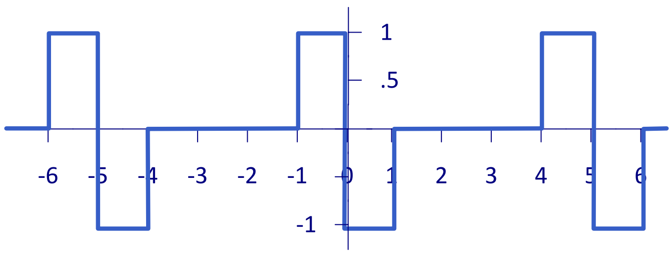
Mardi 25 octobre 2016; Durée: 13h30 à 15h20
Aucune documentation permise; une calculatrice permise

Problème 1 (28 points sur 100)

Trouvez la transformée de Fourier de la fonction périodique suivante :



$$f_p(t) = \begin{cases} 1 & -1 < t < 0 \\ -1 & 0 < t < 1 \end{cases}$$

$$f_p(t) = f_p(t - 5n) \quad \text{pout tout } n$$

Problème 2 (28 points sur 100)

A. (12 points) Trouvez la transformée de Fourier de $\text{Tri}(t-2)$. Tracez son spectre d'amplitude et son spectre de phase.

B. (12 points) Trouvez la transformée de Fourier de $\sin(50t)\text{Tri}(t)$. Tracez son spectre d'amplitude et son spectre de phase.

C. (4 points) Trouvez la transformée de Fourier de la première dérivée de la fonction $\text{Tri}(t)$.

Problème 3 (24 points sur 100)

En sachant que $\delta_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_0)$

A. Donnez une esquisse de $f(t) = \delta_2(t) \cdot \text{Rect}\left(\frac{t}{3}\right)$ et trouvez sa transformée de Fourier.

B. Donnez une esquisse de $g(t) = \delta_1(t) \cdot \text{Rect}\left(\frac{t}{3}\right)$ et trouvez sa transformée de Fourier.

C. Donnez une esquisse de $h(t) = \delta_{2/3}(t) \cdot \text{Rect}\left(\frac{t}{3}\right)$ et trouvez sa transformée de Fourier.

Problème 4 (20 points sur 100)

Trouvez la transformée de Fourier de la fonction $f(t) = \frac{1}{t^2}$.

fonction temporelle	transformée
$\mathrm{Rect}\left(t/\tau\right)$ [1]	$\tau\,\mathrm{Sa}\left(\omega\tau/2\right)$
$\mathrm{Tri}\left(t/\tau\right)$ [2]	$\tau\,\mathrm{Sa}^2\left(\omega\tau/2\right)$
$\delta\left(t\right)$	1
1	$2\pi\delta\left(\omega\right)$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta\left(\omega-\omega_0\right)$
$\mathrm{U}(t)$	$1/j\omega+\pi\delta\left(\omega\right)$
$\mathrm{Sgn}(t)$	$2/j\omega$
$\delta_{T_0}\left(t\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta\left(t-nT_0\right)$	$\omega_0\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega-n\omega_0\right)$
$e^{-\beta t}\,\mathrm{U}\left(t\right)$	$\dfrac{1}{\beta+j\omega}$
$e^{-\beta\lvert t\rvert}$	$\dfrac{2\beta}{\beta^2+\omega^2}$
$\delta'\left(t\right)$	$j\omega$
$\delta''\left(t\right)$	$\left(j\omega\right)^2$

domaine temporelle	domaine fréquentiel
$f\left(t\right)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F\left(\omega\right)e^{j\omega t}d\omega$	$F\left(\omega\right)=\int_{-\infty}^{\infty}f\left(t\right)e^{-j\omega t}dt$
$f(t)$	$F\left(\omega\right)$
$F\left(t\right)$	$2\pi f\left(-\omega\right)$
$f\left(t+a\right)$	$e^{ja\omega}F(\omega)$
$e^{jbt}f(t)$	$F\left(\omega-b\right)$
$f\left(at\right)$	$\dfrac{1}{\lvert a\rvert}F\left(\dfrac{\omega}{a}\right)$
$t^n f\left(t\right)$	$\left(j\right)^n\dfrac{d^n}{d\omega^n}F\left(\omega\right)$
$\dfrac{d^n}{dt^n}f\left(t\right)$	$\left(j\omega\right)^n F\left(\omega\right)$
$f(t)$ pas continue	décroissance $1/\omega$
$f\left(t\right)$ continue $f'\left(t\right)$ pas continue	décroissance $1/\omega^2$
$f\left(t\right)$, $f'\left(t\right)$ continue $f''\left(t\right)$ pas continue	décroissance $1/\omega^3$
$E=\int_{-\infty}^{+\infty}\lvert f(t)\rvert^2\,dt$	$E=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\lvert F\left(\omega\right)\right\rvert^2 d\omega$

---

[1] $\mathrm{Rect}\left(\dfrac{t-t_0}{\tau}\right)$ rectangle de hauteur un, centré sur $t=t_0$, et de longueur τ.

[2] $\mathrm{Tri}\left(\dfrac{t-t_0}{\tau}\right)$ triangle de hauteur un, τ centré sur $t=t_0$, avec un base de longueur 2τ.

$f(t) \quad \Leftrightarrow \quad F(\omega)=TF\{f(t)\}$ $F(\omega)=A(\omega)+jB(\omega)=\lvert F(\omega)\rvert e^{jArg(\omega)}$ $E(\omega)=\frac{1}{2\pi}\lvert F(\omega)\rvert^2$	
fonction réelle en temps	
$f(t)$ réelle $\Leftrightarrow \quad F^*(\omega)=F(-\omega)$	
paire	**impaire**
$A(\omega)=\mathrm{Re}\,F(\omega)$	$B(\omega)=\mathrm{Im}\,F(\omega)$
$\lvert F(\omega)\rvert$	$\mathrm{Arg}\,F(\omega)$
$f(t)=f_{paire}(t)+f_{impaire}(t)$	
$f_{paire}(t) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}\,F(\omega)$	$f_{impaire}(t) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Im}\,F(\omega)$

fonction delta, etc.
$f_p(t) \Leftrightarrow 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_{Série}(n)\,\delta(\omega-n\omega_0)$ $f_p(t)$ périodique avec période T_0, $T_0\omega_0=2\pi$ $F_{Série}(n)=\frac{1}{T_0}\cdot F_r(\omega)\big\rvert_{\omega=n\omega_0}$, $f_r(t)=\begin{cases} f_p(t) & \frac{-T_o}{2}<t<\frac{T_o}{2} \\ 0 & ailleurs \end{cases}$
$f'(a)=\left[\lim_{t\to a^+} f(t)-\lim_{t\to a^-} f(t)\right]\delta(t-a)$ $t=a$ est un point de discontinuité de $f(t)$
$h(t)\,\delta(t-t_0)=h(t_0)\,\delta(t-t_0)$ propriété d'échantillonnage
$x_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-nx_0)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi nx/x_0}$

$\int e^{ax} \quad dx=\frac{1}{a}e^{ax}$	$\int x\cos ax \quad dx=\frac{1}{a^2}\cos ax+\frac{x}{a}\sin ax$
$\int e^{bx}\sin ax \quad dx=\frac{1}{a^2+b^2}e^{bx}(b\sin ax-a\cos ax)$	$\int xe^{ax} \quad dx=\left(\frac{x}{a}-\frac{1}{a^2}\right)e^{ax}$
$\int e^{bx}\cos ax \quad dx=\frac{1}{a^2+b^2}e^{bx}(a\sin ax+b\cos ax)$	$\int x^2e^{ax} \quad dx=\left(\frac{x^2}{a}-\frac{2x}{a^2}+\frac{2}{a^3}\right)e^{ax}$
$\cos x=\frac{e^{jx}+e^{-jx}}{2}$	$e^{jx}=\cos x+j\sin x$
$\sin x=\frac{e^{jx}-e^{-jx}}{2j}$	$e^{jn\pi}=(-1)^n$
$\cos^2\theta=\frac{1}{2}[1+\cos 2\theta]$	$\cos\theta=\sin(\pi/2-\theta)$