

GEL10280: Communications numériques **2010 Examen Partiel**

*Vendredi le 10 mars 2010; Durée: 13h30 à 15h20
Deux feuilles de documentation fournies; une calculatrice permise*

Problème 1 (20 points)

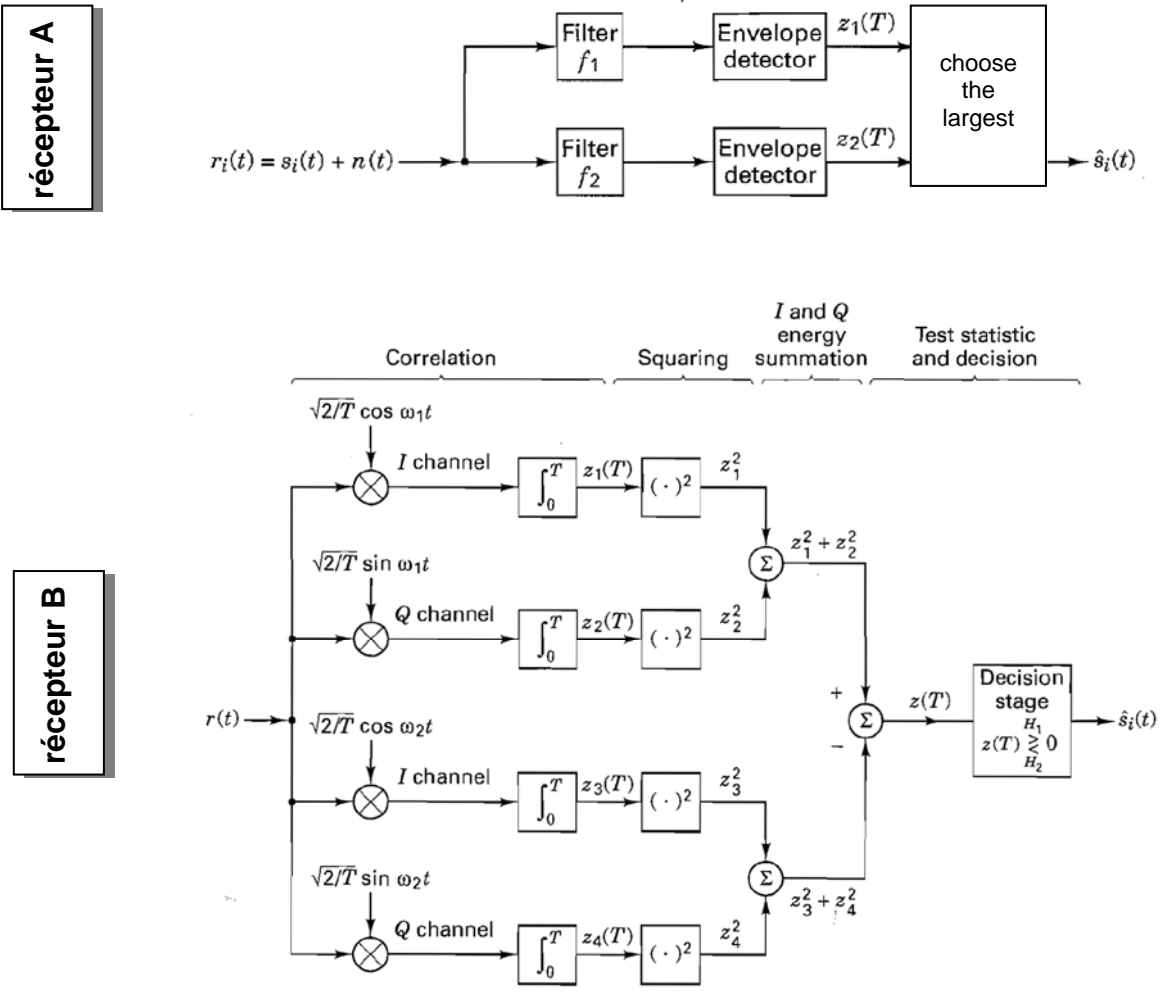
- A. (5 points) Donnez la définition d'une impulsion Nyquist et montrez que l'impulsion Raised Cosine est une impulsion Nyquist.
- B. (5 points) Donnez en mots (pas en équation), la définition de la capacité d'un canal.
- C. (10 points) Donnez la définition d'une modulation binaire orthogonale, et un exemple d'une modulation binaire orthogonale excluant OOK et FSK.

