GEL2001 SOLUTIONNAIRE MINITEST 1 A2019

Département de génie électrique et de génie informatique

26 septembre 2019

Question 1 (1.5 pts)

Par inspection, il est possible d'identifier la fréquence de la fonction périodique de l'énoncé. Celle-ci est $\omega_0 = \pi/2$. La fonction donnée peut donc s'écrire sous la forme

$$f(t) = 2 + \frac{3}{2}\left[\frac{\exp(3j\omega_0 t) - \exp(-3j\omega_0 t)}{2j}\right] + 2\left[\frac{\exp(2j\omega_0 t) + \exp(-2j\omega_0 t)}{2}\right].$$

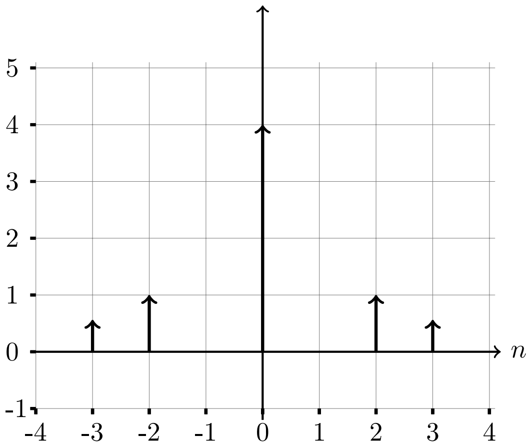
En isolant chacune des exponentielles, il est possible d'obtenir

$$f(t) = 2 - \frac{3j}{4}\exp(3j\omega_0 t) + \frac{3j}{4}\exp(-3j\omega_0 t) + \exp(2j\omega_0 t) + \exp(-2j\omega_0 t).$$

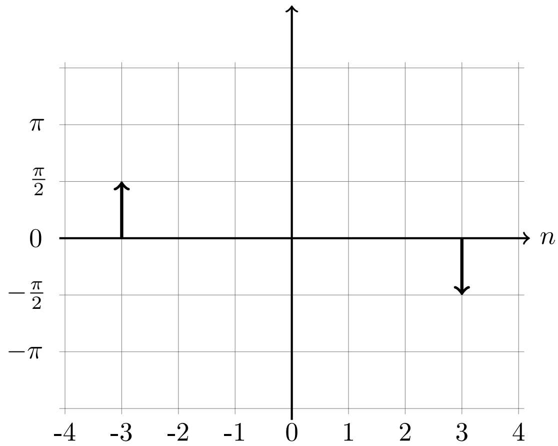
desquelles les coefficients $F(n)$ de la série de Fourrier peuvent directement s'obtenir. Ceux-ci ainsi la puissance $P(n) = |F(n)|^2$ associée sont

$$\begin{aligned} F(0) &= 2, & P(0) &= 4,\\ F(2) &= 1, & P(2) &= 1,\\ F(\text{-}2) &= 1, & P(\text{-}2) &= 1,\\ F(3) &= \frac{-3j}{4}, & P(3) &= \frac{9}{16},\\ F(\text{-}3) &= \frac{3j}{4}, & P(\text{-}3) &= \frac{9}{16}, \end{aligned}$$

Spectre de puissance



Spectre de phase



Question 2 (1.5 pts)

1. Comme $f(t)$ est réelle, l'équation $F^*(n) = F(-n)$ est vérifiée. Prendre le module de chaque côté de cette équation permet d'obtenir $|F^*(n)| = |F(-n)|$. Comme le module d'une expression est égal au module la même expression conjuguée, il est possible d'affirmer que $|F(n)| = |F(-n)|$. L'affirmation est VRAIE.

2. Cette affirmation est VRAIE

3. Il est possible de tracer une fonction paire dont une demie période est nulle (fonction porte centrée à zéro d'une largeur d'une demie période) pour obtenir un spectre $F(n)$ réel. Cette affirmation est FAUSSE.

4. L'expression $\cos(\omega_0 t)$ peut s'écrire

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}\exp(j\omega_0 t) + \frac{1}{2}\exp(-j\omega_0 t),$$

ce qui permet d'identifier les coefficients de la série de Fourier comme

$$F(1) = \frac{1}{2}, F(-1) = \frac{1}{2}.$$

Comme la puissance est donnée par

$$P = \sum_{-\infty}^{\infty} |F(n)|^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2},$$

l'affirmation est VRAIE.

Question 3 (4.4 pts)

1. Par inspection, la partie impaire de la fonction est constituée seulement de l'onde carrée.

$$f_{od}(t) = \begin{cases} -1 & \text{-0.5} \le t < 0 \\ 1 & 0 \le t < 0.5 \end{cases}$$

$$F(n) = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f_{od}(t)\exp(-jn\omega_0 t)dt$$

Les coefficients de Fourrier sont obtenus avec l'équation d'analyse

$$\begin{aligned}
F(n) &= \int_{-0.5}^{0} -\exp(-jn\omega_0 t)dt + \int_{0}^{0.5} \exp(-jn\omega_0 t)dt, \\
&= -\left.\frac{\exp(-jn\omega_0 t)}{-jn\omega_0}\right|_{-0.5}^{0} + \left.\frac{\exp(-jn\omega_0 t)}{-jn\omega_0}\right|_{0}^{0.5}, \\
&= -\left[\frac{1}{-jn\omega_0} - \frac{\exp(jn\omega_0(0.5))}{-jn\omega_0}\right] + \left[\frac{\exp(-jn\omega_0(0.5))}{-jn\omega_0} - \frac{1}{-jn\omega_0}\right], \\
&= \left[\frac{\exp(jn\omega_0(0.5))}{-jn\omega_0} - \frac{1}{-jn\omega_0}\right] + \left[\frac{\exp(-jn\omega_0(0.5))}{-jn\omega_0} - \frac{1}{-jn\omega_0}\right], \\
&= \frac{\exp(jn\omega_0(0.5))}{-jn\omega_0} + \frac{\exp(-jn\omega_0(0.5))}{-jn\omega_0} - \frac{2}{-jn\omega_0}, \\
&= \frac{2\cos(\frac{n\omega_0}{2}) - 2}{-jn\omega_0}.
\end{aligned}$$

En posant $\omega_0 = 2\pi$, il est possible d'obtenir

$$F(n) = \frac{2\cos(n\pi) - 2}{-jn\omega_0}$$

qui peut être évaluée pour des n pairs et impairs. La valeur du coefficient de la série de Fourrier pour $n = 0$ est obtenu en évaluant l'expression $F(0) = \int_{-0.5}^{0.5} f_{od}(t)dt$. Par inspection, cette expression est nulle. Donc, $F(0) = 0$. Ainsi,

$$F(n) = \begin{cases} 0 & n = \text{...-4, -2, 0, 2, 4, ..} \\ \frac{-2j}{n\pi} & n = \text{...-3, -1, 1, 3, ...} \end{cases}$$