GEL-2001 : Analyse des signaux

Mini-test 1 A2009 : Solutions

Département de génie électrique et de génie informatique

Problème 1 (1 pt)

On demande de tracer le **spectre de puissance** de la fonction suivante :

$$f(t) = -6\sin(\pi t) + 3\cos(4\pi t) + 3\,.$$

Avant tout, il faut trouver les coefficients de Fourier de cette fonction. Par inspection on trouve que $\omega_0 = \pi$. Alors on at :

$$f(t) = -6\sin(\omega_0 t) + 3\cos(4\omega_0 t) + 3\,.$$

En développement l'équation en termes exponentiels, on trouve :

$$f(t) = \frac{-6}{2\,\mathrm{j}}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t} - \mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}\omega_0 t}\right] + \frac{3}{2}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}4\omega_0 t} + \mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}4\omega_0 t}\right] + 3\,.$$

À partir de cette dernière expression, il est possible de retrouver les termes associés aux coefficients de Fourier...

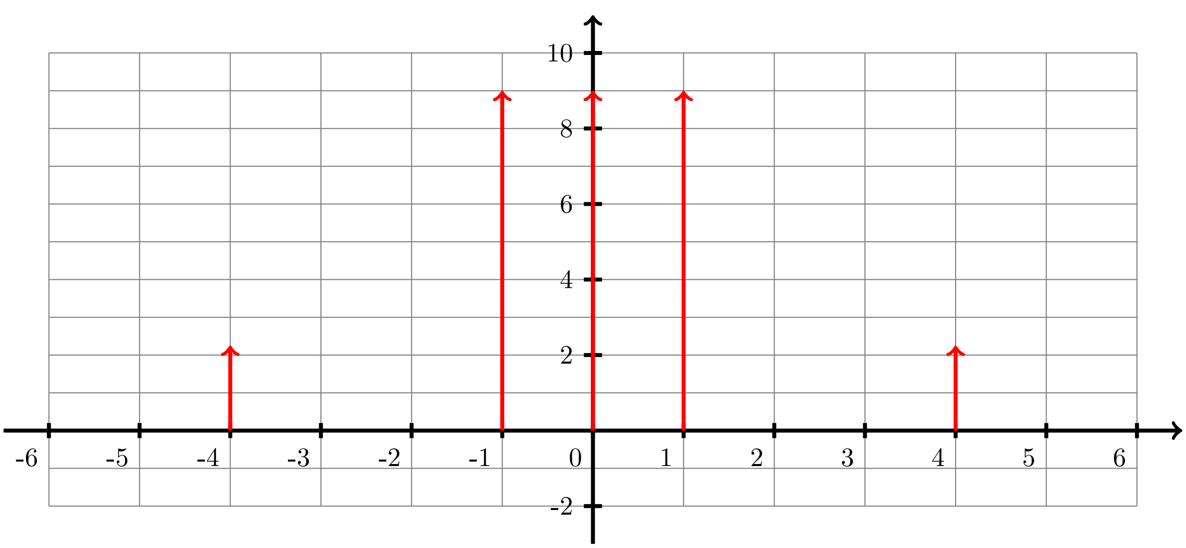
$$f(t) = -\underbrace{\tfrac{3}{\mathrm{j}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}}_{\uparrow\; F(1)} + \underbrace{\tfrac{3}{\mathrm{j}}\mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}\omega_0 t}}_{\uparrow\; F(-1)} + \underbrace{\tfrac{3}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}4\omega_0 t}}_{\uparrow\; F(4)} + \underbrace{\tfrac{3}{2}\mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}4\omega_0 t}}_{\uparrow\; F(-4)} + \underbrace{3}_{\uparrow\; F(0)}\,.$$

Les coefficients de Fourier sont donc :

$$F(-4) = \tfrac{3}{2},\quad F(-1) = \tfrac{3}{\mathrm{j}},\quad F(0) = 3,\quad F(1) = -\tfrac{3}{\mathrm{j}}\quad \text{et}\quad F(4) = \tfrac{3}{2}\,.$$

