2010 Examen partiel – Solutionnaire

Problème 1 (20 points)

A. (5 points) Donnez la définition d'une impulsion Nyquist et montrez que l'impulsion Raised Cosine est une impulsion Nyquist.

Une impulsion Nyquist est nulle aux points d'échantillonnage autre que $t=0$, soit $t=n\,T_s$, $n\neq 0$.

Pour le Raised Cosine, nous avons dans la feuille de notes,

$$v(t)=\underbrace{\frac{\sin(\pi t/T_s)}{\pi t/T_s}}_{\text{sinus cardinal}}\frac{\cos(r\pi t/T_s)}{1-4r^2t^2/T_s^2}$$

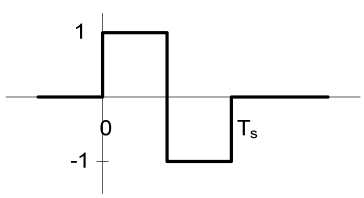
Nous voyons que le premier terme est un sinus cardinal, qui est nulle aux multiples de T_s.

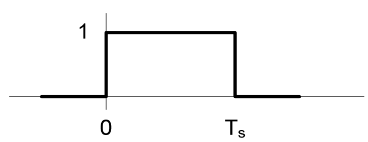
B. (5 points) Donnez en mots (pas en équation), la définition de la capacité d'un canal.

La capacité d'un canal est le taux de transmission maximale que nous pouvons atteindre avec une bonne probabilité d'erreur, soit une communication fiable.

C. (10 points) Donnez la définition d'une modulation binaire orthogonale, et un exemple d'une modulation binaire orthogonale excluant OOK et FSK.

Une modulation binaire orthogonale exploit deux formes d'onde pour lesquels le produit interne est nul. Nous pouvons, par exemple, utiliser les deux formes d'onde suivants





Problème 2 (30 points)

Considérez le graphique du « Plan de l'efficacité spectrale ».

A. (20 points) Trouvez les coordonnées de 16QAM (carré), 16PSK et 16FSK (cohérent) pour une probabilité d'erreur de 10^{-8}.

16 QAM :

Efficacité spectrale $\eta = \log_2 M = \log_2 16 = 4$ b/s/Hz

Distance minimale
$$d_{\min} = \sqrt{\frac{3\log_2 M}{M-1}} = \sqrt{\frac{3\log_2 16}{16-1}} = \sqrt{\frac{12}{15}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \sqrt{2}\sqrt{\frac{2}{5}}$$

Perte par rapport QPSK $-10\log_{10}\frac{2}{5} = 4.0$ dB

E_b/N_0 pour avoir 10^{-8} $12\text{ dB} + 4.0\text{ dB} = 16\text{ dB}$

Coefficients $(16\text{ dB}, 4\text{ b/s/Hz})$

16 PSK :

Efficacité spectrale $\eta = \log_2 M = \log_2 16 = 4$ b/s/Hz

Distance minimale
$$d_{\min} = \sqrt{2\sin^2\frac{\pi}{M}\log_2 M} = \sqrt{2}\sqrt{\sin^2\frac{\pi}{M}\log_2 M} = \sqrt{2}\sqrt{\sin^2\frac{\pi}{16}\log_2 16} = \sqrt{2}\sqrt{4\sin^2\frac{\pi}{16}}$$

Perte par rapport QPSK $-10\log_{10} 4\sin^2\frac{\pi}{16} = -10\log_{10} .152 = 8.1$ dB

E_b/N_0 pour avoir 10^{-8} $12\text{ dB} + 8.1\text{ dB} = 20.1\text{ dB}$

Coefficients $(20.1\text{ dB}, 4\text{ b/s/Hz})$

16 FSK :

Efficacité spectrale $\eta = \frac{2\log_2 M}{M+1} = \frac{2\log_2 16}{17} = \frac{8}{17} = .47$ b/s/Hz

Distance minimale $d_{\min} = \sqrt{\log_2 M} = \sqrt{\log_2 16} = \sqrt{2}\sqrt{2}$

Perte par rapport QPSK $-10\log_{10} 2 = -3$ dB

E_b/N_0 pour avoir 10^{-8} $12\text{ dB} - 3\text{ dB} = 9\text{ dB}$

Coefficients $(9\text{ dB}, .47\text{ b/s/Hz})$

Problème 2 (30 points)

