Mardi 3 novembre 2015; Durée: 13h30 à 15h20
Aucune documentation permise; aucune calculatrice permise

Problème 1 (20 points sur 100)

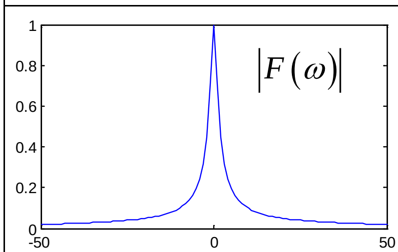
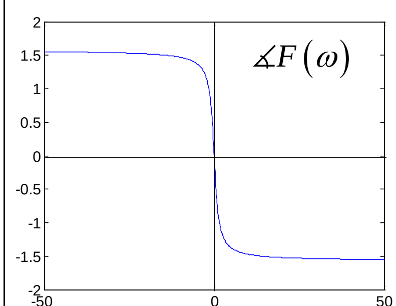
A. (10 points) Quelle est la transformée de Fourier de la fonction $f(t)=\dfrac{1}{1+t^2}$.

B. (5 points) Quelle est l'énergie entre $-1<\omega<1$ pour la fonction $f(t)=\dfrac{1}{1+t^2}$.

C. (5 points) Quelle est l'énergie à DC pour la fonction $f(t)=\dfrac{1}{1+t^2}$.

Problème 2 (20 points sur 100)

Voici le spectre d'amplitude, le spectre de phase de $f(t)=e^{-t}U(t)$,

<table>
<tr><th>spectre d'amplitude</th><th>spectre de la phase</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

A. (10 points) Trouvez la transformée de Fourier de $\cos(25t)\,f(t)$.

B. (10 points) Tracez le spectre d'amplitude et le spectre de phase de $\cos(25t)\,f(t)$.

Problème 3 (30 points sur 100)

En sachant que $\omega_0 T_0 = 2\pi$

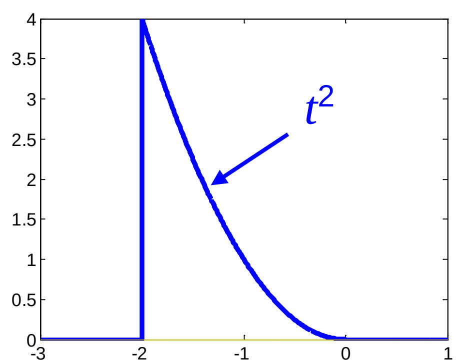
A. (10 points) Trouvez la transformée de Fourier de la fonction $f(t) = \cos(\omega_0 t)\delta_{T_0}(t)$.

B. (20 points) Trouvez la transformée de Fourier de la fonction $g(t) = \cos(\omega_0 t)\delta_{T_0}(t - T_0/8)$.

	$x=-\pi/4$	$x=0$	$x=\pi/4$	$x=\pi/2$	$x=3\pi/4$	$x=\pi$	$x=5\pi/4$	$x=3\pi/2$
$\cos x$	$1/\sqrt{2}$	1	$1/\sqrt{2}$	0	$-1/\sqrt{2}$	-1	$-1/\sqrt{2}$	0

Problème 4 (30 points sur 100)

Trouvez la transformée de Fourier de la fonction suivante.



$$g(t) = t^2 \operatorname{Rect}\left(\frac{t+1}{2}\right) = \begin{cases} t^2 & -2 < t < 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Examen Partiel

Fonction	Transformée de Fourier
$f(t)$	$F(\omega)$
$F(t)$	$2\pi f(-\omega)$
$f(t+a)$	$e^{ja\omega}F(\omega)$
$f(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$
$e^{jbt}f(t)$	$F(\omega-b)$
$t^n f(t)$	$(j)^n \frac{d^n}{d\omega^n}F(\omega)$
$\frac{d^n}{dt^n}f(t)$	$(j\omega)^n F(\omega)$
$\mathrm{Rect}(t/\tau)$ (1)	$\tau\,\mathrm{Sa}(\omega\tau/2)$
$\mathrm{Tri}(t/\tau)$ (2)	$\tau\,\mathrm{Sa}^2(\omega\tau/2)$
$\delta(t)$	1
1	$2\pi\delta(\omega)$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$
$U(t)$	$1/j\omega+\pi\delta(\omega)$
$\mathrm{Sgn}(t)$	$2/j\omega$
$\delta_{T_0}(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT_0)$	$\omega_0\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-n\omega_0)$
$e^{-\beta t}\,U(t)$	$\frac{1}{\beta+j\omega}$
$e^{-\beta\lvert t\rvert}$	$\frac{2\beta}{\beta^2+\omega^2}$

---

1 $\mathrm{Rect}\left(\frac{t-t_0}{\tau}\right)$ rectangle de hauteur un, centré sur $t=t_0$, et de longueur τ.

2 $\mathrm{Tri}\left(\frac{t-t_0}{\tau}\right)$ triangle de hauteur un, centré sur $t=t_0$, avec un base de longueur 2τ.

Examen Partiel

Formules

$$\int e^{ax} \quad dx = \frac{1}{a} e^{ax}$$

$$\int x e^{ax} \quad dx = \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} \right) e^{ax}$$

$$\int x^2 e^{ax} \quad dx = \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right) e^{ax}$$

$$\int e^{bx} \sin ax \quad dx = \frac{1}{a^2 + b^2} e^{bx} \left(b \sin ax - a \cos ax \right)$$

$$\int e^{bx} \cos ax \quad dx = \frac{1}{a^2 + b^2} e^{bx} \left(a \sin ax + b \cos ax \right)$$

$$\int x \cos ax \quad dx = \frac{1}{a^2} \cos ax + \frac{x}{a} \sin ax$$

$$\cos\theta = \sin\left(\pi/2 - \theta\right)$$

$$e^{jn\pi} = (-1)^n$$

$$x_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(x - n x_0\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi n x / x_0}$$

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$

aux points de discontinuité :

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x$$

$$f'(a) = \left[\lim_{t \to a^+} f(t) - \lim_{t \to a^-} f(t) \right] \delta(t - a)$$