

GEL-3006 Systèmes de communications**Examen final (automne 2020)**

Enseignant : Jean-Yves Chouinard

Durée : 2 heures 50 minutes

Remarques importantes : le matériel permis est :

- Manuel de cours : Lathi, Modern Digital and Analog Communication Systems, 5ème édition
- Notes de cours (présentations en classe).
- Deux (2) feuilles aide-mémoire recto-verso manuscrites.
- Calculatrice approuvée par la Faculté des sciences et de génie.

Les cellulaires, les tablettes numériques et les portables sont interdits.

Question 1 :**(20 points)**

On désire échantillonner le signal $s(t)$ uniformément dans le temps afin de pouvoir le transmettre dans un canal numérique.

$$s(t) = 9 \cos(5.2 \times 10^2 \pi t) + 5 \sin(4.6 \times 10^4 \pi t + 1.5\pi) + 7 \sin(2.7 \times 10^3 \pi t + 0.3\pi)$$

- Quel est l'intervalle de temps maximal entre les échantillons requis pour permettre une parfaite reconstruction au récepteur ?
- Si on utilise un quantificateur uniforme de 32 bits, quelle est la quantité de mémoire requise, en octets (Bytes), pour emmagasiner 1 heure de ce signal ?

Question 2 :**(20 points)**

Un message sinusoïdal $m(t)$ de largeur de bande $B = 50$ kHz est modulé en modulation de fréquence. Pour ce signal, le rapport $\left(\frac{m(t)}{m_{\max}}\right)^2 = \frac{3}{5}$.

Pour un indice de modulation FM, $\beta_{FM} = 3$ et un rapport signal-à-bruit normalisé à l'entrée du récepteur $(S/N)_{\text{bande de base}} = 25$ dB, on observe à la sortie du démodulateur FM un rapport signal-à-bruit $(S/N)_{\text{sortie}} = 37.095$ dB.

- Si on augmente l'indice de modulation FM à $\beta_{FM} = 8$, quel sera le rapport signal-à-bruit à la sortie $(S/N)_{\text{sortie}}$?
- Pour $\beta_{FM} = 8$, si on utilise aussi un filtre de désaccentuation au démodulateur, avec $f_1 = 12$ kHz, quel sera la valeur de $(S/N)_{\text{sortie}}$?

Question 3 : (20 points)

Considérez un système de communication utilisant la modulation FSK avec détection non-cohérente. On transmets des données avec un débit binaire de 2.4 Mbits/s dans un canal gaussien de densité spectrale de puissance de bruit $N_0 = 10^{-12}$ Watts par Hertz. Au récepteur, on observe en moyenne 400 erreurs de transmission par heure.

- Quelle est la probabilité d'erreur moyenne par bit ?
- Si la puissance moyenne reçue du signal est maintenant de 7.5×10^{-5} Watts, est-ce qu'elle sera suffisante pour maintenir une probabilité d'erreur plus petite ou égale à celle obtenue en a) ? Justifiez votre réponse.

Question 4 : (20 points)

On désire transmettre 48 signaux analogiques, $m_1(t), \dots, m_{48}(t)$ de largeur de bande de 200 kHz chacun en utilisant la modulation PCM.

- Quelle est la fréquence minimale d'échantillonnage de chacun de ces 48 signaux afin de pouvoir les récupérer correctement au récepteur ?
- Ces 48 signaux sont multiplexés en temps (multiplexage *TDM*). Si on utilise un quantificateur uniforme à $L = 2^{32}$ niveaux, quel sera le débit binaire R_b du signal PCM multiplexé (multiplexage des 48 canaux) ?
- Pour transmettre ce signal PCM multiplexé en bande passante, on utilise la modulation QAM à 64 niveaux (64QAM) ainsi qu'un filtre à cosinus surélevé avec un facteur $\alpha = 0.7$ (*roll-off factor*). Quelle est la largeur de bande du signal modulé ?

Question 5 : (20 points)

On désire représenter des signaux analogiques avec des vecteurs PCM de 16 bits. Le rapport signal-à-bruit pointe à la sortie d'un système PCM est donné par l'expression suivante (en linéaire) :

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{sortie}} = \frac{3 L^2}{1 + 4(L^2 - 1) P_e}$$

où L est le nombre de niveaux de quantification et P_e est la probabilité d'erreur dans le canal de transmission.

- Déterminez le rapport signal-à-bruit maximum à la sortie de ce système PCM en décibels (dB), en supposant que le canal n'introduit pas d'erreurs de transmission.
- Maintenant si on transmet le signal PCM en utilisant la modulation FSK avec détection non-cohérente dans un canal avec du bruit gaussien (AWGN) avec un rapport signal-à-bruit $\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{\text{dB}} = 15$ dB, quel sera le rapport signal-à-bruit pointe à la sortie du système PCM en dB ?

