GEL-3003 – Signaux et systèmes discrets
Examen 3
(correction sur 100 points, pondération de 27.5%)
Mardi 7 décembre 2020
Durée : 8h30 à 10h30 - 2h00

Le présent examen est un examen de cours. Il vise à vous évaluer sur la compréhension du cours. Les consignes sont les suivantes :

— Répondez aux questions sur le formulaire.
— Les notes manuscrites sont permises. Aucune slide n'est cependant permise. Il en est de même pour le livre support au cours.
— L'examen compte 4 questions pour un total de 100 points.
— Laissez des traces de vos raisonnements et justifiez vos résultats. **TOUTE réponse NON JUSTIFIÉE n'aura aucun point.**
— Calculatrice autorisée.

L'examen comporte 12 pages dont une page de formulaire. Vérifiez qu'aucune page n'est manquante. La justesse, la méthodologie et l'analyse rapporteront la majorité des points. Les autres points quantifieront les résultats. Enfin, si vous êtes bloqués à une question, passez à la suivante et revenez à la fin si le temps vous le permet.

Bon courage à toutes et à tous ! ! !

Nom, Prénom et matricule : ______________________________

Série géométrique : $\sum_{k=0}^{N} a^k = \frac{1-a^{N+1}}{1-a}$ $\qquad \sum_{k=1}^{N} a^k = \frac{a(1-a^N)}{1-a}$

Relations d'Euler : $\cos(\theta) = \frac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2}$ $\qquad \sin(\theta) = \frac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{2j}$

Convolution : $y(n) = x(n) * h(n) = \sum_m x(m)h(n-m) = \sum_m h(m)x(n-m)$

Corrélation : $r_{ab}(n) = a(n) ** b(n) = a(n) * b(-n)$ on cherche $b(n)$ dans $a(n)$

Transformée en Z : $X(z) = \sum_n x(n)z^{-n}$, $\qquad a^n u(n) \leftrightarrow \frac{1}{1-az^{-1}}, |z| > |a|$,

$-a^n u(-n-1) \leftrightarrow \frac{1}{1-az^{-1}}, |z| < |a|$

Propriétés de la TZ :

Linéarité $a_1x_1(n) + a_2x_2(n) \to a_1X_1(z) + a_2X_2(z)$
Retard $x(n-D) \to z^{-D}X(z)$
Convolution $y(n) = x(n) * h(n) \to Y(z) = X(z)H(z)$

TFTD :

$X(\omega) = \sum_n x(n)e^{-j\omega n}$ $\qquad X(\omega) = X(\omega + 2\pi m)$

$x(n) * y(n) \leftrightarrow X(\omega)Y(\omega)$ $\qquad x(n)y(n) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}[X(\omega) \circledast Y(\omega)]$

$u(n) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{1-e^{-j\omega}} + copies$ $\qquad e^{j\omega_0 n} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_0) + copies$

Régime transitoire RII : $\rho^{n_{eff}} = \epsilon$ où $\rho = \max_i |p_i|$

Dél. de phase et de groupe : $d(\omega) = -\frac{\angle H(\omega)}{\omega}$ $\qquad d_g(\omega) = -\frac{d}{d\omega}[\angle H(\omega)]$

Sinus cardinal : $\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$

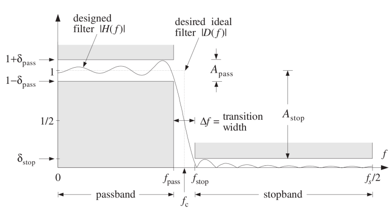


Fig. 10.2.1 Magnitude response specifications for a lowpass filter.

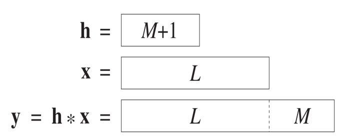


Fig. 4.1.1 Relative lengths of filter, input, and output blocks.

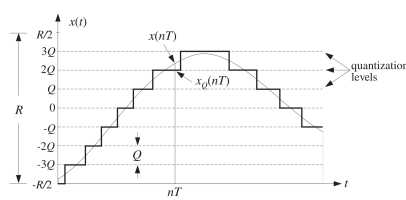


Fig. 2.1.2 Signal quantization.

