GEL-2001 : Analyse des signaux

Examen 1 A2018 : Solutions

Département de génie électrique et de génie informatique

Problème 1

a)

Pour déterminer la fonction restreinte de la fonction, on passe par la technique des dérivés. En dérivant 2 fois, nous obtenons :

$$\begin{aligned} f''(t) &= 2\delta(t+1) + 2\delta(t-1) - 2\mathrm{Rect}(t/2) \\ f''(t) \Leftrightarrow \ddot{F}_r(\omega) &= 2e^{-j\omega} + 2e^{j\omega} - 4\mathrm{Sa}(\omega) \\ \ddot{F}_r(\omega) &= 4\cos(\omega) - 4\mathrm{Sa}(\omega) \\ \ddot{F}_r(\omega) &= (j\omega)^2 F_r(\omega) \\ F_r(\omega) &= \frac{4\mathrm{Sa}(\omega) - 4\cos(\omega)}{\omega^2} \end{aligned}$$

À aucune étape il y a un DC qui a été perdu par la dérivée temporelle, alors il n'y a pas d'impulsion à ajouter.

b)

Le signal restreint est un signal d'énergie fini, car de carré intégrable de $-\infty$ à ∞

c)

La transformée de Fourrier de $f_p(t)$ est :

$$F(\omega) = \frac{2\pi}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_r(n\omega_0)\delta(\omega - n\omega_0)$$

avec $T_0 = 3$.

$$F(\omega) = \frac{2\pi}{3} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{4\mathrm{Sa}(2\pi n/3) - 4\cos(2\pi n/3)}{n^2} \delta(\omega - n2\pi/3)$$

Bien sur, il ne faut pas oublier la valeur lorsque n = 0 qui est calculée au point d)

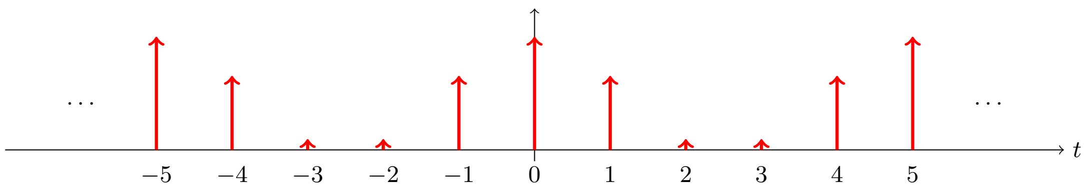
d)

À n = 0 cela correspond à la valeur moyenne du signal.

$$F_p(0) = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} 1 - t^2 dt = \frac{1}{3}\Big[t - \frac{t^3}{3}\Big]_{-1}^{1} = \frac{4}{9}$$

Problème 2

a)



b)

On exprime le cos en exponentielles avec Euler et on utilise la propriété du décalage.

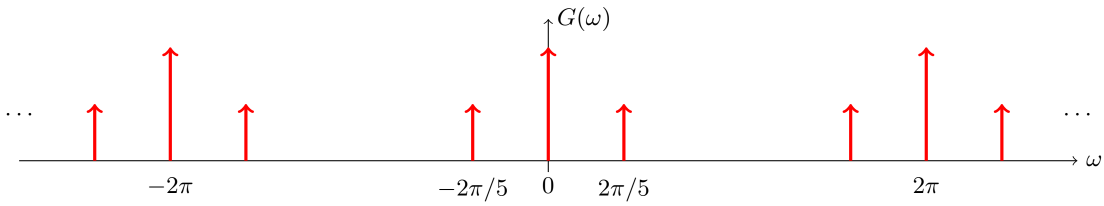
$$g(t) = \left[1 + \frac{e^{j2\pi t/5} + e^{-j2\pi t/5}}{2}\right] \delta_1(t)$$

$$g(t) = \delta_1(t) + \frac{e^{j2\pi t/5}}{2}\delta_1(t) + \frac{e^{-j2\pi t/5}}{2}\delta_1(t)$$

La transformée de Fourrier de g(t) est la suivante :

