EXAMEN PARTIEL 2

MAT-18996: analyse numérique pour l'ingénieur — Hiver 2008
Date: 29 avril, 18h30-20h20.

Remarques:

1) Documents admis: deux feuilles 8 1/2 $\times$ 11, recto-verso.
2) Seulement les calculatrices avec l'auto-collant de la Faculté seront admises.
3) Vous pouvez répondre aux questions dans l'ordre de votre choix, mais identifiez clairement les questions.
4) Pour chaque question on fournira le détail des calculs et du raisonnement. En l'absence de ces détails, une solution sera considérée comme nulle.
5) Déposez votre carte d'identité avec photo sur le coin de votre table.

Voici un extrait d'une table de noeuds et de poids des quadratures de Gauss.

n	Noeuds	Poids
2	-0.57735	1
	0.57735	1
3	-0.77460	0.55556
	0	0.88889
	0.77460	0.55556
4	-0.86114	0.34785
	-0.33998	0.65215
	0.33998	0.65215
	0.86114	0.34785
5	-0.90618	0.23693
	-0.53847	0.47863
	0	0.56889
	0.53847	0.47863
	0.90618	0.23693

Question 1. (4 + 4 + 4 + 4 points)

Répondre à chacune des questions suivantes. Justifier dans chacun des cas mais **les réponses doivent être brèves**.

(a) Quel est le nombre minimal de points de Gauss pour intégrer exactement

$$\int_1^2 x^8 - 2x^4 + 3x + 5\,dx$$

par la formule de quadrature de Gauss?

(b) Selon le terme d'erreur de la formule centrée pour la dérivée première $f'(x_0)$, déterminer le degré d'exactitude de cette formule, i.e. déterminer le plus haut degré du polynôme rendant la formule exacte.

(c) L'expression $S(x) = x^3$ est-elle l'équation de la spline naturelle qui interpole les points $(-1,-1), (0,0), (1,1)$?

(d) L'expression $S(x) = x$ est-elle l'équation de la spline naturelle qui interpole les points $(-1,-1), (0,0), (1,1)$?

Question 2. (4 + 6 + 6 points)

La longueur L de l'arc d'un ellipse de demi-axes a et b est donnée par la formule

$$L = 4a\,E(m)$$

où m correspond au rapport

$$m = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

et $E(m)$ est l'évaluation d'une certaine intégrale dite elliptique en fonction de m. On dispose d'une table de quelques valeurs de la fonction $E(m)$.

m	$E(m)$
0.0	1.571
0.1	1.531
0.2	1.489
0.3	1.445
0.4	1.399
0.5	1.351

On désire utiliser cette table pour estimer L avec $a = 5$ et $b = 4$.

a) Quels points avez-vous avantage à utiliser dans le cas de l'interpolation quadratique (polynôme de degré 2)? Justifier votre réponse.

b) Déterminer le polynôme d'interpolation quadratique, basé sur les noeuds de la sous-question (a), pour approximer $E(m)$ et estimer la valeur de L en $a = 5$ et $b = 4$.

c) Estimer l'erreur d'interpolation commise en (b) en utilisant la table ci-dessus pour approximer L.

Question 3. (4 + 6 + 6 + 4 points)

On désire résoudre l'équation différentielle suivante:

$$\begin{cases} y'(t) & = & t\,y(t), \\ y(0) & = & 2. \end{cases}$$

a) Montrer que la solution exacte de cette équation différentielle est donnée par

$$y(t) = 2\,e^{t^2/2}.$$

Pour les sous-questions b) et c), on prendra $h = 0.1$ et $t_n = nh$ pour $n = 0, 1, 2, \ldots$

b) Evaluer les approximations y_1 et y_2 fournies par la méthode de Taylor d'ordre 2.

c) Evaluer les approximations y_1 et y_2 fournies par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 (méthode du point milieu).

d) Comparer vos résultats avec la solution exacte au point t_2.

Question 4. (4 + 4 + 4 points)

Une expérience a produit les résultats suivants:

x	$f(x)$
0.8	0.5272
0.9	0.4448
1.0	0.3678
1.1	0.2981
1.2	0.2369

a) En utilisant la formule de la différence centrée, calculer une approximation de $f'(1)$ et de $f'(1.1)$.

b) Sachant que l'on peut approximer f'' avec la formule de différence avant suivante:

$$f''(x_i) \simeq \frac{f'(x_{i+1}) - f'(x_i)}{h}$$

utiliser les réponses obtenues à la sous-question a) pour obtenir une approximation de $f''(1)$.

c) Sans faire les calculs, proposer une autre formule vue au cours pour améliorer la précision de $f''(1)$. Justifier.

Question 5. (4 + 8 + 8 points)

Soit $f(x) = \cos(2x) + \sin(x)$.

(a) Calculer une approximation de I pour $h = \dfrac{\pi}{4}$ à l'aide de la formule de Simpson composée.

(b) Calculer une approximation de I en utilisant la formule de quadrature de Gauss à 4 points.

(c) Déterminer combien de noeuds suffisent pour que la formule de Simpson composée (également appelée *Simpson* 1/3) donne une approximation de

$$I = \int_0^{\pi} f(x)\, dx$$

avec une erreur inférieure à 10^{-3}.

Question 6. (10 + 6 points)

On considère l'intégrale

$$I = \int_1^2 \ln x \, dx.$$

(a) Quel pas h doit-on prendre pour que l'erreur en valeur absolue soit inférieure à 10^{-6} si on utilise la formule du trapèze composée?

(b) Est-ce que la valeur fournie par la méthode du trapèze composée est supérieure ou inférieure à la valeur exacte de I? Répondre à la question sans utiliser la valeur exacte de l'intégrale ci-dessus.