GEL-2001: Analyse des signaux

Examen 2 A2009 : Solutions

Département de génie électrique et de génie informatique

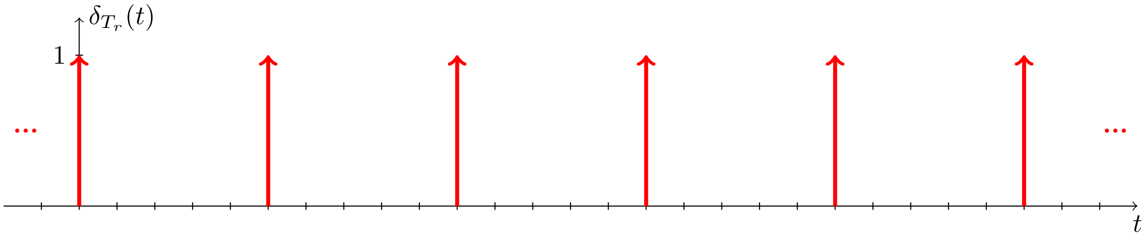
Problème 1 (14 pt)

Soit un laser impulsionnel décrit par l'expression qui suit:

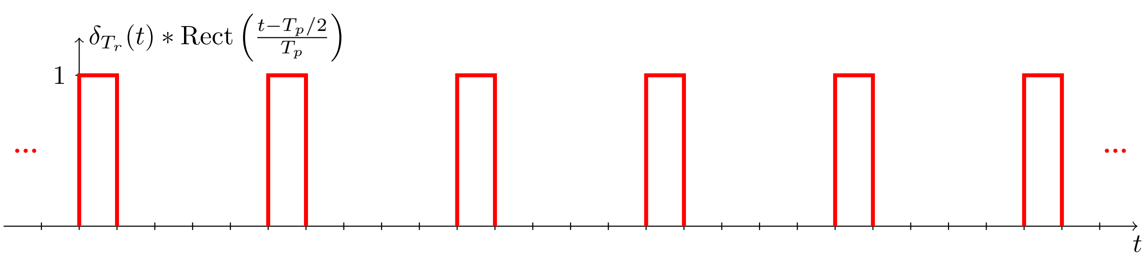
$$E(t) = \left[\delta_{T_r}(t) * \mathrm{Rect}\left(\frac{t - T_p/2}{T_p}\right)\right] \times \cos(\omega_c t)\,, \qquad \text{avec } T_r = 5,\ T_p = 1 \text{ et } T_c = 1/1000.$$

a)

On demande de tracer $\delta_{T_r}(t)$:



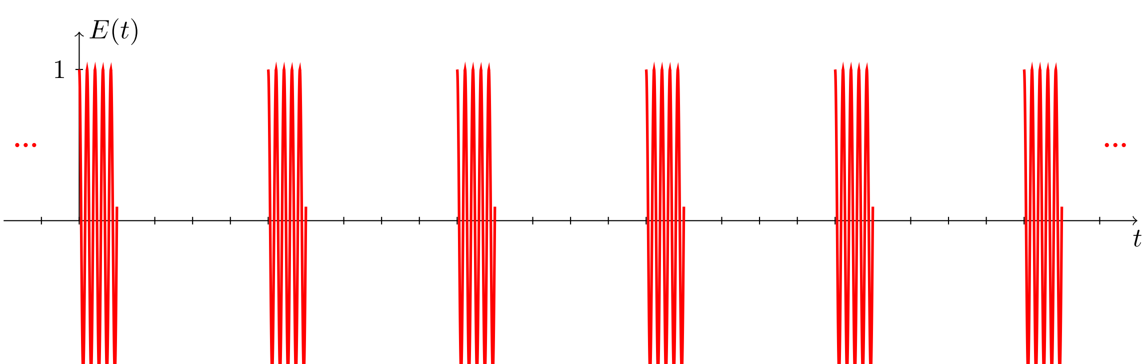
b)



c)

On demande à quoi sert le terme $-T_p/2$ dans l'expression du rectangle dans $E(t)$. Il assure la causalité du système.

