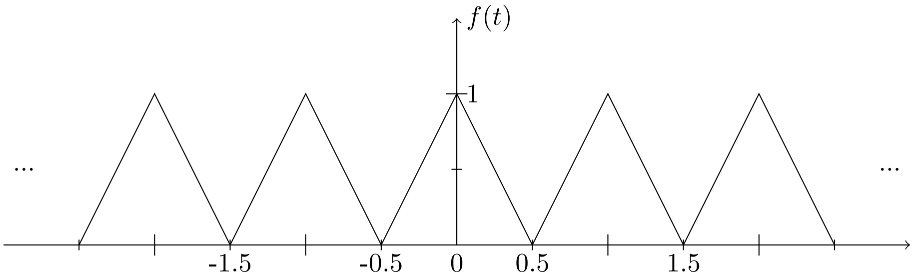
GEL19962: Analyse des signaux

Examen partiel A2008 : Solutions

Département de génie électrique et de génie informatique

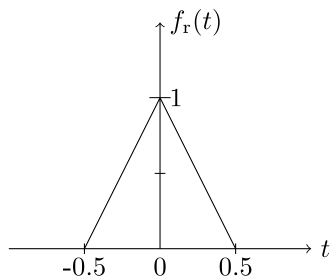
Problème 1 (15 pt)

On donne la fonction périodique suivante:



a)

On demande d'abord de calculer la transformation de Fourier $F(\omega)$ de la fonction $f(t)$. On doit d'abord identifier la fonction $f_{\mathrm{r}}(t)$ qui est périodisée. En isolant une période de $f(t)$, on a:



La fonction $f_{\mathrm{r}}(t)$ est un triangle de largeur 1:

$$f_{\mathrm{r}}(t) = \mathrm{Tri}\left(\frac{t}{0.5}\right) = \mathrm{Tri}(2t)\,. \tag{1}$$

La transformation de Fourier de la fonction triangle $f_{\mathrm{r}}(t)$, $F_{\mathrm{r}}(\omega)$ est une transformation bien connue:

$$F_{\mathrm{r}}(\omega) = \frac{1}{2}\mathrm{Sa}^2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{2}\mathrm{Sa}^2\left(\frac{\omega}{4}\right)\,. \tag{2}$$

Par inspection, la période T_0 du signal $f(t)$ est égale à 1 et la fréquence angulaire est $\omega_0 = 2\pi/T_0 = 2\pi$. Avec ω_0, on peut identifier les coefficients de Fourier pour les n différents de zéro:

$$\underset{n\neq 0}{F_{\mathrm{n}}}(n) = \frac{1}{T_0}F_{\mathrm{r}}(n\omega_0) = \frac{1}{2}\mathrm{Sa}^2\left(\frac{2\pi n}{4}\right) = \frac{1}{2}\mathrm{Sa}^2\left(\frac{\pi n}{2}\right)\,. \tag{3}$$

Pour la valeur moyenne (ou le DC) de la fonction, on trouve que $F_{\mathrm{n}}(0) = \frac{1}{2}$.

Enfin, à partir des coefficients de Fourier $F_{\mathrm{n}}(n)$, il est possible de trouver la transformation de Fourier demandée:

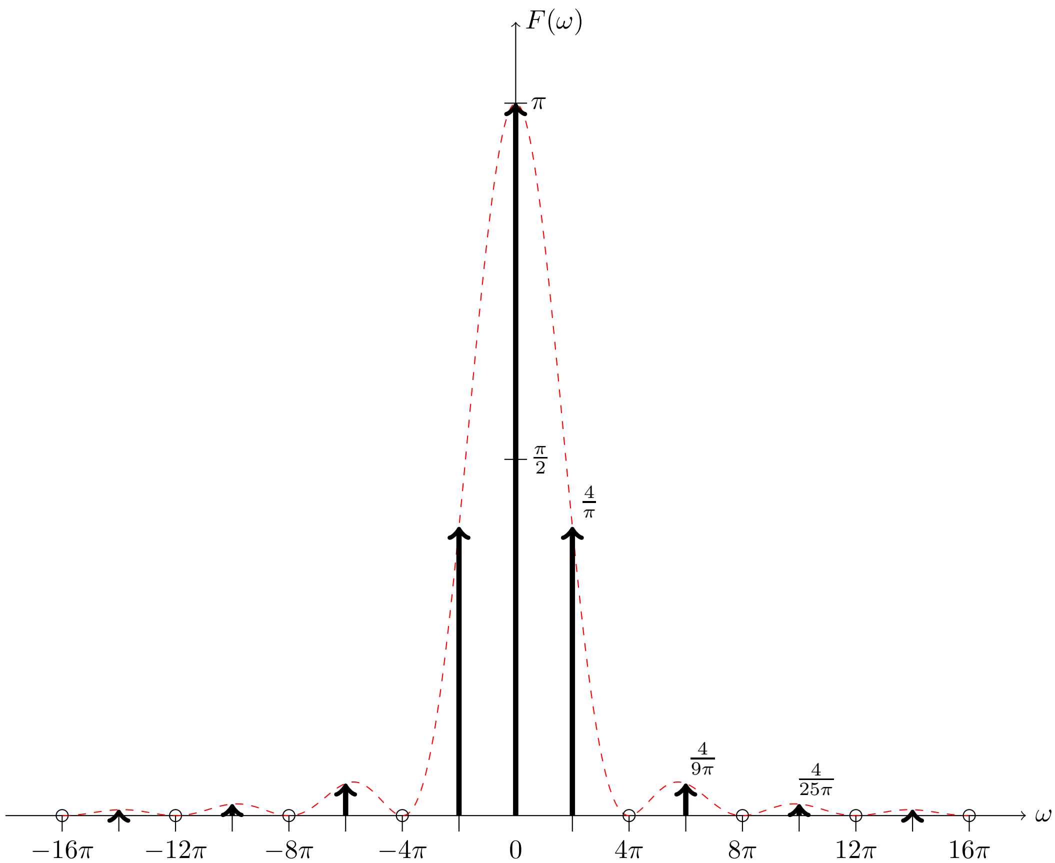
$$F(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_{\mathrm{n}}(n)\delta(\omega - n\omega_0) \tag{4}$$

$$= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\mathrm{Sa}^2\left(\frac{\pi n}{2}\right)\delta(\omega - 2\pi n) \tag{5}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \pi\mathrm{Sa}^2\left(\frac{\pi n}{2}\right)\delta(\omega - 2\pi n) \tag{6}$$

b)

On demande de tracer le spectre $F(\omega)$ obtenu en a). Il s'agit d'une série d'impulsions à tous les $2\pi n$ avec une enveloppe en $\pi\mathrm{Sa}^2(\pi n/2)$. Sur le figure suivante, l'enveloppe est en rouge pointillé et la fonction $F(\omega)$ en noir[1]. Les cercles indiquent les impulsions nulles (où l'enveloppe est nulle):



c)

On cherche la fraction de la puissance entre la puissance totale et la puissance contenue sur l'intervalle $\omega = [4\pi, 8\pi]$. Cet intervalle continent les 2ième, 3ième et 4ième harmoniques. La

[1]Sur la figure, l'échelle verticale n'est pas respectée pour bien illuster le comportement de $F(\omega)$

puissance dans ces harmoniques est:

$$\begin{aligned} P_{2-4} &= |F_\mathrm{n}(-4)|^2 + |F_\mathrm{n}(-3)|^2 + |F_\mathrm{n}(-2)|^2 + |F_\mathrm{n}(2)|^2 + |F_\mathrm{n}(3)|^2 + |F_\mathrm{n}(4)|^2\,, && (7)\\ &= 0 + |F_\mathrm{n}(-3)|^2 + 0 + 0 + |F_\mathrm{n}(3)|^2 + 0\,, && (8)\\ & && (9) \end{aligned}$$

