VERSION B

Université Laval
MAT-10363 - Mathématiques de l'ingénieur I
Examen du mercredi 28 avril 1999 (18h30 à 20h30)

Question 1
(5 points)

Identifier la paire de fonctions $f(x, y)$ et $g(x, y)$ qui ont le même domaine de définition.

(a) $f(x, y) = \frac{x}{y}, \quad g(x, y) = \frac{\ln x}{\ln y}$

(b) $f(x, y) = xy, \quad g(x, y) = \ln(xy)$

(c) $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{1/2}, \quad g(x, y) = x + y$

(d) $f(x, y) = (x + y)^{1/2}, \quad g(x, y) = x + y$

(e) $f(x, y) = \frac{1}{x+y}, \quad g(x, y) = \frac{1}{x-y}$

Question 2
(5 points)

L'ensemble des valeurs, ou l'image, de $f(x, y) = e^{x-y}$ est:

(a) $\{c \in \mathbb{R} \mid c \geq 0\}$

(b) $\{c \in \mathbb{R} \mid c > 0\}$

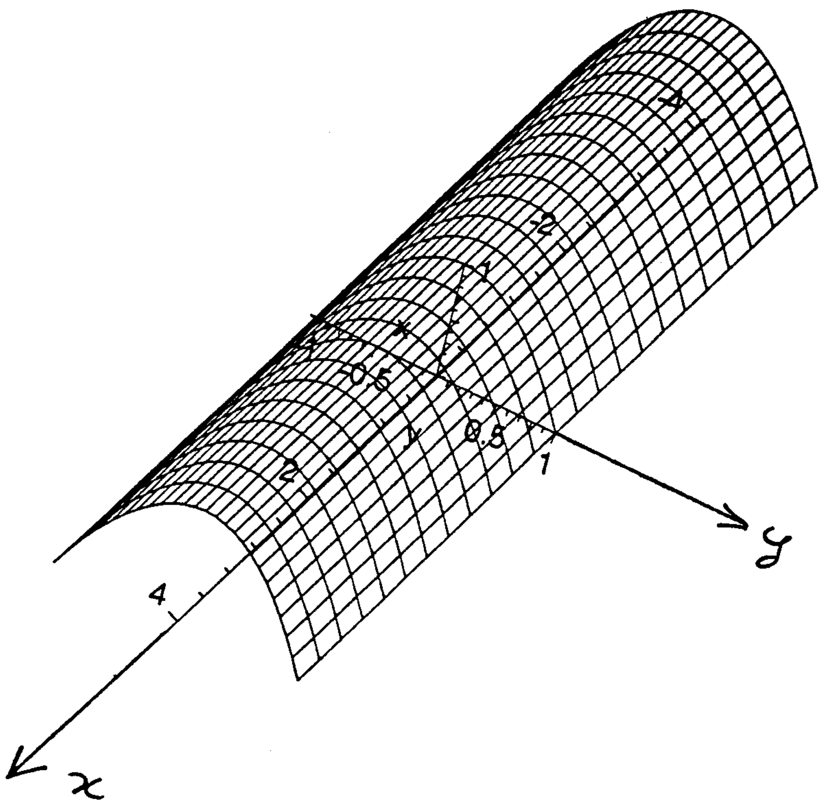
(c) $\mathbb{R}$

(d) $\{c \mid c \in \mathbb{R} \text{ et } 0 < c < 1\}$

(e) aucun des autres choix proposés

Question 3
(5 points)

La surface donnée ici représente une partie du graphe de $z = f(x,y)$, pour une certaine fonction $f(x,y)$.



