Problème 1

Soit la fonction:

$$f(t) = 4 + 2\sin 4t - 5\cos 2t$$

1. Donnez les coefficients de la série de Fourier

En décomposant *f*(*t*) en exponentielles complexes, on peut obtenir les coefficients de sa série de Fourier par inspection :

$$f(t) = 4 + \frac{2}{2j}[\exp(j4t) - \exp(-j4t)] - \frac{5}{2}[\exp(j2t) + \exp(-j2t)]$$

Les coefficients de la série de Fourier de *f*(*t*) sont donc : $F(0) = 4$, $F(2) = -j$, $F(-2) = j$, $F(1) = F(-1) = -2.5$

2. Donnez la puissance dans la deuxième, troisième, et quatrième harmonique (séparément)

On commence par trouver la fréquence fondamentale $\omega_0 = 2$.

$$f(t) = 4 + \frac{2}{2j}[\exp(j2\omega_0 t) - \exp(-j2\omega_0 t)] - \frac{5}{2}[\exp(j\omega_0 t) + \exp(-j\omega_0 t)]$$

On regardant à la série de Fourier, on trouve trois harmoniques de fréquence 0, ω_0 et $2\omega_0$. Il n'y a pas troisième et quatrième harmonique; donc la puissance de troisième et quatrième harmonique est zéro. La puissance de deuxième harmonique avec fréquence $2\omega_0$ est $|F(2)|^2 + |F(-2)|^2 = 2$

Problème 2

a) Pour une fonction discontinue à $t=t_0$, la série de Fourier converge nécessairement à $f'(t_0)$

Faux.

La série de Fourier diverge à $t=t_0$ $(f^+(t_0)+f^-(t_0))/2$ si $f(t_0)$ est discontinue à $t=t_0$

b) Si $f(t)$ est réelle et impaire, $F(0)=0$.

Vrai, $F(0) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt$, donc si *f*(*t*) est réelle et impaire l'intégral est zéro; $F(0) = 0$

c) Arg *F(n)* est imaginaire.

Faux, par exemple pour $f(t) = e^{j\omega t + j\pi/2}$, $Arg(F(1)) = \pi/2$

d) Si $f(t)$ est réelle et paire, sa série de Fourier est purement imaginaire

Faux, $F(n) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\omega_0 t)dt + j\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(n\omega_0 t)dt$. Pour une *f*(*t*) réelle et paire, le deuxième terme avec fonction sinusoïde est zéro. Donc F(n) est réelle.

e) Si $f(t)$ est réelle et paire, la série de Fourier du dérivé $f'(t)$ sera purement imaginaire.

Vrai, $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} F(n)e^{jn\omega_0 t}$. pour dérivé de *f*(*t*), la série de Fourier est donné par $f'(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} jn\omega_0 F(n)e^{jn\omega_0 t}$ et F(n) est réelle parc que *f*(*t*) est réelle et paire. Donc les coefficients de sa série de Fourier $jn\omega_0 F(n)$ sont purement imaginaires.

Problème 3

La période de *f*(*t*) est $T = 2\pi$, donc $\omega_0 = 2\pi / T = 1$.

$$F(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-jnt}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-d} e^{-jnt}dt + \frac{1}{2\pi}\int_{d}^{\pi} e^{-jnt}dt = -\frac{1}{2\pi nj}\left(e^{jnd} - e^{jn\pi}\right) - \frac{1}{2\pi nj}\left(e^{-jn\pi} - e^{-jnd}\right) = \frac{1}{2\pi nj}\left(e^{-jnd} - e^{jnd}\right) + \frac{1}{2\pi nj}\left(e^{jn\pi} - e^{-jn\pi}\right) = \frac{1}{n\pi}(\sin(n\pi) - \sin(nd))$$

Cette fonction n'étant pas définie pour n = 0. Pour calculer F(0), on peut intégrer sur *f*(*t*) dans sa période 2π. Donc on peut écrire :

$$F(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = 2\frac{1}{2\pi}(\pi - d) = \frac{\pi - d}{\pi}$$