Il n'y a donc de la puissance que dans la 3ième harmonique. Cette puissance donne:

$$\begin{aligned} P_3 &= |F_\mathrm{n}(-3)|^2 + |F_\mathrm{n}(3)|^2 = 2|F_\mathrm{n}(3)|^2 = 2\left|\frac{1}{2}\mathrm{Sa}^2\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right|^2\,, && (10)\\ &= 2\left|\frac{1}{2}\frac{\sin^2(\frac{3\pi}{2})}{(\frac{3\pi}{2})^2}\right|^2 = \frac{1}{2}\left|\frac{(-1)^2}{(3\pi/2)^2}\right|^2 = 2\left|\frac{1}{9\pi^2/4}\right|^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{16}{81\pi^4}\right)\,, && (11)\\ &= \frac{8}{81\pi^4}\,, && (12)\\ &= 0.001014\ldots\,. && (13) \end{aligned}$$

Avec les coefficients de Fourier, la puissance totale est donnée par:

$$P_\mathrm{tot} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_\mathrm{n}(n)|^2\,. \qquad (14)$$

Dans ce cas, il est toutefois beaucoup plus simple de calculer la puissance totale directement de la fonction temporelle:

$$P_\mathrm{tot} = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} |f(t)|^2 \mathrm{d}t\,. \qquad (15)$$

Puisque la fonction triangulaire est symétrique, la puissance dans la demi période est égale à la moitié de la puissance calculée sur la période entière. Ceci permet d'écrire:

$$P_\mathrm{tot} = \int_{-0.5}^{0} |2t-1|^2\mathrm{d}t + \int_{0}^{0.5} |-2t+1|^2\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{0.5} |-2t+1|^2\mathrm{d}t\,. \qquad (16)$$

Cette intégrale simple donne directement:

$$P_\mathrm{tot} = 2\left[\frac{4t^3}{3} - 2t^2 + t\right]_0^{0.5} = 2\left[\frac{4(0.5)^3}{3} - 2(0.5)^2 + 0.5\right] = \frac{1}{3}\,. \qquad (17)$$

Enfin, on demandait de calculer le ratio de puissance:

$$\begin{aligned} R &= \frac{P_{2-4}}{P_\mathrm{tot}} = \frac{P_3}{P_\mathrm{tot}} = \frac{8}{81\pi^4}/\frac{1}{3} = \frac{24}{81\pi^4}\,, && (18)\\ &= 0.003042\ldots\,, && (19)\\ &\approx 0.3\,\%\,. && (20) \end{aligned}$$

d)

En terminant, on demande le taux de décroissance des modes du spectres. Le signal $f(t)$ est continu, mais sa première dérivée est discontinue. La décroissance est donc en $1/\omega^2$.

On peut aussi le calculer à partir de l'enveloppe du signal $F(\omega)$. Cette enveloppe est en Sa^2:

$$\frac{1}{2}\mathrm{Sa}^2\left(\frac{\omega}{4}\right) = \frac{\sin^2(\omega/4)}{2(\omega/4)^2} \le \frac{1}{2(\omega/4)^2} \le \frac{8}{\omega^2} \qquad (21)$$

Encore une fois, on conclu que l'enveloppe diminue en $1/\omega^2$. Il s'en suit que les modes diminuent aussi en $1/\omega^2$ puisque ceux-ci suivent forcément l'enveloppe.

Problème 2 (10 pt)

a)

On demande de trouver **et tracer** la transformation de Fourier de la fonction $f(t)$ suivante:

$$f(t) = \mathrm{Rect}(t-10) + \mathrm{Rect}(t+10)\,. \tag{22}$$

La propriété de décalage temporelle dicte que:

$$\boxed{f(t+\alpha) \Longleftrightarrow \mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha\omega}F(\omega)}$$

