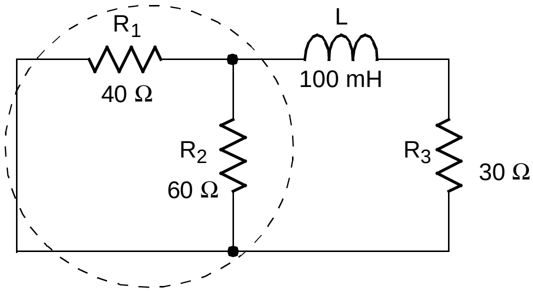
Corrigé de l'examen final A2000

Problème no. 1 (20 points)

a) Le courant $i_2(t)$ est de la forme suivante: $$i_2(t) = \left(A + Be^{-\frac{t}{\tau}}\right)u(t) .$$

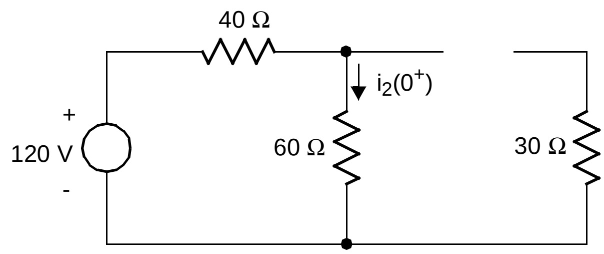
La constante de temps τ est déterminée à l'aide du circuit de base:



$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{L}{\frac{R_1R_2}{R_1+R_2} + R_3} = \frac{0.1}{\frac{40\times 60}{40+60} + 30} = \frac{0.1}{54} = 1.85\text{ms}$$

Les constantes A et B sont déterminées à partir des conditions initiale et finale:

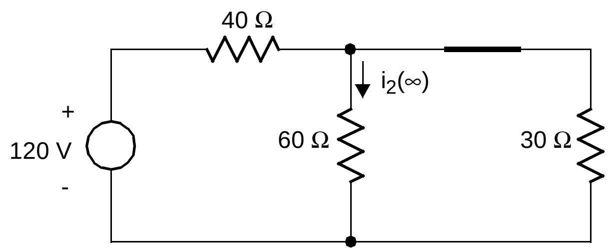
À t = 0^+



$$i_2(0+\;\;) = \frac{120}{40+60} = 1.2$$

$$i_2(0+\;\;) = A + B = 1.2$$

À t = ∞

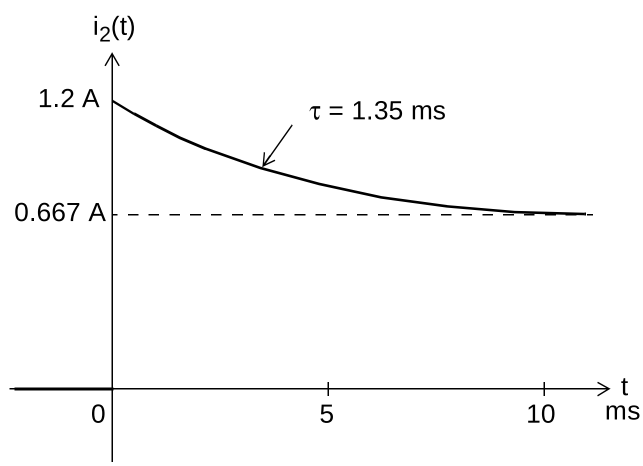


$$i_2(\infty) = \frac{30}{30+60} \times \frac{120}{40 + \frac{60\times 30}{60+30}} = 0.667$$

$$i_2(\infty) = A = 0.667$$

On déduit: A = 0.667 et B = 0.533

Alors: $$\boxed{i_2(t) = \left(0.667 + 0.533e^{-\frac{t}{\tau}}\right)u(t)}$$

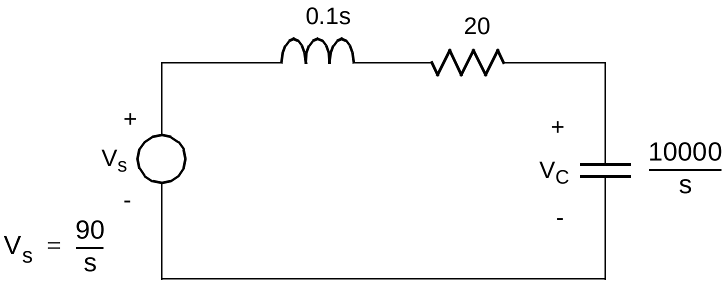


b) La source v_s est de la forme suivante: $$v_s(t) = 50u(t) - 50u(t - 5\times 10^{-3})$$

