Mat 10364, Mathématiques de l'ingénieur I : corrigé de l'examen II

no 1 (15pts) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du 1er ordre. Pour trouver la solution générale, nous appliquons la méthode vue au cours

1) L'équation homogène s'écrit
$$y' - x\,y = 0.$$
Elle est séparable et peut se récrire comme suit,
$$\frac{dy}{y} = x\,dx.$$
En intégrant les deux membres on obtient y_h, la solution générale de l'équation homogène
$$\ln|y| = \frac{1}{2}x^2 + C \Rightarrow y_h = D\,e^{\frac{1}{2}x^2}.$$

2) On cherche une solution particulière de l'équation inhomogène de la forme
$$y_p = u(x)\,e^{\frac{1}{2}x^2}.$$
y_p sera solution si
$$x\,e^{\frac{1}{2}x^2} = y_p' - x\,y_p = (u'(x)\,e^{\frac{1}{2}x^2} + u(x)\,x\,e^{\frac{1}{2}x^2}) - x\,(u(x)\,e^{\frac{1}{2}x^2}) \Rightarrow u'(x) = x.$$
On en déduit que $u(x) = \frac{1}{2}x^2$ et donc que $y_p = \frac{1}{2}x^2\,e^{\frac{1}{2}x^2}$.

3) La solution générale de l'équation inhomogène s'écrit finalement
$$y_g = y_h + y_p = D\,e^{\frac{1}{2}x^2} + \frac{1}{2}x^2\,e^{\frac{1}{2}x^2}.$$

no 2 (20pts) On procède en deux temps.

1) On trouve la solution générale de l'équation. C'est une équation du second ordre dans laquelle, x est absent.
On pose alors $z(y) = y'$ donc $y'' = \dfrac{dz}{dy}\dfrac{dy}{dx} = z\,\dfrac{dz}{dy}$. En reportant dans l'équation, on obtient une équation du premier ordre pour z donnée par
$$y^2\,z\,\frac{dz}{dy} = z^3 \Rightarrow y^2\,\frac{dz}{dy} = z^2 \Rightarrow \frac{dz}{z^2} = \frac{dy}{y^2}.$$
En intégrant les deux membres on obtient
$$-\frac{1}{z} = -\frac{1}{y} + C = \frac{y\,C - 1}{y}.$$

Puisque $z = y'$ on obtient une seconde équation du premier ordre

$$y' = \frac{y}{-y\,C+1} \Rightarrow \frac{-y\,C+1}{y}\,dy = dx.$$

En intégrant on obtient finalement

$$-y\,C + \ln|y| = x + D.$$

2) On calcule les constantes C et D à partir des conditions initiales. $y(0) = 1$ implique que

$$-C = D.$$

Pour imposer y' on revient à la seconde équation différentielle. $y'(0) = 2$ et $y(0) = 1$ implique que

$$2 = \frac{1}{-1\,C+1} \Rightarrow 1 - C = \frac{1}{2} \Rightarrow C = \frac{1}{2} \Rightarrow D = -\frac{1}{2}.$$

On conclut que la solution est donnée par la relation implicite

$$-\frac{y}{2} + \ln|y| = x - \frac{1}{2}.$$

no 3 (25pts)

a) Pour les valeurs de R et L données, l'ED homogène s'écrit,

$$I''(t) + 2\,I'(t) + \frac{1}{C}I(t) = 0.$$

Le polynôme caractéristique est alors

$$a^2 + 2\,a + \frac{1}{C} = 0.$$

Le discriminant est

$$\Delta = 4 - \frac{4}{C} = 4\left(1 - \frac{1}{C}\right).$$

Puisque $C \in [0, \frac{1}{2}]$ $\Delta < 0$ et les deux racines sont complexes et distinctes

$$a_1 = -1 + i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = -1 + i\sqrt{\frac{1}{C} - 1}, \quad a_2 = -1 - i\sqrt{\frac{1}{C} - 1}.$$

Ceci donne deux solutions indépendantes,

$$y_1 = e^{-t}\,\cos\left(\sqrt{\frac{1}{C}-1}\,t\right),\quad y_2 = e^{-t}\,\sin\left(\sqrt{\frac{1}{C}-1}\,t\right),$$

et à la solution générale

$$I_h = e^{-t}\left(A\,\cos\left(\sqrt{\frac{1}{C}-1}\,t\right) + B\,\sin\left(\sqrt{\frac{1}{C}-1}\,t\right)\right).$$

b) Avec les valeurs de R et L données et la valeur de $C = \frac{1}{10}$, l'ED s'écrit

$$I''(t) + 2\,I'(t) + 10\,I(t) = 6\,\sin 3\,t.$$

Puisque nous connaissons déjà la solution de l'équation homogène, nous cherchons une solution de l'équation inhomogène par la méthode des coefficients indéterminés.

