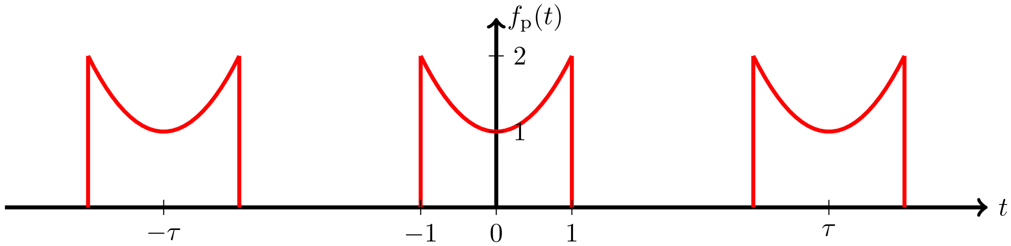
GEL-2001: Analyse des signaux

Examen 1 A2009 : Solutions

Département de génie électrique et de génie informatique

Problème 1 (12 pt)

Soit la fonction périodique $f_{\mathrm{p}}(t)$ suivante:



$$f_{\mathrm{p}}(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad -\tau/2 \leq t < -1 \\ 1+t^2 & \text{pour} \quad -1 \leq t < 1 \\ 0 & \text{pour} \quad 1 \leq t < \tau/2 \end{cases}$$

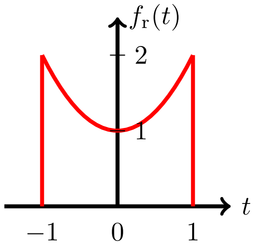
La période de la fonction est τ avec la restriction que $\tau > 2$.

a)

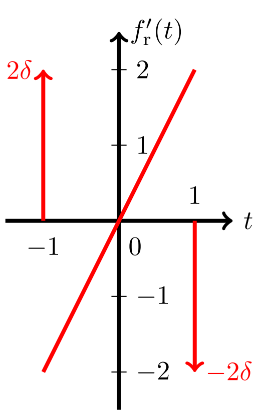
On demande de calculer la transformation de Fourier de la fonction périodique $f_{\mathrm{p}}(t)$.

Pour calculer cette Transformation, on peut passer par l'équation d'analyse, mais ceci requiert une double intégration partielle et n'est guère la solution la plus directe. En passant par les propriétés de dérivation, on trouve la solution beaucoup plus rapidement.

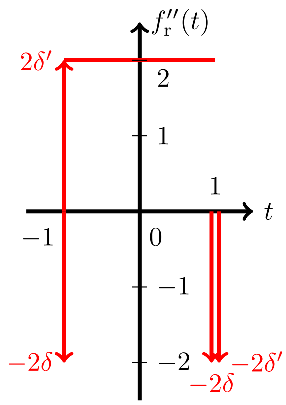
D'abord, il faut identifier la fonction restreinte sur une période, $f_{\mathrm{r}}(t)$, puis la dériver à trois reprises.



$$f_{\mathrm{r}}(t) = (1+t^2) \times u(t+1) \times u(-t-1)\,.$$

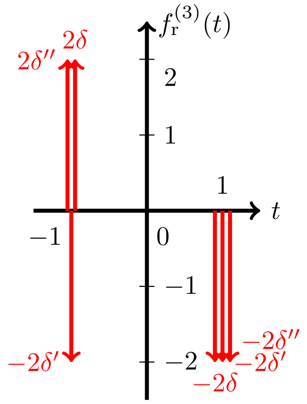


$$f'_{\mathrm{r}}(t) = 2t \times u(t+1) \times u(-t-1) + 2\delta(t+1) - 2\delta(t-1)\,.$$



$$f_{\mathrm{r}}''(t) = 2 \times u(t+1) \times u(-t-1) \\ \qquad + 2\delta'(t+1) - 2\delta'(t-1) - 2\delta(t+1) - 2\delta(t-1)\,,$$

$$f_{\mathrm{r}}''(t) = 2\mathrm{Rect}(t/2) \\ \qquad + 2\delta'(t+1) - 2\delta'(t-1) - 2\delta(t+1) - 2\delta(t-1)\,.$$



$$f_{\mathrm{r}}^{(3)}(t) = 2\delta''(t+1) - 2\delta''(t-1) - 2\delta'(t+1) - 2\delta'(t-1) + 2\delta(t+1) - 2\delta(t-1)\,.$$

