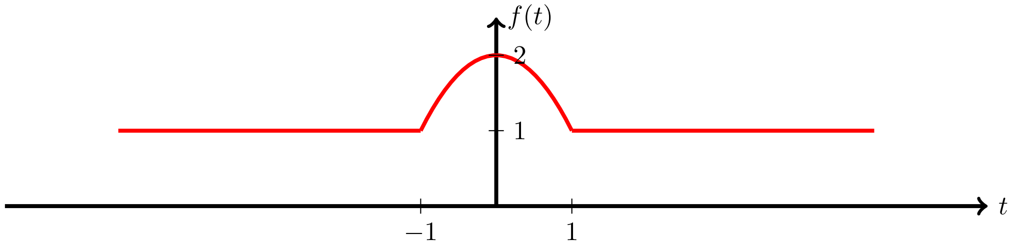
GEL-2001 83320 : Analyse des signaux

Examen final A2011 : Solutions

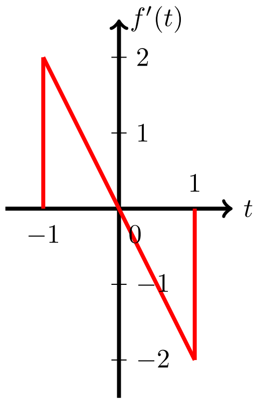
Département de génie électrique et de génie informatique

Problème 1 (10 pt)

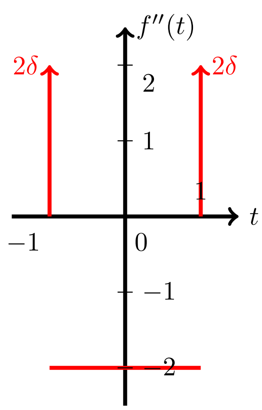
On demande de calculer la transformée de Fourier du signal $f(t) = (1 - t^2)\mathrm{Rect}(\frac{t}{2}) + 1$.



Nous allons utiliser les propriétés de dérivation. Nous allons dériver la fonction à deux reprises.



$$f'(t) = -2t\,,$$



$$f''(t) = -2\mathrm{Rect}(t/2) + 2\delta(t+1) + 2\delta(t-1)\,.$$

Avec la propriété de la transformation de Fourier de la dérivée d'une fonction, on trouve:

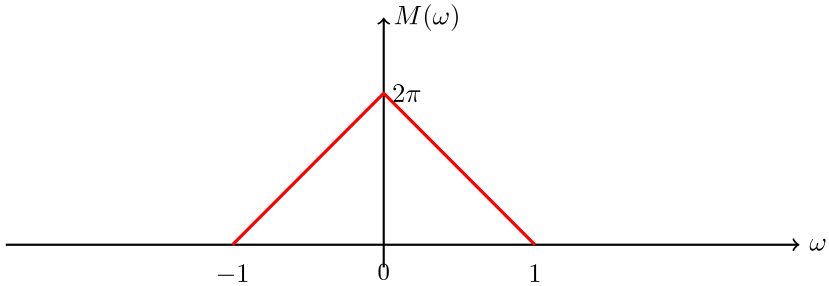
$$\begin{aligned}
(\mathrm{j}\omega)^2 F(\omega) &= \mathscr{TF}\{f^{(2)}(t)\}\,, \\
F(\omega) &= \frac{1}{(\mathrm{j}\omega)^2}\left[-4\mathrm{Sa}(\omega) + 2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega} + 2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}\right] + \mathscr{TF}(\mathrm{DC})\,, \\
&= \frac{-4\mathrm{Sa}(\omega) + 4\cos(\omega)}{-\omega^2} + 2\pi\delta(\omega)\,.
\end{aligned}$$

Problème 2 (10 pt)

a)

La transformée de Fourier de $m(t) = \mathrm{Sa}^2(\frac{t}{2})$ est :

$$M(\omega) = 2\pi \mathrm{Tri}(-\omega)\,.$$



b)

La figure 1 montre le schéma de modulation requis pour transmettre le message en bande latérale unique (BLU).

