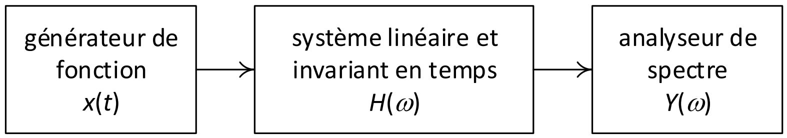
Jeudi 12 décembre 2017; durée: 13h30 à 15h20
aucune documentation permise; aucune calculatrice permise

Problème 1 (20 points sur 100)

Pour trouver la réponse en fréquence (inconnu) d'un système linéaire et invariant dans le temps, nous utilisons un générateur de fonction pour produire un signal que nous passons par le système. Nous mesurons le spectre de la sortie du système avec un analyseur de spectre.



En sachant que $Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$, nous utilisons $H(\omega) = Y(\omega)/X(\omega)$ comme une approximation de la réponse en fréquence.

A. (3 points) Nous envoyons $x(t) = \mathrm{Sa}^2(t\pi/4)$ et nous observons $Y(\omega) = 4\,\mathrm{Tri}\left(\omega \Big/ \left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$. Quelle est notre approximation de $H(\omega)$?

B. (3 points) Nous envoyons $x(t) = \cos 2\pi t \cdot \mathrm{Sa}^2(t\pi/4)$ et nous observons $Y(\omega) = 0$. Quelle est notre approximation de $H(\omega)$?

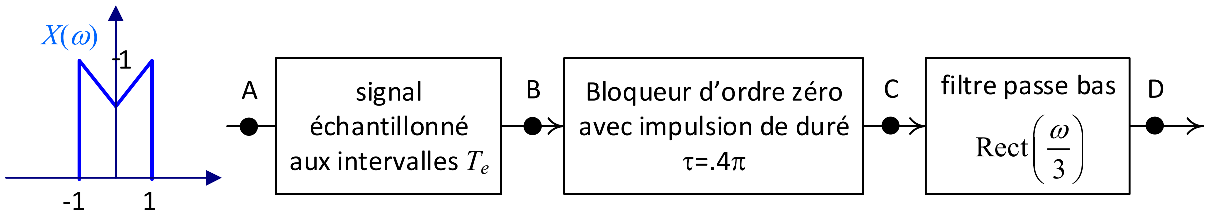
C. (3 points) Nous envoyons $x(t) = \mathrm{Rect}(t/2)$ et nous observons $Y(\omega) = 2(\sin\omega)/\omega$ pour $|\omega| < \pi$, 0 ailleurs. Quelle est notre approximation de $H(\omega)$?

D. (6 points) Est-ce qu'il est possible que les trois mesures (A, B, C) soient faites sur le même système ? Justifiez votre réponse.

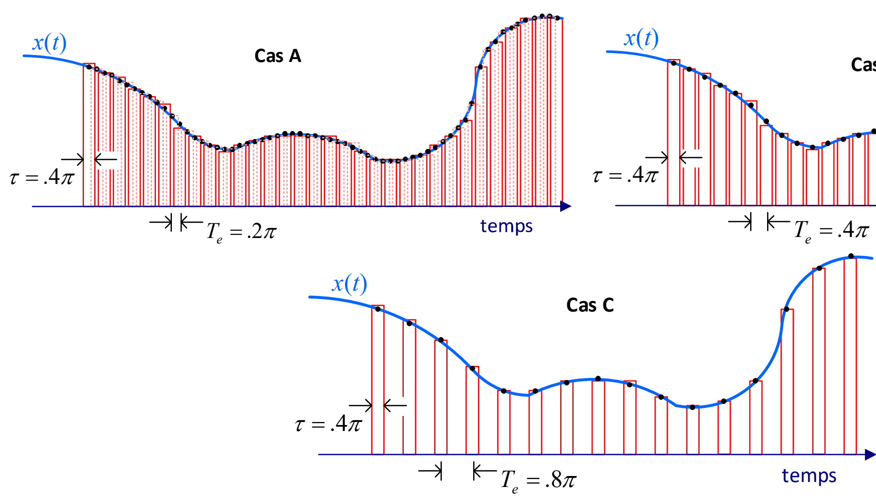
E. (5 points) Discutez les bonnes stratégies (la meilleure ?) pour estimer la fonction transfert.

Problème 2 (35 points sur 100)

Considérons un signal échantillonné qui est reconstruit avec un bloqueur d'ordre zéro. Voici le schéma en bloc, avec le spectre du signal avant échantillonnage donné au point A.



Il y a trois cas d'intervalle d'échantillonnage : T_e=.8π, T_e=.4π, et T_e=.2π. Ces trois cas sont illustrés dans le domaine temporel dans la suite. Le signal original est en courbe solide (au point A), les points échantillonnés (au point B) sont les cercles sur cette courbe, les rectangles sont les impulsions pour la reconstruction (au point C).



Les esquisses demandées dans la suite doivent être faites sur la feuille fournie. Il faut mettre cette feuille dans votre cahier bleu.

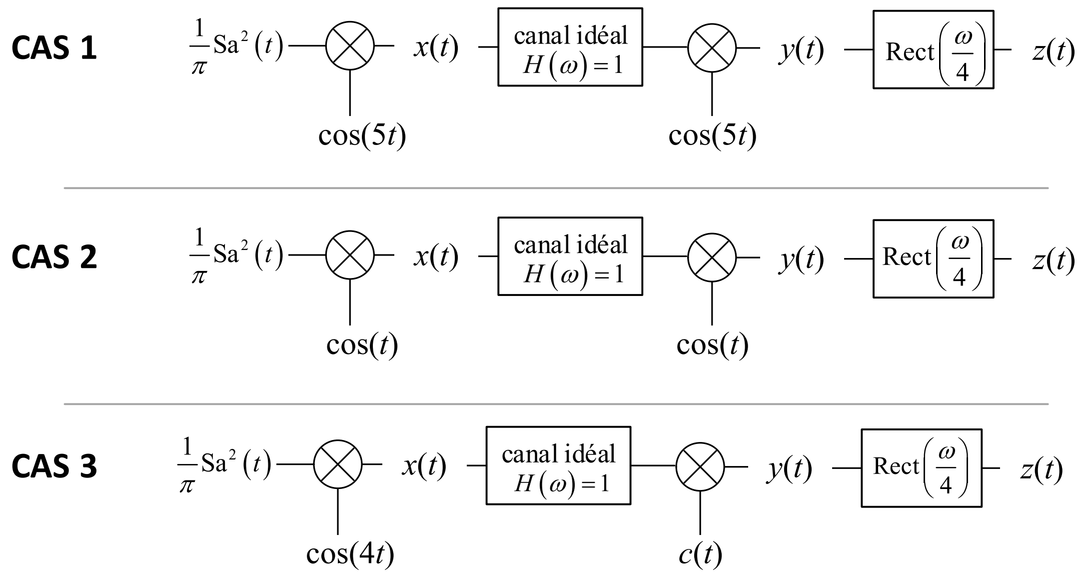
A. (6 points) Donnez une esquisse de spectre au point C et au point D pour T_e=.2π.
B. (6 points) Donnez une esquisse de spectre au point C et au point D pour T_e=.4π.
C. (6 points) Donnez une esquisse de spectre au point C et au point D pour T_e=.8π.
D. (4 points) Quel cas est le bloqueur zéro pratique que nous avons vu en classe ?