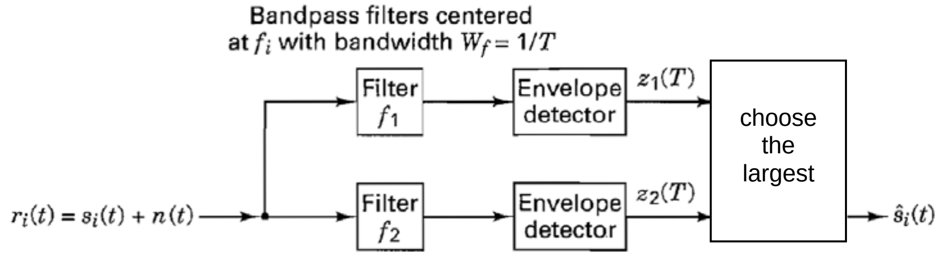
B. (10 points) Proposez un format de modulation pour les radioamateurs qui veulent envoyer un signal du point A au point B via une réflexion sur la lune. Pour cette application les signaux reçus sont très faibles (en fonction de la distance), l'information est très minimale (un taux de transmission très faible est acceptable) et la largeur de bande est limitée à ~1000Hz. Justifiez votre recommandation.

La largeur de bande est fixe, mais le taux de transmission est très bas, donc nous ne sommes pas limités en largeur de bande. Nous pouvons toujours envoyer l'information moins vite si nécessaire pour entrer dans notre largeur de bande fixe. Le signal est très faible, donc nous sommes plutôt limités en puissance. En regardent le « Plan de l'efficacité spectrale », la modulation FSK tombe dans la région des systèmes limités en puissance.

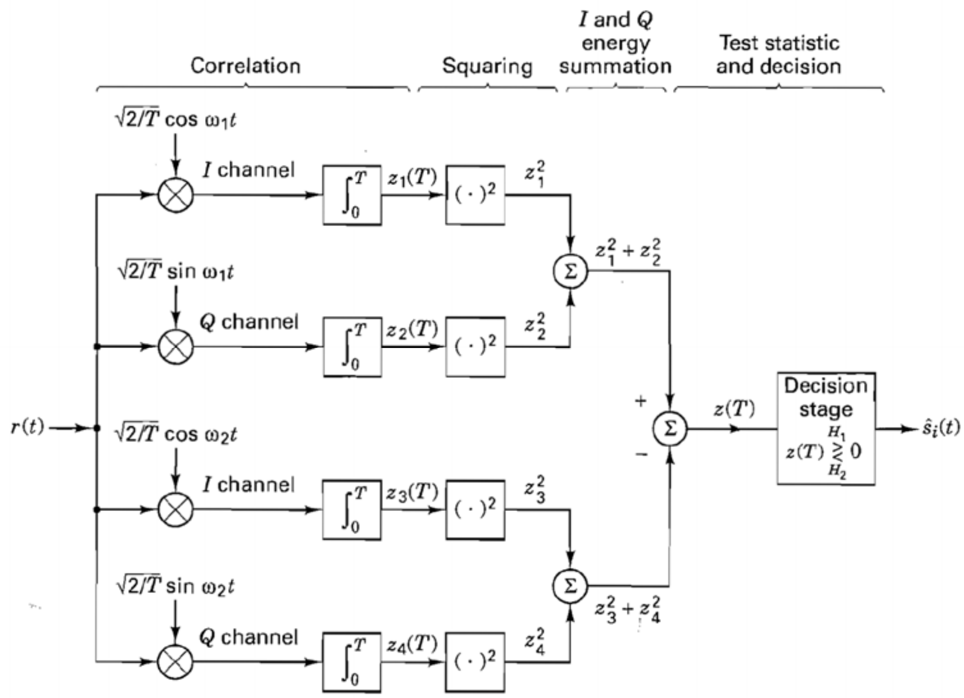
Pour améliorer la détection malgré un signal à très bas puissance, nous utilisons un M élevé dans M-FSK. Pour une largeur de bande fixe, augmentant M aura l'effet de diminuer le taux de transmission.

Problème 3 (15 points)

récepteur A



récepteur B



A. (5 points) Pour quel format de modulation peut-on utiliser ces deux récepteurs ?

Nous voyons qu'il y a deux fréquences détectés, donc nous parlons de la modulation de fréquence, soit FSK.

