GEL2001 SOLUTIONNAIRE EXAMEN 1 A2019

Département de génie électrique et de génie informatique

18 octobre 2019

Problème 1 (10 pts)

a) Il est nécessaire de d'abord considérer la version restreinte de la fonction.

$$f_r(t) = \begin{cases} \text{Rect}\left(\frac{t}{2a}\right) & -T_0/2 < t < T_0/2 \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

La transformée de Fourier de cette fonction peut aisément être obtenu à partir de

$$\text{Rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \Leftrightarrow \tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

pour obtenir

$$F_r(\omega) = 2a\text{Sa}\left(\omega a\right).$$

La série de Fourier se calcule avec

$$F(n) = \left.\frac{1}{T_0} F_r(\omega)\right|_{\omega = n\omega_0}$$

et s'écrit donc

$$F(n) = \frac{2a}{T_0}\text{Sa}\left(n\omega_0 a\right).$$

À partir de ce point, il est possible de calculer la transformée de Fourier de la fonction périodique

$$F(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n)\delta(\omega - n\omega_0) = \frac{4a\pi}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(n\omega_0 a\right)\delta(\omega - n\omega_0).$$

b) Pour $n = 1$, $F(1) = F(-1) = \frac{2a}{T_0}\text{Sa}\left(\omega_0 a\right)$ et la puissance se calcule comme

$$P(1) = |F(1)|^2 + |F(-1)|^2,$$
$$P(1) = \frac{8a^2}{T_0^2}\text{Sa}^2\left(\omega_0 a\right).$$

c) Si $T_0 = 4a$, $\omega_0 = \frac{\pi}{2a}$ et

$$F(\omega) = \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{Sa}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \delta\left(\omega - \frac{n\pi}{2a}\right).$$

Il s'agit d'un sinus argument d'amplitude π échantillonné à chaque $\frac{\pi}{2a}$. Comme la fonction est purement réelle, il est choisi de présenter la partie réelle.

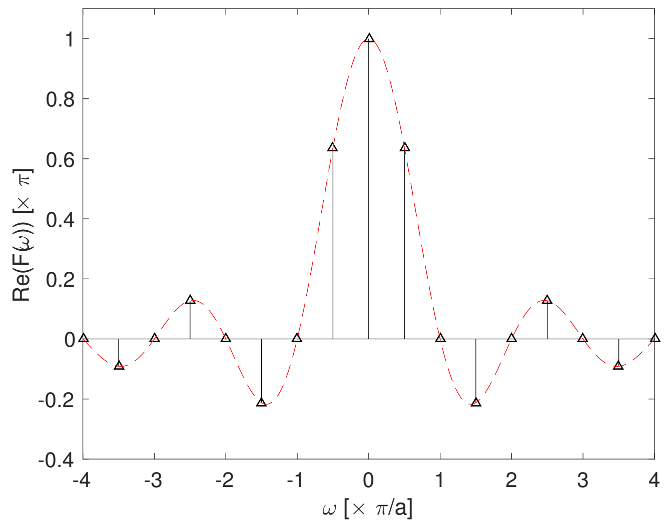

FIGURE 1: Spectre pour $T_0 = 4a$

d) Si $T_0 = \frac{3a}{2}$, $\omega_0 = \frac{4\pi}{3a}$ et

$$F(\omega) = \frac{8\pi}{3} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{Sa}\left(\frac{4n\pi}{3}\right) \delta\left(\omega - \frac{4n\pi}{3a}\right).$$

Il s'agit d'un sinus argument d'amplitude $\frac{8\pi}{3}$ échantillonné à chaque $\frac{4\pi}{3a}$.

