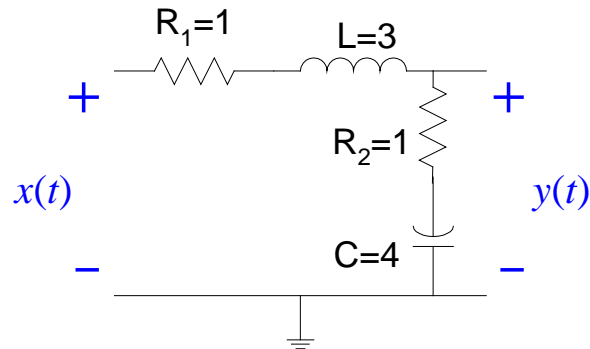
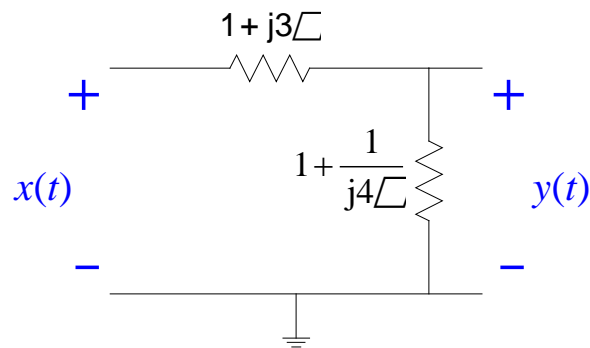


2003 Examen Final - Solutions

Problème 1



En remplaçant la bobine et le condensateur par leur impédance complexe, nous obtenons le diviseur de tension suivant



La relation entre les transformée de Fourier de l'entrée et la sortie est donc

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{1 + \frac{1}{j4\omega}}{1 + \frac{1}{j4\omega} + 1 + j3\omega} = \frac{1 + j4\omega}{1 + j8\omega + 12\omega^2}$$

Nous pouvons factoriser le dénominateur pour arriver à

$$H(\omega) = \frac{1 + j4\omega}{(1 + j2\omega)(1 + j6\omega)}$$

Pour chercher la transformée inverse (c'est à dire la réponse impulsionnelle), nous utilisons les fractions partielles

$$H(\omega) = \frac{A}{1 + j2\omega} + \frac{B}{1 + j6\omega}$$

Après un peu d'algèbre, nous trouvons

$$A = B = \frac{1}{2}$$

Donc,

$$H(\omega) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 + j2\omega} + \frac{1}{1 + j6\omega} \right) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2} + j\omega} + \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{6} + j\omega}$$

Nous trouvons transformée inverse dans la table des transformées de Fourier fourni :

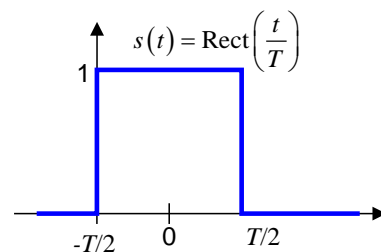
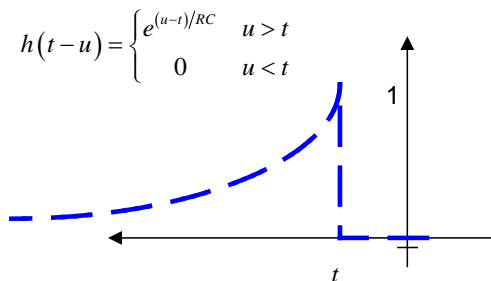
$$h(t) = \frac{1}{4} e^{-t/2} U(t) + \frac{1}{12} e^{-t/6} U(t) = \frac{1}{12} U(t) [3e^{-t/2} + e^{-t/6}]$$