Les puissances aux fréquences correspondantes sont données par $P(n) = |F(n)|^2$:

$$P(-4) = \tfrac{9}{4},\quad P(-1) = 9,\quad P(0) = 9,\quad P(1) = 9\quad \text{et}\quad P(4) = \tfrac{9}{4}\,.$$



Problème 2 (1 pt)

Soit la fonction :

$$f(t) = \mathrm{j}\left[\exp(\,\mathrm{j}\omega_0 t) - \exp(-\,\mathrm{j}\omega_0 t)\right] .$$

Avant de procéder, il peut être fort utile de se rappeler que :

$$\sin(\omega t) = \frac{1}{2\,\mathrm{j}}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} - \mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}\omega t}\right] ,$$

d'où on peut déduire que :

$$f(t) = -\frac{2}{2\,\mathrm{j}}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t} - \mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}\omega_0 t}\right] = -2\sin(\omega_o t) .$$

a)

On demande si $f(t)$ est réelle. Avec $f(t)$ sous sa forme exponentielle il peut être difficile de conclure, mais écris sous forme sa forme $-2\sin(\omega_o t)$ il évident que cette expression réelle. L'énoncé est donc **VRAI**.

b)

On demande si $F^*(-n) = F(n)$. Puisque $f(t)$ est réelle, cet énoncé est **VRAI**.

c)

On demande si la série de Fourier de $f(t)$ est impaire. La fonction $f(t)$ est réelle et impaire, alors les coefficients de Fourier $F(n)$ sont impaires et imaginaires. La série de Fourier est donc impaire et l'énoncé est **VRAI**.

d)

On dit que les coefficients $B(n)$ sont nuls pour tous les n. Or, les coefficients $B(n)$ constituent la partie imaginaire de $F(n)$ (rappel : $F(n) = A(n) + \mathrm{j}B(n)$). Nous venons de déterminer que F(n) est purement imaginaire, alors les coefficients $B(n)$ ne peuvent pas être tous nuls. L'énoncé est donc **FAUX**.

Problème 3 (3 pt)

La fonction $f(t)$ est donnée graphiquement. La partie correspondant à une période est donnée par :

$$f(t) = \begin{cases} -\frac{1}{2}t & \text{pour} \qquad -2 \le t < 0 \\ \\ \frac{1}{2}t & \text{pour} \qquad 0 \le t < 2 \end{cases}$$

Par inspection du graphique ou de l'expression de $f(t)$, on trouve d'abord la période et la pulsation (fréquence angulaire) de la fonction périodique :

$$T_0 = 4, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{\pi}{2} .$$

Pour trouver les coefficients de Fourier, on peut utiliser l'équation d'analyse :

$$
\begin{aligned}
\underset{n\neq 0}{F(n)} &= \frac{1}{T_0}\int\limits_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)\mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t\,,\\
&= \frac{1}{4}\left[\int_{-2}^{0} -\frac{1}{2}t\mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t + \int_{0}^{2} \frac{1}{2}t\mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t\right]\,,\\
&= \frac{1}{8}\left[-\int_{-2}^{0} t\mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t + \int_{0}^{2} t\mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t\right]\,,\\
&= \frac{1}{8}\left[-\left.\frac{\mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}n\omega_0 t}}{n^2\omega_0^2}\right|_{-2}^{0} - \left.\frac{\mathrm{j}t\mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}n\omega_0 t}}{n\omega_0}\right|_{-2}^{0} + \left.\frac{\mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}n\omega_0 t}}{n^2\omega_0^2}\right|_{0}^{2} + \left.\frac{\mathrm{j}t\mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}n\omega_0 t}}{n\omega_0}\right|_{0}^{2}\right]\,,\\
&= \frac{1}{8}\left[\frac{-1}{n^2\omega_0^2} + \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}2n\omega_0}}{n^2\omega_0^2} - 0 - \frac{\mathrm{j}2\mathrm{e}^{\mathrm{j}2n\omega_0}}{n\omega_0} + \frac{\mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}2n\omega_0}}{n^2\omega_0^2} - \frac{1}{n^2\omega_0^2} + \frac{\mathrm{j}2\mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}2n\omega_0}}{n\omega_0} - 0\right]\,,\\
&= \frac{1}{8}\frac{1}{n^2\omega_0^2}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}2n\omega_0} + \mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}2n\omega_0} - \mathrm{j}2n\omega_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}2n\omega_0} + \mathrm{j}2n\omega_0\mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}2n\omega_0} - 2\right]\,,\\
&= \frac{1}{8}\frac{1}{n^2\omega_0^2}\left[(\mathrm{e}^{\mathrm{j}2n\omega_0} + \mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}2n\omega_0}) - \mathrm{j}2n\omega_0(\mathrm{e}^{\mathrm{j}2n\omega_0} - \mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}2n\omega_0}) - 2\right]\,,\\
&= \frac{1}{8}\frac{1}{n^2\omega_0^2}\left[2\cos(2n\omega_0) - \mathrm{j}2n\omega_0(2\,\mathrm{j}\sin(2n\omega_0)) - 2\right]\,.
\end{aligned}
$$