Les courbes de niveau de la fonction $f(x,y)$ sont:

(a) des droites parallèles à l'axe des y

(b) des paraboles dans le plan xOy

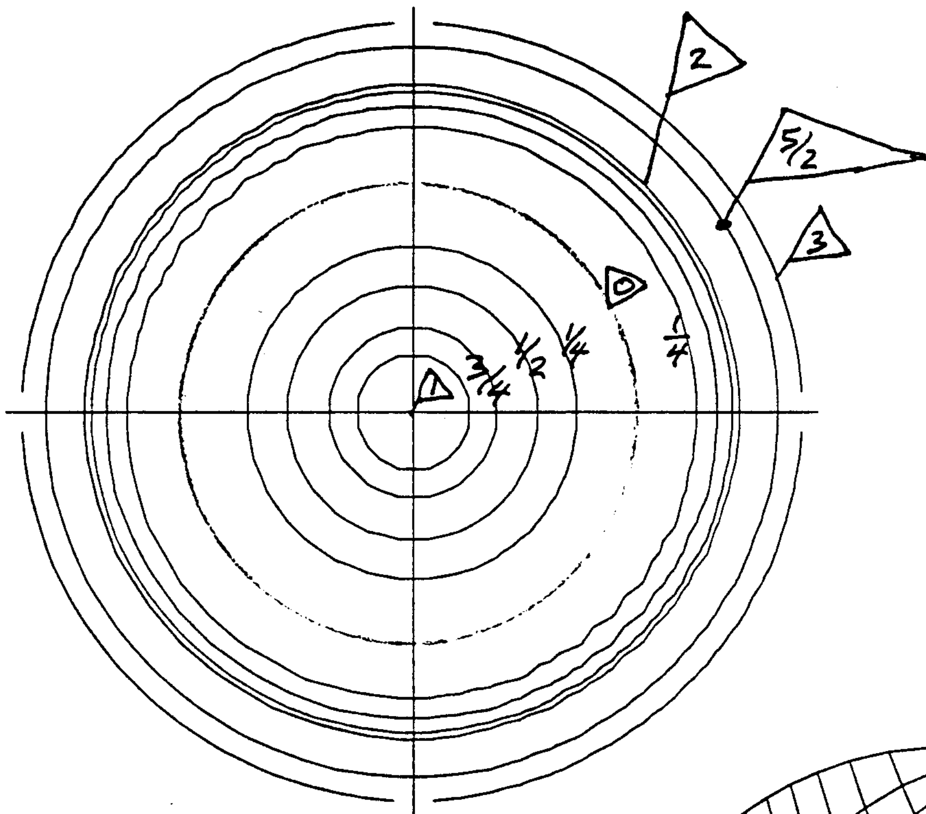
(c) des droites parallèles à l'axe des x

(d) des cercles dans le plan xOy

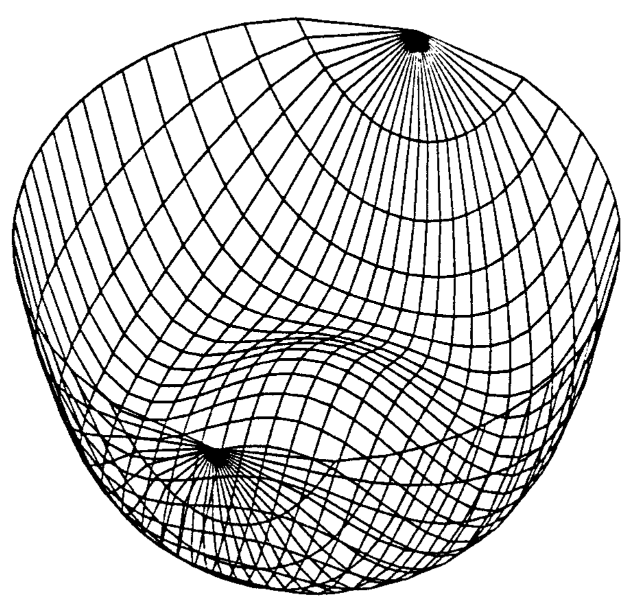
(e) aucun des autres choix proposés

Question 4
(5 points)

Voici des courbes de niveau d'une fonction $f(x, y)$, avec la surface correspondante. On demande d'identifier $f(x, y)$.