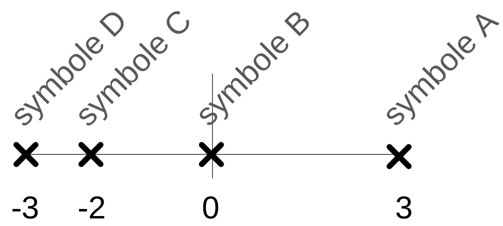
B. (10 points) Considérez la performance BER vs. SNR des récepteurs. Classez les récepteurs et justifiez votre réponse.

Les deux détecteurs ont des règles de décisions identique : choisir le canal (la fréquence) où il y le plus d'énergie. Nous parlons d'une détection non-cohérente, non-optimale.

Choix b : Les deux ont la même performance et cette performance n'est pas optimale.

Problème 4 (35 points)

Considérez le système 4PAM suivant. Supposons que les symboles ont tous la même probabilité a priori.



Système 2

Donnez

A. (5 points) Les seuils de décision pour chaque symbole.

En sachant que les symboles ont tous la même probabilité a priori, nous mettons le seuil aux mi-points des symboles. Pour un statistique du test z, nous choisissons

Symbole D : $z < -2.5$
Symbole C : $-2.5 < z < -1$
Symbole B : $-1 < z < 1.5$
Symbole A : $z > 1.5$

B. (15 points) La probabilité d'erreur en fonction de E_b/N_0.

Nous avons besoin de calculer la distance minimale et le nombre de voisins à la distance minimale. La distance minimale est clairement entre symboles C et D, et il y a qu'un pair de symboles à cette distance minimale. Pour calculer la distance minimale il faut chercher les coordonnées dans l'espace du signal en utilisant

$$\left(\tilde{a}_n^I, \tilde{a}_n^Q\right) = \sqrt{\frac{M \cdot E_s}{\sum_{i=1}^{M}\left[\left(a_n^I\right)^2 + \left(a_n^Q\right)^2\right]}}\left(a_n^I, a_n^Q\right)$$

coordonnées, espace du signal

coordonnées, espace I/Q

Calculons $\sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 + (0)^2 + (3)^2} = \sqrt{22}$, donc

$$\left(\tilde{a}_n^I, \tilde{a}_n^Q\right) = \sqrt{\frac{4 \cdot E_s}{22}}\left(a_n^I, a_n^Q\right) = \sqrt{\frac{2E_s}{11}}\left(a_n^I, a_n^Q\right)$$

Les coefficients de symbole D et C sont $-3\sqrt{\frac{2E_s}{11}}$ et $-2\sqrt{\frac{2E_s}{11}}$. La distance minimale est $\sqrt{\frac{2E_s}{11}}$. La probabilité d'erreur est donc

$$P_e \approx \frac{2K}{M} Q\left(\frac{D_{\min}}{\sqrt{2N_0}}\right) = \frac{2 \cdot 1}{4} Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{11N_0}}\right) = \frac{1}{2} Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{11N_0}}\right)$$

Soit une perte de $-10\log_{10}\frac{1}{11} = 10.4 \text{ dB}$ par rapport à QPSK.

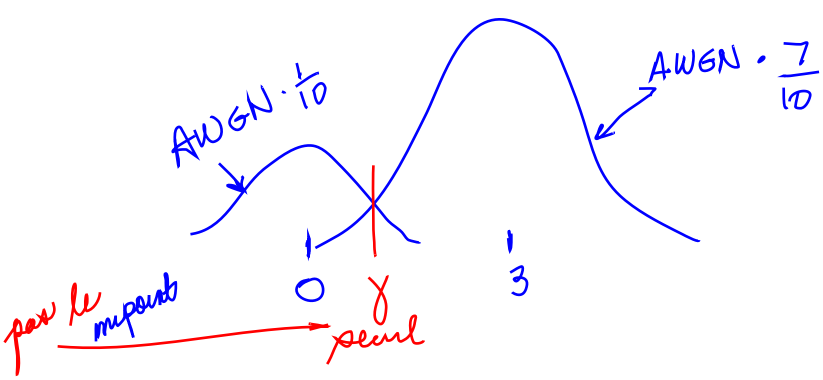
C. (5 points) L'efficacité spectrale.