En remplaçant ω_0, on trouve :

$$
\begin{aligned}
\underset{n\neq 0}{F(n)} &= \frac{1}{8}\frac{4}{n^2\pi^2}\left[2\cos(n\pi) - \mathrm{j}n\pi(2\,\mathrm{j}\sin(n\pi)) - 2\right]\,,\\
&= \frac{1}{8}\frac{8}{n^2\pi^2}\left[\cos(n\pi) - \mathrm{j}^2 n\pi\sin(n\pi) - 1\right]\,,\\
&= \frac{1}{n^2\pi^2}\left[\cos(n\pi) + n\pi\sin(n\pi) - 1\right]\,,
\end{aligned}
$$

Sachant que le sinus d'un multiple de π est toujours nul et que le cosinus d'un multiple de π est toujours soit 1 ou -1, on peut finalement simplifier l'expression de $F(n)$ à :

$$
\underset{n\neq 0}{F(n)} = \frac{1}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n - 1\right]\,,
$$

Pour la valeurs moyenne (ou la composante continue), on trouve :

$$
\begin{aligned}
F(0) &= \frac{1}{T_0}\int\limits_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)\mathrm{d}t\,,\\
&= \frac{1}{4}\int_{-2}^{0} -\frac{1}{2}t\mathrm{d}t + \frac{1}{4}\int_{0}^{2}\frac{1}{2}t\mathrm{d}t = -\frac{1}{8}\int_{-2}^{0} t\mathrm{d}t + \frac{1}{8}\int_{0}^{2}\,,\\
&= -\frac{1}{8}\left.\frac{t^2}{2}\right|_{-2}^{0} + \frac{1}{8}\left.\frac{t^2}{2}\right|_{0}^{2}, = -0 + \frac{1}{8}\frac{4}{2} + \frac{1}{8}\frac{4}{2} - 0 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\,,\\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Il est a noter que ce dernier résultat devrait être facilement trouvé par inspection du graphique de la fonction $f(t)$.

GEL-2001 : Analyse des signaux

Mini-test 1 A2009 : Solutions (suppléments)

Département de génie électrique et de génie informatique

Problème 3 : Intégration par partie

Voici le développement de l'intégration par partie nécessaire à la résolution du 3ième numéro du minitest.

$$\int t\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t\,,$$

$$\int t\mathrm{e}^{-\mathrm{j}at}\mathrm{d}t \qquad \text{avec } a = n\omega_0\,,$$

$$\boxed{\begin{aligned}\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u \qquad \text{avec} \quad u &= t & \mathrm{d}u &= \mathrm{d}t\\ dv &= \mathrm{e}^{-\mathrm{j}at} & v &= \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}at}}{-\mathrm{j}a}\end{aligned}}$$

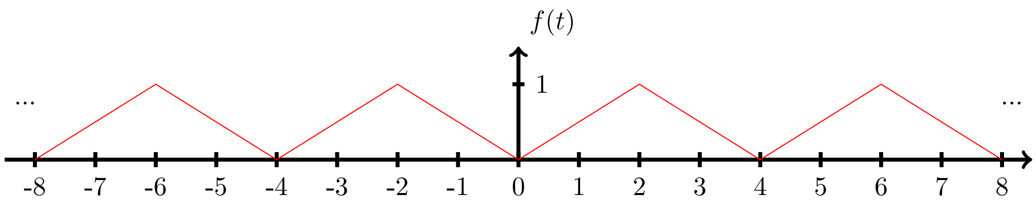
$$\begin{aligned}\int t\mathrm{e}^{-\mathrm{j}at}\mathrm{d}t &= uv - \int v\mathrm{d}u\,,\\ &= t\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}at}}{-\mathrm{j}a} - \int \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}at}}{-\mathrm{j}a}\mathrm{d}t\,,\\ &= t\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}at}}{-\mathrm{j}a} - \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}at}}{(-\mathrm{j}a)^2}\,,\\ &= \frac{\mathrm{j}t\mathrm{e}^{-\mathrm{j}at}}{a} + \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}at}}{a^2}\,,\\ &= \frac{\mathrm{j}at\mathrm{e}^{-\mathrm{j}at}}{a^2} + \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}at}}{a^2}\,.\end{aligned}$$

$$\int t\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{j}n\omega_0 t\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}}{n^2\omega_0^2} + \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}}{n^2\omega_0^2}\,.$$

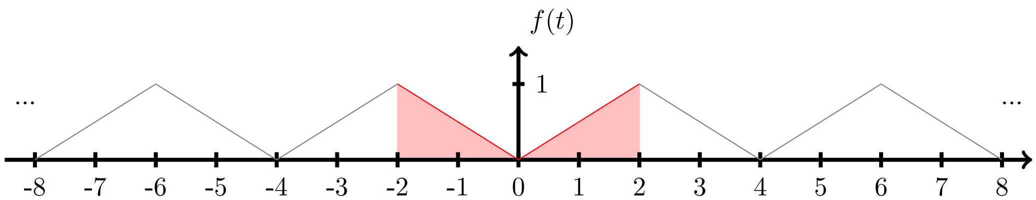
Problème 3 : Méthode alternative

Une question qui revient souvent est celle à savoir si on ne pourrait pas plutôt intégrer la moitié de la période et multiplier le résultat par un facteur 2.

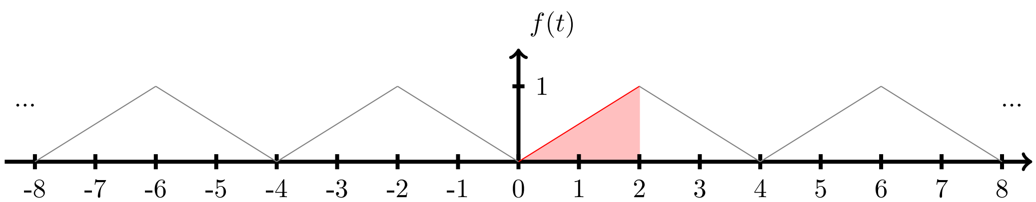
La fonction originale est la suivante :



Si on intègre la fonction sur une période, on trouve cet aire sous la courbe :



On pourrait alors être tenté de faire l'intégrale sur la moitié de la période puis de multiplier le résultat par un facteur 2 :



Or, il faut ce rappeler que ce qui est intégré n'est pas la fonction $f(t)$, mais bien le produit de la fonction $f(t)$ avec une exponentielle complexe. En effet, on a :