(a) $f(x, y) = (1 - x^2 - y^2)^2$
(b) $f(x, y) = \frac{1+x^2}{y^2}$
(c) $f(x, y) = (x - y)^2$
(d) $f(x, y) = xy$
(e) $f(x, y) = x^2 - y^2$



Question 5
(10 points)

Identifier l'énoncé qui est **VRAI**.

(a) Si $f_{xx} = f_{yx}$ pour une certaine fonction $f(x, y)$, on a alors $f_x = f_y$.

(b) Quelle que soit la fonction $f(x, y)$, on a toujours $f_x \neq f_y$.

(c) Si $f(x, y) = [g(x, y)]^2$, on a $f_x = f_y = 2g(x, y)$.

(d) Pour $f(x, y, z) = xy + yz + zx$, on a $f_x + f_y + f_z = \frac{x+y+z}{2}$.

(e) Pour $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, on a $xf_x + yf_y + zf_z = 3$.

(f) Pour $z = x + iy$, un nombre complexe en général, on a $\frac{\partial}{\partial x}[Re(z^2)] = 2Re(z)$.

Question 6
(5 points)

Si les valeurs $x = x_0$ et $y = y_0$ sont soumises à de légères imprécisions pouvant aller jusqu'à 2% et 3% respectivement (erreurs relatives), l'imprécision résultante (erreur relative) dans le calcul de $f(x, y) = xy^2$ avec $x = x_0$, $y = y_0$, peut aller jusqu'à:

(a) 6% approximativement

(b) 5% approximativement

(c) 1% approximativement

(d) 8% approximativement

(e) 7% approximativement

Question 7
(5 points)

Le polynôme $P_2(x,y) = x + xy$ est le polynôme de Taylor d'ordre 2, autour de $(0,0)$, de:

(a) $f(x,y) = xe^y$
(b) $f(x,y) = e^x + e^y$
(c) $f(x,y) = e^{x-y}$
(d) $f(x,y) = e^{x+y}$
(e) $f(x,y) = e^x + xe^y$

Question 8
(5 points)

On considère la fonction

$$f(x,y) = x^2 + cy^2 + 2xy,$$

où c représente une constante. Il est donné que $(0,0)$ est un point critique de f. Identifier l'énoncé qui est **FAUX**.

(a) Si $c > 1$, $(0,0)$ correspond à un minimum local de $f(x,y)$.
(b) Si $c < 1$, $(0,0)$ correspond à un point de selle de $f(x,y)$.
(c) Si $c = 1$, on a $f_{xx}(0,0) \cdot f_{yy}(0,0) - [f_{xy}(0,0)]^2 = 0$.
(d) Si $c = 1$, on a $f(x,y) = (x+y)^2 \geq 0$.
(e) Si $c > 1$, $(0,0)$ correspond à un maximum local de $f(x,y)$.

Question 9
(5 points)

L'équation du plan tangent à la surface $F(x, y, z) = 0$, où $F(x, y, z) = xy + yz + zx - 5$, au point $(1, 2, 1)$, est:

(a) $3x + 2y + 3z + 10 = 0$

(b) $3x + 2y + 3z = 10$

(c) $x + 2y + z = 0$

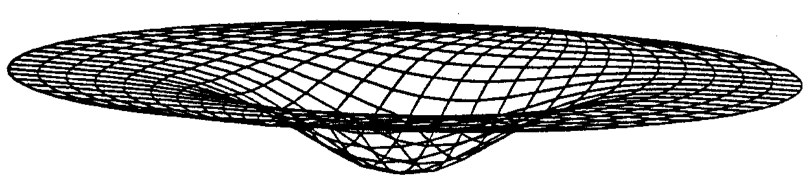
(d) $3x + 2y + 3z = 0$

(e) $2x + 3y + 2z = 0$

Question 10
(5 points)

Identifier la commande en Maple qui permet d'obtenir la surface suivante, étant entendu qu'on a d'abord tapé les commandes

```
>with(plots):
>readlib(mtaylor):
```



(a) `plot(1-exp(-(x^2+y^2)/2), x=-4..4, y=-sqrt(16-x^2)..sqrt(16-x^2), style=wireframe, orientation =[20,82], scaling=constrained, colour = black);`

