GEL19962 : Analyse des signaux

Mini-test 1 A2008 : Solutions

Département de génie électrique et de génie informatique

Problème 1 (1 pt)

On demande d'indentifier les coefficients complexes de Fourier pour la fonction suivante :

$$f(t) = -\sin(3.5\pi t) + \cos(0.5\pi t) + \mathrm{e}^{\mathrm{j}4\pi t}\,.$$

Par inspection, on trouve d'abord que $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$, ce qui nous donne :

$$f(t) = -\sin(7\omega_0 t) + \cos(\omega_0 t) + \mathrm{e}^{\mathrm{j}8\omega_0 t}\,.$$

En utilisant les relations d'Euler, on trouve la fonction sous sa forme exponentielle :

$$f(t) = -\frac{1}{2\,\mathrm{j}}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}7\omega_0 t} - \mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}7\omega_0 t}\right] + \frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t} + \mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}\omega_0 t}\right] + \mathrm{e}^{\mathrm{j}8\omega_0 t}\,.$$

À partir de cette dernière expression, il est possible de retrouver les termes associés aux coefficients de Fourier...

$$f(t) = \underset{\substack{\uparrow\\ F(0)}}{0} - \underset{\substack{\uparrow\\ F(7)}}{\tfrac{1}{2\mathrm{j}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}7\omega_0 t}} + \underset{\substack{\uparrow\\ F(-7)}}{\tfrac{1}{2\mathrm{j}}\mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}7\omega_0 t}} + \underset{\substack{\uparrow\\ F(1)}}{\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}} + \underset{\substack{\uparrow\\ F(-1)}}{\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}\omega_0 t}} + \underset{\substack{\uparrow\\ F(8)}}{\mathrm{e}^{\mathrm{j}8\omega_0 t}} + \underset{\substack{\uparrow\\ F(-8)}}{0}\,.$$

Finalement on trouve les différents coefficients, nous permettant ainsi de déduire que la réponse est **A** :

$$F(-8) = 0,\quad F(-7) = -\tfrac{\mathrm{j}}{2},\quad F(-1) = \tfrac{1}{2},\quad F(1) = \tfrac{1}{2},\quad F(7) = \tfrac{\mathrm{j}}{2}\quad \text{et}\quad F(8) = 1\,.$$

Problème 2 (1 pt)

Soit la fonction :

$$f(t) = \exp(\,\mathrm{j}\omega_0 t)\,.$$

a)

On demande si $f(t)$ est réelle. Puisque t peut être différent de 0 ou d'un multiple de $T_0/2$, $f(t)$ est forcément une fonction complexe. Donc l'énoncé est **FAUX**.

b)

On demande si $F^*(-n) = F(n)$. Puisque $f(t)$ n'est pas réelle, cet énoncé est **FAUX**.

c)

On demande si la série de Fourier de $\Re\{f(t)\}$, la partie réelle de $f(t)$, est réelle. On a :

$$\begin{aligned} f(t) &= \exp(\,\mathrm{j}\omega_0 t)\,,\\ &= \cos(\omega_0 t) -\,\mathrm{j}\sin(\omega_0 t)\,, \end{aligned}$$

d'où $\Re\{f(t)\} = \cos(\omega_0 t)$. La fonction cosinus étant une fonction paire, sa série de Fourier sera réelle (voir §2.2.2, p.32). L'énoncé est **VRAI**.

d)

On demande si la puissance de $f(t)$ est 1. La puissance correspond à un sur la période du carré du module de $f(t)$ intégré sur une période. Puisque le module de $f(t)$ est 1, intuitivement, la puissance sera aussi unitaire. Rigoureusement, on a :

$$\begin{aligned}
P &= \frac{1}{T_0}\int\limits_{-T_0/2}^{T_0/2} |f_p(t)|^2\,\mathrm{d}t &&= \frac{1}{T_0}\int\limits_{-T_0/2}^{T_0/2} \left|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}\right|^2\mathrm{d}t\,,\\
&= \frac{1}{T_0}\int\limits_{-T_0/2}^{T_0/2} (1)^2\mathrm{d}t &&= \frac{1}{T_0}\int\limits_{-T_0/2}^{T_0/2} \mathrm{d}t\,,\\
&= \frac{1}{T_0}\left[t\right]_{t=-T_0/2}^{T_0/2} &&= \frac{1}{T_0}\left[\frac{T_0}{2}-\frac{-T_0}{2}\right],\\
&= 1\,.
\end{aligned}$$

L'énoncé est **VRAI**.

