MAT-10364 – Mathématiques de l'ingénieur II

Examen type III, H08

Question 1

Soit S la portion du paraboloïde

$$z = x^2 + y^2, \quad z \leq 1.$$

Si r désigne la longueur du vecteur position $\vec{r} = (x, y, z)$ et si $\phi = r^2$, calculer le flux du champ

$$\vec{v} = \nabla\phi,$$

à travers S dans la direction de la normale dont la troisième composante est négative.

Question 2

Soit $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et $h > 0$. On considère la surface d'équation

$$\vec{r}(u, v) = (u\cos v, u\sin v, h - u\,\mathrm{cotan}\,\alpha), \;\; u \in [0, h\tan\alpha], \;\; v \in [0, 2\pi].$$

Soit $\vec{a} = (0, 0, h)$ et $\vec{w} = \nabla \times (\vec{a} \times \vec{r})$.

Calculer le flux de $\vec{w}$ à travers la surface dans la direction de la normale dont la troisième composante est positive.

Question 3

On considère le solide K délimité par

- la portion P du paraboloïde $z = x^2 + y^2 - 4$ correspondant à $z \in [-4, 0]$;
- le disque D $z = 0, x^2 + y^2 \leq 4$.

Soit $\vec{W} = \nabla \times ((y\vec{i} + x\vec{j} + z\vec{k}) \times (z\vec{i} + y\vec{j} + x\vec{k}))$.
Sans faire aucune paramétrisation de surface, calculer les flux de $\vec{W}$

1. à travers P dans la direction intérieure à K;
2. à travers D dans la direction extérieure à K;
3. à travers la paroi de K, dans la direction extérieure.

Question 4

On désigne par Σ la portion de cône

$$z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}, \quad 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,$$

et par $\vec{n}$ la normale à Σ dont la troisième composante est négative. Calculer le flux de $\vec{v} = (0, x^2, yz)$ à travers Σ dans la direction de $\vec{n}$.

Question 5

On considère une plaque homogène D située dans le plan xOy et délimitée par une courbe simple fermée C. On suppose connue les quantités géométriques et physiques suivantes:

- masse surfacique (densité):σ,
- aire :A,
- position du centre de gravité: $(\bar{x}, \bar{y})$
- moment d'inertie polaire :J_0.

Evaluer l'intégrale curviligne suivante en fonction de ces quantités:

$$I = \int_C \left(-yx^2 + \frac{3}{2}y^2 \right) dx + (x^2 + xy^2 + x)\, dy.$$

Question 6

On désigne par Σ la portion du paraboloïde

$$z = 1 - (x^2 + y^2),$$

pour laquelle $z \in [0, 1]$. Si $\vec{n}$ désigne la normale à Σ dont la troisième composante est positive, calculer le flux du rotationnel de

$$\vec{a} = (x, y + x, zx),$$

à travers Σ dans la direction $\vec{n}$.

Question 7

Parmi les énoncés suivants, identifier ceux qui sont vrais et ceux qui sont faux. Pour ce faire, ne répondre que vrai ou faux à chacune des questions.

a) Le travail d'un champ conservatif sur une courbe C est toujours nul.

b) Si $\vec{F}$ est défini et dérivable sur $D = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ et si son rotationnel est nul sur D, alors $\vec{F}$ est conservatif sur D.

c) Si $\vec{u}$ est défini et dérivable sur un domaine D de $\mathbb{R}^3$, le flux de $\mathrm{rot}\,(\vec{u})$ à travers une surface fermée, contenue dans D, est nul.

d) La divergence d'un champ conservatif est toujours nulle.

e) Soit $\vec{F}$ dérivable sur $\mathbb{R}^3$ tel que son rotationnel est constant et égal à $\vec{a}$. Si $\vec{a} \cdot \vec{k} \neq 0$, alors pour tout domaine D du plan xy on a

$$\mathrm{Aire}(D) \;=\; \frac{1}{|\vec{a} \cdot \vec{k}|} \left| \int_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{r} \right|,$$

où ∂D est la frontière de D.

f) Si le travail d'un champ dérivable $\vec{F}$ entre deux points quelconques de son domaine est independant du chemin qui les relie, le flux de $\mathrm{rot}\,(\vec{F})$ à travers n'importe quelle surface est nul.

g) Si le travail d'un champ dérivable $\vec{G}$ sur une courbe fermée C de $\mathbb{R}^3$ est nul, alors $\mathrm{rot}\,(\vec{G}) = (0,0,0)$. Qualifier de vrai ou de faux (uniquement) les énoncés qui suivent. Comme d'habitude, $\vec{r}$ dénote le vecteur position $\vec{r} = (x, y, z)$ et $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ les vecteurs unitaires des trois axes Ox, Oy et Oz.

Qualifier de vrai ou de faux (uniquement) les énoncés qui suivent. Comme d'habitude, $\vec{r}$ dénote le vecteur position $\vec{r} = (x, y, z)$ et $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ les vecteurs unitaires des trois axes Ox, Oy et Oz.

a) Si $K \subset \mathbb{R}^3$ est un solide quelconque dont la parois est une surface notée S et que la normale extérieure à S est notée $\vec{n}$, alors on a

$$\iint\limits_S \vec{r} \cdot \vec{n}\, dA = 2\mathrm{Vol}\,(K).$$

b) Soit D un domaine du plan yOz (c'est-à-dire $x = 0$) dont la frontière est une courbe fermée C. Soit $\vec{v} = (1,1,1) \times \vec{r}$. On a

$$\int_C \vec{v} \cdot \, d\vec{r} = \pm 2 \,\text{Aire}\,(D).$$

c) Soit C une courbe fermée de $\mathbb{R}^2$ et D le domaine délimité par C. On a

$$\text{Aire}\,(D) = \frac{1}{2} \int_C (y, x) \cdot \, d\vec{r}.$$

d) Soit $T = x^2 + y^2 + z^2$ et $\vec{v} = \nabla T$. Si on pose $\vec{w} = \vec{v} \times \vec{k}$, alors le travail de $\vec{w}$ sur toutes les courbes fermées de $\mathbb{R}^3$ est nul.

e) Si $\vec{F}$ est un champ de vecteurs dérivable partout sur $\mathbb{R}^3$ pour lequel

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dA = 0$$

pour toutes les sphères S centrées en $(0,0,0)$, alors la divergence div $(\vec{F})$ est nulle partout sur $\mathbb{R}^3$.