Problème 2

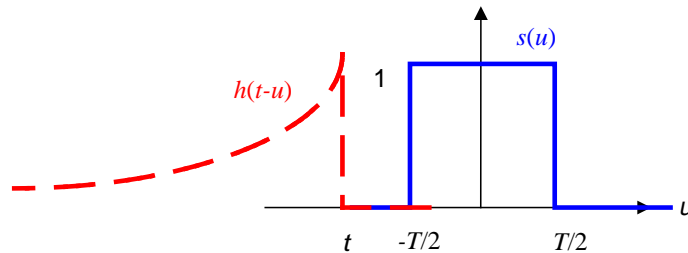
Prenons l'exponentiel pour faire le déplacement. L'équation de $f(t-u)$ est

$$h(t-u) = \begin{cases} e^{-(t-u)/RC} & t-u \leq 0 \\ 0 & t-u > 0 \end{cases} = \begin{cases} e^{(u-t)/RC} & u > t \\ 0 & u < t \end{cases}$$

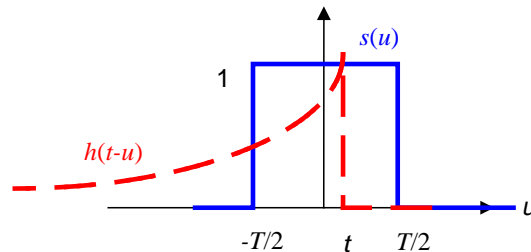
et le graphique est



Il y a trois régions de définition pour la convolution. Quand $t < -T/2$, il n'y a pas de recouvrement entre $h(t-u)$ et $s(u)$, donc la convolution est nulle.



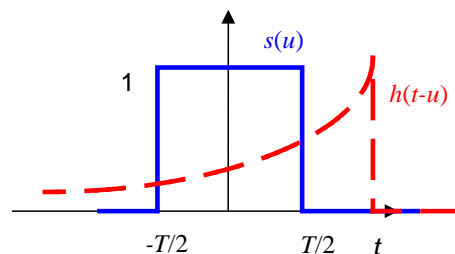
Pour $-T/2 < t < T/2$, l'exponentielle recouvre une partie du rectangle. L'intégration couvre $-T/2 < u < t$.



Dans cette région de définition

$$\begin{aligned}
 s(t) * h(t) &= \int_{-T/2}^t e^{u/RC} e^{-t/RC} du \\
 &= e^{-t/RC} \int_{-T/2}^t e^{u/RC} du = e^{-t/RC} \left. \frac{e^{u/RC}}{RC} \right|_{-T/2}^t \\
 &= \frac{e^{-t/RC}}{RC} [e^{t/RC} - e^{-T/2RC}] = \frac{1}{RC} [1 - e^{-(T/2+t)/RC}]
 \end{aligned}$$

Pour $t > T/2$, l'exponentielle couvre tous le rectangle



L'intégrale couvre $-T/2 < u < T/2$ pour cette région.

$$\begin{aligned}
 s(t) * h(t) &= \int_{-T/2}^{T/2} e^{u/RC} e^{-t/RC} du \\
 &= e^{-t/RC} \int_{-T/2}^{T/2} e^{u/RC} du = e^{-t/RC} \left. \frac{e^{u/RC}}{RC} \right|_{-T/2}^{T/2} \\
 &= \frac{e^{-t/RC}}{RC} [e^{T/2RC} - e^{-T/2RC}] = \frac{2e^{-t/RC}}{RC} \sinh\left(\frac{T}{2RC}\right)
 \end{aligned}$$

La sortie est donc

$$s(t) * h(t) = \begin{cases} 0 & -T/2 \leq t \\ \frac{1}{RC} [1 - e^{-(t+T/2)/RC}] & -T/2 < t < T/2 \\ \frac{2}{RC} e^{-t/RC} \sinh\left(\frac{T}{2RC}\right) & t \geq T/2 \end{cases}$$

B) Pour l'entrée rectangulaire nous cherchons la transformée dans le table.

