Mathématiques de l'ingénieur I (MAT-1900)
Examen partiel du 30 septembre 2016

18h30 à 20h20

Corrigé

Question 1
(20 points)

On pose

$$z = 2 + i$$

et

$$w = 3 - i.$$

Calculer les cinq quantités suivantes :

$$z + w, \quad zw, \quad \frac{z}{w}, \quad \mathrm{Im}(z + iw), \quad e^{5\pi iz},$$

en exprimant chaque réponse sous forme cartésienne.

$w + z = (2 + i) + (3 - i) = 5$

$wz = (2 + i)(3 - i) = 6 - 2i + 3i + 1 = 7 + i$

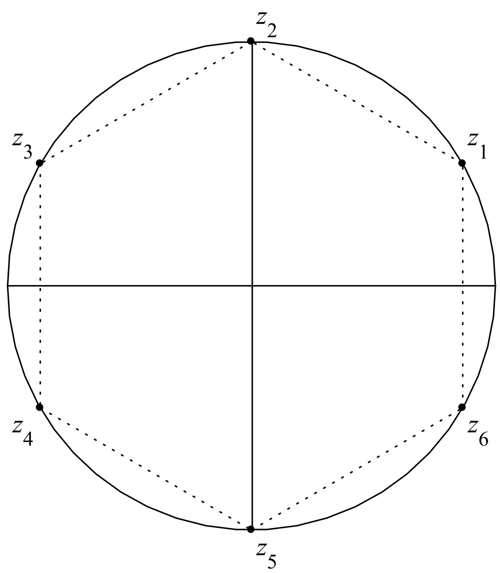
$\dfrac{z}{w} = \dfrac{z\overline{w}}{|w|^2} = \dfrac{(2+i)(3+i)}{3^3+1} = \dfrac{6+2i+3i-1}{10} = \dfrac{5+5i}{10} = \dfrac{1+i}{2}$

$\mathrm{Im}(z + iw) = \mathrm{Im}(2 + i + i(3 - i)) = \mathrm{Im}(2 + i + 3i + 1) = \mathrm{Im}(3 + 4i) = 4$

$e^{5\pi iz} = e^{5\pi i(2+i)} = e^{-5\pi+10\pi i} = e^{-5\pi}e^{10\pi i} = e^{-5\pi}$

Question 2
(10 points)

Les points $z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4,\ z_5,\ z_6$ de la figure ci-dessous sont sur le cercle unité et sont les sommets d'un hexagone régulier. Donner la valeur de chacun des nombres complexes suivants en choisissant parmi $z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4,\ z_5,\ z_6$. (On ne vous demande pas le détail de vos calculs.)



a) $-\overline{z_1} =$ __z_3__

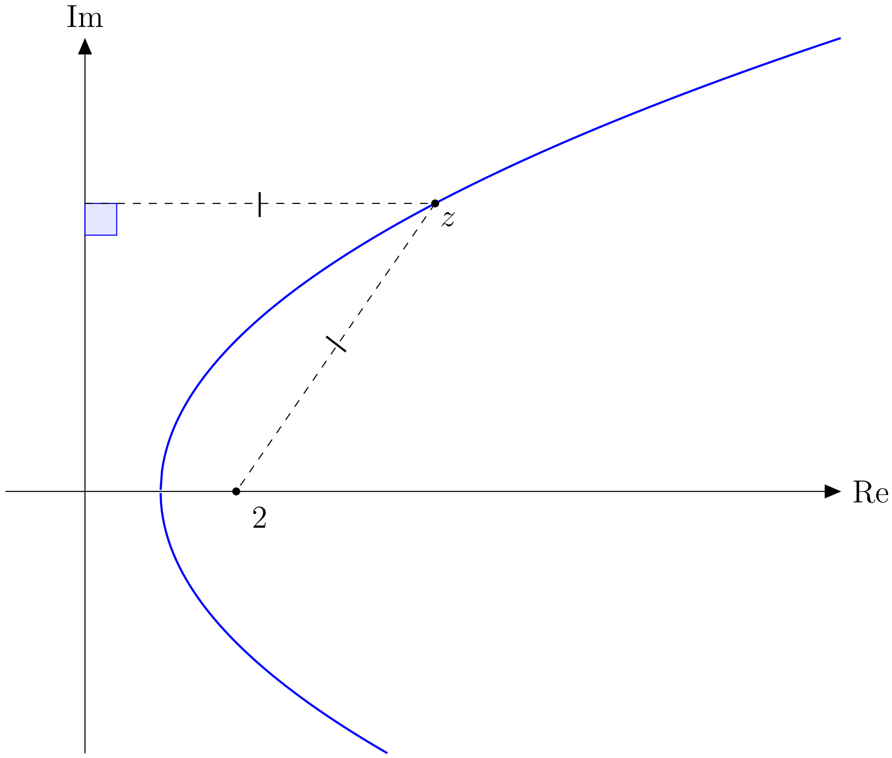
b) $\dfrac{1}{\overline{z_4}} =$ __z_4__

c) $z_1 z_3 z_5 =$ __z_2__

d) $z_1^3 =$ __z_2__

Question 3
(10 points)

La courbe représentée dans la figure ci-dessous a la propriété que, pour tout point z de la courbe, la distance de z à l'axe imaginaire est égale à la distance de z au point 2 (ces distances sont représentées par les pointillés sur la figure).