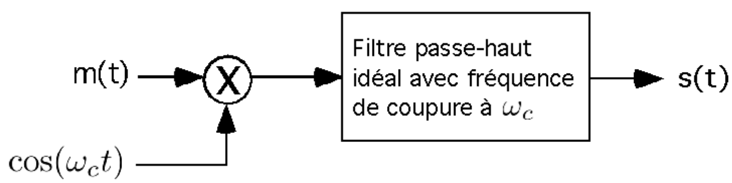
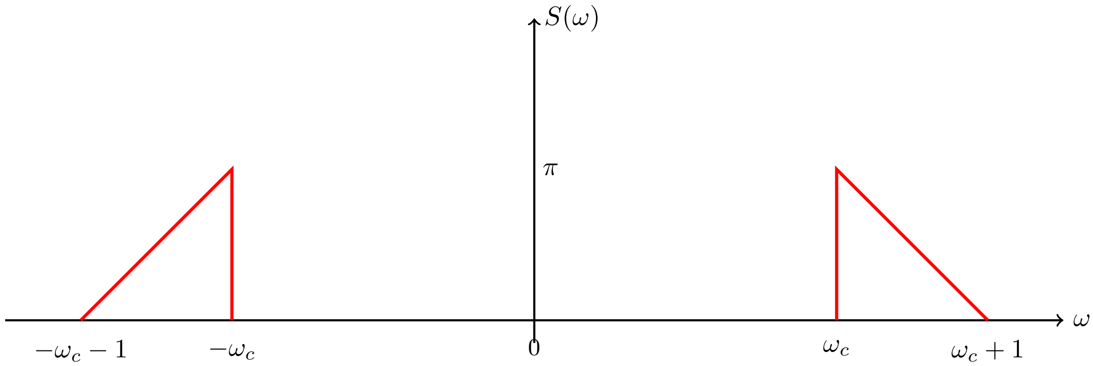


Figure 1: Schéma de modulation requis pour transmettre le message en bande latérale unique (BLU).

Le bloc multiplicatif fait la modulation du message. Ensuite, le filtre enlève les sections redondantes du message en fréquence, donc on transforme la modulation double bande sans porteuse en modulation à bande latérale unique sans porteuse.

c)

Le spectre du signal transmis $S(\omega)$ est :



d)

La figure 2 montre le schéma de démodulation requis pour retrouver le message.

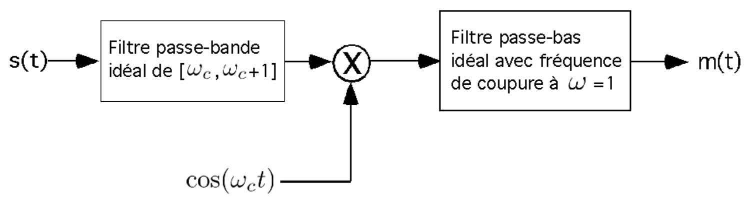


Figure 2: Schéma de démodulation requis pour retrouver le message.

Le filtre passe-bande permet d'éviter le recouvrement spectral d'autres canaux de part et d'autre du message lors du décalage fréquentiel (multiplication avec $\cos(\omega_c t)$). La multiplication avec le $\cos(\omega_c t)$ ramène le message en bande de base et à $2\omega_c$. Le filtre passe-bas sert à éliminer la copie du message à $2\omega_c$.

e)

Une erreur de fréquence ($\Delta\omega$) à la démodulation entraine un décalage fréquentiel (spectre pas à la bonne place en fréquence). S'il y avait une erreur de phase ($\Delta\phi$), il y aurait une phase non nulle dans le spectre. Cette erreur de phase introduite de la distorsion pour la modulation BLU, contrairement à la modulation DBAP qui aura subi une atténuation de signal. Si le message était de la voix et qu'il y avait une erreur de phase, on entendrait une voix de "Donald Duck".

Problème 3

a)

On commence par calculer la transformée de Fourier de la fonction restreinte à une période :

$$\begin{aligned}
f_r(t) &= A(\mathrm{rect}(\frac{t-\frac{T_0}{4}}{2a}) - \mathrm{rect}(\frac{t+\frac{T_0}{4}}{2a})) \\
F_r(\omega) &= 2aA(\mathrm{Sa}(a\omega)e^{-j\omega\frac{T_0}{4}} - \mathrm{Sa}(a\omega)e^{j\omega\frac{T_0}{4}})
\end{aligned}$$

La série de Fourier de $f(t)$ est $\frac{1}{T_0}F_r(n\omega_0)$:

$$\begin{aligned}
F(n) &= \frac{2aA}{T_0}(\mathrm{Sa}(na\omega_0)e^{-jn\omega_0\frac{T_0}{4}} - \mathrm{Sa}(na\omega_0)e^{jn\omega_0\frac{T_0}{4}}) \\
&= \frac{2aA}{T_0}(\mathrm{Sa}(na\omega_0)[e^{-jn\omega_0\frac{T_0}{4}} - e^{jn\omega_0\frac{T_0}{4}}]) \\
&= \frac{2aA}{T_0}(\mathrm{Sa}(na\omega_0)[-2j\sin n\omega_0\frac{T_0}{4}])
\end{aligned}$$

