Département de génie électrique et de génie informatique
Université Laval

André Zaccarin

GEL-19964 – Signaux et systèmes discrets

Examen partiel : Solutions

Vendredi le 19 octobre 2007

Durée: 8h30-10h20

---

**Question 1** (15 pts)

**a)** Pour qu'un système soit invariant, il faut que $O\{x[n-n_o]\} = y[n-n_o]$, $\forall n_o$. On a :

$$y[n-n_o] = \sum_{i=0}^{M} b_i x[n-n_o-i]$$

$$O\{x[n-n_o]\} = \sum_{i=0}^{M} b_i x[n-n_o-i]$$

Donc le système est invariant

**b)** Soit $|x[n]| < B_x \;\; \forall n$**,** le système est stable si $|y[n]| < B_y, \forall n$. On a :

$$\left|y[n]\right| = \left|\sum_{k=0}^{n} x[k]\right| \leq \sum_{k=0}^{n} \left|x[k]\right| \leq \sum_{k=0}^{n} B_x = nB_x$$

Pour $n \to \infty, nB_x \to \infty$ donc le système est instable.

Solution alternative : Pour ce système, on a que $h[n] = u[n]$. Il faut donc vérifier si $h[n]$ est absolument sommable. On obtient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|h[n]\right| = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \to \infty$$

donc le système est instable.

**Question 2** (15 pts)

**a)** La façon la plus simple de résoudre ce problème est d'obtenir la convolution linéaire, soit $y[n] = x[n] * h[n]$, et d'utiliser le résultant pour obtenir celui de la convolution périodique.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x[n] | $\overset{\Downarrow}{2}$ | -1 | 3 | 4 | | | |
| h[n] | $\overset{\Downarrow}{4}$ | 2 | 1 | 1 | | | |
| | 8 | 4 | 2 | 2 | | | |
| | | -4 | -2 | -1 | -1 | | |
| | | | 12 | 6 | 3 | 3 | |
| | | | | 16 | 8 | 4 | 4 |

$y[n] = \{\overset{\Downarrow}{8} \quad 0 \quad 12 \quad 23 \quad 10 \quad 7 \quad 4\}$

On sait que la convolution périodique sur N points est simplement l'extension périodique sur N points de la convolution linéaire. Pour N=4, on a :

$$y_4[n] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} y[n+4l].$$

Une période de $y_4[n]$ est donc

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $0 \leq n \leq 3$: | $y_4[n]$ | = | 8 | 0 | 12 | 23 |
| | | + | 10 | 7 | 4 | |
| | | | 18 | 7 | 16 | 23 |

**b)** Comme le résultat de la convolution linéaire a 7 points (Nx+Ny-1 = 4 + 4 -1 = 7), il faut donc calculer la convolution périodique sur au moins 7 points pour avoir le même résultat.

**Question 3** (30 pts)

**a)** $H_2(z) = \dfrac{z}{z^2+1} = \dfrac{z}{(z-j)(z+j)}$

$$W(z) = \frac{H_2(z)}{z} = \frac{1}{(z-j)(z+j)} = \frac{K_1}{z-j} + \frac{K_1^*}{z-(-j)}$$

$$K_1 = W(z)(z-j)\big|_{z=j} = \frac{1}{2j} = -0.5j = 0.5e^{-j\pi/2}$$

$$K_1^* = 0.5e^{j\pi/2}$$

$$H_2(z) = K_1\frac{z}{z-j} + K_1^*\frac{z}{z-(-j)}$$

$$= K_1\frac{z}{z-e^{j\pi/2}} + K_1^*\frac{z}{z-e^{-j\pi/2}}$$

$$h_2[n] = 0.5e^{-j\pi/2}(e^{j\pi/2n})u(n) + 0.5e^{j\pi/2}(e^{-j\pi/2n})u(n) = 2\,\mathrm{Re}(0.5e^{-j\pi/2}e^{j\pi/2n}u(n))$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2}n - \frac{\pi}{2}\right)u(n) = \cos\left(\frac{\pi}{2}(n-1)\right)u(n)$$