Avec la propriété de la transformation de Fourier de la dérivée d'une fonction, on trouve:

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{r}}^{(3)}(\omega) &= \mathscr{TF}\{f_{\mathrm{r}}^{(3)}(t)\}\,, \\ &= 2(\mathrm{j}\omega)^2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega} - 2(\mathrm{j}\omega)^2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega} - 2\,\mathrm{j}\omega\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega} - 2\,\mathrm{j}\omega\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega} + 2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega} - 2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}\,. \end{aligned}$$

Toujours en utilisant la même propriété, on peut poser que:

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{r}}^{(3)}(\omega) &= 2(\mathrm{j}\omega)^2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega} - 2(\mathrm{j}\omega)^2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega} - 2\,\mathrm{j}\omega\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega} - 2\,\mathrm{j}\omega\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega} + 2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega} - 2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}\,, \\ (\mathrm{j}\omega)^3 F_{\mathrm{r}}(\omega) &= 2(\mathrm{j}\omega)^2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega} - 2(\mathrm{j}\omega)^2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega} - 2\,\mathrm{j}\omega\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega} - 2\,\mathrm{j}\omega\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega} + 2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega} - 2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}\,, \\ F_{\mathrm{r}}(\omega) &= \frac{1}{(\mathrm{j}\omega)^3}\left[2(\mathrm{j}\omega)^2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega} - 2(\mathrm{j}\omega)^2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega} - 2\,\mathrm{j}\omega\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega} - 2\,\mathrm{j}\omega\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega} + 2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega} - 2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}\right]\,. \\ &= \frac{1}{(\mathrm{j}\omega)^3}\left[4\,\mathrm{j}(\mathrm{j}\omega)^2\sin(\omega) - 4\,\mathrm{j}\omega\cos(\omega) + 4\,\mathrm{j}\sin(\omega)\right]\,, \\ &= \frac{1}{\omega^3}\left[4\omega^2\sin(\omega) + 4\omega\cos(\omega) - 4\sin(\omega)\right]\,. \end{aligned}$$

On aurait tout aussi bien pu s'arrêter après la deuxième dérivée de la fonction $f_{\mathrm{r}}(t)$:

$$f_{\mathrm{r}}''(t) = 2\mathrm{Rect}(t/2) + 2\delta'(t+1) - 2\delta'(t-1) - 2\delta(t+1) - 2\delta(t-1)\,.$$

La transformée de Fourier de cette deuxième dérivée est:

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{r}}''(\omega) &= 4\mathrm{Sa}(\omega) + 2\,\mathrm{j}\omega\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega} - 2\,\mathrm{j}\omega\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega} - 2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega} - 2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}\,. \\ &= 4\frac{\sin(\omega)}{\omega} + 2\,\mathrm{j}\omega\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega} - 2\,\mathrm{j}\omega\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega} - 2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega} - 2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}\,. \end{aligned}$$

À partir de $F_{\mathrm{r}}''(\omega)$, on procède pour retrouver $F_{\mathrm{r}}(\omega)$ de la même manière qu'en partant de $F_{\mathrm{r}}^{(3)}(\omega)$.

