GEL2001 SOLUTIONNAIRE MINITEST 1 A2018

Département de génie électrique et de génie informatique

19 novembre 2019

Question 1 (1.5 pts)

1. Faux : c'est un système variant dans le temps, à cause du cosinus qui n'est pas décalé si on décale l'entrée : $y(t-\tau) = x(t-\tau)\cos(t-\tau) \neq x(t-\tau)\cos(t)$
2. Vrai : Convoluer une fonction triangle avec un peigne de Dirac donne plusieurs triangles espacés de T_0.
3. Faux, c'est un 2e ordre mais le signe est inversé au dénominateur. Si on applique la règle de la table avec $\beta = \frac{-1}{\tau}$ on obtient une exponentielle croissante qui ne converge pas du point de vue de la TF si elle est multipliée par $u(t)$. Le filtre stable contient plutôt $u(-t)$ et il est par conséquent non causal.
4. Vrai, le système fait juste couper des fréquences, il ne crée pas de signal à des fréquences là où il y en avait pas. il faut juste que $H(w) = 0$ aux harmoniques supérieures de l'onde carrée
5. Faux, si le signal est à bande limitée alors il y a une discontinuité d'ordre arbitraire n $<$ infini dans le spectre, le signal aura une tendance en $1/t^n$ et donc ne peut pas être fini.
6. Faux : $H(w) = Y(w)/X(w) = Y(w) = \text{Rect}(w)$. Donc $h(t)$ est un sinus argument centré à $t = 0$. Ce système linéaire n'est donc pas causal.

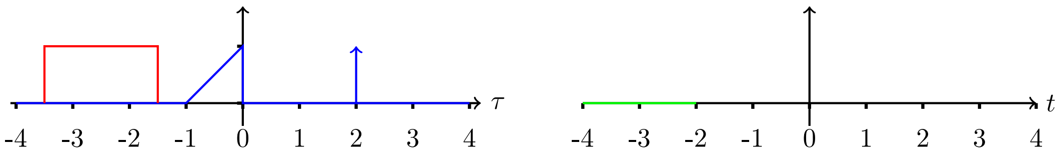
Question 2 (3 pts)

On peut réaliser la convolution du rect avec la section de triangle et l'impulsion séparément. La convolution du rect et de l'impulsion à $t = 2$ donne simplement Rect((t-2)/2). Reste à convoluer le rect avec la section de triangle. Il ne faudra pas oublier d'ajouter la porte décalée dans notre réponse finale.

En décalant le rect, pour toutes les zones, nous devons intégrer $\tau + 1$, le rect vient simplement fixer les bornes.

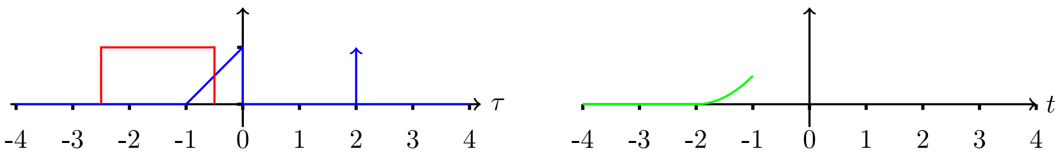
- Zone 1 : Lorsque ($t + 1 \leq -1 \Rightarrow \boldsymbol{t \leq -2}$)

  $x(t) * g(t) = \boxed{0}$;



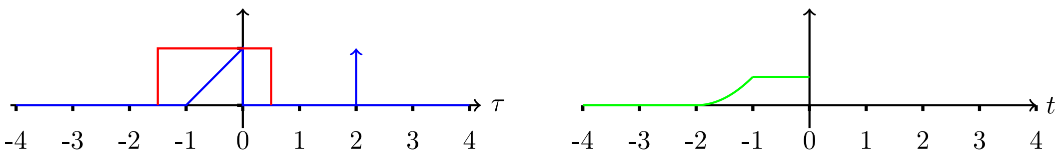
- Zone 2 : Lorsque ($-1 \leq t + 1 \leq 0 \Rightarrow \boldsymbol{-2 \leq t \leq -1}$)

  $x(t) * g(t) = \int_{-1}^{t+1} (\tau + 1) d\tau = [\tau^2/2 + \tau]_{-1}^{t+1} = \boxed{\frac{t^2}{2} + 2t + 2}$