On déduit: $$i_2(t) = \frac{50}{120}\left(0.667 + 0.533e^{-\frac{t}{\tau}}\right)u(t) - \frac{50}{120}\left(0.667 + 0.533e^{-\frac{t-5\times 10^{-3}}{\tau}}\right)u(t - 5\times 10^{-3})$$

Problème no. 2 (20 points)

a) Circuit transformé dans domaine de Laplace:



La tension V_C est calculée par la loi du diviseur de tension:

$$V_C = \frac{\frac{10000}{s}}{\frac{10000}{s} + 0.1s + 20} \times \frac{90}{s} = \frac{10000}{0.1s^2 + 20s + 10000} \times \frac{90}{s} = \frac{9000000}{s(s^2 + 200s + 100000)}$$

La fonction V_C a trois pôles: $p_1 = 0$ $p_2 = -100 + j300$ $p_3 = -100 - j300$

On effectue la transformation inverse de V_C en décomposant V_C en fractions partielles:

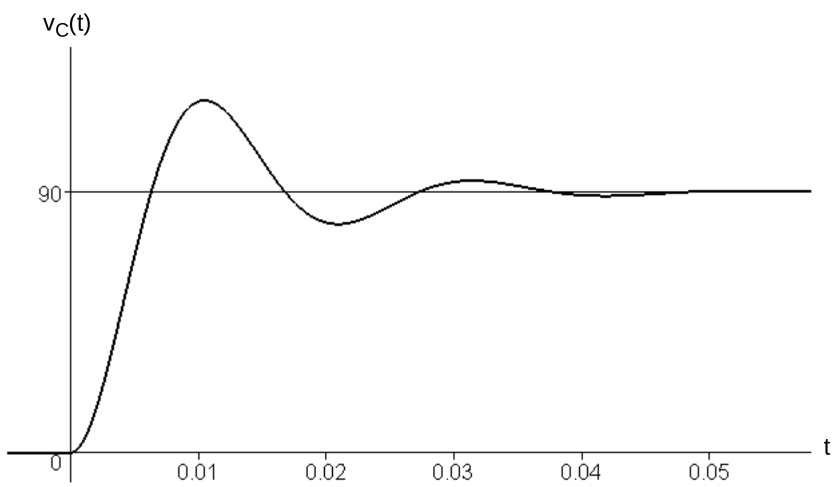
$$V_C = \frac{9000000}{s(s + 100 - j300)(s + 100 + j300)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + 100 - j300} + \frac{B^*}{s + 100 + j300}$$

On calcule les constantes A et B:

$$A = \left. \frac{9000000}{(s^2 + 200s + 100000)} \right|_{s = 0} = 90$$

$$B = \left. \frac{9000000}{s(s + 100 + j300)} \right|_{s = -100 + j300} = 47.4e^{j2.82}$$

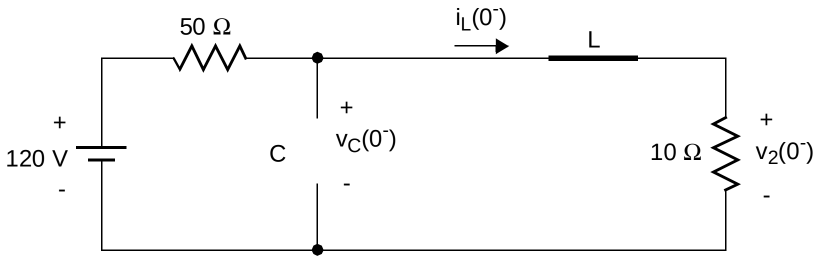
La tension $v_C(t)$ est: $\boxed{v_C(t) = [90 + 94.8e^{-100t}\cos(300t + 2.82)]u(t)}$



b) La durée du régime transitoire est: $d_{tran} = 5 \times \frac{1}{100} = 50\text{ ms}$

Problème no. 3 (20 points)

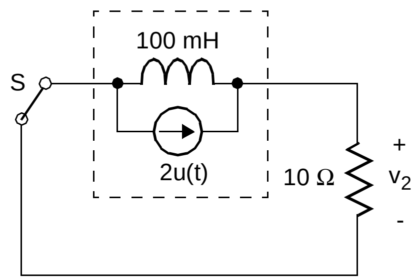
Le commutateur S est à la position 1 depuis très longtemps. Un régime permanent a été atteint pour $t < 0$.



