GEL19962 : Analyse des signaux

Mini-test 1 A2004 : Solutions

Département de génie électrique et de génie informatique

Problème 1 (1 pt)

On demande d'indentifier les coefficients complexes de Fourier pour la fonction suivante :

$$f(t) = 3 + 4\sin(2t) + 3\cos(4t)\,.$$

Par inspection, on trouve d'abord que $\omega_0 = 2$, ce qui nous donne :

$$f(t) = 3 + 4\sin(\omega_0 t) + 3\cos(2\omega_0 t)\,.$$

En utilisant les relations d'Euler, on trouve la fonction sous sa forme exponentielle, forme qui pourra être simplifiée :

$$\begin{aligned} f(t) &= 3 + \frac{4}{2\,\mathrm{j}}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t} - \mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}\omega_0 t}\right] + \frac{3}{2}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\omega_0 t} + \mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}2\omega_0 t}\right]\,, \\ &= 3 + 2\,\mathrm{j}\left[\mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}\omega_0 t} - \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}\right] + \frac{3}{2}\left[\mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}2\omega_0 t} + \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\omega_0 t}\right]\,. \end{aligned}$$

À partir de cette dernière expression, il est facilement possible de retrouver les termes associés aux coefficients de Fourier...

$$\begin{array}{ccccccccccc} f(t) = & 3 & + & 2\,\mathrm{j}\mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}\omega_0 t} & - & 2\,\mathrm{j}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t} & + & \frac{3}{2}\mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}2\omega_0 t} & + & \frac{3}{2}\mathrm{e}^{+\,\mathrm{j}2\omega_0 t}\,. \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & F(0) & & F(-1) & & F(1) & & F(-2) & & F(2) \end{array}$$

Finalement on trouve les différents coefficients, nous permettant ainsi de déduire que la réponse est **C** :

$$F(0) = 3, \quad F(-1) = 2\,\mathrm{j}, \quad F(1) = -2\,\mathrm{j}, \quad F(-2) = \tfrac{3}{2} \quad \text{et} \quad F(2) = \tfrac{3}{2}\,.$$

Problème 2 (1 pt)

Soit la fonction :

$$\begin{aligned} f(t) &= t\cos t \quad \text{pour} \quad -2 \le t < 2\,, \\ f(t + 4k) &= f(t) \quad \text{pour} \quad k \in \mathcal{Z}\,. \end{aligned}$$

De plus, la fonction $f_p(t)$ admet un développement en série de Fourier donné par :

$$F(n) = A(n) + \mathrm{j}B(n) = |F(n)|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\angle F(n)}\,.$$

a)

On demande si $F^*(n) = F(-n)$. On sait que pour une fonction réelle $F^*(-n) = F(n)$ (voir §2.2.2, p.11). Donc $F^*(n) = F(-n)$ doit être **VRAI** aussi, puisqu'on peut substituer n par $-n$ sans perte de généralité.

b)

Par définition, $\mathrm{j}B(n)$ est imaginaire, mais $B(n)$ est réel. Donc l'énnoncé est **FAUX**.

c)

Une concéquence de la propriété énoncée en **a)** est que le spectre d'amplitude d'une fonction périodique réelle est pair et que son spectre de phase est impair. Donc $\angle F(n)$ est impair ; l'énoncé est **FAUX**.

d)

Puisque la fonction $f(t)$ est impaire, $A(n)$ doit être nulle. On peut facilement conclure que $f(t)$ est impaire, puisque qu'il s'agit du produit d'une fonction paire ($\cos t$ sur $-2 < t < 2$) et d'une fonction impaire (t). L'énoncé est donc **VRAI**.

Problème 3 (3 pts)

a)

On demande d'abord de trouver les coefficients complexes de Fourier pour la fonction donnée graphiquement. Pour cela on doit d'abord identifier correctement la fonction $f(t)$:

$$f(t) = 1 - t \quad \text{pour} \quad 0 \leq t < 1\,, \quad \text{et} \quad f(t+1) = f(t)\,.$$

À partir du graphique, il est aussi possible d'identifier la période ainsi que la fréquence angulaire de la fonction :

$$T_0 = 1, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi\,.$$

Enfin, toujours par inspection, on peut aussi identifier $F(0)$, la composante continue de la fonction $f(t)$:

$$F(0) = \frac{1}{2}\,.$$

Pour trouver les autres coefficients de Fourier, on peut appliquer directement la définition de $F(n)$:

$$\begin{aligned}
\underset{n\neq 0}{F(n)} &= \int_0^{T_0} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 nt}\mathrm{d}t \quad = \int_0^1 (1-t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi nt}\mathrm{d}t \quad = \int_0^1 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi nt}\mathrm{d}t - \int_0^1 t\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi nt}\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi nt}}{-\mathrm{j}2\pi n} - \frac{t\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi nt}}{-\mathrm{j}2\pi n} + \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi nt}}{(-\mathrm{j}2\pi n)^2}\right]_0^1 \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi n}}{-\mathrm{j}2\pi n} - \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi n}}{-\mathrm{j}2\pi n} + \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi n}}{(-\mathrm{j}2\pi n)^2} - \frac{1}{(-\mathrm{j}2\pi n)^2} - \frac{1}{-\mathrm{j}2\pi n}\,.
\end{aligned}$$

Cette dernière expression peut être simplifiée (en notant que $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi n} = 1$) pour trouver le résultat recherché :

$$\underset{n\neq 0}{F(n)} = \frac{-\mathrm{j}}{2\pi n}\,.$$

b)

Le puissance contenue dans la Nième harmonique est donnée par (voir §2.3.3) :

$$P(N) = |F(N)|^2 + |F(-N)|^2 \ .$$

Ainsi, pour la première harmonique on a, utilisant le résultat obtenu en **a)** :

$$P(1) = \left|\frac{-\mathrm{j}}{2\pi}\right| + \left|\frac{\mathrm{j}}{2\pi}\right| = \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} = \frac{1}{2\pi^2} \ .$$