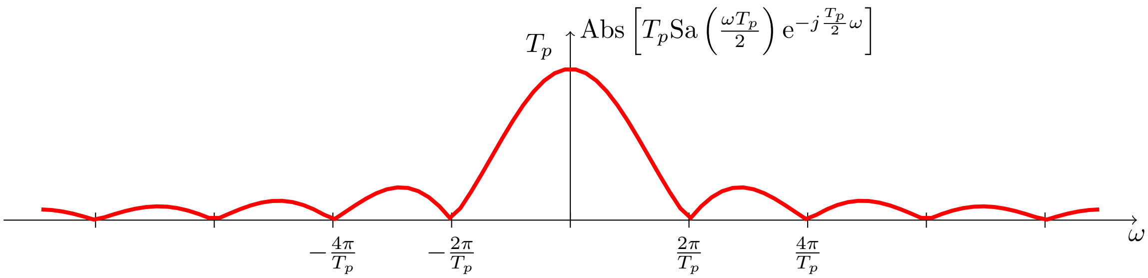
d)

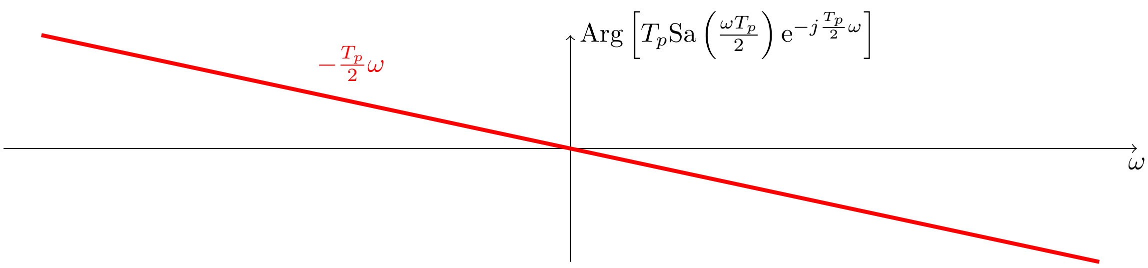


e)

On demande de tracer le spectre de $\mathrm{Rect}\left(\frac{t-T_p/2}{T_p}\right)$:

$$\mathrm{Rect}\left(\frac{t-T_p/2}{T_p}\right) \Leftrightarrow T_p \mathrm{Sa}\left(\frac{\omega T_p}{2}\right) \mathrm{e}^{-j\frac{T_p}{2}\omega}$$

