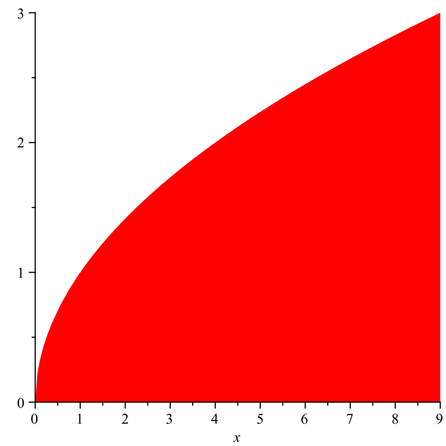
Mat-1910 : Mat-Ing-II, réponses, examen type I

Question 1

a) Il s'agit de la portion comprise entre la droite $x = 9$, l'axe des x et sous la parabole d'équation $x = y^2$.



b) On interchange l'ordre d'intégration

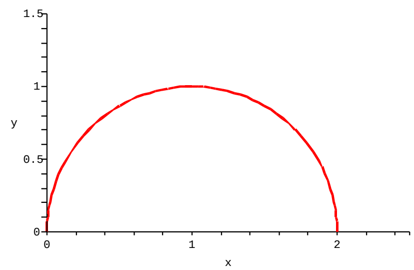
$$\begin{aligned}
\int_0^3 \int_{y^2}^9 y\cos(x^2)\,dx\,dy &= \int_0^9 \int_0^{\sqrt{x}} y\cos(x^2)\,dy\,dx. \\
&= \int_0^9 \left. \frac{y^2}{2}\cos(x^2)\right|_0^{\sqrt{x}} dx \\
&= \int_0^9 \frac{x}{2}\cos(x^2)\,dx \\
&= \left. \frac{\sin x^2}{4}\right|_0^9 \\
&= \frac{\sin 81}{4}
\end{aligned}$$

Question 2

a) Commençons par un peu d'algèbre. La frontière du domaine est

$$y = \sqrt{2x - x^2} \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x = 0 \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1.$$

Donc le domaine est le demi-disque centré en $(1, 0)$ et de rayon 1.



b) Puisque $x \geq 0, y \geq 0$, on a $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Pour exprimer la valeur maximale de r en fonction de θ, on récrit l'équation du cercle en coordonnées polaires

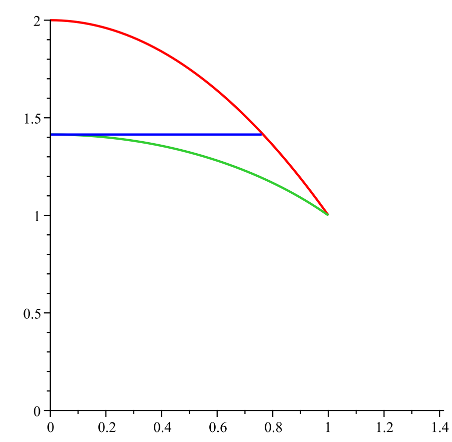
$$x^2 + y^2 - 2\,x = 0 \Rightarrow r^2 - 2\,r\,\cos\theta = 0 \Rightarrow r = 2\,\cos\theta.$$

On peut donc écrire l'intégrale sous la forme suivante

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} \frac{r(\cos\theta + \sin\theta)}{r^2}\, r\,dr\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} (\cos\theta + \sin\theta)\;dr\,d\theta.$$

Question 3

(a) La région est la réunion de deux régions. Globalement, il s'agit de la portion comprise entre les droites $x = 0$ et $x = 1$, sous le cercle $x^2 + y^2 = 2$ et au-dessus de la parabole $y = 2 - x^2$.



(b)

$$J = \int_0^1 \int_{\sqrt{2-x^2}}^{2-x^2} x\,dy\,dx$$

(c)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_{\sqrt{2-x^2}}^{2-x^2} x\,dy\,dx &= \int_0^1 x(2-x^2) - x\sqrt{2-x^2}\,dx \\
&= x^2 - \frac{x^4}{4} + \frac{1}{3}(2-x^2)^{3/2}\Big|_0^1 \\
&= \frac{13}{12} - \frac{2\sqrt{2}}{3}
\end{aligned}$$

Question 4

Notons P la plaque, la quantité cherchée s'écrit

$$J_{Ox} = \iint_P y^2\,\sigma(x,y)\,dx\,dy.$$

En coordonnées polaires, la droite $y = x$ devient $\theta = \frac{\pi}{4}$ et la parabole $y = x^2$ devient

$$r\sin\theta = r^2\cos^2\theta \Rightarrow r = \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}.$$