Ensuite, on peut trouver l'expression des coefficients de Fourier de la fonction périodique, sachant que $F_\mathrm{p}(n) = \frac{1}{T_0} F_\mathrm{r}(n\omega_0)$:

$$F_\mathrm{p}(n) = \frac{1}{\tau n^3 \omega_0^3} \left[4n^2\omega_0^2 \sin(n\omega_0) + 4n\omega_0 \cos(n\omega_0) - 4\sin(n\omega_0)\right] \,,$$

puis, finalement, la transformation de Fourier suivante:

$$\begin{aligned} F_\mathrm{p}(\omega) &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_\mathrm{p}(n)\delta(\omega - n\omega_0)\,, \\ &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\tau n^3\omega_0^3} \left[4n^2\omega_0^2 \sin(n\omega_0) + 4n\omega_0 \cos(n\omega_0) - 4\sin(n\omega_0)\right] \delta(\omega - n\omega_0)\,. \end{aligned}$$

Évidemment, la fonction $f_\mathrm{p}(t)$ possède une composante continue. Ceci est clairement illustré par la figure présentant la fonction. La composante continue est décrite par:

$$\begin{aligned} F(0) &= \frac{1}{T_0} \int\limits_{-T_0/2}^{T_0/2} f_\mathrm{p}(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\tau} \int\limits_{-1}^{1} (1+t^2)\mathrm{d}t\,, \\ &= \frac{1}{\tau}\, t\Big|_{-1}^{1} + \frac{1}{\tau}\, \frac{t^3}{3}\Bigg|_{-1}^{1}\,, \\ &= 2\frac{1}{\tau} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\tau} = \frac{8}{3\tau}\,. \end{aligned}$$

Ce coefficient de Fourier $F(0)$ doit d'ajouter à la série de Fourier $F_\mathrm{p}(n)$ pour tenir compte de la composante continue. La tranformée de Fourier finale est alors donc:

$$\begin{aligned} F_\mathrm{p}(\omega) &= 2\pi \left[\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty} \frac{4}{\tau n^3\omega_0^3} \left[n^2\omega_0^2 \sin(n\omega_0) + n\omega_0 \cos(n\omega_0) - \sin(n\omega_0)\right] \delta(\omega - n\omega_0) + \frac{8}{3\tau}\delta(\omega) \right]\,, \\ &= \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty} \frac{8\pi}{\tau n^3\omega_0^3} \left[n^2\omega_0^2 \sin(n\omega_0) + n\omega_0 \cos(n\omega_0) - \sin(n\omega_0)\right] \delta(\omega - n\omega_0) + \frac{16\pi}{3\tau}\delta(\omega)\,. \end{aligned}$$

b)

On demande ensuite quel est le taux de décroissance asymptotique de la transformation de Fourier de $f_\mathrm{p}(t)$.

Puisque la fonction est discontinue, sa transformation de Fourier va décroître en en $1/\omega$.

c)

On demande si le taux de décroissance asymptotique change lorsque la période $\tau = 2$.

Dans le cas où $\tau = 2$, l'espace entre les copies périodiques de la partie en t^2 devient nulles. La fonction $f_\mathrm{p}(t)$ est alors continue. Sa dérivée est, quant à elle, discontinue. Le taux de décroissance de la transformée de Fourier change alors pour être en $1/\omega^2$.

d)

On demande de calculer l'énergie du signal $f_{\mathrm{p}}(t)$.

Puisque le signal $f_{\mathrm{p}}(t)$ est un signal périodique, son énergie est infinie.

e)

On demande de calculer la puissance du signal $f_{\mathrm{p}}(t)$.

