MAT-1903 Solutionnaire de l'examen 1 du 27 octobre 2011

Michel Duguay poste 3557, dépanneuse Kira Peycheva

N.B. La notation des commandes Matlab est utilisée pour dénoter les matrices et les vecteurs colonnes.

Question #1 (20 points) Forme échelon réduit d'une matrice

Soit la matrice A = [-1 2 ; 3 4], et les vecteurs **b** = [4 ; 38] et **X** = [x_1; x_2]. En vue de solutionner l'équation A***X** = **b** trouver la forme échelon réduit de la matrice augmentée et en déduire la valeur numérique de **X.** Comment peut-on exprimer en mots la relation entre le vecteur colonne **b** et les vecteurs colonnes de A?

Solution. À l'aide d'opérations sur les lignes on a successivement:

AUG =

$$\begin{matrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 38 \end{matrix} \quad \approx \quad \begin{matrix} 1 & -2 & -4 \\ 3 & 4 & 38 \end{matrix} \quad \approx \quad \begin{matrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 10 & 50 \end{matrix} \quad \approx \quad \begin{matrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{matrix}$$

En passant aux équations on a :

Première ligne : $x_1 = 6$

Deuxième ligne : $x_2 = 5$ ce qui donne **X** = [x_1; x_2] = [6 ; 5]

Deuxième sous-question : Le vecteur **b** est la combinaison linéaire des deux vecteurs colonnes de la matrice A avec x_1 et x_2 comme poids.

Question #2 (20 points) Vecteurs de base pour Nul A.

Une matrice A a la forme échelon suivante :

A≈ [1 1 0 -3 ; 0 1 1 -2 ; 0 0 0 0 ; 0 0 0 0]

-a) Quelle équation matricielle doit satisfaire un vecteur **X** pour faire partie de l'espace Nul A?

-b) Trouvez les vecteurs de base de l'espace Nul A. Vérifiez explicitement votre réponse.

Solution de -a) : L'équation matricielle est A***X** = **0**

Solution de -b) :

On a donc la matrice A :

A =

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Par une opération sur les lignes 1 et 2 on arrive à la forme échelon réduit :

$$\begin{matrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Ce qui mis en équations donne:

$x_1 = x_3 + x_4$

$x_2 = - x_3 + 2x_4$ d'où on déduit :

X = x_3**Vnul1** + x_4**Vnul2** avec

Vnul1 =

$$\begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}$$

Vnul2 =

$$\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}$$

A***Vnul1** =

$$\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

A***Vnul2** =

$$\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

Question # 3 (15 points) Factorisation LU

-a) Accomplir la factorisation LU de la matrice A = [5 6; 15 11] et vérifiez explicitement le produit matriciel L*U.

-b) Solutionner l'équation A***X** = **b** = [-13 ; 17] en utilisant la factorisation LU.

Solution.

$A = \begin{matrix} 5 & 6 \\ 15 & 11 \end{matrix}$

On prend d'abord le premier vecteur colonne de A comme premier vecteur colonne de L, puis on le divise par 5:

$L = \begin{matrix} 5 & 0 \\ 15 & * \end{matrix} \approx \begin{matrix} 1 & 0 \\ 3 & * \end{matrix}$

En parallèle on réduit A à sa forme échelon pour bâtir U:

$U = \begin{matrix} 5 & 6 \\ 0 & -7 \end{matrix}$

On saisit le pivot -7 pour le mettre dans L, qui devient :

$L = \begin{matrix} 1 & 0 \\ 3 & -7 \end{matrix}$

On divise le -7 par -7 et on obtient :

$L = \begin{matrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{matrix}$ on vérifie que le produit L*U = A

-b) On pose L*U***X** = **b** **(remarquez que les vecteurs sont mis en caractères gras par souci de clarité)**

On définit U***X** = **Y** et on solutionne L***Y** = **b**. On a **Y** = inv(L)***b**

$= \begin{matrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{matrix} * \begin{matrix} \mathbf{-13} \\ \mathbf{17} \end{matrix} = \begin{matrix} \mathbf{-13} \\ \mathbf{56} \end{matrix}$

Ayant **Y** on solutionne maintenant U***X** = **Y** = [-13 ; 56]

