Final

MAT-2910 : Analyse Numérique pour ingénieur — Hiver 2016

• L'examen est noté sur 100 points et compte pour 30.0% de la note finale.
• Donner tous les développements et calculs. **Pour recevoir des points, toute réponse doit être convenablement** JUSTIFIÉE**.**
• Seules les calculatrices avec l'auto-collant de la Faculté sont autorisées.
• Répondre aux questions sur le questionnaire. **Utiliser le verso des feuilles si nécessaire**.
• Un aide mémoire se retrouve à la fin du questionnaire, vous pouvez le détacher.
• N'oubliez pas d'identifier chaque page.

Je suis bien l'étudiant dont le nom et le numéro de dossier sont écrits ci-dessous. J'ai lu et compris les directives et je m'engage à les respecter.	
Nom :	
Prénom :	
Matricule :	
Signature :	

À remplir par le(s) correcteur(s)

Q1 (/20)	Q2 (/15)	Q3 (/15)	Q4 (/20)	Q5 (/30)	Total

Question 1 (5+5+10) **Nom, Prénom :**____________________________

Soit $f(x)$ une fonction dont on connait la table des différences divisées suivante ;

n	x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}, x_{i+4}]$
0	-2	-33	$-$	$-$	$-$	$-$
1	-1	-2	31	$-$	$-$	$-$
2	0	-1	1		$-$	$-$
3	1	0	1			$-$
4	2	31	31			

a) Compléter le tableau ci-dessus.

b) Trouver le polynôme $P(x)$ qui interpole $f(x)$ aux points x_0, x_1, x_2, x_3, x_4. Calculer une approximation de $f(0.5)$.

suite de la question 1, page suivante...

c) On sait que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad 0.025 \leq |f^{(5)}(x)| \leq 0.05.$$

En utilisant le polynôme en b), est-il possible d'approcher $f(x)$ au point $x = 1.5$ avec une erreur absolue inférieure ou égale à 0.5×10^{-3} ? Justifier votre réponse.

Question 2 (10+5) **Nom, Prénom :**________________________________

Pour interpoler les données suivantes : $(-1,0), (1,1), (2,9/4)$ on utilise la spline cubique naturelle (libre) $S(x)$ définie par

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) & = a(x+1) + \dfrac{b}{2}(x+1)^2 + \dfrac{3}{48}(x+1)^3, \; -1 \leq x \leq 1 \\ S_1(x) & = 1 + (x-1) + \dfrac{3}{8}(x-1)^2 - \dfrac{1}{8}(x-1)^3, \; 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

a) Déterminer les constantes a et b.

b) Calculer la valeur de $S(0)$.

suite de la question 2, page suivante...

Question 2 (10+5) **Nom, Prénom :**______________________________

Question 3 (3+6+6) **Nom, Prénom :**______________________________

Soit l'intégrale

$$I = \int_0^1 x^4 + 6x + 1 \; dx$$

On nous donne le tableau suivant :

x_i	0	0.25	0.5	0.75	1
$f(x_i)$	1	2.5039	4.0625	5.8164	8

a) Approximer I à l'aide de la méthode de Simpson 1/3 simple.

b) Approximer I à l'aide de la méthode de Simpson 1/3 avec deux sous intervalles ($n = 2$).

suite de la question 3, page suivante...

c) Sans calculer la valeur exacte de I

   i) Approximer l'erreur dans l'approximation faite en b)

   ii) Quel serait l'erreur de l'approximation de I avec une formule de Gauss-Legendre à 3 points ?

Question 4 (5+10+5) **Nom, Prénom :**______________________________

Soit

$$f(x) = 12x^5 + 42x^2 - 1$$

a) Quel sera l'approximation de $f''(0)$ pour $h = 0.1$ avec la formule centrée d'ordre 2 ?

b) Sans calculer la valeur exacte de $f''(0)$, donnez une valeur de h garantissant une précision de 10^{-5} pour la formule centrée d'ordre 2 dont l'erreur s'exprime

$$-\frac{h^2}{24} f^{(4)}(\eta) \qquad \eta \in [-h, h]$$

suite de la question 4, page suivante...

Question 4 (5+10+5) **Nom, Prénom :**______________________________

c) Une formule inconnue produit des approximations de la dérivée 3^e de f avec un terme d'erreur de la forme

$$E(h) = \frac{f^{(5)}(\eta)}{5!} h^7 \qquad \eta \in [0, h]$$

i) Quel est l'ordre de cette formule ?

ii) Quelle sera l'erreur, en fonction de h, pour l'approximation de la dérivée 3^e de

$$f(x) = 12x^5 + 42x^2 - 1$$

Question 5. (10+10+10) **Nom, Prénom :**________________________________

On considère l'équation différentielle :

$$\begin{cases} y'(t) - 3t^2 y(t) = 0, \quad t \geq 0 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

a) Calculer une approximation de $y(0.2)$ en utilisant la méthode d'Euler modifiée avec $h = 0.2$, puis avec $h = 0.1$. Puis calculer les erreurs absolues correspondantes sachant que la solution exacte de l'équation différentielle est $y(t) = e^{t^3}$.

suite de la question 5, page suivante...

b) Si on désigne par $E(0.2)$ et $E(0.1)$ les erreurs obtenues précédemment, à quoi doit-on s'attendre du quotient $E(0.2)\,/\,E(0.1)$? (justifier la réponse). Est-ce effectivement le cas ?

c) Comment obtenir une meilleure approximation de $y(0.2)$ à partir des deux approximations précédentes ? Calculer cette nouvelle approximation.

