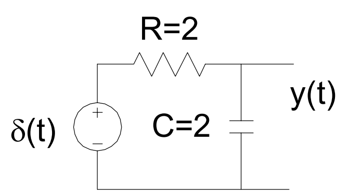
2002 Mini-Test 2 : Solutions

Problème 1 (1 point sur 5)

Crédit: 1/3 correct 0 point; 2/3 correct ½ point; 3/3 correct 1 point



$$\Longrightarrow \quad y(t) = \frac{1}{2} e^{-t/2} U(t)$$

a)

Pour trouver la réponse en fréquence, on remplace le condensateur par une impédance complexe $1/j\omega C$. Le rapport des tensions dans ce circuit est donné par un simple diviseur de tension, donc

$$H(j\omega) = \frac{1/j\omega C}{R + 1/j\omega C} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{1 + j\omega 4}$$

Comme $v_{in}(t) = \delta(t)$, on sait que la transformée de Fourier de l'entrée est

$$V_{in}(\omega) = 1$$

Donc la sortie sera

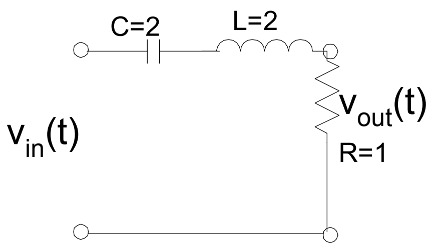
$$V_{out}(\omega) = V_{in}(\omega) H(j\omega) = 1 \cdot \frac{1}{1 + j\omega 4} = \frac{1/4}{1/4 + j\omega}$$

Pour déterminer $y(t)$ il faut trouver la transformée inverse de cette expression. En utilisant le table de transformées avec β=1/4, nous avons

$$y(t) = \mathrm{TF}^{-1}\{Y(\omega)\} = \mathrm{TF}^{-1}\left\{\frac{1/4}{1/4 + j\omega}\right\} = \frac{1}{4}\mathrm{TF}^{-1}\left\{\frac{1}{1/4 + j\omega}\right\}$$
$$= \frac{1}{4} e^{-t/4} U(t)$$

Donc a) est **Faux**.

b)



$$\Longrightarrow \quad H(j\omega) = \frac{1}{1 + 4j\omega - 2\omega^2}$$

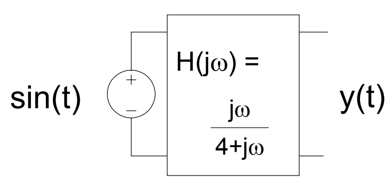
Pour trouver la réponse en fréquence, on remplace l'inductance par une impédance complexe $j\omega L$, le condensateur par une impédance complexe $1/j\omega C$. Le rapport des tensions dans ce circuit est donné par un simple diviseur de tension, donc

$$H(j\omega) = \frac{V_{out}(\omega)}{V_{in}(\omega)} = \frac{R}{R + j\omega L + 1/j\omega C} = \frac{j\omega C}{1 + (j\omega)^2 LC + + j\omega RC} =$$

$$= \frac{j\omega}{1 + 2j\omega - 4\omega^2}$$

Donc b) est **Faux**.

c)



$$\Longrightarrow \quad y(t) = \frac{1}{\sqrt{17}} \sin\left(t + \tan^{-1}\frac{1}{4}\right)$$

La réponse à un sinus est la partie imaginaire de la réponse à un phaseur. La réponse à un phaseur est la réponse fréquentielle évaluée à la fréquence du phaseur, multiplié par le phaseur.

$$\text{réponse à } e^{jt} = H(j)e^{jt} = \frac{j}{4+j}e^{jt} = \left|\frac{1}{4+j}\right| e^{jArg\frac{j}{4+j}} e^{jt}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4^2 + 1^2}} e^{jArg\frac{1+4j}{4^2+1^2}} e^{jt}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{17}} e^{j\tan^{-1}\frac{4}{1}} e^{jt} = \frac{1}{\sqrt{17}} e^{j\tan^{-1}4} e^{jt}$$

La partie imaginaire est

$$\text{réponse à } \sin(t) = \text{Im}\frac{1}{\sqrt{17}} e^{j\tan^{-1}4} e^{jt} = \frac{1}{\sqrt{17}} \sin\left(t + \tan^{-1}4\right)$$

Donc c) est **Faux**.

Problème 2 (1 point sur 5)

Crédit: 1/4 correct 0 point; 2/4 correct ½ point; 3/4 correct ½ point; 4/4 correct 1 point

a) $f(t)*\delta(t-t_0)=f(t-t_0)$

La convolution d'une fonction delta centrée sur t_0 avec n'importe quelle fonction, est la fonction centrée ***sur*** t_0.

Donc a) est **Vrai**.

b) $f(t)\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)$

La définition d'une fonction périodique est

$$f\left(t+nT_0\right)=f\left(t\right)\quad \forall n,t$$

qui n'est pas nécessairement le cas ici.