Question 1 :

$$s(t) = 9 \cos(5.2 \times 10^2 \pi t) + 5 \sin(4.6 \times 10^4 \pi t + 1.5\pi) + 7 \sin(2.7 \times 10^3 \pi t + 0.3\pi)$$

$$\Rightarrow f_1 = 2.6 \times 10^2 [\text{Hz}], f_2 = 2.3 \times 10^4 [\text{Hz}], f_3 = 1.35 \times 10^3 [\text{Hz}]$$

a) Intervalle T_S entre les échantillons

$$T_S = \frac{1}{f_S} \quad \text{où } f_S = 2 \times \max(f_1, f_2, f_3)$$

$$f_S = 4.6 \times 10^4 [\text{éch.}/\text{s}]$$

$$T_S = 2.174 \times 10^{-5} [\text{s}]$$

b) $y = 32 \text{ bits/éch.} (\# \text{éch.}/\text{heure})$

$$\text{Néch.} = f_S [\text{éch.}/\text{s}] \times 3600 [\text{s/h}]$$

$$\text{Néch.} = 1.656 \times 10^8 [\text{éch.}/\text{h}]$$

$$N_{\text{bits}} = y \text{ bits/éch.} \times \text{Néch.} [\text{éch.}/\text{h}]$$

$$N_{\text{bits}} = 5.2992 \times 10^9 [\text{bits/h}]$$

$$\text{Noctets} = N_{\text{bits}} \times \frac{1}{8} (\text{octet/bits})$$

$$\text{Noctets} = 6.624 \times 10^8 [\text{octets/h}]$$

Question 2 :

$$B = 50 \text{ kHz}$$

$$\frac{\left(\frac{m(t)}{m_{\max}}\right)^2}{\left(\frac{m(t)}{m_{\max}}\right)^2} = \frac{3}{5}$$

pour $\beta_{FM} = 3 \Rightarrow (S/N)_{\text{bande de base}} = 25 \text{ dB}$

$$(S/N)_{\text{sortie}} = 37.095 \text{ dB}$$

Pour $\beta_{FM} = 8$

$$(S/N)_{\text{sortie}} = 3 \beta_{FM}^2 \left(\frac{m(t)}{m_{\max}} \right)^2 (S/N)_{\text{bande de base}}$$

$$= 3 \times 8^2 \times \frac{3}{5} (S/N)_{\text{bande de base}}$$

$$(S/N)_{\text{sortie}} = 3 \times 8^2 \times \frac{3}{5} \times \underbrace{10}_{\frac{25}{10}} = 5122.89$$

$$= 316.228$$

$$(S/N)_{\text{sortie}} \text{ dB} = 10 \log_{10}(5122.89) = 37.095 \text{ [dB]}$$

② Pour $\beta_{FM} = 8$

$$(S/N)_{\text{sortie}} = 3 \times 8^2 \times \frac{3}{5} \times 316.228$$

$$(S/N)_{\text{sortie}} = 36429.439 \text{ (clairement)}$$

$$(S/N)_{\text{sortie}} \text{ dB} = 45.615 \text{ [dB]}$$

b) Pour $\beta_{FM} = 8$ et filtre de préaccentuation avec $f_1 = 12 \text{ kHz}$

$$\frac{(S/N)_{\text{sortie}}}{(S/N)_{\text{bande de base}}} = \beta_{FM}^2 \left(\frac{B}{f_1} \right)^2 \left(\frac{\text{m}(t)}{\text{max}} \right)^2$$
$$= 8^2 \times \left(\frac{50000}{12000} \right)^2 \times \frac{3}{5} \times 316.228$$

$$(S/N)_{\text{sortie}} = 210818.51$$

$$\boxed{(S/N)_{\text{sortie}} = 53.239 \text{ [dB]}}$$

Question 3.

Système FSK avec détection non-cohérente

$$R_b = 2.4 \text{ mbits/s}$$

$$N_b (\text{erreurs/hour}) = 400 (\text{erreurs/hour})$$

Densité spectrale de puissance du bruit gaussien blanc additive (AWGN)

$$N_0 = 10^{-12} [\text{W/Hz}]$$

a) Probabilité d'erreur moyenne par bit

$$P_{err} = \frac{N_{err/\text{heure}}}{N_{bits/\text{heure}}} = \frac{400}{R_b \times 3600} = \frac{400}{2.4 \times 10^6 \times 3.6 \times 10^3}$$

$$P_{err} = \frac{4 \times 10^{-2}}{2.4 \times 3.6 \times 10^9}$$

$$P_{err} = 4.630 \times 10^{-8}$$

b) Puissance moyenne du signal

$$P_s = 7.5 \times 10^{-5} [\text{W}]$$

$$\Rightarrow E_b = P_s \times T_b = 7.5 \times 10^{-5} \times \frac{1}{2.4 \times 10^6} = 7.5 \times 10^{-5} \times 4.167 \times 10^{-4}$$

$$E_b = 3.125 \times 10^{-11} [\text{Joule}]$$

$$\Rightarrow E_b/N_0 = \frac{3.125 \times 10^{-11}}{10^{-12}} = 31.250$$

(2)

