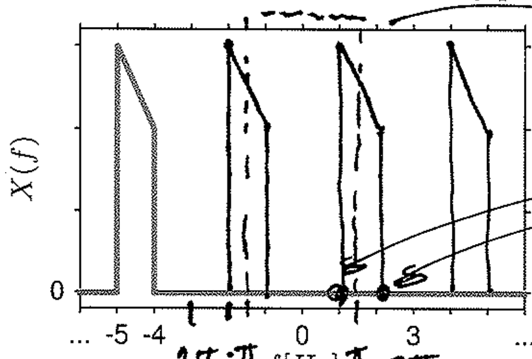
Question 1

a) (6 pts) Un signal sinusoïdal de fréquence $f_0 = 100$ Hz est échantillonné de façon successive à $f_s = 240$ Hz, 140 Hz et puis 30 Hz.

- Pour quel(s) taux d'échantillonnage f_s y a-t-il recouvrement spectral, s'il y a lieu?
- Pour **chacun** des signaux discrets issus de l'échantillonnage, quelle est la fréquence du signal analogique reconstruit par un convertisseur numérique-analogique idéal (en Hz)?

b) (4 pts) Le spectre $X(f)$ d'un signal analogique est illustré ci-bas. Ce signal est échantillonné à $f_s = 3$ Hz. Esquissez le spectre du signal échantillonné en unités de fréquence numérique pour $-2\pi \le \omega \le 2\pi$ rad/échantillon et identifiez l'intervalle de Nyquist.



intervalle de Nyquist
$\omega \in [-\pi, \pi]$

$2\pi/3$
$4\pi/3$

→ ω [rad/éch]

$|100-140| < \frac{140}{2}.$

$|100-3\cdot 30| < \frac{30}{2}.$

a)

f_0	f_s	Recouv?	f_{app}.
100	240	Non.	100
100	140	Oui	-40
100	30	Oui.	10
~~480~~	—		

(40 aussi accepté)

1 pt/réponse (Moitié des points si mauvaises unités)

1 pt/réponse

b) Voir graphique.

1 pt pour forme inversée

1 pt pour axe en rad/éch.

1 pt pour graduation appropriée.

1 pt pour calcul ou identification de Nyquist.

Question 2

Soit le système discret représenté par l'équation entrée-sortie suivante (la sortie est $y(n)$) :

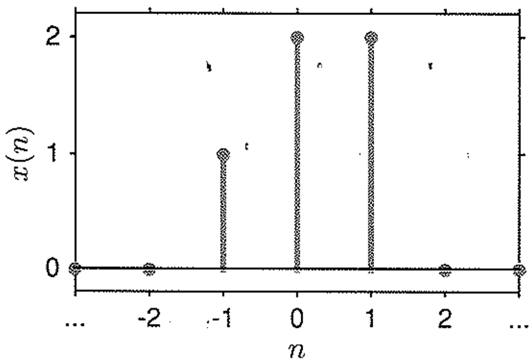
$$y(n) = 3x(-n+2).$$

Répondez aux questions suivantes en justifiant :

a) (4 pts) Est-ce que ce système est invariant en temps?

b) (3 pts) Est-ce que ce système est causal?

c) (3 pts) Tracez la sortie du système pour l'entrée affichée ci-bas.



pénalité -1 pt si inversion.

$-n+D+2$

a) Non.

$x(n) \to \boxed{H} \to 3x(-n+2) \to \boxed{D} \to 3x(-(n-D)+2)$

$x(n) \to \boxed{D} \to x(n-D) \to \boxed{H} \to 3x(-n+2-D)$

$\neq$

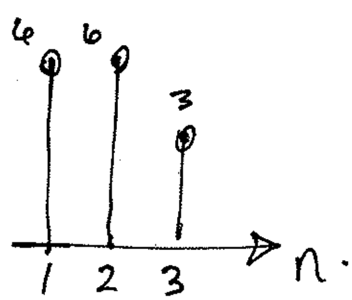
b) Non, une sortie présente dépend d'une entrée future.

e.g. $y(0) = 3x(2)$

présent — futur.

