2009 Examen final – *Solutionnaire*

Problème 1

L'entrée du PLL est la référence $\theta(t)$ qui a un saut de phase au temps zéro.

$$\Theta(\omega) = \frac{\Delta\phi}{j\omega} = \frac{2}{j\omega}$$

Le filtre de boucle est passe-tout, donc l'entrée dans le VCO est juste la différence entre $\theta(t)$ et l'estimé $\hat{\theta}(t)$. La sortie de VCD a une dérivée égale à K fois l'entrée, donc :

$$\frac{d\hat{\theta}(t)}{dt} = K\left(\theta(t) - \hat{\theta}(t)\right)$$

En utilisant l'analyse de Fourrie

$$j\omega\hat{\Theta}(\omega) = K\Theta(\omega) - K\hat{\Theta}(\omega)$$

et

$$H(\omega) = \frac{\hat{\Theta}(\omega)}{\Theta(\omega)} = \frac{K.}{j\omega + K}$$

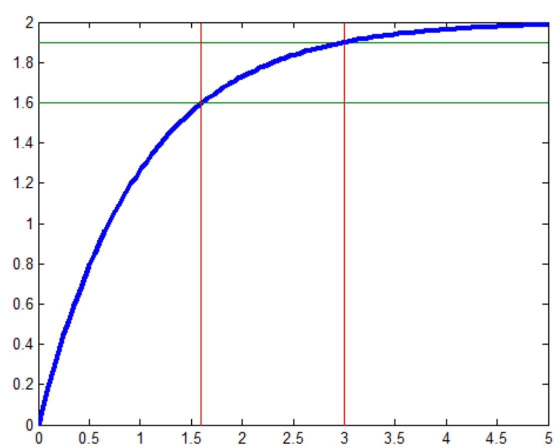
donc

$$\hat{\theta}(t) = F^{-1}\left\{H(\omega)\hat{\Theta}(\omega)\right\} = F^{-1}\left\{\frac{K\hat{\Theta}(\omega)}{j\omega + K}\right\} = F^{-1}\left\{\frac{K}{j\omega + K}\frac{2}{j\omega}\right\}$$

Avec la table fournie, nous cherchons la transformée inverse :

$$\hat{\theta}(t) = 2u(t)\left[1 - e^{-Kt}\right]$$

Voici un graphique du comportement en temps et la transformée de Fourrier.



Le problème demande la valeur de *K* pour assurer que l'estimé de phase atteint 95% de la valeur (soit .95×2 radians) avant *t* = 8 millisecondes. Donc, nous voulons :

$$
\begin{aligned}
2\cdot.95 &= 2\left(1-e^{-8\cdot10^{-3}K}\right)\\
e^{-8\cdot10^{-3}K} &= .05\\
-8\cdot10^{-3}K &= \ln .05 = -3\\
K &= \frac{10^3}{8}3 = 375
\end{aligned}
$$

Pour la partie ii)

$$
\begin{aligned}
2\cdot.8 &= 2\left(1-e^{-8\cdot10^{-3}K}\right)\\
e^{-8\cdot10^{-3}K} &= .2\\
-8\cdot10^{-3}K &= \ln .2 = -1.6\\
K &= \frac{10^3}{8}\ln 5 = 200
\end{aligned}
$$

B. Pour voir la fréquence à laquelle le module de la fonction de transfert a diminué de moitié, nous commençons avec le calcul du module:

$$\left|H(j\omega)\right|^2 = \frac{K^2}{\omega^2+K^2}$$

Notons que sa valeur maximale à $\omega = 0$ est 1, donc

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2} &= \sqrt{\frac{K^2}{\omega_{3\mathrm{dB}}^2+K^2}}\\
\omega_{3\mathrm{dB}}^2+K^2 &= 4K^2\\
\omega_{3\mathrm{dB}} &= 3K\\
f_{3\mathrm{dB}} &= \frac{\omega_{3\mathrm{dB}}}{2\pi} = \frac{3K}{2\pi}
\end{aligned}
$$