$i_L(0^-) = 120/(50+10) = 2$ A

$v_C(0^-) = v_2(0^-) = (1/6)120 = 20$ V

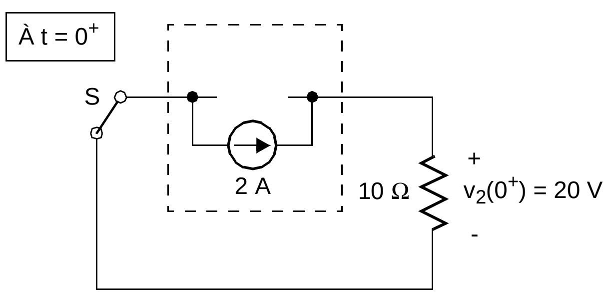
À $t = 0$, S change de position de 1 à 2 et demeure à cette position pour le reste du temps. On a le circuit équivalent suivant pour $t > 0$.

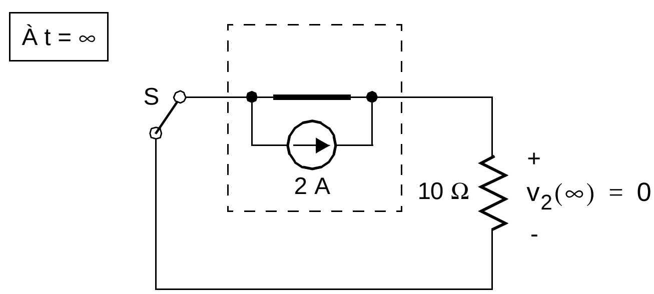


La tension $v_2(t)$ est de la forme suivante: $$v_2(t) = \left(A + Be^{-\frac{t}{\tau}}\right)u(t).$$

La constante de temps τ est égale à: $$\tau = \frac{L}{R} = \frac{0.1}{10} = 0.01\text{ s}$$

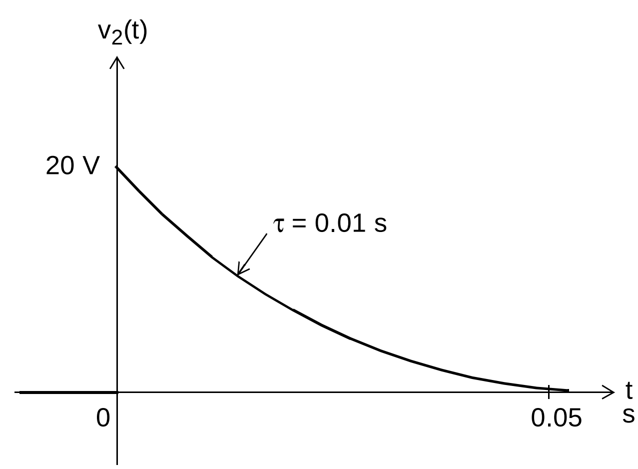
Les constantes A et B sont déterminées à partir des conditions initiale et finale:



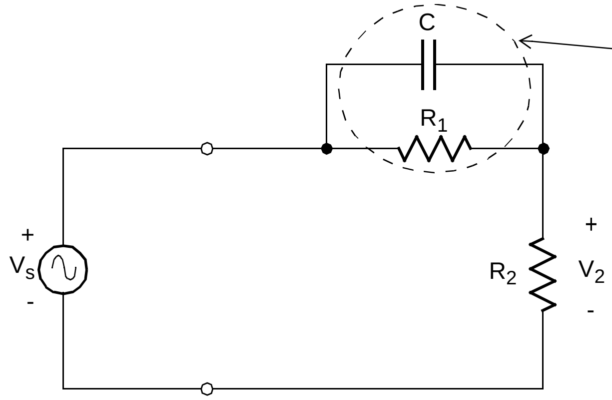


On déduit: $A = 0$ et $B = 20$

Alors: $$\boxed{v_2(t) = 20e^{-\frac{t}{\tau}}u(t)}$$



Problème no. 4 (20 points)



$$Z_1 = \frac{R_1 \times \frac{1}{Cj\omega}}{R_1 + \frac{1}{Cj\omega}} = \frac{R_1}{1 + j\omega R_1 C}$$

