Mini-test 2 *Solutions*

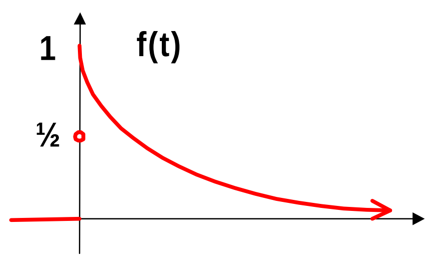
Problème 1 *(1 point sur 5)*

Le théorème de déplacement en fréquence est

$$e^{j\omega_0 t} f(t) \quad \Leftrightarrow \quad F(\omega - \omega_0)$$

(Voir le problème 4.3 dans chapitre 4.)

Problème 2 (1 point sur 5)



$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{2} & t = 0 \\ e^{-\beta t} & t > 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad F(\omega) = \frac{1}{\beta + j\omega}$$

La définition de la partie impaire d'une fonction est

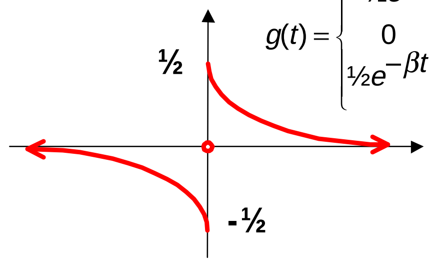
$$f_{od}(t) = \frac{1}{2}\left[f(t) - f(-t)\right]$$

Donc

$$f_{od}(t) = \frac{1}{2}\begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{2} & t = 0 \\ e^{-\beta t} & t > 0 \end{cases} - \frac{1}{2}\begin{cases} 0 & -t < 0 \\ \frac{1}{2} & t = 0 \\ e^{\beta t} & -t > 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{4} & t = 0 \\ \frac{1}{2} e^{-\beta t} & t > 0 \end{cases} - \begin{cases} \frac{1}{2} e^{\beta t} & t < 0 \\ \frac{1}{4} & t = 0 \\ 0 & t > 0 \end{cases} = \begin{cases} -\frac{1}{2} e^{\beta t} & t < 0 \\ 0 & t = 0 \\ \frac{1}{2} e^{-\beta t} & t > 0 \end{cases}$$

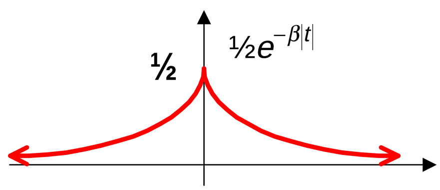
$$g(t)=\begin{cases}-\tfrac{1}{2}e^{\beta t} & t<0\\ 0 & t=0\\ \tfrac{1}{2}e^{-\beta t} & t>0\end{cases}$$

a) 

est la partie impaire de *f(t)*

VRAI

La fonction dans le graphique est la partie paire de la fonction f(t), donc on peut trouver la transformée de cette fonction en utilisant la partie réelle de la transformée. Par contre, il n'est pas nécessaire, parce qu'on peut voir de la graphique que cette fonction est paire. La transformée d'une fonction paire est toujours réelle. Comme la transformée donnée a une partie imaginaire, l'énoncé est faux.

b) 

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{\beta}{\beta^2+\omega^2}+\dfrac{j}{\omega}$

FAUX

En utilisant l'équation d'analyse, on peut trouver l'aire sous la courbe f(t).

$$F(\omega)\big|_{\omega=0}=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt\Big|_{\omega=0}$$

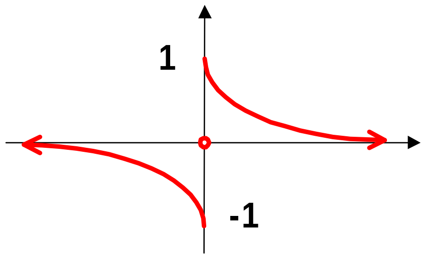
Donc

$$F(0)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt=\frac{1}{\beta+j\cdot 0}=\frac{1}{\beta}$$

c) L'aire sous la courbe *f(t)* est $\dfrac{1}{2\beta}$

FAUX

Problème 3 *(3 points sur 5)*



$$f_k(t) = \operatorname{sgn}(t) \cdot e^{-k|t|}$$

a) *2 points*

Pour trouver la transformée de Fourier on utilise l'équation d'analyse.

$$\begin{aligned}
F_k(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(t) \cdot e^{-k|t|} e^{-j\omega t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} (-1) \cdot e^{kt} e^{-j\omega t} dt + \int_{0}^{\infty} (1) \cdot e^{-kt} e^{-j\omega t} dt \\
&= -\int_{-\infty}^{0} e^{(k-j\omega)t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-(k+j\omega)t} dt \\
&= -\left.\frac{e^{(k-j\omega)t}}{k-j\omega}\right|_{-\infty}^{0} - \left.\frac{e^{(k-j\omega)t}}{k+j\omega}\right|_{0}^{\infty} \\
&= \frac{-1}{k-j\omega} + \frac{1}{k+j\omega} = -\frac{k+j\omega}{k^2+\omega^2} + \frac{k-j\omega}{k^2+\omega^2} \\
&= -j\frac{2\omega}{k^2+\omega^2}
\end{aligned}$$

Il est aussi possible d'utiliser les résultats donnés au problème deux. La fonction $f_k(t)$ est égale à deux fois la partie impaire de la fonction du problème un, avec $k = \beta$. Donc, la transformée de $f_k(t)$ est égale à deux fois la partie imaginaire de la transformée du problème deux.

$$F_k(\omega) = j \operatorname{Im} \frac{2}{k+j\omega} = 2j \operatorname{Im} \frac{k-j\omega}{k^2+\omega^2} = -j\frac{2\omega}{k^2+\omega^2}$$

b) *1 point*

L'expression analytique est

$$f_k(t) = \begin{cases} -e^{kt} & t < 0 \\ 0 & t = 0 \\ e^{-kt} & t > 0 \end{cases}$$

Soit $f(t) = \lim_{k\to 0} f_k(t)$. Quand k va à zéro, les exponentielles tendent vers un et moins un:

$$\lim_{k\to 0} f_k(t) = \begin{cases} -1 & t < 0 \\ 0 & t = 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} = \mathrm{sgn}(t)$$

On sait que la transformée de la limite est égale à la limite des transformées, donc

$$\begin{aligned} \mathscr{F}\{\mathrm{sgn}\, t\} &= \mathscr{F}\left\{\lim_{k\to 0} f_k(t)\right\} = \lim_{k\to 0} \mathscr{F}\{f_k(t)\} \\ &= \lim_{k\to 0} j\frac{-2\omega}{k^2+\omega^2} = j\frac{-2\omega}{0+\omega^2} = \frac{-2j}{\omega} \end{aligned}$$

Cette page a été révisée le vendredi, septembre 13, 1996 par Leslie A. Rusch.