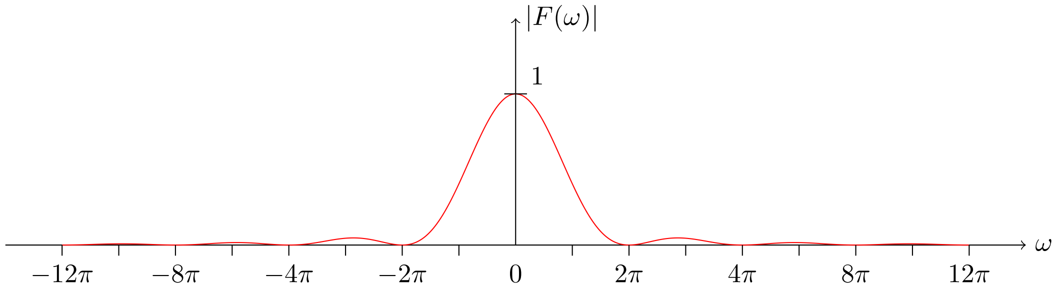
$$\begin{aligned}
P &= \frac{1}{T_0}\int\limits_{-T_0/2}^{T_0/2} |f(t)|^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{\tau}\int\limits_{-\tau/2}^{\tau/2} |f_{\mathrm{p}}(t)|^2 \mathrm{d}t\,, \\
&= \frac{1}{\tau}\int\limits_{-1}^{1} |1+t^2|^2 \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\tau}\left[\int\limits_{-1}^{1} \mathrm{d}t + \int\limits_{-1}^{1} 2t^2 \mathrm{d}t + \int\limits_{-1}^{1} t^4 \mathrm{d}t\right]\,, \\
&= \frac{1}{\tau}\left[t\Big|_{-1}^{1} + \frac{2t^3}{3}\Big|_{-1}^{1} + \frac{t^5}{5}\Big|_{-1}^{1}\right]\,, \\
&= \frac{1}{\tau}\left[2+\frac{4}{3}+\frac{2}{5}\right] = \frac{56}{15}\tau\,.
\end{aligned}$$

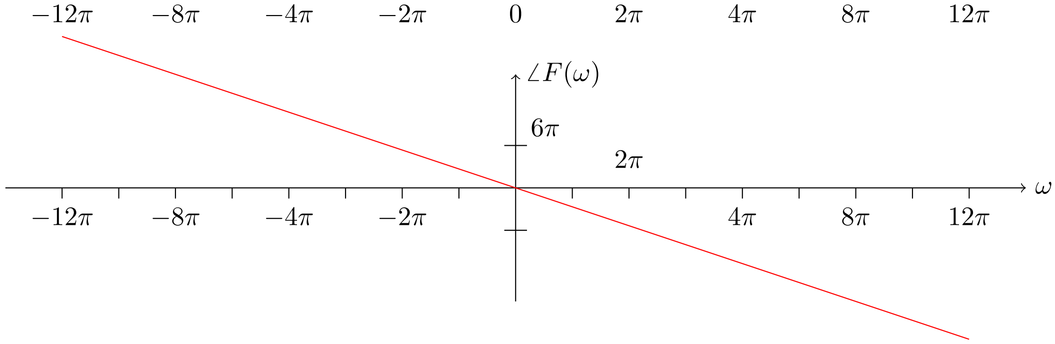
Problème 2 (8 pt)

On demande de **calculer** et de **tracer** en module et en phase les transformées de Fourier des fonctions données.

a)

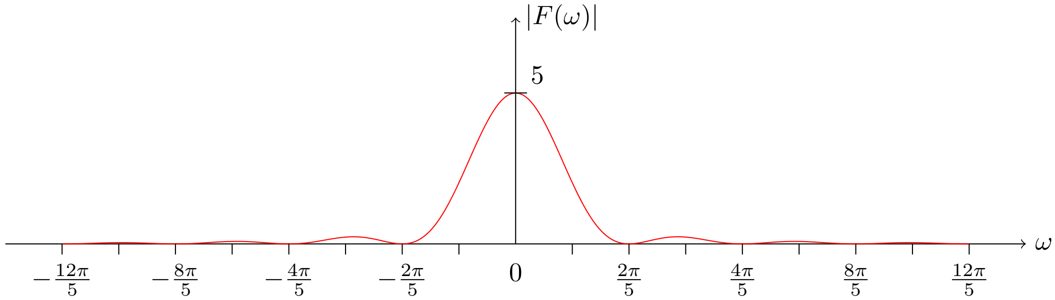
$$f(t) = \mathrm{Tri}(t-3) \quad \Leftrightarrow \quad F(\omega) = \mathrm{Sa}^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}3\omega}$$





b)

$$f(t) = \mathrm{Tri}(t/5) \quad \Leftrightarrow \quad F(\omega) = 5\mathrm{Sa}^2\left(\frac{5\omega}{2}\right)$$



