GEL-2001 : Analyse des signaux

Solutions du Minitest 1 - A2021

Département de génie Électrique et de génie informatique

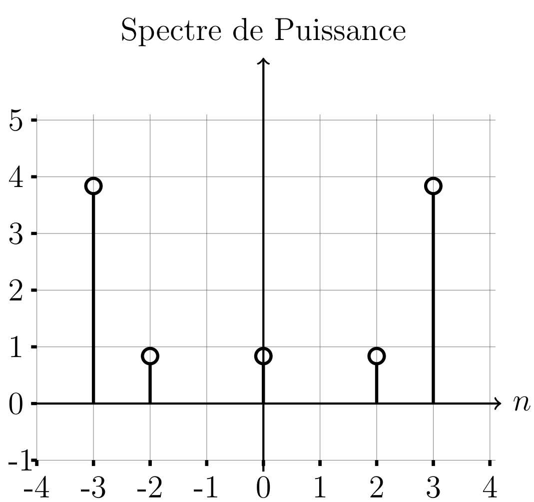
Question 1 (1.5 pt)

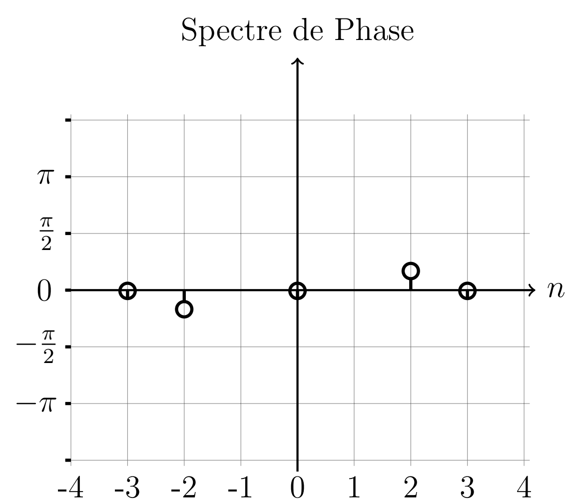
La fréquence fondamentale est $\omega_0 = \pi/2$

$$\begin{aligned} f(t) &= -\sqrt{2}\left(\frac{e^{2j\omega_0 t} - e^{-2j\omega_0 t}}{2j}\right) + \sqrt{2}\left(\frac{e^{2j\omega_0 t} + e^{-2j\omega_0 t}}{2}\right) + 4\left(\frac{e^{3j\omega_0 t} - e^{-3j\omega_0 t}}{2}\right) + 1 \\ &= \frac{\sqrt{2}j}{2}e^{2j\omega_0 t} - \frac{\sqrt{2}j}{2}e^{-2j\omega_0 t} + \frac{\sqrt{2}}{2}e^{2j\omega_0 t} + \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-2j\omega_0 t} + 2e^{3j\omega_0 t} + 2e^{-3j\omega_0 t} + 1 \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} F(0) &= 1 & P(0) &= 1 \\ F(2) &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}j & P(2) &= 1 \\ F(-2) &= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}j & P(-2) &= 1 \\ F(3) &= 2 & P(3) &= 4 \\ F(-3) &= 2 & P(-3) &= 4 \end{aligned}$$

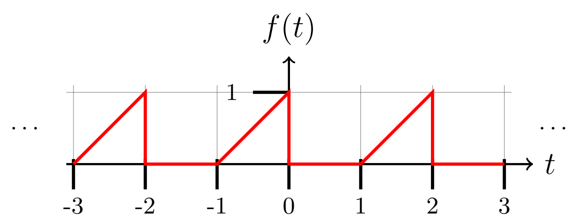
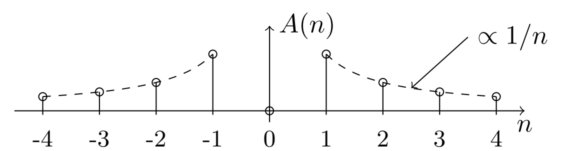
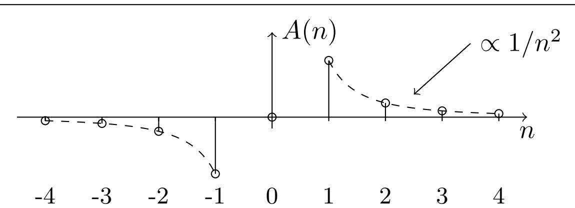




