C$

$\int \sec(ax)\, dx = \frac{1}{a} \ln|\sec(ax) + \tan(ax)| + C$

$\int \csc(ax)\, dx = \frac{1}{a} \ln|\csc(ax) - \cot(ax)| + C$

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right) + C$

$\int \sin^2 x\, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin 2x + C$

$\int \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sin 2x + C$

$\int \sin^3 x\, dx = -\frac{1}{3} \cos t \left(\sin^2 t + 2\right) + C$

$\int \cos^3\ dx = \frac{1}{3} \sin x \left(\cos^2 x + 2\right) + C$

$\int \sin^4 x\, dx = -\frac{1}{8}\left(2 \sin^3 x \cos x + 3 \cos x \sin x + 3x\right) + C$

$\int \cos^4 x\, dx = \frac{1}{8}\left(2 \cos^3 x \sin x + 3 \cos x \sin x + 3x\right) + C$

$\int e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a \cos bx + b \sin bx) + C$