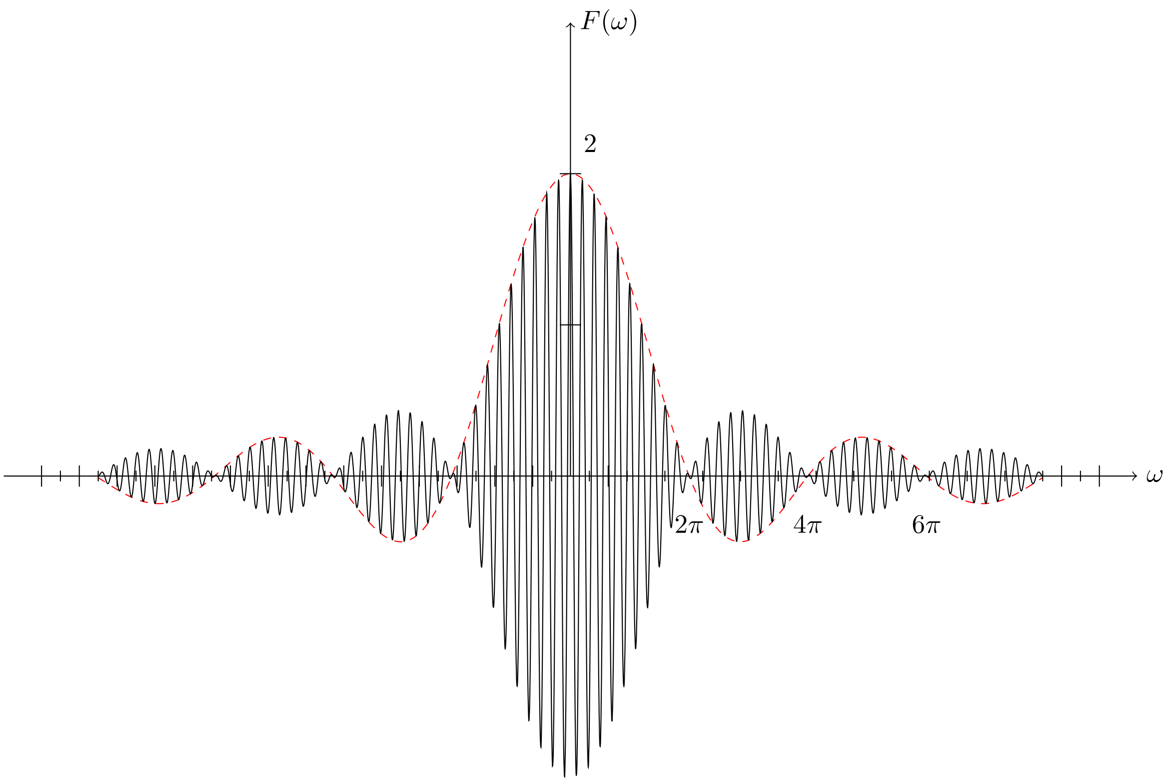
Et la transformation de Fourier de $\mathrm{Rect}(t)$ est $\mathrm{Sa}(\omega/2)$. La transformation de Fourier de $f(t)$ est alors:

$$F(\omega) = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}10\omega}\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega}{2}\right) + \mathrm{e}^{\mathrm{j}10\omega}\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega}{2}\right)\,, \tag{23}$$

$$= \mathrm{Sa}\left(\frac{\omega}{2}\right)\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}10\omega} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}10\omega}\right]\,, \tag{24}$$

$$= 2\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega}{2}\right)\cos(10\omega)\,. \tag{25}$$

Il s'agit d'un cosinus rapide ($\omega_0 = 10$) avec une enveloppe en Sa. La figure suivante illustre $F(\omega)$ avec l'enveloppe en Sa illustrée en rouge pointillé:



b)

En b), on demande maintenant de calculer et **de tracer** la transformation de Fourier de la fonction $g(t)$:

$$g(t) = f(t) \times \cos(100t)\,. \tag{26}$$

Cette transformation se trouve instinctivement grace à la convolution (chapitre 6) mais peut se trouver tout aussi aisément en applicant les propriétés de la transformation de Fourier:

$$g(t) = f(t) \times \cos(100t) = f(t) \times \frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}100t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}100t}\right]\,, \tag{27}$$

$$= \frac{1}{2}f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}100t} + \frac{1}{2}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}100t}\,. \tag{28}$$

En utilisant la propriété de décalage en fréquence:

$$\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{j}bt}f(t) \Longleftrightarrow F(\omega - b)}$$

on trouve:

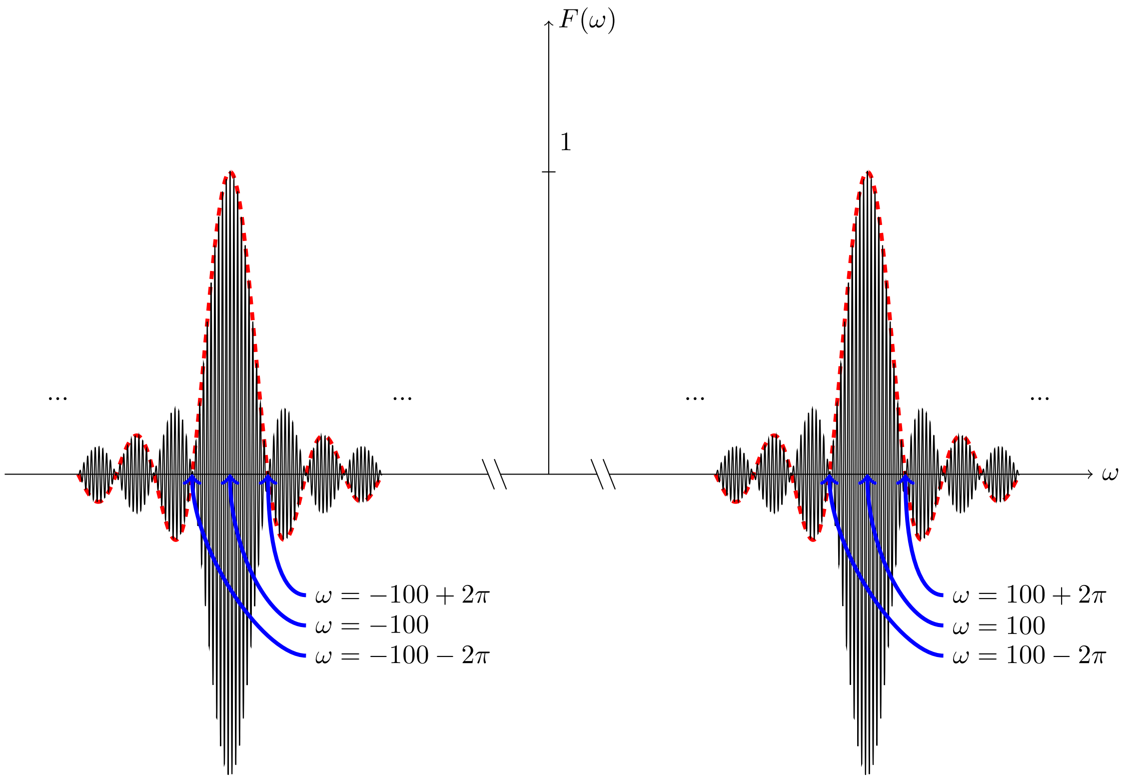
$$G(\omega) = \mathscr{TF}\left\{\frac{1}{2}f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}100t}\right\} + \mathscr{TF}\left\{\frac{1}{2}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}100t}\right\}\,, \tag{29}$$

$$= \frac{1}{2}F(\omega - 100) + \frac{1}{2}F(\omega + 100)\,, \tag{30}$$

$$= \mathrm{Sa}\left(\frac{(\omega - 100)}{2}\right)\cos(10(\omega - 100)) + \mathrm{Sa}\left(\frac{(\omega + 100)}{2}\right)\cos(10(\omega + 100))\,. \tag{31}$$

$$= \mathrm{Sa}\left(\frac{\omega - 100}{2}\right)\cos(10\omega - 1000) + \mathrm{Sa}\left(\frac{\omega + 100}{2}\right)\cos(10\omega + 1000)\,. \tag{32}$$

Le spectre de la fonction f(t) se retrouve dédoublée et décalée à ± 100. La fréquence du cosinus sous l'enveloppe reste inchangée.