Dans les problèmes précédents, nous avons un filtre passe-bas idéal, c.-à-d., rectangulaire. Pour les prochaines questions, discutez les exigences pour la qualité d'un filtre passe-bas pratique. Justifiez vos réponses ; zéro point sans justification. Mentionnez l'impact de T_e et τ.

E. (4 points) Quel cas est le plus exigeant vis-à-vis le filtre ? C'est-à-dire, quel cas demande un filtre avec une coupure très raid ? Est-ce qu'un autre τ aurait pu aider ?
F. (4 points) Quel cas est le moins exigeant vis-à-vis le filtre? Est-ce qu'un autre τ aurait pu aider quand le taux d'échantillonnage est élevé ? Est-ce qu'on peut laisser tomber le filtre passe-bas? Si oui, dans quelles circonstances ?

Problème 3 (45 points sur 100)

Considérons trois systèmes de modulation double bande sans porteuse. Le signal d'entre est $m(t)=\frac{1}{\pi}\mathrm{Sa}^2(t)$.



Les esquisses demandées dans la suite doivent être faites sur les feuilles fournies. Il faut mettre ces feuilles dans votre cahier bleu.

A. (5 points) Donnez une esquisse des spectres $X(\omega)$, $Y(\omega)$, et $Z(\omega)$ pour cas 1.

B. (13 points) Donnez une esquisse des spectres $X(\omega)$, $Y(\omega)$, et $Z(\omega)$ pour cas 2.

C. (5 points) Lequel est vrai :

seulement cas 1 a une sortie proportionnelle à l'entrée,
seulement cas 2 a une sortie proportionnelle à l'entrée,
cas 1 et cas 2 ont une sortie proportionnelle à l'entrée,
ni cas 1 ni cas 2 a une sortie proportionnelle à l'entrée

Suggérez un critère pour la fréquence de modulation pour assurer que la sortie est proportionnelle à l'entrée.

D. (18 points) Pour cas 3, la démodulation est faite avec un signal d'horloge $c(t)$, un signal rectangulaire qui varie entre -1 à 1 avec fréquence $\omega_0 = 4$. La transformée de Fourier de $c(t)$ est

$$C(\omega)=4\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)}\delta\left(\omega-(2k+1)\omega_0\right)$$

Donnez une esquisse des spectres $X(\omega)$, $Y(\omega)$, et $Z(\omega)$ pour cas 3. Utiliser $1/\pi \approx .3$

E. (4 points) En sachant que $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}=1.23=\frac{1}{.81}$, discutez l'efficacité énergétique de cas 1 versus cas 3.

fonction temporelle	transformée
$\mathrm{Rect}(t/\tau)$ [1]	$\tau\,\mathrm{Sa}(\omega\tau/2)$
$\mathrm{Tri}(t/\tau)$ [2]	$\tau\,\mathrm{Sa}^2(\omega\tau/2)$
$\delta(t)$	1
1	$2\pi\delta(\omega)$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$
$\mathrm{U}(t)$	$1/j\omega+\pi\delta(\omega)$
$\mathrm{Sgn}(t)$	$2/j\omega$
$\delta_{T_0}(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT_0)$	$\omega_0\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-n\omega_0)$
$e^{-\beta t}\,\mathrm{U}(t)$	$\dfrac{1}{\beta+j\omega}$
$e^{-\beta\lvert t\rvert}$	$\dfrac{2\beta}{\beta^2+\omega^2}$
$\cos(\omega_0 t)$	$\pi\delta(\omega-\omega_0)+\pi\delta(\omega+\omega_0)$
$\sin(\omega_0 t)$	$j\pi\delta(\omega+\omega_0)-j\pi\delta(\omega-\omega_0)$
$\delta'(t)$	$j\omega$
$\delta''(t)$	$(j\omega)^2$

domaine temporelle	domaine fréquentiel
$f(t)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$	$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$
$f(t)$	$F(\omega)$
$F(t)$	$2\pi f(-\omega)$
$f(t+a)$	$e^{ja\omega}F(\omega)$
$e^{jbt}f(t)$	$F(\omega-b)$
$f(at)$	$\dfrac{1}{\lvert a\rvert}F\left(\dfrac{\omega}{a}\right)$
$t^n f(t)$	$(j)^n\dfrac{d^n}{d\omega^n}F(\omega)$
$\dfrac{d^n}{dt^n}f(t)$	$(j\omega)^n F(\omega)$
$f(t)\cos(\omega_0 t)$	$½F(\omega-\omega_0)+½F(\omega+\omega_0)$
$f(t)\sin(\omega_0 t)$	$\dfrac{1}{2j}F(\omega-\omega_0)-\dfrac{1}{2j}F(\omega+\omega_0)$
$f(t)*g(t)$	$F(\omega)G(\omega)$
$f(t)g(t)$	$\dfrac{1}{2\pi}\cdot\{F(\omega)*G(\omega)\}$
$\omega_0\,\mathrm{Sa}(t\omega_0)$	$\pi\mathrm{Rect}(\omega/2\omega_0)$
$\omega_0\,\mathrm{Sa}^2(t\omega_0)$	$\pi\,\mathrm{Tri}(\omega/2\omega_0)$

---

1 $\mathrm{Rect}\left(\dfrac{t-t_0}{\tau}\right)$ rectangle de hauteur un, centré sur $t=t_0$, et de longueur τ.