Question 2 (1.8 pts)

Le tableau ci-bas présente des fonctions soit dans le domaine temporel ($f(t)$), soit dans le domaine de Fourier ($F(n) = A(n) + jB(n)$). Les fonctions $f(t)$ et $F(n)$ sont liées par la série de Fourier. Les propriétés de la colonne gauche s'appliquent à $f(t)$, les propriétés de la colonne droite s'applique à $F(n)$.

Pour chaque cas a),b),c) encercler les réponses correctes en i), ii) et iii) dans les cases grises.

a)		$F(n)$ est telle que : i) Décrois. : $1/n$ (f pas cont.) ii) Complexe (f ni paire ni impaire) iii) $F(0) \neq 0$ (moyenne non nulle)
c)	$f(t)$ est une fonction : i) non continue (décroissance en $1/n$) ii) Paire ($A(n)$ pair) iii) Réelle ($A(n)$ pair, $B(n) = 0$)	 $B(n) = 0$
b)	$f(t)$ est une fonction : i) continue (décroissance en $1/n^2$) ii) Impaire ($A(n)$ impair, $B(n)$ impair) iii) Imag. pure ($B(n) = 0$ et $A(n)$ impair)	 $B(n) = 0$

Question 3 (4.2 pts)

On utilise la définition de $F(n)$ avec $T_0 = 1/120$ et pour tenir compte de la valeur absolue, on répète la période sur l'intervalle de 0 à T_0 :

$$
\begin{aligned}
F(n) &= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt \\
&= 120\int_0^{1/120} \sin(120\pi t)e^{-240\pi jnt}dt \\
&= 120\int_0^{1/120} \left[\frac{e^{120j\pi t}-e^{-120j\pi t}}{2j}\right]e^{-240\pi jnt}dt \\
&= -60j\int_0^{1/120} \left[e^{120j\pi t}\right]e^{-240\pi jnt}dt - -60j\int_0^{1/120} \left[e^{-120j\pi t}\right]e^{-240\pi jnt}dt \\
&= -60j\int_0^{1/120} e^{120j\pi t-240\pi jnt}dt + 60j\int_0^{1/120} e^{-120j\pi t-240\pi jnt}dt \\
&= -60j\left.\frac{e^{120j\pi t-240\pi jnt}}{120j\pi-240j\pi n}\right|_0^{1/120} + 60j\left.\frac{e^{-120j\pi t-240\pi jnt}}{-120j\pi-240j\pi n}\right|_0^{1/120} \\
&= -j\left[\frac{e^{120j\pi(1/120)-240\pi jn(1/120)}}{2j\pi-4j\pi n} - \frac{e^{120j\pi(0)-240\pi jn(0)}}{2j\pi-4j\pi n}\right] \\
&\quad + j\left[\frac{e^{-120j\pi(1/120)-240\pi jn(1/120)}}{-2j\pi-4j\pi n} - \frac{e^{-120j\pi(0)-240\pi jn(0)}}{-2j\pi-4j\pi n}\right] \\
&= -j\left[\frac{e^{j\pi-2\pi jn}-1}{2j\pi-4j\pi n}\right] + j\left[\frac{e^{-j\pi-2\pi jn}-1}{-2j\pi-4j\pi n}\right] \\
&= \frac{1}{\pi-2\pi n} + \frac{-1}{-\pi-2\pi n} \\
&= \frac{2}{\pi-4\pi n^2}
\end{aligned}
$$