- 10.2.5 $\quad \delta_{pass} = \frac{10^{A_{pass}/20}-1}{10^{A_{pass}/20}+1} \qquad \delta_{stop} = 10^{-A_{stop}/20}$
- 10.2.6-7 $\quad \delta = \min(\delta_{pass}, \delta_{stop})$
- Table 10.2.1

Window	δ	A_{stop}	A_{pass}	D
Rectangular	8.9%	21 dB	1.55 dB	0.92
Hamming	0.2%	54 dB	0.03 dB	3.21
Kaiser	variable δ	$-20\log_{10}\delta$	17.372δ	$(A-7.95)/14.36$

$\rightarrow D = \begin{cases} \frac{A-7.95}{14.36}, & A > 21 \\ 0.922, & A \le 21 \end{cases}$

  - Si Kaiser (10.2.10) $\quad \alpha = \begin{cases} 0.1102(A-8.7), & A \ge 50 \\ 0.5842(A-21)^{0.4} + 0.07886(A-21), & 21 < A < 50 \\ 0, & A \le 21 \end{cases} \qquad A = -20\log_{10}\delta$

- 10.2.1 $\quad \Delta f = f_{stop} - f_{pass} \qquad f_c = \frac{1}{2}(f_{pass} + f_{stop}) \qquad \omega_c = 2\pi f_c/f_s$
- 10.2.11 $\quad N = 1 + \frac{Df_s}{\Delta f}$ (arrondir à entier impair supérieur) $\rightarrow M = \frac{N-1}{2}$
- 10.2.14 $\quad h(n) = w_i(n-M, N) \cdot \frac{\omega_c}{\pi}\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega_c}{\pi}[n-M]\right) \qquad 0 \le n \le N-1$

18

Fenêtre rectangulaire : $w_R(n) = u(n) - u(n-L) \leftrightarrow \frac{\sin(\omega L/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega(L-1)/2}$

TFD : $X(\omega_k) = \sum_n x(n)\, e^{-j\omega_k n}$ $\qquad \omega_k = \frac{2\pi k}{N}$, $k = 0, 1, \dots, N-1$

TFTD inverse : $x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_0}^{\omega_0 + 2\pi} X(\omega)\, e^{j\omega n} d\omega$

TFD inverse : $\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(\omega_k) e^{j\omega_k n}$

Extension périodique : $\tilde{x}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n + mN)$

Convolution circulaire : $\tilde{Y}(\omega_k) = X(\omega_k) H(\omega_k) \leftrightarrow \tilde{y}(n) = x(n) \circledast h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} y(n + mN)$

Sur-échantillonnage : $x'_{up}(n') = \begin{cases} x(n), & n' = nL \\ 0, & ailleurs \end{cases} \leftrightarrow X'_{up}(\omega') = X(\omega' L)$

Sous-échantillonnage : $x_{down}(n) = x'(n'L) \leftrightarrow \frac{1}{L} \sum_{m=0}^{L-1} X'\left(\frac{\omega - 2\pi m}{L}\right)$

Reconstruction : $y_a(t) = \sum_n y(n) h(t - nT)$ $\qquad |H_B(f)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^{2N}}$ (Butterworth)

$h_{id}(t) = \mathrm{sinc}(t/T)$ $\qquad H_{id}(f) = \begin{cases} T, & |f| \leq 0.5/T \\ 0, & ailleurs \end{cases}$

$h_0(t) = u(t) - u(t - T)$ $\qquad H_0(f) = T\,\mathrm{sinc}(fT)\, e^{-j\pi f T}$

$h_1(t) = \left(1 - \frac{|t|}{T}\right)[u(t+T) - u(t-T)]$ $\qquad H_1(f) = T\,\mathrm{sinc}^2(fT)$

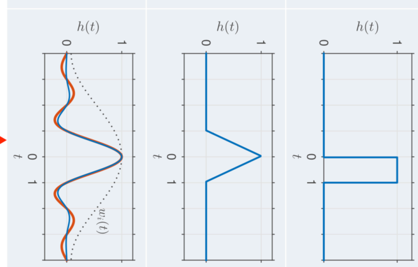
Quantification : $Q = \frac{R}{2^B}$ $\qquad e_{rms} = \frac{Q}{\sqrt{12}}$ $\qquad S_{ee}(f) = \frac{e_{rms}^2}{f_s}$ $\qquad S_{ee}(\omega) = \frac{e_{rms}^2}{2\pi}$