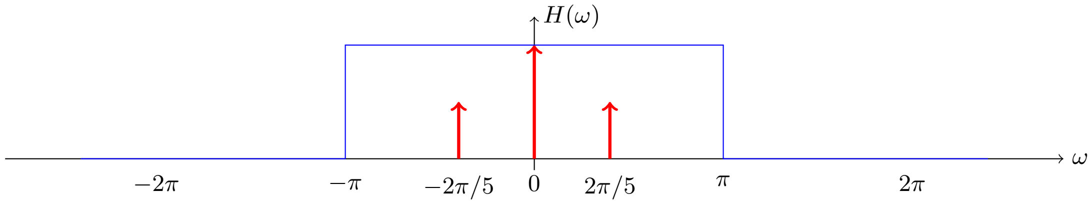
$$G(\omega) = 2\pi\delta_{\omega_o}(\omega) + \pi\delta_{\omega_o}(\omega - 2\pi/5) + \pi\delta_{\omega_o}(\omega + 2\pi/5)$$

On a donc trois peignes de période $\omega_o = 2\pi$ en fréquence, un centré sur zéro et deux décalés de $\pm 2\pi/5$.



c)

Le filtre idéal en Rect conserve les fréquences entre $-\pi$ et π. Il ne reste donc que 3 impulsions.



d)

Il s'agit de réaliser que $H(\omega)$ est simplement le spectre de la fonction de départ $f(t)$. On retrouve donc le signal f(t) :

$$1 + \cos(2\pi t/5) \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega) + \pi\delta(\omega - 2\pi/5) + \pi\delta(\omega + 2\pi/5)$$

Problème 3

a)

- Calcul de F(w) :

$$f(t) = \cos(100t)\mathrm{Sa}^2(\frac{t}{2})$$

Selon la formule d'Euler : $\cos(100t) = \frac{e^{100jt}+e^{-100jt}}{2}$, donc :

$$f(t) = \frac{1}{2}e^{100jt}Sa^2(\frac{t}{2}) + \frac{1}{2}e^{-100jt}Sa^2(\frac{t}{2})$$

Nous savons que :

$$\mathrm{tri}(t/\tau) \Leftrightarrow \tau\mathrm{Sa}^2(\frac{\omega\tau}{2})$$

avec $\tau = 1$

$$\mathrm{tri}(t) \Leftrightarrow \mathrm{Sa}^2(\frac{\omega}{2})$$

$$Sa^2(\frac{t}{2}) \Leftrightarrow 2\pi\mathrm{tri}(-\omega)$$

Tri est paire donc :

$$\mathrm{Sa}^2(\frac{t}{2}) \Leftrightarrow 2\pi\mathrm{tri}(\omega)$$

Ainsi :

$$e^{100jt}\mathrm{Sa}^2(\frac{t}{2}) \Leftrightarrow 2\pi\mathrm{tri}(\omega - 100)$$

et

$$e^{-100jt}\mathrm{Sa}^2(\frac{t}{2}) \Leftrightarrow 2\pi\mathrm{tri}(\omega + 100)$$

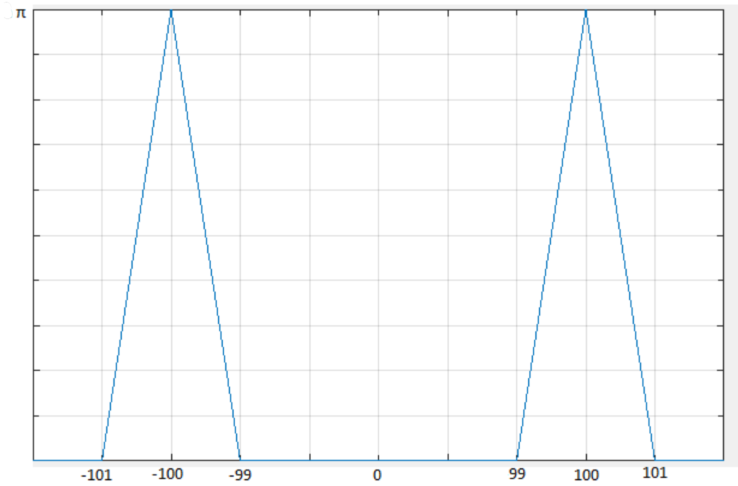
Finalement :

$$F(\omega) = \frac{1}{2}2\pi\mathrm{tri}(\omega - 100) + \frac{1}{2}2\pi\mathrm{tri}(\omega + 100)$$