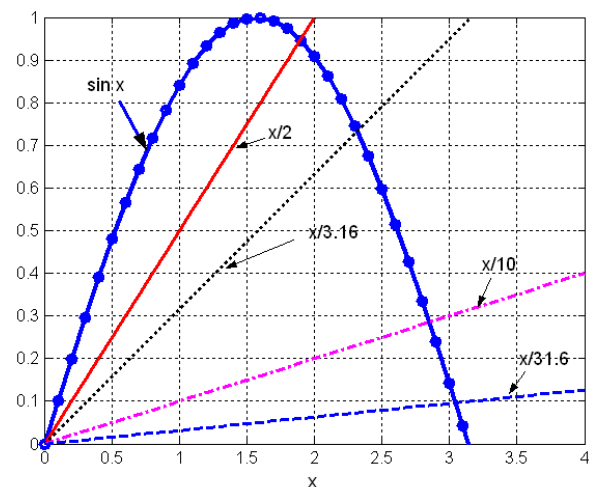
$$s(t) = \text{Rect}\left(\frac{t}{T}\right) \Rightarrow S(\omega) = T \text{Sa} \frac{\omega T}{2}$$

La valeur maximale de la transformée est T . Le point 3dB est donc

$$\begin{aligned}
 T \text{Sa} \frac{\omega_{3\text{dB}} T}{2} &= \frac{T}{2} \\
 \text{Sa} \frac{\omega_{3\text{dB}} T}{2} &= \frac{1}{2} \\
 \frac{\sin x}{x} &= \frac{1}{2} \quad x = \frac{\omega_{3\text{dB}} T}{2}
 \end{aligned}$$

Dans le graphique fourni nous avons $x=1.9$ pour l'intersection de $\sin(x)$ et $x/2$. Donc,

$$\begin{aligned}
 \frac{\omega_{3\text{dB}} T}{2} &= 1.9 \\
 \omega_{3\text{dB}} &= \frac{3.8}{T}
 \end{aligned}$$



C) Pour le filtre nous pouvons aussi chercher la transformée dans le table

$$h(t) = e^{-t/RC} U(t) \Rightarrow H(\omega) = \frac{1}{1/RC + j\omega} = \frac{1}{1 + j\omega RC} \quad |H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}$$

La valeur maximale est 1, et le point 3dB est

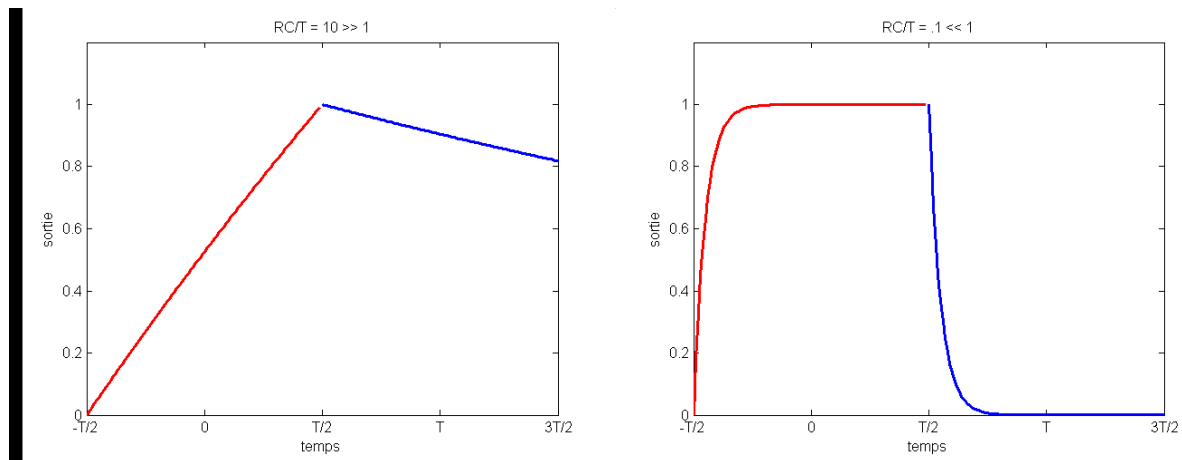
$$\frac{1}{\sqrt{1 + \omega_{3dB}^2 R^2 C^2}} = \frac{1}{2} \quad \omega_{3dB}^2 R^2 C^2 = 3 \quad \omega_{3dB} = \frac{\sqrt{3}}{RC}$$

