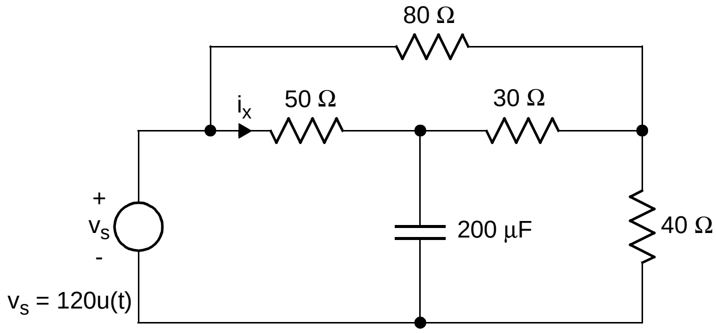
Corrigé du Test no. 3

Question no.1 (10 points)

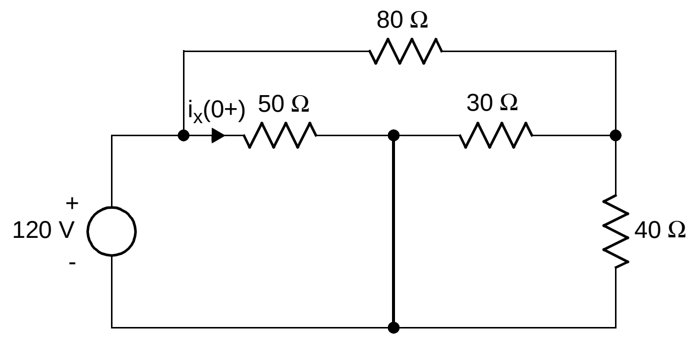


a) C'est un circuit du 1er ordre avec une excitation échelon. Le courant $i_x(t)$ est de la forme suivante:

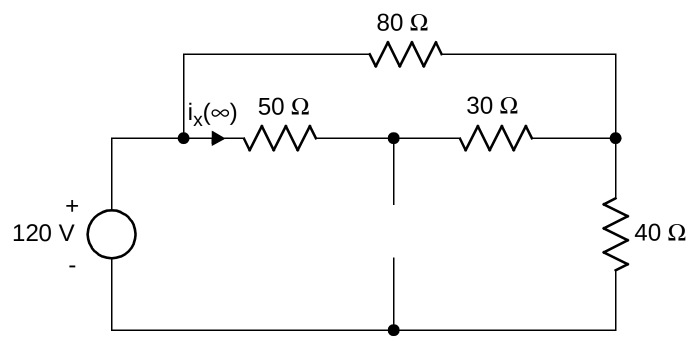
$$i_x(t) = \left[A + Be^{-\frac{t}{RC}}\right]u(t)$$ avec RC = constante de temps du circuit.

À t = 0+, le condensateur se comporte comme un court-circuit.
Le circuit équivalent pout t = 0+ est montré dans la figure ci-contre.
On calcule le courant i_x à t = 0+:

$$i_x(0+) = \frac{120}{50} = 2.4\text{ A}$$



Lorsque t → ∞, le condensateur se comporte comme un circuit ouvert.
Le circuit équivalent pout t → ∞ est montré dans la figure ci-contre.



On calcule le courant i_x à t → ∞ par la loi du diviseur de courant:

$$i_x(\infty) = \frac{(50+30)}{(50+30)+80} \times \frac{120}{\frac{80(50+30)}{80+(50+30)} + 40} = 0.75\text{ A}$$

En remplaçant ces valeurs dans l'expression de $i_x(t)$, on obtient:

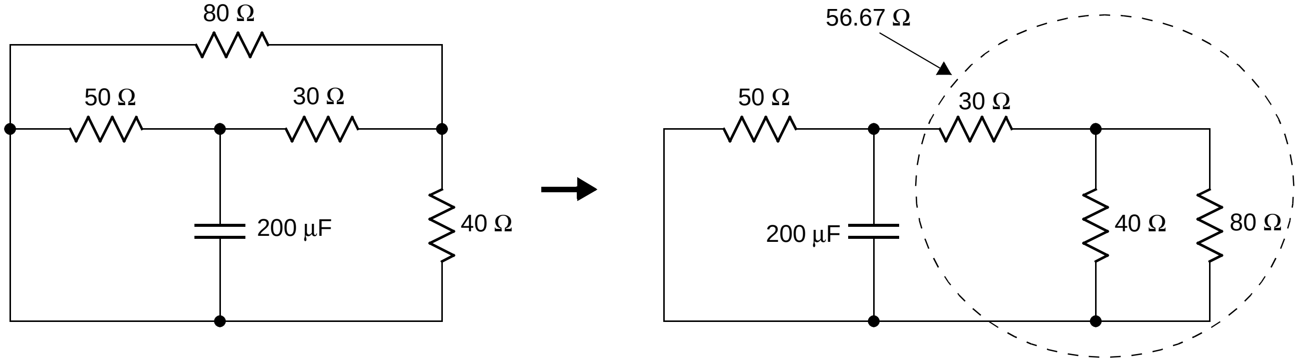
$$A + B = 2.4$$
$$A = 0.75$$

On déduit: B = 1.65

Alors:

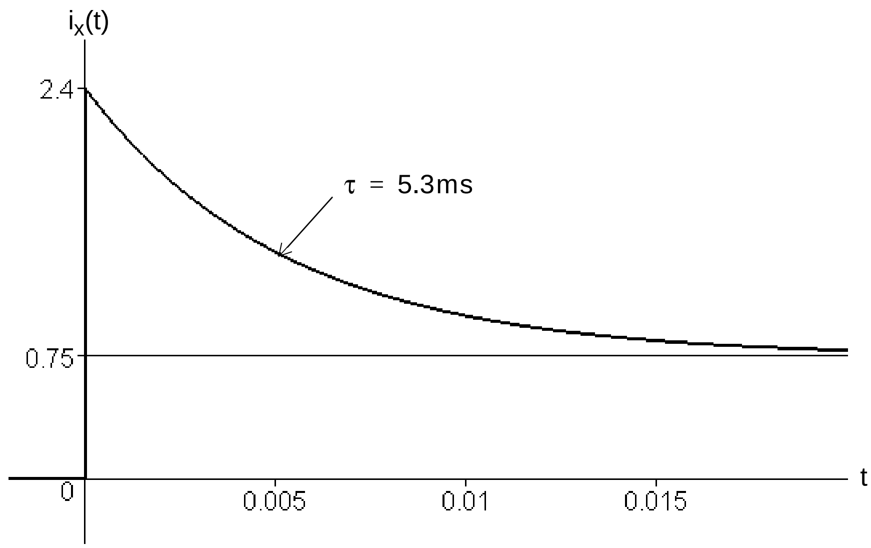
$$\boxed{i_x(t) = \left[0.75 + 1.65e^{-\frac{t}{RC}}\right]u(t)}$$

La constante de temps τ = RC du circuit est déterminée à l'aide du circuit de base:



$$R = 50 \parallel 56.67 = \frac{50 \times 56.67}{50 + 56.67} = 26.56\Omega$$

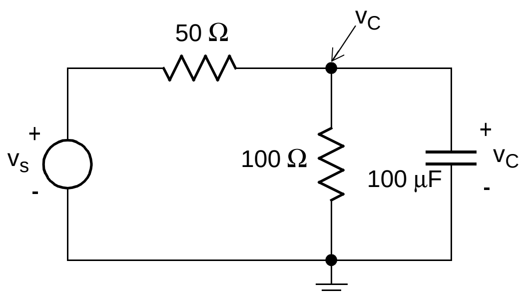
$$\tau = RC = 26.56 \times 200 \times 10^{-6} = 5.3\text{ms}$$



b) La durée du régime transitoire est égale à 5 fois la constante de temps du circuit:

$$d_{tran} = 5\tau = 5 \times 5.3\text{ms} = 26.5\text{ms}$$

<u>Question no.2</u> (10 points)



a) On établit l'équation d'équilibre du circuit à l'aide de la méthode des noeuds:

$$\left[\frac{1}{50}+\frac{1}{100}+1\times10^{-4}s\right]v_C = \frac{v_s}{50}$$

Ou bien: $(1.5+0.005s)v_C = v_s$

En remplaçant s par d/dt, on obtient l'équation différentielle reliant la tension v_C à la source v_s:

$$\boxed{0.005\frac{dv_C}{dt}+1.5v_C = v_s}$$

b) On doit résoudre l'équation différentielle suivante:

$$0.005\frac{dv_C}{dt}+1.5v_C = 120\cos(\omega_0 t)u(t) = 120\mathrm{Re}\left\{e^{j\omega_0 t}u(t)\right\}$$

On résout en premier lieu l'équation différentielle suivante: $0.005\frac{dz}{dt}+1.5z = e^{j\omega_0 t}u(t)$

La solution z est égale à: $z(t) = [Ae^{st}+Be^{j\omega_0 t}]u(t)$

Dans cette expression:

- s est la racine de l'équation caractéristique 0.005s + 1.5 = 0: s = -300
- B est une constante qu'on peut obtenir en remplaçant $Be^{j\omega_0 t}$ dans l'équation différentielle:

$$[0.005(j\omega_0)+1.5]Be^{j\omega_0 t} = e^{j\omega_0 t}$$

On déduit: $B = \frac{1}{0.005(j\omega_0)+1.5} = \frac{1}{1.5+j3.1416} = 0.287\angle -1.125$

- La constante A est obtenue en considérant la condition de continuité de z à t = 0:

$$z(0+\ ) = z(0-\ ) = 0 = A+B$$

On déduit: A = -B = $A = -B = -0.287\angle -1.125 = 0.287\angle 2.016$

Alors: $z(t) = [0.287e^{j2.016}e^{-300t}+0.287e^{-j1.125}e^{j\omega_0 t}]u(t)$

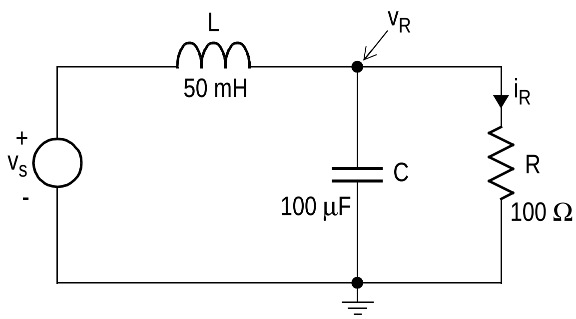
La tension $v_C(t)$ est donnée par la relation suivante:

$$v_C(t) = 120\mathrm{Re}\{z(t)\} = 120\mathrm{Re}\left\{[0.287e^{j2.016}e^{-300t}+0.287e^{-j1.125}e^{j\omega_0 t}]u(t)\right\}$$

$$\boxed{v_C(t) = \{-14.83e^{-300t}+34.44\cos(200\pi t-1.125)\}u(t)}$$

Réponse transitoire	Réponse permanente

Question no.3 (10 points)



a) On établit l'équation d'équilibre du circuit à l'aide de la méthode des noeuds: $\left[\frac{1}{Ls} + Cs + \frac{1}{R}\right]v_R = \frac{v_s}{Ls}$

En remplaçant $v_R = Ri_R$ dans cette équation, on obtient: $\left[\frac{1}{Ls} + Cs + \frac{1}{R}\right]Ri_R = \frac{v_s}{Ls}$

Ou bien: $[RLCs^2 + Ls + R]i_R = v_s$

On écrit l'équation différentielle qui relie le courant i_R à la source v_s: $\boxed{RLC\frac{d^2i_R}{dt^2} + L\frac{di_R}{dt} + Ri_R = v_s}$

b) Avec les valeurs numériques, on a l'équation suivante: $5\times10^{-4}\frac{d^2i_R}{dt^2} + 0.05\frac{di_R}{dt} + 100i_R = 150u(t)$

La solution de cette équation est: $i_R(t) = [A_1e^{s_1t} + A_2e^{s_2t} + B]u(t)$

Dans cette expression:

- s_1 et s_2 sont les racines de l'équation caractéristique $5\times10^{-4}s^2 + 0.05s + 100 = 0$

  $s_1 = -50 + j444.4$ et $s_2 = -50 - j444.4$
- B est la solution particulière: B = 1.5
- Les constantes A_1 et A_2 sont obtenues en considérant les conditions de continuité de i_R et de $\frac{di_R}{dt}$ à t = 0:

$$i_R(0+) = i_R(0-) = 0 = A_1 + A_2 + B$$

$$\left.\frac{di_R}{dt}\right|_{t=0+} = \left.\frac{di_R}{dt}\right|_{t=0-} = 0 = s_1A_1 + s_2A_2$$

En résolvant ces deux équations, on obtient:

$$A_1 = \frac{-1.5s_2}{s_2 - s_1} = 0.755\angle 3.03 \quad \text{et} \quad A_2 = \frac{1.5s_1}{s_2 - s_1} = 0.755\angle -3.03$$

Alors: $i_R(t) = [0.755e^{j3.03}e^{(-50 + j444.4)t} + 0.755e^{-j3.03}e^{(-50 - j444.4)t} + 1.5]u(t)$

Ou bien: $\boxed{i_R(t) = [1.51e^{-50t}\cos(444.4t + 3.03) + 1.5]u(t)}$

Réponse transitoire

Réponse permanente