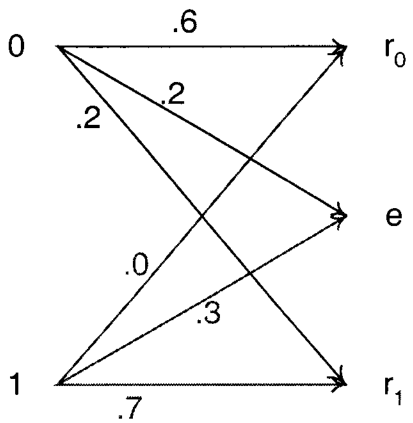
GEL10280: Communications numériques

1999 Examen Final - *Solutions*

Problème 1 (10 points sur 100)



$P(r_0|0) = .6$

$P(e|0) = .2$

$P(r_1|0) = .2$

$P(r_0|1) = 0$

$P(e|1) = .3$

$P(r_1|1) = .7$

$$\Pr(\text{demande de retransmission}) = \Pr(e) = \Pr(e|0)\Pr(0) + \Pr(e|1)\Pr(1)$$

$$= .2 \times \tfrac{1}{2} + .3 \times \tfrac{1}{2} = .5 \times \tfrac{1}{2} = 25\%$$

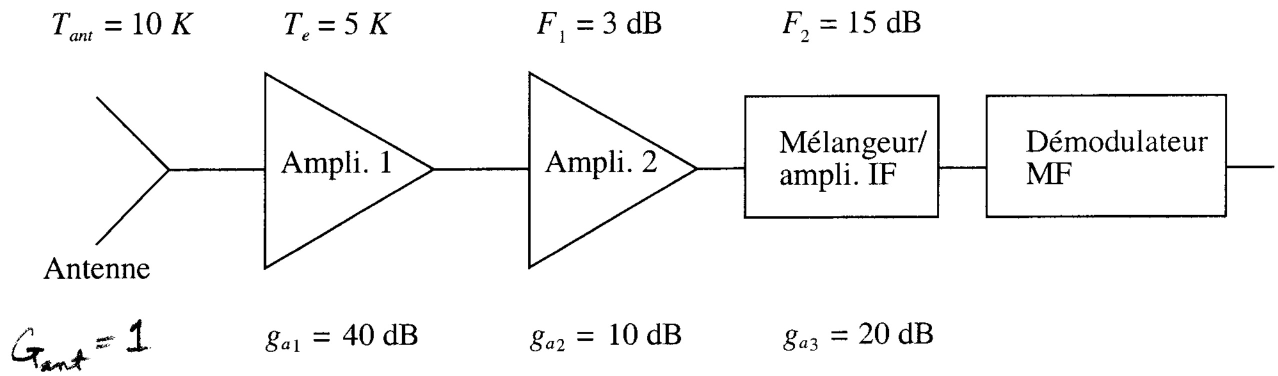
$$\Pr(\text{erreur}) = \Pr(\text{erreur}|0)\Pr(0 \text{ envoyé}) + \Pr(\text{erreur}|1)\Pr(1 \text{ envoyé})$$

$$= \Pr(r_1|0)\Pr(0) + \Pr(r_0|1)\Pr(1)$$

$$= \tfrac{1}{2}[.2 + 0] = 10\%$$

1999 Examen Final - *Solutions*

Problème 2 ([redacted]0 points sur 100)



$$F = 1 + \frac{T_e}{T_0}$$

$$g_{a1} = 40\,dB \Rightarrow G_{a1} = 10^4$$

$$F_{tot} = F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_1} + \frac{F_3 - 1}{G_1 G_2} + \dots$$

$$F_{ant} = 1 + \frac{10K}{290K} = 1{,}034 \qquad F_{a2} = 3\,dB \Rightarrow F_{a2} = 10^{.3} = 2$$

$$F_{a1} = 1 + \frac{5}{290} = 1{,}017 \qquad F_{a3} = 15\,dB \Rightarrow F_{a3} = 10^{1.5} = 31{,}62$$

$$F_{tot} = 1.034 + \frac{1.017 - 1}{1} + \frac{2 - 1}{1 \cdot 10^4} + \frac{31.62 - 1}{1 \cdot 10^4 \cdot 10}$$

$$= 1{,}034 + {,}017 + 1 \times 10^{-4} + 30{,}62 \times 10^{-5}$$

$$= 1{,}0514$$

$$= {.}217\ dB$$

GEL10280: Communications numériques

1999 Examen Final - *Solutions*

Problème 3 (20 points sur 100)

A.

$$m = [u_1 \; u_2 \; u_3 \; x_1 \; x_2 \; x_3] = [u_1 \; u_2 \; u_3]\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & P \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right]$$

Pour déterminer P nous utilisons

$x_1 = u_1 \oplus u_3$, $x_2 = u_1 \oplus u_2 \oplus u_3$, $x_3 = u_1 \oplus u_2$

$$[u_1 \; u_2 \; u_3]\, P = [x_1 \; x_2 \; x_3]$$

$$[u_1 \; u_2 \; u_3]\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [x_1 \; x_2 \; x_3] \quad \checkmark$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H^T = \begin{bmatrix} P \\ I \end{bmatrix} = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

B. Les mots de code sont

$u_1 \; u_2 \; u_3$	m	d
000	000 000	0
001	001 110	3
010	010 011	3
011	011 101	4
100	100 111	4
101	101 001	3
110	110 100	3
111	111 010	4

Comme $d_{min} = 3$ le code peut corriger $t = \lfloor \frac{1}{2}(d_{min}-1) \rfloor = \lfloor \frac{1}{2}(3-1) \rfloor$
$= \lfloor 2/2 \rfloor = 1$ erreur.

