Mat-10364: Mat-Ing-II , examen-type 2, h07, corrigé

Question 1

(a) $\dfrac{\partial R}{\partial x} = \dfrac{x}{R}, \quad \dfrac{\partial R}{\partial y} = 0, \quad \dfrac{\partial R}{\partial z} = \dfrac{z}{R}.$

(b) $\vec{W} = (-zy, 0, xy)$. L'intégrale de W sur la courbe fermée proposée est égale à 4π. Comme la courbe est fermée et que l'intégrale n'est pas nulle, $\vec{W}$ ne peut pas être potentiel.

Question 2

Les deux équations sont satisfaites simultanément si $0 = y = x = z$ ce qui donne un point et $y = 1, x^2 + z^2 = 1$ ce qui donne un cercle de rayon 1 centré en $(0, 1, 0)$ et tracé dans le plan vertical $y = 1$. On le paramétrise comme suit

$$\vec{r}(\theta) = (\cos\theta, 1, \sin\theta).$$

Pour le calcul de la tangente, on observe que le point $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ est le point $\vec{r}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ et que

$$\vec{r}'\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

L'équation de la tangente est

$$\vec{T}(s) = \vec{r}\left(-\frac{\pi}{4}\right) + s\,\vec{r}'\left(-\frac{\pi}{4}\right)) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1+s), 1, \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+s)\right).$$

Question 3

(a) On calcule

$$x^2(t) + y^2(t) = \sin^2(t) + (1 - \cos(t))^2 = 2 - 2\cos(t) = z(t).$$

Chacun des points de la courbe satisfait donc l'équation $z = x^2 + y^2$ qui est celle d'un paraboloïde.

(b) Pour que

$$0 = \vec{r}\cdot\vec{r}' = (\sin(t), 1-\cos(t), 2-2\cos(t))\cdot(\cos(t), \sin(t), -2\sin(t)) = \sin(t)(5-4\cos(t)),$$

il faut que $t = 0, \pi$, car $(5 - 4\cos(t))$ n'est jamais nul. Les points correspondants sont $(0, 0, 0)$ et $(0, 2, 4)$.

(c)

$$\begin{array}{rcl} \vec{v}(\vec{r}(t)) & = & (-1+\cos(t), \sin^2(t), 2-2\cos(t)+\sin(t)) \\ \vec{r}'(t) & = & (\cos(t), \sin(t), -2\sin(t)) \end{array}$$

Donc

$$\int_C \vec{v}\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} (-\cos(t)+\cos^2(t)+\sin^2(t)-4\sin(t)+4\sin(t)\ \cos(t)-4\sin^2(t))\, dt = -\pi.$$

Question 4

On calcule l'élément de longueur

$$ds = \sqrt{(-\sin(t))^2+(\cos(t))^2+(2)^2)}\, dt = \sqrt{5}\, dt.$$

Donc

$$M = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t)+\sin(t))\sqrt{5}\, dt = 2\sqrt{5}.$$

Ainsi

$$\begin{array}{rcl} (\overline{x}, \overline{y}) & = & \frac{1}{2\sqrt{5}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)(\cos(t)+\sin(t))\sqrt{5}\, dt, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)(\cos(t)+\sin(t))\sqrt{5}\, dt \right) \\ & = & (\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4})(1,1). \end{array}$$

Question 5

Pour le côté horizontal $z = b$ on prend x comme paramètre, la paramétrisation est $(x, 0, b), x \in [-a, a]$ donc, $ds = dx$ et

$$J_{0z} = \int_{-a}^{a} x^2\, \sigma\, dx = \sigma \frac{2a^3}{3}.$$

Le calcul est identique pour $z = 0$
Pour le côté vertical $x = a$ on prend z comme paramètre, la paramétrisation est $(a, 0, z), z \in [0, b]$ donc, $ds = dz$ et

$$J_{0z} = \int_0^b a^2\, \sigma\, dx = \sigma\, a^2\, b.$$

Le calcul est identique pour $x = -a$.
Les moment d'inertie s'additionnent, donc le moment d'inertie total est $\sigma\,(2a^2\, b + \frac{4\,a^3}{3})$.

Question 6

(a) Prenons $y = t$ comme paramètre. On est sur le cylindre parabolique, il faut que $z = t^2$, alors que pour être sur le plan, il faut $x = t$. Donc on est sur l'intersection si

$$(x, y, z) = (t, t, t^2), t \in (-\infty, \infty).$$

(b) Les points $A = (2, 2, 4)$ et $B = (3, 3, 9)$, correspondent à $t = 2$ et $t = 3$. Puisque

$$\vec{v}(\vec{r}(t)) = (t^2, 0, t^2 - t)$$

$$\vec{r}'(t) = (1, 1, 2\,t)$$

le travail est donc

$$\int_2^3 (t^2 + 2\,t^3 - 2\,t^2)\,dt = \frac{157}{6}$$

.

Question 7

On calcule la normale principale

$$\vec{N} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = (\cos(v), \sin(v), -\text{cotan}\,\alpha) \times (-u\sin(v), u\cos(v), 0) = (u\text{cotan}\,\alpha\cos v, u\text{cotan}\,\alpha\sin v, u)$$

Par ailleurs, si

$$\vec{S} = \vec{a} - \vec{r} = (-u\cos v, -u\sin v, u\,\text{cotan}\,\alpha),$$

on a bien

$$\vec{N} \cdot \vec{S} = -u^2\,\text{cotan}\,\alpha\,\cos^2 v - -u^2\,\text{cotan}\,\alpha\,\sin^2 v + u^2\,\text{cotan}\,\alpha = 0,$$

ce qui montre que les deux vecteurs sont toujours perpendiculaires.

Question 8

On peut paramétriser comme suit

$$\vec{r}(\theta, y) = (\cos(\theta), y, \sin(\theta)),\ \ y \in [0, 1],\ \ \theta \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

Si on calcule l'élément d'aire, on obtient

$$dA = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \right\| d\theta\,dy = \|(-\sin(\theta), 0, \cos(\theta)) \times (0, 1, 0)\|\,d\theta\,dy = d\theta\,dy.$$

Donc

$$J_z = \int_S (x^2 + y^2)\,\sigma\,dA = 5\int_{y=0}^{1}\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2(\theta) + y^2)\,d\theta\,dy = \frac{25\pi}{12}.$$