* On ne peut pas utiliser le concept de réponse impulsionnelle, le système n'étant pas LIT

c)



Par a et b : 1 pt pour réponse, 1 pt pour justification, reste pour preuve.

Pour c : 1 pt pour direction.

1 pt pour valeurs en y.

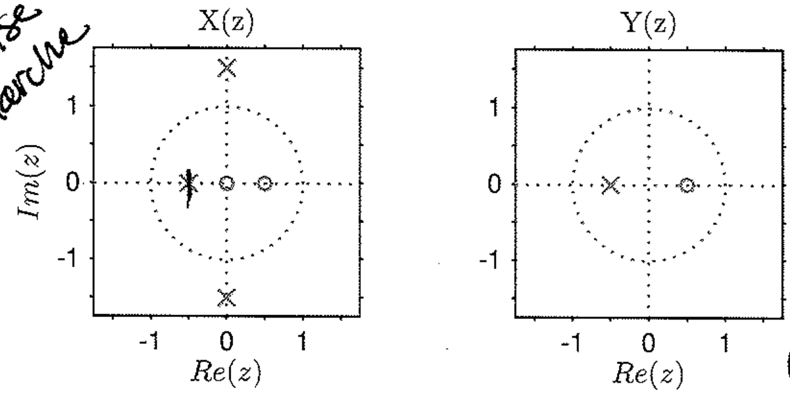
1 pt pour indices (valeurs en x)

Question 3

Le signal $y(n)$ représente la sortie d'un système LIT stable lorsque l'entrée est le signal $x(n)$. Les signaux $x(n)$ et $y(n)$ sont **stables** et sont associés aux diagrammes pôle-zéro ci-bas. Le cercle pointillé représente $|z| = 1$, les croix sont des pôles et les anneaux des zéros (pas de pôle ou zéro multiple). Vous pouvez assumer que le gain (prémultiplicateur de $X(z)$ et $Y(z)$) est $k = 1$ dans les deux cas.

Moitié pour réponse
Moitié pour justification.

Moitié pour réponse
Moitié pour démarche



On ne pénalisait pas plusieurs fois la même erreur, correction en fonction de la cohérence pour questions liées.

Répondez aux questions suivantes :

a) (2 pts) Quelle est la RDC (région de convergence) de $X(z)$?
b) (2 pts) Est-ce que $x(n)$ est une séquence à droite, séquence à gauche, ou une séquence mixte?
c) (2 pts) Quelle est la fonction de transfert $H(z) = Y(z)/X(z)$ du système LIT?
d) (2 pts) Quelle est l'équation entrée-sortie du système LIT?
e) (2 pts) Est-ce que le système LIT est causal? Réel? RIF ou RII? Justifiez brièvement.

a) Pôles à $|z| = 0.5$ implique $|z| > 0.5$ pour stable.
Pôles à $|z| = 1.5$ implique $|z| < 1.5$ pour stable.
Global : $0.5 < |z| < 1.5$.
1 pt pour utilisation des pôles
1 pt pour région annulaire.

b) RDC annulaire implique séquence mixte. 0 ou 2 pts

c) Le système
- annule les pôles à $\pm 1.5j$
- annule le zéro à 0

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = \frac{(z+1.5j)(z-1.5j)}{z} = \frac{z^2+2.25}{z} = z + 2.25z^{-1}$$

(autres puissances acceptées $\times \frac{z^m}{z^m}$)

d) $y(n) = x(n+1) + 2.25x(n-1)$ (formes équivalentes acceptées)

e) Causal : non, # zéros > # pôles ou sortie présente dépend d'entrée future.
Réel : oui, zéros complexes en paires conjuguées (ou tous les termes réels)
RIF : tous les pôles sont à $z = 0$, ou $y(n) = \ldots$ rien en y

Corrigé 18/10/02

Question 4

On peut interpréter la fonction de masse d'une variable aléatoire discrète comme étant un signal discret. Par exemple, la fonction de masse associée à la variable aléatoire « résultat d'un lancer de dé à 6 faces » est :

$$x_{1dé}(n) = \left[\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right] = \frac{1}{6}[1, 1, 1, 1, 1, 1]$$

pour $1 \leq n \leq 6$. Ici, l'indice représente un **résultat possible** ($n = 2$ signifie qu'on lance le dé et qu'on obtient 2 comme résultat) alors que la valeur $x_{1dé}(2)$ représente la probabilité d'obtenir ce résultat possible (ici $x_{1dé}(2) = 1/6$). Évidemment, les résultats impossibles ont probabilité 0 et ne sont donc pas considérés dans le signal discret.