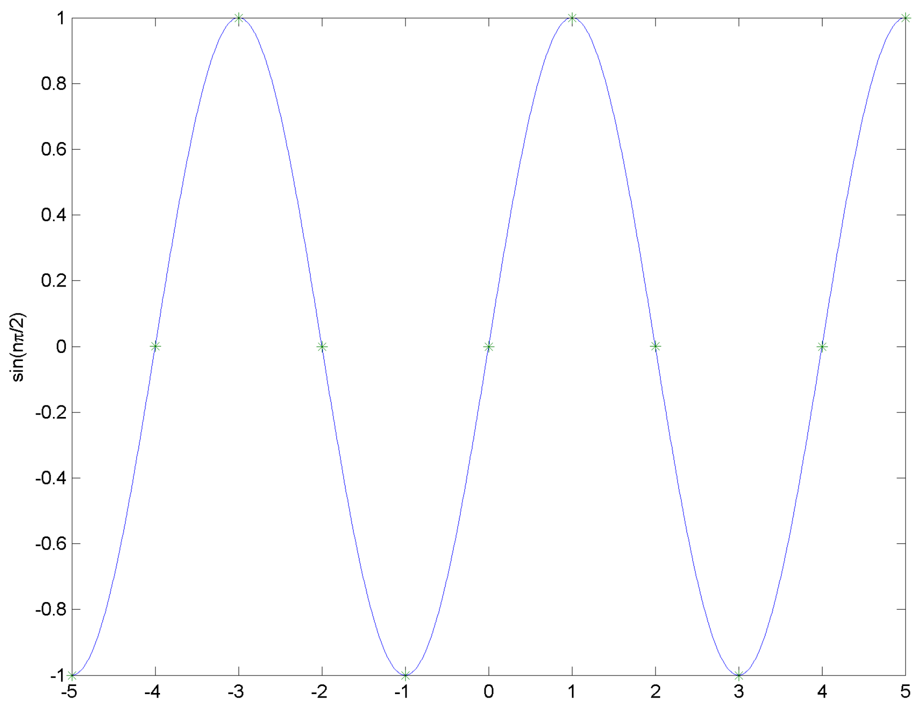
La transformée de Fourier de $f(t)$ donc :

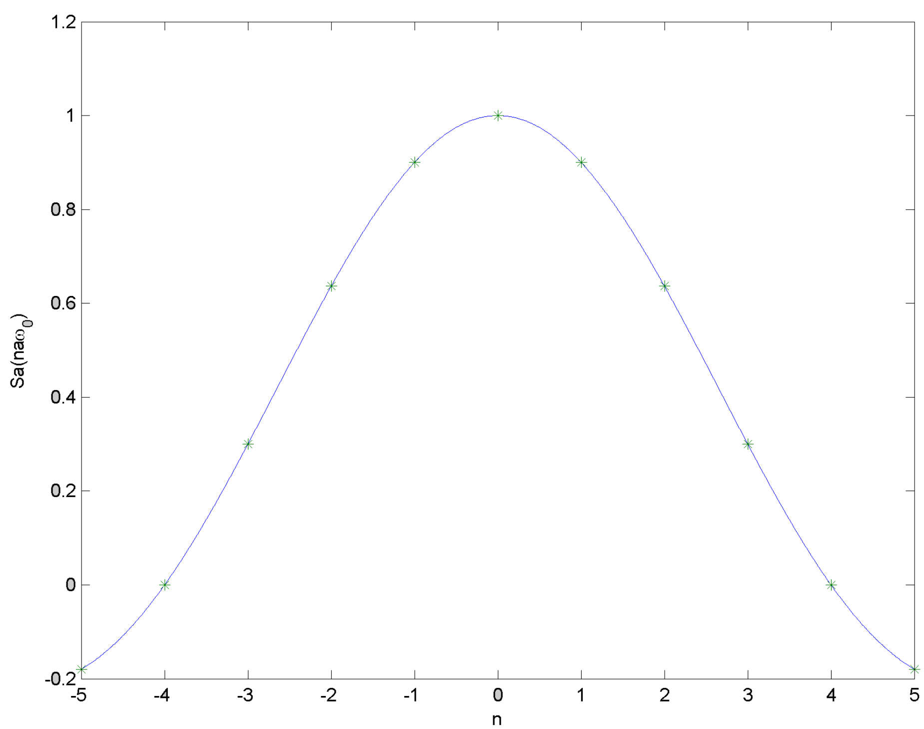
$$F(\omega) = \frac{-8j\pi aA}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{Sa}(na\omega_0)\sin(n\frac{\pi}{2})\delta(\omega - n\omega_0)$$

