EXAMEN 1

MAT-18996: analyse numérique pour l'ingénieur Hiver 2009

Remarques:

1) Documents permis: deux feuilles 8 1/2 × 11, recto-verso.
2) Seulement les calculatrices avec l'auto-collant de la Faculté seront autorisées.
3) Soigner le français; en particulier éviter les fautes grammaticales.
4) Déposer votre carte d'identité avec photo sur le coin gauche de votre table et assoyez-vous du côté droit.
5) Nous ne répondrons à **aucune** question concernant ces exercices, sauf si nous réalisons la présence d'une ambiguité ou d'une erreur dans l'énoncé des questions, auquel cas la réponse sera annoncée à l'ensemble des étudiants.

Question 1. (24 points)

L'équation $x^3 - 3x^2 + x + 2 = 0$ peut être ramenée de plusieurs façons à un problème de point fixe $x = g(x)$. Considérons les 3 algorithmes suivants du point fixe:

(i)

$$x_{n+1} = -x_n^3 + 3x_n^2 - 2$$

(ii)

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 1 + \frac{2}{x_n}}{3}$$

(iii)

$$x_{n+1} = x_n^3 - 3x_n^2 + 2x_n + 2$$

a) [3 pts] Montrer que $\bar{x} = 2$ est un point fixe pour chacune des méthodes ci-dessus.
b) [9 pts] Sans calculer d'itération, faites l'étude de la convergence pour chacune des méthodes ci-dessus: déterminer si la méthode est convergente ou non, identifier le type de convergence (linéaire ou quadratique) si elle a lieu, et le taux de convergence le cas échéant.

c) [4 pts] Donnez un 4ème algorithme de point fixe (sans en faire l'étude).

d) [3 pts] Pour le premier algorithme, c'est-à-dire $x_{n+1} = -x_n^3 + 3x_n^2 - 2$, calculer la **première** itération de l'algorithme de Steffenson à partir de $x_0 = 1$.

d) [5 pts] Expliciter la méthode de Newton appliquée à l'équation $x^3 - 3x^2 + x + 2 = 0$ et calculer la **première** itération à partir de $x_0 = 1$.

Question 2. (20 points)

On désire approcher la racine $\bar{x}$ située entre 2.5 et 2.8 de l'équation

$$f(x) = 0.$$

L'application de la méthode de Newton a produit les itérés suivants:

n	x_n
4	2.61421
5	2.62453
6	2.63151
7	2.63621
8	2.63937
9	2.64149

a) [15 pts] Déterminer l'ordre de convergence de l'algorithme pour la racine $\bar{x}$. On utilisera la définition suivante de l'erreur : $e_n = |x_n - x_{n+1}|$

b) [5 pts] Que peut-on dire de la multiplicité de la racine? Justifier.

Question 3. (20 points)

On considère le système linéaire

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 3 & -7 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

que l'on veut résoudre par la méthode de factorisation LU donnée par Crout. On notera les éléments des matrices L et U respectivement par l_{ij} et u_{ij} avec $i, j = 1, 2, 3$.

a) [10 pts] Sachant que $l_{22} = -1$ et $u_{12} = -2$, compléter le calcul de la factorisation de la matrice du système tout en tenant compte de la structure particulière de la matrice.

b) [10 pts] Utiliser cette factorisation pour résoudre le système linéaire.

Question 4. (16 points)

On considère le système linéaire

$$A\,\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1.01 \\ 1.01 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{b}.$$

a) [3 pts] Déterminer la solution exacte $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ du système linéaire.

b) [2 pts] Calculer le résidu correspondant à la solution $\hat{\mathbf{x}} = (-4.5, 5.5)$.

c) [8 pts] Trouver une borne inférieure du conditionnement de A en utilisant la norme infinie.

d) [3 pts] La valeur du conditionnement est-elle affectée si l'on change le second membre du système linéaire par $\mathbf{b} = (-1, 1)$?

Question 5. (8 + 8 + 4 points)

a) Ecrire la méthode de Newton pour résoudre le système

$$\begin{aligned} 3\,x^2 + x\,y - 1 &= 0 \\ x\,y^2 + 4\,y + 4 &= 0. \end{aligned}$$

b) Effectuer une itération en partant de $(0, 1)$.

c) Peut-on prendre comme point initial $(0, 0)$? Expliquer.

Question 6. (6 + 4 + 10 points)

Soit $f(x) = \ln(1 + x)$.

a) Trouver le développement de Taylor $P_2(x)$ de degré 2 de la fonction $f(x)$ au voisinage de $x_0 = 0$.

b) En utilisant $P_2(x)$, calculer une approximation de $\ln(1.1)$.

c) A l'aide de la formule d'erreur de Taylor, estimer l'erreur commise et la comparer avec la valeur exacte de l'erreur fournie par votre calculatrice.