La fonction de masse associée à la variable aléatoire « somme des résultats de **deux** dés à 6 faces» est donnée par la convolution $x_{2dés}(n) = x_{1dé}(n) * x_{1dé}(n)$. La fonction de masse associée à l'expérience « somme des résultats de **trois** dés à 6 faces » est, par raisonnement récursif, $x_{3dés}(n) = x_{1dé}(n) * x_{1dé}(n) * x_{1dé}(n)$.

On s'intéresse ici à la variable aléatoire « somme des résultats de **quatre** dés à 6 faces ».

a) (4 pts) Combien y a-t-il de résultats possibles dans $x_{4dés}(n)$?

b) (6 pts) À la main, écrivez un « script » Matlab permettant de calculer et tracer tous les points de $x_{4dés}(n)$ en partant de rien (utilisez la fonction `conv()` de Matlab). On devrait pouvoir copier votre code dans Matlab, exécuter, puis obtenir la fonction de masse avec **le bon axe en abscisse**.

c) (BONUS 4 pts) Dans $x_{4dés}(n)$, quel est le résultat le plus probable et quelle est sa probabilité?

a) Plusieurs méthodes possibles.

2 pts pour raisonnement
2 pts pour réponse
-1 pt si réponse sans démarche

$$\left.\begin{array}{l}\text{Plus petit} = 4 \times 1 = 4.\\ \text{Plus grand} = 4 \times 6 = 24.\end{array}\right\} 21$$

$x_{1dé}(n) * x_{1dé}(n)$

Par convolution : $x_{2dés}(n)$ pour $\underbrace{1+1}_{2} \leq n \leq \underbrace{6+6}_{12.}$

$x_{4dés}(n)$ pour $\overbrace{2+2}^{4} \leq n \leq \overbrace{12+12}^{24}.$

$x_{2dés}(n) * x_{2dés}(n)$

~~Erreur. * Matlab.~~

Justification 21. (-1)

b) $X1 = \frac{1}{6}$*ones(1,6); ← 1 pt par définition.

X2 = conv(X1,X1);

X4 = conv(X2,X2);

} ← 2 pts pour raisonnement et implémentation correcte. (−0.5 ou −1 pour erreurs Matlab)

n = 4:1:24; Peut avoir d'autres équivalents, en autant que ça fonctionne dans Matlab!

stem(n,X4); ← 1 pt par affichage.

2pts

c) On peut d'abord calculer $x_{2dés}(n) = x_{1dé}(n) * x_{1dé}(n)$

$$\begin{array}{c|c} & (1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1) \times 1/6 \\ \hline 1 & \\ 1 & \\ 1 & \dots \\ 1 & \\ 1 & \\ 1 & \\ \times 1/6 & \end{array}$$

Par inspection, ça donne

$$x_{2dés}(n) = \frac{1}{36}\left[1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 3, 2, 1\right]$$

↑ n = 2 ↑ n = 12

Résultat plus probable = 1 pt
Raisonnement = 1 pt
Probabilité = 2 pts

On calcule ensuite $x_{4dés}(n) = x_{2dés}(n) * x_{2dés}(n)$

$$\begin{array}{c|c} & \overset{n=2}{(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1)} \times 1/36 \\ \hline 1/36 \times\ 1 & \\ 2 & \\ 3 & \\ 4 & \\ 5 & \\ 6 & \\ 5 & \\ 4 & \\ 3 & \\ 2 & \\ n=12 \rightarrow 1 & \end{array}$$

somme des carrés

$$\frac{1}{36^2}\left[1+4+9+16+25+36+25+16+9+4+1\right] = \frac{146}{1296}$$

Résultat le plus probable sur la plus longue diagonale.

indice = 12+2 = 14.
(résultat possible)