Donc mous avons

i) $\frac{3\cdot 375}{2\pi} = 3\cdot 59$ Hz=177 Hz vs. ii) $\frac{3\cdot 200}{2\pi} = 3\cdot 32$ Hz=96 Hz

C. Pour un bon comportement dynamique nous voulons une réponse rapide, donc option i). Pour un bon comportement stochastique nous voulons laisser peu du bruit entrer. Avec l'option i) nous avoir un largueur de bande plus grand, donc nous laissons passer plus du bruit. Donc pour un meilleur comportement dynamique option i), mais pour un meilleur comportement stochastique option ii).

Problème 2

Nous commencent par la table des syndromes :

$$eH^T = [0\,0\,0\,0\,0\,1]\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix} \Rightarrow$$

erreur	syndrome
0 0 0 0 0 0	0 0 0
0 0 0 0 0 1	0 1 1
0 0 0 0 1 0	1 1 0
0 0 0 1 0 0	1 0 1
0 0 1 0 0 0	0 0 1
0 1 0 0 0 0	0 1 0
1 0 0 0 0 0	1 0 0
0 1 0 1 0 0	1 1 1

Nous remarquons que [111] ne parait pas dans les syndromes en utilisant seulement les erreurs d'un bit. Nous pouvons donc ajouter un vecteur d'erreur avec deux bits en erreur, avec la condition que le syndrome soit [111]. Par exemple, la somme des syndromes [101] et [010] peut être utilisé pour proposer [000100]+[010000]=[010100].

Maintenant nous calculons les syndromes pour les deux blocks reçus

$$r_1H^T = [010110]\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix} = [001] \qquad r_2H^T = [110010]\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix} = [000]$$

Nous voyons que dans le deuxième cas il n'y a pas d'erreur. Dans le premier cas nous cherchons le syndrome [010] dans la table. L'erreur est dans le troisième bit.

Données reçues	syndrome	erreur	Mot de code après décodage (6 bits)	Messages après décodage (3 bits)
0 1 0 1 1 0	001	001000	011110	110
1 1 0 0 1 0	000	n/a	110010	010

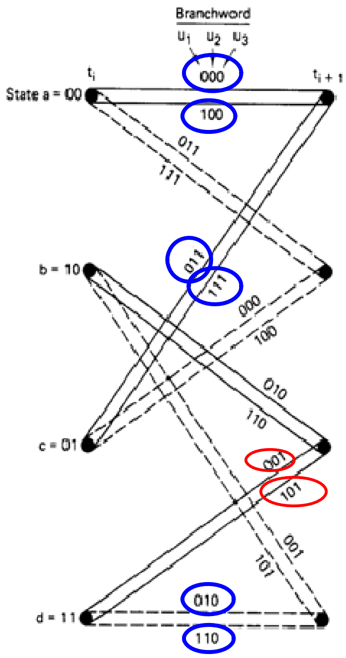
Pour compléter la dernière colonne, il faut savoir ou trouver les données dans le mot de code. Nous savons que

$$\mathrm{H}^{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

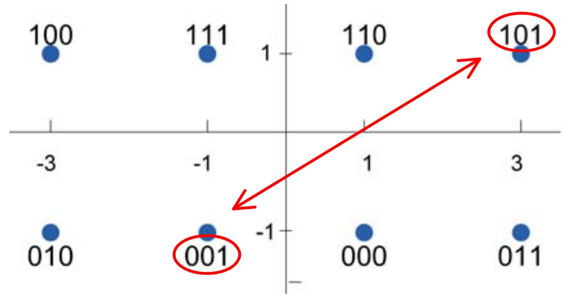
$$\mathbf{u} = \mathbf{mG} = \mathbf{m}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \left[u_1 u_2 u_3 m_1 m_2 m_3\right]$$

Donc le message est dans le derniers trois bits du mot de code.

