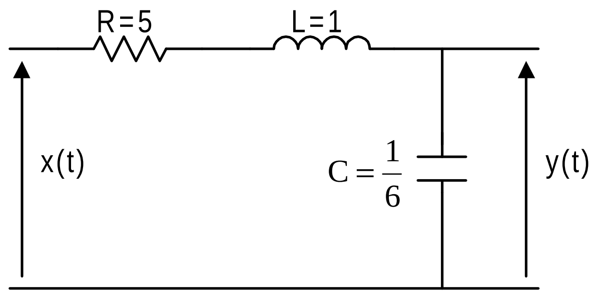
GEL19962: Analyse des signaux
Examen final - Solutions

Problème 1 (9 points sur 45)



1- Calculer la fonction de transfert $H(\omega)$ de ce filtre.

<u>Réponse :</u>

$$H(\omega)=\frac{\frac{1}{jC\omega}}{R+jL\omega+\frac{1}{jC\omega}}=\frac{1}{\left(1-LC\omega^2\right)+jRC\omega}=\frac{6}{(j\omega)^2+6+5j\omega}$$

2- Calculer la réponse impulsionnelle $h(t)$ de ce filtre.

<u>Réponse :</u>

$$H(\omega)=\frac{6}{(j\omega)^2+5j\omega+6}=\frac{A_1}{(j\omega+2)}+\frac{A_2}{(j\omega+3)}$$

Avec :

$$A_1=\left.\frac{6}{j\omega+3}\right|_{\omega=2j}=6 \text{ et } A_2=\left.\frac{6}{j\omega+2}\right|_{\omega=3j}=-6$$

D'où :

$$h(t)=6\left(e^{-2t}-e^{-3t}\right)U(t)$$

3- Calculer la réponse $y(t)$ de ce filtre lorsque l'entrée est $x(t)=e^{-t}U(t)$. (**Pas posée à l'examen**)

<u>Réponse :</u>

Nous aurons :

$$Y(\omega)=H(\omega)X(\omega)=\frac{6}{(j\omega+2)(j\omega+3)(j\omega+1)}=\frac{A_1}{(j\omega+1)}+\frac{A_2}{(j\omega+2)}+\frac{A_3}{(j\omega+3)}$$

GEL19962: Analyse des signaux

Examen final - Solutions

On trouve les coefficients :

$$A_1 = \left.\frac{6}{(j\omega+2)(j\omega+3)}\right|_{\omega=j} = 3 \ ,$$

$$A_2 = \left.\frac{6}{(j\omega+1)(j\omega+3)}\right|_{\omega=2j} = -6$$

$$\text{et } A_2 = \left.\frac{6}{(j\omega+1)(j\omega+2)}\right|_{\omega=3j} = 3$$

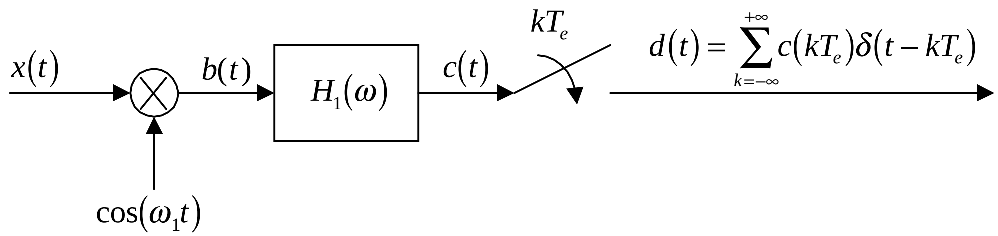
Et ainsi :

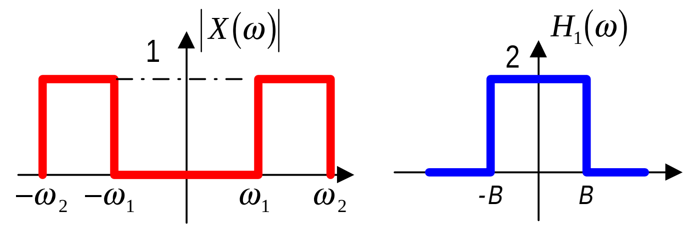
$$y(t) = \left(3e^{-t} - 6e^{-2t} + 3e^{-3t}\right)U(t)$$

GEL19962: Analyse des signaux
Examen final - Solutions

Problème 2 (9 points sur 45)

Considérez le système suivant:





<u>Note importante:</u> Lorsqu'on demande de tracer des spectres d'amplitude il est indispensable d'indiquer les fréquences importantes ainsi que les amplitudes remarquables.