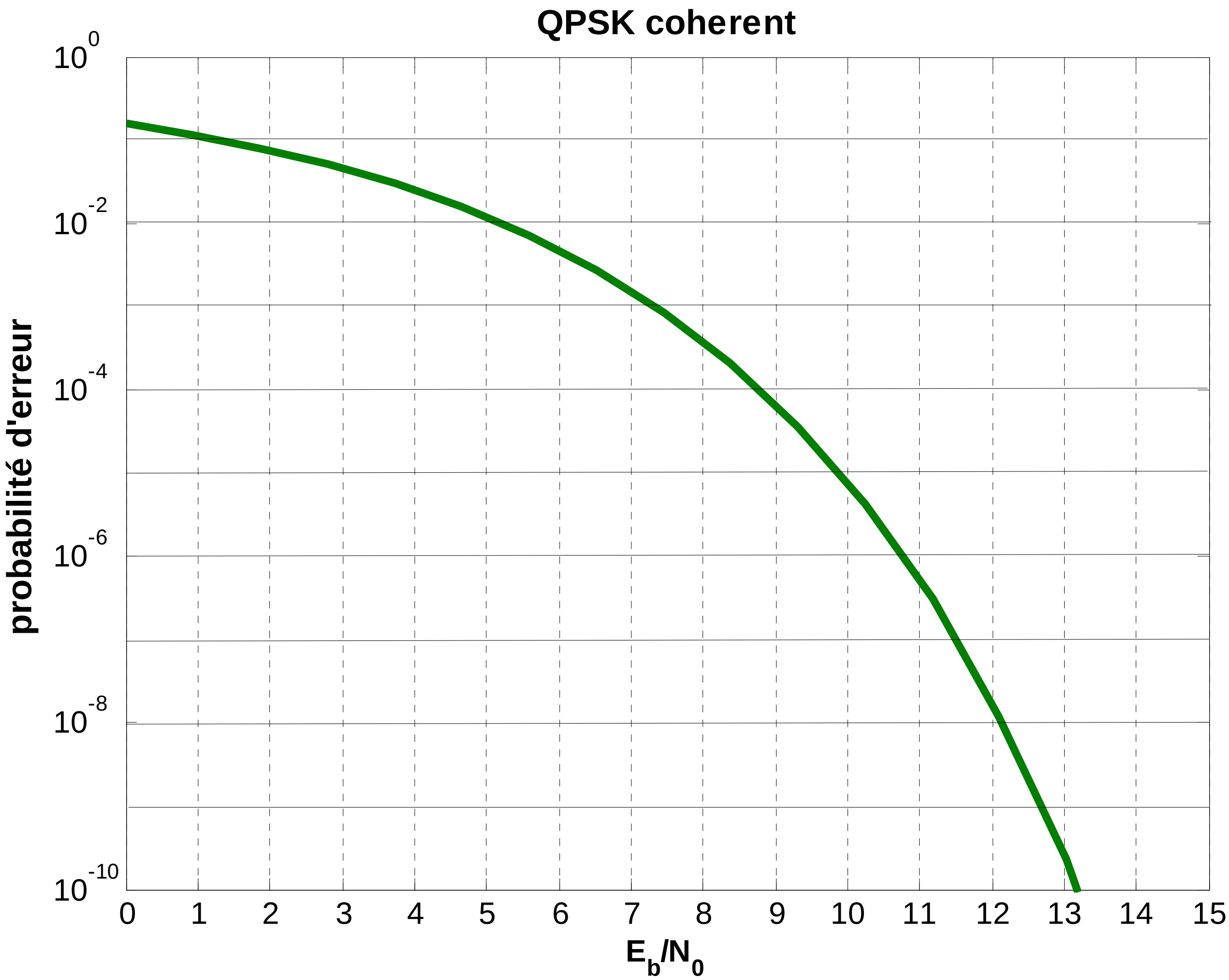
La largeur de bande est calculer en supposant une impulsion Nyquist idéale pour les symboles, donc le taux de symbole est $W=R_s$. L'efficacité est

$$\eta = \frac{R_b}{W} = \frac{R_b}{R_s} = \frac{R_b}{R_b/2} = 2 \text{ b/s/Hz}$$