Problème 3



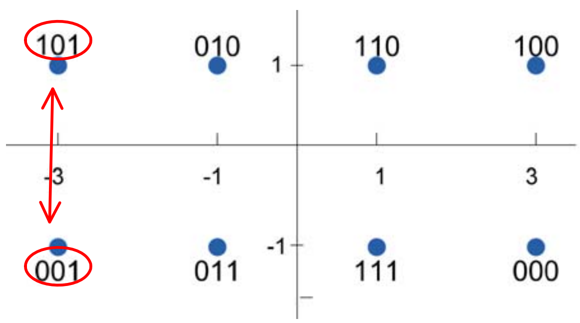
option B



séparation

$$= \sqrt{(3+1)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{16+4}$$

$$= \sqrt{20}$$



séparation

$= 2 < \sqrt{20}$

option A

Comme nous avons vu en classe, la correspondance est importante pour assurer que le bit non-codé sera protégé. Pour chaque transition il y a un bit qui n’est pas codé. Les deux symboles dans une transition doivent être bien séparés. Si nous prenons n’importe quelle paire de symbole dans une seule transition du treillis TCM, nous pouvons examiner la proximité de ces deux symboles dans la constellation. Étant donné qu’il n’y a pas de codage pour le seul bit différent dans cette paire de symboles, il faut absolument qu’ils soient le plus loin possible l’un de l’autre. Nous voyons qu’avec l’option B les symboles sont beaucoup plus éloignés.

Problème 4

Le rapport signal à bruit plus interférence est:

$$SNIR = \frac{E}{N+I} = \frac{E}{\frac{(K-1)E_I}{G} + N}$$

Ici l'energie par interfèrent E_I est α fois l'énergie de l'usager désiré, E. Donc,

$$SNIR = \frac{E}{\frac{(K-1)\alpha E}{G} + N} = \frac{1}{\frac{(K-1)\alpha}{G} + \frac{N}{E}}$$

L'exigence de $P_c < 10^{-4}$ correspond à 8.8 dB =7.6 pour QPSK en consultant le graphique du BER. Nous sommes donnée que le rapport E_b/N_0=20 dB = 100. Nous calculons le rapport SNIR comme

$$\frac{1}{\text{SNIR}} = \frac{N}{E} + \alpha\frac{K-1}{G}$$

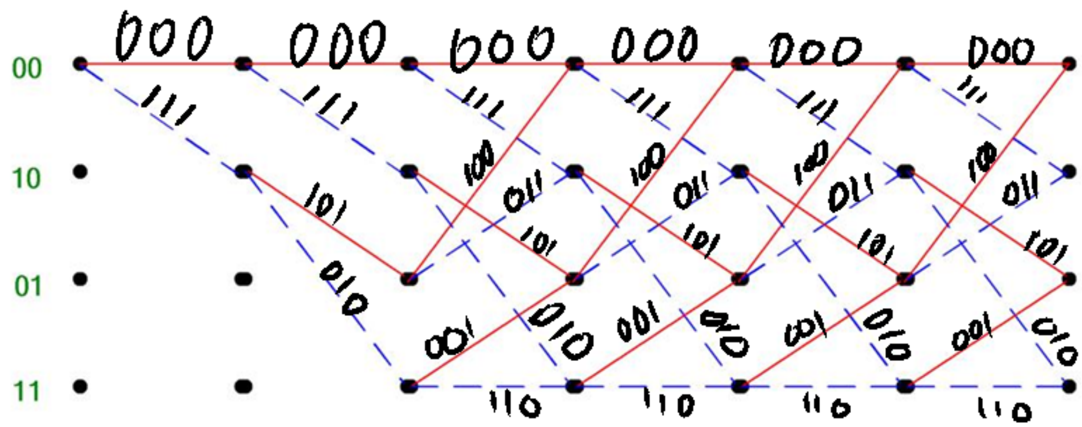
$$\begin{aligned} K &= 1 + \frac{G}{\alpha}\left(\frac{1}{\text{SNIR}} - \frac{N}{E}\right) \\ &= 1 + \frac{250}{\alpha}\left(\frac{1}{7.6} - \frac{1}{100}\right) \\ &= 1 + \frac{250}{3}\left(\frac{1}{7.6} - \frac{1}{100}\right) \\ &= 11 \end{aligned}$$

Donc, le système peut supporter 11 usagers simultanés.