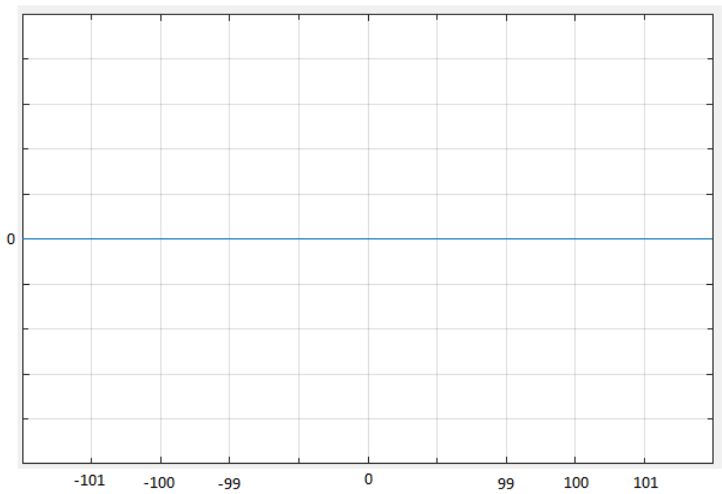
Aisni :

$$\boxed{F(\omega) = \pi\mathrm{tri}(\omega - 100) + \pi\mathrm{tri}(\omega + 100)}$$

- Tracé du module de $F(\omega)$



- Tracé de la phase de F(w)



b)

$g(t) = af(t - \tau_0)$

- Calcul de G(w) :

Nous savons que :

$$f(t) \Leftrightarrow F(\omega)$$

Donc :

$$f(t - \tau_0) \Leftrightarrow e^{-\tau_0 j\omega} F(\omega)$$

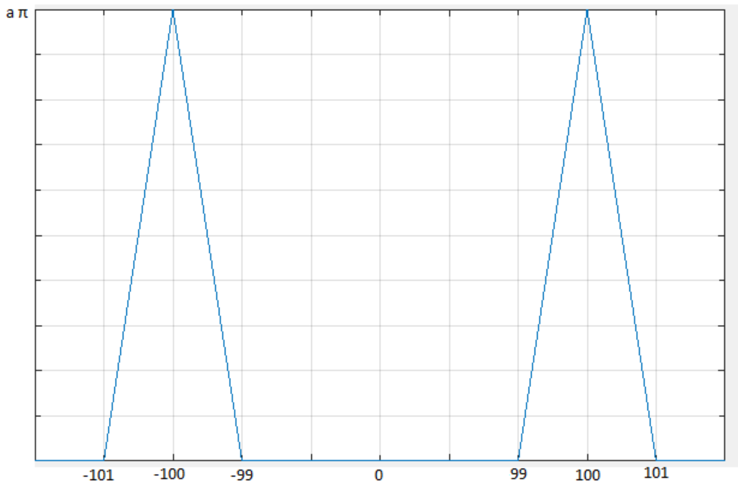
Alors :

$$af(t - \tau_0) \Leftrightarrow ae^{-\tau_0 j\omega} F(\omega)$$

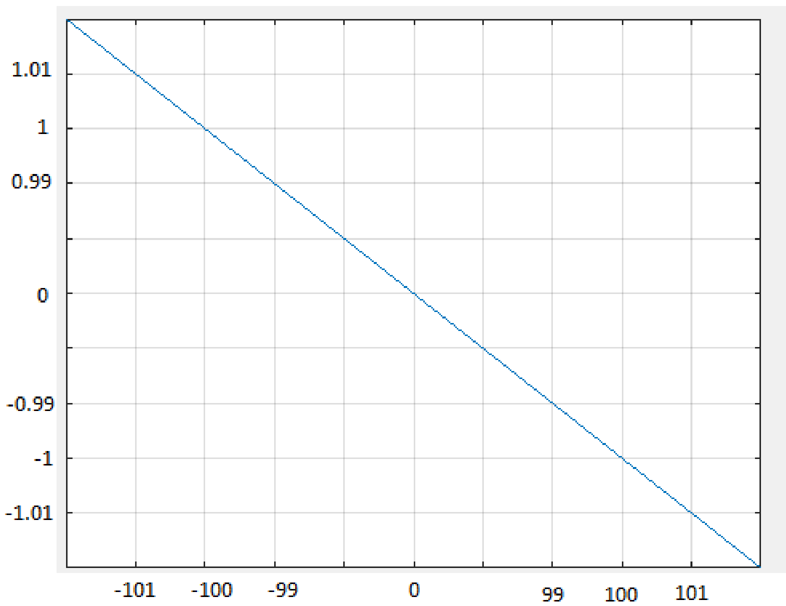
Ainsi :

