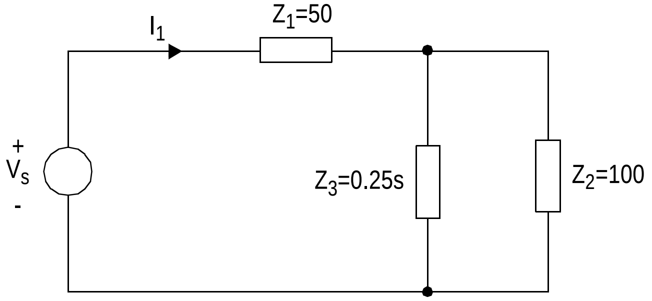
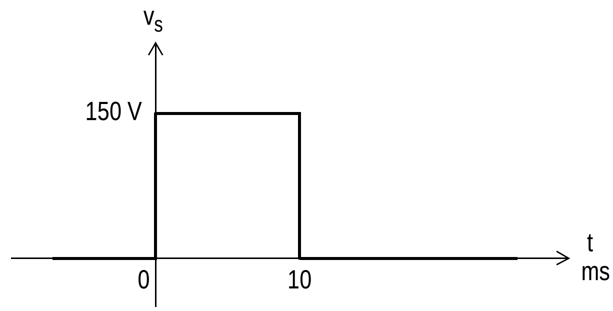
Problème no. 1

Circuit transformé (domaine de Laplace):





Le courant I_1 est donné par:

$$I_1 = \frac{V_s}{Z_1 + (Z_2 \| Z_3)} = \frac{V_s}{Z_1 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3}} = \frac{V_s}{50 + \frac{100(0.25s)}{100 + 0.25s}} = \frac{0.25s + 100}{37.5s + 5000} \times V_s$$

La source v_s est une somme de deux échelons:$v_s(t) = 150u(t) - 150u(t-0.01)$

On calcule d'abord la réponse $i_{1a}(t)$ à un échelon $150u(t)$:

$$I_{1a} = \frac{0.25s + 100}{37.5s + 5000} \times \frac{150}{s} = \frac{37.5s + 15000}{s(37.5s + 5000)} = \frac{s + 400}{s(s + 133.33)}$$

On décompose I_{1a} en fractions partielles:

$$I_{1a} = \frac{s + 400}{s(s + 133.33)} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s + 133.33}$$

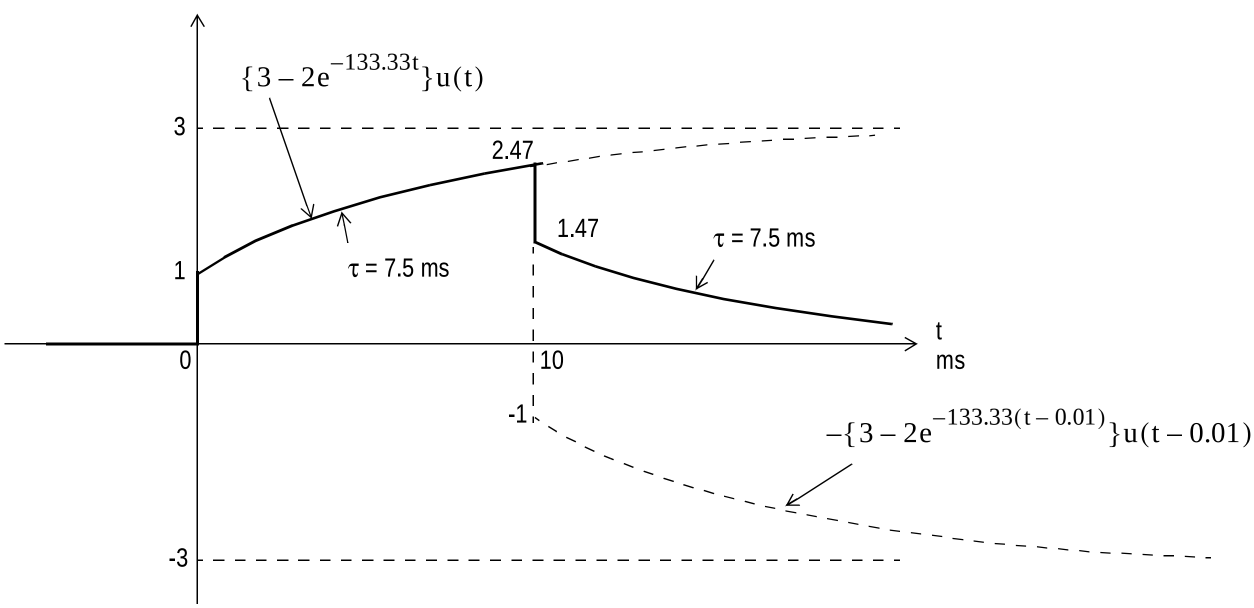
Les constantes A_1 et A_2 sont:

$$A_1 = \left.\frac{s + 400}{(s + 133.33)}\right|_{s = 0} = 3 \qquad \text{et} \qquad A_2 = \left.\frac{s + 400}{s}\right|_{s = -133.33} = -2$$

Alors: $i_{1a}(t) = \{3 - 2e^{-133.33t}\}u(t)$

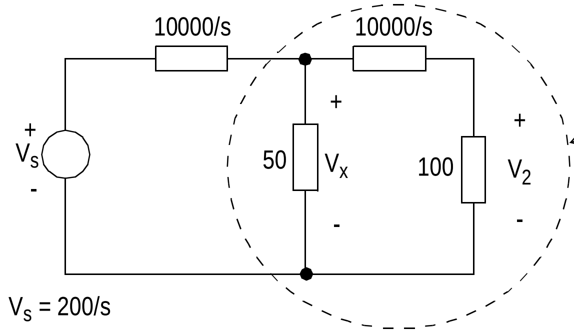
À partir de $i_{1a}(t)$, on déduit la réponse à l'excitation $v_s(t) = 150u(t) - 150u(t-0.01)$:

$$\boxed{i_1(t) = i_{1a}(t) - i_{1a}(t - 0.01) = \{3 - 2e^{-133.33t}\}u(t) - \{3 - 2e^{-133.33(t - 0.01)}\}u(t - 0.01)}$$



Problème no. 2

a) Circuit transformé (dans domaine de Laplace).



$$Z = \frac{50\left(100 + \frac{10000}{s}\right)}{50 + 100 + \frac{10000}{s}} = \frac{100s + 10000}{3s + 200}$$

On calcule la tension V_2 en appliquant la loi du diviseur de tension deux fois:

$$V_2 = \frac{100}{100 + \frac{10000}{s}} \times V_x = \frac{100s}{100s + 10000} \times V_x$$

et $$V_x = \frac{Z}{Z + \frac{10000}{s}} \times V_s = \frac{\frac{100s + 10000}{3s + 200}}{\frac{100s + 10000}{3s + 200} + \frac{10000}{s}} \times V_s = \frac{(100s + 10000)s}{100s^2 + 40000s + 2\times10^6} \times V_s$$

On a:

$$V_2 = \frac{100s^2}{100s^2 + 40000s + 2\times10^6} \times \frac{200}{s} = \frac{200s}{s^2 + 400s + 2\times10^4}$$

Les pôles sont: $p_1 = -58.58$ et $p_2 = -341.42$

On décompose V_2 en fractions partielles:

$$V_2 = \frac{200s}{s^2 + 400s + 2\times10^4} = \frac{200s}{(s + 58.58)(s + 341.42)} = \frac{A_1}{s + 58.58} + \frac{A_2}{s + 341.42}$$

Les constantes A_1 et A_2 sont calculées:

$$A_1 = \left.\frac{200s}{s + 341.42}\right|_{s = -58.58} = -41.42$$

$$A_2 = \left.\frac{200s}{s + 58.58}\right|_{s = -341.42} = 241.42$$

La tension $v_2(t)$ est la transformée inverse de V_2:

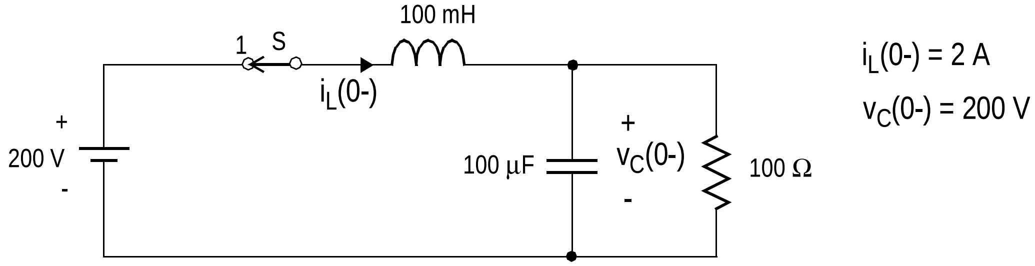
$$\boxed{v_2(t) = \{241.42e^{-341.42t} - 41.42e^{-58.58t}\}u(t)}$$

b) La durée du régime transitoire est 5 fois la constante de temps la plus longue:

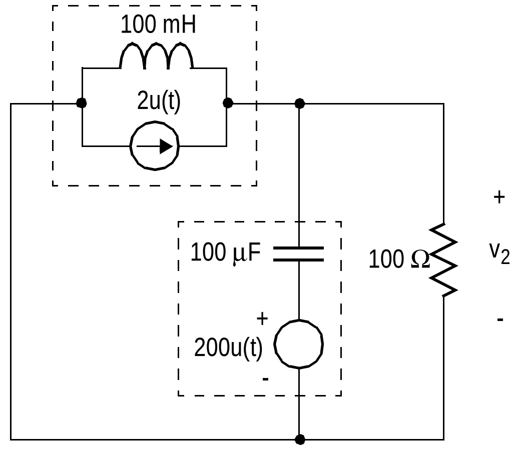
$$\text{Duree} = 5 \times \frac{1}{58.58} = 0.085 \text{ s}$$

Problème no. 3

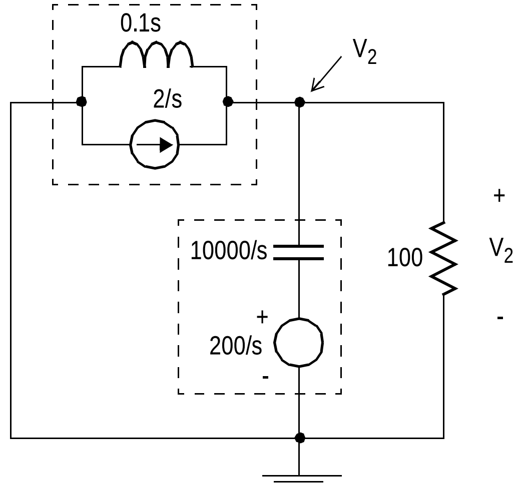
Le commutateur S est à la position 1 depuis très longtemps:



À l'instant t = 0-, le courant circulant dans l'inductance L est de 2 A et la tension aux bornes du condensateur est de 200 V.
À t = 0, S change de position de 1 à 2 et demeure à cette position pour le reste du temps. Pour t > 0, on a le circuit équivalent suivant:



On trace le circuit transformé (dans le domaine de Laplace):



On établit l'équation d'équilibre du circuit par la méthode des noeuds:

$$\left[\frac{1}{0.1s} + \frac{1}{\frac{10000}{s}} + \frac{1}{100}\right]V_2 = \frac{2}{s} + \frac{\left(\frac{200}{s}\right)}{\frac{10000}{s}}$$

$$\left[\frac{10}{s} + \frac{s}{10000} + \frac{1}{100}\right]V_2 = \frac{2}{s} + \frac{2}{100}$$

$$\left[\frac{100000 + s^2 + 100s}{10000s}\right]V_2 = \frac{200 + 2s}{100s}$$

Alors, la tension V_2 est égale à: $V_2 = \dfrac{100(200 + 2s)}{100000 + s^2 + 100s} = \dfrac{200(s + 100)}{s^2 + 100s + 100000}$

Les pôles sont: $p_1 = -50 + j312.25$ et $p_2 = -50 - j312.25$

On décompose V_2 en fractions partielles:

$$V_2 = \frac{200(s + 100)}{s^2 + 100s + 100000} = \frac{A}{s + 50 - j312.25} + \frac{A^*}{s + 50 + j312.25}$$

La constante A est donnée par:

$$A = \left.\frac{200(s + 100)}{s + 50 + j312.25}\right|_{s = -50 + j312.25} = \frac{200(50 + j312.25)}{2(j312.25)} = 100 - j16 = 101.3\angle -0.16$$