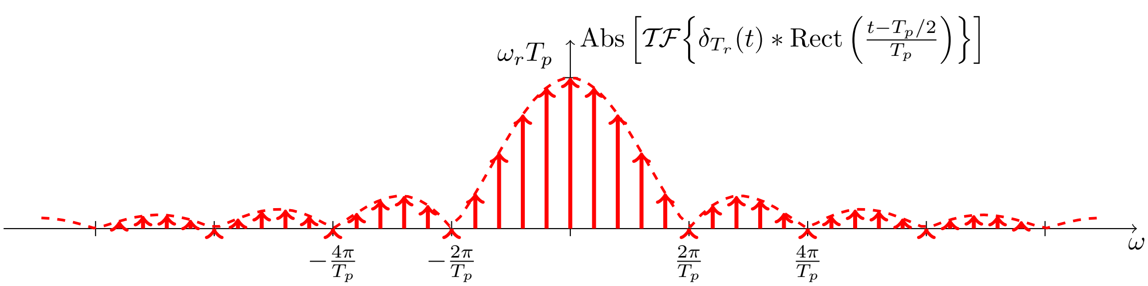


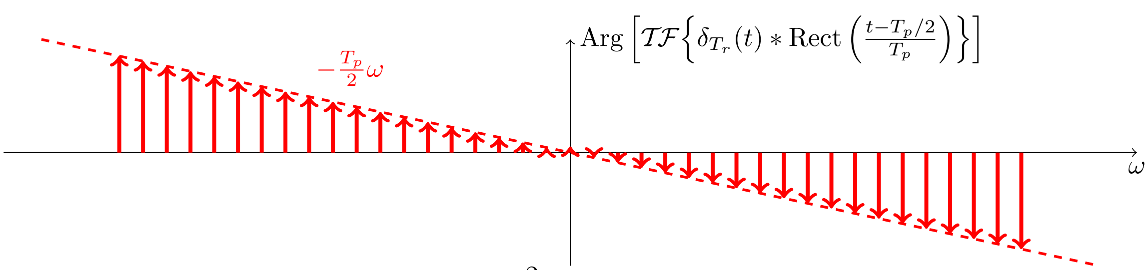


f)

On demande de tracer le spectre de $\delta_{T_r}(t) * \mathrm{Rect}\left(\frac{t-T_p/2}{T_p}\right)$:

$$\delta_{T_r}(t) * \mathrm{Rect}\left(\frac{t-T_p/2}{T_p}\right) \Leftrightarrow \omega_r \delta_{\omega_r}(\omega) \times T_p \mathrm{Sa}\left(\frac{\omega T_p}{2}\right) \mathrm{e}^{-j\frac{T_p}{2}\omega}$$



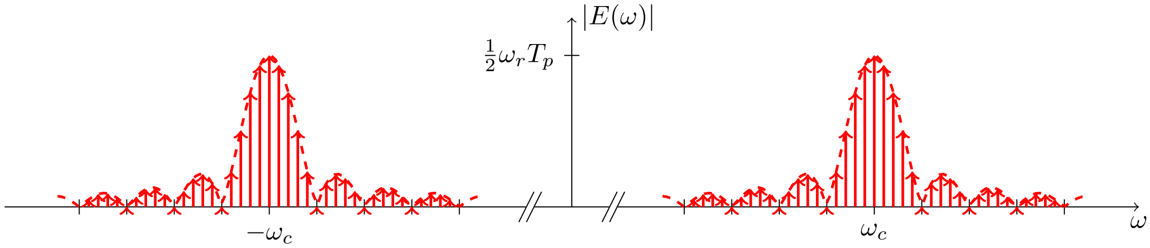


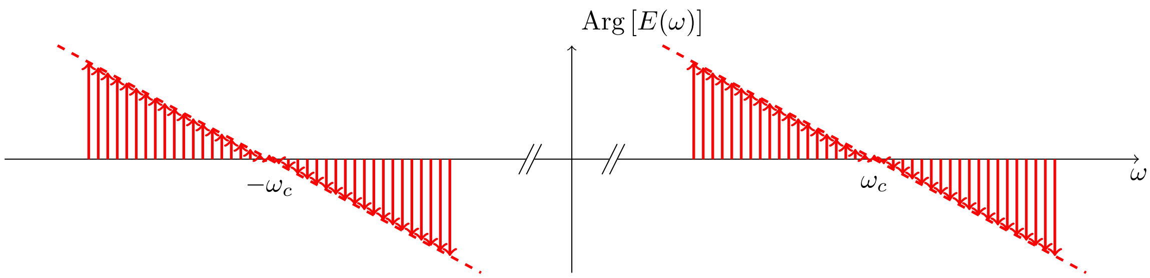
g)

Finalement, on demande de tracer le spectre de $E(t)$, $E(\omega)$:

$$\left[\delta_{T_r}(t) * \text{Rect}\left(\frac{t-T_p/2}{T_p}\right)\right] \times \cos(\omega_c t) \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}\omega_r\delta_{\omega_r}(\omega-\omega_c)\times T_p \text{Sa}\left(\frac{(\omega-\omega_c)T_p}{2}\right)\mathrm{e}^{-j\frac{T_p}{2}(\omega-\omega_c)}+\frac{1}{2}\omega_r\delta_{\omega_r}(\omega+\omega_c)\times T_p \text{Sa}\left(\frac{(\omega+\omega_c)T_p}{2}\right)\mathrm{e}^{-j\frac{T_p}{2}(\omega+\omega_c)}$$