$$\boxed{\angle F(\omega) = 0}$$

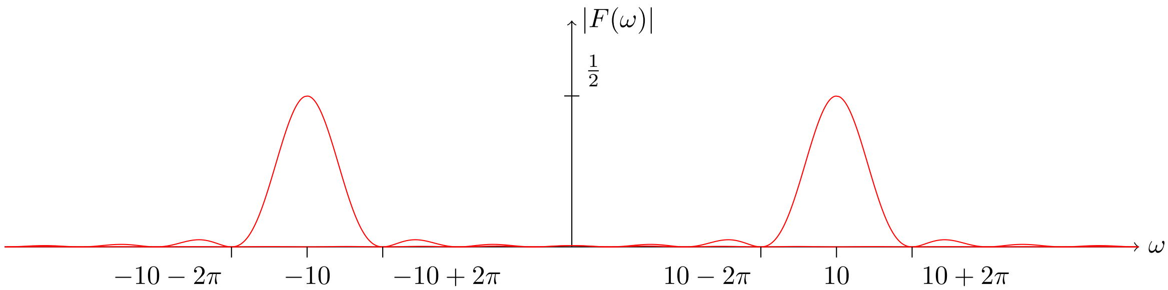
c)

$$f(t) = \mathrm{Tri}\left(\frac{t-3}{5}\right) \quad \Leftrightarrow \quad F(\omega) = 5\mathrm{Sa}^2\left(\frac{5\omega}{2}\right)\mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}3\omega}$$

Dans ce cas le module, $|F(\omega)|$, est identique à celui en b) et la phase, $\angle F(\omega)$, à celle en a). Les figures sont donc aussi identiques.

d)

$$f(t) = \cos(10t)\mathrm{Tri}(t) \quad \Leftrightarrow \quad F(\omega) = \frac{1}{2}\mathrm{Sa}^2\left(\frac{\omega-10}{2}\right) + \frac{1}{2}\mathrm{Sa}^2\left(\frac{\omega+10}{2}\right)$$



$$\boxed{\angle F(\omega) = 0}$$

Problème 3 (10 pt)

Soit la fonction $g(t)$, un train d'impulsion avec un glissement de phase:

$$g(t) = \delta_{T_r} \times \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_c t}\,, \qquad \text{où } \omega_r = 2\pi/T_r \text{ et } \omega_c < \omega_r.$$

a)

On demande de calculer la transformation de Fourier de $g(t)$. Dans ce but, il est utile de se remémorer les propriétés et définitions suivantes:

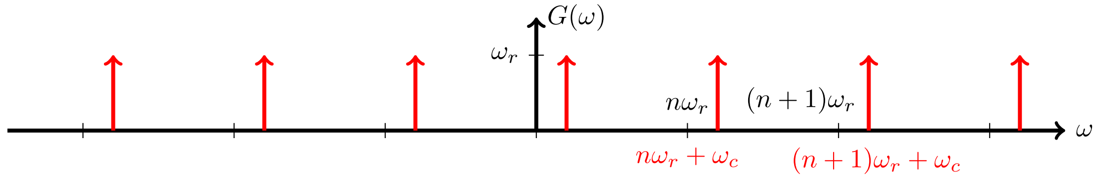
$$\delta_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_0)\,,$$

$$\mathscr{TF}\left\{\delta_{T_0}(t)\right\} = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega_0)\,,$$

$$\mathscr{TF}\left\{f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}at}\right\} = F(\omega - a)\,.$$

On trouve directement:

$$G(\omega) = \omega_r \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega_r - \omega_c)$$



b)

On demande si le signal $g(t)$ est réel. Puisque ce signal possède une phase non nulle, il doit forcément être complexe et n'est donc pas réel. De ce fait, le spectre du signal, $G(\omega)$ doit posséder une partie paire et une partie impaire et n'est plus symétrique. Le graphique de $G(\omega)$ illustre bien ce fait.

c)

On demande si $g(t)$ est périodique. Le peigne de dirac qui compose la fonction $g(t)$ est périodique, mais la fonction à en plus une phase glissante variant avec le temps. Dans ce cas, $g(t)$ n'est **pas** périodique.

