Mini-test 2

MAT-2910 : Analyse Numérique pour ingénieur (section B) Hiver 2018

- Identifiez chaque page. Évitez de détacher les pages.
- Un aide-mémoire se retrouve à la fin du questionnaire, vous pouvez le détacher.
- L'examen est noté sur 100 points et compte pour 10.0% de la note finale.
- Donner tous les développements et calculs. **Pour recevoir des points, toute réponse doit être convenablement** JUSTIFIÉE**.**
- Seules les calculatrices avec l'auto-collant de la Faculté sont autorisées.
- Répondre aux questions sur le questionnaire. **Utiliser le verso des feuilles si nécessaire, ou comme brouillon**.

Je suis bien l'étudiant dont le nom et le numéro de dossier sont écrits ci-dessous. J'ai lu et compris les directives et je m'engage à les respecter.	
Nom :	
Prénom :	
Matricule :	
Signature :	

À remplir par le(s) correcteur(s)

Q1 (/60)	Q2 (/30)	Q3 (/10)	Total

Question 1 (20+20+20) **Nom, Prénom :**______________________________

a) Déterminer le polynôme de degré 2 interpolant une fonction f aux points $(-1,\, 4)$, $(0,\, 1)$ et $(2,\, -5)$ par 3 méthodes différentes.
b) Déterminer une estimation de l'erreur d'interpolation sachant que $f(1) = 0$.

Question 1 (20+20+20) **Nom, Prénom :**________________________________

c) Déterminer les valeurs des paramètres a, b, c et d de la fonction $S(x)$ définie par

$$S(x) = \begin{cases} p_0(x) & = a + bx + cx^2 + dx^3, \quad -1 \leq x \leq 0, \\ p_1(x) & = 1 - x + x^2 - x^3, \quad 0 \leq x \leq 2, \end{cases}$$

pour qu'elle soit une spline cubique interpolant les 3 points de la question a) (bien justifier la réponse). Est-ce une spline naturelle ?

Question 2 (15+15) **Nom, Prénom :**________________________________

a) Démontrer que la formule de différence finie centrée d'ordre 2 pour $f'(x)$ est bien une approximation de $f'(x)$ d'ordre 2.

b) Déterminer une autre formule d'ordre au moins 3 et déterminer précisément son ordre.

Question 3 (2+8) **Nom, Prénom :**________________________________

On considère le programme Matlab suivant :

```
% Initialisation
x1=1;x2=2;
f=AAA(x) x^3+x^2-3*x-3;
epsilon=0.5e-6;
N=50;
% 1ere iteration
xm=(x1+x2)/2;
erabs=abs(x1-x2)/2;
errel=erabs/abs(xm);
nbiterations=1;
% Boucle
BBB (errel>epsilon) CCC (DDD <N)
          if f(x1)*f(xm)<0
              x2=xm;
          else
              if f(x2)*f(xm)<0
                  x1=xm;
              else
                  x1=xm;
                  x2=xm;
              end
          end
          xm=(x1+x2)/2;
          erabs=abs(x1-x2)/2;
          errel=erabs/abs(xm);
          nbiterations=nbiterations+1;
end
% Affichage de la solution
xm
nbiterations
```

a) Quelle est cette méthode numérique ?
b) Par quoi doit-on remplacer chacune des triples lettres ? Choisissez parmi les 3 options proposées en encerclant votre choix.

AAA : 1) f 2) abs 3) @
BBB : 1) while 2) for 3) do
CCC : 1) & 2) && 3) &&&
DDD : 1) erabs 2) errel 3) nbiterations

Aide-mémoire

Interpolation

— Différences divisées : $f[x_i] = f(x_i)$,

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}, \quad f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{(x_{i+2} - x_i)}, \quad \text{etc.}$$

— Erreur d'interpolation :

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n) \ \text{ pour } \quad \xi(x) \in]x_0, x_n[$$

Différentiation numérique

— Dérivées d'ordre 1 :

$f'(x) = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} + O(h)$ *Différence avant d'ordre 1*
$f'(x) = \dfrac{f(x) - f(x-h)}{h} + O(h)$ *Différence arrière d'ordre 1*
$f'(x) = \dfrac{-f(x+2h) + 4f(x+h) - 3f(x)}{2h} + O(h^2)$ *Différence avant d'ordre 2*
$f'(x) = \dfrac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2)$ *Différence centrée d'ordre 2*
$f'(x) = \dfrac{3f(x) - 4f(x-h) + f(x-2h)}{2h} + O(h^2)$ *Différence arrière d'ordre 2*

— Dérivées d'ordre supérieur :

$f''(x) = \dfrac{f(x-2h) - 2f(x-h) + f(x)}{h^2} + O(h)$ *Différence arrière d'ordre 1*
$f''(x) = \dfrac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2} + O(h)$ *Différence avant d'ordre 1*
$f''(x) = \dfrac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + O(h^2)$ *Différence centrée d'ordre 2*

— Extrapolation de Richardson : $Q_{exa} = \dfrac{2^n Q_{app}(\frac{h}{2}) - Q_{app}(h)}{(2^n - 1)} + O(h^{n+1})$