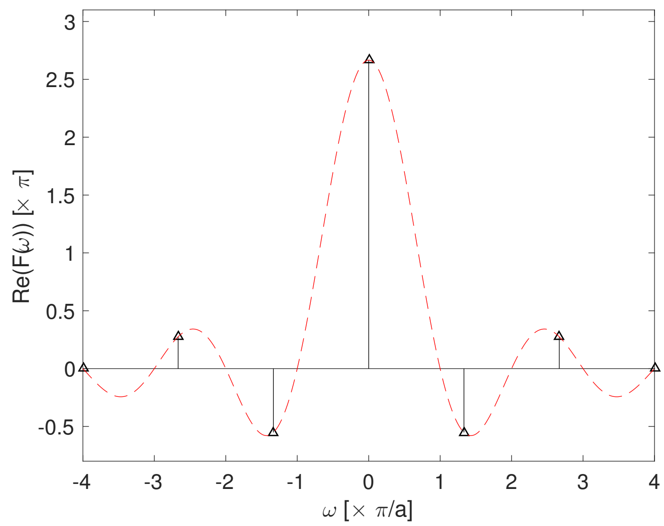

FIGURE 2: Spectre pour $T_0 = 1.5a$

e) La transformée de Fourier d'une boite centrée d'une largeur de a avec une période $T_0 = 1.5a$ est donnée par

$$F(\omega) = \frac{4\pi}{3} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{Sa}\left(\frac{n\omega_0 a}{2}\right) \delta(\omega - n\omega_0)$$

avec $\mathrm{Rect}\left(\frac{t}{a}\right) \Leftrightarrow a\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega a}{2}\right)$. Ce faisant, transformée de Fourier d'une constante moins la boite donne

$$F(\omega) = 4\pi\delta(\omega) - \frac{4\pi}{3} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{Sa}\left(\frac{n\omega_0 a}{2}\right) \delta(\omega - n\omega_0).$$

La courbe bleue de la figure suivante illustre le second terme de l'équation précédente.

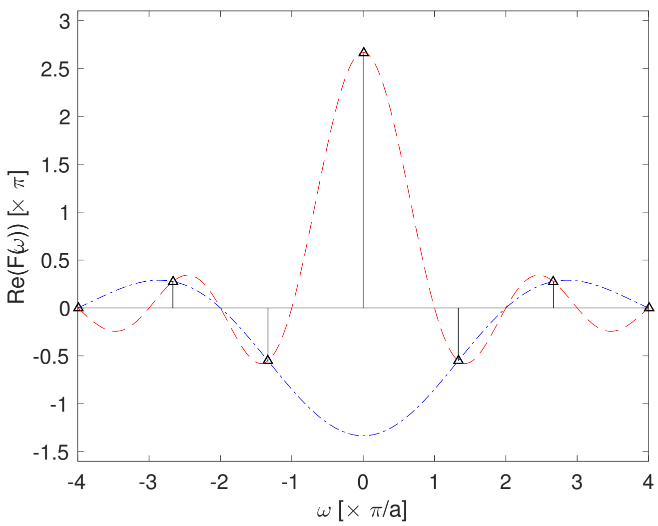

FIGURE 3: Spectre pour $T_0 = 1.5a$ obtenu avec la méthode de la soustraction d'une boite.

Problème 2 (10 pts)

a) La méthode de la dérivée est de mise pour ce problème.

$$\begin{aligned}\frac{df(t)}{dt} &= 2t \quad \text{pour } t \text{ entre 0 et 1}\\ \frac{d^2f(t)}{dt^2} &= 2\text{Rect}(t-1/2) - 2\delta(t-1)\\ \frac{d^3f(t)}{dt^3} &= 2\delta(t) - 2\delta'(t-1) - 2\delta(t-1)\end{aligned}$$

Donc, en passant au domaine de Fourier,

$$\begin{aligned}(j\omega)^3F(\omega) &= 2 - 2(j\omega)\exp(\text{-}j\omega) - 2\exp(\text{-}j\omega),\\ F(\omega) &= \frac{-2}{j\omega^3} + \frac{2\exp(-j\omega)}{\omega^2} + \frac{2\exp(-j\omega)}{j\omega^3}.\end{aligned}$$

Cette réponse est incomplète puisque la valeur $F(0)$ n'est pas obtenue. Pour obtenir celle-ci, on évalue la valeur moyenne de la fonction qui est $\frac{1}{2}$ et donc $F(0) = \frac{1}{2}$. Ainsi,

$$F(\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{-2}{j\omega^3} + \frac{2\exp(-j\omega)}{\omega^2} + \frac{2\exp(-j\omega)}{j\omega^3}.$$

b) Comme la fonction est continue mais que sa dérivée ne l'est pas, la décroissance est en $1/\omega^2$.

c) L'énergie du signal $f(t)$ est infinie puisque la fonction temporelle s'étend de 0 jusqu'à l'infini.

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \infty$$

d) Pour un signal $f(t)$ dont $\lim_{t\to\infty} f(t) = f(\infty)$ et $\lim_{t\to\text{-}\infty} f(t) = f(\text{-}\infty)$ existent, la puissance est donnée par $\left[\frac{1}{2}\left(f(\infty) + f(\text{-}\infty)\right)\right]^2$. La réponse est donc $P = \frac{1}{4}$. Celle valeur aurait aussi pu être obtenue en calculant directement la valeur moyenne de la fonction $F(0) = \frac{1}{2}$ et en appliquant $P = F(0)^2 = \frac{1}{4}$.

Problème 3 (10 pts)

a) L'énergie du signal peut être calculée avec

$$E = \int_{f_1}^{f_2} E(f)df = \int_{-5}^{5} |M(f)|^2 \, df = \frac{10}{3}$$

qui correspond à l'aire sous la courbe du spectre mis au carré. La puissance quant à elle est nulle puisque le signal possède une énergie finie.

b) La fonction $g(t)$ peut s'écrire

$$\begin{aligned} g(t) &= 0.5m(t)\sin(\omega_0 t) + \sin(\omega_0 t) \\ &= 0.5m(t)\frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} + \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} \end{aligned}$$

ce qui devient dans le domaine de Fourier

$$G(\omega) = \frac{1}{4j}M(\omega - \omega_0) - \frac{1}{4j}M(\omega + \omega_0) + \frac{\pi}{j}\delta(\omega - \omega_0) - \frac{\pi}{j}\delta(\omega + \omega_0)$$

en ayant utilisé la propriété du décalage.

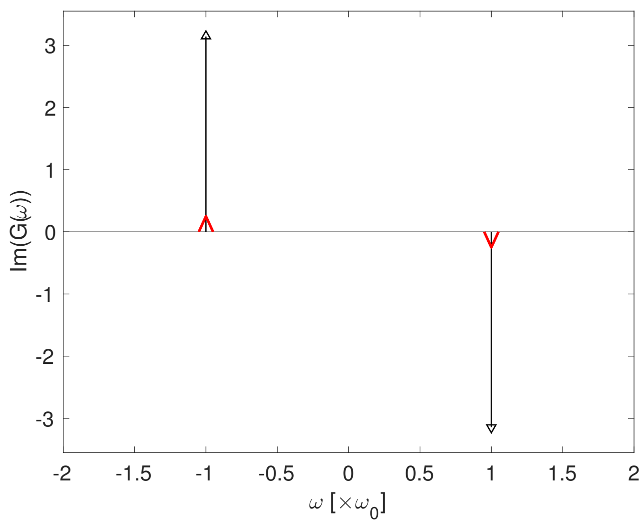

FIGURE 4: Partie imaginaire du spectre pour $g(t)$

c) Le signal $g(t)$ comporte le signal $\sin(\omega_0 t)$ qui est un signal d'énergie infinie alors son énergie est infinie. Pour ce qui est de la puissance, puisque celle de $m(t)$ est nulle, la puissance est définie à partir du signal $\sin(\omega_0 t)$. Ce faisant, la puissance de $g(t)$ est $\frac{1}{2}$.

d) Non, il n'est pas possible de retrouver le signal désiré autour de la fréquence zéro puisque les copies qui s'additionnent à DC sont de signes opposés. Le développement qui suit l'explique.

$$h(t) = 0.5m(t)\sin(\omega_0 t)\cos(\omega_0 t) + \sin(\omega_0 t)\cos(\omega_0 t)$$

ce qui devient

$$h(t) = 0.5m(t)\frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}\frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} + \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}\frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}.$$

En multipliant les exponentielles et utilisant la propriété du décalage, la transformée de Fourier peut s'écrire

$$H(\omega) = \frac{M(\omega - 2\omega_0)}{8j} - \frac{M(\omega + 2\omega_0)}{8j} + \frac{\pi\delta(\omega - 2\omega_0)}{2j} - \frac{\pi\delta(\omega + 2\omega_0)}{2j}$$

où les termes autour de DC ne sont pas présents dans l'équation car ils s'annulent, ce qui est montré par la figure qui suit. Comme la fonction est imaginaire pure, seule la partie imaginaire est tracée.

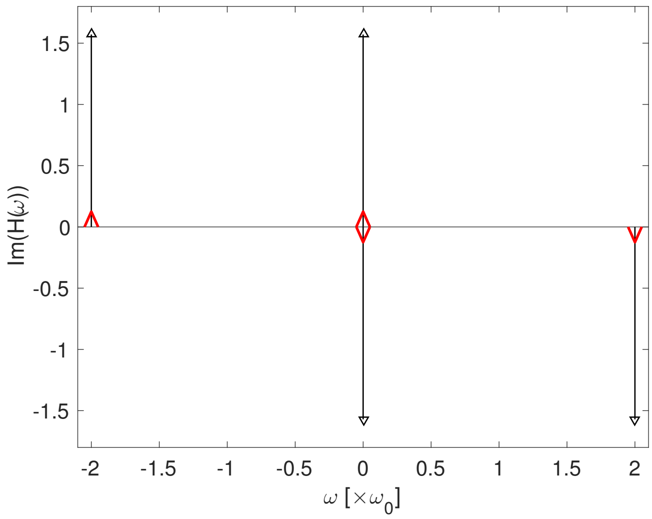

Figure 5: Partie imaginaire du spectre pour $h(t)$

e) Oui, il est possible de retrouver le signal désiré.

$$z(t) = 0.5m(t)\sin(\omega_0 t)\sin(\omega_0 t) + \sin(\omega_0 t)\sin(\omega_0 t)$$

ce qui devient

$$z(t) = 0.5m(t)\frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}\frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} + \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}\frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}.$$

En multipliant les exponentielles et utilisant la propriété du décalage, la transformée de Fourier peut s'écrire

$$Z(\omega) = -\frac{M(\omega - 2\omega_0)}{8} + \frac{M(\omega)}{4} - \frac{M(\omega + 2\omega_0)}{8} - \frac{\pi\delta(\omega - 2\omega_0)}{2} + \pi\delta(\omega) - \frac{\pi\delta(\omega + 2\omega_0)}{2}.$$

f) En raison de la phase de la porteuse qui induit des phases opposées aux copies qui se retrouvent additionnées à DC. Les fonctions sin() et cos() sont des fonctions orthogonales (en quadrature).

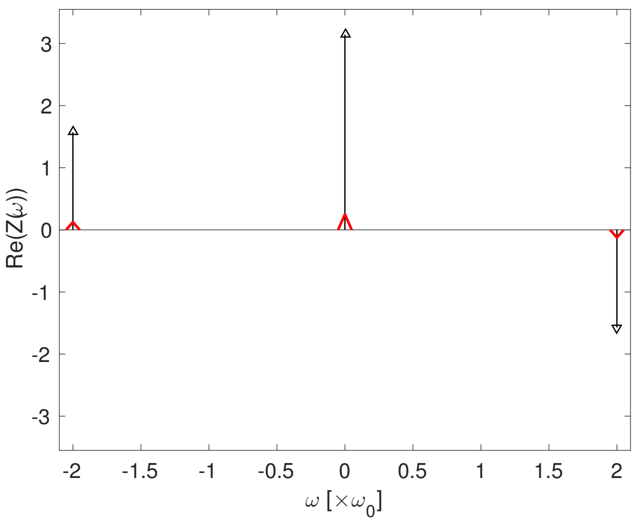

FIGURE 6: Spectre pour $z(t)$

Problème 4 (10 pts)

a) Non, la valeur au centre de la première l'impulsion est $\cos(21\pi) = -1$ et la valeur au centre de la seconde impulsion est $\cos(42\pi) = 1$

b)