Donc

$$P_p = \{(r,\theta) \mid \theta \in [0, \frac{\pi}{4}], 0 \le r \le \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\}.$$

Puisque $\sigma = 1$, on a finalement

$$J_{Ox} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}} r^2\,\sin^2\theta r\,dr \right) d\theta.$$

Question 5

On adapte les coordonnées sphériques relatives à l'axe des y :

$$\begin{cases} z = \rho\cos\theta\sin\phi \\ x = \rho\sin\theta\sin\phi \\ y = \rho\cos\phi \end{cases} \Longrightarrow dV = \rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

Le cône s'écrit $\tan\phi = \frac{1}{\sqrt{3}}$, c'est-à-dire $\phi = \frac{\pi}{6}$, alors que la sphère devient

$$\rho^2 = \rho\,\cos\phi \Rightarrow \rho = \cos\phi.$$

Finalement,

$$V = \iiint_S 1\,dx\,dy\,dz = \int_{\theta=0}^{2\pi} \left(\int_{\phi=0}^{\frac{\pi}{6}} \left(\int_{\rho=0}^{\cos\phi} \rho^2\sin\phi\,d\rho \right) d\phi \right) d\theta.$$

$$V = \int_{\theta=0}^{2\pi} \left(\int_{\phi=0}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{3} \sin\phi \cos^3\phi \, d\phi \right) d\theta = \frac{7\pi}{96}.$$

(Note : on peut faire ce calcul en cylindriques. Mais c'est un peu plus compliqué !)

Question 6

Ici le meilleur choix est celui des coordonnées cylindriques. Dans ce système, les cônes s'écrivent $z = 2\,r$ et $z = 1 - r$. Donc ils s'intersectent lorsque $2\,r = 1 - r$ c'est-à-dire $r = \frac{1}{3}$.
Le solide étant homogène, on a que la masse est égale au volume multiplié par la densité constante, ρ.

$$V = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{1}{3}} \left(\int_{2\,r}^{1-r} r\, dz \right) dr \right) d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{1}{3}} r(1 - 3\,r)\, dr \right) d\theta = \frac{\pi}{27}.$$

On peut aussi obtenir ce résultat plus simplement à l'aide de la formule donnant le volume d'un cône : $\pi R^2 H/3$. En effet, le volume est égal à la somme des volumes des deux cônes

$$V = \frac{\pi}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \frac{2}{3} + \frac{\pi}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \frac{1}{3} = \frac{\pi}{27}.$$

Par symétrie, on a que $\bar{x} = \bar{y} = 0$. Il suffit de calculer $\bar{z}$
On a que

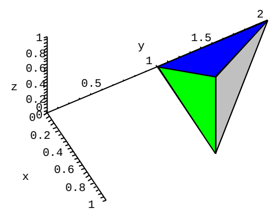
$$M_{xy} = \rho \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{1}{3}} \left(\int_{2\,r}^{1-r} rz\, dz \right) dr \right) d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{r(1-r)^2 - 4r^3}{2}\, dr \right) d\theta = \frac{7\pi}{324}.$$

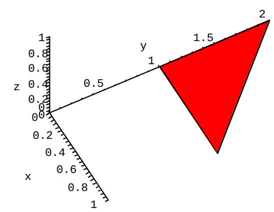
Les coordonnées du centre de masse sont

$$\bar{x} = 0, \qquad \bar{y} = 0, \qquad \bar{z} = \frac{7}{12}.$$

Question 7

D'abord une représentation graphique : à gauche, le tétrahèdre ; à droite sa projection sur $z = 0$.





Le plan vertical qui passe par A, C, E a pour équation $y = 1$. Le plan vertical qui passe par B, C, E a pour équation $x + y = 2$. Le plan oblique qui passe par A, B, E a pour équation $x - z = 0$. La prise en compte de ces données conduit à

$$I = \int_{y=1}^{2} \left(\int_{x=0}^{2-y} \left(\int_{0}^{x} f(x, y, z)\, dz \right) dx \right) dy.$$

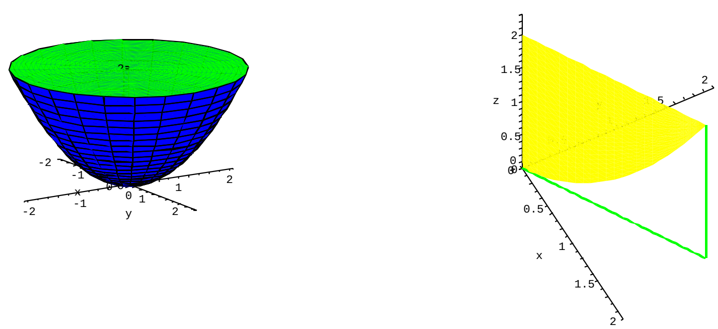
Question 8

Cet exercice ressemble (trop !) au numéro 5. On travaille encore en sphériques. Le cône s'écrit $\phi = \frac{\pi}{6}$, la sphère $\rho = 2$. Donc

$$I = \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \int_{0}^{2} \rho^2 \sin\phi \, d\rho\, d\phi\, d\theta.$$