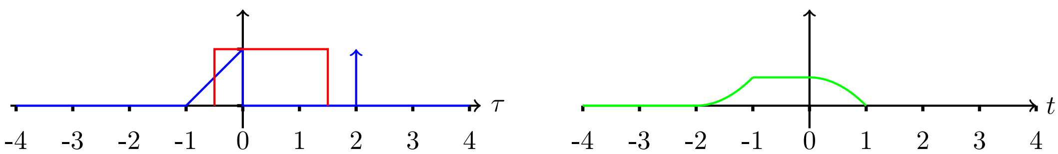
- Zone 3 : Lorsque ($t + 1 \geq 0$ *et* $t - 1 \leq -1 \Rightarrow \boldsymbol{-1 \leq t \leq 0}$)

  $x(t) * g(t) = \int_{-1}^{0} (\tau + 1) d\tau = [\tau^2/2 + \tau]_{-1}^{0} = \boxed{\frac{1}{2}}$

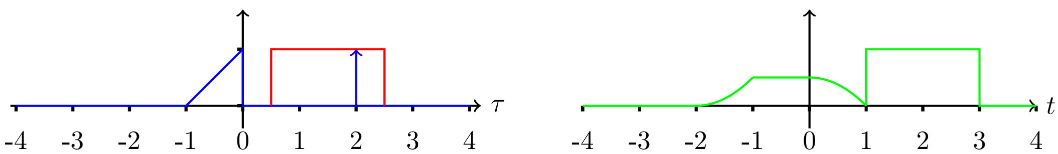


- Zone 4 : Lorsque ($-1 \leq t - 1 \leq 0 \Rightarrow \boldsymbol{0 \leq t \leq 1}$)

  $x(t) * g(t) == \int_{t-1}^{0} (\tau + 1) d\tau = [\tau^2/2 + \tau]_{0}^{t-1} = \boxed{-\frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}}$



- Zone 5 : Il faut ajouter la porte centrée sur t=2



Question 3 (3 pts)

1. Le potentiel au noeud de l'entrée négative est égal à celui du noeud de l'entrée positive. En posant le potentiel du noeud de l'entrée positive à zéro, on obtient les équations suivantes :

$$X(w) = -Z_{R_1} I(w) \tag{1}$$

$$Y(w) = (Z_{R_2} || Z_C) I(w) = \frac{Z_{R_2} Z_C}{Z_{R_2} + Z_C} I(w) \tag{2}$$

Donc :

$$Y(w) = -\frac{Z_{R_2} Z_C}{Z_{R_2} + Z_C} \frac{1}{Z_{R_1}} X(w) \tag{3}$$

Alors :

$$Y(w) = -\frac{R_2 \frac{1}{jwC}}{R_2 + \frac{1}{jwC}} \frac{1}{R_1} X(w) \tag{4}$$

Donc :

$$Y(w) = -\frac{\frac{R_2}{R_1}}{1 + jR_2 wC} X(w) \tag{5}$$

Ainsi :

$$H(w) = -\frac{R_2/R_1}{1 + jR_2 wC} \tag{6}$$

C'est un sytème passe-bas de gain $-R_2/R_1$.

2. On peut aussi exprimer le système en amplitude et en phase :

$$|H(w)| = \frac{R_2/R_1}{\sqrt{1 + (R_2 wC)^2}} \tag{7}$$

$$Arg(H(w)) = \pi - \mathrm{atan}(R_2 C w) \tag{8}$$

3. Application numérique :

$R_1 = 10K$, $R_2 = 100k$, $C = 100nF$, $w = 100$

C'est un filtre de 1er ordre avec $R_2/R_1 = 10$ et $R_2 C w = 1$, on est donc exactement à la fréquence de coupure du filtre. On s'attend à une réduction du gain de $1/\sqrt{2}$ et une phase de 45 deg. Il ne faut pas oublier que l'ampli est utilisé en mode inverseur (gain négatif), ce qui nous ajoute 180 de phase. Évidemment, les maths fonctionnent avec l'intuition :

$$|H(w)| = \frac{10}{\sqrt{2}} \tag{9}$$

$$Arg(H(w)) = \pi - \pi/4 \tag{10}$$

Si :

$$x(t) = 2\cos(100t) \text{ donc : } y(t) = -10\sqrt{2}\sin(100t) \tag{11}$$