UNIVERSITÉ
LAVAL

Faculté des Sciences et de génie
Département de génie électrique et de génie informatique

GEL-2001 Analyse des signaux
Jérôme Genest

Examen final

Date: Mardi le 10 décembre 2019

Durée: de 13h30 à 15h30

Salle: PLT-2551

Cet examen vaut 45% de la note finale.

Remarques:

i) L'utilisation d'une calculatrice est permise.

ii) Aucun document n'est permis durant l'examen.

iii) Seule la liste des formules fournie à la fin du questionnaire est permise.

iv) Votre carte d'identité doit être placée sur votre bureau en conformité avec le règlement de la Faculté.

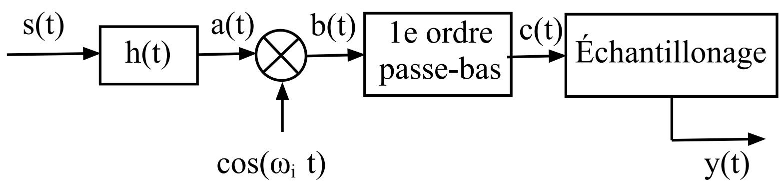
Problème 1 (15 points)

Un laser émet des impulsions ayant une enveloppe en sinus cardinal, avec un taux de répétition T_r et une porteuse ω_o, de telle sorte que nous pouvons écrire le champ comme:

$$s(t) = \left[\frac{\sin(\omega_b t/2)}{\omega_b t/2} * \delta_{T_r}(t)\right]\cos(\omega_o t).$$

Pour les besoins du problème, supposons $\omega_o = 1 \times 10^{12}$, $\omega_r = 1$, $\omega_b = 5$.

Tel qu'indiqué à la figure ci-bas, le signal $s(t)$ est utilisé pour sonder un système linéaire de réponse impulsionnelle $h(t)$. Le signal est par la suite démodulé par un cosinus puis filtré avant d'être échantillonné. Les signaux à différents endroits dans le système sont indiqués sur la figure à l'aide de noms de variables $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ et $y(t)$.



a) Calculez et tracez $S(\omega)$ la transformation de Fourier de $s(t)$.

b) Le signal $s(t)$ est utilisé pour sonder un échantillon dont la fonction de transfert est:

$$H(\omega) = 1 - 0.5 \times \text{Rect}\left(\frac{\omega - (\omega_r + \omega_o)}{0.1}\right) - 0.5 \times \text{Rect}\left(\frac{\omega + (\omega_r + \omega_o)}{0.1}\right)$$

Tracez le spectre du signal $A(\omega)$ filtré par l'échantillon.

c) Le signal $a(t)$ est multiplié par un cosinus à une fréquence telle que $\omega_i = \omega_o + \omega_r/4$. Tracez le spectre $B(\omega)$ après la démodulation.

d) On souhaite échantillonner la portion en bande de base du signal $b(t)$. Quelle fréquence de coupure choisissez-vous pour le filtre de 1er ordre passe-bas. Pourquoi ?

e) Discutez l'impact d'utiliser un filtre de 1er ordre plutôt qu'un filtre idéal.

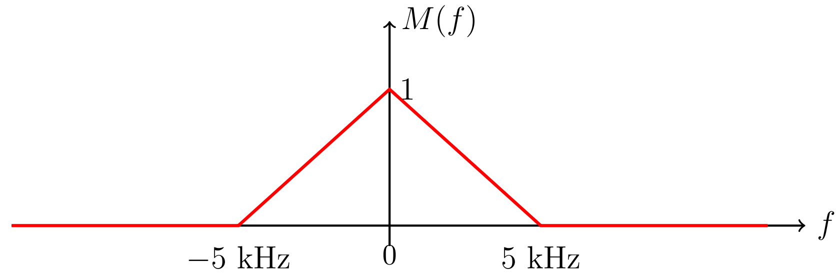
f) Quelle est la fréquence d'échantillonnage minimale requise pour numériser le signal $c(t)$ sans repliement spectral (aliasing)?

g) Tracez le spectre du signal échantillonné $y(t)$ si la fréquence d'échantillonnage est $\omega_s = 10$.

h) Comment feriez-vous pour retrouver l'information de $H(\omega)$ à partir du signal numérisé $y(t)$?

Problème 2 (15 points)

Soit un signal $m(t)$ contenant de l'information destinée à être transmise par ondes radio. Le spectre $M(\omega)$ est limité en fréquence et est illustré ci-bas (en f tel que $\omega = 2\pi f$):



a) Calculez l'énergie et la puissance du signal $m(t)$

b) Pour transmettre le signal $m(t)$ par voie aérienne, on doit utiliser une porteuse qui se propage aisément dans l'atmosphère. C'est le cas des ondes radio. Nous allons utiliser une porteuse de fréquence $f_o = 100$ kHz. (100000 Hz, avec $\omega_o = 2\pi f_o$). Le signal transmis par l'antenne de l'émetteur est :

$$g(t) = (0.5 \times m(t) + 1)\sin(\omega_o t).$$

Calculez et tracez la transformée de Fourier de $g(t)$. (Tracez le spectre en partie réelle et imaginaire, c'est plus facile)

c) Calculez l'énergie et la puissance du signal $g(t)$. De quel type de modulation s'agit-il ?

d) À la réception du signal, il faut effectuer une opération qui permet de retrouver un signal similaire au message initial. On veut retrouver un spectre de même forme autour de 0 Hz.

Pour ce faire, on va d'abord multiplier le signal $g(t)$ par $\cos(\omega_0 t)$:

$$h(t) = g(t)\cos(\omega_o t).$$

Calculez et tracez la transformée de Fourier de $h(t)$. Est-ce que cela permet de retrouver le signal désiré autour de la fréquence zéro? Expliquez les différences entre $M(\omega)$ et $H(\omega)$.

e) Si au lieu on multiplie le signal $g(t)$ par $\sin(\omega_0 t)$:

$$z(t) = g(t)\sin(\omega_o t).$$

Calculez et tracez la transformée de Fourier de $z(t)$. Est-ce que cela permet de retrouver le signal désiré autour de la fréquence zéro? Expliquez les différences $M(\omega)$ et $Z(\omega)$.

f) Pourquoi l'un des deux cas (d et e) fonctionne et pas l'autre ?

Problème 3 (15 points)

La distribution de température sur une barre de métal infinie est donnée par $T(x,0) = e^{-x^2}$ au temps $t = 0$. Donnez la distribution de température sur la barre au temps $t = 1$ seconde sachant que la diffusion de la température est gouvernée par l'équation différentielle:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}.$$

Dans ce cas-ci, $\alpha = 1$.

Rappel, la TF d'une gaussienne est une gaussienne:

$$e^{-\pi x^2} \Longleftrightarrow e^{-\frac{u^2}{4\pi}}$$

Suggestion: utilisez u pour les fréquences angulaires spatiales (en rad/m) et ω pour les fréquences angulaires temporelles (en rad/s) si nécessaire.

Bonus (2 pts) : Si on considère plutôt une plaque infinie et que la distribution de température initiale est une impulsion à $x = y = 0$. Quelle sera la forme de la distribution de température et comment évoluera-t-elle en fonction du temps ?