MAT-19961 CALCUL MATRICIEL

Examen #1
26 octobre 2007, 18h30 à 20h20

Aucun document n'est autorisé. La calculatrice est interdite.
Justifiez vos calculs et raisonnements.

Éric Poulin, Département de génie électrique et de génie informatique

---

QUESTION 1 (25 points)

Soit le système d'équations linéaires

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 11x_3 & = & 4 \\ 3x_1 & - & 3x_2 & + & hx_3 & = & k \end{array}$$

a) (5 points) Trouvez les valeurs de h et k afin que le système ne possède pas de solution;

b) (5 points) Trouvez les valeurs de h et k afin que le système ne possède qu'une seule solution;

c) (5 points) Trouvez les valeurs de h et k afin que le système possède une infinité de solutions;

d) (10 points) Pour les valeurs de h et k trouvées en c), écrivez la solution générale du système sous forme paramétrique vectorielle.

QUESTION 2 (15 points)

a) (5 points) Soit la matrice A ci-dessous. Est-ce que les colonnes de cette matrice forment un ensemble linéairement indépendant (justifiez)?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

b) (10 points) Soit la matrice B ci-dessous. Est-ce que les colonnes de cette matrice engendrent $\mathbf{R}^3$ (justifiez)?

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

QUESTION 3 (10 points)

Donnez la commande ou la séquence de commandes Matlab pour :

a) (2 points) Mettre la deuxième colonne de la matrice A dans le vecteur **c**;

b) (2 points) Tracer sur un même graphique les fonctions $f_1(x) = 2x + 1$ et $f_2(x) = x^2$ pour x compris entre 0 et 5;

c) (2 points) Calculer l'inverse de la transposée de la matrice A;

d) (2 points) Créer une matrice identité de genre $n = 4$;

e) (2 points) Réaliser une fonction qui accepte comme arguments un scalaire d et une matrice A, effectue le produit de la matrice par le scalaire et retourne le résultat dans une matrice B.

QUESTION 4 (25 points)

Soit le système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ avec

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 7 & 0 \\ 1 & 11 & -8 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a) (15 points) Faites la factorisation LU de la matrice A;

b) (10 points) Trouvez la solution du système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en utilisant cette factorisation LU.

QUESTION 5 (25 points)

Soit les matrices

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 6 & 2 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

a) (10 points) Calculez le déterminant de la matrice A à partir du développement en cofacteurs;

b) (5 points) Exprimez le déterminant de B en fonction du déterminant de la matrice A;

c) (5 points) Calculez $\det(2A)$;

d) (5 points) Calculez $\det(A + B)$.