$R_1 = 120\ \Omega$

$R_2 = 80\ \Omega$

$C = 5\ \mu F$

a) La fonction de transfert H = V_2/V_s est déterminée à l'aide de la loi du diviseur de tension:

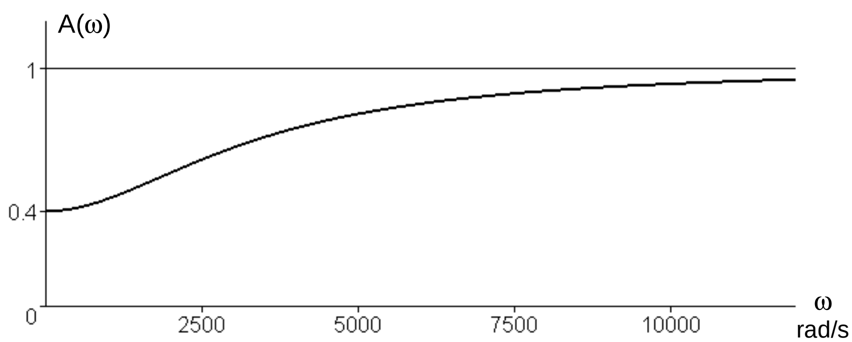
$$H(j\omega) = \frac{V_2}{V_s} = \frac{R_2}{R_2 + Z_1} = \frac{R_2}{R_2 + \frac{R_1}{1 + j\omega R_1 C}} = \frac{R_2(1 + j\omega R_1 C)}{R_1 + R_2(1 + j\omega R_1 C)} = \frac{R_2 + j\omega R_1 R_2 C}{R_1 + R_2 + j\omega R_1 R_2 C} = \frac{80 + j0.048\omega}{200 + j0.048\omega}$$

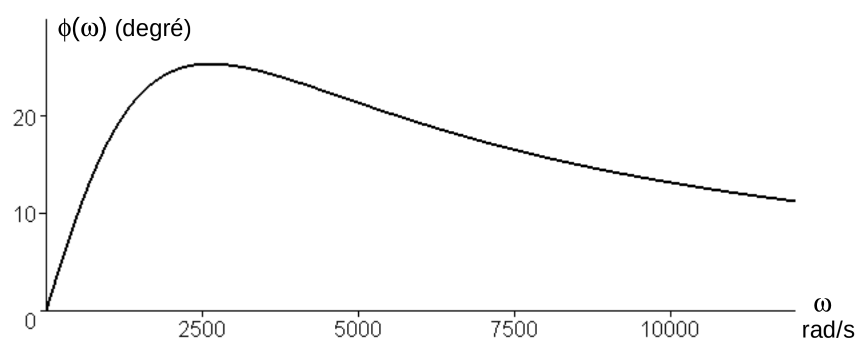
Le module de H(jω): $A(\omega) = \frac{\sqrt{6400 + (0.048\omega)^2}}{\sqrt{40000 + (0.048\omega)^2}}$

La phase de H(jω): $\phi(\omega) = \mathrm{arctg}(0.0006\omega) - \mathrm{arctg}(0.00024\omega)$

On calcule A(ω) et ϕ(ω) pour quelques valeurs de ω:

ω (rad/s)	0	2500	5000	7500	10000	∞
A(ω)	0.40	0.62	0.81	0.89	0.94	1.00
ϕ(ω) (degré)	0.0	25.3	21.4	16.5	13.2	0.0





b) Dans ce cas, on a $\mathbf{V_s} = 120\angle 0°$ et ω = 6283 rad/s. À l'aide du résultat de (a), on peut calculer V_2:

$$V_2 = H(j\omega) \times V_s = \frac{80 + j0.048\omega}{200 + j0.048\omega} \times 120\angle 0° = \frac{9600 + j36191}{200 + j301.6} = 103.5\angle 18.7°\ \text{V}$$

Alors: $v_2(t) = 103.5\cos(2000\pi + 0.326)$