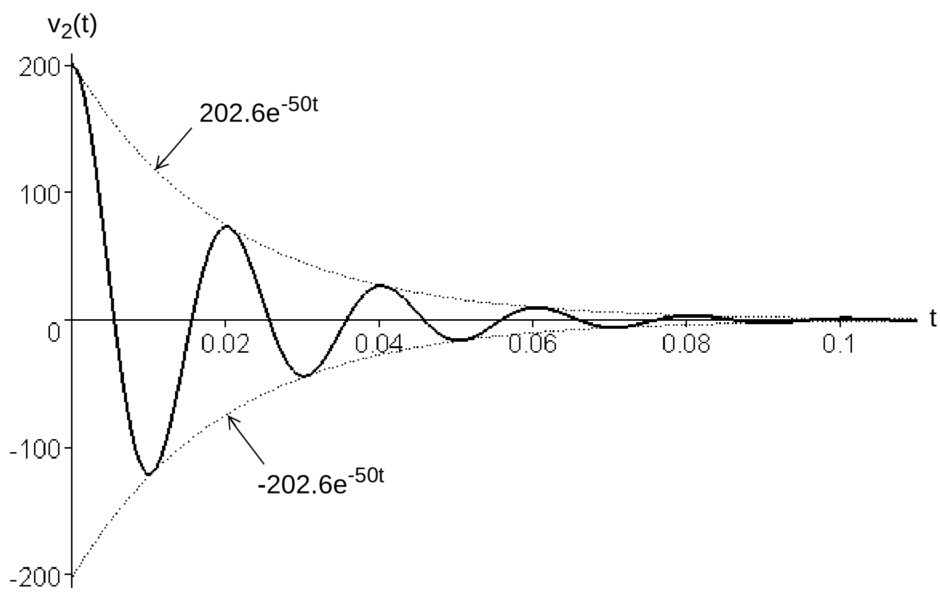
La tension $v_2(t)$ est la transformée inverse de V_2:

$$v_2(t) = \{202.6e^{-50t}\cos(312.25t - 0.16)\}u(t)$$

<u>Suggestion pour le tracage de $v_2(t)$:</u>

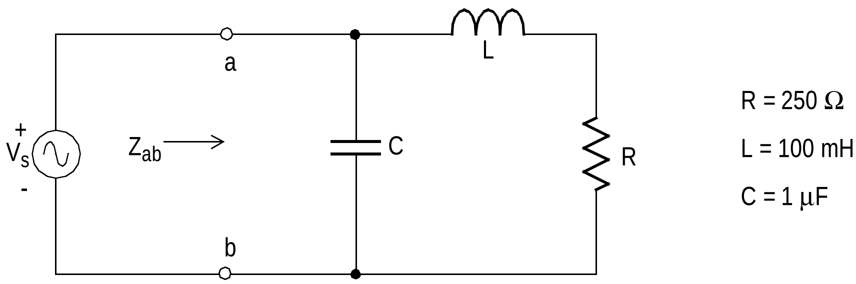
C'est une fonction sinusoïdale amortie. On peut donc tracer en premier lieu l'enveloppe constituée de deux exponentielles décroissantes $202.6e^{-50t}$ et $-202.6e^{-50t}$. On trace ensuite approximativement $v_2(t)$ contenue dans l'enveloppe exponentielle.

La figure suivante montre la tension $v_2(t)$ tracé à l'ordinateur.



Problème no. 4

a) Calcul de l'impédance $Z_{ab}(j\omega)$ vue par la source v_s:



On calcule d'abord l'impédance $Z_{ab}(s)$: $$Z_{ab}(s) = \frac{\left(\frac{1}{Cs}\right)(R+Ls)}{\frac{1}{Cs}+(R+Ls)} = \frac{R+Ls}{LCs^2+RCs+1}$$

On déduit l'impédance $Z_{ab}(j\omega)$: $$Z_{ab}(j\omega) = \frac{R+jL\omega}{(1-LC\omega^2)+j\omega RC}$$

Avec les valeurs numériques, on a: $$Z_{ab}(j\omega) = \frac{250+j0.1\omega}{(1-1\times10^{-7}\omega^2)+j2.5\times10^{-4}\omega}$$

Le module de $Z_{ab}(j\omega)$: $$|Z_{ab}(j\omega)| = \frac{\sqrt{250^2+(0.1\omega)^2}}{\sqrt{(1-1\times10^{-7}\omega^2)^2+2.5\times10^{-4}\omega^2}}$$

