EXAMEN PARTIEL 2

Mathématiques de l'ingénieur II — Automne 98
MAT-10364
Date: 13 novembre.

Remarques:

- Durée de l'examen: deux heures
- Documentation permise: deux feuilles-résumé.
- Vous êtes priés de vous identifier (nom et numéro de matricule) sur le cahier et de placer votre carte d'identité sur la table à côté de vous.
- **Chaque réponse devra être accompagnée des calculs détaillés. Dans le cas contraire, elle sera considérée comme nulle.**

Question 1. (20 points)

On considère la courbe C d'intersection de la sphère d'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

avec le plan

$$z = \frac{1}{2}.$$

(a) (8 pts) Trouver une représentation paramétrique de C.

(b) (8 pts) Déterminer le vecteur tangent au point $P_0 = (0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$.

(c) (4 pts) Quelle est l'équation paramétrique de la droite tangente à cette courbe au point P_0?

Question 2. (20 points)

Un support métallique prend la forme d'un triangle de sommets $(0, 0, 0)$, $(a, 0, a)$, $(0, a, a)$ où a est une constante positive. On suppose que la densité (linéique) σ est constante. Calculer le moment d'inertie du support par rapport à l'axe des z.

Question 3. (20 points)

On considère la courbe C définie par

$$\vec{r}(t) = (t\cos t, t\sin t, t), \qquad t \in [0, 2\pi].$$

(a) (5 pts) Démontrer que cette courbe est tracée sur un cône.

(b) (15 pts) Calculer le travail du champ vectoriel

$$\vec{F}(x,y,z) = (1, -1, x+y)$$

le long de la portion de la courbe C qui joint le point $A = (0,0,0)$ au point $B = (-\pi, 0, \pi)$.

Question 4. (20 points)

On désigne par $\vec{F}$ le champ de vecteurs

$$\vec{F}(x,y) = (2xy^2, ax^2y)$$

dépendant du paramètre réel a.

(a) (12 pts) Quelle doit être la valeur de a pour que ce champ soit potentiel? Pour cette valeur de a, déterminer un potentiel associé.

(b) (8 pts) On désigne par C la courbe d'équation paramétrique

$$\vec{r}(t) = (\cos t, \sin^2 t), \quad 0 \le t \le \pi/2.$$

Calculer le travail de $\vec{F}$ le long de la courbe C.

Question 5. (20 points)

On considère une surface S d'équation

$$x^2 + \frac{y^2}{4} - y + z^2 = 0.$$

(a) (8 pts) Montrer que

$$\begin{aligned} x &= \sin\phi\,\cos\theta, & 0 \le \theta \le 2\pi, \\ y &= 2 + 2\sin\phi\,\sin\theta, & 0 \le \phi \le \pi, \\ z &= \cos\phi, & \end{aligned}$$

est une paramétrisation de la surface S. Identifier la surface.

(b) (12 pts) En utilisant la paramétrisation ci-dessus, trouver l'équation du plan tangent au point $(0, 3, \frac{\sqrt{3}}{2})$

Question 6. (5 points)

Pour obtenir à l'aide de Maple, une représentation graphique de la surface paramétrée

$$\vec{r}(u,v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u), \qquad u \in [0,\pi], v \in [0, 2\pi],$$

il faut taper la commande

1. $> plot([\sin(u) * \cos(v), \sin(u) * \sin(v), \cos(u)], u = 0..Pi, v = 0..2 * Pi);$
2. $> parametricplot3d([\sin(u) * \cos(v), \sin(u) * \sin(v), \cos(u)], u = 0..Pi, v = 0..2 * Pi);$
3. $> plot3d([\sin(u) * \cos(v), \sin(u) * \sin(v), \cos(u)], u = 0..Pi, v = 0..2 * Pi);$
4. $> surfaceplot([\sin(u) * \cos(v), \sin(u) * \sin(v), \cos(u)], u = 0..Pi, v = 0..2 * Pi);$
5. $> parametricplot([\sin(u)*\cos(v), \sin(u)*\sin(v), \cos(u)], u = 0..Pi, v = 0..2*Pi);$

précéder de la commande "with(plots)".

Ecrire votre choix de réponse sur le cahier.