# GEL-16120 Systèmes de communications

## Examen de mi-session (automne 2006)

*Enseignant :* Jean-Yves Chouinard
*Durée :* 1 heure 50 minutes

---

**Remarques importantes :** Examen à livre fermé. Vous avez droit à une feuille de formules recto-verso, format lettre. Les calculatrices approuvées par la Faculté des sciences et de génie sont permises. Donnez le détail de tous vos calculs.

---

**Question 1 :** **(27 points)**

Soit un message $m(t) = \text{sinc}^2(t)$ et un signal $x(t) = m(t)\cos(2\pi f_c t) + m_h(t)\sin(2\pi f_c t)$, $m_h(t)$ étant la transformée de Hilbert de $m(t)$.

a) Calculez la pré-enveloppe positive $x_+(t)$ de $x(t)$ (en fonction de $m(t)$ et de $m_h(t)$).

b) Déterminez la représentation complexe équivalente de $x(t)$ en bande de base, c'est-à-dire $\tilde{x}(t)$.

c) Calculez le spectre d'amplitude $X(f)$ de $x(t)$ et tracez-le en indiquant les valeurs importantes sur le graphique.

---

**Question 2 :** **(24 points)**

On observe à la sortie d'un modulateur AM (conventionnel) le signal :

$$s_{AM}(t) = 2\cos(1200\pi t) + 4\cos(1600\pi t) + 16\cos(1800\pi t) + 4\cos(2000\pi t) + 2\cos(2400\pi t).$$

a) Donnez le spectre du signal modulé $S_{AM}(f)$ et tracez-le.

b) Pour une sensibilité de modulation AM, $k_a = \frac{1}{4}$, déterminez l'expression du message (signal modulant) $m(t)$ et de la porteuse $c(t)$.

c) Déterminez la densité spectrale de puissance $\mathcal{P}_{AM}(f)$.

d) Calculez l'efficacité en puissance $\eta_{AM}$ du signal $s_{AM}(t)$, définie par :

$$\eta_{AM} = \frac{P_{\text{bandes latérales}}}{P_{\text{totale}}}.$$

---

**Question 3 :** **(24 points)**

Le message $m(t) = 25\text{sinc}(4000t)$ est modulé en fréquence. L'indice de modulation est $\beta_f = 8$ et la porteuse $c(t) = 400\cos(2 \times 10^7 \pi t)$.

a) Déterminez la sensibilité $D_f$ de la modulation FM.

b) Écrivez l'expression du signal modulé $s_{FM}(t)$.

c) Calculez la déviation maximale de fréquence du signal modulé $s_{FM}(t)$.

d) En utilisant la règle de Carson, estimez la largeur de bande effective du signal.

---

**Question 4 :** **(25 points)**

Considérez le signal suivant :

$$s(t) \quad = \quad 200\cos\left[\left(2 \times 10^7 \pi t\right) + 12\sin\left(2 \times 10^3 \pi t\right)\right]$$

a) Déterminez sa puissance moyenne $P$.

b) Quelle est sa déviation maximale de phase ?

c) Quelle est sa déviation maximale de fréquence ?

d) En supposant qu'il s'agisse d'un signal modulé en fréquence, quel est son indice de modulation et quelle est sa largeur de bande effective de transmission ?

e) En supposant maintenant qu'il s'agisse plutôt d'un signal modulé en phase, quel est son indice de modulation et quelle est sa largeur de bande effective de transmission ?

## Identités trigonométriques

$$
\begin{aligned}
\sin^2\theta + \cos^2\theta &= 1 \\
\cos^2\theta &= \frac{1}{2}\left[1+\cos(2\theta)\right] \\
\sin^2\theta &= \frac{1}{2}\left[1-\cos(2\theta)\right] \\
\sin\alpha\sin\beta &= \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right] \\
\cos\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right] \\
\sin\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right]
\end{aligned}
$$

## Transformées de Hilbert

| fonction temporelle : $x(t) = \mathcal{H}^{-1}[x_h(t)]$ | $\Longleftrightarrow$ | transformée de Hilbert : $x_h(t) = \mathcal{H}[x(t)]$ |
|---|---|---|
| $m(t)\cos(2\pi f_c t)$ | $\Longleftrightarrow$ | $m(t)\sin(2\pi f_c t)$ |
| $m(t)\sin(2\pi f_c t)$ | $\Longleftrightarrow$ | $-m(t)\cos(2\pi f_c t)$ |
| $\cos(2\pi f_c t)$ | $\Longleftrightarrow$ | $\sin(2\pi f_c t)$ |
| $\sin(2\pi f_c t)$ | $\Longleftrightarrow$ | $-\cos(2\pi f_c t)$ |
| $\delta(t)$ | $\Longleftrightarrow$ | $\frac{1}{\pi t}$ |
| $\frac{1}{t}$ | $\Longleftrightarrow$ | $-\pi\delta(t)$ |

**Transformées de Fourier**

| domaine temporel : $x(t) = \mathcal{F}^{-1}[X(f)]$ | | domaine fréquentiel : $X(f) = \mathcal{F}[x(t)]$ |
|---|---|---|
| $\prod\left(\frac{t}{T}\right)$ | $\iff$ | $T\ \mathrm{sinc}(fT)$ |
| $\mathrm{sinc}(2Wt)$ | $\iff$ | $\frac{1}{2W}\prod\left(\frac{f}{2W}\right)$ |
| $e^{-at}u(t)$, pour $a > 0$ | $\iff$ | $\frac{1}{a + j2\pi f}$ |
| $e^{-a\|t\|}$, pour $a > 0$ | $\iff$ | $\frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2}$ |
| $\Lambda(t)$ | $\iff$ | $\mathrm{sinc}^2(f)$ |
| $\delta(t)$ | $\iff$ | $1$ |
| $1$ | $\iff$ | $\delta(f)$ |
| $\delta(t - t_0)$ | $\iff$ | $e^{-j2\pi f t_0}$ |
| $e^{j2\pi f_c t}$ | $\iff$ | $\delta(f - f_c)$ |
| $\cos(2\pi f_c t)$ | $\iff$ | $\frac{1}{2}[\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)]$ |
| $\sin(2\pi f_c t)$ | $\iff$ | $\frac{1}{2j}[\delta(f - f_c) - \delta(f + f_c)]$ |
| $\mathrm{sgn}(t)$ | $\iff$ | $\frac{1}{j\pi f}$ |
| $\frac{1}{\pi t}$ | $\iff$ | $-j\ \mathrm{sgn}(f)$ |
| $u(t)$ | $\iff$ | $\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$ |
| $\sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(t - iT_0)$ | $\iff$ | $\frac{1}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - \frac{n}{T_0})$ |