Problème 3 (15 pt + 5 pt bonus possible)

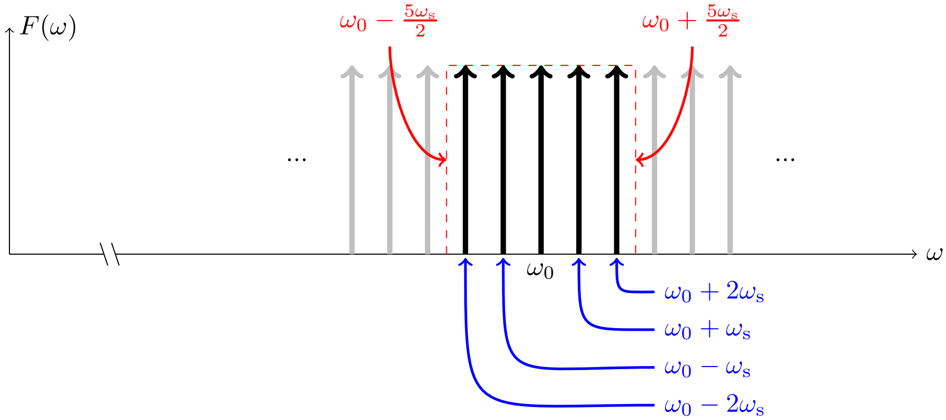
On donne un peigne de **fréquences** décalé et limité par une boîte:

$$F(\omega) = \delta_{\omega_s}(\omega - \omega_0) \times \mathrm{Rect}\left(\frac{\omega - \omega_0}{5\omega_s}\right), \tag{33}$$

avec $\omega_s = 1$ et $\omega_0 = 100.5$.

a)

On demande de tracer le spectre $F(\omega)$ donné. On a un peigne de dirac à une fréquence de répétition ω_s et décalé à ω_0 multiplié par une boîte rectangulaire centrée sur ω_0 et de largeur $5\omega_s$. La figure suivante illustre en gris le peigne de diract, en rouge l'enveloppe en forme de Rect et en noir la fonction $F(\omega)$.



b)

On demande s'il s'agit d'un signal à énergie finie ou d'un signal à puissance finie **et pourquoi**. Des impulsions décalées en fréquence correspondent à des exponentielles complexes en temps. Puisqu'une exponentielle complexe est périodique, il s'agit donc d'un signal à **puissance finie**.

c)

On demande d'exprimer explicitement $F(\omega)$ comme une somme d'impulsions. On a 5 impulsions décalées:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \delta(\omega - (\omega_0 - 2\omega_s)) + \delta(\omega - (\omega_0 - \omega_s)) + \delta(\omega - (\omega_0)) \\ &\qquad + \delta(\omega - (\omega_0 + \omega_s)) + \delta(\omega - (\omega_0 + 2\omega_s)), \qquad (34) \\ &= \delta(\omega - 98.5) + \delta(\omega - 99.5) + \delta(\omega - 100.5) + \delta(\omega - 101.5) + \delta(\omega - 102.5). \qquad (35) \end{aligned}$$

d)

On demande la transformation de Fourier inverse de $F(\omega)$. Avec le résultat de c), il est très facile de retrouver $f(t)$ en utilisant la propriété de décalage en fréquence et la transformation de Fourier d'un delta-dirac.

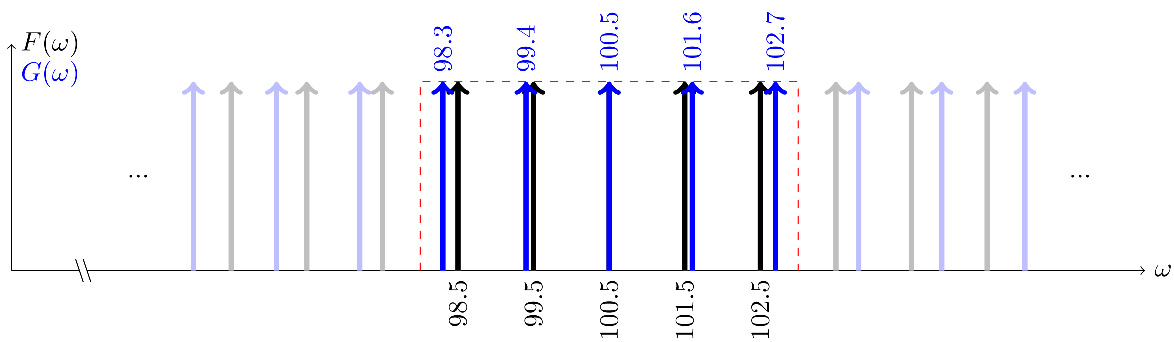
$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}98.5t} + \mathrm{e}^{\mathrm{j}99.5t} + \mathrm{e}^{\mathrm{j}100.5t} + \mathrm{e}^{\mathrm{j}101.5t} + \mathrm{e}^{\mathrm{j}102.5t}\right] \tag{36}$$

