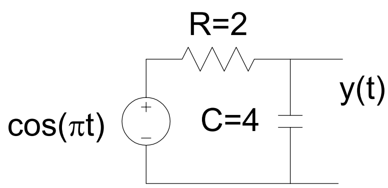
2003 Mini-Test 2 : Solutions

Problème 1 (1 point sur 5)



$$\Rightarrow \quad y(t) = \frac{\cos(\pi t)}{\sqrt{64\pi^2 + 1}}$$

a)

Pour trouver la réponse en fréquence, on remplace le condensateur par une impédance complexe $1/j\omega C$. Le rapport des tensions dans ce circuit est donné par un simple diviseur de tension, donc

$$H(j\omega) = \frac{1/j\omega C}{R + 1/j\omega C} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{1 + j\omega 8}$$

La réponse à un cosinus est la partie réelle de la réponse à un phaseur. La réponse à un phaseur est la réponse fréquentielle évaluée à la fréquence du phaseur, multiplié par le phaseur.

$$\text{réponse à } e^{j\pi t} = H(\pi)e^{j\pi t} = \frac{1}{1+8j\pi}e^{j\pi t} = \left|\frac{1}{1+8\pi j}\right| e^{jArg\frac{1}{1+j8\pi}} e^{j\pi t}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(8\pi)^2 + 1^2}} e^{jArg\frac{1-8\pi j}{64\pi^2+1^2}} e^{jt}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{64\pi^2+1}} e^{j\tan^{-1}\frac{-8\pi}{1}} e^{j\pi t} = \frac{1}{\sqrt{64\pi^2+1}} e^{-j\tan^{-1}8\pi} e^{j\pi t}$$

La partie réelle est

$$\frac{\cos\left(\pi t - \tan^{-1} 8\pi\right)}{\sqrt{64\pi^2+1}}$$

b) La fonction à l'entrée est limité en bande à $-2 \le \omega \le 2$, donc la sortie est aussi limité en bande à $-2 \le \omega \le 2$. Donc la sortie pour ω=9 est zéro.

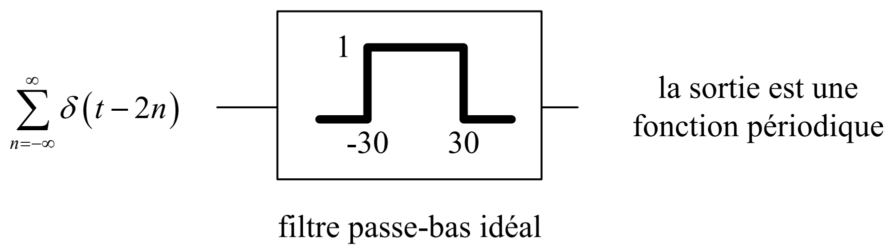
Problème 2 (1 point sur 5)

a) $f(t)\cdot g(t) \Leftrightarrow \dfrac{1}{2\pi}\{F(\omega)*G(\omega)\}$ et $\{f(t)*g(t)\} \Leftrightarrow F(\omega)\cdot G(\omega)$

La multiplication en temps correspond à la convolution en fréquence.

Donc a) est **Vrai**.

b)



La fonction à l'entrée est une fonction périodique (peigne de dirac), donc la sortie est aussi une fonction périodique.

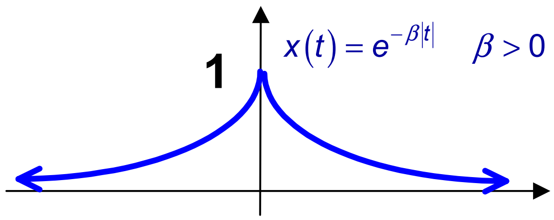
Donc b) est **Vrai.**

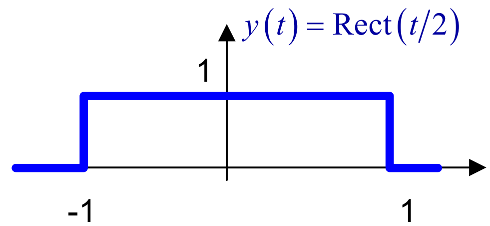
c) $x(t)*\delta(t-t_0) = x(t-t_0)$

La convolution d'une fonction avec une fonction delta déplacé en temps est la fonction déplacée en temps.