Laquelle des équations suivantes décrit cette courbe ? Encercler la bonne réponse.

a) $\operatorname{Im} z = |z + 2|$

b) $\operatorname{Re} z = |z + 2|$

c) $\operatorname{Im} z = |z - 2|$

d) $\operatorname{Re} z = |z - 2|$ $\surd$

e) $|z - i| = |z + 2|$

Question 4
(10 points)

a) Compléter le tableau suivant en indiquant par “oui” ou “non” si la fonction proposée est une solution de l’équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = 1 - y. \tag{1}$$

fonction y	y est une solution de (1) ?
$y = 1$	oui
$y = e^{-x}$	non
$y = e^{-x} + 1$	oui

b) Une substance radioactive se désintègre, perdant de la masse à un taux qui, au temps t, est proportionnel à la masse présente au temps t. On modélise ce phénomène par l’équation différentielle

$$m' = \beta m. \tag{2}$$

où $m = m(t)$ représente la masse présente au temps t, et β est une constante.

Quel sera le signe de la constante β ? Pourquoi ?

Réponse : Négatif, car, puisque la masse diminue, on doit avoir $m' < 0$.

Question 5
(10 points)

Trouver la solution de l'équation différentielle

$$y' = \frac{2x}{y^2}$$

qui satisfait la condition

$$y(1) = 3,$$

en exprimant la réponse finale sous forme explicite ($y = ...$).

C'est une équation séparable. On a

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{2x}{y^2} \\ y^2 dy &= 2x dx \\ \int y^2 dy &= \int 2x dx \\ \frac{y^3}{3} &= x^2 + c \end{aligned}$$

Puisque $y(1) = 3$ on a

$$\frac{3^3}{3} = 1^2 + c,$$

d'où $9 = 1 + c$ et donc $\underline{c = 8}$. Donc

$$y^3 = 3(x^2 + 8),$$

et, sous forme explicite,

$$y = \left(3x^2 + 24\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Question 6
(20 points)

a) Trouver les solutions (complexes) de l'équation $z^4 + 16 = 0$, en donnant la réponse finale sous forme cartésienne.

b) Écrire $z^4 + 16$ comme produit de quatre polynômes de degré 1.

c) Écrire $z^4 + 16$ comme un produit

$$z^4 + 16 = (z^2 + Az + B)(z^2 + Cz + D)$$

où A, B, C, D sont **réels**.

a) L'équation est équivalente à

$$z^4 = -16 = 16e^{i\pi}.$$

Les solutions de cette équation sont

$$z_k = 16^{\frac{1}{4}} e^{\frac{i(\pi+2k\pi)}{4}} \qquad k = 0, 1, 2, 3,$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} z_0 &= 2e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} + i\sqrt{2} \\ z_1 &= 2e^{i\frac{3\pi}{4}} = -\sqrt{2} + i\sqrt{2} \\ z_2 &= 2e^{i\frac{5\pi}{4}} = -\sqrt{2} - i\sqrt{2} \\ z_3 &= 2e^{i\frac{7\pi}{4}} = \sqrt{2} - i\sqrt{2} \end{aligned}$$

b) En utilisant les racines trouvées en a), on obtient

$$z^4 + 16 = (z - 2e^{i\frac{\pi}{4}})(z - 2e^{i\frac{3\pi}{4}})(z - 2e^{i\frac{5\pi}{4}})(z - 2e^{i\frac{7\pi}{4}})$$

ou encore

$$z^4 + 16 = (z - \sqrt{2} - i\sqrt{2})(z + \sqrt{2} - i\sqrt{2})(z + \sqrt{2} + i\sqrt{2})(z - \sqrt{2} + i\sqrt{2})$$

c) On obtient les facteurs quadratiques réels en regroupant les facteurs correspondant à des racines conjuguées. Ici $z_3 = \overline{z_0}$ et $z_2 = \overline{z_1}$, et

$$(z - z_0)(z - z_3) = z^2 - 2\,\mathrm{Re}\, z_0 + |z_0|^2) = z^2 + 2\sqrt{2}z + 4$$

$$(z - z_1)(z - z_2) = z^2 - 2\,\mathrm{Re}\, z_1 + |z_1|^2) = z^2 - 2\sqrt{2}z + 4$$

et on a

$$z^4 + 16 = (z^2 + 2\sqrt{2}z + 4)(z^2 - 2\sqrt{2}z + 4).$$

Question 7
(20 points)

Utiliser l'exponentielle complexe pour écrire

$$\cos(t + \frac{3\pi}{4}) + \cos(t + \frac{\pi}{4})$$

sous la forme

$$A\cos(t+\phi)$$

où A est un nombre réel positif et ϕ est un nombre réel. [Suggestion : écrire chacun des cos comme la partie réelle d'un nombre complexe.]

On a $\cos(t + \frac{3\pi}{4}) = \mathrm{Re}[e^{i(t+\frac{3\pi}{4})}]$ et

$\cos(t + \frac{\pi}{4}) = \mathrm{Re}[e^{i(t+\frac{\pi}{4})}]$. Donc

$$\begin{aligned}
\cos(t + \frac{3\pi}{4}) + \cos(t + \frac{\pi}{4}) &= \mathrm{Re}[e^{i(t+\frac{3\pi}{4})} + e^{i(t+\frac{\pi}{4})}] \\
&= \mathrm{Re}[e^{it}e^{i\frac{3\pi}{4}} + e^{it}e^{i\frac{\pi}{4}}] \\
&= \mathrm{Re}[e^{it}(e^{i\frac{3\pi}{4}} + e^{i\frac{\pi}{4}})] \\
&= \mathrm{Re}\left[e^{it}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] \\
&= \mathrm{Re}\left[\sqrt{2}e^{it}i\right] = \mathrm{Re}\left[\sqrt{2}e^{it}e^{i\frac{\pi}{2}}\right] \\
&= \mathrm{Re}\left[\sqrt{2}e^{i(t+\frac{\pi}{2})}\right] = \sqrt{2}\cos(t+\pi/2)
\end{aligned}$$