e)

Soit un second peigne :

$$G(\omega) = \delta_{1.1\omega_s}(\omega - \omega_0) \times \mathrm{Rect}\left(\frac{\omega - \omega_0}{5\omega_s}\right). \tag{37}$$

Ce second peigne possède la même enveloppe que $F(\omega)$, mais a une fréquence de répétition légèrement différente ($1.1\omega_s$). Sur le même graphique, en illustrant les deux peignes, on trouve:



f)

On demande la transformation de Fourier inverse du second peigne, $G(\omega)$. De la même manière qu'en d), on trouve directement:

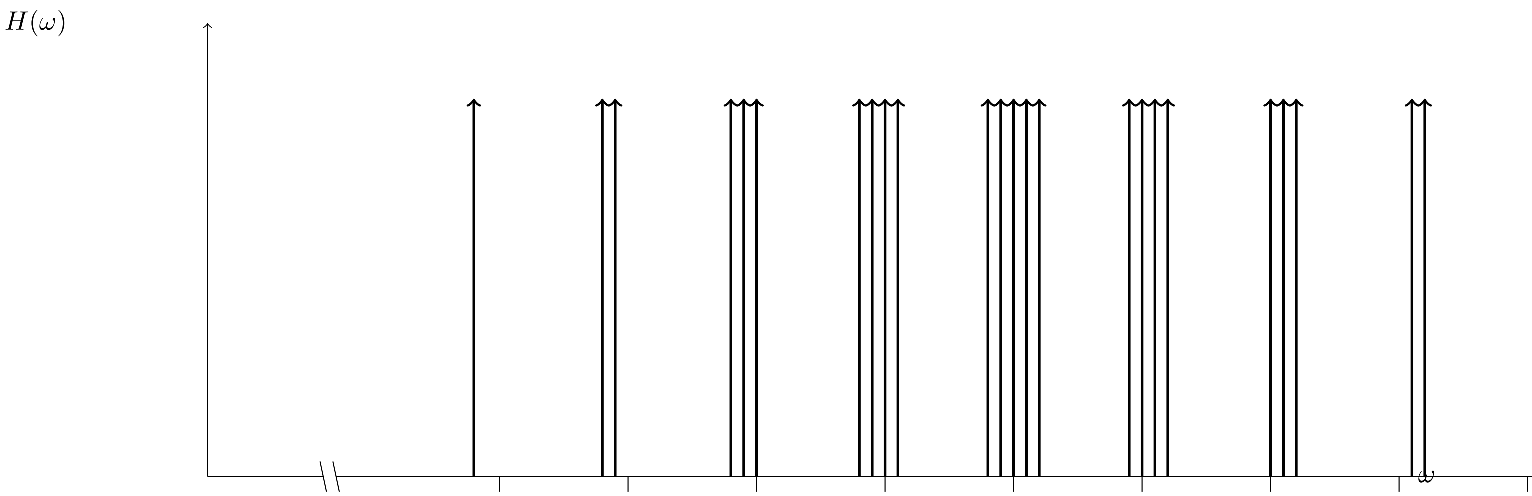
$$g(t) = \frac{1}{2\pi}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}98.3t} + \mathrm{e}^{\mathrm{j}99.4t} + \mathrm{e}^{\mathrm{j}100.5t} + \mathrm{e}^{\mathrm{j}101.6t} + \mathrm{e}^{\mathrm{j}102.7t}\right] \tag{38}$$

g)