Il faut toutefois noter que la fonction exponentielle complexe est aussi elle-même périodique. Si la vitesse de glissement ω_c et la fréquence du peigne de dirac, ω_r, ont un multiple commun, alors, dans ce cas particulier, le signal $g(t)$ sera périodique. La fréquence fondamentale du signal est alors le plus petit commun multiple des fréquence ω_r et ω_c.

d)

Le module de la fonction $g(t)$ est en fait le peigne de dirac δ_{T_r}. Celui-ci, par définition, est péridique donc le module de $g(t)$ l'est aussi. La période est tout simplement T_r.

Problème 4 (10 pt)

a)

On demande de trouver la transformée de Fourier de la fonction suivante:

$$f(t) = \frac{t^2}{a^2+t^2}\,.$$

Pour déterminer de manière relativement aisée cette transformation, il est souhaitable de tirer profit des propriétés de la transformation de Fourier. Trois propriétés sont particulièrement intéressantes dans ce cas:

$$\begin{aligned}
\mathscr{TF}\left\{af(t)\right\} &= aF(\omega)\,,\\
\mathscr{TF}\left\{t^n f(t)\right\} &= \mathrm{j}^n F^{(n)}(\omega) = \mathrm{j}^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\omega^n}F(\omega)\,,\\
\mathscr{TF}\left\{F(t)\right\} &= 2\pi f(-\omega)\,.
\end{aligned}$$

Aussi, avant de déterminer la transformation de Fourier, on peut réécrire l'expression de $f(t)$ pour faire ressortir plus clairement ces trois propriétés:

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{t^2}{a^2+t^2}\\
&= t^2 \times \frac{1}{a^2+t^2}\\
&= \frac{1}{2a} \times t^2 \times \frac{2a}{a^2+t^2}
\end{aligned}$$

Sachant que $\mathscr{TF}\left\{\mathrm{e}^{-a|\omega|}\right\} = \frac{2a}{a^2+t^2}$, on trouve aisément que:

$$\begin{aligned}
F(\omega) &= \frac{1}{2a}\,\mathrm{j}^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\omega^2} 2\pi \mathrm{e}^{-a|(-\omega)|}\\
&= \frac{-\pi}{a}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\omega^2}\mathrm{e}^{-a|(-\omega)|}\,.
\end{aligned}$$

Une méthode alternative permet de retrouver tout aussi facilement la transformée demandé tout en simplifiant plus rapidement son expression:

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{t^2}{a^2+t^2}\\
&= \frac{t^2+a^2-a^2}{a^2+t^2} = \frac{t^2+a^2}{a^2+t^2} - \frac{a^2}{a^2+t^2} = 1 - \frac{a^2}{a^2+t^2}\,.\\
&= 1 - \frac{a}{2}\frac{2a}{a^2+t^2}\,.
\end{aligned}$$

