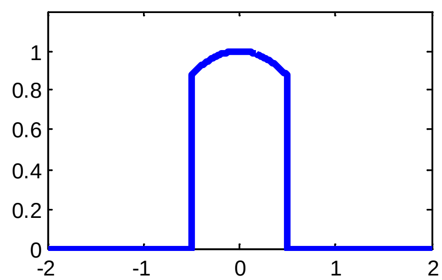
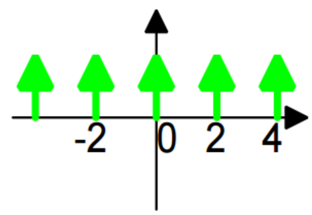
Jeudi 17 décembre 2015; durée: 8h30 à 10h20
aucune documentation permise; aucune calculatrice permise

Problème 1 (9 points sur 100)

Pour

$f(t)=\cos(t)\,\mathrm{Rect}(t)$	$g(t)=\delta_2(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-2n)$
	

$f(t)\times g(t)$ est périodique	OUI	NON
$f(t)*g(t)$ est périodique	OUI	NON
$f(t)*g(t)$ a un spectre périodique	OUI	NON

Problème 2 (9 points sur 100)

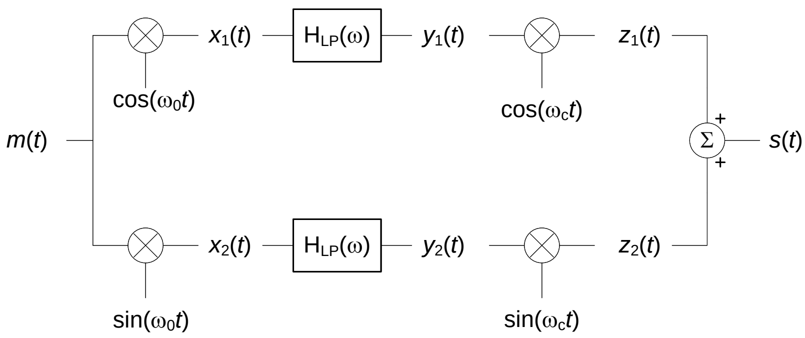
Pour les trois filtres suivants :

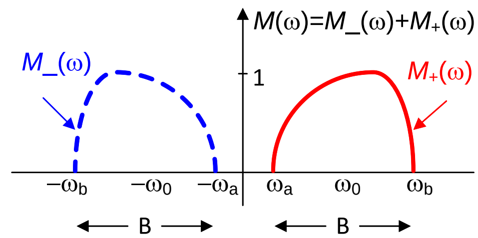
$$h_1(t)=\mathrm{Rect}(t) \qquad h_2(t)=e^{-\beta t}\,\mathrm{U}(t) \qquad h_3(t)=e^{-\beta|t|},$$

discutez comment les rendre causaux sans introduire de distorsion importante.

Problème 3 (40 points sur 100)

Pour le système suivant $m(t) \Leftrightarrow M(\omega) = M_{-}(\omega) + M_{+}(\omega)$





$$\omega_0 = \frac{\omega_a + \omega_b}{2}, \quad \omega_a = \omega_0 - \frac{B}{2}, \quad \omega_b = \omega_0 + \frac{B}{2}, \qquad H_{LP}(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < B/2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} = \mathrm{Rect}\left(\frac{\omega}{B}\right)$$

et $\omega_c >> \omega_0$, et $\omega_c >> B$

A. (10 points) Trouver le spectre de $x_1(t)$ en fonction de $M_{-}(\omega)$ et $M_{+}(\omega)$.

B. (10 points) Trouver le spectre de $y_1(t)$ en fonction de $M_{-}(\omega)$ et $M_{+}(\omega)$.

C. (10 points) Trouver le spectre de $z_1(t)$ en fonction de $M_{-}(\omega)$ et $M_{+}(\omega)$.

D. (10 points) En sachant que

$$Z_2(\omega) = \frac{1}{4} M_{+}(\omega - \omega_c + \omega_0) - \frac{1}{4} M_{-}(\omega - \omega_c - \omega_0) - \frac{1}{4} M_{+}(\omega + \omega_c + \omega_0) + \frac{1}{4} M_{-}(\omega + \omega_c - \omega_0)$$

Trouvez et tracez le spectre de $s(t)$.

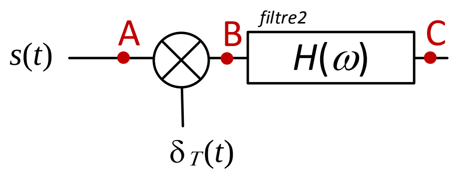
Problème 4 (42 points sur 100)

Le message $m(t)$ a une transformée de Fourier de $M(\omega) = \text{Tri}(\omega)$. Nous appliquons une modulation au message pour générer le signal $s(t) = m(t)\cos(10t)$.

A. (4points) Quel est le spectre d'amplitude de $s(t)$?

B. (8points) Quels sont la fréquence de Nyquist et le taux d'échantillonnage de Nyquist de $s(t)$ et de $m(t)$?

Notre objectif est de numériser le signal $s(t)$ et ensuite reconstruire le signal analogique $m(t)$, avec le moins de distorsion possible. Il n'y a pas de bruit dans ce système.



C. (10points) Supposez un taux d'échantillonnage de $T = 4\pi/5$. Tracez le spectre au point B, en indiquant les amplitudes maximales et les fréquences clés (où le spectre atteint son maximum, passe par zéro, etc.). Est-ce que nous pouvons récupérer le signal $m(t)$ avec un filtrage $H(\omega)$? Si oui, donnez $H(\omega)$, si non expliquez pourquoi le filtrage ne marchera pas.

D. (10points) Supposez un taux d'échantillonnage de $T = \pi/2$. Tracez le spectre au point B, en indiquant les amplitudes maximales et les fréquences clés (où le spectre atteint son maximum, passe par zéro, etc.) Est-ce que nous pouvons récupérer le signal $m(t)$ avec un filtrage $H(\omega)$? Si oui, donnez $H(\omega)$, si non expliquez pourquoi le filtrage ne marchera pas.

E. (10points) Discutez les taux de Nyquist trouvés dans la partie B, et la capacité de récupérer le signal $m(t)$ dans les sections C et D. La discussion doit toucher

i. le recouvrement spectral

ii. la reconstruction idéale

iii. comment le critère de Nyquist est relié aux points i) et ii)

iv. application de ces concepts aux parties C et D

Sum and Difference Formulas

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta$$

Half Angle Formulas

$$\sin^2\theta = \frac{1}{2}\left(1 - \cos(2\theta)\right)$$

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2}\left(1 + \cos(2\theta)\right)$$

Product to Sum Formulas

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\right]$$

$$\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)\right]$$

$$\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)\right]$$