De $H_2(z) = \dfrac{X(z)}{Y(z)} = \dfrac{z}{z^2+1}$ (dans la figure, notez que $x[n]$ est la sortie et $y[n]$ l'entrée), on a

$$X(z)(z^2+1) = zY(z)$$

$$x[n+2] + x[n] = y[n+1] \;\Rightarrow\; x[n] + x[n-2] = y[n-1]$$

**Solutions alternatives pour trouver** $h_2[n]$

1. Résoudre récursivement l'équation aux différences, avec conditions initiales nulles :

$$\begin{aligned}
&h[n] = \delta[n-1] - h[n-2]\\
&h[0] = 0+0 = 0\\
&h[1] = 1+0 = 1\\
&h[2] = 0+0 = 0\\
&h[3] = 0-1 = -1\\
&h[4] = 0-0 = 0\\
&h[5] = 0-(-1) = 1\\
&etc
\end{aligned}$$

2. Par division longue, à partir de $H_2(z)$ :

$$
\begin{array}{llll}
z & & \multicolumn{2}{l}{\big\lfloor\, \underline{z^2+1}} \\
\underline{z+z^{-1}} & & \multicolumn{2}{l}{z^{-1}-z^{-3}+z^{-5}-z^{-7}-\ldots} \\
\quad -z^{-1} & & & \\
\quad \underline{-z^{-1}-z^{-3}} & & & \\
\qquad\qquad z^{-3} & & & \\
\qquad\qquad \underline{z^{-3}+z^{-5}} & & & \\
\qquad\qquad\quad -z^{-5} & & &
\end{array}
$$

On en déduit que $h_2[n]=\{\underset{\Uparrow}{0},1,0,-1,0,1,0,-1,\ldots\}$

**b)** De la figure : on peut écrire $X(z)\,H_1(z)H_2(z) = X(z)$ parce que les systèmes sont en cascade. Donc :

$$H_1(z)=\frac{1}{H_2(z)} \quad\rightarrow\quad H_1(z)=\frac{z^2+1}{z}=z+z^{-1} \quad\rightarrow\quad h_1[n]=\delta[n+1]+\delta[n-1]$$

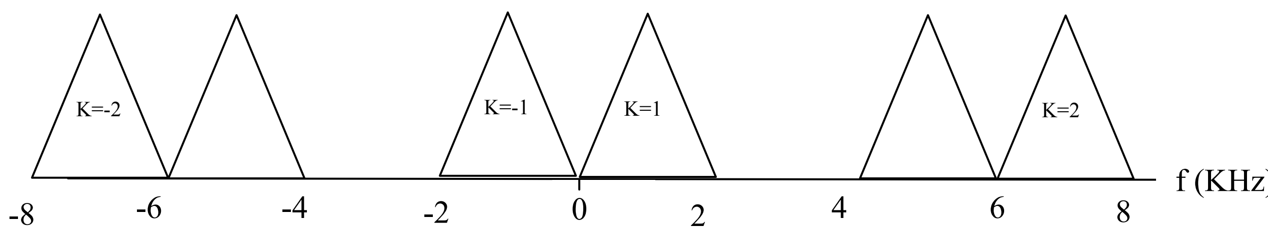
Le filtre a une réponse à l'impulsion finie (RIF): on le voit avec l'expression de $h_1[n]$ qui ne contient que trois termes (1,0,1). On peut aussi tirer cette conclusion parce que tous les pôles de $H_1(z)$ sont à $z=0$ (pôles nulles).

Le filtre est non-causal. Encore une fois, on le voit directement de l'expression de $h_1[n]$ qui contient un terme non-nul pour n<0 ( $h_1[n]$ est un signal non-causal). On peut aussi conclure que le filtre est non-causal parce que $H_1(z)$ a deux zéros et seulement un pôle.

**Question 4** (20 pts)

a)

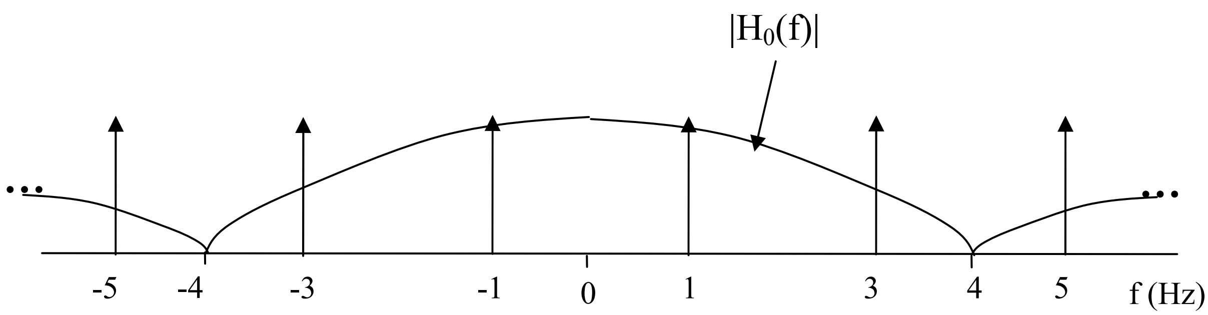
$$\left|X_F(f)\right| = 6000\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left|X(f-k\,6000)\right|$$




b) Oui, parce qu'il n'y a pas de recouvrement entre les composantes spectrales du signal échantillonné.