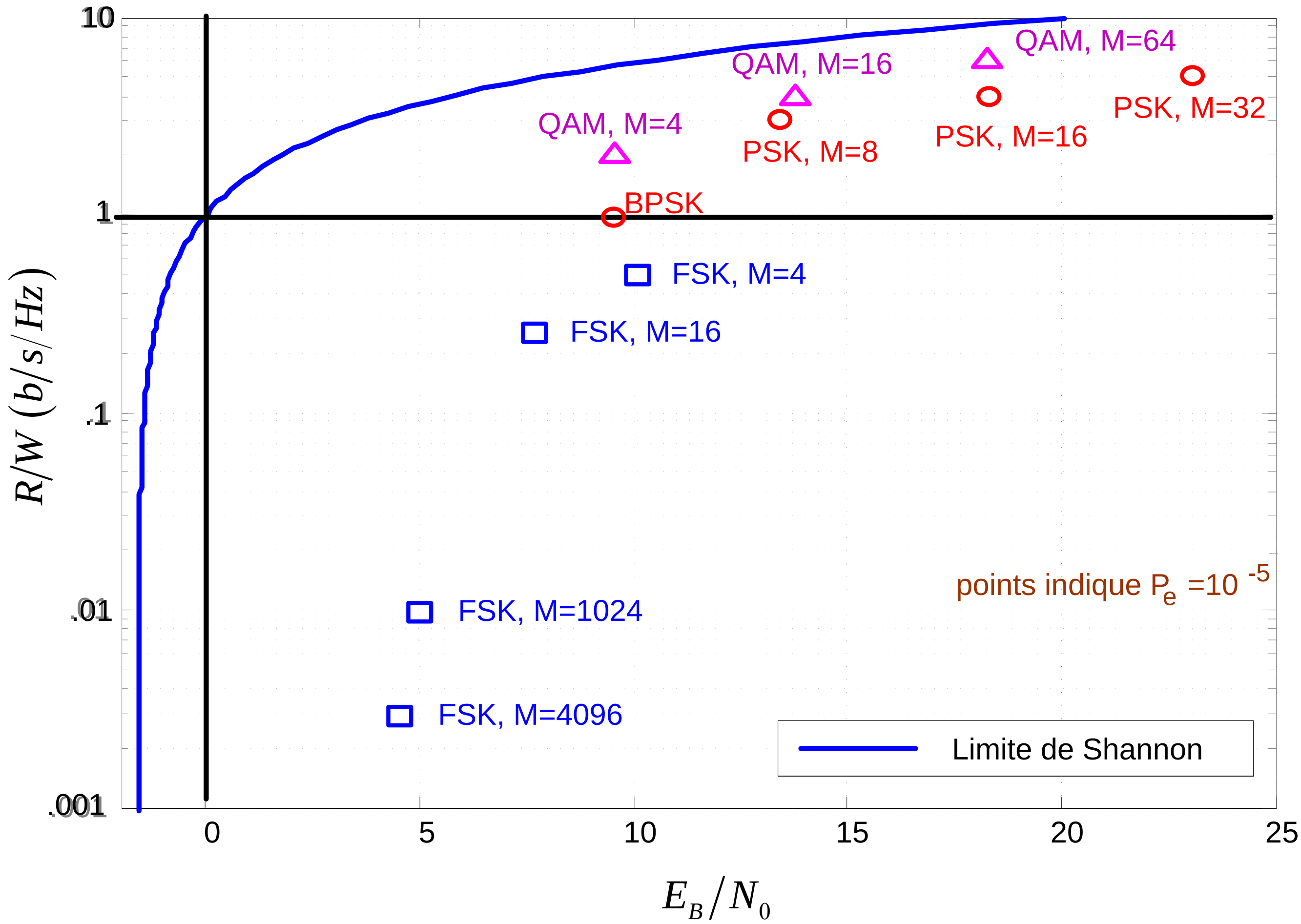
Supposons que les trois symboles B, C et D ont la même probabilité a priori, mais que le symbole A est 7 fois plus probable que le symbole B. Supposons que nous calculons les nouveaux seuils de décision en utilisant une approximation binaire, c.-à-d., en prenant les symboles deux à la fois.