Problème 2 (30 points)

Considérez le graphique du « Plan de l'efficacité spectrale ».

- A. (20 points) Trouvez les coordonnées de 16QAM (carré), 16PSK et 16FSK (cohérent) pour une probabilité d'erreur de 10^{-8} .
- B. (10 points) Proposez un format de modulation pour les radioamateurs qui veulent envoyer un signal du point A au point B via une réflexion sur la lune. Pour cette application les signaux reçus sont très faibles (en fonction de la distance), l'information est très minimale (un taux de transmission très faible est acceptable) et la largeur de bande est limitée à $\sim 1000\text{Hz}$. Justifiez votre recommandation.

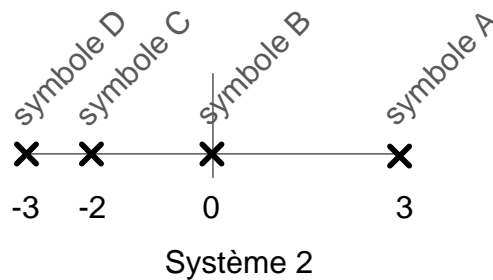
Problème 3 (15 points)



- A. (5 points) Pour quel format de modulation peut-on utiliser ces deux récepteurs ?
- B. (10 points) Considérez la performance BER vs. SNR des récepteurs. Classez les récepteurs et justifiez votre réponse.
- Les deux ont la même performance et cette performance est optimale.
 - Les deux ont la même performance et cette performance n'est pas optimale.
 - Le récepteur A a une meilleure performance, mais n'est pas optimal.
 - Le récepteur B a une meilleure performance, mais n'est pas optimal.
 - Le récepteur A a une meilleure performance et le récepteur est optimal.
 - Le récepteur B a une meilleure performance et le récepteur est optimal.

Problème 4 (35 points)

Considérez le système 4PAM suivant. Supposons que les symboles ont tous la même probabilité a priori.

