2006 Examen partiel – Solutionnaire

Problème 1 (25 points sur 100)

A. (5 points) Donnez la définition et trois exemples d'une impulsion Nyquist.

Une impulsion Nyquist passe par zéro pour tous les moments d'échantillonnage sauf *t*=0.

$$v(nT) = 0 \quad \forall n \neq 0 .$$

Quelques exemples sont :

NRZ, soit $v(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t \le T \\ 0 & ailleurs \end{cases}$, Sinc, soit $v(t) = \dfrac{\sin(\pi t/T)}{(\pi t/T)}$

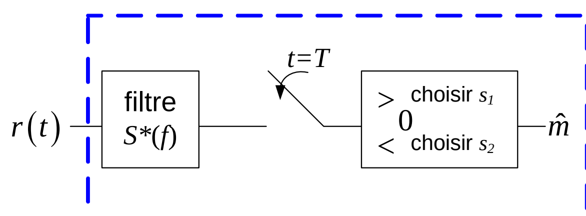
Raised Cosine (RC)

B. (10 points) Quels sont les trois aspects les plus importants pour l'évaluation d'un système de communication numérique?

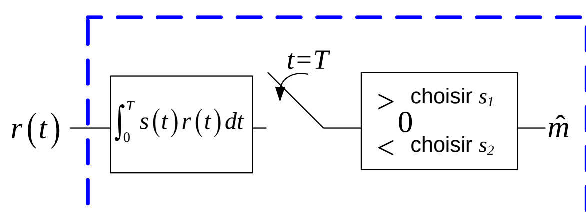
- Efficacité spectrale
- BER vs. E_b/N_0
- Complexité (coût)

C. (10 points) Pour un système binaire avec $s_1(t) = -s_0(t) = s(t)$, et T secondes pour le temps d'un bit, donnez une esquisse du filtre adapté et son implémentation en corrélateur avec tous les paramètres donnez en termes de $s(t)$ et T.

Filtre adapté :



Corrélateur :



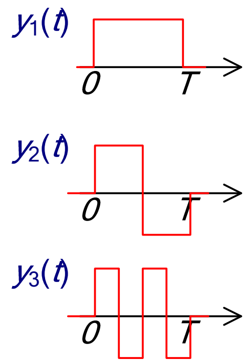
Problème 2 (30 points sur 100)

Un processus Gram Schmidt a été utilisé pour trouver les vecteurs de base :

$$\psi_1(t)=\begin{cases} 1/\sqrt{T} & 0\le t\le T \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

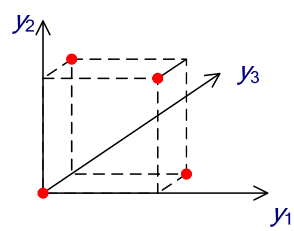
$$\psi_2(t)=\begin{cases} 1/\sqrt{T} & 0\le t\le T/2 \\ -1/\sqrt{T} & T/2< t\le T \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

$$\psi_3(t)=\begin{cases} 1/\sqrt{T} & 0\le t\le T/4,\quad T/2\le t\le 3T/4 \\ -1/\sqrt{T} & T/4\le t\le T/2,\quad 3T/4\le t\le T \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$



Les coefficients des quatre signaux sont

$$s_1=[0 \quad 0 \quad 0]\sqrt{E_b}$$
$$s_2=[4/3 \quad 4/3 \quad 0]\sqrt{E_b}$$
$$s_3=[0 \quad 4/3 \quad 2/3]\sqrt{E_b}$$
$$s_4=[4/3 \quad 0 \quad 2/3]\sqrt{E_b}$$



A. (5 points) Donnez les signaux $s_1(t)$, $s_2(t)$.

Les signaux sont

$$s_1(t)=0 \qquad s_2(t)=\frac{4\sqrt{E_b}}{3}\psi_1(t)+\frac{4\sqrt{E_b}}{3}\psi_2(t)=\frac{4}{3}\sqrt{\frac{E_b}{T}}\begin{cases}2 & 0\le t\le T/2 \\ 0 & ailleurs\end{cases}$$

