UNIVERSITÉ
LAVAL

FACULTÉ DES SCIENCES ET DE GÉNIE
DÉPARTEMENT DE GÉNIE ÉLECTRIQUE ET DE GÉNIE INFORMATIQUE

GEL-2001 Analyse de signaux
Jérôme Genest

Examen partiel

DATE: Jeudi le 20 octobre 2011

DURÉE: de 8h30 à 10h20

SALLE: PLT-2708, PLT-2783

Cet examen vaut 40% de la note finale.

Remarques:

i) L'utilisation d'une calculatrice est permise.

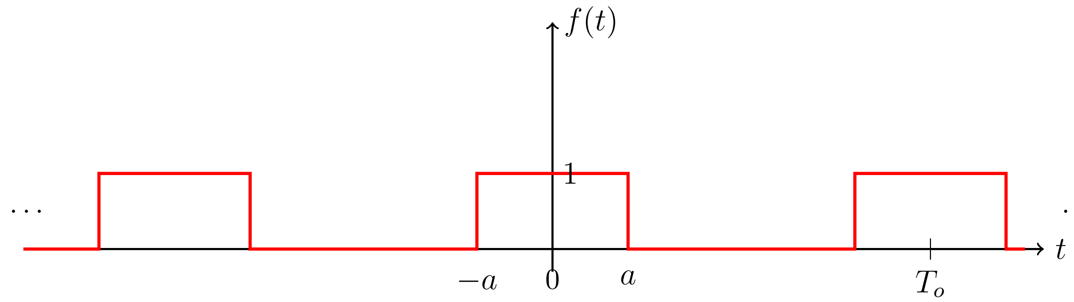
ii) Aucun document n'est permis durant l'examen.

iii) Seule la liste des formules fournie à la fin du questionnaire est permise.

iv) Votre carte d'identité doit être placée sur votre bureau en conformité avec le règlement de la Faculté.

Problème 1 (12 points)

Soit une fonction périodique $f(t)$, telle qu'illustrée ci-bas:



a) Calculez la transformée de Fourier de la fonction $f(t)$.

b) Calculez la puissance à la fréquence fondamentale (première harmonique).

c) Tracez le spectre pour $T_o = 4a$.

d) Tracez le spectre pour $T_o = 2a$ et expliquez pourquoi le résultat est correct.

Problème 2 (8 points)

Les fonctions ayant la même forme après la transformée de Fourier présentent un intérêt particulier. C'est le cas du peigne de Dirac et de la gaussienne (que nous verrons sous peu en classe). Une autre de ces fonctions est:

$$f(t) \iff F(\omega)$$

$$\frac{1}{\sqrt{|t|}} \iff \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{|\omega|}}$$

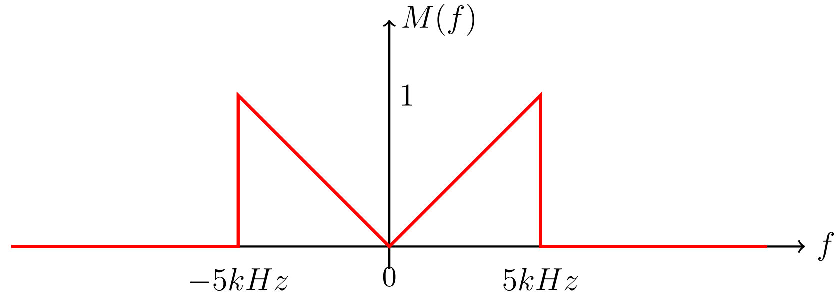
a) Caculez et tracez, en module et en phase, la transformée de Fourier de $f(t-3)$.

b) Caculez et tracez, en module et en phase, la transformée de Fourier de $f(2\pi t)$.

Problème 3 (12 points)

Modulation AM

Soit un signal $m(t)$ contenant de l'information destinée à être transmise par onde radio. Le spectre $M(\omega)$ est limité en fréquence et est illustré ci-bas (en f tel que $\omega = 2\pi f$):



a) Calculez l'énergie et la puissance du signal $m(t)$

Pour transmettre le signal m(t) par voie aérienne, on doit utiliser une porteuse qui se propage aisément dans l'atmosphère. C'est le cas des ondes radio. Nous allons utiliser une porteuse de fréquence $f_o = 1$ MHz. (1000000 Hz, avec $\omega_o = 2\pi f_o$). Le signal transmis par l'antenne de l'émetteur est :

$$g(t) = (m(t) + 1)\cos(\omega_o t)$$

b) Calculez et tracez la transformée de Fourier de $g(t)$

c) Calculez l'énergie et la puissance du signal $g(t)$

Afin de récupérer l'information, le récepteur multiplie le signal détecté par $\cos(\omega_o t)$ de telle sorte que :

$$h(t) = g(t)\cos(\omega_o t)$$

d) Calculez et tracez la transformée de Fourier de $h(t)$.

Un filtre passe-bas permet de couper les hautes fréquences pour ne préserver le contenu spectral qu'autour de $\omega = 0$. En supposant que le filtre passe bas est une fonction Rect qui multiplie le signal $H(\omega)$:

$$V(\omega) = G(\omega) Rect(\omega/2\omega_f)$$

e) Déduisez les plages possibles pour la fréquence angulaire de coupure du filtre ω_f pour que le signal $v(t)$ soit une reproduction fidèle de $m(t)$, i.e on veut que $v(t)$ soit le plus possible égal $m(t)$.

f) Quelles sont les différences entre $v(t)$ et $m(t)$?

Problème 4 (8 points)

Calculez la transformée de Fourier inverse de:

$$F(\omega) = \frac{\sin(\omega)}{\omega + b}$$

(notez que la fonction f(t) à calculer est complexe)

Quelle est l'aire de f(t) ?

Examen Partiel

Fonction	Transformée de Fourier
$f(t)$	$F(\omega)$
$F(t)$	$2\pi f(-\omega)$
$f(t+a)$	$e^{ja\omega}F(\omega)$
$f(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$
$e^{jbt}f(t)$	$F(\omega-b)$
$t^n f(t)$	$(j)^n \frac{d^n}{d\omega^n}F(\omega)$
$\frac{d^n}{dt^n}f(t)$	$(j\omega)^n F(\omega)$
$\mathrm{Rect}(t/\tau)$ (1)	$\tau\,\mathrm{Sa}(\omega\tau/2)$
$\mathrm{Tri}(t/\tau)$ (2)	$\tau\,\mathrm{Sa}^2(\omega\tau/2)$
$\delta(t)$	1
1	$2\pi\delta(\omega)$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$
$\mathrm{U}(t)$	$1/j\omega+\pi\delta(\omega)$
$\mathrm{Sgn}(t)$	$2/j\omega$
$\delta_{T_0}(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT_0)$	$\omega_0\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-n\omega_0)$
$e^{-\beta t}\,\mathrm{U}(t)$	$\frac{1}{\beta+j\omega}$
$e^{-\beta\lvert t\rvert}$	$\frac{2\beta}{\beta^2+\omega^2}$

---

1 $\mathrm{Rect}\left(\frac{t-t_0}{\tau}\right)$ rectangle de hauteur un, centré sur t=t_0, et de longueur τ.

2 $\mathrm{Tri}\left(\frac{t-t_0}{\tau}\right)$ triangle de hauteur un, centré sur t=t_0, avec un base de longueur 2τ.