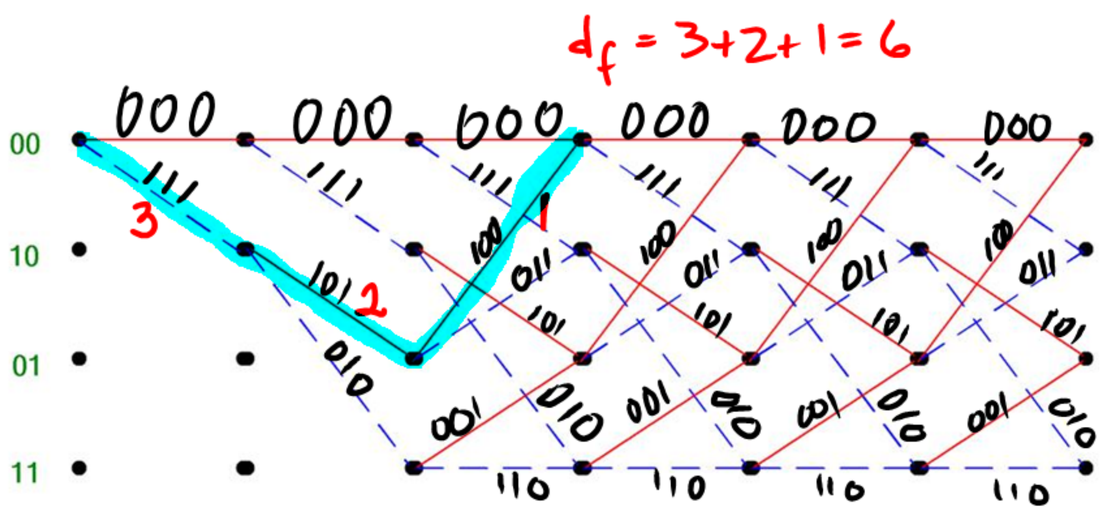
Problème 5

Il y a un bit qui entre et trois bits du code qui sortent, donc le taux de code est 1/3. Il y a deux bits dans chaque état, donc la longueur de contrainte est 3.

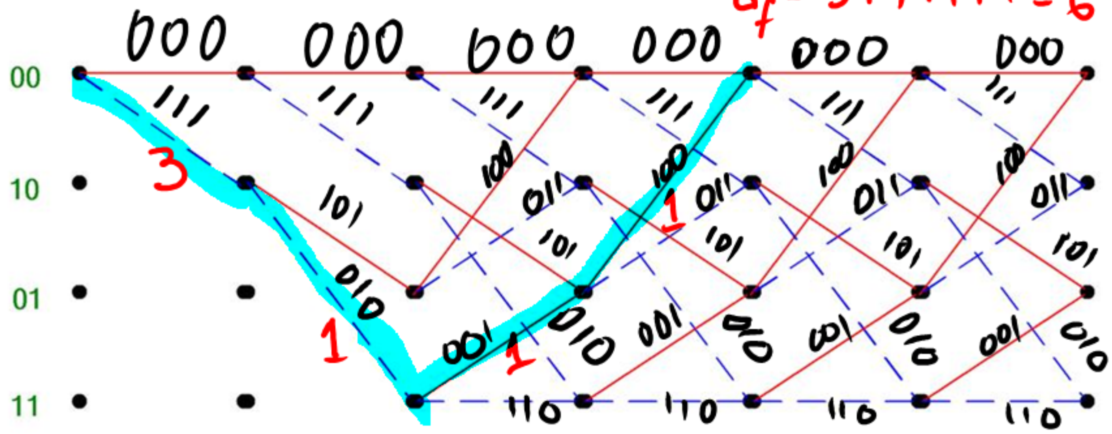
Nous commençons par mettre les symboles dans le treillis de décodage.