$$\boxed{G(\omega) = ae^{-\tau_0 j\omega} F(\omega)}$$

- Tracé du module de $G(\omega)$



- Tracé de la phase de $G(\omega)$

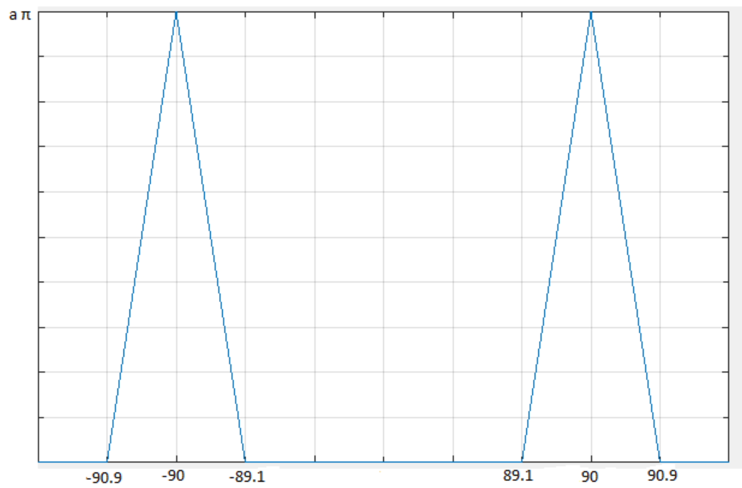


c)

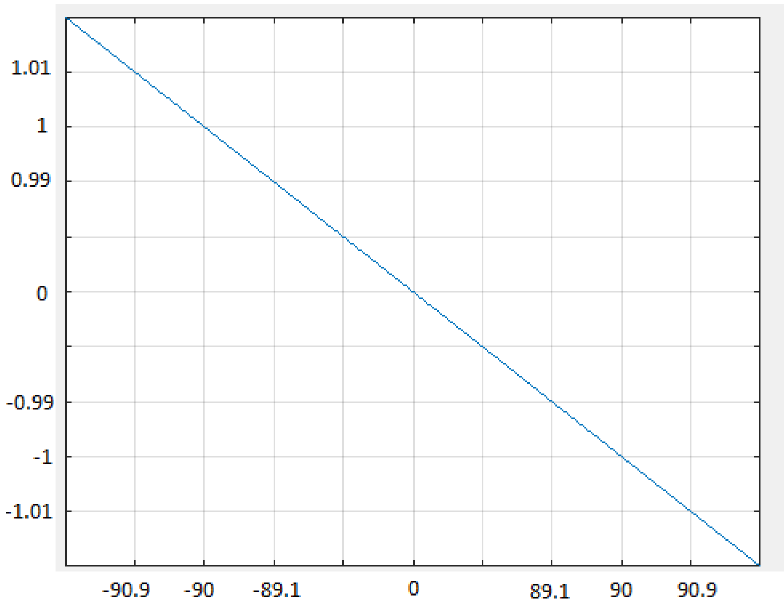
$$\begin{aligned} H(\omega) &= G(\omega/\beta) \\ &= ae^{-\tau_0 j\omega/0.9}F(\omega/0.9) \\ &= ae^{-j\omega/90}F(\omega/0.9) \\ &= a\pi e^{-j\omega/90}[\text{Tri}(\frac{\omega}{0.9}-100)+\text{Tri}(\frac{\omega}{0.9}+100)] \end{aligned}$$

$$\boxed{H(\omega) = a\pi e^{-j\omega/90}[\text{Tri}(\tfrac{\omega-90}{0.9})+\text{Tri}(\tfrac{\omega+90}{0.9})]}$$

- Tracé du module de $H(\omega)$



- Tracé de la phase de $H(\omega)$



d)