1- A quelle fréquence faudrait-il échantillonner le signal $x(t)$ pour qu'on puisse retrouver le signal original à partir de ses échantillons?

<u>Réponse:</u> Il faudrait échantillonner le signal avec une fréquence $\boxed{\omega_e \geq 2\omega_2}$

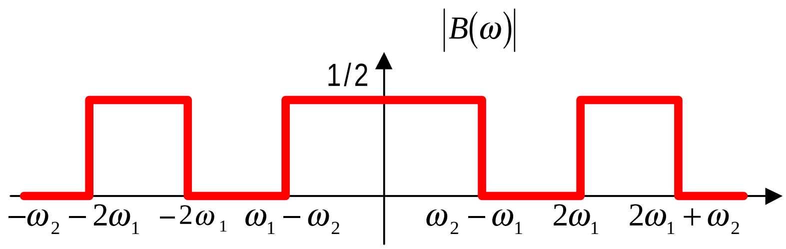
2- Faites les graphiques des spectres d'amplitude des transformées $B(\omega)$ et $C(\omega)$, en indiquant les amplitudes et les fréquences importantes sachant que $2\omega_1 \geq \omega_2$ et que $B = 1.1(\omega_2 - \omega_1)$.

<u>Réponse:</u>

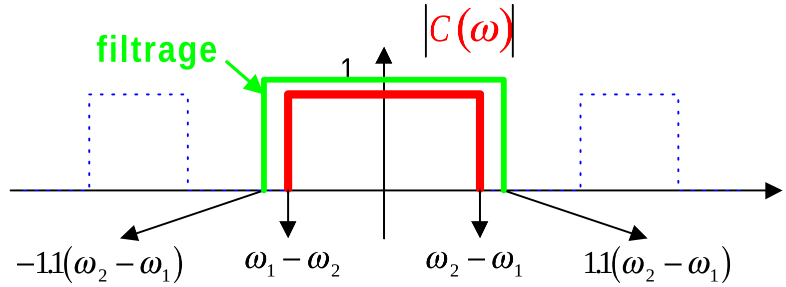
$$\boxed{B(\omega) = \frac{1}{2}\left[X(\omega-\omega_1) + X(\omega+\omega_1)\right]}$$

GEL19962: Analyse des signaux

Examen final - Solutions



Le signal c(t) correspond au filtrage passe bas de b(t) donc:



3- Le signal $d(t)$ correspond à l'échantillonnage du signal $c(t)$ avec une fréquence $\omega_e = 2B$. Pourra-t-on reconstruire le signal $c(t)$ exactement? Justifiez votre réponse.

Réponse:
Oui on pourra reconstruire exactement le signal $c(t)$ parce que la fréquence d'échantillonnage est supérieure à la fréquence de Nyquist pour $c(t)$.

$$\omega_e = 2B = 2.2(\omega_2 - \omega_1) \geq 2(\omega_2 - \omega_1) = \omega_{Nyquist\ c(t)}$$

4- Pourra-t-on reconstruire le signal $b(t)$ exactement à partir de $d(t)$? Justifiez votre réponse.

Réponse:
Non parce que le filtrage a éliminé les hautes fréquences de $b(t)$.

GEL19962: Analyse des signaux
Examen final - Solutions

5- Quel peut être l'intérêt d'un tel système pour le signal $x(t)$?