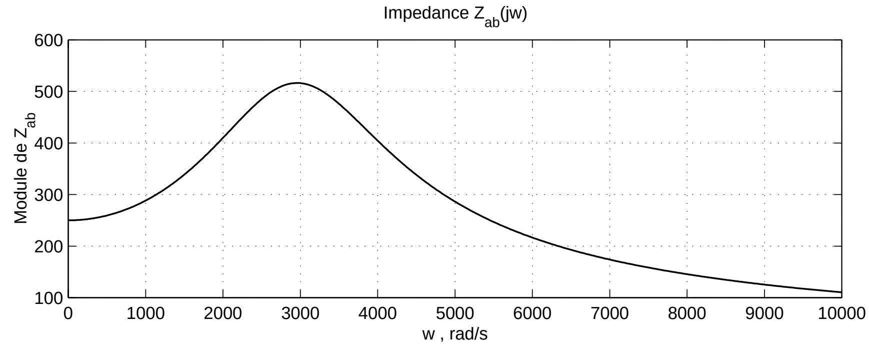
La phase de $Z_{ab}(j\omega)$: $$\angle Z_{ab}(j\omega) = \mathrm{arctg}\left(\frac{0.1\omega}{250}\right) - \mathrm{arctg}\left(\frac{2.5\times10^{-4}\omega}{1-1\times10^{-7}\omega^2}\right)$$

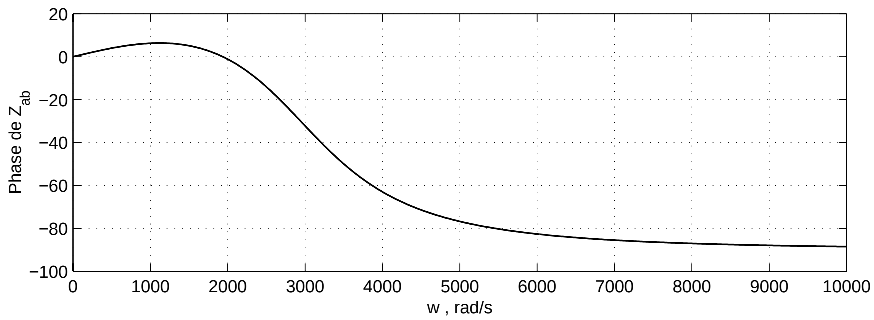
Calcul de $Z_{ab}(j\omega)$ pour quelques valeurs de ω:

ω	0	1000	3000	10000	∞
$\lvert Z_{ab}(j\omega)\rvert$	250	288.3	476	110.4	0
$\angle Z_{ab}(j\omega)$	0	6.3º	-50º	-88º	-90º

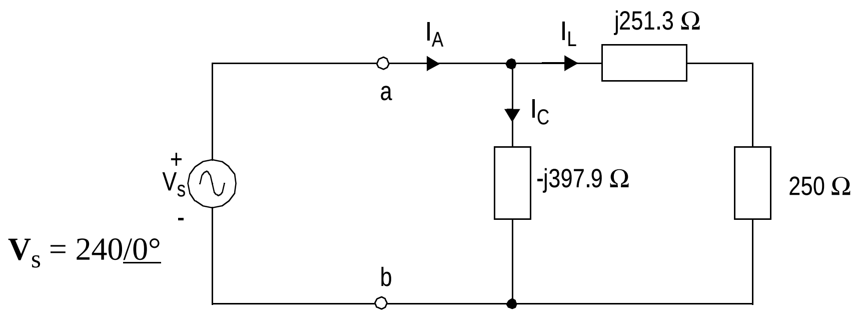
Avec ces quelques valeurs, on peut tracer approximativement le module et la phase de $Z_{ab}(j\omega)$ en fonction de ω.

La figure suivante montre le module et la phase de $Z_{ab}(j\omega)$ en fonction de ω (tracé à l'ordinateur).





b) Circuit transformé en RSP avec ω =800π rad/s:



Le phaseur courant $\mathbf{I}_C$ est donné par:

$$I_C = \frac{V_s}{-j397.9} = \frac{240\angle 0°}{-j397.9} = 0.6\angle 90° \text{ A}$$

Le phaseur courant $\mathbf{I}_L$ est donné par:

$$I_L = \frac{V_s}{250 + j251.3} = \frac{240\angle 0°}{354.5\angle 45.1°} = 0.677\angle -45.1° \text{ A}$$