Donc b) est **Faux**

c) $\{f*g\}(t)\Leftrightarrow F(\omega)G(\omega)$

La convolution de deux fonctions dans le temps correspond à la multiplication dans le domaine de fréquence.

$$f(t)\cdot g(t)\Leftrightarrow\frac{1}{2\pi}\{F(\omega)*G(\omega)\}\quad \text{et}\quad \{f(t)*g(t)\}\Leftrightarrow F(\omega)\cdot G(\omega)$$

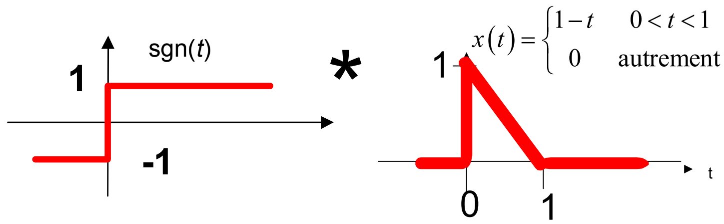
Donc b) est **Vrai**

d) $X(\omega)=0\ \ \forall\,|\omega|>\omega_0 \quad\Rightarrow\quad Y(\omega)=0\ \ \forall\,|\omega|>\omega_0$ pour un système causal

La causalité peut s'appliquer aux systèmes non-linéaires, qui ne conservent pas la largeur de bande. Par exemple, un détecteur quadratique est causal, mais il ne conserve pas la bande passante du signal d'entrée.

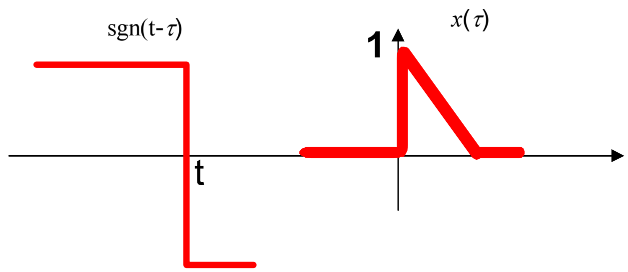
Donc d) est **Faux**

Problème 3 (3 points sur 5)



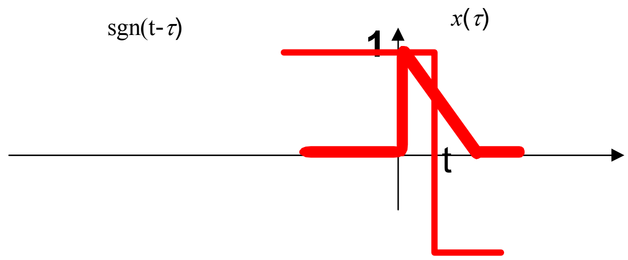
$$\operatorname{sgn}(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sgn}(t-\tau).x(\tau)\,d\tau$$

Nous commençons avec la région $t<0$,



où $\operatorname{sgn}(t) * x(t) = \int_0^1 (-1)(1-\tau)\,d\tau = \left[-\tau + \tau^2/2\right]_0^1 = -1/2$

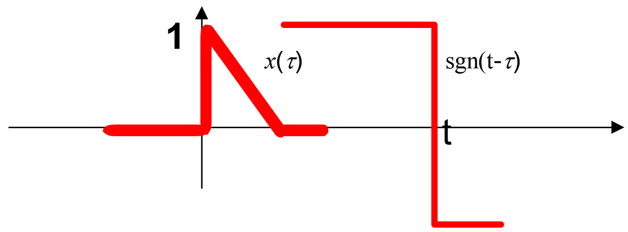
Quand t dépasse zéro nous avons la région $0<t<1$:



La convolution dans cette région est

$$\begin{aligned}\operatorname{sgn}(t) * x(t) &= \int_0^t \operatorname{sgn}(t-\tau).x(\tau)\,d\tau + \int_t^1 \operatorname{sgn}(t-\tau).x(\tau)\,d\tau \\ &= \int_0^t (1-\tau)\,d\tau + \int_t^1 (-1).(1-\tau)\,d\tau \\ &= \tau - \tau^2/2\Big|_0^t + \tau^2/2 - \tau\Big|_t^1 = t - t^2/2 + 1/2 - 1 - t^2/2 + t = 2t - t^2 - 1/2\end{aligned}$$

La dernière région est t>1 où nous avons



La convolution est

$$\operatorname{sgn}(t) * x(t) = \int_0^1 (1)(1-\tau)\,d\tau = \left[\tau - \tau^2/2\right]_0^1 = 1/2$$

Donc la convolution totale est

$$\operatorname{sgn}(t) * x(t) = \begin{cases} -1/2 & t < 0 \\ 2t - t^2 - 1/2 & 0 < t < 1 \\ 1/2 & t > 1 \end{cases}$$