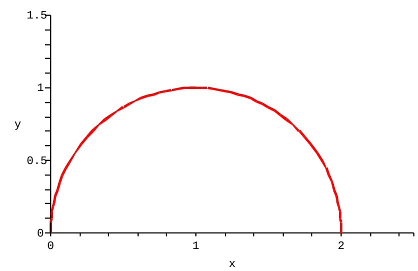
Mat-10364 : Mat-Ing-II, réponses, examen type I

Question 1

a) Commençons par un peu d'algèbre. La frontière du domaine est

$$y = \sqrt{2\,x - x^2} \Rightarrow x^2 + y^2 - 2\,x = 0 \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1.$$

Donc le domaine est le demi-disque centré en $(1, 0)$ et de rayon 1.



b) Puisque $x \geq 0, y \geq 0$, on a $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Pour exprimer la valeur maximale de r en fonction de θ, on récrit l'équation du cercle en coordonnées polaires

$$x^2 + y^2 - 2\,x = 0 \Rightarrow r^2 - 2\,r\,\cos\theta = 0 \Rightarrow r = 2\,\cos\theta.$$

On peut donc écrire l'intégrale sous la forme suivante

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} \frac{r(\cos\theta + \sin\theta)}{r^2}\, r\, dr\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} (\cos\theta + \sin\theta)\; dr\, d\theta.$$

Question 2

On procède comme ci-haut. Le domaine D est délimité par $y = 0$ et $y = \sin x$ pour $x \in [0, \pi]$. Dans ce domaine, $y \in [0, 1]$ et pour chaque $y = y_0$ fixé, la droite horizontale correspondante intersecte le graphe de $y = \sin x$ aux points d'abscisse $\arcsin(y)$ puis au point d'abscisse $\pi - \arcsin(y)$. Donc

$$I = \int_0^1 \left(\int_{\arcsin(y)}^{\pi - \arcsin(y)} f(x, y)\, dx \right) dy.$$

Question 3

Notons P la plaque, la quantité cherchée s'écrit

$$J_{Ox} = \iint_P y^2 \, \sigma(x,y) \, dx \, dy.$$

En coordonnées polaires, la droite $y = x$ devient $\theta = \frac{\pi}{4}$ et la parabole $y = x^2$ devient

$$r \sin\theta = r^2 \cos^2\theta \Rightarrow r = \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}.$$

Donc

$$P_p = \{(r,\theta) \mid \theta \in [0, \frac{\pi}{4}], 0 \leq r \leq \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\}.$$

Puisque $\sigma = 1$, on a finalement

$$J_{Ox} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}} r^2 \, \sin^2\theta r \, dr \right) d\theta.$$

Donc

$$J_{Ox} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4} \left(\frac{\sin^6\theta}{\cos^8\theta} \right) d\theta. = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2\theta \tan^6\theta \, d\theta.$$

Le changement de variables $u = \tan\theta$ donne finalement

$$J = \frac{1}{28}.$$

Question 4

Travaillons en coordonnées sphériques. Le cône s'écrit $\tan\phi = \frac{1}{\sqrt{3}}$, c'est-à-dire $\phi = \frac{\pi}{6}$, alors que la sphère devient

$$\rho^2 = \rho \, \cos\phi \Rightarrow \rho = \cos\phi.$$

Finalement,

$$V = \iiint_S 1 \, dx \, dy \, dz = \int_{\theta=0}^{2\pi} \left(\int_{\phi=0}^{\frac{\pi}{6}} \left(\int_{\rho=0}^{\cos\phi} \rho^2 \sin\phi \, d\rho \right) d\phi \right) d\theta.$$

$$V = \int_{\theta=0}^{2\pi} \left(\int_{\phi=0}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{3} \sin\phi \, \cos^3\phi \, d\phi \right) d\theta = \frac{7\pi}{96}.$$

(Note : on peut faire ce calcul en cylindriques. Mais c'est un peu plus compliqué !)

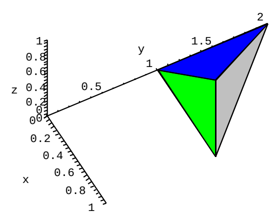
Question 5

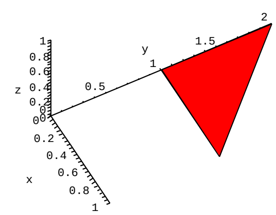
Ici le meilleur choix est celui des coordonnées cylindriques. Dans ce système, les cônes s'écrivent $z = 2\,r$ et $z = 1 - r$. Donc ils s'intersectent lorsque $2\,r = 1 - r$ c'est-à-dire $r = \frac{1}{3}$.
On a alors

$$V = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{1}{3}} \left(\int_{2\,r}^{1-r} r\,dz \right) dr \right) d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{1}{3}} r(1 - 3\,r)\,dr \right) d\theta = \frac{\pi}{27}.$$

Question 6

D'abord une représentation graphique : à gauche, le tétrahèdre ; à droite sa projection sur $z = 0$.





Le plan vertical qui passe par A, C, E a pour équation $y = 1$. Le plan vertical qui passe par B, C, E a pour équation $x + y = 2$. Le plan oblique qui passe par A, B, E a pour équation $x - z = 0$. La prise en compte de ces données conduit à

$$I = \int_{y=1}^{2} \left(\int_{x=0}^{2-y} \left(\int_0^x f(x, y, z)\,dz \right) dx \right) dy.$$

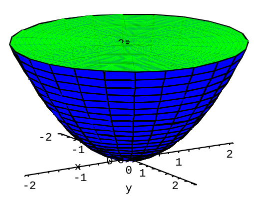
Question 7

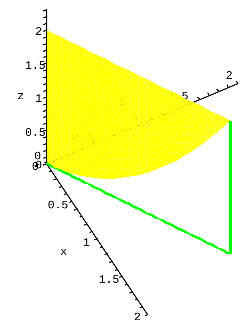
Cet exercice ressemble (trop !) au numéro 4. On travaille encore en sphériques. Le cône sécrit $\phi = \frac{\pi}{6}$, la sphère $\rho = 2$. Donc

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \int_0^2 r^2 \sin\phi\,dr\,d\phi\,d\theta.$$

Question 8

Ici on travaille en cylindriques. La représentation graphique ci-dessous est la clé de tout : à gauche, le solide, à droite une section de ce solide à θ fixé, section dessinée dans le demi-plan vertical (r, z).



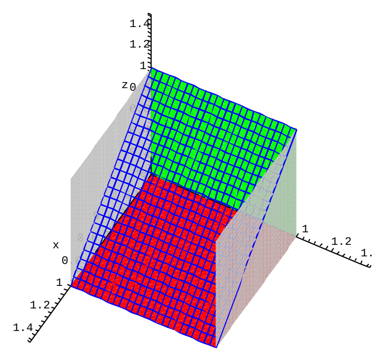


En observant que, pour chaque θ, la valeur maximale de r est h, on a

$$V = \int_{\theta=0}^{2\pi} \left(\int_{r=0}^{h} \left(\int_{z=\frac{r^2}{h}}^{h} r\,dz \right) dr \right) d\theta = \frac{\pi h^3}{2}.$$

Question 9

Encore un fois, la représentation graphique est incontournable :



En prenant le rectangle en rouge comme domaine d'intégration on obtient successsivement

a)

$$V = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{1-x} dz\,dy\,dx = \frac{1}{2},$$

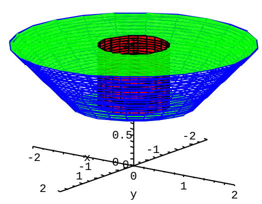
b)

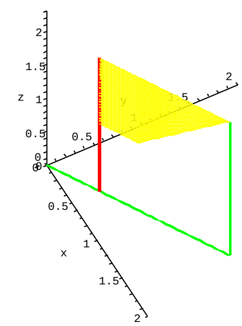
$$\bar{x} = \frac{1}{V} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{1-x} x\,dz\,dy\,dx = \frac{1}{3}.$$

Par symétrie, $\bar{y} = \frac{1}{2}$.

Question 10

Représentation graphique : à gauche, le solide, à droite une section de ce solide à θ fixé, section dessinée dans le demi-plan vertical (r, z).





On commence par calculer la masse volumique. Pour ce faire, il nous faut le volume qui est donné par (l'équation du cône est $z = r$).

$$V = \int_0^{2\pi} \left(\int_1^2 \left(\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{z} r\, dr \right) dz \right) d\theta = 2\pi.$$

d'où $\sigma = \frac{M}{2\pi}$.
On peut maintenant calculer J_{Oz},

$$J_{Oz} = \frac{M}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_1^2 \left(\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{z} r^2\, r\ dr \right) dz \right) d\theta = \frac{137}{90} M.$$

Question 11

On pose $u = x + 2\,y, v = x - y$. Dans ce système de coordonnées, les droites s'écrivent $x + 2\,y = 2 \Rightarrow u = 2$, $x = 4 - 2\,y \Rightarrow u = 4$, $y = x \Rightarrow v = 0$, $y = x + 1 \Rightarrow v = -1$. Le nouveau domaine d'intégration est donc le rectangle $[2, 4] \times [-1, 0]$. Calculons le jacobien

$$u = x + 2\,y, v = x - y \Rightarrow x = \frac{1}{3}(u + 2\,v), y = \frac{1}{3}(u - v),$$

donc

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}.$$

Si on remarque que l'intégrant s'écrit $\frac{v}{u}$, on obtient finalement

$$I = \int_{u=2}^{4} \left(\int_{v=-1}^{1} \frac{1}{3} \frac{v}{u}\, dv \right) du.$$

Question 12

a) Calculons d'abord le jacobien de la transformation inverse :

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \det \begin{pmatrix} y\, e^{x} & e^{x} \\ -y\, e^{-x} & e^{-x} \end{pmatrix} = 2\, y.$$

Or $u\, v = y^2$ donc $y = \sqrt{u\, v}$ d'où

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{u\, v}} \Rightarrow dx\, dy = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{u\, v}}\, du\, dv.$$

b) Puisque $A(D) = \iint\limits_D 1\, dxdy$ il ne nous reste qu'à changer les bornes.

$$y = e^{x} \Rightarrow v = 1, y = 3\, e^{x} \Rightarrow v = 3,$$
$$y = e^{-x} \Rightarrow u = 1, y = 2\, e^{-x} \Rightarrow u = 2.$$

Finalement

$$A(D) \iint\limits_D 1\, dxdy = \int_{u=1}^{2} \left(\int_{v=1}^{3} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{u\, v}}\, dv \right) du.$$