Aide-mémoire MAT-2910

Chapitre 5

- Différences divisées : $f[x_i] = f(x_i)$,

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}, \quad f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{(x_{i+2} - x_i)}, \quad \text{etc.}$$

- Erreur d'interpolation :

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n) \ \text{ pour } \quad \xi(x) \in]x_0, x_n[$$

- Approximation de l'erreur d'interpolation :

$$E_n(x) \simeq f[x_0, x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$$

- Splines cubiques : on pose $h_i = x_{i+1} - x_i$ et dans l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ on a :

$$p_i(x) = f_i + f_i'(x - x_i) + \frac{f_i''}{2!}(x - x_i)^2 + \frac{f_i'''}{3!}(x - x_i)^3$$

  où

$$\begin{aligned} f_i &= f(x_i) \\ f_i' &= f[x_i, x_{i+1}] - \frac{h_i f_i''}{3} - \frac{h_i f_{i+1}''}{6} \\ f_i''' &= \frac{f_{i+1}'' - f_i''}{h_i} \end{aligned}$$

  et les f_i'' sont solutions de :

$$\frac{h_i}{(h_i + h_{i+1})} f_i'' + 2f_{i+1}'' + \frac{h_{i+1}}{(h_i + h_{i+1})} f_{i+2}'' \quad = \quad 6f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}], \ \ i = 0, 1, \cdots, n-2$$

Chapitre 6

Dérivée première :

Avant d'ordre 1	$f'(x) = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} + O(h)$
Arrière d'ordre 1	$f'(x) = \dfrac{f(x) - f(x-h)}{h} + O(h)$
Avant d'ordre 2	$f'(x) = \dfrac{-f(x+2h) + 4f(x+h) - 3f(x)}{2h} + O(h^2)$
Centrée d'ordre 2	$f'(x) = \dfrac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2)$
Arrière d'ordre 2	$f'(x) = \dfrac{3f(x) - 4f(x-h) + f(x-2h)}{2h} + O(h^2)$

Dérivées supérieure :

Arrière d'ordre 1	$f''(x) = \dfrac{f(x-2h) - 2f(x-h) + f(x)}{h^2} + O(h)$
Avant d'ordre 1	$f''(x) = \dfrac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2} + O(h)$
Centrée d'ordre 2	$f''(x) = \dfrac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + O(h^2)$
Centrée d'ordre 4	$f''(x) = \dfrac{-f(x+2h) + 16f(x+h) - 30f(x) + 16f(x-h) - f(x-2h)}{12h^2} + O(h^4)$
Centrée d'ordre 2	$f''''(x) = \dfrac{f(x+2h) - 4f(x+h) + 6f(x) - 4f(x-h) + f(x-2h)}{h^4} + O(h^2)$

- Extrapolation de Richardson : $Q_{exa} = \dfrac{2^n Q_{app}(\frac{h}{2}) - Q_{app}(h)}{(2^n - 1)} + O(h^{n+1})$
- Formule des trapèzes :

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left(f(x_0) + 2\left[f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})\right] + f(x_n)\right) - \frac{(b-a)}{12} f''(\eta) h^2$$

- Formule de Simpson 1/3 :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx = &\frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \cdots \\ &+ 4f(x_{2n-3}) + 2f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})) - \frac{(b-a)}{180} f''''(\eta) h^4\end{aligned}$$

- Formule de Simpson 3/8 :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx = &\frac{3h}{8}(f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + 2f(x_3) + 3f(x_4) + \cdots \\ &+ 2f(x_{3n-3}) + 3f(x_{3n-2}) + 3f(x_{3n-1}) + f(x_{3n})) - \frac{(b-a) f''''(\eta)}{80} h^4\end{aligned}$$

- Intégration de Gauss (voir plus bas pour les w_i et t_i) :

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{(b-a)}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{(b-a)t + (a+b)}{2}\right) dt = \frac{(b-a)}{2} \int_{-1}^1 g(t)dt \simeq \frac{(b-a)}{2} \sum_{i=1}^n w_i g(t_i)$$

Table des valeurs des points et des poids pour Gauss-Legendre à n points :

n	t_i	w_i
1	0	2
2	-0.57735	1
	0.57735	1
3	-0.77460	0.55556
	0	0.88889
	0.77460	0.55556
4	-0.86114	0.34785
	-0.33998	0.65215
	0.33998	0.65215
	0.86114	0.34785
5	-0.90618	0.23693
	-0.53847	0.47863
	0	0.56889
	0.53847	0.47863
	0.90618	0.23693

Chapitre 7

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

— Euler (ordre 1) : $y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$

— Taylor (ordre 2) : $y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) + \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial f(t_n, y_n)}{\partial t} + \frac{\partial f(t_n, y_n)}{\partial y} f(t_n, y_n)\right)$

— Euler modifiée (ordre 2) : $\hat{y} = y_n + hf(t_n, y_n)$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(f(t_n, y_n) + f(t_n + h, \hat{y})\right)$$

— Point milieu (ordre 2) : $k_1 = hf(t_n, y_n)$

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right)$$

— Runge-Kutta d'ordre 4 :

$$\begin{aligned}
k_1 &= hf(t_n, y_n) \\
k_2 &= hf(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}) \\
k_3 &= hf(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}) \\
k_4 &= hf(t_n + h, y_n + k_3) \\
y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)
\end{aligned}$$