STT-2920 Automne 2015 Solution du Minitest 3

Les trois questions concernent le scénario suivant :

Un panier contient 3 boules. Les boules sont numérotées 1, 2, 3. On fait 24 tirages avec remises à partir de ce panier. On pose $T = \sum_{k=1}^{24} X_k$, où X_k dénote le numéro de la boule obtenue au k^e tirage.

Numéro 1. Obtenez l'écart-type de la variable aléatoire T.

Solution : D'abord on note que les v.a. X_k sont i.i.d. avec moyenne 2 et avec variance 2/3. On obtient donc

$$\begin{aligned}
\mu_T &= \mathbb{E}[T] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{24} X_k\right] = \sum_{k=1}^{24} \mathbb{E}[X_k] = 24 \times 2 = 48. \\
\sigma_T^2 &= \mathbb{V}\mathrm{ar}[T] = \mathbb{V}\mathrm{ar}\left[\sum_{k=1}^{24} X_k\right] = \sum_{k=1}^{24} \mathbb{V}\mathrm{ar}[X_k] = 24 \times \frac{2}{3} = 16.
\end{aligned}$$

L'écart-type demandé est donc $\sigma_T = \sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}[T]} = \sqrt{16} = 4$.

Numéro 2. Avec l'aide de l'inégalité de Chebyshev, obtenez une borne inférieure pour $\mathbb{P}[40 < T < 56]$.

Solution :

$$\mathbb{P}[40 < T < 56] = \mathbb{P}[48 - 8 < T < 48 + 8] = \mathbb{P}[\mu_T - 2\sigma_T < T < \mu_T - 2\sigma_T] \geq 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Numéro 3. Avec l'aide du théorème limite central, obtenez une approximation pour $\mathbb{P}[T \geq 52]$. Soyez aussi précis que possible. Exprimez votre réponse avec une précision de 4 décimales.

Solution : On utilise le T.L.C. avec correction pour la continuité :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[T \geq 52] &= 1 - \mathbb{P}[T \leq 51] \\
&\approx 1 - \Phi\left(\frac{51.5 - \mu_T}{\sigma_T}\right) \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{51.5 - 48}{4}\right) \\
&= 1 - \Phi(0.875) = 1 - 0.8092 = 0.1908
\end{aligned}$$