$\Delta B = (p + 0.5)\log_2(L) - 0.5\log_2\left(\frac{\pi^{2p}}{2p+1}\right)$ $\qquad H_{NS}(\omega') = (1 - e^{-j\omega'})^p$

Ordre 0 (échelon) — $H(\omega') = \frac{\sin(\omega' L/2)}{\sin(\omega'/2)} e^{-j\omega'(L-1)/2}$

Ordre 1 (linéaire) — $H(\omega') = \frac{1}{L}\left[\frac{\sin(\omega' L/2)}{\sin(\omega'/2)}\right]^2$

Idéal fenêtré — $H(\omega') = L\,[W_i(\omega') \circledast D(\omega')]$



On doit échantillonner ces fonctions continues en mettant L points par unité.

Réponse en fréquence du filtre PB idéal (boîte).

$R = 20\log_{10}\left(\frac{A_{max}}{A_{min}}\right)$

- Table 10.2.2

Window	R	c
Rectangular	13 dB	1
Hamming	40 dB	2
Kaiser	variable R	$6(R+12)/155$

$L = 1 + \frac{f_s c}{\Delta f_w} = 1 + \frac{2\pi c}{\Delta \omega_w}$ (arrondir à entier sup.)

- Si Kaiser

10.2.26 $\quad \alpha = \begin{cases} 0.12438(R + 6.3), & 60 \leq R < 120 \\ 0.76609(R - 13.26)^{0.4} + 0.09834(R - 13.26), & 13.26 < R < 60 \\ 0, & R \leq 13.26 \end{cases}$

- 9.1.18 $\quad L = \frac{f_s c}{\Delta f_w} = \frac{2\pi c}{\Delta \omega_w}$ (rectangulaire et Hamming, arrondir à entier sup.)

- 10.2.28 $\quad x_i(n) = w_i(n, L) x(n) \qquad 0 \leq n \leq L-1 \qquad i = \{R, H, K\}$

1. **(15 points) Identification de deux fréquences d'un signal par DFT** Le signal suivant :

$$x(n) = 5.6cos(0.4\pi n) + 0.14cos(0.6\pi n) + 0.25cos(0.8\pi n)$$

On veut identifier par DFT les trois fréquences du signal.

(a) (10 points) De combien d'échantillons a-t-on besoin pour bien distinguer les deux composantes ? Spécifier la fenêtre considérée et les valeurs des paramètres R, c et α (si vous utilisez la fenêtre de Kaiser).

Pas à l'examen

(b) (5 points) $X(k), 0 \leq k \leq N-1$ est la TFD de $x(n)$. Quelle doit être la valeur de N pour que vous puissiez déterminer les valeurs des fréquences numériques $\{0.4\pi, 0.6\pi, 0.8\pi\}$.

2. **(45 points) Interpolation**
Le signal $x(n)$ est limité en fréquence à la bande $[-15kHz, +15kHz]$ et $f_s = 50$ kHz. Le spectre associé au signal est constant dans cette bande.
   (a) (10 points) On souhaite étudier le système de la FIGURE 1 :

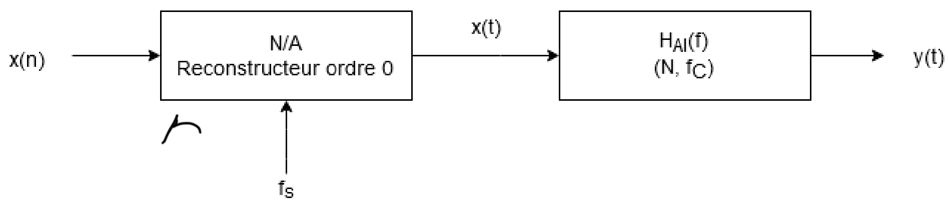


FIGURE 1 – Système composé d'un convertisseur N/A avec reconstructeur d'ordre 0 et d'un filtre anti-image de type Butterworth (N et f_c).