Problème 3 (3 pt)

On donne la fonction $f(t)$ pour laquelle on demande de trouver les coefficients $F(n)$ de sa série de Fourier. La fonction $f(t)$ correspond à la partie positive d'un cosinus :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad -2 \le t < -1 \\ \cos(\pi t/2) & \text{pour} \quad -1 \le t < 1 \\ 0 & \text{pour} \quad 1 \le t < 2 \end{cases}$$

Par inspection du graphique où de l'expression de $f(t)$, on trouve d'abord la période et la pulsation (fréquence angulaire) de la fonction périodique :

$$\frac{T_0}{2} = 2, \quad T_0 = 4, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{\pi}{2}\,.$$

Les coefficients de la série de Fourier peuvent être trouvés directement en applicant la définition de $F(n)$:

$$\begin{aligned}
F(n) &= \frac{1}{T_0}\int\limits_{-T_0/2}^{T_0/2} f_p(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t \quad = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} f_p(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t\,,\\
&= \frac{1}{4}\int_{-2}^{-1}(0)\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t + \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\cos(\pi t/2)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t + \frac{1}{4}\int_{1}^{2}(0)\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t\,,\\
&= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\cos(\pi t/2)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t \quad = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi t/2}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi t/2}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t\,,\\
&= \frac{1}{8}\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi t/2}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t + \frac{1}{8}\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi t/2}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t\,,\\
&= \frac{1}{8}\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi t/2-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t + \frac{1}{8}\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi t/2-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t\,,
\end{aligned}$$

ce qui devient, après intégration :

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{8}\left[\frac{\mathrm{e}^{(\mathrm{j}\pi/2-\mathrm{j}n\omega_0)t}}{\mathrm{j}\pi/2-\mathrm{j}n\omega_0}\right]_{t=-1}^{1} + \frac{1}{8}\left[\frac{\mathrm{e}^{(-\mathrm{j}\pi/2-\mathrm{j}n\omega_0)t}}{-\mathrm{j}\pi/2-\mathrm{j}n\omega_0}\right]_{t=-1}^{1}\ ,\\
&= \frac{1}{8}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/2-\mathrm{j}n\omega_0}}{\mathrm{j}\pi/2-\mathrm{j}n\omega_0} - \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/2+\mathrm{j}n\omega_0}}{\mathrm{j}\pi/2-\mathrm{j}n\omega_0}\right] + \frac{1}{8}\left[\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/2-\mathrm{j}n\omega_0}}{-\mathrm{j}\pi/2-\mathrm{j}n\omega_0} - \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/2+\mathrm{j}n\omega_0}}{-\mathrm{j}\pi/2-\mathrm{j}n\omega_0}\right]\ ,\\
&= \frac{1}{4}\frac{1}{(\pi/2-n\omega_0)}\frac{1}{2\,\mathrm{j}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\pi/2-n\omega_0)} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\pi/2-n\omega_0)}\right) + \frac{1}{4}\frac{1}{(-\pi/2-n\omega_0)}\frac{1}{2\,\mathrm{j}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(-\pi/2-n\omega_0)} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(-\pi/2-n\omega_0)}\right)\ ,\\
&= \frac{1}{4}\frac{1}{(\pi/2-n\omega_0)}\sin(\pi/2-n\omega_0) + \frac{1}{4}\frac{1}{(-\pi/2-n\omega_0)}\sin(-\pi/2-n\omega_0)
\end{aligned}
$$

$$
= \frac{1}{4}\mathrm{Sa}\left(\frac{\pi}{2}(n-1)\right) + \frac{1}{4}\mathrm{Sa}\left(\frac{\pi}{2}(n+1)\right)
$$