Mathématiques de l'ingénieur I (MAT-1900)
Examen partiel du 12 mars 2010 – solutions

Question 1
(20 points)

Trouver une fonction $y(x)$ satisfaisant l'équation différentielle $y' = (y-2x)^2 + 3$ et la condition $y(0) = 1$.

On pose $u(x) = y(x) - 2x$.
Alors $u'(x) = y'(x) - 2$.

$$\begin{aligned}
u' + 2 = u^2 + 3 \quad &\iff \quad u' = u^2 + 1 \\
&\iff \quad \int \frac{du}{u^2+1} = \int dx + c \\
&\iff \quad \arctan u = x + c \\
&\iff \quad u = \tan(x+c) \\
&\iff \quad y = 2x + \tan(x+c).
\end{aligned}$$

La condition $y(0) = 1$ donne

$$1 = 0 + \tan(c) \quad \iff \quad c = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Il suffit donc de prendre $c = \frac{\pi}{4}$ et on a $y = 2x + \tan(x + \frac{\pi}{4})$.

Question 2
(5 + 15 = 20 points)

a) Trouver la solution générale de $y' \sin x - y \cos x = 0$.

$$\begin{aligned}
y' \sin x - y \cos x &= 0 \\
\frac{y'}{y} &= \frac{\cos x}{\sin x} \\
\ln|y| &= \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} + c_1 = \ln|\sin x| + c_1 \\
y &= c \sin x.
\end{aligned}$$

b) Utiliser a) pour construire la solution générale de $y' \sin x - y \cos x = 1$.

La méthode de Lagrange (variation de la constante) suggère de chercher une solution particulière de la forme $y_p(x) = u(x) \sin x$.

$$\begin{aligned} y_p' \sin x - y_p \cos x &= 1 \\ (u' \sin x + u \cos x) \sin x - u \sin x \, \cos x &= 1 \\ u' \sin^2 x &= 1 \\ u' &= \csc^2 x \\ \text{(on a } (\cot x)' = -\csc^2 x \text{ dans l'aide-mémoire)} \qquad u &= -\cot x + c. \end{aligned}$$

Il suffit de prendre $c = 0$ et on trouve $y_p = -\cot x \, \sin x = -\cos x$.

Le principe de superposition donne $y = y_h + y_p = c \sin x - \cos x$.

Question 3
(20 points)

Trouver la solution générale de l'équation différentielle $y'' + 4y = 4y' + e^{2x}$.

Il s'agit d'une ÉD linéaire à coefficients constants.
Son équation caractéristique est

$$0 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2.$$

La solution générale de l'équation homogène est donc

$$y_h = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}.$$

La méthode des coefficients indéterminés suggère de chercher une SP de la forme $y_p = Ax^2 e^{2x}$ puisque 2 est une racine double du polynôme caractéristique. On a

$$y_p' = A(2x + 2x^2)e^{2x} \quad \text{et} \quad y_p'' = A(2 + 4x + 2(2x + 2x^2))e^{2x} = A(2 + 8x + 4x^2)e^{2x}.$$

Ainsi y_p est une SP si et seulement si

$$\begin{aligned} y_p'' + 4y_p &= 4y_p' + e^{2x} \\ A(2 + 8x + 4x^2)e^{2x} + 4Ax^2 e^{2x} &= 4A(2x + 2x^2)e^{2x} + e^{2x} \\ (2A + 8Ax + 8Ax^2)e^{2x} &= (1 + 8Ax + 8Ax^2)e^{2x} \\ 2A &= 1. \end{aligned}$$

Ainsi $A = \frac{1}{2}$ et on a la SP $y_p = \frac{1}{2} x^2 e^{2x}$.

Par le principe de superposition, la SG est

$$y_g(x) = y_p + y_h = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + \frac{1}{2} x^2 e^{2x}.$$

Question 4

(4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 20 points)

Considérer l'équation différentielle linéaire à coefficients constants

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = r(x). \qquad (\star)$$

On note par $p(\lambda)$ le polynôme caractéristique de l'équation homogène (H) associée à $(\star)$. Pour chacun des cas ci-dessous, donner la solution générale y_h de (H) et la forme de la solution particulière y_p de $(\star)$ suggérée par la méthode des coefficients indéterminés.

Il n'est pas demandé de calculer les constantes apparaissant dans la forme de la solution particulière. Aucune justification n'est requise pour cette question.

a) $p(\lambda) = \lambda(\lambda^2 - 2\lambda + 5), \qquad r(x) = x \sin 2x.$

$y_h = c_1 + e^x(c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x)$

$y_p = (Ax + B) \sin 2x + (Cx + D) \cos 2x$

b) $p(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda + 3), \qquad r(x) = e^{3x} - x.$

$y_h = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}$

$y_p = Ae^{3x} + Bx + C$

c) $p(\lambda) = (\lambda^2 + 1)^2, \qquad r(x) = 3e^{-x}.$

$y_h = c_1 \cos x + c_2 x \cos x + c_3 \sin x + c_4 x \sin x$

$y_p = Ae^{-x}$

d) $p(\lambda) = \lambda^3(\lambda - 1)^2, \qquad r(x) = 1.$

$y_h = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + e^x(c_4 + c_5 x)$

$y_p = Ax^3$

e) $p(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda^2 + 4), \qquad r(x) = xe^{2x}(\sin 2x - \cos 2x).$

$y_h = c_1 e^{2x} + c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x$

$y_p = e^{2x}\big((Ax + B) \sin 2x + (Cx + D) \cos 2x\big)$

Question 5

(20 points)

Compléter la grille suivante en inscrivant un et un seul $\times$ par colonne.

Une bonne réponse vaut $+4$ *points, une mauvaise réponse* -1 *point et une absence de réponse* 0 *point. La note minimale pour cette question est de 0 point.*

Aucune justification requise.

	a)	b)	c)	d)	e)
VRAI	$\times$		$\times$	$\times$	$\times$
FAUX		$\times$			

Pour chacun des énoncés suivants, dire s'il est vrai ou faux.

a) Le changement de variables $z(y) = y'(x)$ permet de ramener $y(x)y''(x) = (y'(x))^2$ à une équation différentielle du premier ordre séparable.

VRAI. On obtient $y\frac{dz}{dy} = z$.

b) Si y_1 et y_2 sont des solutions particulières d'une équation différentielle linéaire, alors $y_1 - y_2$ est aussi une solution particulière de la même équation différentielle.

FAUX. $y_1 = x + 1$ et $y_2 = x$ sont des SP de $y' = 1$, mais $y_1 - y_2 = 1$ n'en est pas une.

c) Les fonctions $y_1(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$ et $y_2(x) = 3\ln(x^2)$ sont linéairement dépendantes sur $[1, 2]$.

VRAI. $y_2 = -6y_1$.

d) Quelque soient $a, b, c \in \mathbb{R}$, il existe toujours une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $y(x) = e^{\lambda x}$ est une solution particulière de $y''' + ay'' + by' + cy = 0$.

VRAI. Le polynôme caractéristique est de degré trois et il possède donc une racine réelle.

e) Pour trouver la fonction $y(x)$ satisfaisant $x^2y'' - 2xy' + y = x$ et $y(1) = y'(1) = 0$ dans Maple, il suffit d'effectuer la commande

```
> dsolve({x^2*diff(y(x),x,x)-2*x*diff(y(x),x)+y(x)=x,y(1)=0,D(y)(1)=0},y(x));
```

VRAI.