(b) `implicitplot(1-exp(-(x^2+y^2)/2), x=-4..4, y=-sqrt(16-x^2)..sqrt(16-x^2), style=wireframe, orientation =[20,82], scaling=constrained, colour = black);`

(c) `z:=plot3d(1-exp(-(x^2+y^2)/2), x=-4..4, y=-sqrt(16-x^2)..sqrt(16-x^2), style=wireframe, orientation =[20,82], scaling=constrained, colour = black);`

(d) `plot3d(1-exp(-(x^2+y^2)/2), x=-4..4, y=-sqrt(16-x^2)..sqrt(16-x^2), style=wireframe, orientation =[20,82], scaling=constrained, colour = black);`

(e) `surf:=mtaylor(1-exp(-(x^2+y^2)/2),[x,y],3);`

Question 11
(10 points)

Les dimensions (les côtés) x et y d'une plaque rectangulaire varient en fonction du temps t selon

$$\begin{aligned} x &= 2 + 0.1\cos t, \\ y &= 1 + 0.1\sin t. \end{aligned}$$

Quelle est l'expression du taux instantané de variation de l'**aire** de la plaque **par rapport au temps** t?

(a) $(0.1\cos t)(-0.1\sin t)$

(b) 0

(c) $(2 + 0.1\cos t)(1 + 0.1\sin t)$

(d) $0.1(x\cos t - y\sin t)$

(e) 0.1

(f) aucune des cinq autres réponses

Question 12
(10 points)

On considère la fonction $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy$ et le point P_0 représentant les conditions $x = 2$, $y = 1$.
Identifier l'énoncé qui est **FAUX**.

(a) Pour faire varier f selon un taux instantané maximal (dérivée directionnelle maximale) à partir des conditions $x = 2$, $y = 1$, il faut prendre, à partir de P_0, la direction donnée par le vecteur $(5, 4)$.

(b) En P_0, le taux instantané de variation de f est nul dans la direction donnée par le vecteur $(-4, 5)$.

(c) La valeur minimale de la dérivée directionnelle de f en P_0 est $-\sqrt{41}$.

(d) La diminution la plus forte de f, lorsqu'on quitte les conditions $x = 2$, $y = 1$, a lieu dans la direction décrite par le vecteur unitaire $\left(\frac{-5}{\sqrt{41}}, \frac{-4}{\sqrt{41}}\right)$.

(e) Si on quitte P_0 pour se diriger vers les nouvelles conditions $x = 1$, $y = 2$ (point Q), f change selon un taux instantané de variation qui a la valeur $(5)(-1) + 4(1)$.

(f) La diminution la plus forte de f, lorsqu'on quitte les conditions $x = 2$, $y = 1$, a lieu dans la direction décrite par le vecteur $(-5, -4)$.

Question 13
(5 points)

Les dérivées directionnelles d'une certaine fonction $f(x, y, z)$ en un certain point P_0, dans trois directions décrites par des vecteurs **unitaires**, satisfont les propriétés suivantes:

i. pour $\vec{u} = \left(\frac{2}{7}, \frac{6}{7}, \frac{3}{7}\right)$, on a $D_{\vec{u}}f(P_0) = 0$;

ii. pour $\vec{v} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\right)$, on a $D_{\vec{v}}f(P_0) = \frac{1}{5}$;

iii. pour $\vec{w} = (0, -1, 0)$, on a $D_{\vec{w}}f(P_0) = -1$.