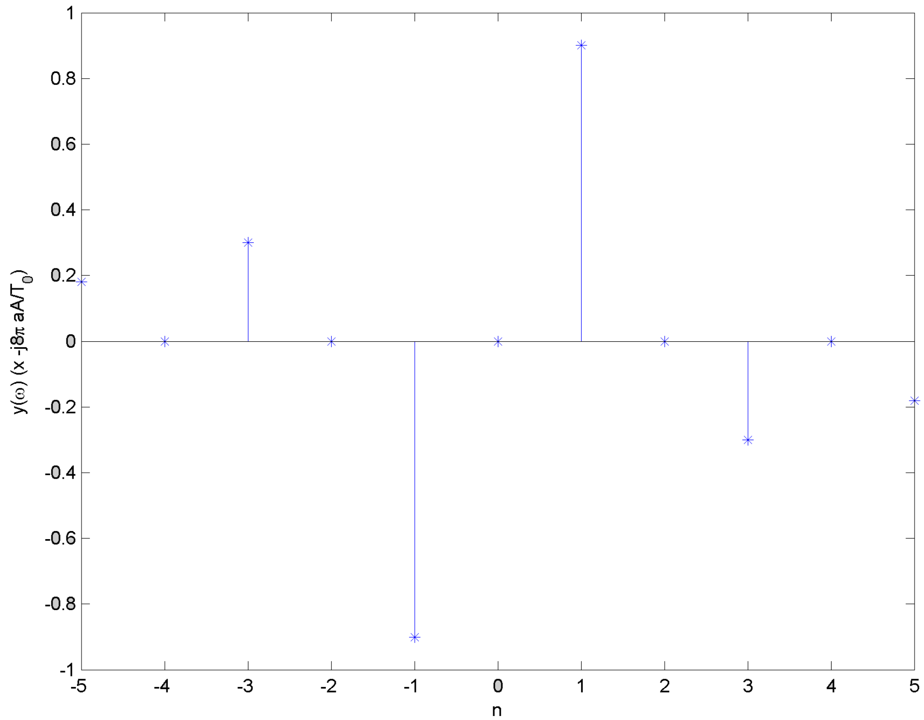
On a utilisé le fait que $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ pour simplifier le sinus dans l'expression de $F(\omega)$.

b)

Le terme en sinus est une alternance de 1 et de -1 sur les harmoniques impaires. Le sinus cardinal, le sinus ainsi que le produit des deux sont donnés dans les graphiques qui suivent pour $a = \frac{T_0}{8}$


sin(nπ/2)


Sa(naω0)
n



c)

Afin de répondre à cette question, on doit calculer la puissance dans la première harmonique et la puissance totale. On commence par la puissance dans la première harmonique :

$$P(1) = 2|F(1)|^2 = 32(\frac{aA}{T_0})^2 \mathrm{Sa}^2(a\omega_0)$$

La puissance totale est calculée facilement dans le domaine temporel, étant l'aire de deux rectangles d'amplitude A^2 et de largeur $2a$ divisée par la période : $P_{tot} = \frac{4A^2a}{T_0}$.

La fraction de la puissance conservée par le filtre est donc le ratio $P(1)/P_{tot} = 8\frac{a}{T_0}\mathrm{Sa}^2(\omega_0 a)$

d)

L'amplitude A_s est donnée par le double de $|F(1)|$ (en raison de la contribution de l'harmonique négative) :

$$A_s = \frac{8aA}{T_0}\mathrm{Sa}(a\omega_0) = \frac{8aA}{T_0}\mathrm{Sa}(\frac{2\pi a}{T_0}) = \frac{4A}{\pi} sin\frac{2\pi a}{T_0}$$

On isole a : $a = \frac{T_0}{2\pi} asin\frac{\pi A_s}{4A}$

En entrant les valeurs fournies dans la question, on obtient $a = 1.19$ ms.

e)

