Mathématiques de l'ingénieur I (MAT-1900)
Examen partiel du 5 février 2010 – solutions

Question 1
(6 + 7 + 7 = 20 points)

a) Écrire $z = -1 + i\sqrt{3}$ sous forme exponentielle.

On a $|z| = |-1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$.

Aussi, si $\arg z = \theta$, alors on doit avoir $\cos(\pi - \theta) = \frac{1}{2}$ et $\sin(\pi - \theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
On peut donc choisir $\pi - \theta = \frac{\pi}{3}$, i.e. $\arg z = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

Ainsi, $z = 2e^{\frac{2\pi}{3}i}$.

b) Calculer $\dfrac{(2+i)^2 - 1}{i\,(\overline{i-1})}$.

$$\frac{(2+i)^2 - 1}{i\,(\overline{i-1})} = \frac{(4 + 4i + i^2) - 1}{i\,(-i-1)} = \frac{2+4i}{1-i} = \frac{(2+4i)(1+i)}{|1-i|^2} = \frac{-2+6i}{2} = -1 + 3i.$$

c) Calculer $\left(e^w\right)^2 e^z$ si $z = -\frac{\pi}{4}i - 2$ et $w = 1 + \frac{3\pi}{4}i$. Donner votre réponse sous forme cartésienne.

$$\left(e^w\right)^2 e^z = e^{2w}e^z = e^{2w+z} = e^{2 + \frac{6\pi}{4}i - \frac{\pi}{4}i - 2} = e^{\frac{5\pi}{4}i} = \cos\tfrac{5\pi}{4}i + i\sin\tfrac{5\pi}{4}i = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i.$$

Question 2
(20 points)

Donner, sous forme cartésienne, les solutions non nulles de l'équation $z^5 + 16\,\overline{z} = 0$.

Posons $z = re^{i\theta}$. Alors

$$z^5 = -16\overline{z} \quad \Longleftrightarrow \quad r^5 e^{5i\theta} = -16re^{-i\theta} = 16re^{-i(\theta+\pi)}.$$

On obtient le système

$$r^5 = 16r \quad \text{et} \quad 5\theta = -\theta - \pi + 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Puisque $r > 0$, la première équation donne $r^4 = 16$ et donc $r = 2$.
La deuxième équation donne $6\theta = -\pi + 2\pi k$, i.e. $\theta = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}k$.

On a donc les solutions $z_k = 2e^{i(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}k)}$ $(k = 0, \ldots, 5)$.

Sous forme cartésienne, on trouve

$$z_0 = \sqrt{3} - i, \quad z_1 = \sqrt{3} + i, \quad z_2 = 2i, \quad z_3 = -\sqrt{3} + i, \quad z_4 = -\sqrt{3} - i, \quad z_5 = -2i.$$

Question 3

(20 points)

Soit $p(z) = z^4 - 3z^2 + 12z + 40$. Sachant que $p(-2+i) = 0$, trouver un zéro de p dont l'argument θ satisfait $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

Puisque $-2+i$ est une racine de p, il en est de même pour $-2-i$.
Ainsi, $p(z)$ possède le facteur

$$(z-(-2+i))(z-(-2-i)) = z^2 - (-2+i-2-i)z + |-2+i|^2 = z^2 + 4z + 5.$$

La division de $p(z)$ par ce facteur donne

$$p(z) = (z^2+4z+5)(z^2-4z+8).$$

La formule quadratique appliquée au deuxième facteur donne

$$z = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-16}}{2} = 2 \pm 2i.$$

Parmi ces racines, seule $2+2i$ a un argument compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

Question 4

(15 + 5 = 20 points)

a) Un cube mesurant 100 cm de côté est complètement rempli d'eau. Au temps $t = 0$ un trou est percé dans le milieu de sa face inférieure et il commence à se vider. En tout temps le débit de sortie ($\mathrm{cm}^3/\mathrm{min}$) est proportionnel à la racine carrée de la hauteur $h(t)$ de l'eau restante dans le cube. Après 20 mins, on observe que le cube n'est plus qu'au quart plein. Combien de temps reste-t-il alors avant que le cube ne soit complètement vide ?

Le volume d'eau dans le réservoir est $V(h) = 100^2 h$.
Le débit au temps t est $\frac{dV}{dt}$.
Il existe une constante $k > 0$ telle que

$$100^2 \frac{dh}{dt} = -k\sqrt{h}.$$

C'est une équation séparable :

$$10000 \frac{h'}{\sqrt{h}} = -k \quad \Longleftrightarrow \quad 20000\sqrt{h} = -kt + c$$

pour une constante c.

En $t = 0$, on a $h = 100$ et donc

$$20000\sqrt{100} = -k \cdot 0 + c \quad \Longleftrightarrow \quad c = 200000.$$

En $t = 20$, on a $h = 25$ et donc

$$20000\sqrt{25} = -k \cdot 20 + 200000 \quad \Longleftrightarrow \quad k = 5000.$$

Finalement, on cherche t tel que $h(t) = 0$:

$$20000\sqrt{0} = -5000t + 200000 \quad \Longleftrightarrow \quad t = 40.$$

Réponse : il reste $40 - 20 = 20$ minutes.

b) Vérifier que $y(x) = x^2e^x + 1$ est une solution particulière de $xy' + 2 = 2y + x^3e^x$.

L'équation est équivalente à $xy' + 2 - 2y - x^3e^x = 0$. On a

$$\begin{aligned} xy' + 2 - 2y - x^3e^x &= x(2xe^x + x^2e^x) + 2 - 2(x^2e^x + 1) - x^3e^x \\ &= 2x^2e^x + x^3e^x + 2 - 2x^2e^x - 2 - x^3e^x = 0. \end{aligned}$$

La fonction donnée satisfait l'équation différentielle et donc c'est une solution particulière de celle-ci.

Question 5
(20 points)

Compléter la grille suivante en inscrivant un et un seul $\times$ par colonne.

Une bonne réponse vaut +4 points, une mauvaise réponse −1 point et une absence de réponse 0 point. La note minimale pour cette question est de 0 point.

Aucune justification requise.

	a)	b)	c)	d)	e)
VRAI			$\times$		$\times$
FAUX	$\times$	$\times$		$\times$	

Pour chacun des énoncés suivants, dire s'il est vrai ou faux.

a) Si $\cos\theta + i\sin\theta = \cos\alpha + i\sin\alpha$, alors $\theta = \alpha$.

FAUX. Prendre par exemple $\theta = 0$ et $\alpha = 2\pi$.

b) Le polynôme $p(z) = 2z^3 + z^2 - z + 1$ ne possède pas de racine réelle.

FAUX. Tout polynôme réel de degré 3 possède au moins un facteur réel de la forme $z - z_0$ et donc une racine réelle.

c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $e^{2ix} = 1 + 2ie^{ix}\sin x$.

VRAI. C'est un réarrangement de la formule d'Euler.

d) Pour calculer $|1 + 3i| + \overline{i(5 + i)}$ dans Maple, il suffit d'effectuer la commande

```
> abs(1+3*I)+bar(I*(5+I));
```

FAUX. La commande pour le conjugé est `conjugate`.

e) Soient $y' = f(x, y)$ et $y' = g(x, y)$ les équations différentielles associées aux familles de courbes F et G. Si G est la famille des trajectoires orthogonales à F, alors $f(x, y)g(x, y) = -1$.

VRAI. Les tangentes étant orthogonales, le produit de leurs pentes vaut -1.