⇒ Probabilité d'erreur en FSK non-cohérente

$$P_e = \frac{1}{2} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{E_b}{N_0}\right)$$

$$P_e = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot 31.260\right)$$

$$P_e = \frac{1}{2} \exp(-15.625)$$

$$\boxed{P_e = 8.187 \times 10^{-8}}$$

Or

$$P_e = 8.187 \times 10^{-8} > 4.630 \times 10^{-8} = P_{err}$$

$$\Rightarrow La puissance P_s = 4.5 \times 10^{-5} [W]$$

n'est pas suffisante pour maintenir une probabilité d'erreur plus petite que celle obtenue en a).

(1)

QUESTION 4

48 canaux analogiques $m_1(t)$ à $m_{48}(t)$

largeur de bande $B = 200 \text{ kHz}$

a) Fréquences d'échantillonnage du chaque signal

$$f_s \geq 2B = 400 \text{ kach./s}$$

b) Multiplixage temporel avec

$$L = 2^{32} \quad \text{NIVEAUX} = 4294967296 \text{ NIVEAUX}$$

$$R_b = f_s \times N_{\text{CANAUX}} \times N_{\text{bits}}$$

$$R_b = 4 \times 10^5 \times 48 \times 32$$

$$R_b = 6.144 \times 10^8 \text{ [bits/s]}$$

c) Largeur de bande de transmission 64-QAM

$$\text{avec } \alpha = 0.7$$

$$M = 64$$

$$B_T = \frac{R_b (1+\alpha)}{\log_2 M} \left(\frac{1}{\log_2 64} \right)$$

$$B_T = 6.144 \times 10^8 (1+0.7) \frac{1}{6}$$

$$B_T = 1.741 \times 10^8 \text{ [Hz]} \text{ ou}$$

$$B_T = 174.1 \text{ MHz}$$

Question 5

$$\mu = 16 \text{ bits}$$

$$\text{a) } (\text{S}/\text{N})_{\text{sortie}} = 3 L^2$$

où $L = 2^{\frac{\mu}{2}} = 2^{16} = 65536 \text{ niveau}$

$$(\text{S}/\text{N})_{\text{sortie}} = 3 (2^{16})^2 = 3 \cdot 2^{32}$$

$$(\text{S}/\text{N})_{\text{sortie}} = 1.28849 \times 10^{10} \text{ (linéaire)}$$

$$(\text{S}/\text{N})_{\text{sortie}}_{\text{dB}} = 10 \log_{10} (\text{S}/\text{N})_{\text{sortie}}$$

$$(\text{S}/\text{N})_{\text{sortie}}_{\text{dB}} = 101.101 \text{ [dB]}$$

b) modulation FSK avec détection NON-cohérente

$$(\text{E}_b/\text{N}_0)_{\text{dB}} = 15 \text{ dB}$$

$$(\text{E}_b/\text{N}_0) = 10^{(\text{E}_b/\text{N}_0)_{\text{dB}}/10} = 10^{1.5}$$

$$(\text{E}_b/\text{N}_0) = 31.6228 \text{ (linéaire)}$$

Probabilité d'erreur FSK non-cohérente

$$P_e(\text{FSK, Non-coh}) = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}(\text{E}_b/\text{N}_0)}$$

$$P_e(\text{FSK, Non-coh}) = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}(31.6228)}$$

$$P_e(\text{FSK, Non-coh}) = 6.795 \times 10^{-8}$$

(2)

$$(\text{S}/\text{N})_{\text{sortie}} = \frac{3L^2}{1 + 4(L^2 - 1)P_e}$$

$$(\text{S}/\text{N})_{\text{sortie}} = \frac{3 \cdot (2^{16})^2}{1 + 4((2^{16})^2 - 1) 6.495 \times 10^{-8}}$$

$$(\text{S}/\text{N})_{\text{sortie}} = 1.10285 \times 10^4 \text{ (linéaire)}$$

$$(\text{S}/\text{N})_{\text{sortie}} = 10 \log_{10} (\text{S}/\text{N})_{\text{sortie}}$$

$$(\text{S}/\text{N})_{\text{dB}} = 40,425 \text{ dB}$$