B. (5 points) Vérifiez que l'énergie moyenne par bit est bien E_b.

L'énergie moyenne par bit est

$$E_b=\frac{E_s}{2}=\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{4}\|s_i\|^2=\frac{1}{8}\left[0+\left(\frac{16}{9}+\frac{16}{9}\right)E_b+\left(\frac{16}{9}+\frac{4}{9}\right)E_b+\left(\frac{16}{9}+\frac{4}{9}\right)E_b\right]$$
$$=\frac{1}{8}\left[\frac{32+20+20}{9}\right]E_b=\frac{72}{72}E_b=E_b \quad \checkmark$$

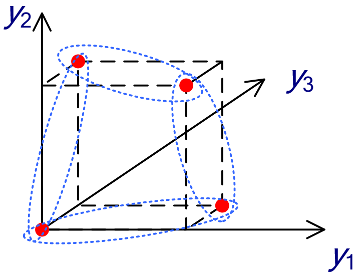
C. (10 points) Donnez la distance minimale $D_{\min}$

La distance minimale est entre s_1 et s_3 :

$$D_{\min}=\|s_2-s_3\|=\sqrt{E_b}\sqrt{(4/3-0)^2+(4/3-4/3)^2+(2/3-0)^2}$$
$$=\sqrt{E_b}\sqrt{16/9+4/9}=\frac{\sqrt{20E_b}}{3}$$

D. (10 points) Donnez une approximation pour la probabilité d'erreur en termes de E_b/N_0 .

Le nombres de paires à la distance minimale est 4 :



Donc l'approximation pour la probabilité d'erreur est

$$P_e \approx \frac{2K}{M} Q\left(\frac{D_{\min}}{\sqrt{2N_0}}\right) = \frac{2\cdot 4}{4} Q\left(\frac{\sqrt{20E_b}}{3\sqrt{2N_0}}\right) = 2Q\left(\sqrt{\frac{10}{9}\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

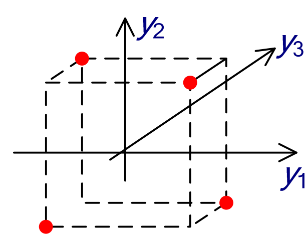
Problème 3 (20 points sur 100)

Considérons encore le système de problème 2. En faisant une translation des signaux pour que l'origine de l'espace du signal se trouve au centre de masse des signaux, la probabilité d'erreur est minimisée.

A. (10 points) Quels sont les vecteurs pour les signaux dans une telle configuration?

Les coefficients des quatre signaux sont

$$s_1 = [-2/3 \quad -2/3 \quad -1/3]\, f$$
$$s_2 = [\ \ 2/3 \quad 2/3 \quad -1/3]\, f$$
$$s_3 = [-2/3 \quad 2/3 \quad 1/3]\, f$$
$$s_4 = [\ \ 2/3 \quad -2/3 \quad 1/3]\, f$$



Où f est un facteur de normalisation pour l'énergie moyenne.
L'énergie moyenne par bit est

$$E_b = \frac{E_s}{2} = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{4}\|s_i\|^2 = \frac{1}{8}\left[\left(\frac{4}{9}+\frac{4}{9}+\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{4}{9}+\frac{4}{9}+\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{4}{9}+\frac{4}{9}+\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{4}{9}+\frac{4}{9}+\frac{1}{9}\right)\right]\cdot f^2$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{32}{9}\right] f^2 = \frac{1}{2} f^2 = E_b \quad \Rightarrow f = \sqrt{2E_b} \checkmark$$

Les coordonnées sont

$$s_1 = [-2/3 \quad -2/3 \quad -1/3]\sqrt{2E_b} \qquad s_2 = [\ \ 2/3 \quad 2/3 \quad -1/3]\sqrt{2E_b}$$
$$s_3 = [-2/3 \quad 2/3 \quad 1/3]\sqrt{2E_b} \qquad s_4 = [\ \ 2/3 \quad -2/3 \quad 1/3]\sqrt{2E_b}$$