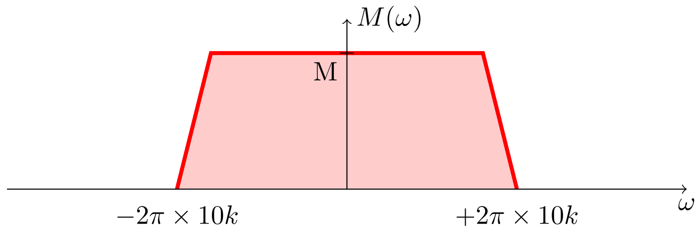


Problème 2 (9 pt)

Ce problème porte sur la modulation AM d'un message $m(t)$ avec un contenu fréquentiel limité entre 0 Hz et 10 kHz.

a)

On demande d'illustrer graphiquement le contenu spectral du message $m(t)$. On demande bien entendu une représentation schématisée et non une représentation exacte.



b)

On effectue une modulation AM avec porteuse. On demande de trouver l'expression $s(t)$ du signal modulé. L'expression de ce type de modulation est donné par:

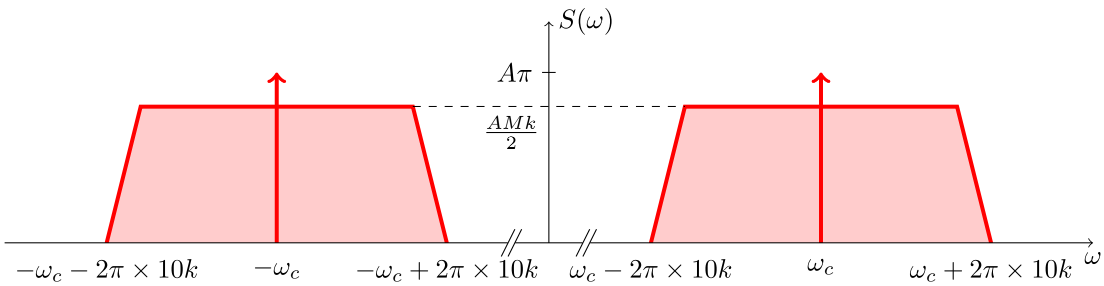
$$s(t) = A[1 + k \times m(t)] \cos(\omega_p t) \,,$$

où ω_p est la fréquence de la porteuse, k le taux de modulation et A l'amplitude de modulation (de la porteuse).

c)

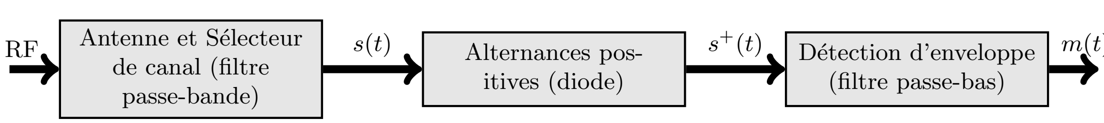
Le spectre du signal modulé $s(t)$ décrite en **b)** se calcul aisément en distribuant le cosinus et en effectuant la transformée de Fourier des deux termes. On trouve:

$$S(\omega) = A\pi[\delta(\omega - \omega_p) + \delta(\omega + \omega_p)] + \frac{Ak}{2}[M(\omega - \omega_p) + M(\omega + \omega_p)] \,.$$



d)

Enfin, on demande de dessiner le diagramme du système de démodulation pour ce genre de modulation AM. Ce type de modulation nécessite un récepteur d'une grande simplicité puisqu'une simple détection d'enveloppe est suffisante pour retrouver le message.