$\mathbf{X} = inv(U) * \mathbf{Y} = (1/-35)* \begin{matrix} -7 & -6 \\ 0 & 5 \end{matrix} * \begin{matrix} \mathbf{-13} \\ \mathbf{56} \end{matrix} = \begin{matrix} 1/5 & 6/35 \\ 0 & -1/7 \end{matrix} * \begin{matrix} \mathbf{-13} \\ \mathbf{56} \end{matrix} = \begin{matrix} \mathbf{7} \\ \mathbf{-8} \end{matrix}$

Question # 4 (20 points) Valeurs propres et vecteurs propres

Soit la matrice A = [14 -10 ; 5 -1]. Trouver ses valeurs propres et les vecteurs propres qui leur sont associés. Pour chacun de ces vecteurs vérifier explicitement l'équation $A*\mathbf{V_i} = \lambda_i \mathbf{V_i}$.

$A = \begin{matrix} 14 & -10 \\ 5 & -1 \end{matrix}$ on forme la matrice $A - \lambda I_2 = \begin{matrix} 14 - \lambda & -10 \\ 5 & -1 - \lambda \end{matrix}$

Il faut que le déterminant de la matrice $A - \lambda I_2$ soit égal à zéro, ce qui conduit à l'équation :

$(14 - \lambda)(-1 - \lambda) - (10*5) = 0$

$\lambda^2 - 13\lambda + 36 = 0$ d'où l'on tire :

$\lambda_1 = (13 + 5)/2 = 9$ et $\lambda_2 = (13 – 5)/2 = 4$

Le vecteur propre $\mathbf{v_1}$ pour le premier lambda sera tel que $(A – 9I_1)*\mathbf{v_1} = 0$

Donc

$$\begin{matrix} 5 & -10 \\ 5 & -10 \end{matrix} * \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} = \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}$$

Ce qui correspond à l'unique équation : $5x_1 – 10x_2 = 0$ donc $x_1 = 2x_2$ avec x_2 libre choisi égal à 1.

Ce qui donne **v1** = [2 ; 1]

Pour le deuxième lamda $\lambda_2 = 4$ on a :

$$\begin{matrix} 10 & -10 \\ 5 & -5 \end{matrix} * \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} = 0$$

Ce qui donne l'unique équation $x_1 = x_2$. On prend $x_2 = 1$ et le deuxième vecteur propre est $\mathbf{v_2}$ = [1 ; 1].

Question # 6 (10 points) Interprétation de commandes Matlab ci-dessous et au verso

Interpréter les résultats des commandes Matlab données ci-dessous.

Solution : Les interprétations sont écrites sur les lignes de command :

```
>>  A = [3  0  2  0; 1  3  1  0; 0  1  1  0; 0  0  0  4]     commande qui forme la matrice A

A =

    3    0    2    0

    1    3    1    0

    0    1    1    0

    0    0    0    4

>> rref(A)    commande qui réduit la matrice A à sa forme échelon réduit

ans =

    1    0    0    0

    0    1    0    0

    0    0    1    0

    0    0    0    1
```

>> [V,D] = eig(A, 'nobalance')   commande qui donne les vecteurs propres **Vi** et les valeurs propres mises sur la diagonale d'une matrice D

```
V =

   -0.6667    1.0000   -1.0000         0

   -1.0000   -0.5000   -0.0000         0

   -0.3333   -0.5000    1.0000         0

         0         0         0    1.0000

D =

    4.0000         0         0         0

         0    2.0000         0         0

         0         0    1.0000         0

         0         0         0    4.0000
```

>> rats(V)   commande qui met les résultats sous forme de fractions rationnelles

```
ans =

     -2/3          1          -1           0

      -1         -1/2          0           0

     -1/3        -1/2          1           0

       0           0           0           1
```

>> **V1** = [-2/3; -1 ; -1/3 ; 0]; commandes qui déclarent les vecteurs **Vi**

>> **V2** = [1 ; -1/2 ; -1/2 ; 0];

>> **V3** = [-1 ; 0 ; 1 ; 0];

>> **V4** = [0 ; 0 ; 0 ; 1];

>> rats(A***V1**)   commande qui donne le résultat du produit matriciel A*Vi sous forme de fractions

```
ans =

     -8/3

      -4

     -4/3

       0
```

>> rats(A***V2**)

```
ans =      2

          -1

          -1

           0
```