Université Laval
MAT-10364 - Mathématiques de l'ingénieur II
Examen partiel, Mercredi le 1 mai 2002

- Durée de l'examen : deux heures.
- Documentation permise : deux feuilles-résumé.
- Aucun échange de matériel ou de documents ne sera toléré.
- Vous êtes priés de vous identifier (nom et numéro matricule et **section de cours**) sur le cahier et de placer votre carte d'étudiant sur la table à côté de vous.
- **Chaque réponse devra être accompagnée des calculs et justifications détaillés. Dans le cas contraire, elle sera considérée comme nulle.**

Question 1
(20 pts)

On désigne par S la portion de surface du paraboloïde $z = 4(x^2 + y^2)$ délimitée par les quatre plans

$$y = x, \quad y = \sqrt{3}x, \quad z = 1, \quad z = 4.$$

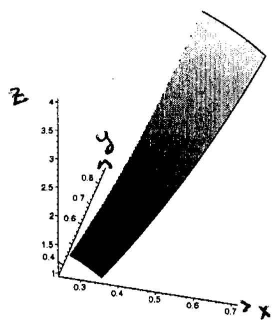

Figure 1 : La surface S

a) (10) Trouver une paramétrisation de S.

b) (10) Calculer le flux du champ $\vec{v} = (x - 1, y, -\frac{1}{2})$ à travers S dans la direction de la normale dont la troisième composante est négative.

Question 2
(15 pts)

Soit $f(x)$ une fonction continue et > 0 sur un intervalle $[a, b]$. On désigne par D le domaine de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$D = \{(x, y) \mid x \in [a, b], -f(x) \leq y \leq f(x)\}.$$

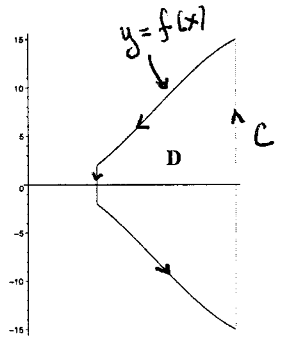

Figure 2 : Le domaine D

et par $I(f)$ l'intégrale

$$I(f) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Si $\vec{v} = (y^4, x)$, calculer le travail

$$\int_C \vec{v} \cdot d\vec{r},$$

de $\vec{v}$ le long de la frontière C de D, orientée positivement, en fonction de $I(f)$.

Question 3
(25 pts)

On désigne par C la courbe d'intersection de l'hyperboloïde $x^2 - y^2 + z^2 = 7$ et du plan $y = 3$.

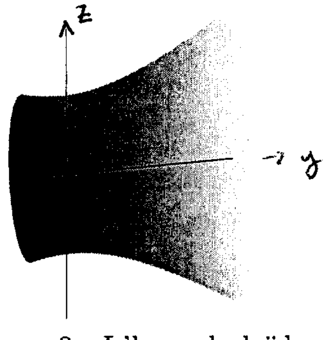

Figure 3 : L'hyperboloïde

Calculer, au signe près, le travail du champ $\vec{w} = (-yz, 3x - y, z + yx)$ le long de C.

Question 4
(26 pts)

Soit
$$\vec{F} = (4 - (y^2 + z^2), xz, -y^2).$$

Calculer le flux de $\vec{F}$ à travers la surface constituée

(i) de la portion P du paraboloïde $x = 9 - (y^2 + z^2)$, pour laquelle $x \geq 5$.

(ii) de la portion D du cylindre $y^2 + z^2 = 4, \quad x \in [1, 5]$,

dans la direction de la normale qui pointe vers l'infini.

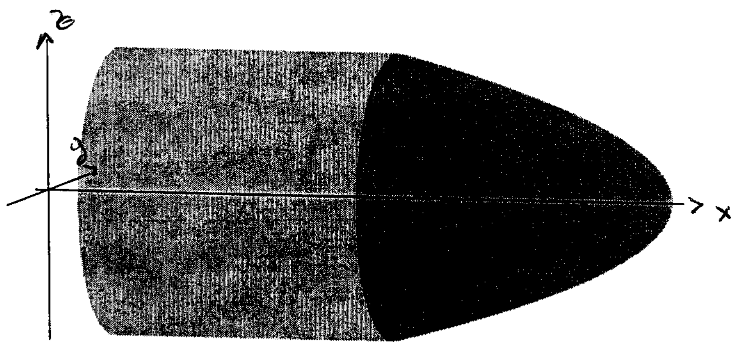

Figure 3 : la surface S

Question 5
(14 pts)

Qualifier de vrai ou de faux (uniquement) les énoncés qui suivent. Comme d'habitude, $\vec{r}$ dénote le vecteur position $\vec{r} = (x, y, z)$ et $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ les vecteurs unitaires des trois axes Ox, Oy et Oz.

