GEL19962 : Analyse des signaux

Examen 2 A2005 : Solutions

Département de génie électrique et de génie informatique

Question 1 (15 pts)

Partie A (7 pts)

On demande de calculer la réponse impulsionnelle $h(t)$ du circuit RLC présenté à la figure 1-A. On donne les valeurs numériques suivantes : $R = 2$, $L = 3$ et $C = 4$. On peut d'abord identifier les impédances du circuit, comme à la figure 1-B. On trouve alors que :

$$\frac{X - Y}{R + \mathrm{j}\omega L} = \mathrm{j}\omega C Y \,, \qquad X - Y = \mathrm{j}\omega C(R + \mathrm{j}\omega L)Y \,, \tag{1}$$

$$X = (1 + \mathrm{j}\omega RC + (\mathrm{j}\omega)^2 LC)Y \,, \tag{2}$$

d'où :

$$H(\omega) = \frac{Y}{X} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}\omega RC + (\mathrm{j}\omega)^2 LC} \,. \tag{3}$$

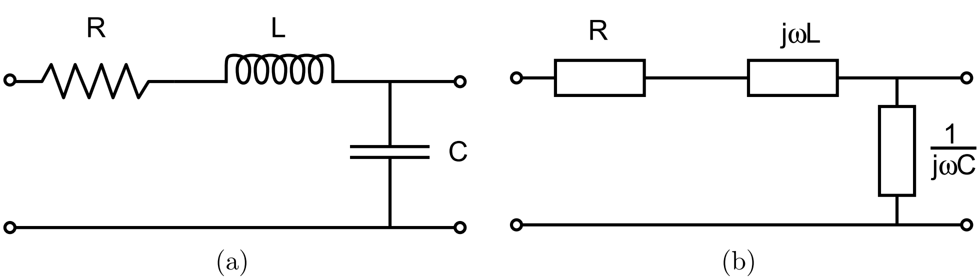

Fig. 1 – (a) Circuit RLC et (b) sa représentation sous forme d'impédances.

En utilisant les valeurs numériques, on a :

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + \mathrm{j}\omega 8 - 12\omega^2} = \frac{1}{(1 + 2\,\mathrm{j}\omega)(1 + 6\,\mathrm{j}\omega)} \,, \tag{4}$$

ce qui peut se décomposer en fractions partielles de la façon suivante :

$$H(\omega) = \frac{A}{1 + 2\,\mathrm{j}\omega} + \frac{B}{1 + 6\,\mathrm{j}\omega} = \frac{A(1 + 6\,\mathrm{j}\omega) + B(1 + 2\,\mathrm{j}\omega)}{(1 + 2\,\mathrm{j}\omega)(1 + 6\,\mathrm{j}\omega)} \,. \tag{5}$$

Des équations 4 et 5, on pose :

$$A + 6A\,\mathrm{j}\omega + B + 2B\,\mathrm{j}\omega = 1\,, \tag{6}$$

expression de laquelle on peut déduire que $B = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ et $A = -\frac{1}{2}$. On a donc :

$$H(\omega) = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{1+2\,\mathrm{j}\omega} + \frac{3}{1+6\,\mathrm{j}\omega}\right]. \tag{7}$$

Connaissant la transformée suivante :

$$\frac{1}{\beta + \mathrm{j}\omega} \leftrightarrow \mathrm{e}^{-\beta t}\mathrm{U}(t)\,, \tag{8}$$

et en récrivant l'équation 7 comme suit :

$$H(\omega) = -\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}+\mathrm{j}\omega} + \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{6}+\mathrm{j}\omega}\,, \tag{9}$$

on peut déduire la réponse impulsionnelle $h(t)$:

$$\boxed{h(t) = -\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-t/2}\mathrm{U}(t) + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-t/6}\mathrm{U}(t)\,.} \tag{10}$$

Partie B (1 pts)

Le circuit présenté dans ce problème représente un circuit physique. Il doit donc être causal, sinon il ne serait pas réalisable en pratique.

Partie C (1 pts)

Le circuit coupe les hautes fréquences, c'est un passe-bas de 2ième ordre. Ceci est facile à visualiser de façon instinctive... Nous savons que l'impédance de la capacité est $\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}$. Si la fréquence est très grande, l'impédance sera très petite et, à la limite, sera nulle, causant l'effet d'un court-circuit (tension de nulle à la sortie).