D) Le largeur de bande du signal et largeur de bande du filtre

$$BW_{signal} \approx \frac{3.8}{T} \quad BW_{filtre} \approx \frac{1.7}{RC} \quad \frac{BW_{signal}}{BW_{filtre}} \approx \frac{RC}{T}$$

Pour $T \ll RC$, nous avons $BW_{signal} \gg BW_{filtre}$, donc le filtre va couper le signal beaucoup et introduire de distorsion.

Pour $T \gg RC$, nous avons $BW_{signal} \ll BW_{filtre}$, donc le filtre ne va pas couper le signal et la sortie restera pas mal rectangulaire. Nous voyons les deux possibilités dans les graphiques suivants.



Problème 3

Nous exploitons la transformée pour trouver la sortie. Nous calculons les transformées pour l'entrée et le filtre. La transformée pour la sortie sera le produit. Commençons avec le signal.

$$s(t) = e^{-t^2/T^2} \Rightarrow S(\omega) = \frac{\sqrt{1/T^2}}{\sqrt{\pi}} e^{-\omega^2/(4/T^2)} = \frac{1}{T\sqrt{\pi}} e^{-T^2\omega^2/4}$$

Pour le filtre

$$h(t) = s(T-t) = e^{-(t-T)^2/T^2} \Rightarrow H(\omega) = e^{-j\omega T} S(-\omega) = \frac{1}{T\sqrt{\pi}} e^{-j\omega T} e^{-T^2\omega^2/4}$$

Donc le spectre à la sortie du filtre est

$$Y(\omega) = H(\omega)S(\omega) = e^{-j\omega T} S(\omega)S(\omega) = \frac{1}{T^2\pi} e^{-j\omega T} e^{-T^2\omega^2/2}$$

La sortie est donc encore une impulsion Gaussienne – nous avons toujours ω^2 dans l'exposant. Il y a un délai aussi. Notons que

$$e^{-t^2/2T^2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{1/2T^2}}{\sqrt{\pi}} e^{-T^2\omega^2/2} = \frac{1}{T\sqrt{2\pi}} e^{-T^2\omega^2/2}$$

Donc

$$\begin{aligned} T\sqrt{2\pi} \frac{1}{T^2\pi} e^{-t^2/2T^2} &\Leftrightarrow \frac{1}{T^2\pi} e^{-T^2\omega^2/2} \\ \frac{\sqrt{2}}{T\sqrt{\pi}} e^{-t^2/2T^2} &\Leftrightarrow \frac{1}{T^2\pi} e^{-T^2\omega^2/2} \end{aligned}$$

Avec le délai,

$$\frac{\sqrt{2}}{T\sqrt{\pi}} e^{-(t-T)^2/2T^2} \Leftrightarrow e^{-j\omega T} \frac{1}{T^2\pi} e^{-T^2\omega^2/2}$$

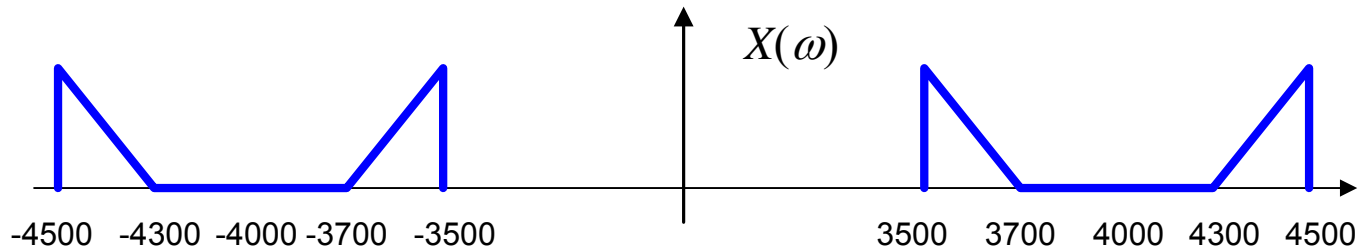
La sortie en temps est donc

$$y(t) = \frac{\sqrt{2}}{T\sqrt{\pi}} e^{-(t-T)^2/2T^2}$$

une version de l'entrée qui est deux fois plus large en temps, et avec un délai de T .