1. Si $\vec{F}$ est un champ de vecteurs continûment dérivable partout sur $\mathbb{R}^3$ et si $\operatorname{div}(\vec{F}) = 0$, alors $\vec{F}$ est conservatif.
2. Si $\vec{F}$ est un champ de vecteurs deux fois continûment dérivable partout sur $\mathbb{R}^3$ et si S est une surface fermée $S \subset \mathbb{R}^3$ quelconque, alors
$$\iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot \vec{n} \, dA = 0.$$

3. Si $K \subset \mathbb{R}^3$ est un solide quelconque dont la parois est une surface notée S alors que la normale extérieure à S est notée $\vec{n}$, alors on a

$$\iint_S \vec{r} \cdot \vec{n}\, dA = 2\mathrm{Vol}\,(K).$$

4. Soit D un domaine du plan yOz (c'est-à-dire $x = 0$) dont la frontière est une courbe fermée C. Soit $\vec{v} = (1,1,1) \times \vec{r}$. On a

$$\int_C \vec{v} \cdot d\vec{r} = \pm 2\,\mathrm{Aire}\,(D).$$

5. Soit C une courbe fermée de $\mathbb{R}^2$ et D le domaine délimité par C. On a

$$\mathrm{Aire}\,(D) = \frac{1}{2}\int_C (y, x)\, d\vec{r}.$$

6. Soit $T = x^2 + y^2 + z^2$ et $\vec{v} = \nabla T$. Si on pose $\vec{w} = \vec{v} \times \vec{k}$, alors le travail de $\vec{w}$ sur toutes les courbes fermées de $\mathbb{R}^3$ est nul.
7. Si $\vec{F}$ est un champ de vecteurs dérivable partout sur $\mathbb{R}^3$ pour lequel

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dA = 0$$

pour toutes les sphères S centrées en $(0,0,0)$, alors la divergence $\mathrm{div}\,(\vec{F})$ est nulle partout sur $\mathbb{R}^3$.

I) Quelques angles remarquables

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
0	0	1	0
$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$
$\pi/2$	1	0	$-$
$2\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$-1/2$	$-\sqrt{3}$
$3\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	-1
$5\pi/6$	$1/2$	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/3$
π	0	-1	0
$3\pi/2$	-1	0	$-$
2π	0	1	0

II) **Quelques intégrales utiles.**

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$
$$\int f'(x)(f(x))^n\,dx = \frac{1}{n+1}(f(x))^{n+1} + C, \quad \text{si } n \neq -1$$
$$\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C$$
$$\int e^{f(x)} f'(x)\,dx = e^{f(x)} + C$$
$$\int x\ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$$
$$\int \sqrt{a^2x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2x^2+1} + \frac{1}{2a}\ln\left(ax + \sqrt{a^2x^2+1}\right) + C$$

Soit $a \neq 0$; alors

$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$

$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$

$\int \sin(ax)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(ax) + C$

$\int \cos(ax)\,dx = \frac{1}{a}\sin(ax) + C$

$\int \tan(ax)\,dx = -\frac{1}{a}\ln|\cos(ax)| + C$

$\int \cot(ax)\,dx = \frac{1}{a}\ln|\sin(ax)| + C$

$\int \sec^2(ax)\,dx = \frac{1}{a}\tan(ax) + C$

$\int \csc^2(ax)\,dx = -\frac{1}{a}\cot(ax) + C$

$\int \sec(ax)\,dx = \frac{1}{a}\ln|\sec(ax) + \tan(ax)| + C$

$\int \csc(ax)\,dx = \frac{1}{a}\ln|\csc(ax) - \cot(ax)| + C$

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right) + C$

$\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$

$\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$

$\int \sin^3 x\,dx = -\frac{1}{3}\cos t\left(\sin^2 t + 2\right) + C$

$\int \cos^3\,dx = \frac{1}{3}\sin x\,(\cos^2 x + 2) + C$

$\int \sin^4 x\,dx = -\frac{1}{8}\left(2\sin^3 x\cos x + 3\cos x\sin x + 3x\right) + C$

$\int \cos^4 x\,dx = \frac{1}{8}\left(2\cos^3 x\sin x + 3\cos x\sin x + 3x\right) + C$

$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx) + C$