Alors:

(a) $\nabla f(P_0) = \left(-\frac{19}{15}, 1, -\frac{52}{45}\right)$

(b) $\nabla f(P_0) = \left(-1, 1, -\frac{4}{3}\right)$

(c) $\nabla f(P_0) = \left(\frac{5}{3}, -1, \frac{8}{9}\right)$

(d) $\nabla f(P_0) = \left(\frac{7}{5}, -1, \frac{16}{15}\right)$

(e) on n'a pas assez d'information pour calculer $\nabla f(P_0)$

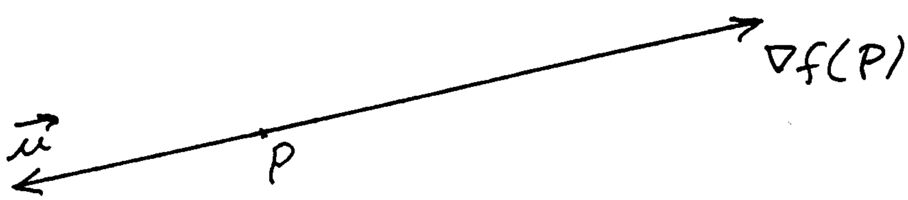
VERSION B

Question 14
(5 points)

Sur la carte topographique d'une fonction $f(x, y)$, on considère les dessins en (a), (b), (c), (d) et (e), chacun accompagné d'un encadré contenant des renseignements. Dans chaque cas, $\vec{u}$ représente un vecteur unitaire.

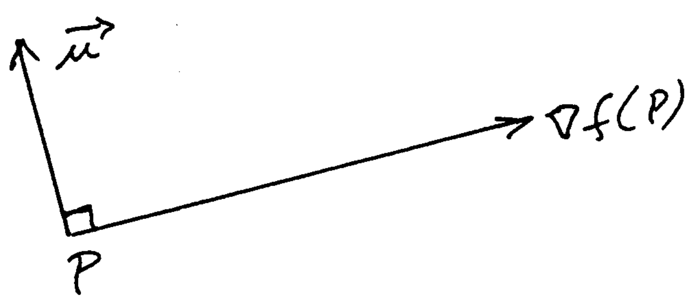
Identifier, parmi les situations de (a) à (e), celle pour laquelle l'encadré **ne correspond pas** au dessin.

(a)



$$\boxed{D_{\vec{u}} f(P) = -|\nabla f(P)|}$$

(b)



$$\boxed{D_{\vec{u}} f(P) = 0}$$

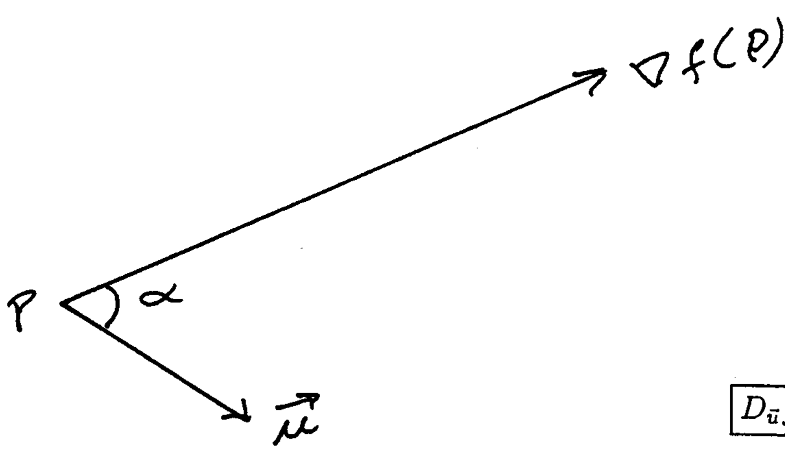
(c)

$$\boxed{D_{\vec{u}} f(P) = -|\overrightarrow{QP}|}$$

(d)

$$\boxed{D_{\vec{u}} f(P) = |\nabla f(P)|}$$

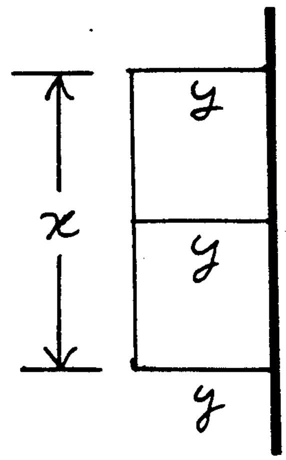
(e)



$$\boxed{D_{\vec{u}} f(P) = |\nabla f(P)| \cos \alpha}$$

Question 15
(10 points)

On a un mur déjà existant et il est question de construire deux enclos rectangulaires avec les dimensions x et y indiquées.