Question 9

Ici on travaille en cylindriques. La représentation graphique ci-dessous est la clé de tout : à gauche, le solide, à droite une section de ce solide à θ fixé, section dessinée dans le demi-plan vertical (r, z).

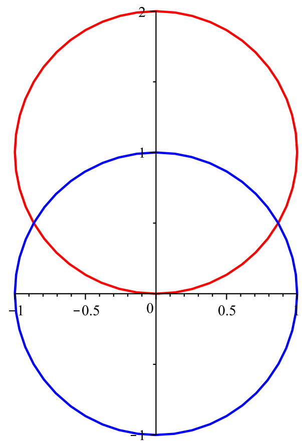


En observant que, pour chaque θ, la valeur maximale de r est h, on a

$$V = \int_{\theta=0}^{2\pi} \left(\int_{r=0}^{h} \left(\int_{z=\frac{r^2}{h}}^{h} r\, dz \right) dr \right) d\theta = \frac{\pi h^3}{2}.$$

Question 10

a) Il s'agit de la partie supérieure du graphique



En coordonnées polaires, le cercle C_1 correspond à $r = 1$ tandis que le cercle C_2 correspond à $r = 2\sin\theta$. On trouve les points d'intersection en résolvant les deux équations

$$\begin{cases} r = 1 \\ r = 2\sin\theta \end{cases}$$

On trouve $\sin\theta = 1/2 \Longrightarrow \theta = \pi/6 \quad \text{et} \quad \theta = 5\pi/6$. Les deux points d'intersection en coordonnées polaires sont

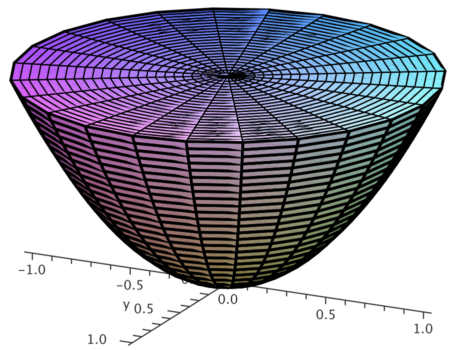
$$P_1 = (1, \pi/6) \quad \text{et} \quad P_2 = (1, 5\pi/6)$$

b) L'aire est donnée par la formule

$$\begin{aligned} A &= \iint_R dA \\ &= \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \int_1^{2\sin\theta} r\,dr\,d\theta \\ &= \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \left.\frac{r^2}{2}\right|_1^{2\sin\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{5\pi/6} 4\sin^2\theta - 1\,d\theta \\ &= 2\left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4}\right]\Bigg|_{\pi/6}^{5\pi/6} - \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Question 11

a) Le domaine est situé à l'intérieur du paraboloïde et délimité supérieurement par le plan $z = 1$. L'équation cartésienne du paraboloïde $z = r^2$ est $z = x^2 + y^2$.

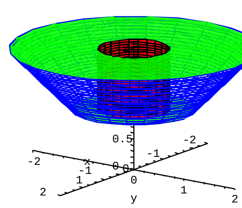


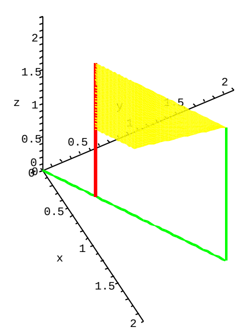
b)

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{z}} f(r, \theta, z)\, r\, dr\, dz\, d\theta$$

Question 12

Représentation graphique : à gauche, le solide, à droite une section de ce solide à θ fixé, section dessinée dans le demi-plan vertical (r, z).





On commence par calculer la masse volumique. Pour ce faire, il nous faut le volume qui est donné par (l'équation du cône est $z = r$).

$$V = \int_0^{2\pi} \left(\int_1^2 \left(\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{z} r\, dr \right) dz \right) d\theta = 2\pi.$$

d'où $\sigma = \frac{M}{2\pi}$.
On peut maintenant calculer J_{Oz},

$$J_{Oz} = \frac{M}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_1^2 \left(\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{z} r^2\, r\ dr \right) dz \right) d\theta = \frac{137}{90} M.$$