Donc c) est **Vrai**

Problème 3 (3 points sur 5)

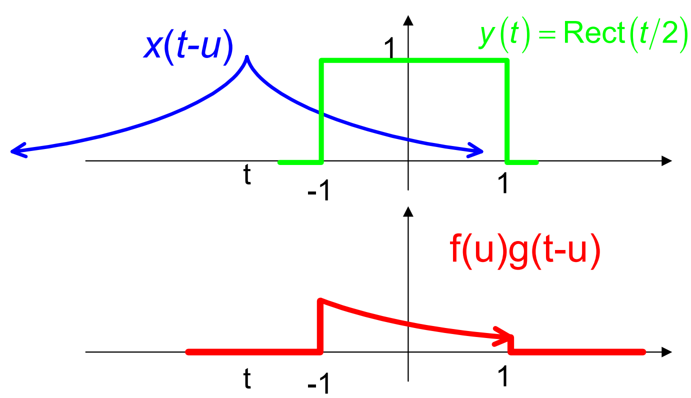




Prenons l'exponentielle pour faire le déplacement. L'équation de *x*(*t*-*u*) est

$$x(t-u) = e^{-\beta|t-u|} \quad = \begin{cases} e^{-\beta(u-t)} & t \le u \\ e^{-\beta(t-u)} & t > u \end{cases}$$

Il y a trois régions de définition pour la convolution et il y a toujours de recouvrement entre les deux fonctions étant donné que l'exponentielle va de moins infini à infini. Pour *t* < -1, nous avons cette situation :



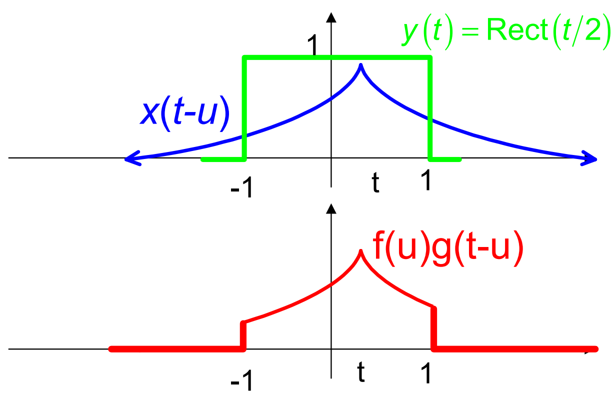
Donc la convolution dans cette région est

$$f * g = \int_{-1}^{1} e^{-\beta|t-u|} du \qquad t < -1$$

Pour évaluer l'intégrale il faut remplacer la valeur absolue par soit *t-u* ou *u-t*. Nous savons que *t* < -1; dans l'intervalle d'intégration, -1 < *u* < 1; donc *u*≥*t* et la valeur absolue de la différence est *u-t.*

$$f*g=\int_{-1}^{1}e^{-\beta(u-t)}du \qquad t<-1$$
$$=e^{\beta t}\int_{-1}^{1}e^{-\beta u}du=-e^{\beta t}\left.\frac{e^{-\beta u}}{\beta}\right|_{-1}^{1}$$
$$=\frac{e^{\beta t}}{\beta}\left(e^{\beta}-e^{-\beta}\right)=\frac{2e^{\beta t}}{\beta}\sinh\beta$$

Quand -1 < *t* < 1 nous avons le graphique



Pour évaluer l'intégrale, il faut encore remplacer la valeur absolue par soit *t-u* ou *u-t*. Nous savons que pour -1 < *u* < *t* nous avons une exponentielle, et une autre pour *t* < *u* < 1. Donc, il faut séparer l'intégrale en deux pour être capable d'enlever la valeur absolue.

$$f*g=\int_{-1}^{1}e^{-\beta|t-u|}du \qquad -1<t<1$$
$$=\int_{-1}^{t}e^{-\beta|t-u|}du+\int_{t}^{1}e^{-\beta|t-u|}du$$

Pour chaque intégrale nous pouvons maintenant enlever la valeur absolue. Dans la première intégrale -1 < *u* < *t* et la valeur absolue est *t-u*; pour la deuxième, *t* < *u* < 1; donc *u*>*t* et la valeur absolue de la différence est *u-t.*

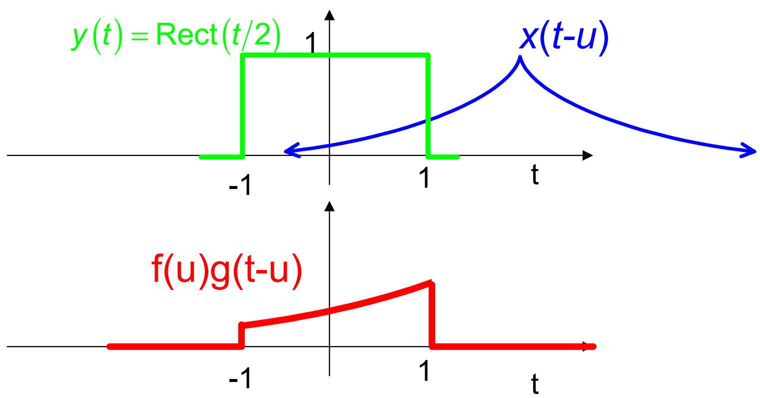
$$f*g=\int_{-1}^{t}e^{-\beta|t-u|}du+\int_{t}^{1}e^{-\beta|t-u|}du \qquad -1<t<1$$
$$=\int_{-1}^{t}e^{\beta(u-t)}du+\int_{t}^{1}e^{\beta(t-u)}du$$
$$=e^{-\beta t}\int_{-1}^{t}e^{\beta u}du+e^{\beta t}\int_{t}^{1}e^{-\beta u}du$$

$$f * g = e^{-\beta t} \left.\frac{e^{\beta u}}{\beta}\right|_{-1}^{t} - e^{\beta t} \left.\frac{e^{-\beta u}}{\beta}\right|_{t}^{1} = \frac{1}{\beta}\left[e^{-\beta t}e^{\beta t} - e^{-\beta t}e^{-\beta} - e^{\beta t}e^{-\beta} + e^{\beta t}e^{-\beta t}\right]$$

$$= \frac{1}{\beta}\left[1 - e^{-\beta t}e^{-\beta} - e^{\beta t}e^{-\beta} + 1\right] = \frac{1}{\beta}\left[2 - e^{-\beta}\left(e^{-\beta t} + e^{\beta t}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\beta}\left[2 - e^{-\beta} 2\cosh \beta t\right] = \frac{2}{\beta}\left[1 - e^{-\beta}\cosh \beta t\right]$$

Pour la dernière région de définition, nous avons



L'intégrale de convolution donc couvre l'intervalle de zéro vers *t*:

$$f * g = \int_{-1}^{1} e^{-\beta(t-u)} du \qquad t > 1$$

$$= e^{-\beta t}\int_{-1}^{1} e^{\beta u} du = e^{-\beta t} \left.\frac{e^{\beta u}}{\beta}\right|_{-1}^{1}$$

$$= \frac{e^{-\beta t}}{\beta}\left(e^{\beta} - e^{-\beta}\right) = \frac{2e^{-\beta t}}{\beta}\sinh \beta$$

La convolution est donc

$$\boxed{f*g=\begin{cases}\dfrac{2e^{\beta t}}{\beta}\sinh\beta & t<-1\\[2mm] \dfrac{2}{\beta}\left[1-e^{-\beta}\cosh\beta t\right] & -1<t<1\\[2mm] \dfrac{2e^{-\beta t}}{\beta}\sinh\beta & t>1\end{cases}}$$