GEL-3003 – Signaux et systèmes discrets :
Examen 1
(correction sur 40 points, pondération de 20%)
Mardi 6 Octobre 2020
Durée : 15h30 à 17h00 - 1h30 + 5min pour la remise
Accommodations : (1/3 temps supplémentaires) : 15h30 - 17h30 + 5 minutes pour la remise
Accommodations : (1/2 temps supplémentaires) : 15h30 - 17h45 + 5 minutes pour la remise

Le présent examen est un examen de cours. Il vise à vous évaluer sur la compréhension du cours. Les consignes sont les suivantes :

- L'examen compte 4 questions pour un total de 40 points.
- Laissez des traces de vos raisonnements et justifiez vos résultats.
- Les documents du cours et Matlab sont autorisés.

L'examen comporte **8 pages avec 2 pages supplémentaires si vous manquez d'espace**. Vérifiez qu'aucune question est manquante. Comme indiqué lors des séances magistrales et des laboratoires, la méthodologie et l'analyse rapportent la majorité des points pour les exercices 2 à 4 (80% des points). Les autres points quantifient les résultats. De plus, si une erreur est récurrente au sein de votre examen, elle ne sera pénalisée qu'une seule et unique fois. Enfin, si vous êtes bloqués à une question, passez à la suivante et revenez à la fin si le temps vous le permet.

Bon courage à toutes et à tous ! ! !

Nom, Prénom et matricule : ______________________________

1. **(5 points) Notions de cours.**

(a) (1 point) Donner les deux conditions pour qu'un filtre soit causal.

- Avoir une RDC plus grande que le module du plus grand pôle
- Autant ou plus de pôles que de zéro.

(b) (1 point) Soit la fonction de transfert $H(z) = \frac{1+z^{-1}}{1+6z^{-1}+7^{-2}}$. Ce système est-il causal ? Justifiez votre réponse.

\# dénom = 2 , \# nom = 1.

donc causal.

(c) (2 points) Quelle est la transformée en z de $x(n) = (\frac{1}{2})^{n-2}(\frac{1}{3})^n U(n)$?

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

$$= 4 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^n u(n) = \frac{4}{1-\frac{1}{6}z^{-1}}.$$

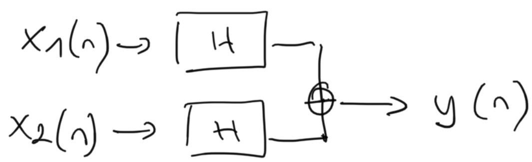
(d) (1 point) Donnez la définition d'une séquence à droite, d'une séquence à gauche et d'une séquence mixte (en raisonnant sur les pôles).

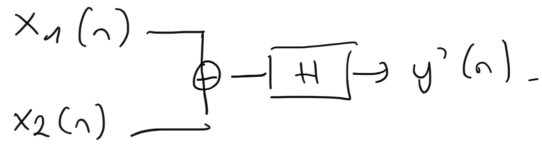
cf cours.

2. **(7 points) Signal discret et réponse impulsionnelle.**

(a) (3 points) Donnez un exemple de système discret non-linéaire et montrez qu'il n'est pas linéaire. **Les exemples introduit dans le cours ne peut pas être utilisé.**

Tout système non linéaire. Ensuite il faut vérifier que. $y'(n) = y(n)$ tel que





(b) (4 points) Soit le système $y(n) = x(2n)$. Utilisez le signal $x(n) = [\bar{1}, -1, 1, -1, 1, -1]$ pour montrer que le système n'est pas invariant. Est-ce que ce système est stable ? Justifiez vos réponses.

slide 19. $D = 1$

$y(n - D) = [\bar{1}, 1, 1]$.

alors que $\neq$.

$y_D(n) = [-\bar{1}, -1, -1]$

Stable car "toute entrée bornée produit une sortie bornée".

3. (13 points) Convolution et corrélation. Soit la séquence d'entrée

$$x(n) = [8, 2, 5, 6, 4, 2, 3, 1] \ \ pour \ \ -6 \leq n \leq 1$$

et la réponse impulsionnelle :

$$h(n) = [1, 2, 4, 2, 1] \ \ pour \ \ -1 \leq n \leq 3$$

On définit la sortie du $y(n)$ comme la convolution de $x(n)$ et de $h(n)$.

(a) (1 point) Calculez la longueur de la sortie $y(n)$.

$Ly = Lx + Lh - 1$

$= 12$

(b) (1 point) Calculez l'indice de début et de fin de la convolution.