Partie D (3 pts)

On doit calculer la sortie du filtre pour une excitation $x(t) = 3\cos(0.5t) + 5\cos(0.25t)$. Connaissant $H(\omega)$ déterminée en a), on trouve :

$$|H(0.25)| = 0.496139\,, \tag{11}$$
$$\phi(0.25) = -1.4464\,, \tag{12}$$
$$|H(0.50)| = 0.223607\,, \tag{13}$$
$$\phi(0.50) = -2.034\,, \tag{14}$$

ce qui permet de conclure que, pour le $x(t)$ donné :

$$y(t) = 3|H(0.50)|\cos[0.50t + \phi(0.50)] + 5|H(0.25)|\cos[0.25t + \phi(0.25)]\,, \tag{15}$$
$$= 3(0.223607)\cos[0.50t - 2.034)] + 5(0.496139)\cos[0.25t - 1.4464)]\,. \tag{16}$$

Partie E (3 pts)

On cherche, pour le signal présenté en d), quel proportion est coupée par le filtre. On trouve le rapport recherché en comparent le niveau de puissance à l'entrée et à la sortie :

$$\frac{P_y}{P_x} = \frac{9|H(0.50)|^2 + 25|H(0.25)|^2}{9+25} = 0.194231\,. \tag{17}$$

Le filtre coupe donc environ **80% de la puissance du signal** (On a 19.42% restant à la sortie).

Question 2 (15 pts)

On demande de calculer la convolution suivante :

$$\left[\text{Rect}\left(\frac{t}{1.5}\right) + 3\text{Sa}(3\pi t)\right] * \delta_{T_s}(t)\,, \tag{18}$$

où $\delta_{T_s}(t)$ est un peigne de Dirac avec une période $T_s = 1$.

Ce problème doit être séparé en deux parties. Il est possible de calculer d'abord la convolution avec le Rect puis celle avec le Sa.

Prenons d'abord la partie avec le Rect (voir la figure 2-A) :

$$\text{Rect}\left(\frac{t}{1.5}\right) * \delta_{T_s}(t)\,. \tag{19}$$

Comme le Dirac est l'élément neutre de la convolution, on retrouvera une copie du Rect à tous les T_s. Toutefois, comme la période T_s est plus petite de que la largeur du Rect, il y aura recouvrement comme le montre la figure 2-B.

Mathématiquement, le résultat de cette convolution est simplement donné par une somme infinie de rectangles :

$$\boxed{\text{Rect}(t/1.5) * \delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Rect}\left(\frac{t-n}{1.5}\right)\,.} \tag{20}$$

La seconde partie de la convolution, la convolution du Sa avec le train d'impulsion, est beaucoup plus facile à faire en utilisant la propriété de la transformation de Fourier d'une convolution. On a :

$$3\text{Sa}(3\pi t) * \delta_{T_s}(t) \leftrightarrow \frac{3\pi}{3\pi}\text{Rect}\left(\frac{\omega}{6\pi}\right) \times \omega_s \delta_{\omega_s}(\omega)\,, \tag{21}$$

où ω_s est égal à 2π. Le nouveau train d'impulsions et le rectangle résultant de la transformation de Fourier sont présenté à la figure 3. Immédiatement, on observer qu'en multipliant le train d'impulsions par le rectangle de largeur 6π, il ne restera que 3 impulsions à $\omega = 0$ et à $\omega = \pm 2\pi$. Il s'agit du spectre d'un cosinus avec une composante continue (un DC). La transformée inverse de ce spectre nous permet de retourner dans le domaine temporel, où nous retrouvons :

$$\boxed{1 + 2\cos(2\pi t)\,.} \tag{22}$$

On aurait aussi pu voir le problème comme une somme infinie de Sa :

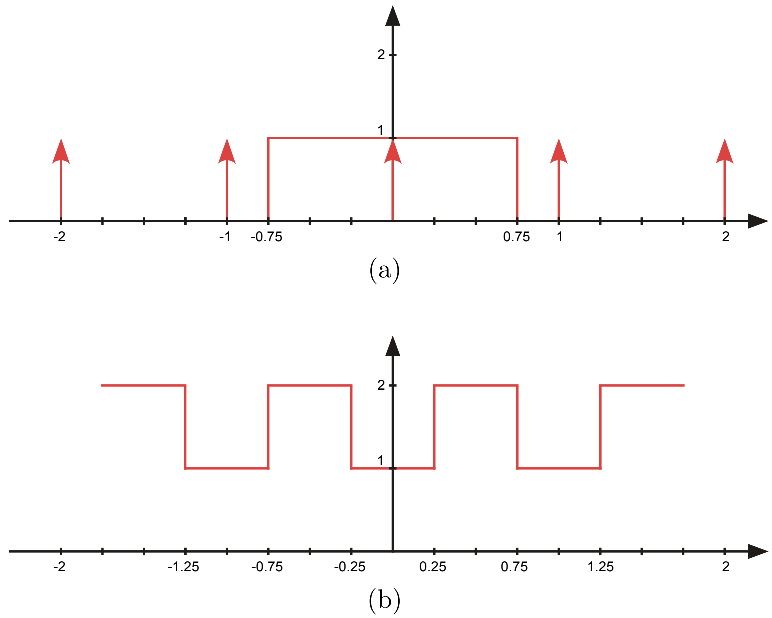

FIG. 2 – (a) Rectangle de largeur 1.5 avec peigne de Dirac de période $T_s = 1$ et (b) résultat de la convolution des deux.