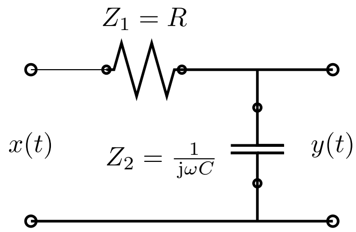


Problème 3 (12 pt)

Soit un filtre passe-bas RC, avec $\tau = RC = 1$.

a)

On demande dans un premier temps de calculer la sortie temporelle du filtre lorsque son entrée est soumise à une impulsion $\delta(t)$. En d'autres mots, nous cherchons la réponse impulsionnelle du filtre.



$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}\omega RC}\,.$$

La réponse impulsionnelle est donnée par la transformée de Fourier inverse de la réponse en fréquence, $H(\omega)$. On calcul:

$$h(t) = \mathcal{TF}\{H(\omega)\} = \mathcal{TF}\left\{\frac{1}{1 + \mathrm{j}\omega RC}\right\} = \mathcal{TF}\left\{\frac{1}{RC} \times \frac{1}{\mathrm{j}\omega + \frac{1}{RC}}\right\}\,.$$

Connaissant la transformé suivante:

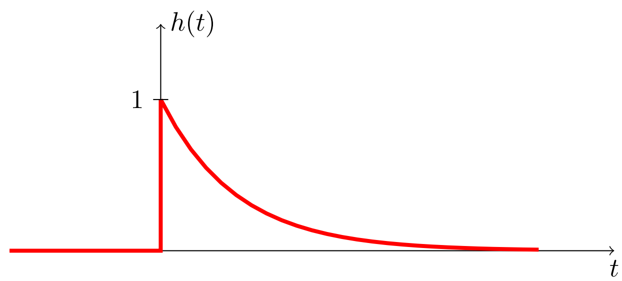
$$\boxed{\mathrm{e}^{-\beta t}\mathrm{U}(t) \Leftrightarrow \frac{1}{\beta + \mathrm{j}\omega}}$$

on trouve finalement:

$$h(t) = \frac{1}{RC}\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t}\mathrm{U}(t)\,.$$

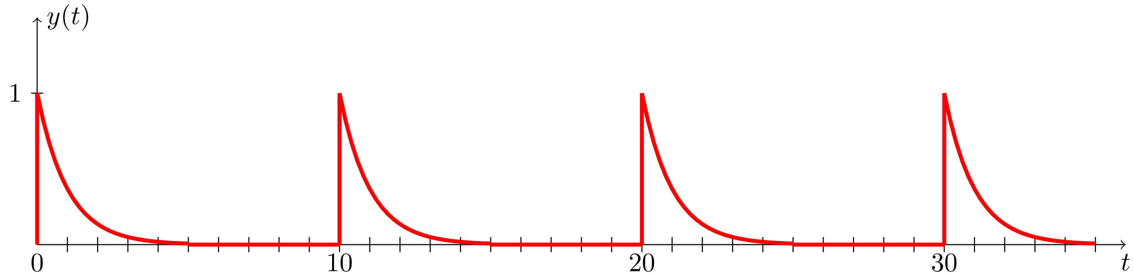
Puisque la constante de temps RC = 1, on a tout simplement:

$$h(t) = \mathrm{e}^{-t}\mathrm{U}(t)\,.$$



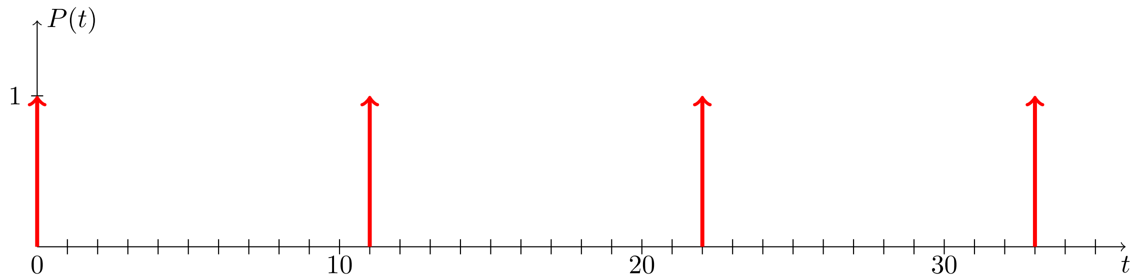
b)