$id = -6 - 1 = -7.$

$if = 3 + 1 = 4.$

(c) (2 points) Définissez les indices définissants la région transitoire et la région stable de la séquence de sortie $y(n)$.

$M = Lh - 1 = 4.$

transitoire $\begin{cases} -7 \leq n \leq -4. \\ 1 \leq n \leq 4. \end{cases}$

permanent : $-3 \leq n \leq 0.$

(d) (3.5 points) Calculez la séquence de sortie $y(n)$ (Définissez la méthode que vous utilisez et indiquer l'échantillon à la position n=0 dans la séquence de sortie).

$$y(n) = [6, 18, 41, 40, 48, 46, 40, \overline{29}, 22, 12, 5, 1].$$

(e) (1 point) Déterminez les indices de départ et de fin de la corrélation croisée $r_{x,h}$.

$id = -6 - (-3) = -3$

$if = 1 - (-1) = 2$.

(f) (3.5 points) Calculez la corrélation croisée $r_{x,h}$.

$r_{x,h} = x(n) ** h(n) = x(n) * h(-n)$.

même réponse que 3d.

(g) (1 point) Quelle est l'indice de la meilleure occurrence de la corrélation croisée $r_{x,h}$?

occurence maximale 48 à la position $n = -5$

4. (15 points) Identification d'un système discret Soit un système LIT causal de réponse $h[n]$ satisfaisant :

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{(1 - 0.5z^{-1})(1 + 0.25z^{-1})}$$

(a) (2 points) Déterminer les pôles et les zéros de $H(z)$.

2 pôles , 2 zéros $\quad H(z) \times \frac{z^2}{z^2} = \frac{z(z+1)}{(z-0.5)(z+0.25)}$

Pôles $\begin{cases} z = 0.5 \\ z = -0.25 \end{cases}$

Zéros $\begin{cases} z = 0 \\ z = -1 \end{cases}$

(b) (1 point) Quelle est la région de convergence de $H(z)$ (stipuler la séquence que vous considérez) ?

RDC . $|z| > 0.5$.

séquence à droite

(c) (1 point) Le système est-il stable ?

RDC $|z| > 0.5 \in$ cercle unitaire

donc stable.

(d) (4.5 points) Trouver $X(z)$ correspondant à l'entrée $x(n)$ qui produira la sortie $y(n)$ suivante :

$$y(n) = -\frac{1}{3}(-\frac{1}{4})^n U(n) - \frac{4}{3}(2)^n U(-n-1)$$

$$-\frac{1}{3} \frac{1}{1+\frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{4}{3} \frac{1}{1-2z^{-1}}.$$

$$= -\frac{1}{3}\left[\frac{1}{1+0.25z^{-1}} - \frac{4}{1-2z^{-1}}\right].$$

$$= -\frac{1}{3}\left[\frac{1-2z^{-1} - 4 - z^{-1}}{(1+0.25z^{-1})(1-2z^{-1})}\right]$$

$$= -\frac{1}{3}\left[\frac{-3-3z^{-1}}{(1+0.25z^{-1})(1-2z^{-1})}\right]$$

$$= \frac{(1+z^{-1})}{(1+0.25z^{-1})(1-2z^{-1})}$$

(Suite p. 9)

(e) (4.5 points) Trouver la réponse impulsionnelle $h[n]$ du système.

Décomposition en fraction partielle

$$H(z) = \frac{A}{1-0.5z^{-1}} + \frac{B}{1+0.25z^{-1}}$$

$$A = \frac{1+z^{-1}}{1+0.25z^{-1}}\bigg|_{z=0.5} = 2 \quad \Rightarrow h(n) = 2(0.5)^n u(n)$$

$$B = \frac{1+z^{-1}}{1-0.5z^{-1}}\bigg|_{z=-0.25} = -1 \quad - (-0.25)^n u(n).$$

(f) (2 points) Déterminer l'équation aux différences du système.

Partir de $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$

↳ ramener en n.

On a $H(z) = \dfrac{Y(z)}{X(z)}$.

$$\Rightarrow X(z) = \frac{Y(z)}{H(z)} = \frac{\left[\dfrac{1+z^{-1}}{(1-0.5z^{-1})(1+0.25z^{-1})}\right]}{\dfrac{1+z^{-1}}{(1+0.25z^{-1})(1-2z^{-1})}}$$

$$\Rightarrow X(z) = \frac{(1-2z^{-1})}{(1-0.5z^{-1})}.$$