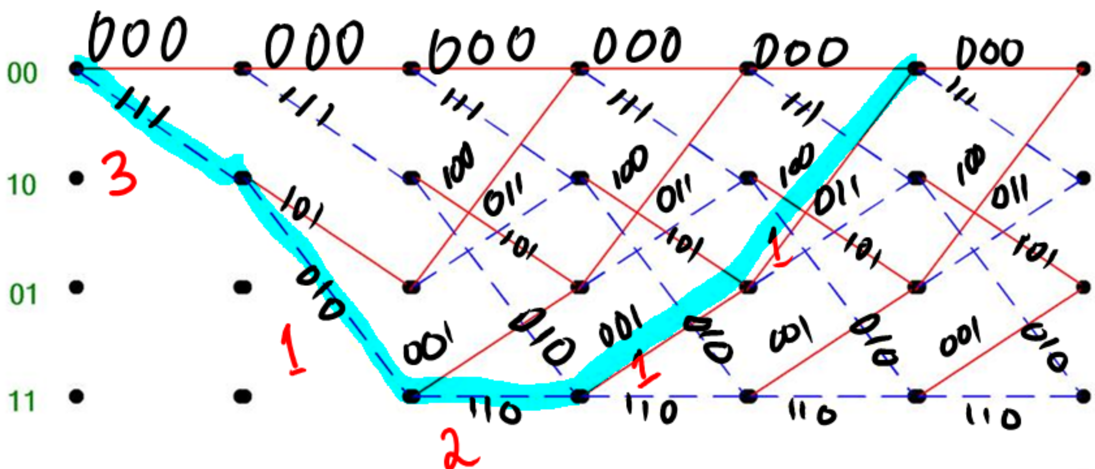


Après nous cherchons les chemins à considérer … Nous trouvons deux chemins à la distance 6, et deux chemins à la distance 10. Donc la distance libre est 6, et il y en a deux chemins à cette distance là.

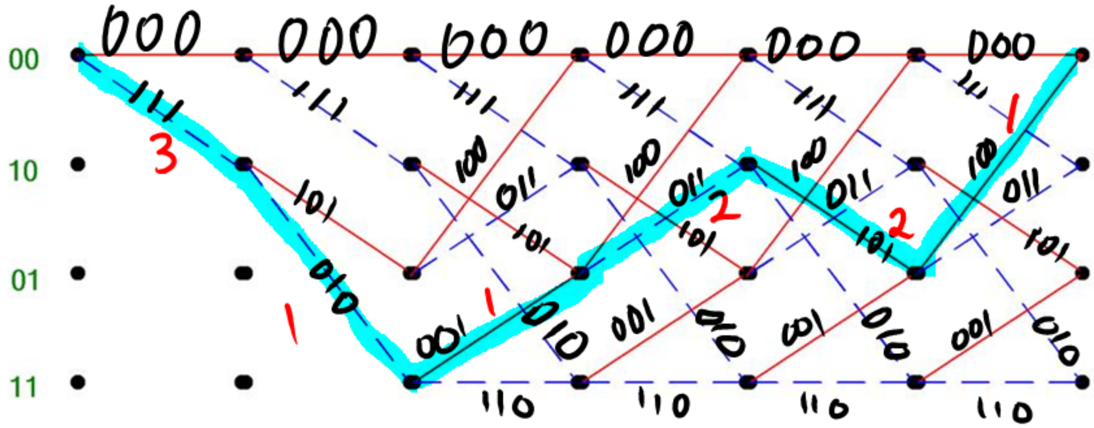


$d_f = 3+1+1+1 = 6$





$d_f = 3+1+2+1+1 = 8$



$d_f = 3+1+1+2+2+1 = 10$

$d_f = 3+2+2+2+1 = 10$