L'entrée du filtre est maintenant un train d'impulsions, $\delta_{T_s}(t)$, avec $T_s = 10$. On demande de tracer en supposant que chaque pulse est indépendant.



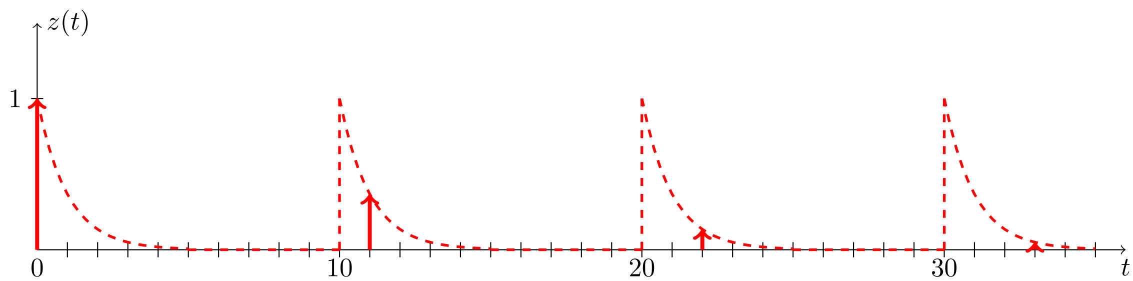
c)

Soit un second peigne, $P(t) = \delta_{T_{s,2}}(t)$, avec $T_{s,2} = 11$. On demande de tracer ce peigne à l'échelle avec le graphique de la question **b)**.



d)

On demande ensuite de tracer le signal à la sortie du filtre échantillonné par le second peigne, soit $z(t) = P(t) \times y(t)$.



e)

Puisque chaque impulsion échantillonne la réponse impulsionnelle à une position différente, pour retrouver la réponse impulsionnelle que l'on souhaite mesure, il suffit de prendre un nombre suffisant d'échantillon puis d'appliquer un facteur d'échelle temporelle. Le facteur d'échelle dépend de la fréquence d'échantillonnage et de la différence de fréquence entre les deux trains d'impulsions.

f)

La période d'échantillonnage apparente correspond à la différence de période entre les deux peignes. Si cette différence est plus petite ou égale à la période correspondante à la limite de Nyquist, le critère de Nyquist est alors respecté.

Problème 4 (10 pt)

Soit une fonction gaussienne de la forme:

$$x(t) = \mathrm{e}^{-at^2} .$$

a)

On demande de calculer la transformé de Fourier de $x(t)$. Plusieurs méthode peuvent être utilisées pour trouver cette transformée. La première passe par le calcul de l'intégrale:

$$\begin{aligned}
X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-at^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t - at^2}\mathrm{d}t\,,\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t - at^2 - A^2\omega^2 + A^2\omega^2}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t - at^2 - A^2\omega^2}\mathrm{e}^{A^2\omega^2}\mathrm{d}t\,,\\
&= \mathrm{e}^{A^2\omega^2}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-(\mathrm{j}\omega t + at^2 + A^2\omega^2)}\mathrm{d}t\,.
\end{aligned}$$

Si on pose $A = \mathrm{j}/2\sqrt{a}$, on trouve:

$$\begin{aligned}
X(\omega) &= \mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4a}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-(\mathrm{j}\omega t + at^2 + \frac{\mathrm{j}^2}{4a}\omega^2)}\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4a}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-(\sqrt{a}t + \frac{\mathrm{j}}{\sqrt{a}}\omega)^2}\mathrm{d}t\,,\\
&= \mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4a}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-a(t+\frac{\mathrm{j}}{a}\omega)^2}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

