STT-2920 Minitest 2

Mercredi 11 octobre 2017

PRÉNOM EN GROSSES LETTRES CARRÉES : ______________*ALBERT*__________________

NOM DE FAMILLE EN GROSSES LETTRES CARRÉES : ______________*EINSTEIN*________________

Matricule : ________________314159265__________________

Numéro 1. Voici la fonction de répartition de la variable aléatoire X :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\infty < x < 0 \\ \dfrac{x^3}{125} & \text{si } 0 \leq x \leq 5 \\ 1 & \text{si } 5 < x < \infty \end{cases}$$

(a) Obtenez la probabilité que cette variable aléatoire prenne une valeur entre 3 et 4.

Réponse :

$$\mathbb{P}[3 < X < 4] = F(4) - F(3) = \frac{4^3}{125} - \frac{3^3}{125} = \frac{64-27}{125} = \frac{37}{125} = 0.2960.$$

(b) Calculez l'espérance de cette variable aléatoire.

Réponse :

D'abord on obtient la densité $f(x) = \frac{d}{dx}F(x)$. Voici cette densité :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2}{125} & \text{si } 0 < x < 5, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Puis on calcule l'espérance :

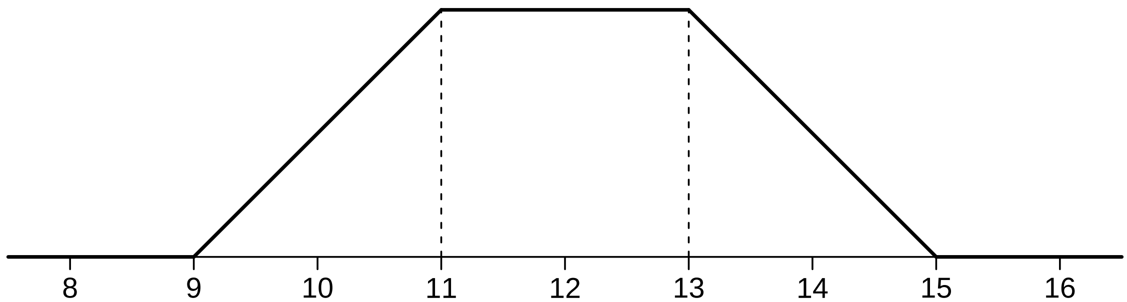
$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx = \int_0^5 \frac{3x^3}{125}\, dx = \frac{3}{125} \left. \frac{x^4}{4} \right|_0^5 = \frac{15}{4} = 3.75.$$

(c) Sachant que $X \leq 4$, quelle est la probabilité que X soit en fait plus petit ou égal à 3 ?

Réponse :

$$\mathbb{P}[X \leq 3 \,|\, X \leq 4] = \frac{\mathbb{P}[X \leq 3]}{\mathbb{P}[X \leq 4]} = \frac{F(3)}{F(4)} = \frac{27/125}{64/125} = \frac{27}{64} = 0.421875.$$

Numéro 2. Les piles électriques de 12 volts produites par la compagnie Digitech ont un voltage qui varie beaucoup d'une pile à l'autre. Dans ce qui suit, on suppose que la densité de probabilité suivante est un bon modèle pour décrire la distribution des voltages de ces piles :



(a) On obtient une pile. Quelle est la probabilité que le voltage de cette pile soit supérieur à 11 volts ?

Réponse :

$$\mathbb{P}[V > 11] = \text{ Surface sous la densité } f(v) \text{ à droite du point } v = 11 \ = \frac{3}{4} = 0.75.$$

(b) On obtient 8 piles. Quelle est la probabilité que parmi ces 8 piles il y en aura exactement 6 qui auront un voltage supérieur à 11 volts ?

Réponse :

On reconnaît ici un scénario de loi binomiale avec paramètre $n = 8$ et $p = 3/4$. La réponse est simplement

$$P[N = 6] = \binom{8}{6}(3/4)^6(1/4)^2 = 0.3115$$

(c) On achète des piles, une après l'autre, et on mesure leurs voltages. Ça va prendre en moyenne combien d'achats pour qu'on obtienne notre première pile de voltage supérieur à 14 volts.

Réponse :

On reconnaît ici un scénario de loi géométrique avec paramètre $p = 1/16$ (puisque la surface sous la densité $f(v)$ à droite du point $v = 14$ est égale à $1/16$) La réponse est donc

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{1/16} = 16.$$

Claude Bélisle
11 octobre 2017