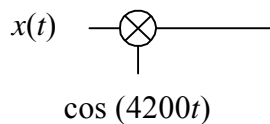
Problème 4

Voici le spectre original.



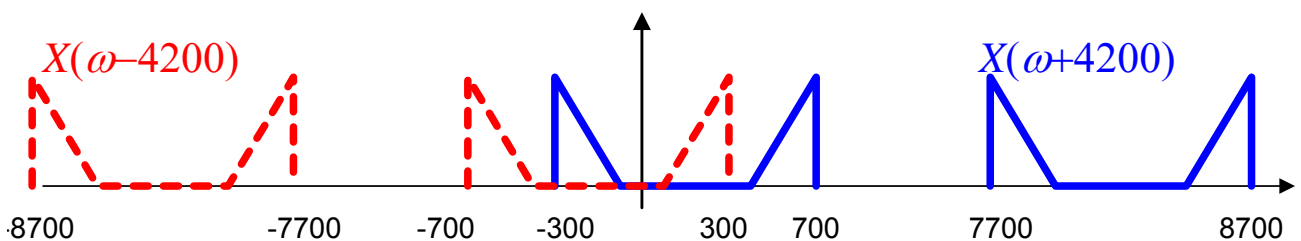
Nous avons un échantillonneur avec un taux d'échantillonnage de 700 qui est loin d'être suffisante pour échantillonner le signal donné. Le signal est à bande étroite, donc nous pouvons apporter le signal en bande de base (-500 à 500). Pour respecter le critère de Nyquist pour la reconstruction idéale, nous devons échantillonner par au moins 2×500 ou un taux d'échantillonnage de 1000. Malheureusement notre échantillonneur a un taux d'échantillonnage de 700, donc pas suffisant. Nous sommes donné que ce signal réel était originalement en bande de base et a été modulé à 4000. Nous savons donc que le spectre est symétrique et que la moitié du spectre est redondant. Donc notre stratégie est de n'est pas seulement apporter le spectre en bande de base, mais d'aussi éliminer la section sans contenu spectrale. C'est-à-dire que la bande de 4300-4500 (ou aussi la bande de 3500-3700) est suffisante pour décrire le signal, et notre échantillonneur est capable de convertir cette partie en version numérique en respectant le taux de Nyquist.

Voici les manipulations nécessaires pour l'échantillonner. Nous commençons avec une modulation par $\cos(4200t)$ pour

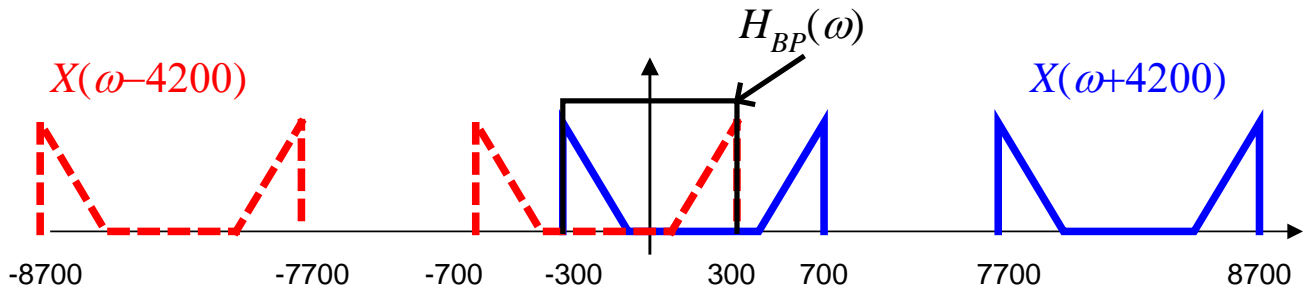


Note: 4200 est un exemple, autres fréquences sont possibles qui gardent une des parties triangulaires en bande de base