2 $\mathrm{Tri}\left(\dfrac{t-t_0}{\tau}\right)$ triangle de hauteur un, τ centré sur $t=t_0$, avec un base de longueur 2τ.

$$f(t) \quad \Leftrightarrow \quad F(\omega) = TF\left\{ f(t) \right\}$$

$$F(\omega) = A(\omega) + jB(\omega) = \left| F(\omega) \right| e^{jArg(\omega)}$$

$$E(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left| F(\omega) \right|^2$$

fonction réelle en temps

$$f(t) \text{ réelle} \;\Leftrightarrow\; F^*(\omega) = F(-\omega)$$

paire	**impaire**
$A(\omega) = \operatorname{Re} F(\omega)$	$B(\omega) = \operatorname{Im} F(\omega)$
$\lvert F(\omega) \rvert$	$\operatorname{Arg} F(\omega)$

$$f(t) = f_{paire}(t) + f_{impaire}(t)$$

$f_{paire}(t) \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Re} F(\omega)$	$f_{impaire}(t) \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Im} F(\omega)$

fonction delta, etc.

$$f_p(t) \Leftrightarrow 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_{Série}(n) \delta(\omega - n\omega_0)$$

$f_p(t)$ périodique avec période T_0, $T_0\omega_0 = 2\pi$

$$F_{Série}(n) = \frac{1}{T_0} \cdot F_r(\omega)\Big|_{\omega = n\omega_0}, \quad f_r(t) = \begin{cases} f_p(t) & \frac{-T_o}{2} < t < \frac{T_o}{2} \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

$$f'(a) = \left[\lim_{t \to a^+} f(t) - \lim_{t \to a^-} f(t) \right] \delta(t - a)$$

$t = a$ est un point de discontinuité de $f(t)$

$$h(t)\delta(t - t_0) = h(t_0)\delta(t - t_0)$$

propriété d'échantillonnage

$$x_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nx_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi nx/x_0}$$

domaine temporelle	**domaine fréquentiel**
$f(t)$ pas continue	décroissance $1/\omega$
$f(t)$ continue $f'(t)$ pas continue	décroissance $1/\omega^2$
$f(t), f'(t)$ continue $f''(t)$ pas continue	décroissance $1/\omega^3$
$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \lvert f(t) \rvert^2 dt$	$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \lvert F(\omega) \rvert^2 d\omega$

convolution
$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) g(t-u) du$
$g(t) * \delta(t - t_0) = g(t - t_0)$
$\frac{d}{dt}\left\{ f(t) * g(t) \right\} = \left\{ \frac{d}{dt} f(t) \right\} * g(t)$

$\cos x = \dfrac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$	$e^{jx} = \cos x + j \sin x$
$\sin x = \dfrac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$	$e^{jn\pi} = (-1)^n$
$\cos^2 \theta = \dfrac{1}{2}[1 + \cos 2\theta]$	$\sin^2 \theta = \dfrac{1}{2}[1 - \cos 2\theta]$
$\sin\theta \cos\varphi = \dfrac{1}{2}[\sin(\theta - \varphi) + \sin(\theta + \varphi)]$	$\cos\theta = \sin(\pi/2 - \theta)$
$\sin\theta \sin\varphi = \dfrac{1}{2}[\cos(\theta - \varphi) - \cos(\theta + \varphi)]$	$\sin(\theta \pm \varphi) = \sin\theta\cos\varphi \pm \cos\theta\sin\varphi$
$\cos\theta \cos\varphi = \dfrac{1}{2}[\cos(\theta - \varphi) + \cos(\theta + \varphi)]$	$\cos(\theta \pm \varphi) = \cos\theta\cos\varphi \mp \sin\theta\sin\varphi$

$\displaystyle\int e^{ax} \quad dx = \frac{1}{a} e^{ax}$	$\displaystyle\int x \cos ax \quad dx = \frac{1}{a^2} \cos ax + \frac{x}{a} \sin ax$
$\displaystyle\int e^{bx} \sin ax \quad dx = \frac{1}{a^2 + b^2} e^{bx} (b \sin ax - a \cos ax)$	$\displaystyle\int x e^{ax} \quad dx = \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2}\right) e^{ax}$
$\displaystyle\int e^{bx} \cos ax \quad dx = \frac{1}{a^2 + b^2} e^{bx} (a \sin ax + b \cos ax)$	$\displaystyle\int x^2 e^{ax} \quad dx = \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3}\right) e^{ax}$

METTRE DANS LE CAHIER BLEU

Jeudi 12 décembre 2017; durée: 13h30 à 15h20
aucune documentation permise; aucune calculatrice permise

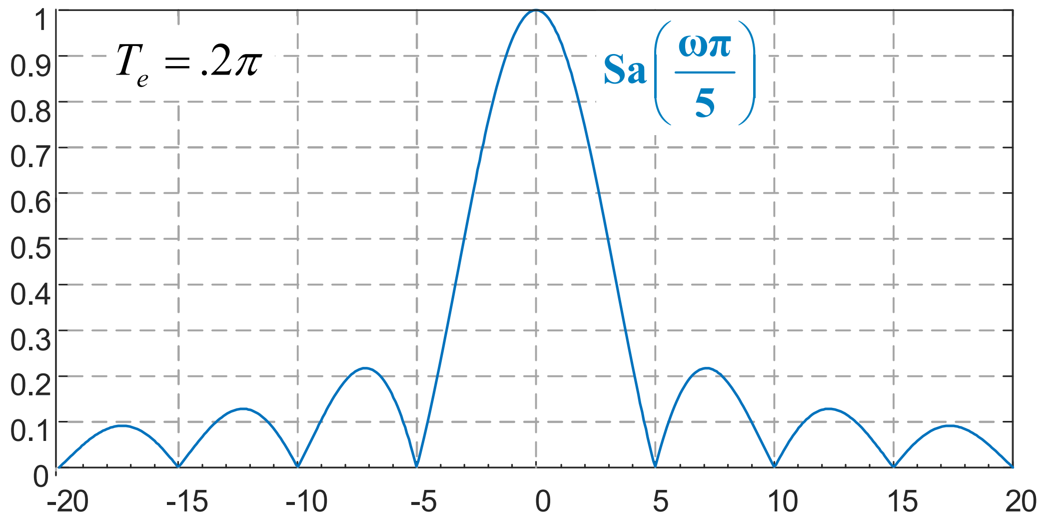
GEL2100 | 2017 Examen final

Graphiques à mettre dans votre cahier bleu

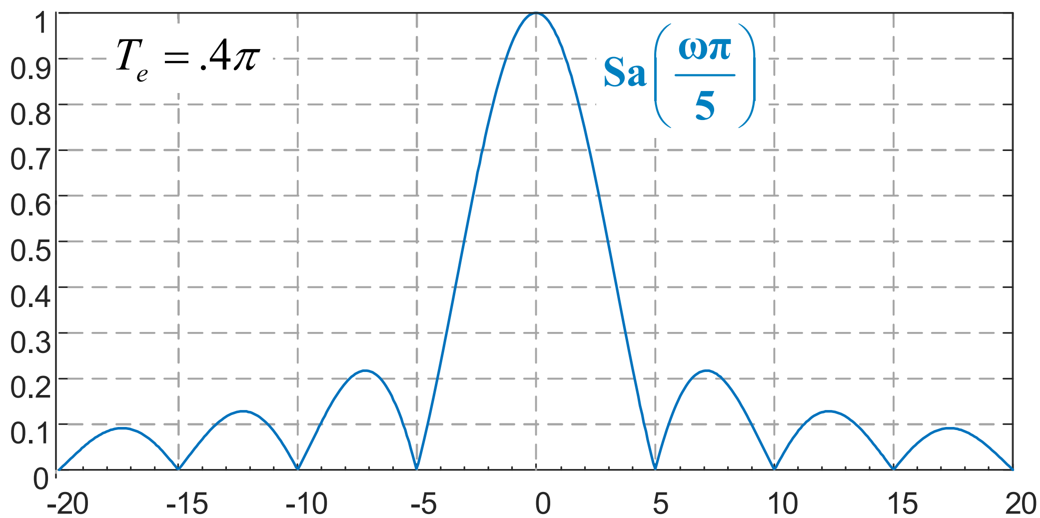
NOM: Matricule:

METTRE DANS LE CAHIER BLEU

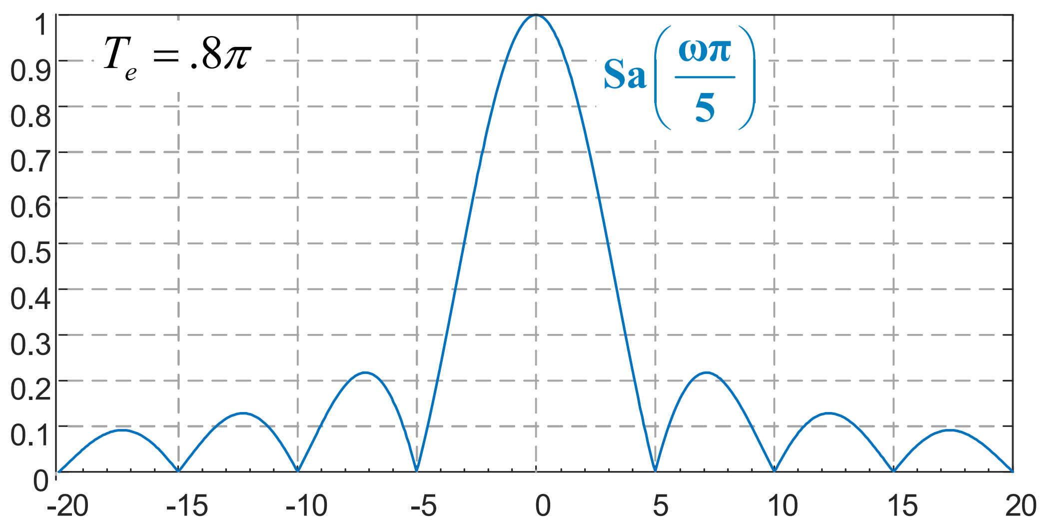
Problème 2A



Problème 2B



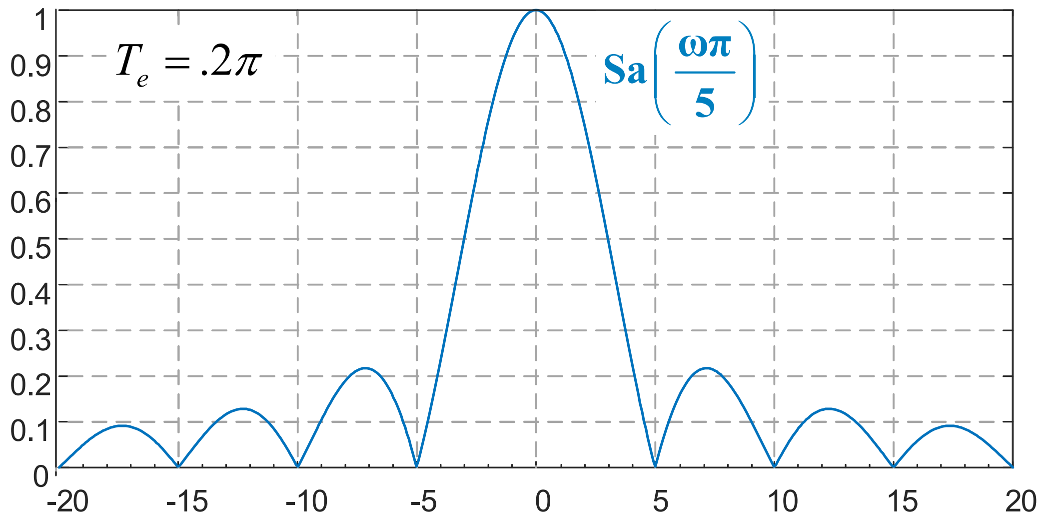
Problème 2C



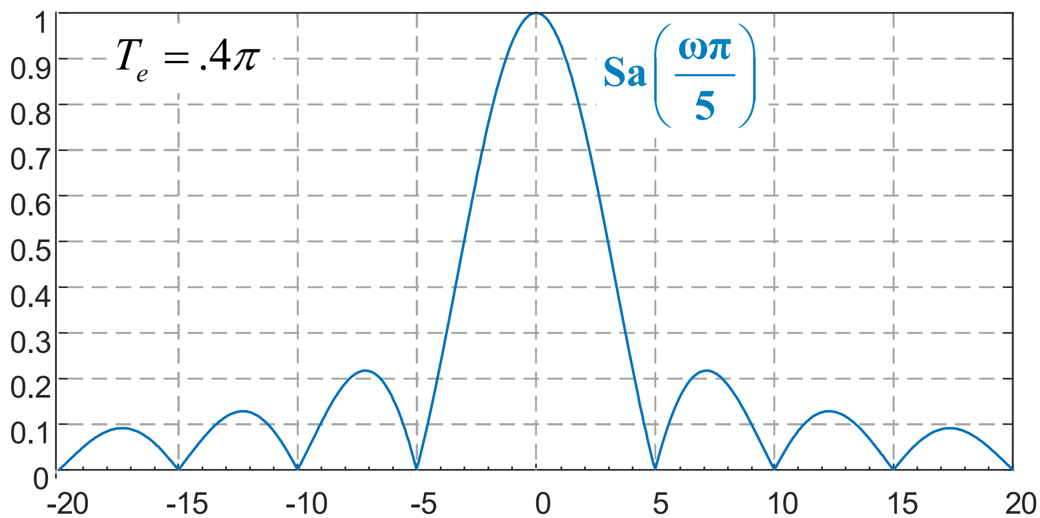
NOM: Matricule:

METTRE DANS LE CAHIER BLEU

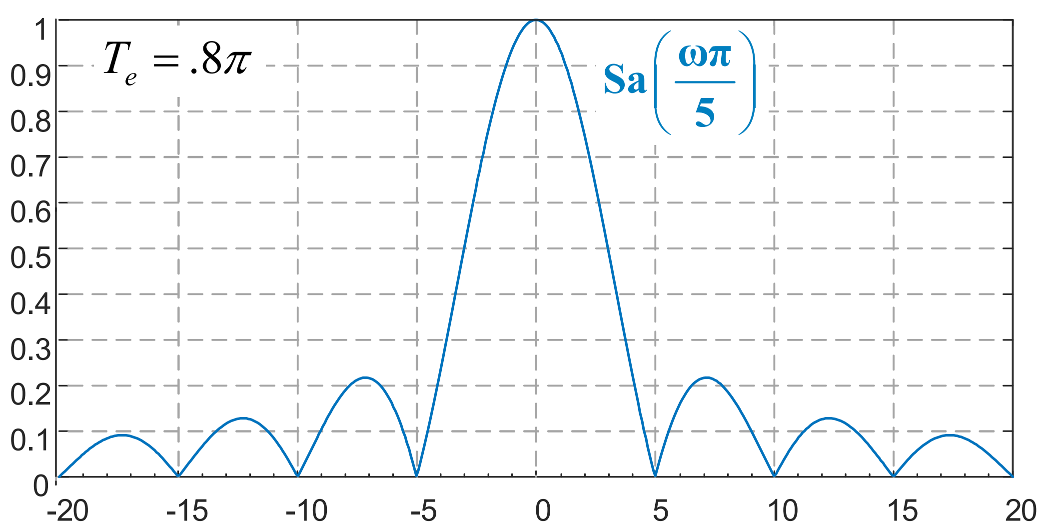
Problème 2A



Problème 2B

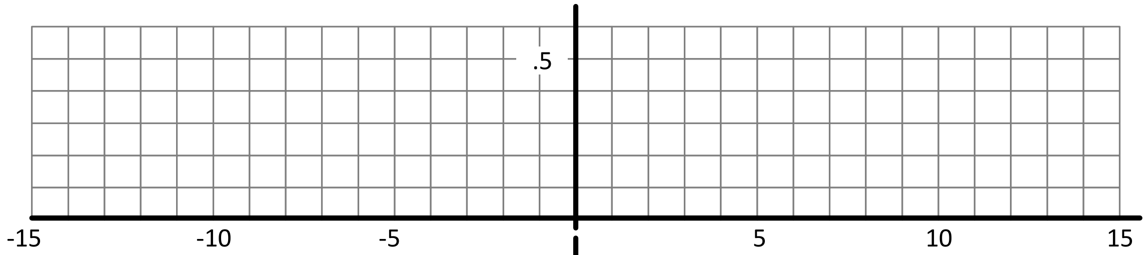


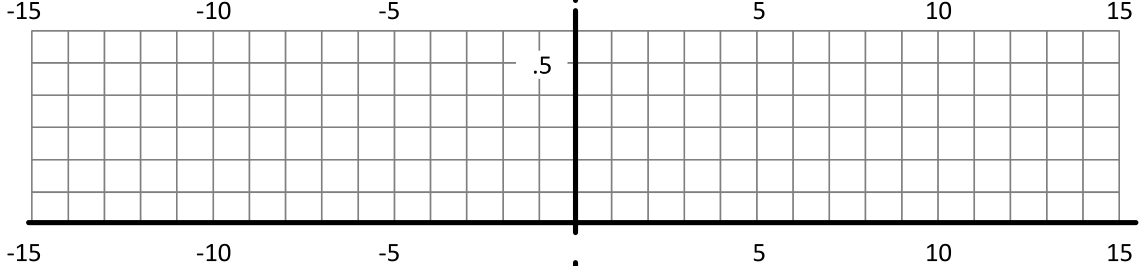
Problème 2C

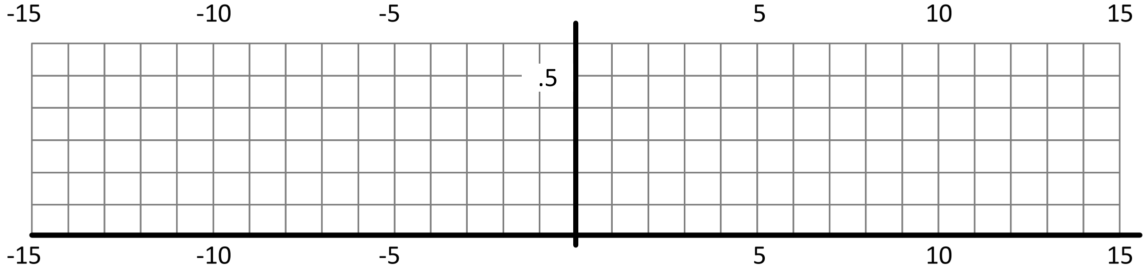


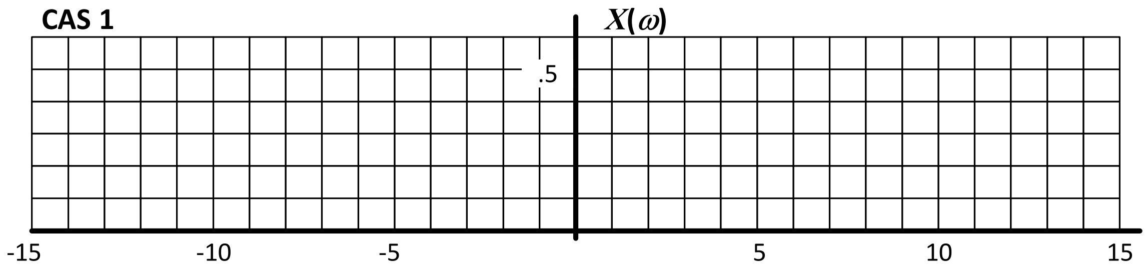
NOM: Matricule:

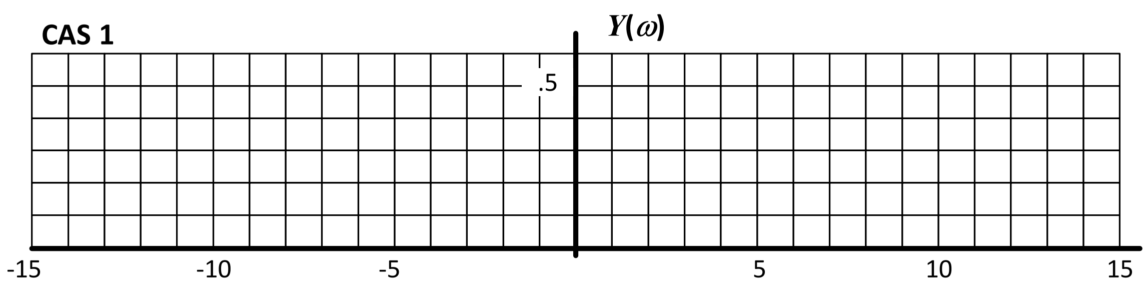
METTRE DANS LE CAHIER BLEU

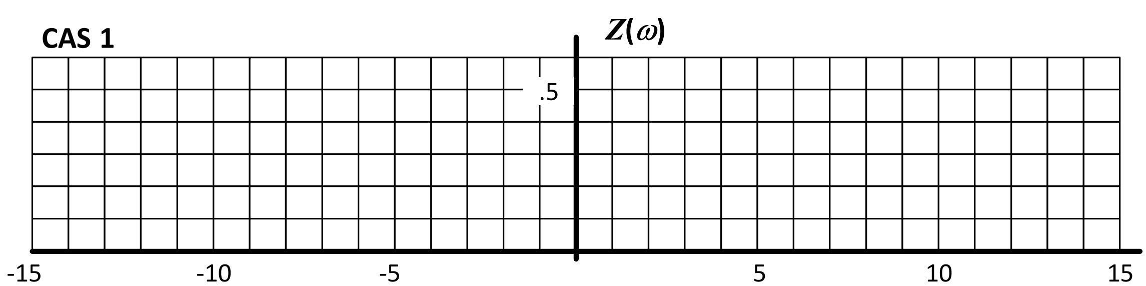






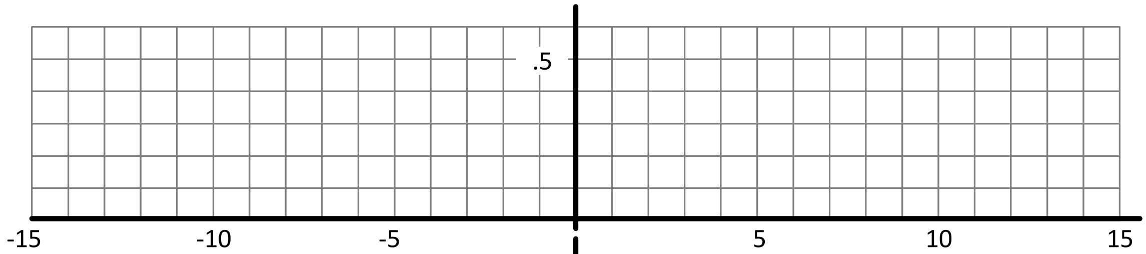


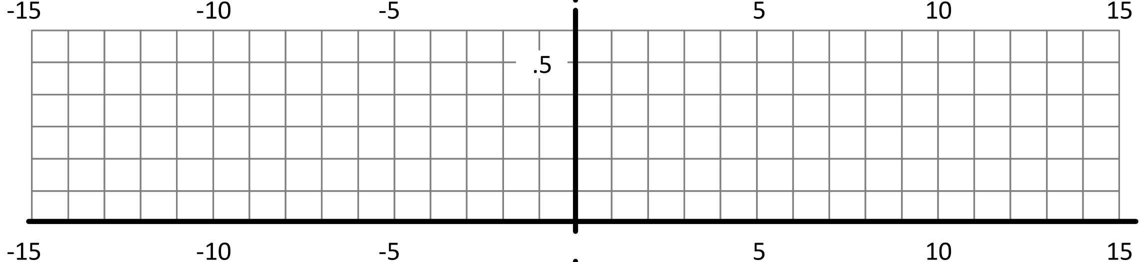


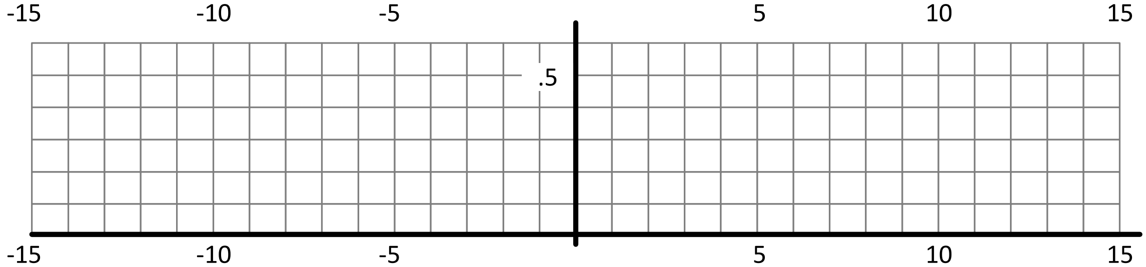


NOM: Matricule:

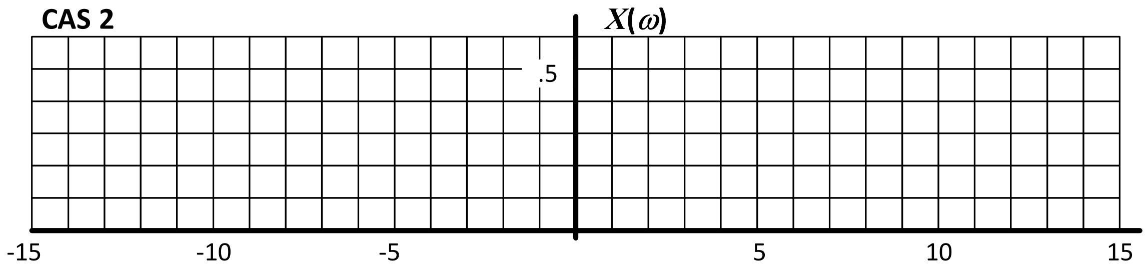
METTRE DANS LE CAHIER BLEU



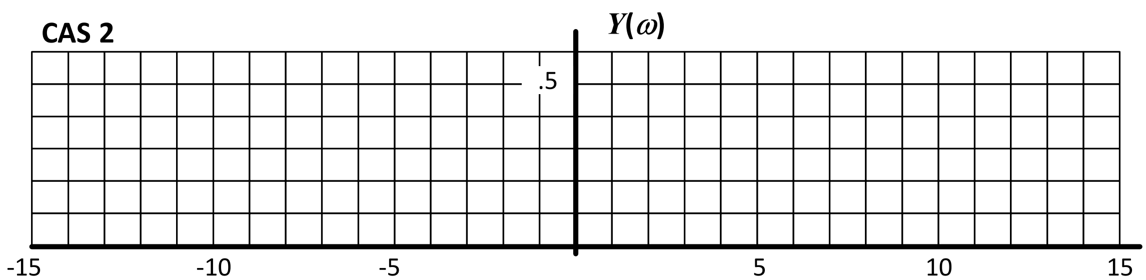




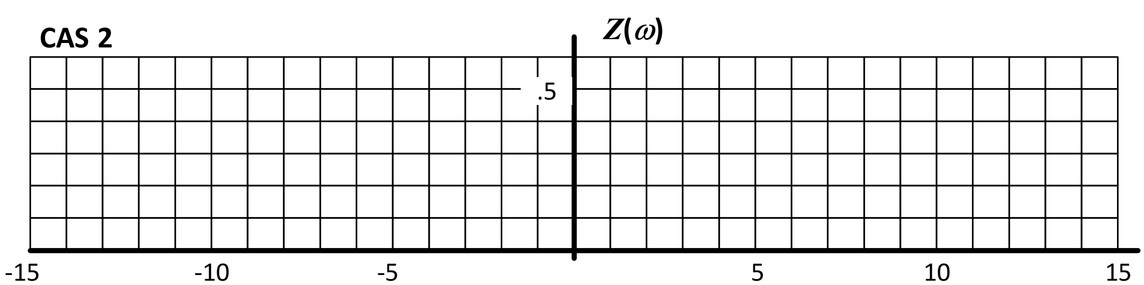
CAS 2



CAS 2

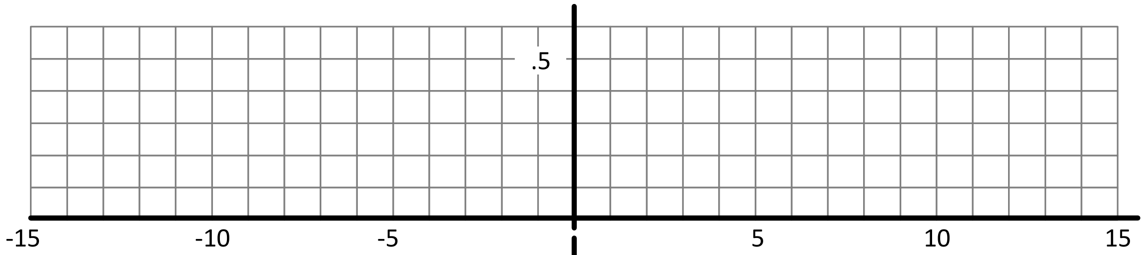


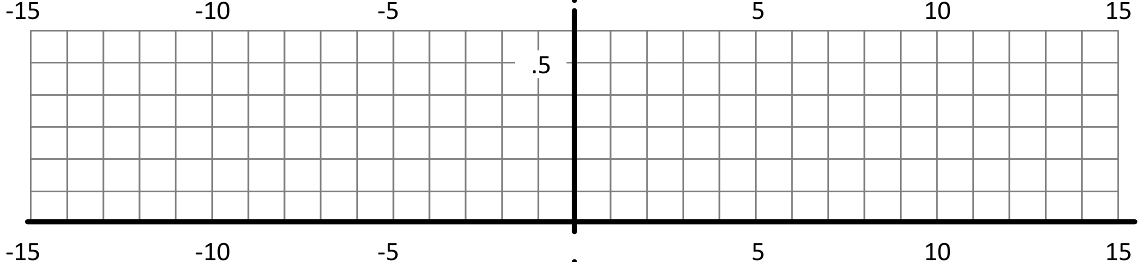
CAS 2

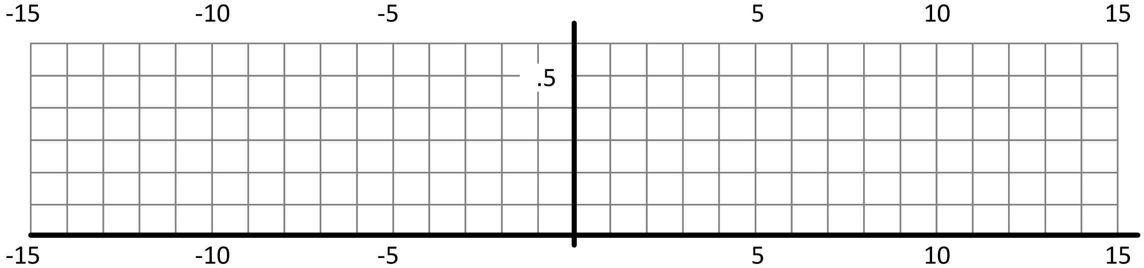


NOM: Matricule:

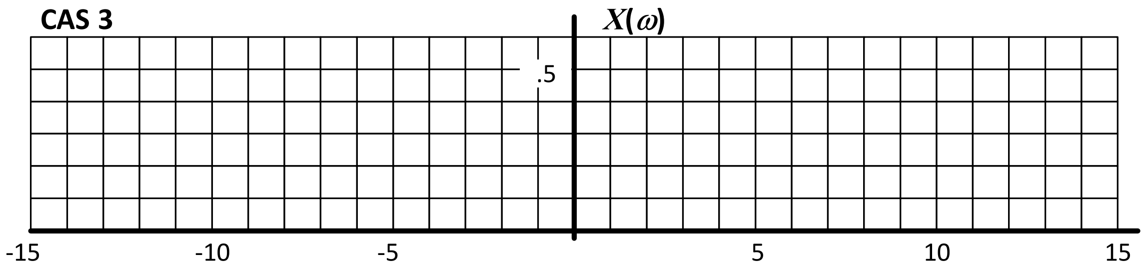
METTRE DANS LE CAHIER BLEU



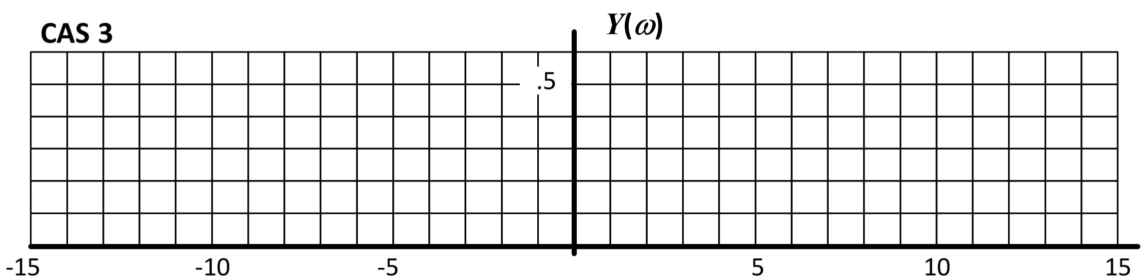




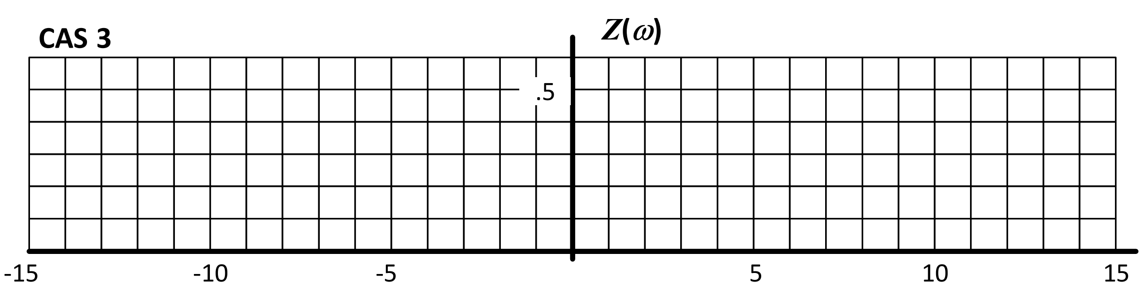
CAS 3



CAS 3

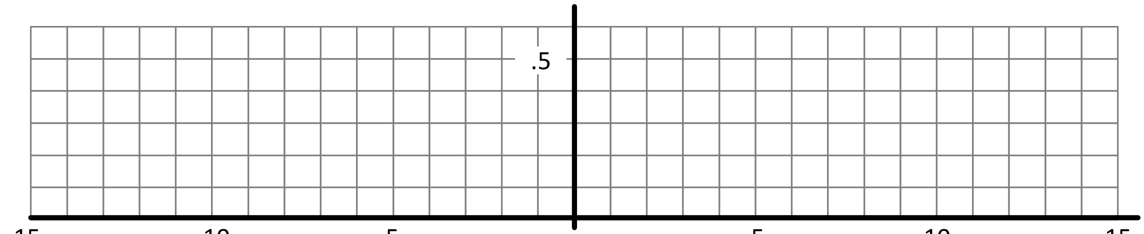


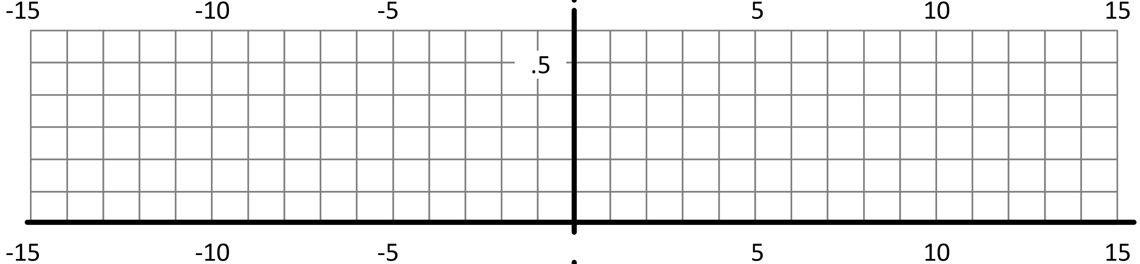
CAS 3

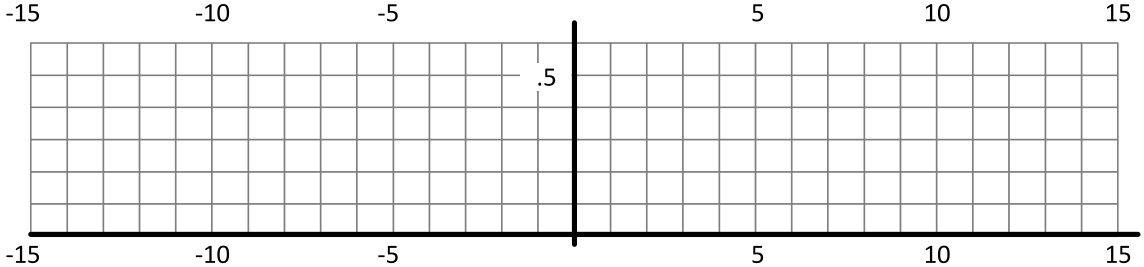


NOM: Matricule:

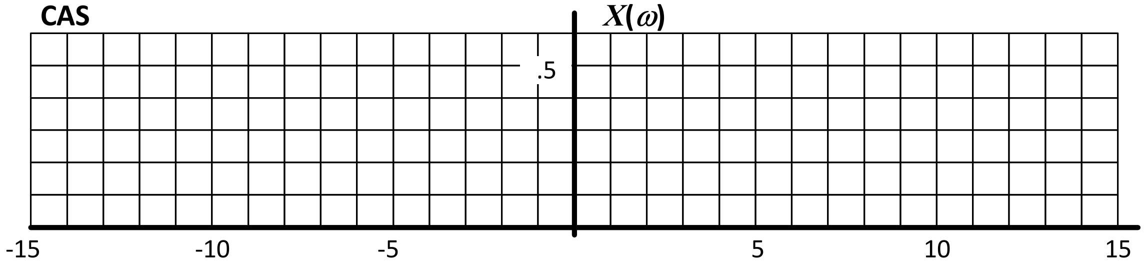
METTRE DANS LE CAHIER BLEU



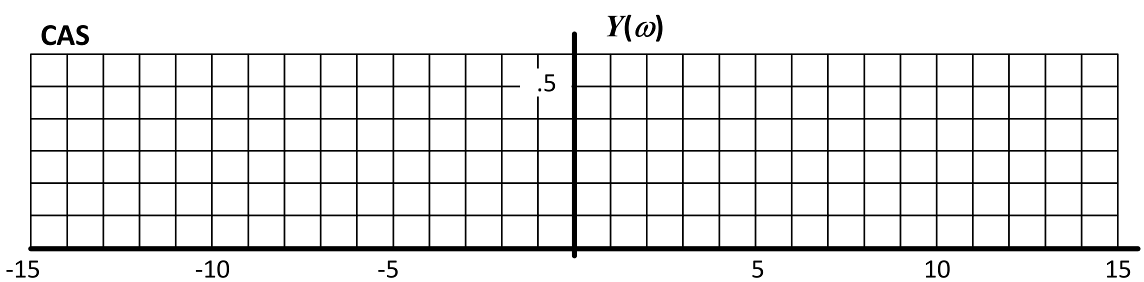




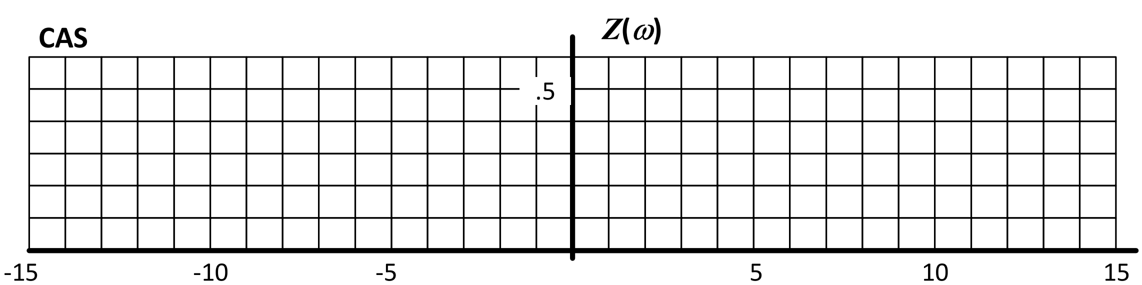
CAS



CAS



CAS



NOM: Matricule: