*Jeudi 26 octobre 2017; Durée: 08h30 à 10h20*
*Aucune documentation permise; une calculatrice permise*

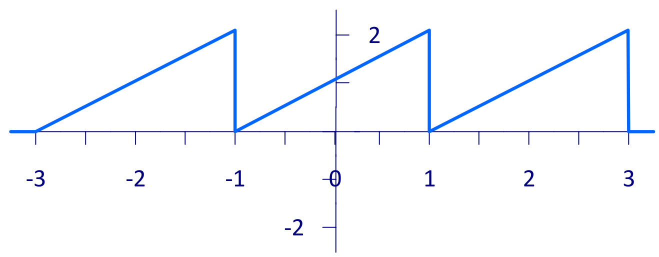
---

**Problème 1 (15 points sur 100)**

Trouvez la transformée de Fourier de la fonction $f(t) = e^{-jt\pi/2}\,\mathrm{Rect}\left(\frac{t-3}{2}\right)$.

**Problème 2 (20 points sur 100)**

Trouvez la transformée de Fourier de la fonction périodique suivante :




$f_p(t) = t+1 \quad -1 \le t < 1$

$f_p(t) = f_p(t-2n) \quad \text{pout tout } n$

**Problème 3 (30 points sur 100)**

En sachant que $\delta_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_0)$

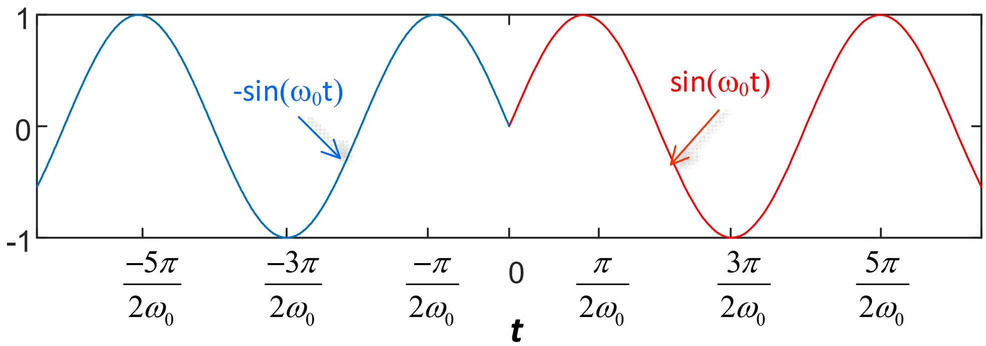
A. (10 points) Donnez une esquisse de $f(t) = \delta_4(t-1)$ et trouvez sa transformée de Fourier.

B. (10 points) Donnez une esquisse du spectre de phase de $f(t) = \delta_4(t-1)$ pour $-5 < \omega < 5$.
Vous pouvez supposer une phase entre moins infini et infini, ou une phase modulo 2π.

C. (10 points) Trouvez la transformée de Fourier $g(t) = \delta_4''(t)$, soit la deuxième dérivée de $\delta_4(t)$.

**Problème 4 (35 points sur 100)**

A. (20 points) Trouvez la transformée de Fourier de la fonction $f(t)=\begin{cases}\sin(\omega_0 t) & t>0\\ -\sin(\omega_0 t) & t<0\end{cases}$.




B. (5 points) Est-ce que la fonction est périodique ? Est-ce que le spectre est discret ?

C. (5 points) Quel est le taux de décroissance de la transformée de Fourier ?

D. (5 points) Est-ce que $f(t)$ est une fonction d'énergie ? Une fonction de puissance ?

| **fonction temporelle** | **transformée** |
|---|---|
| $\mathrm{Rect}\left(t/\tau\right)^{(1)}$ | $\tau\,\mathrm{Sa}\left(\omega\tau/2\right)$ |
| $\mathrm{Tri}\left(t/\tau\right)^{(2)}$ | $\tau\,\mathrm{Sa}^2\left(\omega\tau/2\right)$ |
| $\delta\left(t\right)$ | $1$ |
| $1$ | $2\pi\delta\left(\omega\right)$ |
| $e^{j\omega_0 t}$ | $2\pi\delta\left(\omega-\omega_0\right)$ |
| $\mathrm{U}(t)$ | $1/j\omega+\pi\delta\left(\omega\right)$ |
| $\mathrm{Sgn}(t)$ | $2/j\omega$ |
| $\delta_{T_0}\left(t\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta\left(t-nT_0\right)$ | $\omega_0\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega-n\omega_0\right)$ |
| $e^{-\beta t}\,\mathrm{U}\left(t\right)$ | $\dfrac{1}{\beta+j\omega}$ |
| $e^{-\beta\lvert t\rvert}$ | $\dfrac{2\beta}{\beta^2+\omega^2}$ |
| $\delta'\left(t\right)$ | $j\omega$ |
| $\delta''\left(t\right)$ | $\left(j\omega\right)^2$ |

| **domaine temporelle** | **domaine fréquentiel** |
|---|---|
| $f\left(t\right)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F\left(\omega\right)e^{j\omega t}d\omega$ | $F\left(\omega\right)=\int_{-\infty}^{\infty}f\left(t\right)e^{-j\omega t}dt$ |
| $f(t)$ | $F\left(\omega\right)$ |
| $F\left(t\right)$ | $2\pi f\left(-\omega\right)$ |
| $f(t+a)$ | $e^{ja\omega}F(\omega)$ |
| $e^{jbt}f(t)$ | $F\left(\omega-b\right)$ |
| $f(at)$ | $\dfrac{1}{\lvert a\rvert}F\left(\dfrac{\omega}{a}\right)$ |
| $t^n f\left(t\right)$ | $\left(j\right)^n\dfrac{d^n}{d\omega^n}F\left(\omega\right)$ |
| $\dfrac{d^n}{dt^n}f\left(t\right)$ | $\left(j\omega\right)^n F\left(\omega\right)$ |
| $f(t)$ pas continue | décroissance $1/\omega$ |
| $f\left(t\right)$ continue<br>$f'\left(t\right)$ pas continue | décroissance $1/\omega^2$ |
| $f\left(t\right),f'\left(t\right)$ continue<br>$f''\left(t\right)$ pas continue | décroissance $1/\omega^3$ |
| $E=\int_{-\infty}^{+\infty}\lvert f(t)\rvert^2\,dt$ | $E=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\lvert F\left(\omega\right)\rvert^2\,d\omega$ |

---

[1] $\mathrm{Rect}\left(\dfrac{t-t_0}{\tau}\right)$ rectangle de hauteur un, centré sur $t$=$t_0$, et de longueur $\tau$.

[2] $\mathrm{Tri}\left(\dfrac{t-t_0}{\tau}\right)$ triangle de hauteur un, $\tau$ centré sur $t$=$t_0$, avec un base de longueur $2\tau$.

| | |
|---|---|
| $f(t) \quad \Leftrightarrow \quad F(\omega) = TF\{f(t)\}$<br>$F(\omega) = A(\omega) + jB(\omega) = \lvert F(\omega)\rvert e^{jArg(\omega)}$<br>$E(\omega) = \dfrac{1}{2\pi}\lvert F(\omega)\rvert^2$ | |
| **fonction réelle en temps** | |
| $f(t)$ réelle $\Leftrightarrow \quad F^*(\omega) = F(-\omega)$ | |
| **paire** | **impaire** |
| $A(\omega) = \operatorname{Re} F(\omega)$ | $B(\omega) = \operatorname{Im} F(\omega)$ |
| $\lvert F(\omega)\rvert$ | $\operatorname{Arg} F(\omega)$ |
| $f(t) = f_{paire}(t) + f_{impaire}(t)$ | |
| $f_{paire}(t) \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Re} F(\omega)$ | $f_{impaire}(t) \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Im} F(\omega)$ |

| **fonction delta, etc.** |
|---|
| $f_p(t) \Leftrightarrow 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_{Série}(n)\delta(\omega - n\omega_0)$<br>$f_p(t)$ périodique avec période $T_0$, $T_0\omega_0 = 2\pi$<br>$F_{Série}(n) = \dfrac{1}{T_0} \cdot F_r(\omega)\Big\rvert_{\omega=n\omega_0}$, $f_r(t) = \begin{cases} f_p(t) & \dfrac{-T_o}{2} < t < \dfrac{T_o}{2} \\ 0 & ailleurs \end{cases}$ |
| $f'(a) = \left[\lim_{t\to a^+} f(t) - \lim_{t\to a^-} f(t)\right]\delta(t-a)$<br>$t = a$ est un point de discontinuité de $f(t)$ |
| $h(t)\delta(t-t_0) = h(t_0)\delta(t-t_0)$<br>propriété d'échantillonnage |
| $x_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nx_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi nx/x_0}$ |

| | |
|---|---|
| $\int e^{ax} \quad dx = \dfrac{1}{a} e^{ax}$ | $\int x \cos ax \quad dx = \dfrac{1}{a^2} \cos ax + \dfrac{x}{a} \sin ax$ |
| $\int e^{bx} \sin ax \quad dx = \dfrac{1}{a^2 + b^2} e^{bx} (b \sin ax -$ | $\int xe^{ax} \quad dx = \left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{1}{a^2}\right)e^{ax}$ |
| $\int e^{bx} \cos ax \quad dx = \dfrac{1}{a^2 + b^2} e^{bx} (a \sin ax$ | $\int x^2 e^{ax} \quad dx = \left(\dfrac{x^2}{a} - \dfrac{2x}{a^2} + \dfrac{2}{a^3}\right)e^{ax}$ |
| $\cos x = \dfrac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$ | $e^{jx} = \cos x + j \sin x$ |
| $\sin x = \dfrac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$ | $e^{jn\pi} = (-1)^n$ |
| $\cos^2\theta = \dfrac{1}{2}[1 + \cos 2\theta]$ | $e^{jn\pi/2} = \begin{cases} (-1)^{n/2} & n \text{ paire} \\ j(-1)^{(n-1)/2} & n \text{ impaire} \end{cases}$ |
| $\cos\theta = \sin(\pi/2 - \theta)$ | |