EXAMEN PARTIEL 2

MAT-2910 : Analyse numérique pour l'ingénieur — Hiver 2014

Remarques :

1) Seules les calculatrices avec l'auto-collant de la Faculté seront admises.
2) Pour chaque question on fournira le détail des calculs et du raisonnement. En l'absence de ces détails, une solution sera considérée comme nulle.
3) Déposez votre carte d'identité avec photo sur le coin de votre table.

Voici un extrait d'une table de noeuds et de poids des quadratures de Gauss.

n	Noeuds	Poids
2	-0.57735	1
	0.57735	1
3	-0.77460	0.55556
	0	0.88889
	0.77460	0.55556
4	-0.86114	0.34785
	-0.33998	0.65215
	0.33998	0.65215
	0.86114	0.34785
5	-0.90618	0.23693
	-0.53847	0.47863
	0	0.56889
	0.53847	0.47863
	0.90618	0.23693

Question 1. (10 points)

Ramener l'équation différentielle suivante à un système du 1er ordre équivalent.

$$\begin{aligned} y''(t) &= \left(1+\frac{2}{t}\right) y(t) - (t+2), \\ y(0) &= 0, \\ y'(0) &= 2. \end{aligned}$$

Question 2. (20 points)

On considère l'équation différentielle suivante.

$$\begin{aligned} y'(t) &= y(t) + e^{2t}, \\ y(0) &= 2. \end{aligned}$$

a) [5 pts] Vérifier que $y(t) = e^t + e^{2t}$ est la solution exacte.

b) [10 pts] Faire un pas de la méthode du point milieu avec $h = 0.1$.

c) [5 pts] Pour la même méthode, avec $h = 0.05$, on a obtenu $y(0.1) \approx 2.326298$. En vous basant sur ces deux approximations de $y(0.1)$, vérifier que l'ordre de la méthode est 2.

Question 3. (30 points)

Le tableau suivant contient trois évaluations d'une fonction f :

x	-1	0	1
$f(x)$	-1	0	1

a) [10 pts] Déterminer les paramètres a, b, c et d pour que la fonction S suivante soit une spline cubique interpolant ces 3 points.

$$S(x) = \begin{cases} a + b\,x^3 & \text{si } -1 \leq x \leq 0, \\ c\,x^2 + d\,x^3 & \text{si } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

b) [5 pts] Cette spline est-elle naturelle ?

c) [5 pts] La fonction T suivante est-elle une spline cubique naturelle interpolant les 3 points ?

$$T(x) = \begin{cases} x & \text{si } -1 \leq x \leq 0, \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

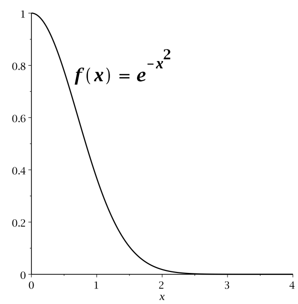
d) [5 pts] Calculer par la méthode de Vandermonde (en donnant les détails) le polynôme $p_2(x)$ de degré 2 interpolant les 3 points.

e) [5 pts] Donner une majoration de l'erreur $|f(\frac{1}{2}) - p_2(\frac{1}{2})|$, sachant que $|f'''(x)| \leq 8$ pour tout x dans $[-1,\ 1]$.

Question 4. (30 points)

Nous voulons calculer des approximations de

$$I = \int_0^4 e^{-x^2}\, dx.$$



a) [5 pts] Estimer I avec la méthode des trapèzes composée utilisant 2 sous-intervalles.

b) [5 pts] Estimer I avec la méthode des trapèzes composée utilisant 4 sous-intervalles.

c) [5 pts] Estimer I en utilisant l'extrapolation de Richardson et les valeurs obtenues en a) et b).

d) [5 pts] Sachant que $f''(x) = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$, majorer l'erreur commise par la méthode des trapèzes composée pour un h quelconque.

e) [5 pts] Avec la méthode des trapèzes, combien de sous-intervalles n doit-on utiliser si l'on veut obtenir une approximation de I avec une erreur plus petite que 10^{-5} ?

f) [5 pts] Existe-t'il une formule de quadrature de Gauss-Legendre qui permet d'obtenir la valeur exacte de I ? (Justifier votre réponse)

Question 5. (20 points)

Voici un tableau contenant certaines évaluations d'une fonction f.

x_i	$f(x_i)$
-1	-1.0
0	0.0
1	1.0
3	1.4422

a) [5 pts] Donner une approximation d'ordre 1 de $f'(0)$.

b) [5 pts] Donner une approximation d'ordre 2 de $f'(0)$.

c) [10 pts] Démontrer que la formule de différence finie suivante est d'ordre 2.