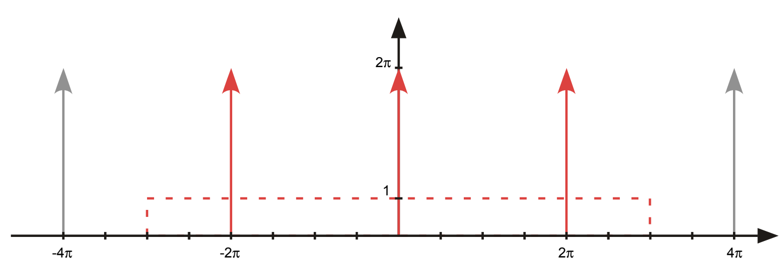

FIG. 3 – Rectangle et peigne de Dirac représentant les composantes du spectre de la deuxième partie de la convolution. Les Dirac en rouge sont ceux qui resteront après la multiplication du peigne avec le rectangle (pointillé).

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty} 3\mathrm{Sa}\left[3\pi(t-nT_s)\right]\ .} \tag{23}$$

Question 3 (15 pts)

Partie A (pts)

On a un signal $x(t)$, dont le spectre $X(\omega)$ est connu, qui passe dans le système illustré à la figure 4, avec $\omega_s T_s = 2\pi$.

Lorsqu'on passe le signal x(t) dans l'échantillonneur (multiplication avec le peigne de Dirac), son spectre sera recopié à tous les ω_s par l'effet de la convolution dans le domaine spectal. Le spectre $A(\omega)$ du signal $a(t)$, que l'on retrouve après recopie du spectre original, est illustré à la figure 5.

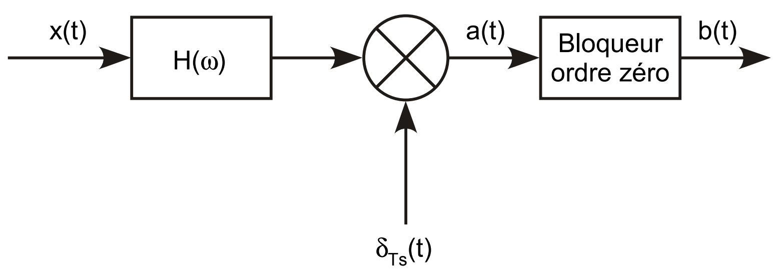

Fig. 4 – Système composé d'un filtre $H(\omega)$, d'un multiplicateur avec un peigne de Dirac à fréquence Ts et d'un bloqueur d'ordre zéro.

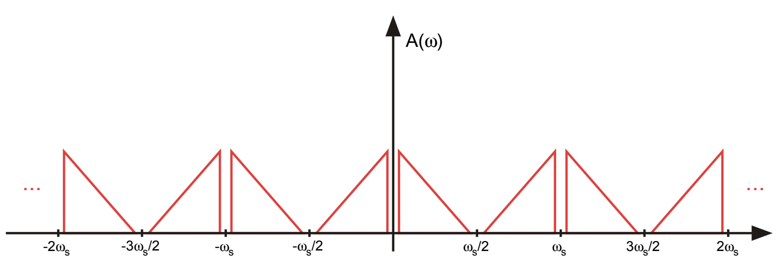

Fig. 5 – Spectre $A(\omega)$ du signal $a(t)$.

Partie B (pts)

Pour éviter que le signal hors bande (comme du bruit, par exemple) recouvre les composantes de signal recopiées, il faut faire un filtrage passe-bande étroit autour de notre bande d'intérêt. Le filtre idéal pour cette tâche est une filtre entre ω_s et $3\omega_s/2$.

Partie C (pts)

La première étape pour retrouver $x(t)$ à partir de $b(t)$ est de filtre le signal avec un filtre basse-bas ayant une coupure à $\omega_s/2$. Il faut ensuite faire une égalisation en 1/Sinc pour éliminer la distortion due à l'échantillonnage par le bloqueur d'ordre 0. Par la suite, il ne reste qu'à moduler le signal à ω_s et à filtrer avec un filtre passe-bande entre ω_s et $3\omega_s/2$. Le signal ainsi obtenu sera le même signal que $x(t)$ à un facteur de gain près. Pour retrouver exactement le même signal, un gain de $2/T_s$ devra être appliqué sur la sortie.

Partie D (pts)

Si le spectre $X(\omega)$ donné représentais un signal modulé, il s'agirait d'une modulation d'amplitude à bande latérale unique (MA-BLU), ou, en anglais, Single Side Band Amplitude Modulation (AM-SSB).

Partie E (pts)

Le signal $x(t)$ est à énergie finie (Puissance nulle).

Partie F (pts)

Le signal $a(t)$ est à puissance finie (Énergie infinie).

Partie G (pts)

Le signal $b(t)$ est à énergie finie.