La fonction de transfert en puissance du filtre pour $n = 1$ et $n = 3$ sont $\frac{1}{1+\frac{1}{2}} = 2/3$ et $\frac{1}{1+\frac{3}{2}} = 2/5$ respectivement. Les puissances dans les première et troisième harmoniques sont donc :

$$
\begin{aligned}
P_f(1) &= \frac{2}{3}P(1) = \frac{64}{3}(\frac{aA}{T_0})^2 \mathrm{Sa}^2(a\omega_0) \\
P_f(1) &= \frac{2}{5}P(3) = \frac{64}{5}(\frac{aA}{T_0})^2 \mathrm{Sa}^2(3a\omega_0)
\end{aligned}
$$

Problème 4 (10 pt)

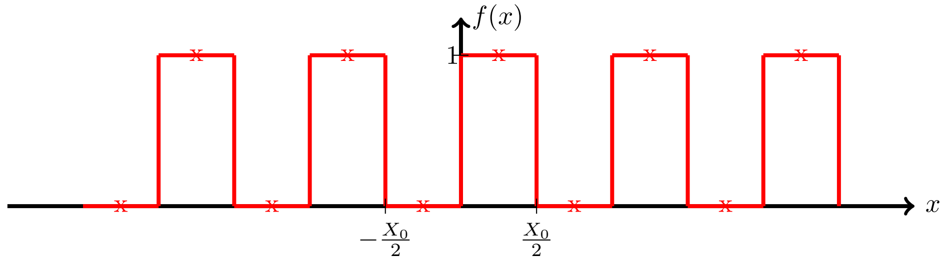
a)

La fréquence d'échantillonnage minimale σ_s qui respect le critère de Nyquist pour la première harmonique est :

$$\sigma_s = 2\sigma_0 = \frac{4\pi}{X_0}\,.$$

b)

Les points mesurés par l'échantillonnage trouvé en a) sont :



c)

La transformée de Fourier du signal continu $C(x)$ avant l'échantillonnage est :

$$F_r(\sigma) = \mathscr{TF}\left\{\mathrm{Rect}\left(\frac{x - X_0/4}{X_0/2}\right)\right\} = \frac{X_0}{2}\mathrm{Sa}\left(\frac{\sigma X_0}{4}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\sigma\frac{X_0}{4}}\,.$$

$$F_{serie}(n) = \frac{F_r(n\sigma_0)}{X_0} = \frac{\mathrm{Sa}(\frac{n\sigma_0 X_0}{4})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\sigma_0\frac{X_0}{4}}}{2}\,.$$

$$F(\sigma) = 2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}\mathrm{Sa}(\frac{n\sigma_0 X_0}{4})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\sigma_0\frac{X_0}{4}}\delta(\sigma - n\sigma_0)\,.$$

La fréquence de Nyquist se trouve à $n = 2$.

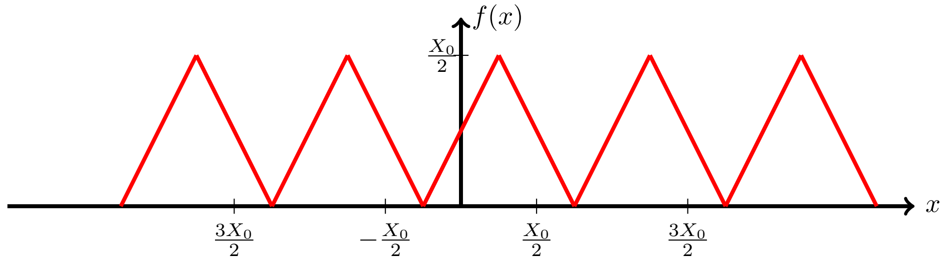
d)

Lorsque le signal est échantillonné, les harmoniques se replient sur la première harmonique (à σ_0).

e)

Pour calculer la convolution entre le signal et $h(x)$, nous allons prendre le résultat de Rect() $*$ $h(x)$ et répéter le résultat.

$$\begin{aligned}\mathrm{Rect}\left(\frac{x - X_0/4}{X_0/2}\right) * \mathrm{Rect}\left(\frac{x}{X_0/2}\right) &= \mathscr{TF}^{-1}\left\{\frac{X_0}{2}\mathrm{Sa}\left(\frac{\sigma X_0}{4}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\sigma\frac{X_0}{4}}\frac{X_0}{2}\mathrm{Sa}\left(\frac{\sigma X_0}{4}\right)\right\}\,,\\ &= \frac{X_0}{2}\mathrm{Tri}\left(\frac{t - X_0/4}{X_0/2}\right)\end{aligned}$$



f)

Lorsque la caméra est alignée avec les barres, on mesure les maximums et minimums des triangles en e). Lorsque la caméra n'est pas alignée, on mesure ailleurs sur les triangles en e).