Mini-test 2

MAT-2910 : Analyse numérique pour l'ingénieur — Hiver 2014
Date : 2 avril, 14h30-15h15.

Remarques :

1) Seules les calculatrices avec l'auto-collant de la Faculté seront admises.
2) Pour chaque question on fournira le détail des calculs et du raisonnement. En l'absence de ces détails, une solution sera considérée comme nulle.
3) Déposez votre carte d'identité avec photo sur le coin de votre table.

Question 1. (10+10+10=30 points)

a) Expliquer, en quelques lignes, comment déterminer l'inverse d'une matrice de manière efficace.

b) Sachant que, pour une matrice de taille $n \times n$, la factorisation LU nécessite environ $\frac{n^3}{3}$ multiplications/divisions et la résolution d'un système triangulaire nécessite environ n^2 multiplications/divisions, environ combien de multiplications/divisions le calcul de la matrice inverse nécessite-t'il ?

c) Combien de multiplications/divisions sont nécessaires au calcul de l'inverse d'une matrice triangulaire ?

Question 2. (10+10+10+10=40 points)

On considère l'équation différentielle :

$$\begin{cases} y'(t) = y(t), \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

a) Calculer une approximation de $y(2)$ et $y(3)$ avec la méthode d'Euler **modifiée** avec $h = 1$.

b) Sans faire de calculs, dire laquelle des approximations de $y(2)$ et $y(3)$ devrait être la plus précise ? Pourquoi ?

c) D'une manière générale, comment se compare la méthode d'Euler modifiée avec la méthode d'Euler en terme de coût de calcul.

d) D'une manière générale, avec la méthode d'Euler modifiée, si on veut que l'erreur soit divisée par 16, par combien doit-on diviser h ?

Question 3. (10+10+10=30 points)

Le tableau suivant contient 3 évaluations d'une fonction $f(x)$:

x	-1	0	1
$f(x)$	0	0	2

a) Calculer un polynôme interpolant f en ces trois points en utilisant la méthode de Lagrange.

b) Combien existe-t'il de polynômes de degré 2 interpolant ces 3 points ?

c) Déterminer un polynôme de degré 5 interpolant la fonction g aux points suivants.

x	-8	1	-1	2	-4	3
$g(x)$	1	1	1	1	1	1

Aide-mémoire

Systèmes d'équations algébriques

- Normes vectorielles :
$$||\vec{x}||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad ||\vec{x}||_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i|$$
- Normes matricielles :
$$||A||_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|, \quad ||A||_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|,$$
- Borne pour l'erreur : si $\vec{x}$ est la solution analytique et $\vec{x}^*$ est une solution approximative de $A\vec{x} = \vec{b}$, on pose $\vec{e} = \vec{x} - \vec{x}^*$ et $\vec{r} = \vec{b} - A\vec{x}^*$ et on a :
$$\frac{1}{\mathrm{cond}A}\,\frac{||\vec{r}||}{||\vec{b}||} \le \frac{||\vec{e}||}{||\vec{x}||} \le \mathrm{cond}A\,\frac{||\vec{r}||}{||\vec{b}||} \quad \text{et} \quad \mathrm{cond}A \ge \max\left(\frac{||\vec{e}||\,||\vec{b}||}{||\vec{x}||\,||\vec{r}||}\,,\ \frac{||\vec{x}||\,||\vec{r}||}{||\vec{e}||\,||\vec{b}||}\right)$$
- Systèmes non-linéaires : pour $\vec{x}^i$ donné, on résout :
$$J(\vec{x}^i)\,\vec{\delta x} = -\vec{F}(\vec{x}^i)$$
et on pose $\vec{x}^{i+1} = \vec{x}^i + \vec{\delta x}$

Équations différentielles :

- Euler (ordre 1) : $y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$
- Taylor (ordre 2) : $y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) + \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial f(t_n, y_n)}{\partial t} + \frac{\partial f(t_n, y_n)}{\partial y} f(t_n, y_n)\right)$
- Euler modifiée (ordre 2) : $\hat{y} = y_n + hf(t_n, y_n)$
$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(f(t_n, y_n) + f(t_n + h, \hat{y})\right)$$
- Point milieu (ordre 2) : $k_1 = hf(t_n, y_n)$
$$y_{n+1} = y_n + h\left(f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2})\right)$$

– Runge-Kutta d'ordre 4 :

$$\begin{aligned}
k_1 &= hf(t_n, y_n) \\
k_2 &= hf(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}) \\
k_3 &= hf(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}) \\
k_4 &= hf(t_n + h, y_n + k_3) \\
y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}\,(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)
\end{aligned}$$