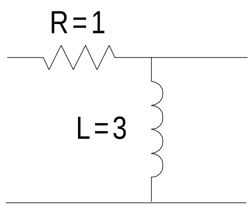
Université Laval
Professeur: Leslie Rusch

Département de Génie Électrique
et de Génie Informatique

Mini-test 3 - *Solutions*

Problème 1 *(1 point sur 5)*



$$\Longrightarrow \quad H(j\omega) = \frac{3j\omega}{3+j\omega}$$

a)

Pour trouver la réponse en fréquence, on remplace l'inductance par une impédance complexe $j\omega L$ et, ensuite, on utilise les équations de Kirchoff pour calculer le courante et la tension. Le rapport des tensions dans ce circuit est donné par un simple diviseur de tension, donc

$$H(j\omega) = \frac{V_{in}(\omega)}{V_{out}(\omega)} = \frac{j\omega L}{R + j\omega L} = \frac{3j\omega}{1+3j\omega}$$

Donc a) est **Faux**.

b) $H(j\omega) = \dfrac{1}{3+j\omega} \quad \Longrightarrow$ réponse à $\cos 3t = \dfrac{1}{3\sqrt{2}} \cos\left(3t - \frac{\pi}{4}\right)$

La réponse à un cosinus est la partie réelle de la réponse à un phaseur. La réponse à un phaseur est la réponse fréquencielle évaluée à la fréquence du phaseur, multiplié par le phaseur.

réponse à $e^{j3t} = H(j3)e^{j3t} = \dfrac{1}{3+j3} e^{j3t} = \left|\dfrac{1}{3+j3}\right| e^{jArg\frac{1}{3+j3}} e^{j3t}$

$$= \frac{1}{\sqrt{3^2+3^2}} e^{jArg\frac{3-3j}{3^2+3^2}} e^{j3t}$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{2}} e^{-j\tan^{-1}\frac{3}{3}} e^{j3t} = \frac{1}{3\sqrt{2}} e^{-j\frac{\pi}{4}} e^{j3t}$$

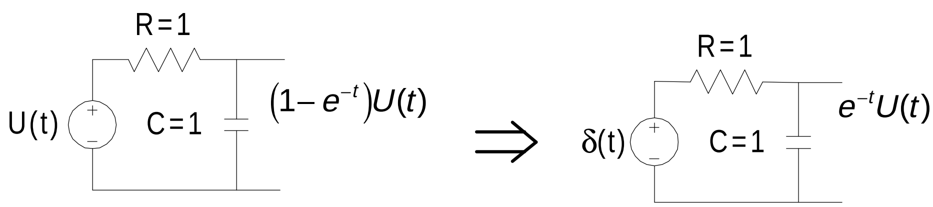
La partie réelle est

Nom: Matricule:

réponse à $\cos 3t = \mathrm{Re}\, \dfrac{1}{3\sqrt{2}} e^{-j\frac{\pi}{4}} e^{j3t}$

$$= \frac{1}{3\sqrt{2}} \cos\left(3t - \tfrac{\pi}{4}\right)$$

Donc b) est **Vrai**.



c)

La dérivée de *U(t)* est la fonction delta. La dérivée de la sortie du système avec une entrée égale à la fonction *U(t)* est donnée par

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} U(t)\left[1 - e^{-t}\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} U(t) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} U(t) e^{-t}$$

$$= \delta(t) + U(t) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} e^{-t} - e^{-t} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} U(t)$$

$$= \delta(t) + e^{-t} U(t) - e^{-t} \delta(t)$$

$$= \delta(t) + e^{-t} U(t) - e^{-0} \delta(t)$$

$$= \delta(t) + e^{-t} U(t) - \delta(t)$$

$$= e^{-t} U(t)$$

Donc c) est **Vrai**.

Problème 2 *(1 point sur 5)*

a) $\quad x(t) * \delta(t - t_0) = x(t)$

La convolution d'une fonction delta centrée sur t_0 avec n'importe quelle fonction, est la fonction centrée ***sur*** t_0. Donc a) est **Faux**.

b) $\quad \mathscr{F}^{-1}\left\{ \dfrac{e^{-j\omega t_0}}{\beta + j\omega} \right\} = e^{-\beta t} U(t) * \delta(t - t_0)$

La convolution dans le temps correspond à la multiplication dans le domaine fréquenciel. Dans la table de transformées on a que

$$\mathscr{F}\left\{ e^{-\beta t} U(t) \right\} = \frac{1}{\beta + j\omega} \quad et \quad \mathscr{F}\left\{ \delta(t - t_0) \right\} = e^{-j\omega t_0}$$

Donc b) est **Vrai**.

c) $$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sgn}(t-\tau)\, e^{-\tau}U(\tau)d\tau = \begin{cases} -\int_0^{\infty} e^{-\tau}\, d\tau & t<0 \\ \int_0^{t} e^{-\tau}\, d\tau & t>0 \end{cases}$$

Pour t plus grand que tau, le signe de la différence sera un. Pour t plus petit que tau, le signe de la différence sera moins un.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sgn}(t-\tau)\, e^{-\tau}U(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} e^{-\tau}U(\tau)d\tau - \int_{t}^{\infty} e^{-\tau}U(\tau)d\tau$$