À ce stade, il est intéressante d'effectuer la substitution suivante: $u = t + \frac{\mathrm{j}\omega}{a}$. Le jacobien de cette transformation est 1 et les bornes d'intégrations restent inchangées. On a alors, en utilisant l'indice donné dans le questionnaire:

$$X(\omega) = \mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4a}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-au^2}\mathrm{d}u = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4a}} .$$

L'indice suivant était donnée:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-at^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{a}} .}$$

Une méthode alternative pour déterminer la transformé de Fourier de la gaussienne consiste à passer par la dérivation:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = -2at\mathrm{e}^{-at^2} = -2atx(t)\,.$$

Nous avons que:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(t) \Leftrightarrow \mathrm{j}\omega F(\omega) \qquad\qquad t f(t) \Leftrightarrow \mathrm{j}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega} F(\omega)$$

On peut donc déterminer l'équation différentielle suivante:

$$\mathrm{j}\omega X(\omega) = -2a\,\mathrm{j}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega} X(\omega)\,,$$
$$2a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega} X(\omega) + \mathrm{j}\omega X(\omega) = 0\,.$$

La solution générale de cette équation différentielle est $X(\omega) = C\mathrm{e}^{-\omega^2/4a}$, où C est une constante correspondante à $X(0)$:

$$X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-at^2} \mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,.$$

Ainsi on retrouve le même résultat final:

$$X(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \mathrm{e}^{-\omega^2/4a}$$

b)

On demande si $x(t)$ est à énergie ou puissance finie. Le signal est a puissance finie puisqu'il comporte un composante continue (moyenne non-nulle). Cette valeur moyenne est d'ailleurs calculée en **a)** et donnée par l'indice du problème.

c)

On demande de calculer le produit des largeurs à mi-hauter (FWHM) de $x(t)$ et de $X(\omega)$. La largeur à mi hauteur de $x(t)$ est donné par:

$$\mathrm{e}^{-at^2} = \frac{1}{2}\,,$$
$$-at^2 = \ln\frac{1}{2}\,,$$
$$t = \sqrt{\frac{-\ln\frac{1}{2}}{a}}\,,$$

d'où on trouve:

$$\mathrm{FWHM}_{x(t)} = 2\sqrt{\frac{-\ln\frac{1}{2}}{a}}\,.$$

Similairement, pour $X(\omega)$, on calcul:

$$\sqrt{\frac{\pi}{a}}\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4a}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,,$$
$$-\frac{\omega^2}{4a} = \ln\frac{1}{2}\,,$$
$$\omega = \sqrt{-4a\ln\frac{1}{2}}\,,$$

$$\mathrm{FWHM}_{X(\omega)} = 2\sqrt{-4a\ln\frac{1}{2}}\,.$$

Le produit des deux largeurs donne:

$$\begin{aligned}
\mathrm{FWHM}_{x(t)} \times \mathrm{FWHM}_{X(\omega)} &= 2\sqrt{\frac{-\ln\frac{1}{2}}{a}} \times 2\sqrt{-4a\ln\frac{1}{2}}\,,\\
&= 4\sqrt{\frac{-\ln\frac{1}{2}}{a} \times -4a\ln\frac{1}{2}}\,,\\
&= 8\sqrt{-\ln\frac{1}{2} \times -\ln\frac{1}{2}}\,,\\
&= 8\sqrt{\ln 2 \times \ln 2}\,,\\
&= 8\ln 2\,.
\end{aligned}$$

d)

On demande le taux de décroissance asymptotique de $X(\omega)$ est donné directement par la forme de la gaussienne puisqu'il n'y a pas de lobes secondaires. Le taux est en $\mathrm{e}^{-\omega^2/4a}$.