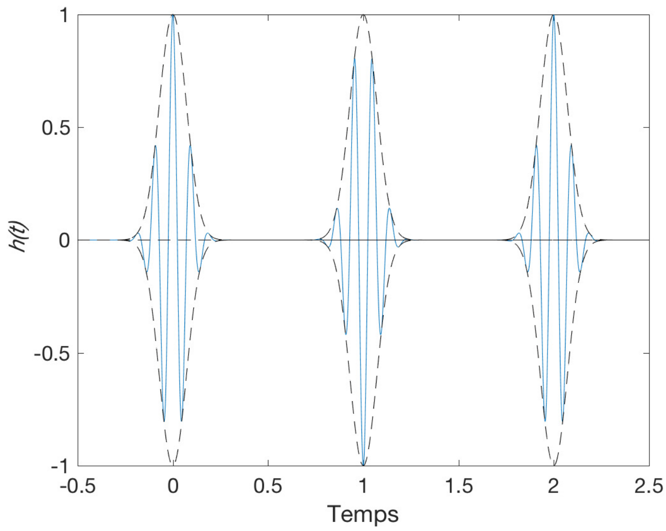

FIGURE 7: Signal temporel

c) La transformée de Fourier de l'expression donnée est obtenue en utilisant la propriété de dilatation

$$f(at) \Leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

de telle sorte que

$$e^{-\pi(at)^2} \Leftrightarrow \frac{1}{a} e^{-\omega^2/4\pi a^2}.$$

En posant $a = \frac{1}{T_p}$, il est possible d'obtenir

$$e^{-\pi t^2/T_p^2} \Leftrightarrow T_p e^{-\omega^2 T_p^2/4\pi}.$$

d) En applicant la propriété du décalage $f(t+a) = e^{j\omega a} F(\omega)$, on obtient

$$e^{-(t-a)^2/T_p^2} \Leftrightarrow T_p e^{-\omega^2 T_p^2/4\pi} e^{j\omega a}.$$

Finalement, en substituant $a = nT_r$

$$\begin{aligned} G(\omega) &= T_p e^{-\omega^2 T_p^2/4\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\omega n T_r}, \\ &= T_p e^{-\omega^2 T_p^2/4\pi} \omega_r \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_r), \\ &= T_p \omega_r e^{-\omega^2 T_p^2/4\pi} \delta_{\omega_r}(\omega). \end{aligned}$$

e) On utilise le résultat précédent ainsi que la propriété $\exp(j\omega_c t) f(t) \Leftrightarrow F(\omega - \omega_c)$ pour écrire

$$H(\omega) = \frac{1}{2} T_p \omega_r \left[e^{-(\omega-\omega_c)^2 T_p^2/4\pi} \delta_{\omega_r}(\omega - \omega_c) + e^{-(\omega+\omega_c)^2 T_p^2/4\pi} \delta_{\omega_r}(\omega + \omega_c) \right].$$

f) L'équation précédente indique que la fonction est composée de 2 enveloppes gaussiennes à $\pm\omega_c$ échantillonées à w_r.

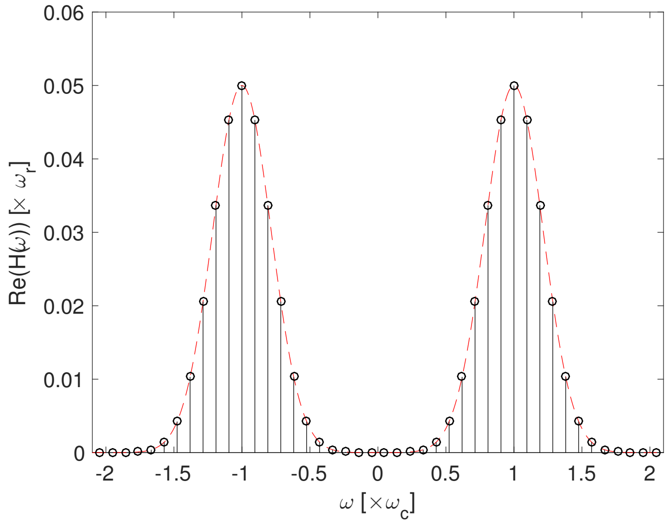

FIGURE 8: Spectre de $H(\omega)$