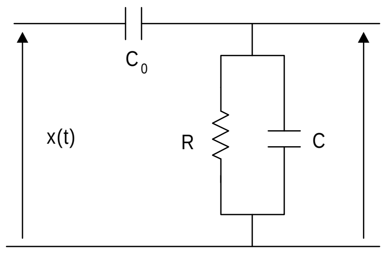
Réponse:
L'intérêt d'un tel système pour $x(t)$ est de **diminuer la fréquence d'échantillonnage** en le ramenant en bande de base. En effet, il est possible de reconstituer le signal $x(t)$ à partir de $d(t)$ (cf. cours chapitre 6 paragraphe 3).

GEL19962: Analyse des signaux

Examen final - Solutions

Problème 3 (12 points sur 45): Filtre

1- Calculer la fonction de transfert $H(\omega)$ de ce filtre **(Donné à l'examen)**



<u>Réponse:</u>

$$H(\omega)=\frac{\dfrac{R}{1+jRC\omega}}{\dfrac{1}{jC_0\omega}+\dfrac{R}{1+jRC\omega}}=\frac{jRC_0\omega}{1+jR(C+C_0)\omega}$$

2- On suppose que $R(C+C_0)<<1$.

2.1 Quelle est l'approximation de $H(\omega)$ pour des valeurs de ω suffisamment petites?

<u>Réponse:</u>

$$H(\omega)=\frac{jRC_0\omega}{1+jR(C+C_0)\omega}\cong jRC_0\omega \quad \text{pour } \omega \text{ petit}$$

2.2 Donner $y(t)$ en fonction de $x(t)$ si on suppose que x(t) ne contient pas de hautes fréquences (c'est à dire si on peut utiliser l'approximation précédente pour le filtre).

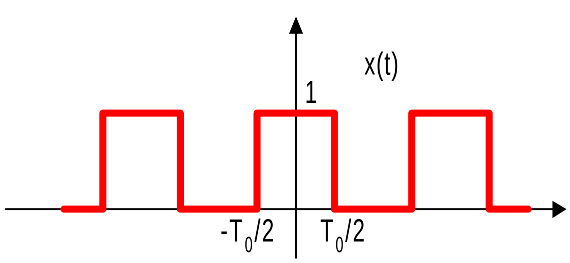
<u>Réponse:</u>

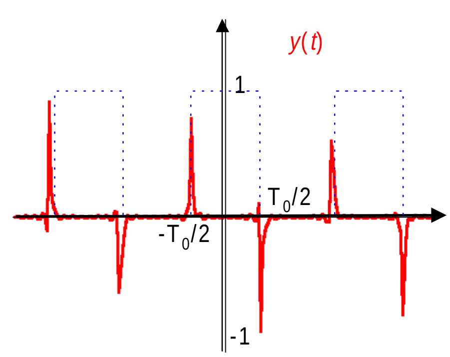
$$y(t)=RC_0\frac{d}{dt}x(t) \text{ c'est un filtre dérivateur}$$

2.3 On suppose que $x(t)$ est de la forme suivante et qu'on peut utiliser l'approximation du filtre.

Tracer approximativement la sortie $y(t)$ <u>(en indiquant les valeurs importantes)</u>.

<u>Réponse:</u>





GEL19962: Analyse des signaux

Examen final - Solutions

3- On suppose que $R(C+C_0) >> 1$.

3.1 Quelle est l'expression de $H(\omega)$ pour $\omega = 0$?

<u>Réponse:</u>

$$H(0) = 0$$

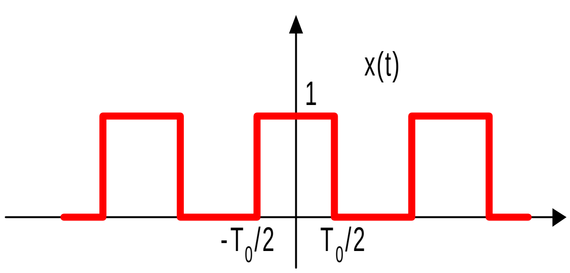
3.2 Quelle est l'approximation de $H(\omega)$ pour $\omega \neq 0$?