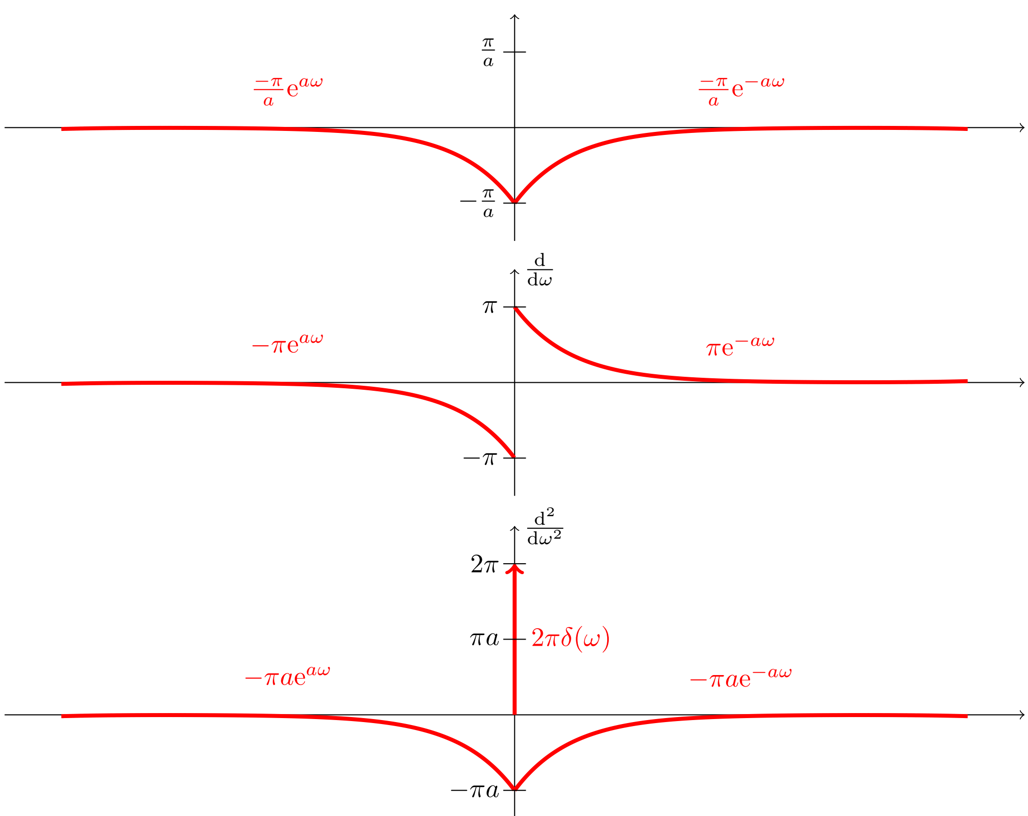
On évite alors de se retrouver avec la forme avec la double dérivée:

$$\begin{aligned}
F(\omega) &= 2\pi\delta(\omega) - \frac{a}{2}2\pi\mathrm{e}^{-a|(-\omega)|}\,,\\
&= 2\pi\delta(\omega) - \pi a\mathrm{e}^{-a|\omega|}\,.
\end{aligned}$$

Le même résultat aurait été retrouvé en calculant la double dérivée de la première expression trouvée:

$$
\begin{aligned}
F(\omega) &= \frac{-\pi}{a}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\omega^2}\mathrm{e}^{-a|(-\omega)|} = \frac{-\pi}{a}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\omega^2}\left[\mathrm{e}^{a\omega}\mathrm{U}(-\omega)+\mathrm{e}^{-a\omega}\mathrm{U}(\omega)\right] \ , \\
&= \frac{-\pi}{a}\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\omega^2}\left[\mathrm{e}^{a\omega}\mathrm{U}(-\omega)\right]+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\omega^2}\left[\mathrm{e}^{a\omega}\mathrm{U}(-\omega)\right]\right) \ , \\
&= \frac{-\pi}{a}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left[a\mathrm{e}^{a\omega}\mathrm{U}(-\omega)-\mathrm{e}^{a\omega}\delta(\omega)\right]+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left[-a\mathrm{e}^{-a\omega}\mathrm{U}(\omega)+\mathrm{e}^{-a\omega}\delta(\omega)\right]\right) \ , \\
&= \frac{-\pi}{a}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left[a\mathrm{e}^{a\omega}\mathrm{U}(-\omega)\right]-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left[\mathrm{e}^{a\omega}\delta(\omega)\right]-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left[a\mathrm{e}^{-a\omega}\mathrm{U}(\omega)\right]+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left[\mathrm{e}^{-a\omega}\delta(\omega)\right]\right) \ , \\
&= \frac{-\pi}{a}\left[a^2\mathrm{e}^{a\omega}\mathrm{U}(-\omega)-a\mathrm{e}^{a\omega}\delta(\omega)-a\mathrm{e}^{a\omega}\delta(\omega)-\mathrm{e}^{a\omega}\delta'(\omega)\right. \\
&\qquad\qquad \left.+a^2\mathrm{e}^{-a\omega}\mathrm{U}(\omega)-a\mathrm{e}^{-a\omega}\delta(\omega)-a\mathrm{e}^{-a\omega}\delta(\omega)+\mathrm{e}^{-a\omega}\delta'(\omega)\right] \ , \\
&= \frac{-\pi}{a}\left[a^2\mathrm{e}^{a\omega}\mathrm{U}(-\omega)+a^2\mathrm{e}^{-a\omega}\mathrm{U}(\omega)-2a\mathrm{e}^{a\omega}\delta(\omega)-2a\mathrm{e}^{-a\omega}\delta(\omega)-\mathrm{e}^{a\omega}\delta'(\omega)+\mathrm{e}^{-a\omega}\delta'(\omega)\right] \ , \\
&= \frac{-\pi}{a}\left[a^2\mathrm{e}^{a\omega}\mathrm{U}(-\omega)+a^2\mathrm{e}^{-a\omega}\mathrm{U}(\omega)-2a\delta(\omega)-2a\delta(\omega)-\mathrm{e}^{a\omega}\delta'(\omega)+\mathrm{e}^{-a\omega}\delta'(\omega)\right] \ , \\
&= \frac{-\pi}{a}\left[a^2\mathrm{e}^{a\omega}\mathrm{U}(-\omega)+a^2\mathrm{e}^{-a\omega}\mathrm{U}(\omega)-4a\delta(\omega)-2\sinh(a\omega)\delta'(\omega)\right] \ , \\
&= \frac{-\pi}{a}\left[a^2\mathrm{e}^{a\omega}\mathrm{U}(-\omega)+a^2\mathrm{e}^{-a\omega}\mathrm{U}(\omega)-4a\delta(\omega)+2a\delta(\omega)\right] \ , \\
&= \frac{-\pi}{a}\left[a^2\left[\mathrm{e}^{a\omega}\mathrm{U}(-\omega)+\mathrm{e}^{-a\omega}\mathrm{U}(\omega)\right]-2a\delta(\omega)\right] \ , \\
&= \frac{-\pi}{a}\left[a^2\mathrm{e}^{-a|\omega|}-2a\delta(\omega)\right] = -\pi a\mathrm{e}^{-a|\omega|}+2\pi\delta(\omega)\,.
\end{aligned}
$$

Mathématiquement, ce processus comporte quelques difficultés inhabituelles, la principale étant la manipulation du produit d'une fonction avec la dérivée d'une impulsion Dirac. Cette dérivation aurait pu se faire beaucoup plus aisément de manière graphique:



b)

On demande de trouver l'aire sous la courbe de $F(\omega)$, la transformée de Fourier de $f(t)$.

Applicant les propriétés de la transformation de Fourier, on remarque que l'aire sous la courbe de $F(\omega)$ est donnée par $f(0)$ puisque, par définition, $f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\mathrm{d}\omega$.

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{t^2}{a^2 + t^2} \\
f(0) &= \frac{0}{a^2 + 0} = 0\,.
\end{aligned}$$

On aurait aussi pu calculer l'aire sous la courbe directement en faisant l'intégration pour arriver au même résultat:

$$\begin{aligned}
f(0) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\mathrm{d}\omega\,, \\
&= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[2\pi\delta(\omega) - \pi a \mathrm{e}^{-a|\omega|}\right] \mathrm{d}\omega\,, \\
&= 2\pi \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega)\mathrm{d}\omega - \pi a \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-a|\omega|}\mathrm{d}\omega\,, \\
&= 2\pi - \pi a \int\limits_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{a\omega}\mathrm{d}\omega - \pi a \int\limits_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-a\omega}\mathrm{d}\omega\,, \\
&= 2\pi - \pi a \left.\frac{\mathrm{e}^{a\omega}}{a}\right|_{-\infty}^{0} + \pi a \left.\frac{\mathrm{e}^{-a\omega}}{a}\right|_{0}^{\infty}\,, \\
&= 2\pi - \pi + 0 + 0 - \pi\,, \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$