La valeur de l'échelon dépend du signe de tau. Si t est négatif, on sait que tau sera négatif pour toute la première intégrale, donc l'échelon sera zéro pour la première intégrale. Si t est négatif, on sait que tau sera négatif pour une partie de la deuxième intégrale, donc l'échelon sera zéro pour cette partie de la deuxième intégrale. Donc, si t est négatif, la limite inférieure de la deuxième intégrale sera zéro.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sgn}(t-\tau)\, e^{-\tau}U(\tau)d\tau = -\int_0^{\infty} e^{-\tau}d\tau \quad \text{pour} \quad t<0$$

Considérez

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sgn}(t-\tau)\, e^{-\tau}U(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} e^{-\tau}U(\tau)d\tau - \int_{t}^{\infty} e^{-\tau}U(\tau)d\tau$$

pour t positif. Si t est positif, on sait que tau sera négatif pour une partie de la première intégrale, donc l'échelon sera zéro pour cette partie de la première intégrale. Donc, si t est positif, la limite inférieure de la première intégrale sera zéro, et l'échelon sera un pour cette portion de la première intégrale.

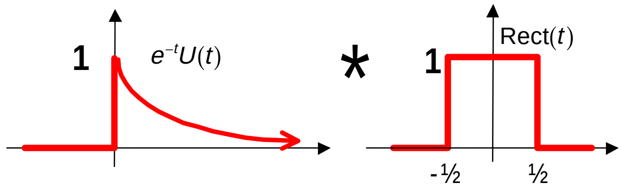
$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sgn}(t-\tau)\, e^{-\tau}U(\tau)d\tau = \int_{0}^{t} e^{-\tau}d\tau - \int_{t}^{\infty} e^{-\tau}U(\tau)d\tau \quad \text{pour} \quad t>0$$

Si t est positif, on sait que tau sera positif pour toute la deuxième intégrale, donc l'échelon sera un pour la deuxième intégrale.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sgn}(t-\tau)\, e^{-\tau}U(\tau)d\tau = \int_{0}^{t} e^{-\tau}d\tau - \int_{t}^{\infty} e^{-\tau}d\tau \quad \text{pour} \quad t>0$$

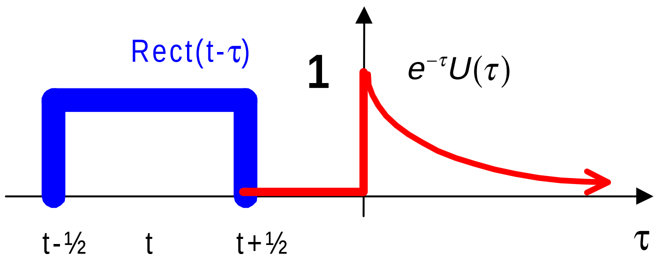
Donc, c) est **Faux**.

Problème 3 ***(3 points sur 5)***



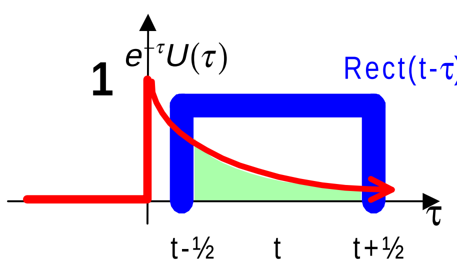
a) *1.5 points*

On aura un rectangle qui est centré sur tau égal à *t*, et la fonction exponentielle sera fixe, ce qui veut dire que la position ne sera pas une fonction de *t*.

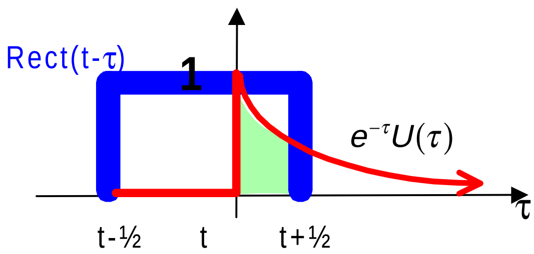


.

Pour *t* très négatif, le rectangle sera à la gauche de l'exponentielle, leur produit sera zéro, donc la convolution sera zéro. Donc la convolution est zéro pour *t<-½*.



Pour *t-½* plus grand que zéro, le recouvrement des deux fonctions inclura tout le rectangle. Donc, il y aura une autre expression analytique pour *t>½*



Pour *t* entre -½ et ½, le recouvrement inclura seulement une partie du rectangle, donc l'expression analytique de la convolution sera différente pour *-½<t<½*.

b) *1.5 points*

On a vu que la convolution est zéro pour *t<-½*. Pour *-½<t<½*, on peut voir dans le graphique qu'il aura un recouvrement entre zéro et *t+½*. L'intégrale qui définit la convolution dans cet intervalle est

$$e^{-t}U(t)*\mathrm{Rect}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\tau}U(\tau)\mathrm{Rect}(t-\tau)d\tau \qquad \text{pour } -\frac{1}{2}<t<\frac{1}{2}$$

$$=\int_{0}^{t+1/2}e^{-\tau}d\tau=1-e^{-t-1/2}$$

Pour *t>½*, on a vu que le recouvrement inclura tout le rectangle, donc la convolution dans cet intervalle est

$$e^{-t}U(t)*\mathrm{Rect}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\tau}U(\tau)\mathrm{Rect}(t-\tau)d\tau \qquad \text{pour } t>\frac{1}{2}$$

$$=\int_{t-1/2}^{t+1/2}e^{-\tau}d\tau=e^{-t+1/2}-e^{-t-1/2}$$

$$=e^{-t}\left(e^{1/2}-e^{-1/2}\right)=e^{-t}\sinh\frac{1}{2}$$