GEL19962 : Analyse des signaux

Examen Partiel A2006 : Solutions

Département de génie électrique et de génie informatique

Question 1 (15 pts)

Partie A (4 pts)

On pose la fonction $f(t) = \cos(100\pi t) \cdot \text{Rect}(t/2)$ pour laquelle on demande d'abord de tracer la fenêtre multipliant le cosinus. Il s'agit ici d'un rectangle de largeur 2.

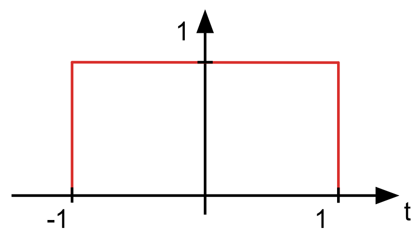

Fig. 1 – Enveloppe multipliant le cosinus de la fonction $f(t)$.

Par la suite, on demande de calculer **et tracer** la Transformation de Fourier (TF) $F(\omega)$ de $f(t)$.

$$\begin{aligned} f(t) &= \cos(100\pi t)\text{Rect}(t/2)\,, \\ &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}100\pi t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}100\pi t}}{2}\text{Rect}(t/2)\,, \\ &= \frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}100\pi t}\text{Rect}(t/2) + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}100\pi t}\text{Rect}(t/2)\right]\,. \end{aligned}$$

De cette expression, on peut facilement retrouver la TF recherchée utilisant la TF connue du rectangle et la propriété du décalage fréquentiel :

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{1}{2}\left[2\text{Sa}(\omega - 100\pi) + 2\text{Sa}(\omega + 100\pi)\right]\,, \\ &= \text{Sa}(\omega - 100\pi) + \text{Sa}(\omega + 100\pi)\,. \end{aligned}$$

Il s'agit d'une somme de deux Sa décalés à $\pm 100\pi$, tel qu'illustré à la figure 2.

On demande ensuite de calculer la largeur entre les premiers zéros de chaque côté du lobe principal de $F(\omega)$, autours de $\omega_0 = 100\pi$. Bien entendu, le décalage n'affecte pas la largeur de la fonction (ce n'est pas une dilatation). Ceci revient à calculer la largeur pour $\text{Sa}(\omega)$, ou pour $\sin(\omega)/\omega$. Cette fonction tombe à zéro lorsque le sinus égale zéro, c'est-à-dire à $\pm\pi$.

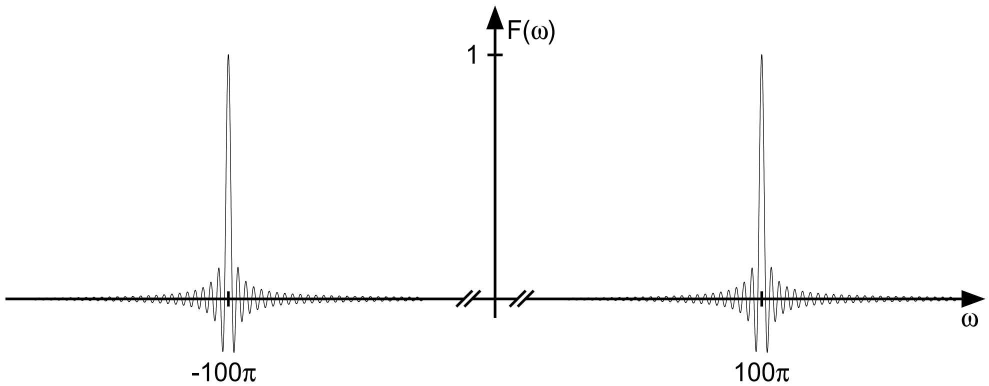

FIG. 2 – Transformée de Fourier $F(\omega)$ de la fonction $f(t)$.

La largeur sera donc de 2π.

Le taux de descente des lobes secondaires dépends de l'ordre des discontinuités. Comme la fonction $f(t)$ est elle-même discontinue, les lobes décroîtront en $1/\omega$.

Partie B (4 pts)

On donne maintenant $g(t) = \cos(100\pi t)\cdot\mathrm{Tri}(t)$. Il s'agit d'un cosinus avec une enveloppe en triangle de largeur 2, tel qu'indiqué à la figure suivante :

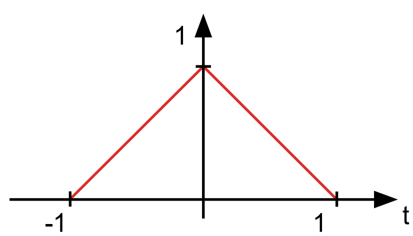

FIG. 3 – Enveloppe multipliant le cosinus de la fonction $g(t)$.

Il est possible de trouver la TF $G(\omega)$ de $g(t)$ de la même manière qu'en (A) :

$$\begin{aligned} g(t) &= \cos(100\pi t)\mathrm{Tri}(t)\,, \\ &= \frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}100\pi t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}100\pi t}\right]\mathrm{Tri}(t)\,, \\ &= \frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}100\pi t}\mathrm{Tri}(t) + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}100\pi t}\mathrm{Tri}(t)\right]\,, \end{aligned}$$

ce qui donne, après avoir effectué la TF :

$$F(\omega) = \frac{1}{2}\mathrm{Sa}^2\left(\frac{\omega - 100\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}\mathrm{Sa}^2\left(\frac{\omega + 100\pi}{2}\right) .$$

On retrouve un spectre composé de deux Sa^2 décalés à $\pm 100\pi$. Ce spectre est illustré à la figure 4.

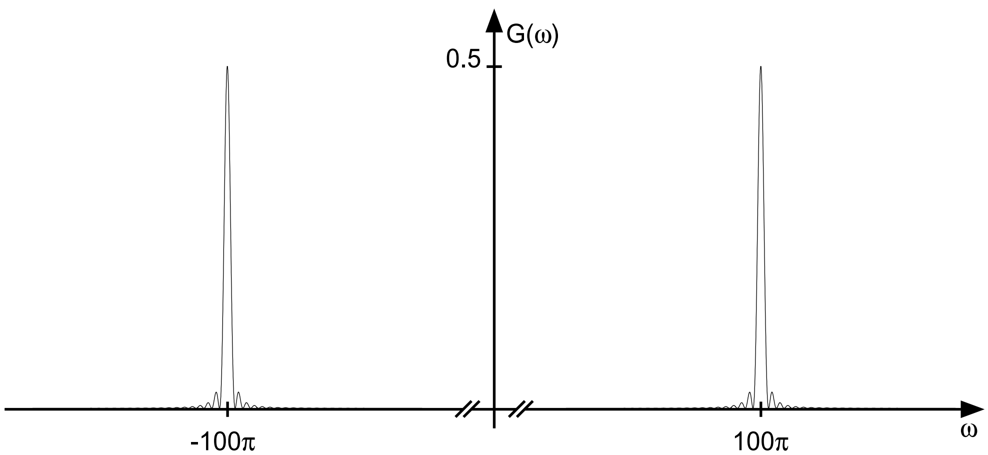

FIG. 4 – Transformée de Fourier $G(\omega)$ de la fonction $g(t)$.

Pour trouver la largeur entre les premiers zéros, on peut procéder comme en (A) et évaluer cette largeur pour la fonction non décalée. Trouver les premiers zéros de $\mathrm{Sa}(\omega/2)$ revient à trouver les zéros de $\sin(\omega/2)$. Ils se retrouvent à $\pm 2\pi$. La largeur entre les premiers zéros, la largeur du lobe principal, sera alors de 4π.

Puisque la dérivée première $g'(t)$ de la fonction $g(t)$ est discontinue, mais que $g(t)$ ne possède pas de discontinuité, le taux de décroissance asymptotique des lobes secondaires sera en $1/\omega^2$.

Partie C (4 pts)

On pose finalement $h(t) = \cos(100\pi t) \cdot \cos(\pi t/2) \cdot \mathrm{Rect}(t/2)$. Il s'agit encore une fois du même cosinus, mais cette fois avec une fenêtre elle aussi en cosinus. Cette fenêtre est décrite par la figure 5.

Le même travail de décomposition des fonctions trigonométriques en exponentielles utilisé depuis le début du problème peut être réutilisé ici encore une fois pour déterminer la transformée de Fourier $H(\omega)$ de $h(t)$:

$$\begin{aligned}
h(t) &= \cos(100\pi t)\cos(\pi t/2)\mathrm{Rect}(t/2) \, , \\
&= \frac{1}{4}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}100\pi t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}100\pi t}\right]\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi t/2} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi t/2}\right]\mathrm{Rect}(t/2) \, , \\
&= \frac{1}{4}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}100.5\pi t} + \mathrm{e}^{\mathrm{j}99.5\pi t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}99.5\pi t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}100.5\pi t}\right]\mathrm{Rect}(t/2) \, .
\end{aligned}$$

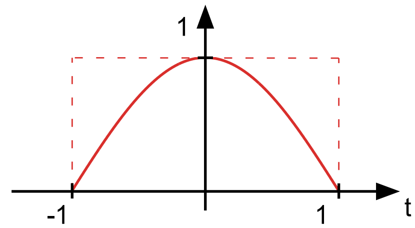

FIG. 5 – Enveloppe multipliant le cosinus de la fonction $h(t)$.

Utilisant encore une fois les mêmes propriétés, on peut trouver la TF de cette expression :

$$F(\omega) = \frac{2}{4}\left[\mathrm{Sa}(\omega - 100.5\pi) + \mathrm{Sa}(\omega - 99.5\pi) + \mathrm{Sa}(\omega + 99.5\pi) + \mathrm{Sa}(\omega + 100.5\pi)\right]$$

On remarque que la fonction $F(\omega)$ est composée de deux paires de Sa centrés sur $\pm 100\pi$. On doit aussi remarquer que l'espacement entre les deux Sa de chaque paire est plus petit que la largeur du lobe principal de ces Sa. Aussi, pour chacune de ces deux paires, les zéros des deux Sa sont superposés. Ceci donne le résultat illustré à la figure 6.

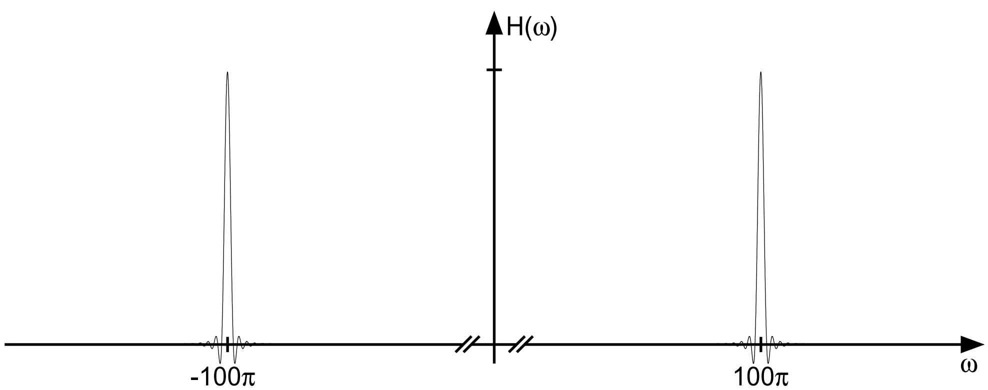

FIG. 6 – Transformée de Fourier $H(\omega)$ de la fonction $h(t)$.

Pour trouver la largeur entre les premiers zéros, on peut d'abord trouver à quelle fréquence $\mathrm{Sa}(\omega - 99.5\pi)$ tombe à zéro. Ceci se produira lorsque $\sin(\omega - 99.5\pi)$ est nul, c'est-à-dire à 98.5π. Similairement, $\mathrm{Sa}(\omega + 100.5\pi)$ aura comme premier zéro, de l'autre côté de la fréquence de 100π, 101.5π. La largeur est donc de $101.5\pi - 98.5\pi = 3\pi$.

Encore une fois, comme la dérivée première de $h(t)$ est discontinue, mais pas $h(t)$ elle-même, le taux de décroissance asymptotique sera alors de $1/\omega^2$.

Partie D (1 pts)

En observant les spectres obtenus, on est en mesure de constater que plus le lobe principal est large, plus le taux de descente des lobes secondaires peut être accentué. Cela va de soit puisqu'un lobe principal plus large contiendra une plus grande fraction de l'énergie et il en restera moins pour les lobes secondaires.

Le cas de la fenêtre en cosinus est intéressant. Il permet d'obtenir le même taux de décroissance que la fenêtre en triangle tout en ayant une largeur du lobe principal plus faible. Selon l'application visée en fenêtrage, il peut être intéressant, voir même impératif, de minimiser la largeur du lobe principal tout en cherchant à diminuer les lobes secondaires.

La figure 7 présente le détail des trois cas en (A), (B) et (C) pour mettre en évidence le comportement des lobes secondaires et du lobe principal.

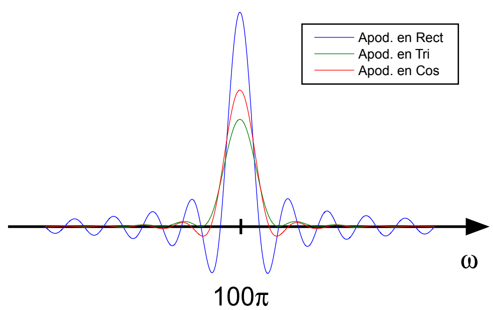

FIG. 7 – Comparaison des fonctions $F(\omega)$ (apodisation en Rectangle), $G(\omega)$ (apodisation en Triangle) et $H(\omega)$ (apodisation en Cosinus).

Partie E (2 pts)

Les trois fonctions $f(t)$, $g(t)$ et $h(t)$, étant non périodiques à cause du fenêtrage utilisé, seront donc à énergie finie et ˆ puissance nulle.

Question 2 (5 pts)

On demande de calculer la transformation de Fourier (TF) de $f(t) = 1/t$. Ceci peut se résoudre en utilisant les propriétés connues de la TF. Ces propriétés étaient données dans la table de formules à l'examen.

$$
\begin{aligned}
f(t) &= 1/t\,, \\
f(t) &\Longleftrightarrow F(\omega)\,, \\
\mathrm{Sgn}(t) &\Longleftrightarrow \frac{2}{\mathrm{j}\omega}\,,
\end{aligned}
$$

or, la propriété de la dualité stipule que :

$$
F(t) \Longleftrightarrow 2\pi f(-\omega)\,,
$$

ce qui nous permet d'écrire :

$$
\frac{2}{\mathrm{j}t} \Longleftrightarrow 2\pi \mathrm{Sgn}(-\omega)\,,
$$

d'où :

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{t} &\Longleftrightarrow \mathrm{j}\pi \mathrm{Sgn}(-\omega)\,, \\
\frac{1}{t} &\Longleftrightarrow -\mathrm{j}\pi \mathrm{Sgn}(\omega)\,.
\end{aligned}
$$

Question 3 (15 pts)

Partie A (6 pts)

On demande de calculer la TF de la fonction périodique $f(t)$ composé d'un triangle de hauteur 1 allant de $-a$ à b, avec son sommet au point 0 et se répétant à tous les T.

Pour trouver cette TF, on doit d'abord identifier la fonction restreinte $f_r(t)$. Cette fonction restreinte et sa dérivé première sont identifiées à la figure 8.

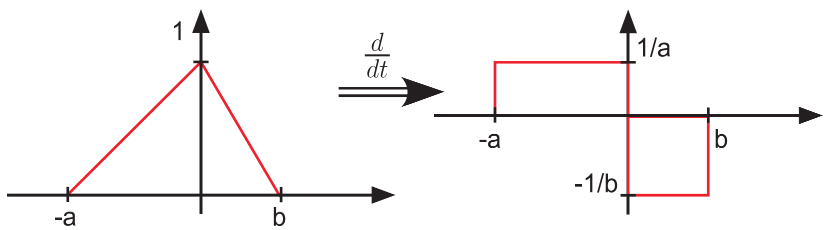

FIG. 8 – Fonction restreinte $f_r(t)$ et sa dérivée $f_r'(t)$.

Ainsi, on a :

$$f_r'(t) = \frac{1}{a}\mathrm{Rect}\left(\frac{t+a/2}{a}\right) - \frac{1}{b}\mathrm{Rect}\left(\frac{t+b/2}{b}\right) ,$$

expression dont la transformée de Fourier se trouve facilement avec l'aide des transformations données dans la table en annexe de l'examen :

$$\dot{F}_r(\omega) = \frac{1}{a}a\mathrm{Sa}(\frac{\omega a}{2})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\omega a}{2}} - \frac{1}{b}b\mathrm{Sa}(\frac{\omega b}{2})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega b}{2}} ,$$

ce qui nous donne, utilisant la propriété de la dérivation :

$$F_r(\omega) = \frac{1}{\mathrm{j}\omega}\left[\mathrm{Sa}(\frac{\omega a}{2})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\omega a}{2}} - \mathrm{Sa}(\frac{\omega b}{2})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega b}{2}}\right] .$$

Pour trouver les coefficients de Fourier, on utilise la relation entre ceux-ci et la TF de la fonction restreinte :

$$\begin{aligned} F(n) &= \frac{F_r(n\omega_0)}{T_0} , \\ &= \frac{1}{T_0}\frac{1}{\mathrm{j}n\omega_0}\left[\mathrm{Sa}(\frac{n\omega_0 a}{2})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{n\omega_0 a}{2}} - \mathrm{Sa}(\frac{n\omega_0 b}{2})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{n\omega_0 b}{2}}\right] . \end{aligned}$$