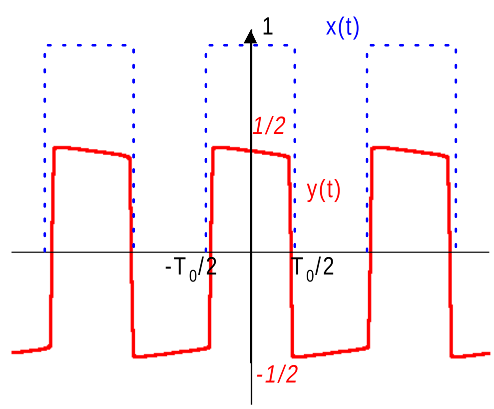
<u>Réponse:</u>

$$H(\omega) = \frac{jRC_0\omega}{1 + jR(C+C_0)\omega} \cong \frac{C_0}{C+C_0} \quad \text{pour } \omega \neq 0$$

2.3 On suppose que $x(t)$ est de la même forme que pour la question 2.3.
Tracer approximativement la sortie $y(t)$ <u>(en indiquant les valeurs importantes)</u>.

Réponse:





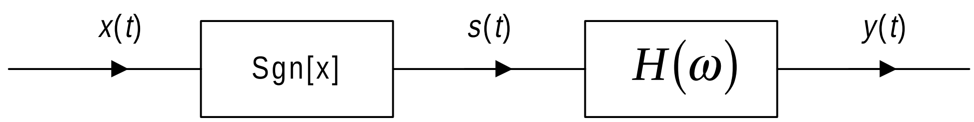
La composante continue a disparu ce qui explique que maintenant les variations de font entre -1/2 et +1/2. Pour le reste la sortie ressemble à l'entrée.

GEL19962: Analyse des signaux

Examen final - Solutions

Problème 4 (15 points sur 45): Le limiteur d'amplitude

Considérez le système suivant:



Avec:

$$x(t) = a(t)\cos(\Omega_0 t + \varphi(t)) \text{ où } a(t) > 0 \quad \forall t$$

et

$$s(t) = \text{sgn}[x(t)]$$

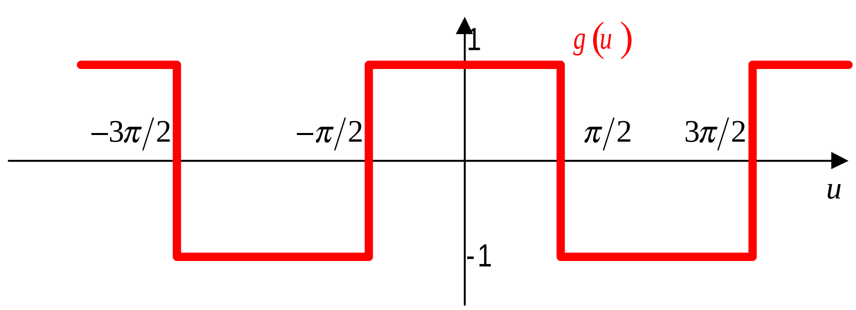
Le but de cet exercice est de calculer la sortie de ce système.

<u>Informations préliminaires. (Données à l'examen)</u>

Soit $g(u)$ la fonction périodique suivante: $g(u) = \text{sgn}[\cos(u)] = \begin{cases} +1 & \text{si } \cos(u) \geq 0 \\ -1 & \text{si } \cos(u) < 0 \end{cases}$

1.1 Tracer la fonction $g(u)$ en indiquant les valeurs importantes sur le graphique.

<u>Réponse:</u>



1.2 Donner la période et la pulsation propre .

<u>Réponse:</u>

$$T_0 = 2\pi \text{ et } \omega_0 = 1$$

GEL19962: Analyse des signaux
Examen final - Solutions

1.3 Calculer les coefficients $G(n)$ de la série de Fourier de cette fonction.

Réponse: On peut calculer $G(n)$ par plusieurs méthodes. Nous allons utiliser le calcul direct:

$$
\begin{aligned}
G(n) &= \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} g(u)e^{-jn\omega_0 u}du = \frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\pi}^{-\pi/2}(-1)e^{-jnu}du + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-jnu}du + \int_{\pi/2}^{\pi}(-1)e^{-jnu}du\right\} \\
&= \frac{1}{2\pi}\left\{\left.\frac{e^{-jnu}}{jn}\right|_{-\pi}^{-\pi/2} + \left.\frac{e^{-jnu}}{-jn}\right|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \left.\frac{e^{-jnu}}{jn}\right|_{\pi/2}^{\pi}\right\} \\
&= \frac{1}{2j\pi n}\left\{e^{jn\pi/2} - e^{jn\pi} + e^{jn\pi/2} - e^{-jn\pi/2} + e^{-jn\pi} - e^{-jn\pi/2}\right\} \\
&= \frac{1}{2j\pi n}\left\{2j^n - 2(-j)^n - 1 + 1\right\} \\
&= \frac{j^n}{j\pi n}\left(1-(-1)^n\right) \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ \dfrac{2(-1)^k}{n\pi} & \text{si } n = 2k+1 \text{ (c'est à dire } n \text{ impair)} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Il reste à calculer le coefficient pour n = 0:

$$G(0) = 0$$

1.4 Donner l'expression de $g(u)$ en fonction des coefficients $G(n)$ (équation de synthèse).

Réponse:

$$g(u) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{2(-1)^n}{(2n+1)\pi} e^{(2n+1)ju} \quad \text{EQ.1}$$

GEL19962: Analyse des signaux
Examen final - Solutions

1- Calcul de la transformée de Fourier de la fonction *s*(*t*) (5 points)

On note $\Phi_k(\omega)$ la transformée de Fourier de la fonction $\exp\left(jk\varphi(t)\right)$.

$$e^{jk\varphi(t)} \Leftrightarrow \Phi_k(\omega)$$

Trouver la transformée de Fourier $S(\omega)$ de la fonction $s(t)$.

Indication: utilisez le fait que $a(t) > 0 \quad \forall t$ et servez vous de l'équation EQ.1 avec $u = \Omega_0 t + \varphi(t)$

Réponse:

Nous aurons:

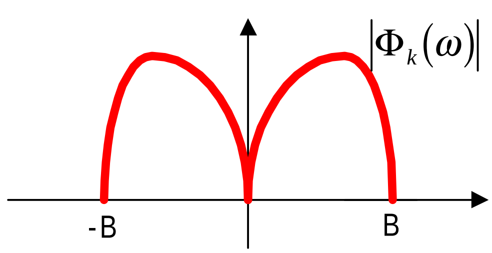
$$\begin{aligned} s(t) &= \operatorname{sgn}\left[a(t)\cos\left(\Omega_0 t + \varphi(t)\right)\right] = \operatorname{sgn}\left[\cos\left(\Omega_0 t + \varphi(t)\right)\right] \text{ car } a(t) \geq 0 \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{2(-1)^n}{(2n+1)\pi} e^{(2n+1)j\left(\Omega_0 t + \varphi(t)\right)} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{2(-1)^n}{(2n+1)\pi} e^{j(2n+1)\Omega_0 t} e^{j(2n+1)\varphi(t)} \end{aligned}$$

Donc:

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{2(-1)^n}{(2n+1)\pi} \delta\left(\omega - (2n+1)\Omega_0\right) * \Phi_{2n+1}(\omega) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{2(-1)^n}{(2n+1)\pi} \Phi_{2n+1}\left(\omega - (2n+1)\Omega_0\right) \end{aligned}$$

2- Spectre d'amplitude de *s*(*t*) (5 points)