On a :$\frac{1}{\beta}G(\omega/\beta) \Leftrightarrow g(\beta t)$, donc : $G(\omega/\beta) \Leftrightarrow \beta g(\beta t)$, d'où :

$$\begin{aligned} h(t) &= \beta g(\beta t) \\ &= \beta a f(\beta t - \tau_0) \\ &= 0.9a\cos(100(\beta t - \tau_0))\mathrm{Sa}^2(\frac{\beta t - \tau_0}{2}) \end{aligned}$$

$$\boxed{h(t) = 0.9a\cos(90t - 1)\mathrm{Sa}^2(\tfrac{90t-1}{2*100})}$$

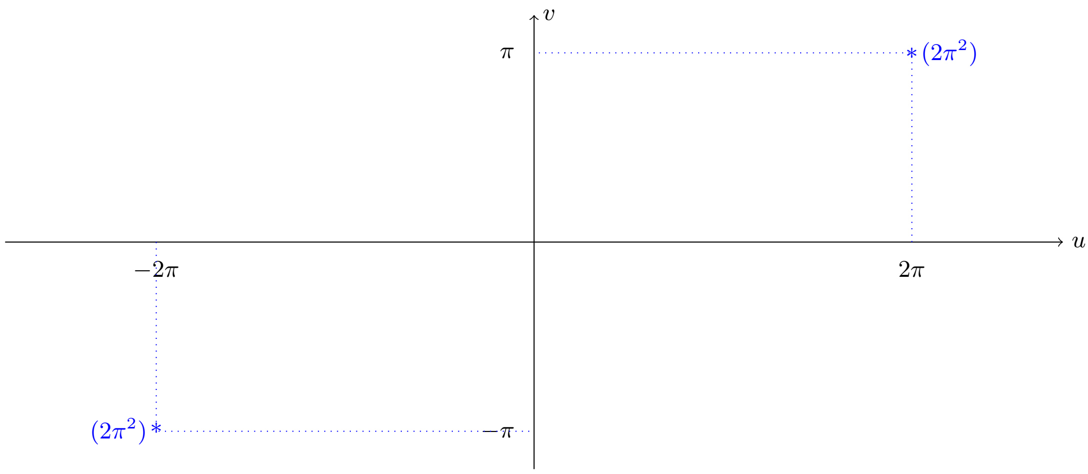
Problème 4 (8 pts)

a)

$$
\begin{aligned}
F(u,v) &= \int\int \cos(2\pi x + \pi y) e^{-j(ux+vy)}\, dx\, dy \\
&= \int\int \frac{e^{j(2\pi x+\pi y)} + e^{-j(2\pi x+\pi y)}}{2} e^{-j(ux+vy)}\, dx\, dy \\
&= \int\int \frac{e^{j2\pi x}e^{j\pi y} + e^{-j2\pi x}e^{-j\pi y}}{2} e^{-j(ux+vy)}\, dx\, dy \\
&= \frac{1}{2}\int\int e^{j(2\pi-u)x}e^{j(\pi-v)y} + e^{-j(2\pi+u)x}e^{-j(\pi+v)y}\, dx\, dy \\
&= \frac{1}{2}\int\int e^{j(2\pi-u)x}e^{j(\pi-v)y}\, dx\, dy + \frac{1}{2}\int\int e^{-j(2\pi+u)x}e^{-j(\pi+v)y}\, dx\, dy \\
&= \frac{1}{2}\int e^{-j(u-2\pi)x}\, dx \int e^{-j(v-\pi)y}\, dy + \frac{1}{2}\int e^{-j(u+2\pi)x}\, dx \int e^{-j(v+\pi)y}\, dy \\
&= \frac{1}{2} TF_u(e^{j2\pi x}) TF_v(e^{j\pi y}) + \frac{1}{2} TF_u(e^{-j2\pi x}) TF_v(e^{-j\pi y})
\end{aligned}
$$

$$\boxed{F(u,v) = \tfrac{(2\pi)^2}{2}\delta(u-2\pi)\delta(v-\pi) + \tfrac{(2\pi)^2}{2}\delta(u+2\pi)\delta(v+\pi)}$$

En pratique, il y a un mini problème avec cette réponse car le produit des deux impulsions en u et en v est problématique et mal défini. Il faudrait plutôt avoir une impulsion "2D" $\delta(u-\pi, v-\pi)$. Cependant, cela ne change pas vraiment la compréhension du problème.



c) La fréquence des rayures sur le plancher est : $w_0 = \sqrt{(2\pi)^2 + \pi^2} = \sqrt{5}\pi$ rad/m

La période des rayures sur le plancher est : $T_0 = \frac{2\pi}{w_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{5}\pi} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ m

d) Les rayures sont à un angle de $\arctan(2\pi/\pi) = 63.4$ degrés par rapport à notre système de coordonnées cartésien. Il faut faire attention ici au ratio des périodes en X et Y par rapport au ratio des fréquences en u et en v.