Université Laval
Professeur: Christophe Deutsch

Département de Génie Électrique
et de Génie Informatique

GEL19962: Analyse des signaux
Mini-test 2 - Solutions

Problème 1 (1 point sur 5)

Donner les transformées de Fourier des fonctions suivantes en sachant que:

$$f(t) \Leftrightarrow F(\omega).$$

Aucun crédit partiel.

a- $F(t)$ $\qquad$ $2\pi f(-\omega)$

b- $f(t+a)$ $\qquad$ $e^{ja\omega}F(\omega)$

GEL19962: Analyse des signaux

Mini-test 2 - Solutions

Problème 2 (1 point sur 5)

On suppose que $f(t)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(\omega)-\omega\cos(\omega)}{\omega^3}e^{j\omega t}d\omega$

a- VRAI.

L'équation de synthèse étant: $f(t)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$, la transformée de Fourier de $f(t)$ est $F(\omega)=\dfrac{\sin(\omega)-\omega\cos(\omega)}{\omega^3}$.

b- VRAI.

Pour savoir si la fonction est réelle ou non il faut vérifier si $F^*(\omega)=F(-\omega)$.
Comme ici $F(\omega)$ est réelle nous aurons $F^*(\omega)=F(\omega)$.
De plus $F(-\omega)=\dfrac{\sin(-\omega)-(-\omega)\cos(-\omega)}{-\omega^3}=\dfrac{\sin(\omega)-\omega\cos(\omega)}{\omega^3}$.
Par conséquent $F^*(\omega)=F(-\omega)$, et ainsi $f(t)$ est réelle.

c- FAUX.

Comme $F(\omega)$ est réelle, la partie impaire de $f(t)$ a une transformée de Fourier nulle. Par conséquent la partie impaire de $f(t)$ est nulle et ainsi la fonction $f(t)$ est paire.

GEL19962: Analyse des signaux
Mini-test 2 - Solutions

Problème 3 (3 points sur 5)

a) *1 point*

Calculer la transformée de Fourier de la fonction $f(t)=\begin{cases} t & \text{si } -1\le t\le 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-1}^{1} te^{-j\omega t}dt$$

$$=\left.\frac{te^{-j\omega t}}{-j\omega}\right|_{-1}^{1}+\frac{1}{j\omega}\int_{-1}^{1} e^{-j\omega t}dt$$

$$=j\frac{2\cos(\omega)}{\omega}+\left.\frac{e^{-j\omega t}}{\omega^2}\right|_{-1}^{1}$$

$$=2j\frac{-\sin(\omega)+\omega\cos(\omega)}{\omega^2}$$

Nous aurons donc: $\boxed{F(\omega)=2j\frac{-\sin(\omega)+\omega\cos(\omega)}{\omega^2}}$

b) *1 point*

En déduire la transformée de Fourier de la fonction $g(t)=\sin(\omega_0 t)f(t)$.

En décomposant le sinus en une somme d'exponentielle nous aurons:

$$g(t)=\frac{1}{2j}\left(e^{j\omega_0 t}-e^{-j\omega_0 t}\right)f(t)$$

En utilisant le fait que $e^{jbt}f(t)\Leftrightarrow F(\omega-b)$, nous en déduisons:

$$G(\omega)=\frac{1}{2j}\left(F(\omega-\omega_0)-F(\omega+\omega_0)\right)$$

$$=\left\{\frac{-\sin(\omega-\omega_0)+(\omega-\omega_0)\cos(\omega-\omega_0)}{(\omega-\omega_0)^2}-\frac{-\sin(\omega+\omega_0)+(\omega+\omega_0)\cos(\omega+\omega_0)}{(\omega+\omega_0)^2}\right\}$$

GEL19962: Analyse des signaux

Mini-test 2 - Solutions

c) ***1 point***

Quelle est la vitesse de convergence asymptotique de la transformée de Fourier de la fonction $f(t)$?

On peut procéder de deux manières:

- soit on voit directement que la fonction $f(t)$ est discontinue et on en déduit que la convergence asymptotique se fait en $1/\omega$.
- soit on cherche à majorer le module de la transformée de Fourier:

$$\begin{aligned}|F(\omega)| &= |2j|\frac{|-\sin(\omega)+\omega\cos(\omega)|}{\omega^2} \leq 2\frac{|\sin(\omega)|+|\omega\cos(\omega)|}{\omega^2} \\ &\leq 2\frac{1+|\omega|}{\omega^2} \\ &\leq 2\frac{2|\omega|}{\omega^2} = \frac{4}{|\omega|} \quad \text{pour } |\omega| \geq 1\end{aligned}$$

On retrouve donc bien que la convergence asymptotique se fait en $1/\omega$.