Le filtre anti-image $H_{AI}(f)$ est un filtre de Butterworth d'ordre N et de fréquence de coupure $f_c = 28$ kHz. Donner la valeur minimale de l'ordre N du filtre $H_{AI}(f)$ pour que les images spectrales qui sont présentes dans le signal $x(t)$ soient atténuées d'au moins 60 dB par le filtre $H_{AI}(f)$ (on ne tient pas compte du reconstructeur d'ordre 0 du convertisseur N/A).

$N \geqslant \underline{31}$

(b) (20 points) On fixe désormais le filtre anti-image $H_{AI}(f)$ de type Butterworth avec les paramètres suivants : $N = 2$ et $f_c = 30$ kHz (FIGURE 2).

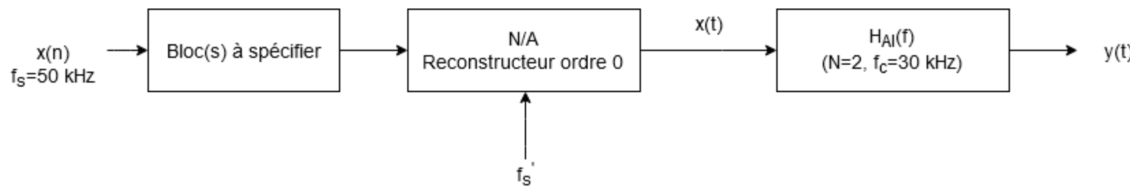


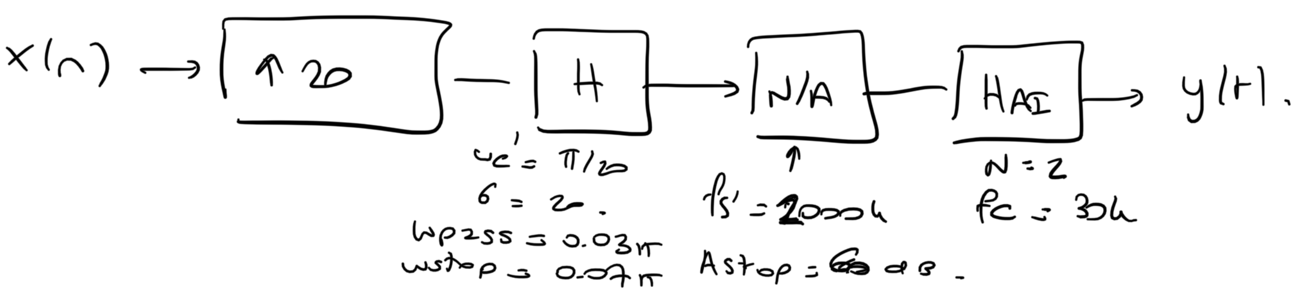
FIGURE 2 – Système composé d'un convertisseur N/A avec reconstructeur d'ordre 0, d'un filtre anti-image de type Butterworth ($N = 2$ et $f_c = 30$ kHz) et d'un bloc à spécifier.

Vous devez faire le design de ce système, i.e, spécifier la fréquence d'échantillonnage f_s' du convertisseur N/A, ainsi que les blocs de la boîte "Bloc(s) à spécifier" et leurs paramètres. Votre design doit être fait pour respecter les contraintes suivantes :

1. $x(n)$ est un signal discret échantillonné à 50 kHz.
2. Les images spectrales du signal $x(t)$ doivent être atténuées d'au moins 60 dB par le filtre $H_{AI}(f)$, donc en excluant l'atténuation du filtre de reconstruction d'ordre 0.
3. La fréquence d'échantillonnage f_s' du convertisseur N/A doit être la plus petite possible tout en respectant les autres contraintes et celles posées par le choix des opérations des "blocs à spécifier".

N.B : si vous utilisez un ou des filtres discrets pour les blocs, vous devez seulement spécifier leurs paramètres ω_{pass}, ω_{stop}, A_{stop} et le gain (G).

$L = 19.27 \Rightarrow L = \underline{20}$.



(c) (10 points) Pour le système en b), en utilisant la valeur que vous avez obtenue pour f_s', calculez l'atténuation en dB des images spectrales par le filtre de reconstruction d'ordre 0. En tenant compte de cette atténuation, quels paramètres changeriez-vous du système en b) ?

$A \simeq 36.48$ dB

↳ 23,52 dB → HAI.

(d) (5 points) Pourquoi le système en b) est-il meilleur que le système en a) pour la conversion N/A avec un reconstructeur d'ordre 0 ?