Étudier les énoncés i. et ii. et choisir la conclusion appropriée parmi (a), (b), (c), (d), (e) et (f), selon ce qui est spécifié plus loin.

i. Si on veut obtenir une aire totale maximale xy lorsqu'on a 60 mètres de clôture pour faire les côtés x, y, y et y, il suffit de résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} \nabla(xy) = \lambda\nabla(x + 3y - 60), \\ x + 3y = 60. \end{cases}$$

ii. Si on veut que l'aire totale des enclos soit de 300 mètres carrés, on trouve la longueur minimale de clôture requise pour faire les côtes x, y, y et y en résolvant le système d'équations

$$\begin{cases} \nabla(x + 3y) = \lambda\nabla(xy - 300), \\ xy = 300. \end{cases}$$

Parmi les énoncés de (a) à (f), identifier celui qui est **VRAI**.

(a) Les énoncés i. et ii. sont faux.

(b) L'énoncé i. est vrai et l'énoncé ii. est faux.

(c) Les énoncés i. et ii. sont vrais.

(d) L'énoncé i. est faux et l'énoncé ii. est vrai.

(e) Un problème du type i.:
"longueur de clôture fixée, aire à maximiser",
et un problème du type ii.:
"aire fixée, longueur de clôture à minimiser",
ne peuvent pas être posés pour le même genre de configuration, telle que celle donnée.

(f) Le problème ii. devrait être posé sous la forme:
"aire fixée, longueur de clôture à maximiser".

Question 16
(7 points)

On considère l'équation

$$\left(xy + \frac{1}{z}\right)(z^2+1) + xyz = 20,$$

qui relie trois quantités x, y, z. Les valeurs particulières $x = 2$, $y = 3$, $z = 1$ satisfont l'équation. On écrit $P = (2, 3, 1)$.

Identifier l'énoncé qui est **FAUX**.

(a) Les quantités x, y, z sont trois variables indépendantes.

(b) Au point P, on peut appliquer le théorème des fonctions implicites.

(c) $\frac{\partial z}{\partial x}(P) = -\frac{1}{2}$.

(d) $\frac{\partial z}{\partial y}(P) = -\frac{1}{3}$.

(e) $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f_x}{f_z}$, où f désigne la fonction $f(x,y,z) = \left(xy + \frac{1}{z}\right)(z^2+1) + xyz$.

(f) $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{f_y}{f_z}$, où f désigne la fonction $f(x,y,z) = \left(xy + \frac{1}{z}\right)(z^2+1) + xyz$.

TABLES

Quelques règles de dérivation :

- La dérivée d'un produit : $\frac{d}{dx}(fg)(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$
- La dérivée d'un quotient : $\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$
- La dérivée d'une fonction composée : $\frac{d}{dx}f(u(x)) = \frac{df}{du}\cdot\frac{du}{dx}$

Le calcul de certaines dérivées :

$\dfrac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$	$\dfrac{d}{dx}(a^x) = (\ln a)a^x$	$\dfrac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$
$\dfrac{d}{dx}\ln x = \dfrac{1}{x} \quad (x > 0)$	$\dfrac{d}{dx}\sin x = \cos x$	$\dfrac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x$
$\dfrac{d}{dx}\ln\lvert x\rvert = \dfrac{1}{x} \quad (x \neq 0)$	$\dfrac{d}{dx}\cos x = -\sin x$	$\dfrac{d}{dx}\arcsin x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\dfrac{d}{dx}\log_a x = \dfrac{1}{x\ln a}$	$\dfrac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$	$\dfrac{d}{dx}\arccos x = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\dfrac{d}{dx}e^x = e^x$	$\dfrac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$	$\dfrac{d}{dx}\arctan x = \dfrac{1}{1+x^2}$
		$\dfrac{d}{dx}\operatorname{arccot} x = \dfrac{-1}{1+x^2}$