B. (5 points) Donnez la distance minimale $D_{\min}$.

La distance minimale est encore entre s_1 et s_3 :

$$D_{\min} = \|s_2 - s_3\| = \sqrt{2E_b}\sqrt{(2/3+2/3)^2 + (2/3-2/3)^2 + (1/3+1/3)^2}$$

$$= \sqrt{2E_b}\sqrt{16/9+4/9} = \frac{\sqrt{40E_b}}{3}$$

C. (5 points) Quelle est l'amélioration de la performance en dB par rapport au système de Problème 2?

L'amélioration est un facteur de deux, donc 3 dB.

Problème 4 (25 points sur 100)

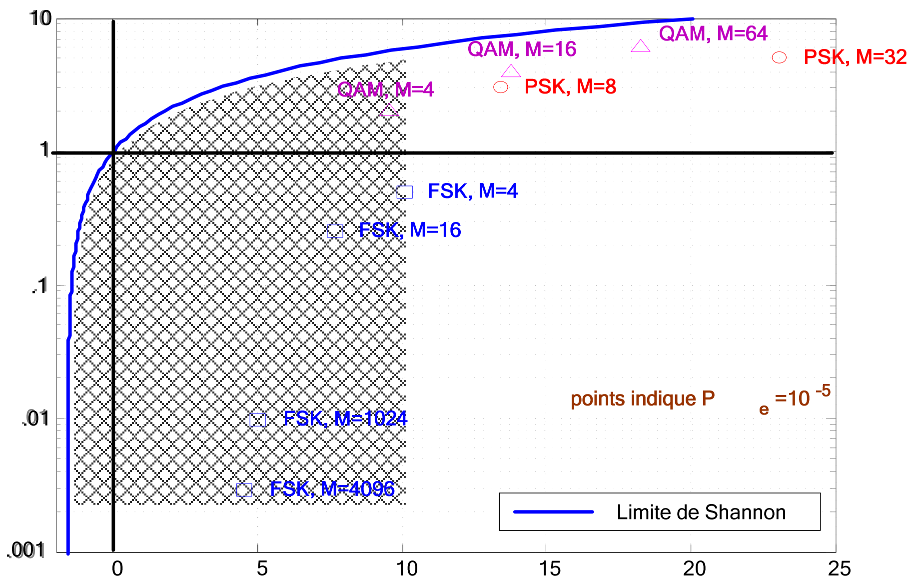
Considérons deux systèmes de communications satellite. Dans un cas nous transmettons 100 kb/s à un bateau avec un antenne de diamètre 1 m, $E_b/N_0 = 10\,\text{dB}$. Dans un deuxième cas nous transmettons 72 Mb/s à une station terrestre avec un antenne de 30 m, $E_b/N_0 = 20\,\text{dB}$. Dans les deux systèmes une bande de fréquence 50 MHz de large est disponible.

A. (10 points) Tracez les deux régions admissibles pour ces deux systèmes dans une esquisse de l'efficacité spectrale vs. E_b/N_0

Pour le système sur bateau, l'efficacité en largeur de bande peut être aussi petite que :