1 Définissions interpolation.

3. (25 points) Décimation La bande de fréquence d'intérêt du signal réel $x(t)$ est (-10 Hz, 10 Hz). Le signal n'est pas limité en fréquence. On doit échantillonner $x(t)$ en respectant les contraintes suivantes :

1. Recouvrement spectral dans la bande d'intérêt atténué d'au moins 60 dB.
2. $H(f)$ filtre analogique passe-bas de type Butterworth d'ordre 2 ($N = 2$) :

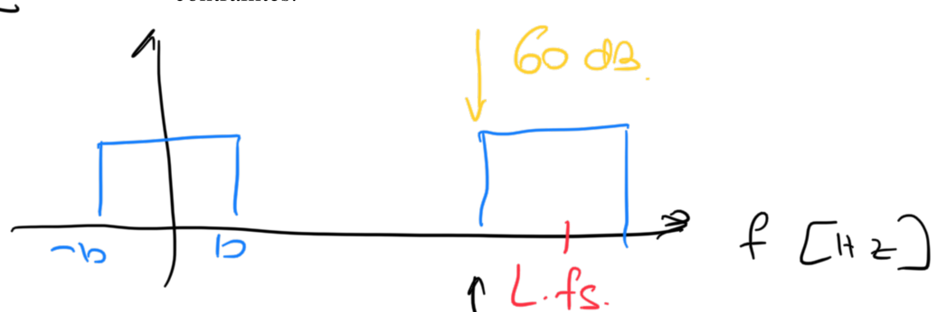
$$|H(f)|^2 = \frac{1}{1 + (\frac{f}{20})^{2N}}$$

6

3. Fréquence d'échantillonnage finale $f_T' = 50$ Hz.

FIGURE 3 – Système composé d'un convertisseur A/N, d'un filtre anti-image de type Butterworth ($N = 2$) et d'un bloc de traitement.

(a) (15 points) Donnez la valeur minimum de la fréquence d'échantillonnage f_T qui permet de respecter ces contraintes.



$L.f_s - 10.$

$$1\log_{10}\left(1+\left(\frac{L.f_s-10}{f_c}\right)^4\right) = 6$$

$20.$

$$\left(\frac{L.f_s-10}{20}\right)^4 = 10^6-1$$

$f_T = 13 \times 50$
$= 650$ Hz

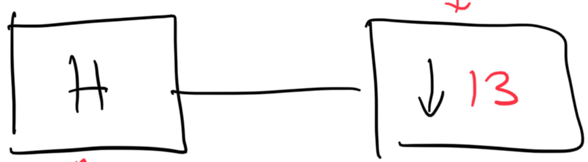
$$(10^6-1)^{1/4} = \frac{L.f_T'-10}{20}$$

50

$\Rightarrow L = 12.8.$

$L = 13.$

(b) (10 points) Compléter le bloc "traitement numérique" avec le ou les blocs nécessaires et les paramètres M, ω_c et G (gain) pour obtenir une signal $x[n]$ échantillonné à $F'_T = 50$ Hz. **N.B :** au cas où vous n'auriez pas trouvé f_T à la question (a), vous pouvez considérer $f_T = 20$ kHz. Aucune réponse impulsionnelle n'est demandée.



$w_c = \pi / M$.

$G = 1$

4. **(15 points) Réduction de la fréquence d'échantillonnage** On dispose d'un signal audio échantillonné à $f_s =$ 250 kHz pour réduire l'ordre de notre filtre de Butterworth anti-repliement. Néanmoins, pour obtenir une latence acceptable lors du traitement de ce signal, on souhaite, après conversion analogique-numérique, réduire la présente fréquence d'échantillonnage à $f_s = 100$ kHz. Donnez le système qui permet de réduire la fréquence d'échantillonnage. **Justifiez l'ordre dans lequel vous faites les différentes opérations nécessaires ainsi que toutes vos démarches.**

100 250

$$\frac{100}{250} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5} \begin{matrix}\uparrow \\ \downarrow\end{matrix}$$

2

$G = L = 2$

$w_c = \pi/5$

5

$$w_c = \min\left(\pi/L, \pi/M\right)$$

$$w_c = \frac{\pi}{\max(M, L)}.$$