D. (10 points) Sans nécessairement faire un calcul exact, donnez la méthodologie et une description graphique sur la façon de trouver le nouveau seuil de décision pour chaque symbole.

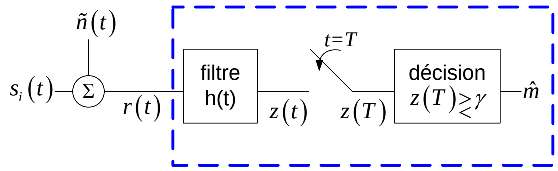



QPSK coherent
probabilité d'erreur
10^0
10^-2
10^-4
10^-6
10^-8
10^-10
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
Eb/N0

Plan de l'efficacité spectrale (Bandwidth Efficiency Plane)



Récepteur d'échantillonnage



MAP: i qui maximise $p(z|s_i)\,p(s_i)$

i qui minimise $\|\mathbf{r}-\mathbf{s}_i\|^2 - N_0 \ln P(\mathbf{s}_i)$

$P(\mathbf{s}_i) =$ probabilité a priori de symbole $\mathbf{s}_i$

ML: i qui maximise $p(z|s_i)$

i qui minimise $\|\mathbf{r}-\mathbf{s}_i\|^2$

Conversion de l'espace I/Q vers espace du signal

$$\left(\tilde{a}_n^I,\tilde{a}_n^Q\right) = \sqrt{\frac{M\cdot E_s}{\sum_{i=1}^{M}\left[\left(a_n^I\right)^2+\left(a_n^Q\right)^2\right]}}\left(a_n^I,a_n^Q\right)$$

coordonnées, espace du signal

coordonnées, espace I/Q

Énergie moyenne

$$E_{moy} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\|\mathbf{s}_i\|^2$$

$$= \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}[\text{énergie du signal } i]$$

Énergie par bit v. énergie par symbole

$$E_b \log_2 M = E_s$$

$$P_e(BPSK) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

$$P_e(OOK) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

$$P_e(QPSK) \approx 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

Perte par rapport à QPSK

$$d_{\min} = \sqrt{x}\sqrt{2} \qquad \text{perte} = -10\log_{10} x$$

Borne d'union

$$P_e \approx \frac{2K}{M}Q\left(\frac{D_{\min}}{\sqrt{2N_0}}\right) = \frac{2K}{M}Q\left(d_{\min}\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

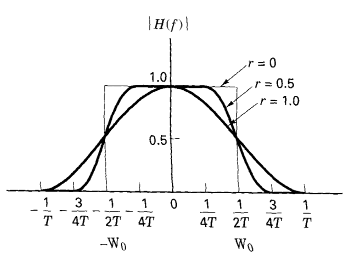
K est le nombre des paires des signaux séparés par la distance minimale D_{min}

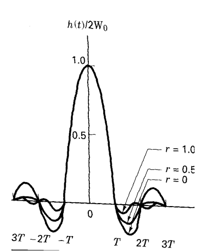
Distance minimale dans l'espace du signal

$$D_{\min} = \min_{i\neq k}\|\mathbf{s}_i-\mathbf{s}_k\| \quad \text{et} \quad d_{\min} = \frac{D_{\min}}{\sqrt{2E_b}}$$

Raised cosine

$$v(t) = \frac{\sin(\pi t/T_s)}{\pi t/T_s}\,\frac{\cos(r\pi t/T_s)}{1-4r^2t^2/T_s^{\,2}}$$





Pour une modulation orthogonale

$$P_e(bit) = P_b = P_e(symbol)\frac{M/2}{M-1}$$

Pour une modulation non-orthogonale avec codage de gray

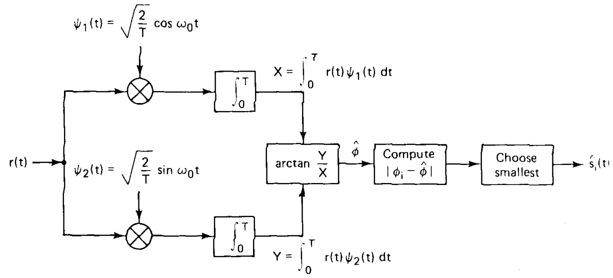
$$P_e(bit) = P_b = \frac{P_e(symbol)}{\log_2 M}$$