$$I_p = C\,\cos 3\,t + D\,\sin 3\,t,$$

sera solution si

$$(-9\,C\,\cos 3\,t - 9\,D\,\sin 3\,t) + 2\,(-3\,C\,\sin 3\,t + 3\,D\,\cos 3\,t) + 10(C\,\cos 3\,t + D\,\sin 3\,t) = 37\,\sin 3\,t.$$

On regroupe les termes en sin et cos,

$$(-9\,C + 6\,D + 10\,C)\cos 3\,t + (-9\,D - 6\,C + 10\,D)\,\sin 3\,t = 37\,\sin 3\,t.$$

Cette égalité n'est possible que si

$$C + 6D = 0,\quad D - 6C = 37 \Rightarrow D = 1,\quad C = -6.$$

On en déduit que

$$I_p = -6\,\cos 3\,t + \sin 3\,t,$$

d'où il découle que

$$I_g(t) = e^{-t}\,(A\,\cos 3\,t + B\,\sin 3\,t) - 6\cos 3\,t + \sin 3\,t.$$

Pour déterminer les constantes, nous aurons besoin de la dérivée

$$I_g'(t) = -e^{-t}\,(A\,\cos 3\,t + B\,\sin 3\,t) + e^{-t}\,(-3A\,\sin 3\,t + 3B\,\cos 3\,t) + 18\,\sin 3\,t + 3\cos 3\,t.$$

La condition $I(0) = 10$ conduit à

$$10 = -A - 6 \Rightarrow A = -16.$$

La condition $I'(0) = 0$ conduit à

$$0 = -A + 3\,B + 3 \Rightarrow B = \frac{13}{3}.$$

La solution cherchée est donc

$$I(t) = e^{-t}\left(-16\,\cos 3\,t + \frac{13}{3}\,\sin 3\,t\right) - 6\,\cos 3\,t + \sin 3\,t.$$

no 4 (15pts) On applique encore une fois la méthode de la variation de la constante, c'est-à-dire que l'on cherche une solution de la forme

$$y(x) = u(x)\,x.$$

Avec ce choix,

$$y' = u'\,x + u \quad y'' = u''\,x + 2\,u'.$$

Donc, y sera solution si

$$(u''\,x + 2\,u') - \frac{1}{x}\,(u'\,x + u) + \frac{1}{x^2}x\,u(x) = 0 \Rightarrow u''\,x + u' = 0.$$

On pose $z = u'$ ce qui conduit à une équation séparable pour z

$$z'\,x + z = 0 \Rightarrow \frac{dz}{z} = -\frac{dx}{x}.$$

En intégrant, on obtient

$$\ln|z| = \ln\frac{1}{|x|} + C \Rightarrow u' = z = \frac{D}{x}.$$

Puisqu'on cherche une solution particulière on peut prendre $D = 1$ puis intégrer une seconde fois

$$u = \ln|x| \Rightarrow y = x\,\ln|x|.$$

no 5 (25pts)

a) l'équation caractéristique s'écrit

$$(a-1)(a+1)^2 = 0$$

La racine simple $a = 1$ donne une première solution $y_1 = e^x$ la racine double $a = -1$ en donne 2, $y_2 = e^{-x}$ et $y_3 = x\,e^{-x}$. Ces trois solutions sont linéairement indépendantes donc la solution générale s'écrit

$$y_h = Ae^x + Be^{-x} + C\,x\,e{-}x.$$

b) Puisque le membre de droite est un polynôme, on cherche comme solution particulière un polynôme de même degré, c'est-à-dire $y_p = A\,x + B$. Les dérivées successives sont

$$y_p' = A, y_p'' = 0, y_p''' = 0.$$

Donc y_p sera une solution si

$$(0) + (0) - (A) - (Ax + B) = x + 2,$$

donc si, $-A - B = 2$ et $-A = 1$ c'est-à-dire $A = -1 = B$. Finalement $y_p = -x - 1$.

c) La solution générale de l'équation inhomogène s'écrit

$$y_g(x) = A\,e^x + B\,e^{-x} + C\,x\,e^{-x} - x - 1.$$

Donc

$$y_g'(x) = A\,e^x - B\,e^{-x} + C(-x + 1)\,e^{-x} - 1,$$

et

$$y_g''(x) = A\,e^x + B\,e^{-x} + C(-2 + x)\,e^{-x}.$$

Les conditions initiales seront satisfaites si

$$\begin{array}{rcccl} y(0) & = & A + B - 1 & = & 0 \\ y'(0) & = & A - B + C - 1 & = & 0 \\ y''(0) & = & A + B - 2\,C & = & 1 \end{array}$$

Si on résoud, on obtient $A = 1$,$B = C = 0$ et la solution cherchée est

$$y(x) = e^x - x - 1.$$