$$f'(x) \simeq \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}.$$

Aide-mémoire

Interpolation

- Interpolation de Lagrange : étant donné $(n+1)$ points $((x_i, f(x_i))$ pour $i = 0, 1, \cdots, n)$:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x), \qquad L_i(x) = \frac{(x - x_0)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n)}{(x_i - x_0)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)}$$

- Différences divisées : $f[x_i] = f(x_i)$,

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}, \quad f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{(x_{i+2} - x_i)}, \quad \text{etc.}$$

- Interpolation de Newton :

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}),$$

$$\text{où } a_i = f[x_0, x_1, x_2, \cdots, x_i] \quad \text{pour } 0 \leq i \leq n$$

- Erreur d'interpolation :

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n) \ \text{ pour } \ \xi(x) \in]x_0, x_n[$$

- Splines cubiques : on pose $h_i = x_{i+1} - x_i$ et dans l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ on a :

$$p_i(x) = f_i + f_i'(x - x_i) + \frac{f_i''}{2!}(x - x_i)^2 + \frac{f_i'''}{3!}(x - x_i)^3$$

où

$$\begin{aligned} f_i &= f(x_i) \\ f_i' &= f[x_i, x_{i+1}] - \frac{h_i f_i''}{3} - \frac{h_i f_{i+1}''}{6} \\ f_i''' &= \frac{f_{i+1}'' - f_i''}{h_i} \end{aligned}$$

et les f_i'' sont solutions de :

$$\frac{h_i}{(h_i + h_{i+1})} f_i'' + 2 f_{i+1}'' + \frac{h_{i+1}}{(h_i + h_{i+1})} f_{i+2}'' = 6 f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}], \quad i = 0, 1, \cdots, n-2$$

Différentiation et intégration numériques

- Dérivées d'ordre 1 :

$f'(x) = \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} + O(h)$ *Différence avant d'ordre 1*
$f'(x) = \dfrac{f(x)-f(x-h)}{h} + O(h)$ *Différence arrière d'ordre 1*
$f'(x) = \dfrac{-f(x+2h)+4f(x+h)-3f(x)}{2h} + O(h^2)$ *Différence avant d'ordre 2*
$f'(x) = \dfrac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} + O(h^2)$ *Différence centrée d'ordre 2*
$f'(x) = \dfrac{3f(x)-4f(x-h)+f(x-2h)}{2h} + O(h^2)$ *Différence arrière d'ordre 2*

- Dérivées d'ordre supérieur :

$f''(x) = \dfrac{f(x-2h)-2f(x-h)+f(x)}{h^2} + O(h)$ *Différence arrière d'ordre 1*
$f''(x) = \dfrac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h^2} + O(h)$ *Différence avant d'ordre 1*
$f''(x) = \dfrac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2} + O(h^2)$ *Différence centrée d'ordre 2*

- Extrapolation de Richardson : $Q_{exa} = \dfrac{2^n Q_{app}(\frac{h}{2}) - Q_{app}(h)}{(2^n-1)} + O(h^{n+1})$
- Formule des trapèzes :

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left(f(x_0) + 2\left[f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})\right] + f(x_n)\right) - \frac{(b-a)}{12} f''(\eta)h^2$$

- Formule de Simpson 1/3 :

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \cdots$$
$$+ 4f(x_{2n-3}) + 2f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})) - \frac{(b-a)}{180} f''''(\eta) h^4$$

– Formule de Simpson 3/8 :

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{3h}{8}(f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + 2f(x_3) + 3f(x_4) + \cdots$$
$$+ 2f(x_{3n-3}) + 3f(x_{3n-2}) + 3f(x_{3n-1}) + f(x_{3n})) - \frac{(b-a)f''''(\eta)}{80} h^4$$

– Intégration de Gauss (les w_i et t_i seront fournis si nécessaire) :

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{(b-a)}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{(b-a)t + (a+b)}{2}\right) dt = \frac{(b-a)}{2} \int_{-1}^1 g(t)dt \simeq \frac{(b-a)}{2} \sum_{i=1}^n w_i g(t_i)$$

Équations différentielles.

– Taylor (ordre 2) : $y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) + \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial f(t_n, y_n)}{\partial t} + \frac{\partial f(t_n, y_n)}{\partial y} f(t_n, y_n)\right)$

– Euler modifiée (ordre 2) : $\hat{y} = y_n + hf(t_n, y_n)$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(f(t_n, y_n) + f(t_n + h, \hat{y})\right)$$

– Point milieu (ordre 2) : $k_1 = hf(t_n, y_n)$

$$y_{n+1} = y_n + h\left(f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2})\right)$$

– Runge-Kutta d'ordre 4 :

$$\begin{aligned}
k_1 &= hf(t_n, y_n) \\
k_2 &= hf(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}) \\
k_3 &= hf(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}) \\
k_4 &= hf(t_n + h, y_n + k_3) \\
y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)
\end{aligned}$$