Efficacité spectrale

$$\eta = \frac{R_b}{W} = \frac{1}{T_b}\frac{1}{W}\ \text{bits/s}$$

MPSK cohérent

$\eta = \log_2 M$ †

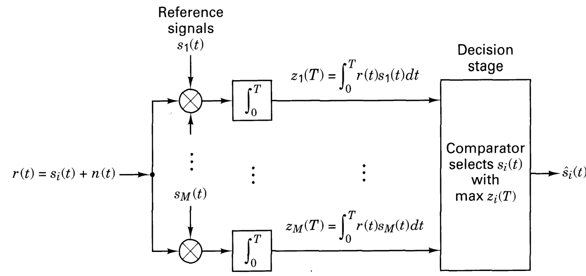


$$P_e(M) \approx 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}} \sin\frac{\pi}{M}\right) = 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_b \log_2 M}{N_0}} \sin\frac{\pi}{M}\right)$$

$$d_{\min} = \sqrt{2\sin^2\frac{\pi}{M}\log_2 M}$$

MFSK cohérent

$$\eta = \frac{2\log_2 M}{M+1} \text{ †}$$



$$P_e = (M-1)Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) = (M-1)Q\left(\sqrt{\frac{E_b \log_2 M}{N_0}}\right)$$

$$d_{\min} = \sqrt{\log_2 M}$$

Séparation minimale $1/2T_s$

QAM

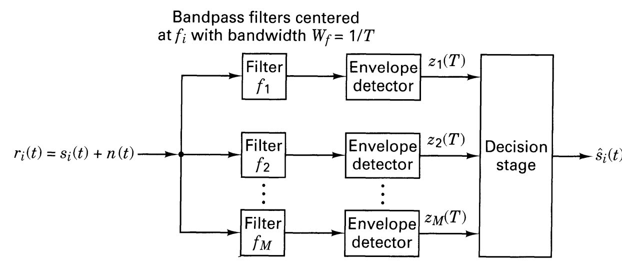
$\eta = \log_2 M$ †

cas rectangulaire (carrée) $M=L^2$

$$P_e = 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right)Q\left(\sqrt{\frac{3\log_2 M}{(M-1)}\frac{E_b}{N_0}}\right) \qquad d_{\min} = \sqrt{\frac{6\log_2 L}{L^2-1}}$$

MFSK incohérent

$$\eta = \frac{\log_2 M}{M} \text{ †}$$



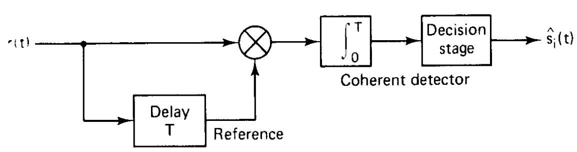
$$P_e(BFSK) = \frac{1}{2}e^{-E_b/2N_0}$$

~1 dB de perte entre BFSK cohérente et incohérente

Séparation minimale $1/T_s$

DPSK incohérent

$$P_e = \frac{1}{2}e^{-E_b/N_0}$$



~1 dB de perte entre DPSK et BPSK

Loi de Shannon

$$C = W\log_2(1+SNR) \qquad SNR = \frac{E_b}{N_0}\eta$$

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{W}{C}\left(2^{C/W}-1\right) \qquad \frac{C}{W} \to 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{E_b}{N_0} \to -1.6dB$$

Processus Gram Schmidt

$$\psi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{E_1}}s_1(t) \text{ où } E_1 \triangleq \int_0^T s_1^2(t)\,dt$$

$$\theta_2(t) \triangleq s_2(t) - \langle s_2(t), \psi_1(t)\rangle \psi_1(t)$$

$$E_2 \triangleq \int_0^T \theta_2^2(t)\,dt \qquad \psi_2(t) = \frac{\theta_2(t)}{\sqrt{E_2}}$$

$$i. \quad \theta_i(t) = s_i(t) - \sum_{k=1}^{i-1}\langle s_i(t), \psi_k(t)\rangle \psi_k(t)$$

$$E_i \triangleq \int_0^T \theta_i^2(t)\,dt \qquad \psi_i(t) = \frac{\theta_i(t)}{\sqrt{E_i}}$$

Relations trigonométriques

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - \sin^2\theta$$

$$\tan\theta = \sin\theta/\cos\theta$$

† en supposant une impulsion Nyquist idéale