Mini Test 2

MAT-2910 : Analyse Numérique pour ingénieur — Hiver 2012

Remarques :

1) Toutes les réponses doivent être justifiées. Dans le cas contraire, une réponse sera considérée comme nulle.
2) Seules les calculatrices avec l'auto-collant de la Faculté sont autorisées.
3) L'examen est noté sur 100 points et compte pour 12.5% de la note finale.

Aide Mémoire

⊙ Normes vectorielles :

$$||\vec{x}||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad ||\vec{x}||_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i|$$

⊙ Normes matricielles :

$$||A||_1 = \max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|, \quad ||A||_\infty = \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|,$$

⊙ Conditionnement : $\text{cond}A = ||A||\ ||A^{-1}||$

⊙ Borne pour l'erreur : si $\vec{x}$ est la solution analytique et $\vec{x}^*$ est une solution approximative de $A\vec{x} = \vec{b}$, on pose $\vec{e} = \vec{x} - \vec{x}^*$ et $\vec{r} = \vec{b} - A\vec{x}^*$ et on a :

$$\frac{1}{\text{cond}A}\ \frac{||\vec{r}||}{||\vec{b}||} \le \frac{||\vec{e}||}{||\vec{x}||} \le \text{cond}A\ \frac{||\vec{r}||}{||\vec{b}||} \quad \text{et} \quad \max\left(\frac{||\vec{e}||\ ||\vec{b}||}{||\vec{x}||\ ||\vec{r}||}\ ,\ \frac{||\vec{x}||\ ||\vec{r}||}{||\vec{e}||\ ||\vec{b}||}\right) \le \text{cond}A$$

⊙ Systèmes non-linéaires, méthode de Newton : pour $\vec{x}^i$ donné, on résout :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x}^i) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\vec{x}^i) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{x}^i) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\vec{x}^i) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\vec{x}^i) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\vec{x}^i) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\vec{x}^i) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\vec{x}^i) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\vec{x}^i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \vdots \\ \delta x_n \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} f_1(\vec{x}^i) \\ f_2(\vec{x}^i) \\ \vdots \\ f_n(\vec{x}^i) \end{bmatrix}$$

et on pose $\vec{x}^{i+1} = \vec{x}^i + \vec{\delta x}$

$$\text{Équations différentielles : } \begin{cases} y'(t) = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

⊙ Euler (ordre 1) : $y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$

⊙ Taylor (ordre 2) : $y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) + \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial f(t_n, y_n)}{\partial t} + \frac{\partial f(t_n, y_n)}{\partial y} f(t_n, y_n)\right)$

⊙ Euler modifiée (ordre 2) : $\hat{y} = y_n + hf(t_n, y_n)$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(f(t_n, y_n) + f(t_n + h, \hat{y})\right)$$

⊙ Point milieu (ordre 2) : $k_1 = hf(t_n, y_n)$

$$y_{n+1} = y_n + h\left(f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2})\right)$$

⊙ Runge-Kutta d'ordre 4 :

$$\begin{aligned}
k_1 &= hf(t_n, y_n) \\
k_2 &= hf(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}) \\
k_3 &= hf(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}) \\
k_4 &= hf(t_n + h, y_n + k_3) \\
y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)
\end{aligned}$$

$$\text{Système d'équations différentielles : } \begin{cases} \vec{y}'(t) = \vec{f}(t, \vec{y}), \\ \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0 \end{cases}$$

⊙ Runge-Kutta d'ordre 4 pour les systèmes :

$$\begin{aligned}
k_{i,1} &= hf_i(t_n, y_{1,n}, y_{2,n}, \cdots, y_{m,n}) \text{ pour } i = 1, 2, \cdots, m \\
k_{i,2} &= hf_i(t_n + \frac{h}{2}, y_{1,n} + \frac{k_{1,1}}{2}, y_{2,n} + \frac{k_{2,1}}{2}, \cdots, y_{m,n} + \frac{k_{m,1}}{2}) \text{ pour } i = 1, 2, \cdots, m \\
k_{i,3} &= hf_i(t_n + \frac{h}{2}, y_{1,n} + \frac{k_{1,2}}{2}, y_{2,n} + \frac{k_{2,2}}{2}, \cdots, y_{m,n} + \frac{k_{m,2}}{2}) \text{ pour } i = 1, 2, \cdots, m \\
k_{i,4} &= hf_i(t_n + h, y_{1,n} + k_{1,3}, y_{2,n} + k_{2,3}, \cdots, y_{m,n} + k_{m,3}) \text{ pour } i = 1, 2, \cdots, m \\
y_{i,n+1} &= y_{i,n} + \frac{1}{6}(k_{i,1} + 2k_{i,2} + 2k_{i,3} + k_{i,4}) \text{ pour } i = 1, 2, \cdots, m
\end{aligned}$$

Question 1. (50 points)

On cherche l'intersection de deux cercles, formant le système non linéaire suivant

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4 & = 0 \\ x^2 - 4x + y^2 - 4y + 5 & = 0 \end{cases}$$

a) [15 pts] Quelles sont les conditions sur x et y pour que la matrice Jacobienne du système soit inversible ?

b) [15 pts] Effectuer une itération de la méthode de Newton en partant du point $(x_0, y_0) = (2, 0)$.

c) [15 pts] Sans faire la résolution, en partant du point calculé en b), expliciter le système à résoudre pour la prochaine itération.

e) [5 pts] Dire brièvement dans quel cas la méthode de Newton est d'ordre 1. (Indice : la situation est similaire au cas unidimensionnel).

Question 2. (50 points)

On considère l'équation différentielle

$$\begin{cases} y'(t) & = t\, y(t) \\ y(0) & = 2 \end{cases}$$

a) [15 pts] Vérifier que sa solution analytique est donnée par

$$y(t) = 2e^{t^2/2}$$

b) [15 pts] Calculer la valeur approchée de $y(0.1)$ à l'aide de la méthode Euler explicite avec $h = 0.1$.

c) [15 pts] Calculer la valeur approchée de $y(0.1)$ à l'aide de la méthode du point milieu (RK2) avec $h = 0.1$.

d) [5 pts] Sachant que la méthode du point milieu est d'ordre 2, quel devrait être le pas de temps h pour que l'approximation de $y(0.1)$ par cette méthode soit inférieure à 5×10^{-8} (Indice : servez vous de la solution exacte en t $= 0.1$ et du résultat obtenu en c))