Un photodétecteur mesure $h(t)$, le produit des deux signaux temporels: $h(t) = f(f) \times g(t)$. On demande de calculer les 25 fréquences présentes dans le spectre de battement $H(\omega)$, de tracer $H(\omega)$, la transformation de Fourier de $h(t)$. Le produit des deux termes comprenant 5 exponentielles produit un battement. Chaque raie d'un peigne bat avec les 5 raies de l'autre, produisant 25 fréquences de battement en tout. Ces fréquences sont:

		g(t)				
		❶	❷	❸	❹	❺
f(t)	①	196.8	197.9	199.0	200.1	201.2
	②	197.8	198.9	200.0	201.1	202.2
	③	198.8	199.9	201.0	202.1	203.2
	④	199.8	200.9	202.0	203.1	204.2
	⑤	200.8	201.9	203.0	204.1	205.2

La figure suivante illustre ce spectre de battement. Le groupe de raies central est centrée sur $\omega = 201.0$. Les raies de à l'intérieur de chacun des neuf groupes de raies sont espacées l'une de l'autre de 0.1.



h)

Les signaux $f(t)$ et $g(t)$ sont tous deux une somme de 5 exponentielles. Lorsqu'on fait le produit $g(t) \times f(t)$, on trouve que chaque terme du second peigne est multiplié par chaque exponentielle du premier peigne. En multipliant chaque termes du second peigne par une exponentielle complexe dans le domaine temporelle, ceci correspond à un décalage dans le domaine spectral. La composante spectrale de chaque terme du second peigne est alors décalée par chaque terme du premier peigne.

En bout de ligne, les 5 impulsions du second peignes sont toutes décalées 5 fois par les 5 impulsions du premier peigne.

i)

Si on retire l'impulsion à la fréquence $\omega = 100.5$ du premier peigne, dans le spectre de battement $H(\omega)$, on perd les impulsions à $\omega = [198.9\ 199.9\ 201.0\ 202.1\ 203.2]$. Si on élimine maintenant l'impulsion à la fréquence $\omega = 100.5$ du second peigne, on perd les impulsions aux fréquences $\omega = [199.0\ \ 200.0\ \ 201.0\ \ 202.0\ \ 203.0]$. Finalement, si les raies à $\omega = 100.5$ sont éliminées dans les deux peignes, tous les neuf termes de battements de ces raies donnée ci-haut disparaissent.

j)

NOTE: La sous-question j) a été annulée lors de la correction suite à une erreur dans l'énoncé du problème. Un maximum de 5 points boni a toutefois été attribué pour certains éléments de réponse avec explications démontrant une excellente compréhension du problème.

Aux sous-questions g), h) et i), on observe que la multiplication d'une suite d'impulsions avec une autre suite produit un spectre de battement. Dans le cas présenté dans le problème #3, avec $f(t) \times g(t)$, on retrouve un spectre de battement à des fréquences plus hautes (au double de la fréquence, à 201.0 plutôt que 100.5). Il est évident que, dans ce cas, il n'est pas possible d'utiliser ce spectre de battement pour mesurer le signal avec un détecteur trop lent pour mesurer un spectre autours d'une fréquence de 100.

Ce qui aurait dû être demandé est le spectre de battement d'un peigne avec le complexe-conjugué de l'autre peigne: $\widehat{h(t)} = f(t) \times g(t)^*$. Dans ce cas, le décalage causé par le produit croisé des termes exponentiels ramène le spectre de battement non pas au double de la fréquence, mais autours de 0. Dans ce cas, les spectres originaux de $g(t)$ et $f(t)$ peuvent être déduis à partir de l'information spectrale autours de 0 et cette information peut être mesurée par un détecteur beaucoup plus lent. Une simple multiplication des deux peignes entre eux permet de mesurer leur spectre avec un détecteur plus lent par un facteur 500 par rapport à un détecteur qui mesurerait directement ces peignes (sans battement).