c) un erreur dans v_1 donnera le syndrome
$[1\,0\,0\,0\,0\,0]\,H^T =$ première rangée de H
$= [1\,1\,1]$

etc

bit en erreur	syndrome
1ère	[1 1 1]
2ème	[0 1 1]
3ème	[1 1 0]
4ème	[1 0 0]
5ème	[0 1 0]
6ème	[0 0 1]

Pour 010111 reçu, le syndrome est

$$[0\,1\,0\,1\,1\,1]\,H^T = [0\,1\,0\,1\,1\,1]\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\1&1&0\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} = [1\,0\,0] \Rightarrow 4^{\text{ème}} \text{ bit en erreur}$$

$\Rightarrow$ 010 envoyé

Problème 4

A. $F(s) = \dfrac{1/\sqrt{2}}{1/\sqrt{2} + s} \Rightarrow T_a = 1/\sqrt{2}$ & $K = 1/\sqrt{2}$

$K = 1/\sqrt{2} \qquad G(s) = \dfrac{1/\sqrt{2}}{s(s + 1/\sqrt{2})}$

$\omega_n^2 = \dfrac{K}{T_a} = 1 \qquad \zeta = \dfrac{1}{2\sqrt{KT_a}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$H(s) = \dfrac{1}{s^2 + 2\frac{\sqrt{2}}{2}s + 1} = \dfrac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$

pôles : $\dfrac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{(\sqrt{2})^2 - 4}}{2} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \pm \dfrac{\sqrt{2-4}}{2}$

$= -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \pm j\dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$ <u>stable</u>

B. $E(s) = R(s)[1 - H(s)] = R(s)\left[1 - \dfrac{1}{s^2+\sqrt{2}s+1}\right] = R(s)\dfrac{s(s+\sqrt{2})}{s^2+\sqrt{2}s+1}$

$R(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow E(s) = \dfrac{s+\sqrt{2}}{s^2+\sqrt{2}s+1} \qquad \lim_{s\to 0} sE(s) = 0 \Rightarrow e_{ss}(t) = 0$

$R(s) = 1/s^2 \Rightarrow E(s) = \dfrac{1}{s}\dfrac{s+\sqrt{2}}{s^2+\sqrt{2}s+1} \qquad \lim_{s\to 0} sE(s) = \dfrac{0+\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2} \Rightarrow e_{ss}(t) = \sqrt{2}$

c) Le boucle de Costas fait l'estimation de la phase au même temps que l'estimation des données. Il n'y a pas de délais comme il y a avec un boucle de remodulation.

Considérons la branche "en phase" qui est dans le haut de la figure. Une demodulation suivi par un filtre passebas donne $-Q(t)\sin\Delta\phi + I(t)\cos\Delta\phi$ en éliminant les termes de haute fréquence. Le limiteur va rendre l'estimé $\hat{a}_n^I \in \{\pm 1\}$. Après la multiplication, cette branch va fournir

$$\hat{a}_n^I\, I(t)\sin\Delta\phi + \hat{a}_n^I\, Q(t)\cos\Delta\phi$$

Après nous allons soustraire

$$\hat{a}_n^Q\, I(t)\cos\Delta\phi - a_n^Q\, Q(t)\sin\Delta\phi$$

où $I(t) = \Sigma\, a_n^I\, T v(t-nT)$ $\quad Q(t) = \Sigma\, a_n^Q\, T v(t-nT)$

$$\left.\begin{array}{ll} \hat{a}_n^I\, I(t) = 1 & \text{pour } \hat{a}_n^I = a_n^I \\ \hat{a}_n^Q\, q(t) = 1 & \text{pour } \hat{a}_n^Q = a_n^Q \end{array}\right\} \text{pour NRZ}$$

$$\left.\begin{array}{l} \hat{a}_n^I\, Q(t) = 0 \\ \hat{a}_n^Q\, I(t) = 0 \end{array}\right\} \text{en moyenne comme } a_n^I \text{ et } a_n^Q \text{ sont indépendents}$$

L'entrée du filtre de boucle est donc

$$\hat{a}_n^I I(t)\sin\Delta\phi - \hat{a}_n^I \underbrace{Q(t)\cos\Delta\phi}_{0} + \hat{a}_n^Q Q(t)\sin\Delta\phi - \hat{a}_n^Q \underbrace{I(t)\cos\Delta\phi}_{0}$$

$$= \sin\Delta\phi + \sin\Delta\phi = 2\sin\Delta\phi$$

qui peut suivre la phase sans l'ambiguité d'un boucle d'ordre deux (ou plus haut).

Problème 5

A) MSK $\Delta\Theta = \begin{cases} +\pi/2 & 1 \text{ envoyé} \\ -\pi/2 & 0 \text{ envoyé} \end{cases}$

état initial	symbole	état suivant
0	m_1	$0 - \pi/2 - \pi/2 = -\pi = \pi$ (modulo 2π)
	m_2	$0 - \pi/2 + \pi/2 = 0$
	m_3	$0 + \pi/2 - \pi/2 = 0$
	m_4	$0 + \pi/2 + \pi/2 = \pi$
π	m_1	$\pi - \pi/2 - \pi/2 = 0$
	m_2	$\pi - \pi/2 + \pi/2 = \pi$
	m_3	$\pi + \pi/2 - \pi/2 = \pi$
	m_4	$\pi + \pi/2 + \pi/2 = 2\pi = 0$ (modulo 2π)

B) Deux états: 0 et π