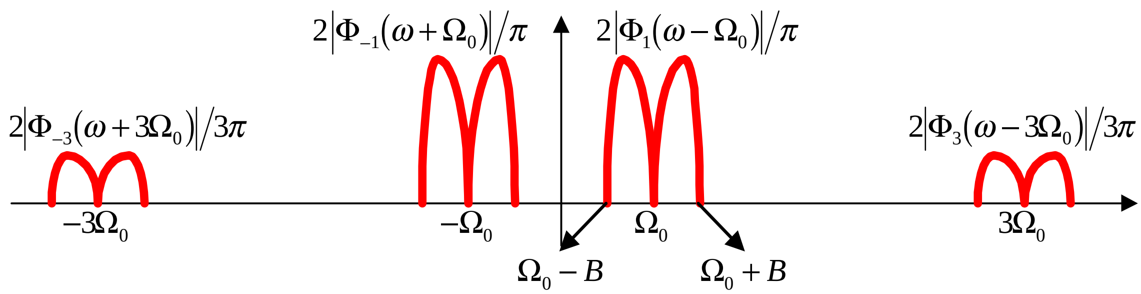
On suppose que le spectre d'amplitude des fonctions $\Phi_k(\omega)$ est à <u>support limité</u> $[-B, B]$ et qu'il est de la forme suivante pour toute les valeurs de k entières:



On suppose de plus que $\underline{\Omega_0 > B}$.

Tracer le spectre d'amplitude de $S(\omega)$ dans l'intervalle $\left[-3\Omega_0 - B, 3\Omega_0 + B\right]$ en indiquant les valeurs importantes.

Réponse:



Note: En réalité le spectre d'amplitude des fonctions $\Phi_k(\omega)$ n'est pas le même pour toutes les valeurs de k. En effet, $\Phi_k(\omega) = \underbrace{\left(\Phi_1(\omega) * \ldots * \Phi_1(\omega)\right)}_{k \text{ fois}}$. On peut montrer que si le spectre d'amplitude de $\Phi_1(\omega)$ est à support borné [-*b*,*b*] alors $\Phi_k(\omega)$ sera à support borné [-*kb*,*kb*]. Ceci pose un problème puisque le spectre d'amplitude des fonctions $\Phi_k(\omega)$ devient de plus en plus large et qu'il risque d'y avoir un chevauchement dans le spectre. Toutefois, comme dans $S(\omega)$ chaque fonction $\Phi_k(\omega)$ est multipliée par un coefficient décroissant par rapport à *k*, on peut négliger les fonctions $\Phi_k(\omega)$ pour k assez grand c'est à dire $k > K$. Il suffit alors de poser $B = Kb$ pour que les calculs effectués reste valables.

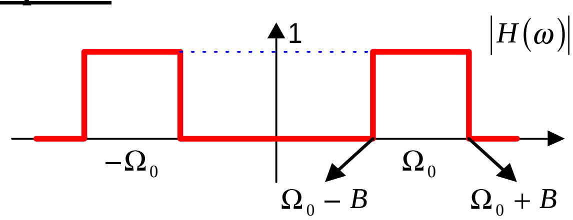
3- Calcul de la sortie *y*(*t*) (5 points)

La fonction de transfert du filtre est la suivante:

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 \ \text{pour} \ \left|\omega - \Omega_0\right| < B \ \text{ou} \ \left|\omega + \Omega_0\right| < B \\ 0 \ \text{autrement} \end{cases}$$

4.1 Tracer la fonction de transfert du filtre en indiquant clairement les fréquences importantes. De quel type est ce filtre?

Réponse:



C'est un filtre passe bande

GEL19962: Analyse des signaux

Examen final - Solutions

4.2 Calculer $Y(\omega)$.

Réponse:

$$Y(\omega) = \frac{2}{\pi}\left(\Phi_1(\omega - \Phi_0) + \Phi_{-1}(\omega + \Phi_0)\right)$$

4.3 Calculer $y(t)$.

Réponse:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{2}{\pi}\left[e^{j\varphi(t)}e^{j\Omega_0 t} + e^{-j\varphi(t)}e^{-j\Omega_0 t}\right] \\ &= \frac{4}{\pi}\cos\left(\Omega_0 t + \varphi(t)\right) \end{aligned}$$

4- Application d'un tel système (question bonus 1 point)

Quel peut être l'utilité d'un tel système en télécommunication?

Réponse:

Ce système permet d'éliminer les variations d'amplitude sans toucher à la phase. Ce système est utilisé pour la démodulation en modulation de fréquence parce qu'il permet d'éliminer des variations d'amplitude qui seraient apparues lors de la transmission.