**Question 5** (20 pts)

**a)**

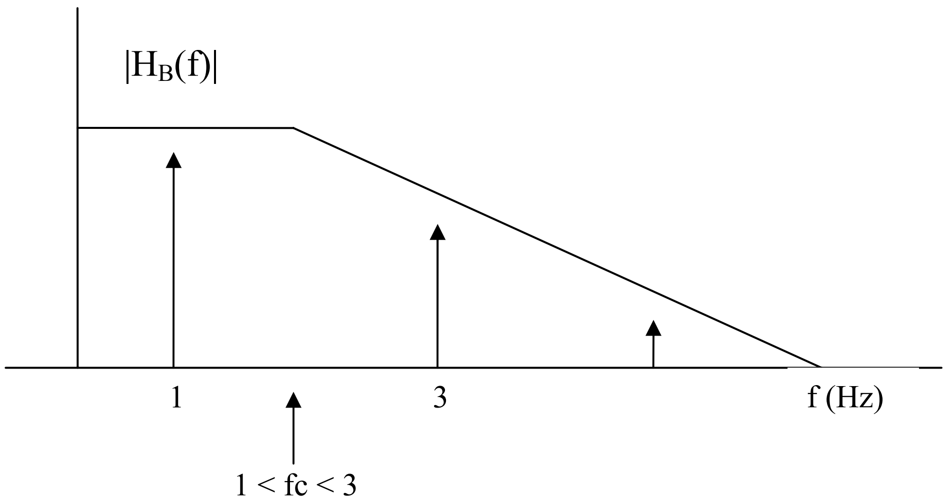



à 1 kHz: $$\left|Y(1)\right| = \left|H_0(1)\right|\times 2 = \frac{\frac{1}{4}\sin(\frac{1}{4}\times\pi)}{\frac{1}{4}\times\pi}\times 2 = 0.45$$

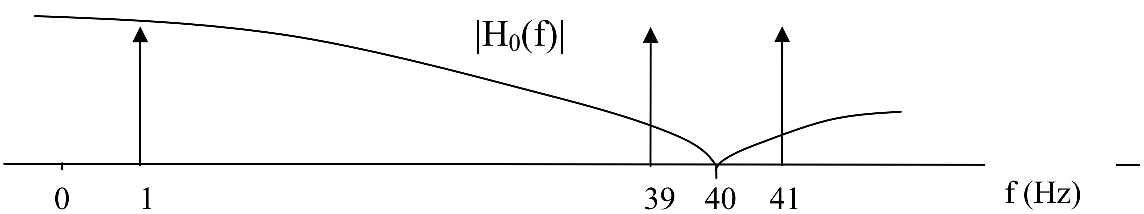
à 3 kHz $$\left|Y(3)\right| = \left|H_0(3)\right|\times 2 = \frac{\frac{1}{4}\sin(\frac{3}{4}\times\pi)}{\frac{3}{4}\times\pi}\times 2 = 0.15$$

b)

1) Filtrer y(t) avec filtre passe-bas, e.g $\left|H_B(f)\right|^2 = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{f}{f_c}\right)^{2N}}$




2) Augmenter S (la fréquence d'échantillonnage). Par exemple avec S= 40 Hz, l'amplitude des impulsions de Dirac de X(f) est de 20, et la première image spectrale est à f = 39 Hz :




Les amplitudes des deux premières composantes sont alors :

$$\left|Y(1)\right| = 20 \times \frac{\frac{1}{40}\sin\left(\frac{1}{40}\times\pi\right)}{\frac{1}{40}\times\pi} = 0.4995$$

$$\left|Y(39)\right| = 20 \times \frac{\frac{1}{40}\sin\left(\frac{39}{40}\times\pi\right)}{\frac{39}{40}\times\pi} = 0.0128$$

On voit donc bien qu'en augmentant S, on éloigne les images spectrales qui sont ensuite plus atténuées par le filtre d'interpolation d'ordre 0, parce qu'elles sont plus près du zéro du filtre. De plus, la première composante est moins atténuée.