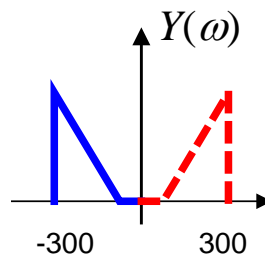
Le spectre après la modulation est



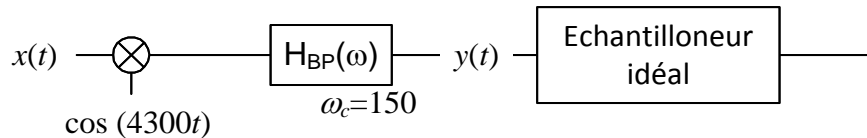
Maintenant il faut filtrer en bande de base pour seulement conserver le signal entre -300 et 300. Le filtre passe-bande syntonisable ($\omega_c=0$) peut servir comme filtre passe-bas.



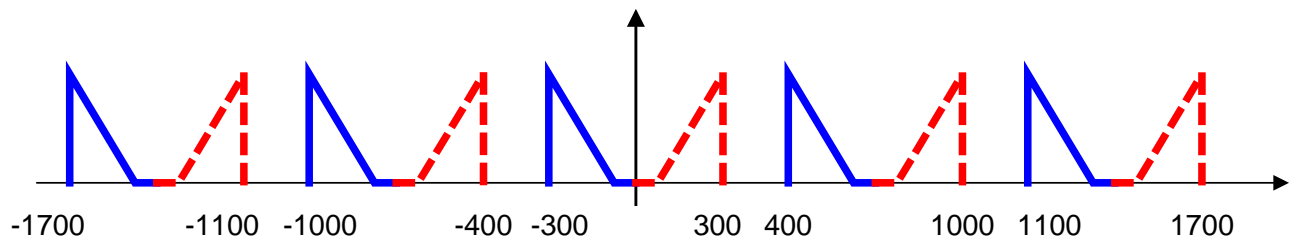
Le signal résultant nous appelons $Y(\omega)$.



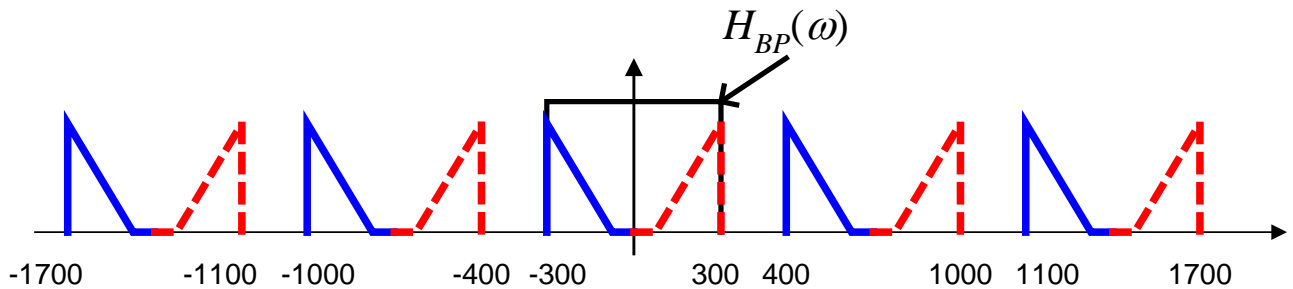
Ce signal nous pouvons échantillonner à un taux d'échantillonnage de 700 sans perte d'information. Voici la conversion analogue vers numérique.