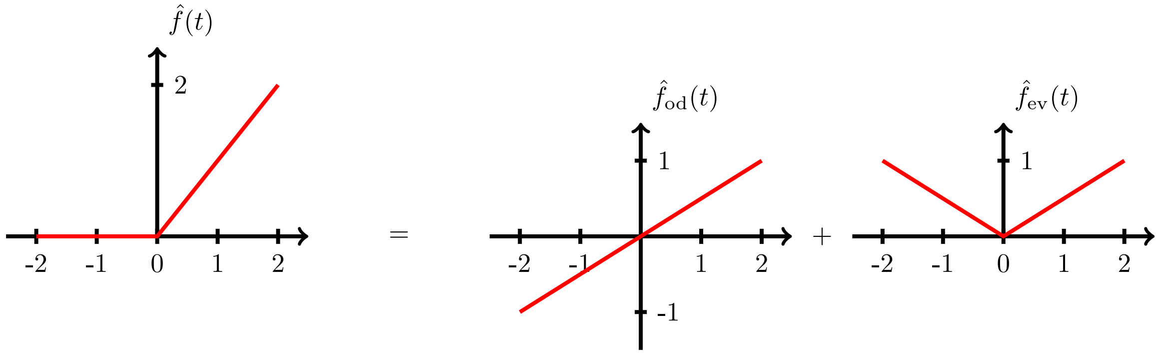
$$\underset{n\neq 0}{F(n)} = \frac{1}{T_0} \int\limits_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) \mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}n\omega_0 t} \mathrm{d}t \,.$$

Le raisonnement de prendre le double de l'intégrale sur la moitié de la plage d'intégration est donc faux !

Il est toutefois possible de simplifier le problème par ce chemin en utilisant les propriétés des séries de Fourier des fonctions paires et impaires. Reprenons le cas du 3e graphique. Si on intègre le double de cette fonction, on a :

$$\hat{f}(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad -2 \leq t < 0 \\ 2 \times \dfrac{1}{2} t & \text{pour} \quad 0 \leq t < 2 \end{cases}$$

Graphiquement, on peut identifier les parties *paire* et *impaire* de la nouvelle fonction $\hat{f}(t)$:



Fonction $\hat{f}(t)$ Partie impaire $\hat{f}_{\mathrm{od}}(t)$ Partie paire $\hat{f}_{\mathrm{ev}}(t)$

On remarque que la partie paire de la nouvelle fonction correspond à notre fonction originale, $f(t)$. On sait aussi que la partie paire d'une fonction engendre ses coefficients de Fourier réels et la partie impaire ses coefficients de Fourier imaginaires. Dans ce cas, il est possible de trouver les coefficients de Fourier de la fonction $\hat{f}(t)$ puis de ne garder que les coefficients réels pour déterminer les coefficients de $\hat{f}_{\mathrm{ev}}(t)$ et, par conséquent, de $f(t)$.

On trouve alors :

$$
\begin{aligned}
\underset{n\neq 0}{\hat{F}(n)} &= \frac{1}{4}\int\limits_0^2 t\mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t\,, \\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{\mathrm{j}n\omega_0 t\mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}n\omega_0 t}}{n^2\omega_o^2} + \frac{\mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}n\omega_0 t}}{n^2\omega_o^2}\right]_0^2 , \\
&= \frac{1}{4}\frac{1}{n^2\omega_0^2}\left[\mathrm{j}n2\omega_0\mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}n2\omega_0} + \mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}n2\omega_0} - 1\right] .
\end{aligned}
$$

En remplaçant ω_0 par $\pi/2$, on a :

$$
\underset{n\neq 0}{\hat{F}(n)} = \frac{1}{4}\frac{4}{n^2\pi^2}\left[\mathrm{j}n\pi\mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}n\pi} + \mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}n\pi} - 1\right] .
$$

Finalement, on a :

$$
\begin{aligned}
\underset{n\neq 0}{F(n)} = \mathcal{RE}\left\{\underset{n\neq 0}{\hat{F}(n)}\right\} &= \mathcal{RE}\left\{\frac{1}{n^2\pi^2}\left[\mathrm{j}n\pi\mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}n\pi} + \mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}n\pi} - 1\right]\right\} , \\
&= \frac{1}{n^2\pi^2}\left[\mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}n\pi} - 1\right] , \\
&= \frac{1}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n - 1\right] .
\end{aligned}
$$

Ainsi, en exploitant les propriétés de parité de la fonction et de sa série de Fourier, on est en mesure de retrouver le même résultat. On voit toutefois que ce n'est pas aussi simple que de multiplier la fonction par un facteur 2. Il ne faut pas perdre de vue que ce qui est intégré est bien la fonction multipliée par une exponentielle complexe et non la fonction seule.