La TF de la fonction périodique sera enfin donnée par la série de Fourier que l'on retrouve à partir de l'expression des coefficients de Fourier :

$$
\begin{aligned}
F(\omega) &= \sum_n 2\pi F(n)\delta(\omega - n\omega_0)\,, \\
&= \sum_n \frac{2\pi}{T_0\,\mathrm{j}n\omega_0}\left[\mathrm{Sa}(\frac{n\omega_0 a}{2})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{n\omega_0 a}{2}} - \mathrm{Sa}(\frac{n\omega_0 b}{2})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{n\omega_0 b}{2}}\right]\delta(\omega - n\omega_0)\,.
\end{aligned}
$$

En dérivant deux fois la fonction restreinte au départ (au lieu d'une fois), on arriverait plutôt au résultat équivalent suivant :

$$
F(\omega) = \sum_n \frac{2\pi}{T_0(\,\mathrm{j}n\omega_0)^2}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_0 a}}{a} + \frac{\mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}n\omega_0 b}}{b} - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\right]\delta(\omega - n\omega_0)\,.
$$

Partie B (3 pts)

On demande vérifier le résultat de (A) pour $T_0 = 2a = 2b$. Dans ce cas, on a $a = b$. On remarque que dans ce cas, la fonction restreinte devient la fonction triangle de largeur $2a$ (ou $2b$, c'est équivalent). Partant de la fonction restreinte trouvé en (A), on a :

$$
F_r(\omega) = \frac{1}{\mathrm{j}\omega}\left[\mathrm{Sa}(\frac{\omega a}{2})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\omega a}{2}} - \mathrm{Sa}(\frac{\omega b}{2})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega b}{2}}\right]\,,
$$

ce qui peut être réécrit comme :

$$
\begin{aligned}
F_r(\omega) &= \frac{1}{\mathrm{j}\omega}\left[\mathrm{Sa}(\frac{\omega a}{2})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\omega a}{2}} - \mathrm{Sa}(\frac{\omega a}{2})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega a}{2}}\right]\,, \\
&= \frac{1}{\mathrm{j}\omega}\mathrm{Sa}(\frac{\omega a}{2})\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\omega a}{2}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega a}{2}}\right]\,, \\
&= \frac{2}{\omega}\mathrm{Sa}(\frac{\omega a}{2})\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\omega a}{2}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega a}{2}}}{2\,\mathrm{j}}\right]\,, \\
&= \frac{2}{\omega}\mathrm{Sa}(\frac{\omega a}{2})\sin\left(\frac{\omega a}{2}\right)\,, \\
&= a\mathrm{Sa}(\frac{\omega a}{2})\frac{\sin\left(\frac{\omega a}{2}\right)}{\frac{\omega a}{2}}\,, \\
&= a\mathrm{Sa}^2(\frac{\omega a}{2})\,.
\end{aligned}
$$

Or, on sait que :

$$
a\mathrm{Sa}^2(\frac{\omega a}{2}) \Longleftrightarrow \mathrm{Tri}\left(\frac{t}{a}\right)\,,
$$

ce qui correspond bien à un triangle de largeur 2a.

Partie C (4 pts)

On demande de calculer l'énergie dans une période. On pourrait être porté à croire que l'énergie est infinie puisque le signal est périodique. Or, on demande bien l'énergie **dans une seule période**.

$$
\begin{aligned}
E &= \int_{T_0} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t\,, \\
E &= E_1 + E_2\,,
\end{aligned}
$$

avec :

$$
\begin{aligned}
E_1 &= \int_{-a}^{0} \left(\frac{t}{a}+1\right)^2 \mathrm{d}t = \int_{-a}^{0} \left(\frac{t^2}{a^2}+\frac{2t}{a}+1\right) \mathrm{d}t\,, \\
&= \left[\frac{t^3}{3a^2}+\frac{2t^2}{2a}+t\right]_{-a}^{0}\,, \\
&= \frac{a^3}{3a^2}-\frac{2a^2}{2a}+a = \frac{a}{3}\,,
\end{aligned}
$$

et :

$$
\begin{aligned}
E_2 &= \int_{0}^{b} \left(1-\frac{t}{b}\right)^2 \mathrm{d}t = \int_{0}^{b} \left(\frac{t^2}{b^2}-\frac{2t}{b}+1\right) \mathrm{d}t\,, \\
&= \left[\frac{t^3}{3b^2}-\frac{2t^2}{2b}+t\right]_{0}^{b}\,, \\
&= \frac{b^3}{3b^2}-\frac{2b^2}{2b}+b = \frac{b}{3}\,.
\end{aligned}
$$

donc, on a :

$$
E = \frac{a}{3}+\frac{b}{3}\,.
$$

Partie D (2 pts)

On demande la puissance totale de $f(t)$. La puissance sera simplement l'énergie d'une période normalisée sur sa durée.

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{1}{T_0}\int_{T_0} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t\,, \\
&= \frac{1}{T_0}E\,, \\
&= \frac{1}{T_0}\left[\frac{a}{3}+\frac{b}{3}\right]\,.
\end{aligned}
$$

Question 4 (5 pts)

On demande de calculer $f(t)$ si $F(\omega) = \mathrm{j}\frac{\sin^2(\omega)}{\omega}$. D'abord, on peut observer que :

$$\mathrm{Tri}(t/2) \Longleftrightarrow 2\mathrm{Sa}^2(\omega) = 2\frac{\sin^2(\omega)}{\omega^2}\,.$$

Utilisant la propriété de la dérivation, on trouve que :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Tri}(t/2) \Longleftrightarrow 2\,\mathrm{j}\omega\frac{\sin^2(\omega)}{\omega^2} = 2\,\mathrm{j}\frac{\sin^2(\omega)}{\omega}\,.$$

En divisant de part et d'autre par 2, on trouve directement que :

$$F(\omega) = \mathrm{j}\frac{\sin^2(\omega)}{\omega} \Longleftrightarrow \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Tri}(t/2) = f(t)\,.$$

La dérivée de la fonction triangle donnera lieu à deux rectangles. Ceci est illustré à la figure suivante :

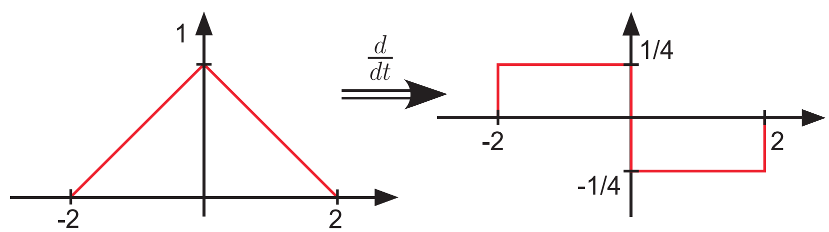

FIG. 9 – Dérivation de la fonction $0.5\mathrm{Tri}(t/2)$.

On voit alors que $f(t)$ est donné par :

$$f(t) = \frac{1}{4}\mathrm{Rect}\left(\frac{t+1}{2}\right) - \frac{1}{4}\mathrm{Rect}\left(\frac{t-1}{2}\right)\,.$$

Pour ceuxqui auraient préféré utiliser une décomposition de la fonction trigonométrique, la solution n'était pas beaucoup plus longue :

$$
\begin{aligned}
F(\omega) &= \frac{\mathrm{j}\sin^2(\omega)}{\omega}\,, \\
&= \mathrm{j}\left[\frac{1-\cos(2\omega)}{2\omega}\right], \\
&= \frac{\mathrm{j}}{2\omega} - \frac{\mathrm{j}\cos(2\omega)}{2\omega}\,, \\
&= \frac{-1}{2\,\mathrm{j}\omega} + \frac{\mathrm{e}^{2\,\mathrm{j}\omega}}{4\,\mathrm{j}\omega} + \frac{\mathrm{e}^{-2\,\mathrm{j}\omega}}{4\,\mathrm{j}\omega}\,, \\
&\Longleftrightarrow -\frac{1}{4}\mathrm{Sgn}(t) + \frac{1}{8}\mathrm{Sgn}(t+2) + \frac{1}{8}\mathrm{Sgn}(t-2)\,,
\end{aligned}
$$

ce qui revient à une autre façon d'écrire le résultat avec les deux Rect obtenus précédemment. Il aurait aussi été possible de résoudre le problème de la même manière sans utiliser l'identité trigonométrique de départ et en décomposant immédiatement le sinus en termes exponentiels. Cette solution ne nécessite qu'un peu plus de brassage de termes exponentiels et n'est guère plus long. Par contre, avec l'augmentation du nombre de manipulations de signes, le risque d'erreur augmente considérablement.