GEL19962 : Analyse des signaux

Mini-test 1 A2006 : Solutions

Département de génie électrique et de génie informatique

Problème 1 (1 pt)

On demande d'indentifier les coefficients complexes de Fourier pour la fonction suivante :

$$f(t) = 2 + 2\sin(\pi t) + \cos(\pi t) + \sin(3\pi t)\,.$$

Par inspection, on trouve d'abord que $\omega_0 = \pi$, ce qui nous donne :

$$f(t) = 2 + 2\sin(\omega_0 t) + \cos(\omega_0 t) + \sin(3\omega_0 t)\,.$$

En utilisant les relations d'Euler, on trouve la fonction sous sa forme exponentielle :

$$f(t) = 2 + \frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}\right] + \frac{1}{\mathrm{j}}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}\right] + \frac{1}{2\,\mathrm{j}}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}3\omega_0 t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}3\omega_0 t}\right]\,.$$

À partir de cette dernière expression, il est possible de retrouver les termes associés aux coefficients de Fourier...

$$f(t) = \underset{\substack{\uparrow\\ F(0)}}{2} + \underset{\substack{\uparrow\\ F(-1)}}{(\tfrac{1}{2}+\mathrm{j})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}} + \underset{\substack{\uparrow\\ F(1)}}{(\tfrac{1}{2}-\mathrm{j})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}} + \underset{\substack{\uparrow\\ F(-3)}}{\tfrac{\mathrm{j}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}3\omega_0 t}} - \underset{\substack{\uparrow\\ F(3)}}{\tfrac{\mathrm{j}}{2}\mathrm{e}^{+\mathrm{j}3\omega_0 t}}\,.$$

Finalement on trouve les différents coefficients, nous permettant ainsi de déduire que la réponse est **B** :

$$F(0) = 2,\quad F(-1) = (\tfrac{1}{2}+\mathrm{j}),\quad F(1) = (\tfrac{1}{2}-\mathrm{j}),\quad F(-3) = \tfrac{\mathrm{j}}{2} \quad \text{et} \quad F(3) = \tfrac{-\mathrm{j}}{2}\,.$$

Problème 2 (1 pt)

Soit la fonction :

$$f(t) = \begin{cases} 1 - t^2 & \text{pour} \quad 0 \le t < 1 \\ t^2 - 1 & \text{pour} \quad -1 \le t < 0. \end{cases}$$

avec $f(t+2) = f(t)$

Vrai ou faux ?

a)

On demande si $F^*(-n) = F(n)$. On sait que pour une fonction réelle $F^*(n) = F(-n)$ (voir §2.2.2, p.11). Donc l'énoncé est **VRAI**, puisqu'on peut substituer n par $-n$ sans perte de généralité.

b)

Dans le cas présent, comme $f(t)$ est purement réel, $A(n)$ est pair et $B(n)$ est impair. $Arg(F(n)) = \arctan(B(n)/A(n))$ est impair. L'énoncé est donc **VRAI**.

c)

$B(n)$ est réel, c'est $\mathrm{j}B(n)$ qui est imaginaire ; l'énoncé est **FAUX**.

d)

La fonction $f(t)$ étant une fonction impaire, le spectre de celle-ci sera purement imaginaire. Donc, clairement, le terme $A(n)$, la partie réelle du spectre, doit être nul ; l'énoncé est **VRAI**.

Problème 3 (3 pts)

a)

On demande d'abord de trouver les coefficients de Fourier pour la partie paire de la fonction donnée graphiquement. Pour cela on doit d'abord identifier correctement la partie paire de la fonction $f(t)$:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad -\frac{1}{2} \leq t < -\frac{1}{4} \\ 1 & \text{pour} \quad -\frac{1}{4} \leq t < \frac{1}{4} \\ 0 & \text{pour} \quad \frac{1}{4} \leq t < \frac{1}{2} \end{cases}$$

À partir du graphique, il est aussi possible d'identifier la période ainsi que la fréquence angulaire de la fonction :

$$T_0 = 1, \quad \omega_0 = 2\pi\,.$$

Enfin, toujours par inspection, on peut aussi identifier $F(0)$, la composante continue de la fonction $f(t)$:

$$F(0) = \frac{1}{2}\,.$$

Pour trouver les autres coefficients de Fourier, on peut appliquer directement la définition de $F(n)$:

$$\begin{aligned} \underset{n\neq 0}{F(n)} &= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 nt}\mathrm{d}t \quad = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{4}} 2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 nt}\mathrm{d}t + \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 nt}\mathrm{d}t + \frac{1}{T_0}\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 nt}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 nt}\mathrm{d}t \quad = \frac{1}{T_0}\left[\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 nt}}{-\mathrm{j}\omega_0 n}\right]_{t=-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\omega_0 n}{4}}}{\mathrm{j}\omega_0 n T_0} - \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega_0 n}{4}}}{\mathrm{j}\omega_0 n T_0} \\ &, \end{aligned}$$

et substituant ω_0 et T_0, on trouve :

$$\underset{n\neq 0}{F(n)} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi n}{2}}}{\mathrm{j}2\pi n} - \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi n}{2}}}{\mathrm{j}2\pi n} = \frac{1}{\pi n}\sin(\frac{\pi n}{2})\,.$$

b)

Le puissance contenue dans la N-ième harmonique est donnée par (voir §2.3.3) :

$$P(N) = |F(N)|^2 + |F(-N)|^2 \ .$$

Ainsi, pour la troisième harmonique on a, utilisant le résultat obtenu en **a)** :

$$P(3) = |F(3)|^2 + |F(-3)|^2 \ .$$

On a :

$$|F(3)| = \left| \frac{1}{3\pi} \sin(\frac{3\pi}{2}) \right| \quad = \left| -\frac{1}{3\pi} \right|$$

$$|F(3)| = \frac{1}{3\pi} \ ,$$

similairement, pour $N = -3$:

$$|F(-3)| = \left| \frac{1}{-3\pi} \sin(\frac{-3\pi}{2}) \right| \quad = \left| \frac{1}{3\pi} \right|$$

$$= |F(3)| \ .$$

Finalement, on trouve la puissance totale dans la seconde harmonique :

$$P(3) = |F(3)|^2 + |F(-3)|^2 = 2 \left| \frac{1}{3\pi} \right|^2 = \frac{2}{9\pi^2}$$