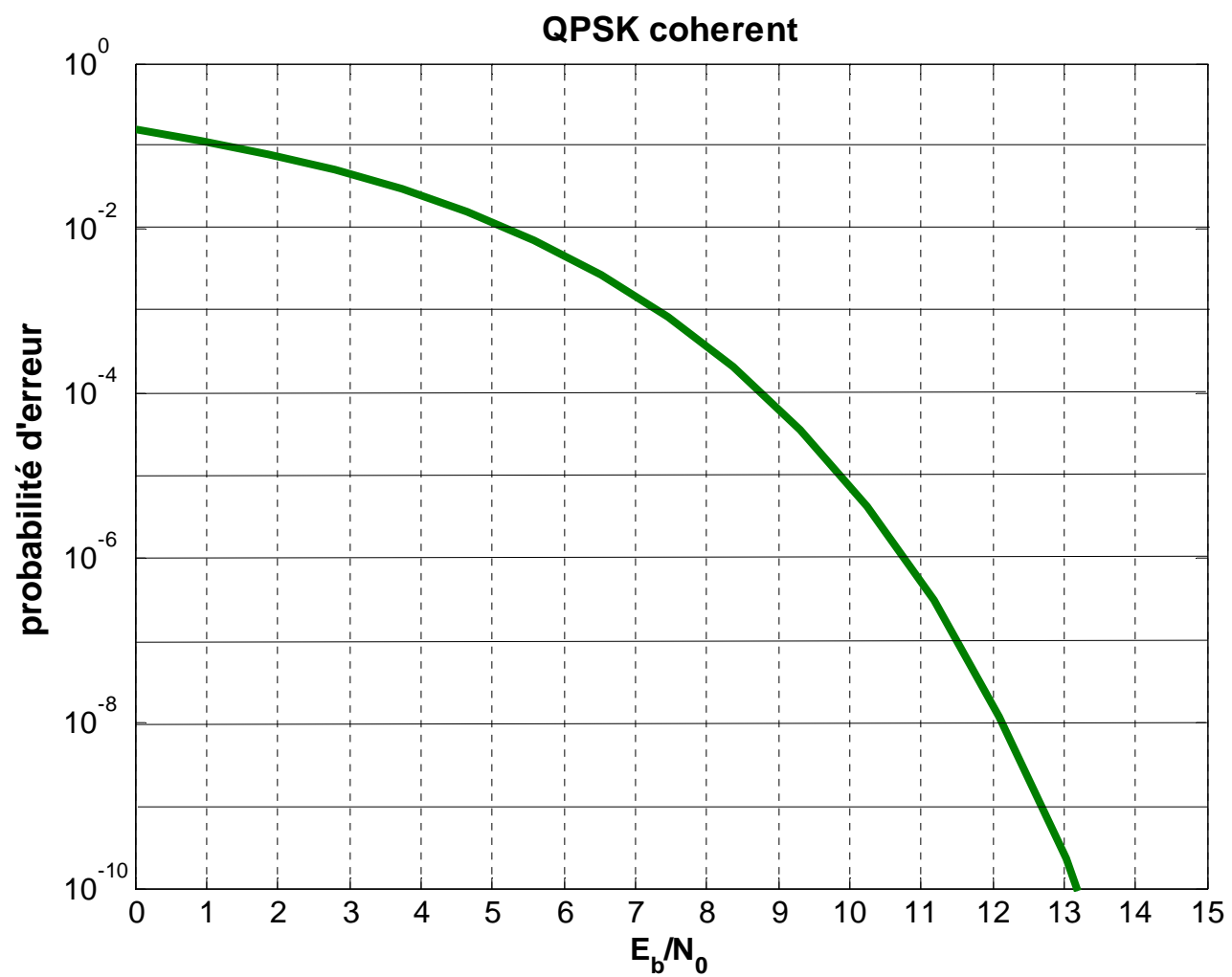


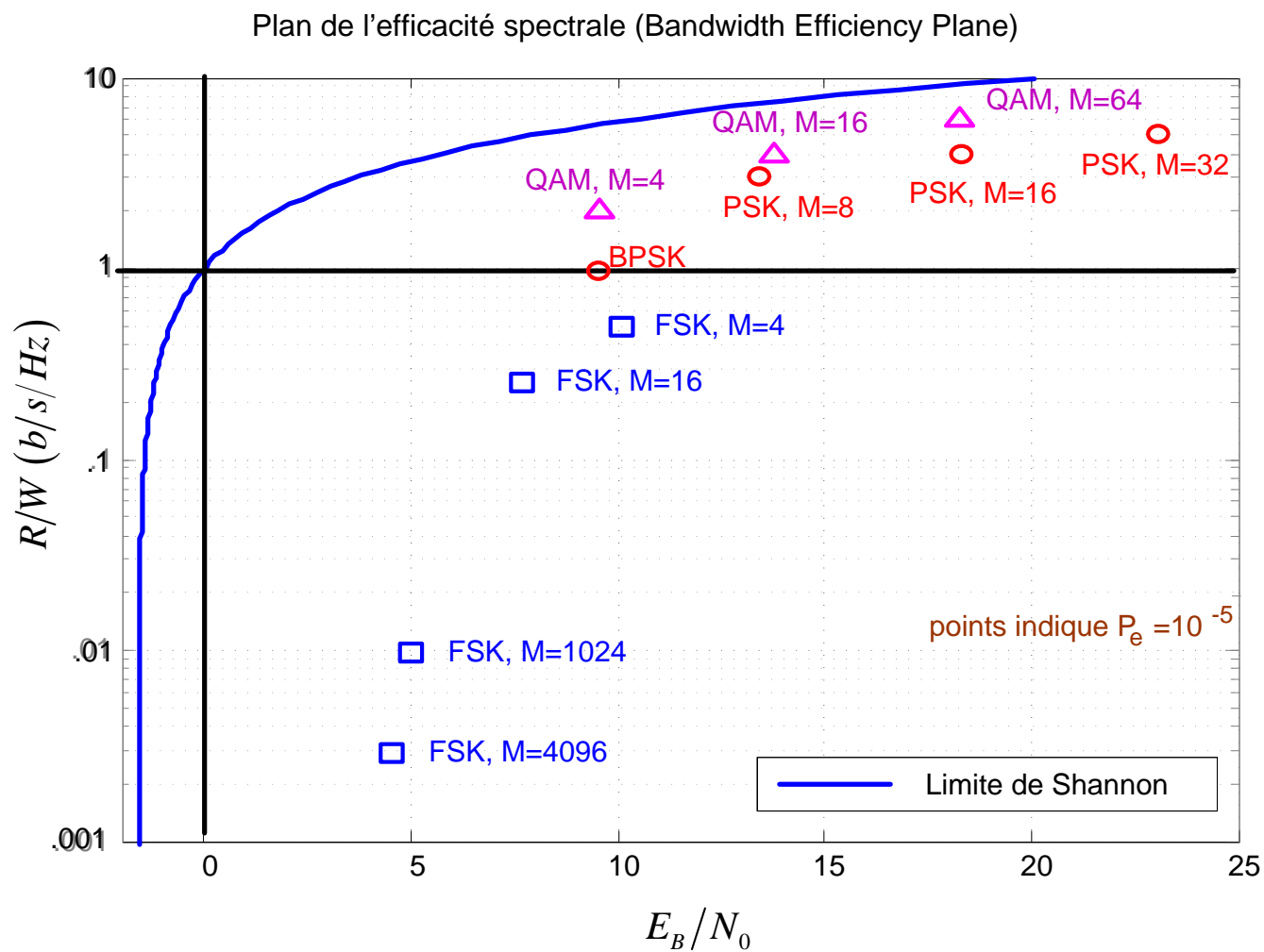
Donnez

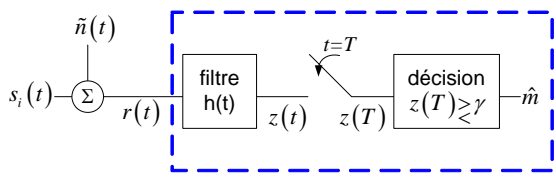
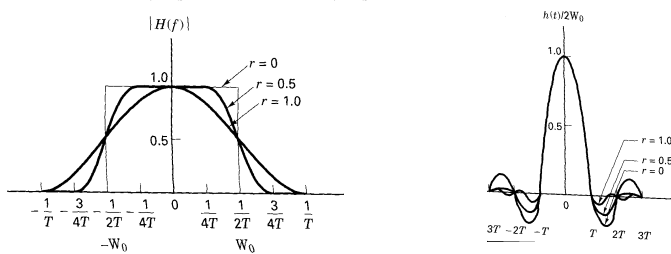
- A. (5 points) Les seuils de décision pour chaque symbole.
- B. (15 points) La probabilité d'erreur en fonction de E_b/N_0 .
- C. (5 points) L'efficacité spectrale.

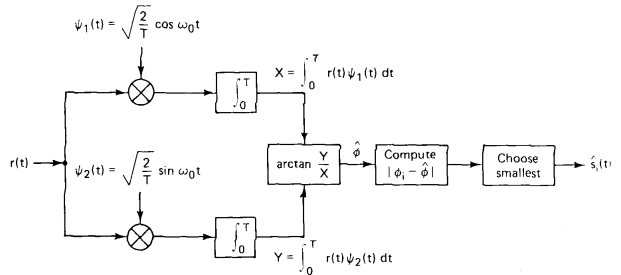
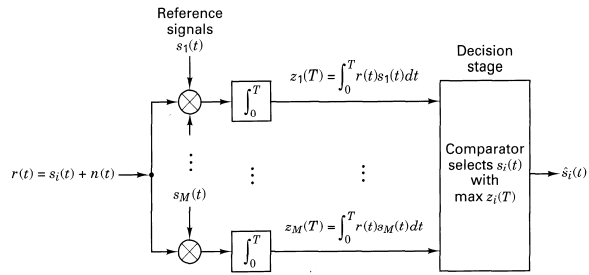
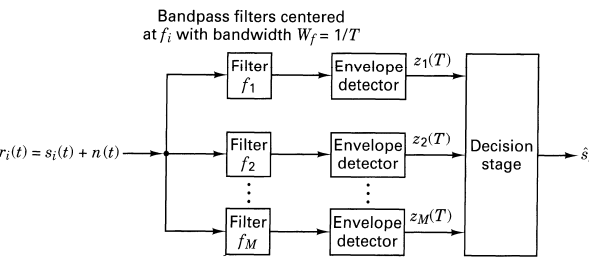
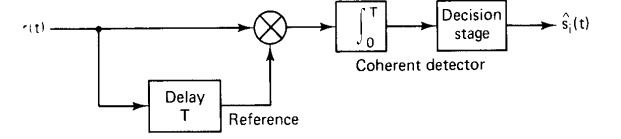
Supposons que les trois symboles B, C et D ont la même probabilité a priori, mais que le symbole A est 7 fois plus probable que le symbole B. Supposons que nous calculons les nouveaux seuils de décision en utilisant une approximation binaire, c.-à-d., en prenant les symboles deux à la fois.

- D. (10 points) Sans nécessairement faire un calcul exact, donnez la méthodologie et une description graphique sur la façon de trouver le nouveau seuil de décision pour chaque symbole.





<p>Récepteur d'échantillonnage</p> 	<p>MAP: i qui maximise $p(z s_i) p(s_i)$ i qui minimise $\ \mathbf{r} - \mathbf{s}_i\ ^2 - N_0 \ln P(s_i)$ $P(s_i)$ = probabilité a priori de symbole \mathbf{s}_i</p> <p>ML: i qui maximise $p(z s_i)$ i qui minimise $\ \mathbf{r} - \mathbf{s}_i\ ^2$</p>
<p>Conversion de l'espace I/Q vers espace du signal</p> $\begin{pmatrix} \tilde{a}_n^I, \tilde{a}_n^Q \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{M \cdot E_s}{\sum_{i=1}^M \left[(a_n^I)^2 + (a_n^Q)^2 \right]}} \begin{pmatrix} a_n^I, a_n^Q \end{pmatrix}$ <p>coordonnées, espace du signal (blue arrow pointing to $\tilde{a}_n^I, \tilde{a}_n^Q$)</p> <p>coordonnées, espace I/Q (red arrow pointing to a_n^I, a_n^Q)</p>	<p>Énergie moyenne</p> $E_{moy} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \ \mathbf{s}_i\ ^2$ $= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M [\text{énergie du signal } i]$ <p>Énergie par bit v. énergie par symbole</p> $E_b \log_2 M = E_s$
$P_e(BPSK) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$ $P_e(OOK) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$ $P_e(QPSK) \approx 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$ <p>Perte par rapport à QPSK</p> $d_{\min} = \sqrt{x} \sqrt{2} \quad \text{perte} = -10 \log_{10} x$	<p>Borne d'union</p> $P_e \approx \frac{2K}{M} Q\left(\frac{D_{\min}}{\sqrt{2N_0}}\right) = \frac{2K}{M} Q\left(d_{\min} \sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$ <p>K est le nombre des paires des signaux séparés par la distance minimale D_{\min}</p> <p>Distance minimale dans l'espace du signal</p> $D_{\min} = \min_{i \neq k} \ \mathbf{s}_i - \mathbf{s}_k\ \quad \text{et} \quad d_{\min} = \frac{D_{\min}}{\sqrt{2E_b}}$
<p>Raised cosine</p> $v(t) = \frac{\sin(\pi t/T_s) \cos(r\pi t/T_s)}{\pi t/T_s \cdot 1 - 4r^2 t^2/T_s^2}$ 	<p>Pour une modulation orthogonale</p> $P_e(\text{bit}) = P_b = P_e(\text{symbol}) \frac{M/2}{M-1}$ <p>Pour une modulation non-orthogonale avec codage de gray</p> $P_e(\text{bit}) = P_b = \frac{P_e(\text{symbol})}{\log_2 M}$ <p>Efficacité spectrale</p> $\eta = \frac{R_b}{W} = \frac{1}{T_b} \frac{1}{W} \text{ bits/s}$

<p>MPSK cohérent $\eta = \log_2 M^\dagger$</p>  $P_e(M) \approx 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}} \sin \frac{\pi}{M}\right) = 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_b \log_2 M}{N_0}} \sin \frac{\pi}{M}\right)$ $d_{\min} = \sqrt{2 \sin^2 \frac{\pi}{M} \log_2 M}$	<p>MFSK cohérent $\eta = \frac{2 \log_2 M}{M+1}^\dagger$</p>  $P_e = (M-1)Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) = (M-1)Q\left(\sqrt{\frac{E_b \log_2 M}{N_0}}\right)$ $d_{\min} = \sqrt{\log_2 M}$ <p style="text-align: right;">Séparation minimale $1/2T_s$</p>
<p>QAM $\eta = \log_2 M^\dagger$ cas rectangulaire (carrée) $M=L^2$</p> $P_e = 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right)Q\left(\sqrt{\frac{3 \log_2 M}{(M-1)} \frac{E_b}{N_0}}\right)$ $d_{\min} = \sqrt{\frac{6 \log_2 L}{L-1}}$	<p>MFSK incohérent $\eta = \frac{\log_2 M}{M}^\dagger$</p>  $P_e(BFSK) = \frac{1}{2} e^{-E_b/2N_0}$ <p>~1 dB de perte entre BFSK cohérente et incohérente</p> <p style="text-align: right;">Séparation minimale $1/T_s$</p>
<p>DPSK incohérent $P_e = \frac{1}{2} e^{-E_b/N_0}$</p>  <p>~1 dB de perte entre DPSK et BPSK</p>	<p>Processus Gram Schmidt</p> $\psi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{E_1}} s_1(t) \text{ où } E_1 \triangleq \int_0^T s_1^2(t) dt$ $\theta_2(t) \triangleq s_2(t) - \langle s_2(t), \psi_1(t) \rangle \psi_1(t)$ $E_2 \triangleq \int_0^T \theta_2^2(t) dt \quad \psi_2(t) = \frac{\theta_2(t)}{\sqrt{E_2}}$ <p>i. $\theta_i(t) = s_i(t) - \sum_{k=1}^{i-1} \langle s_i(t), \psi_k(t) \rangle \psi_k(t)$</p> $E_i \triangleq \int_0^T \theta_i^2(t) dt \quad \psi_i(t) = \frac{\theta_i(t)}{\sqrt{E_i}}$
<p>Loi de Shannon</p> $C = W \log_2(1 + SNR) \quad SNR = \frac{E_b}{N_0} \eta$ $\frac{E_b}{N_0} = \frac{W}{C} (2^{C/W} - 1) \quad \frac{C}{W} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{E_b}{N_0} \rightarrow -1.6 \text{ dB}$ <p>Relations trigonométriques</p> $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$ $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$ $\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - \sin^2 \theta$ $\tan \theta = \sin \theta / \cos \theta$	

† en supposant une impulsion Nyquist idéale