$$\eta = \frac{R}{W} = \frac{100kb/s}{50MHz} = \frac{.1}{50} = .002$$

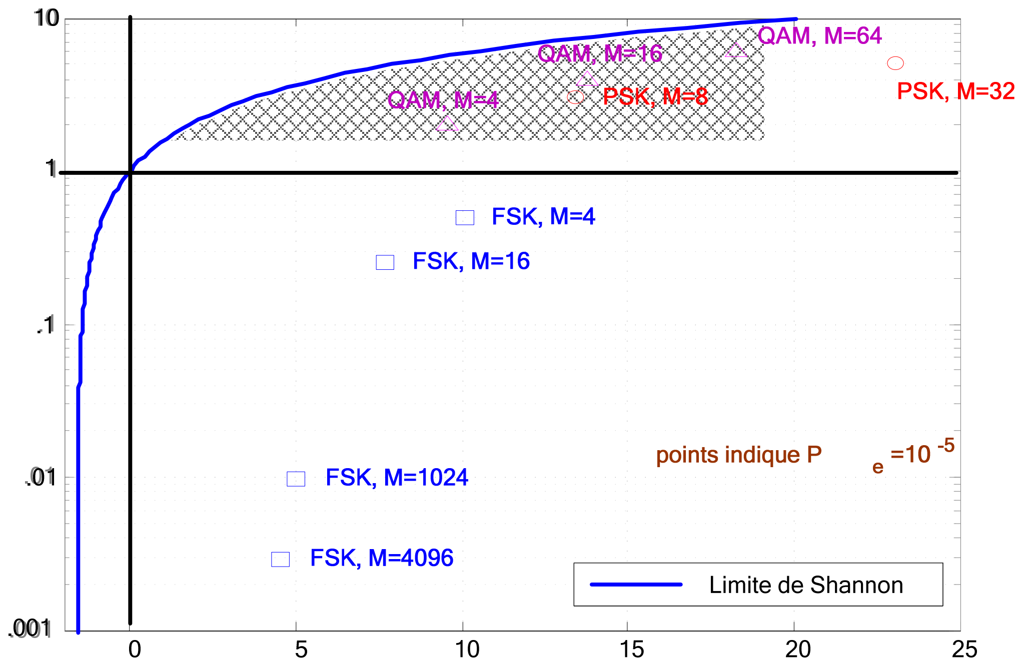
Donc la région admissible sera l'aire sous la limite de Shannon, avec efficacité au minimum de .002, et $E_b/N_0 \le 10\,\text{dB}$



Pour le système de la station terrestre, l'efficacité en largeur de bande peut être aussi petite que :

$$\eta = \frac{R}{W} = \frac{72Mb/s}{50MHz} = \frac{72}{50} = 1.44$$

Donc la région admissible sera l'aire sous la limite de Shannon, avec efficacité pas plus grande que 1.44, et $E_b/N_0 \leq 20\,\text{dB}$



B. (15 points) Proposez des formats de modulation pour chaque système qui sont bien adaptés aux besoins d'efficacité spectrale, E_b/N_0, taux binaire et le coût acceptable dans un bateau vs. une station terrestre. Vous pouvez supposer qu'un taux d'erreur de 10^{-5} est suffisant pour le bateau, mais que la station terrestre sera plus exigent en taux d'erreur.

Discutez votre raisonnement.

Pour le système sur bateau, nous avons beaucoup plus de largeur de bande que ce dont nous avons besoin. Par contre le E_b/N_0 est restreint. Donc les conditions sont très compatibles avec une modulation orthogonale, par exemple MFSK. Nous pouvons utiliser 4FSK et avoir une probabilité d'erreur de 10^{-5} avec E_b/N_0. Nous n'avons pas besoin d'utiliser un MFSK avec *M*>4, qui coûtera plus cher étant plus complexe. Nous pouvons même utiliser des fréquences pour les quatre porteuses très éloignées pour utiliser des filtres bons marchés dans le récepteur. En utilisant une détection incohérente et M=5, nous pouvons réduire le coût encore plus.

Pour le système de la station terrestre, nous avons à peine assez de largeur de bande pour notre taux binaires. Par contre, le E_b/N_0 est bon. Donc les conditions indique une modulation efficace en largeur, par exemple MPSK ou MQAM. Nous pouvons utiliser M=8 ou M=4, et avoir une assez bonne efficacité spectrale.

$$\eta = \log_2 M = \begin{cases} 2 & M = 4 \\ 3 & M = 8 \end{cases} \quad > 1.42$$

Pour avoir la meilleure probabilité d'erreur nous utiliserons le M plus petit qui fait l'affaire en largeur de bande. Avec M=4, le 4QAM et QPSK sont identiques.