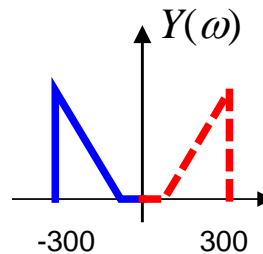
Voici le spectre résultant avec aucun repliement du spectre.



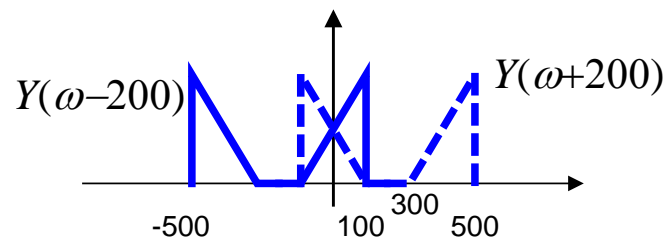
B. Pour reconstruire le signal, la première étape est d'éliminer les copies du spectre créées par l'échantillonnage. Nous utilisons encore le filtre passe-bande comme filtre passe-bas en choisissant $\omega_c=150$.



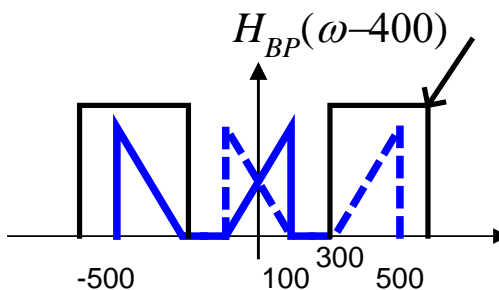
Nous avons donc récupéré



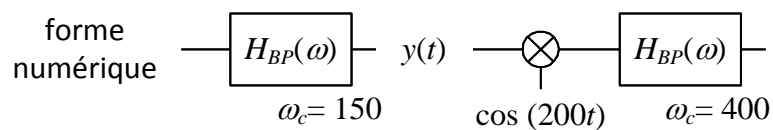
Nous allons maintenant besoin de rapporter le signal aux hautes fréquences, et augmenter la séparation des sections triangulaires. La séparation est maintenant 200, mais nous avons besoin d'une séparation de 600 pour la reconstruction. Donc, nous commençons avec une modulation par $\cos(200t)$ pour avoir



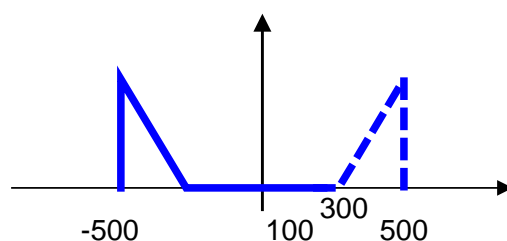
Nous faisons un filtrage pour éliminer le contenu en basses fréquences.



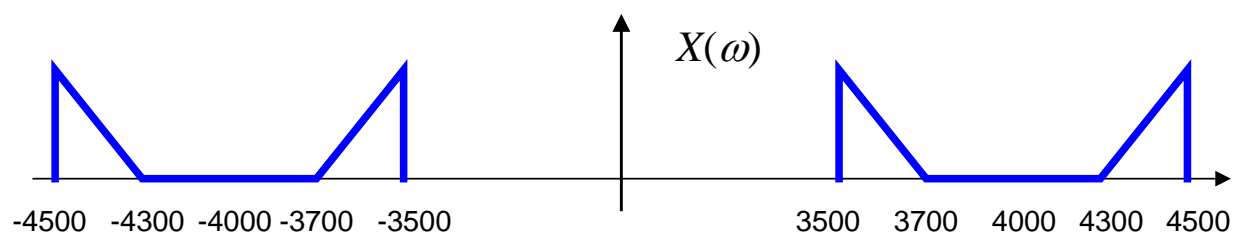
Pour résumer, voici le schème



Le spectre est



Pour finir nous avons besoin de faire une dernière modulation jusqu'à 4000.



Le schéma final est

