Prob 1a

March 6, 2014 8:57 PM

Facteur d'afaiblissement r=0

1) le plus efficace spectralement
(impulsion de Nyquist idéale);
visible dans le graphique du spectre (800 Hz)

2) les lobes secondaires le plus importantes
dans la domaine temporel;
visible dans le diagramme de l'œil
qui est épais au point $t=0$

facteur d'affaiblissement r-1

1) le moins efficace spectralement
visible dans le graphique du spectre (1600 Hz = 2×800 Hz)

2) les lobes secondaires le moins importantes
dans la domaine temporel;
visible dans le diagramme de l'œil
qui est presque un point au moment $t=0$

facteur d'affaiblissement r-.3

1) compromis en efficacité spectrale
visible dans le graphique du spectre (1040 = 1.3×800 Hz)

2) les lobes secondaires le moins importantes
dans la domaine temporel;
visible dans le diagramme de l'œil
qui est mince, mais ~~pas~~ un point à $t=0$.

Prob 1b

March 6, 2014 9:08 PM

L'impulsion Nyquist idéale est un sinus cardinale. Elle est idéale dans la sense d'efficacité spectrale.

$$BW = R_s = 1/T_s$$

Prob 1c

March 6, 2014 9:10 PM

Système A

Le signal transmis est un sinus cardinal.

La transformée de Fourier du signal est un rectangle avec largeur de bande $BW = 1/T$.

Le signal n'est pas coupé par le canal

$$S(f) \cdot H(f) = S(f)$$

donc il n'y a pas d'interférence intersymbole

Système B

Le signal transmis est un rectangle de largeur T.

La transformée de Fourier du signal est un sinus cardinale avec lobe primaire large comme $1/T$ Hz.

Le canal coupera tous les lobes secondaires

$$S(f) \cdot H(f) \neq S(f)$$

donc il aura un étalement temporelle et l'interférence intersymbole

Problème 2

$$\text{Pour les signaux}\quad \begin{aligned} s_1(t) &= 1, && 0 \le t \le 1 \\ s_2(t) &= \cos 2\pi t, && 0 \le t \le 1 \\ s_3(t) &= \cos^2 \pi t, && 0 \le t \le 1 \end{aligned}$$

A. (10 points) Est-ce que ces signaux ont la même énergie? Quelle est l'énergie moyenne par bit?

Calculons l'énergie pour chaque symbole

$$E_1 = \int_0^1 s_1^2(t)\,dt = 1$$

$$E_2 = \int_0^1 s_2^2(t)\,dt = \int_0^1 \cos^2 2\pi t dt = ½\int_0^1 dt + ½\int_0^1 \cos 4\pi t dt$$

$$= ½ + \left.\frac{\sin 4\pi t}{8\pi}\right|_0^1 = ½$$

$$E_3 = \int_0^1 s_3^2(t)\,dt = \int_0^1 \cos^4 \pi t dt = ¼\int_0^1 (1+\cos 2\pi t)^2\, dt + ½\int_0^1 \cos 4\pi t dt$$

$$= ¼\int_0^1 \left(1 + 2\cos 2\pi t + \cos^2 2\pi t\right) dt$$

$$= ¼\int_0^1 \left(1 + 2\cos 2\pi t + ½ + ½\cos 4\pi t\right) dt$$

$$= \frac{3}{8}\int_0^1 dt + ½\int_0^1 \cos 2\pi t dt + \frac{1}{8}\int_0^1 \cos 2\pi t dt = \frac{3}{8}$$

Donc les énergies ne sont pas égales. L'énergie moyenne par symbole est

$$E_S = \frac{1}{3}\left[E_1 + E_2 + E_3\right] = \frac{1}{3}\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{8}\right] = \frac{5}{8}$$

L'énergie moyenne par bit est

$$E_b = \frac{E_S}{\log_2 3} = \frac{5}{8}\frac{1}{1.58} = .39$$

B. (10 points) Donnez une base orthonormée pour ces trois signaux.

$$\psi_1(t) = s_1(t)\big/\sqrt{E_1} = s_1(t) = 1,\ 0 \le t \le 1$$

Pour trouver le deuxième vecteur de base,

$$\theta_2(t) = s_2(t) - \left\langle s_2(t), \psi_1(t)\right\rangle \psi_1(t)$$

$$\left\langle s_2(t), \psi_1(t)\right\rangle = \int_0^1 s_2(t)\,dt = \int_0^1 \cos 2\pi t dt = 0$$

$$\theta_2(t) = s_2(t) \qquad ,$$

$$\psi_2(t) = \frac{\theta_2(t)}{\sqrt{\int_0^1 \theta_2^2(t)\,dt}} = \frac{s_2(t)}{\sqrt{\int_0^1 s_2^2(t)\,dt}} = \sqrt{2}\cos 2\pi t$$

Pour trouver le troisième vecteur de base,

$$\theta_3(t) = s_3(t) - \langle s_3(t), \psi_2(t)\rangle \psi_2(t) - \langle s_3(t), \psi_1(t)\rangle \psi_1(t)$$

$$\begin{aligned}\langle s_3(t), \psi_1(t)\rangle &= \int_0^1 s_3(t)\,dt = \int_0^1 \cos^2 \pi t dt = ½\int_0^1 (1+\cos 2\pi t)\,dt \\ &= ½\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle s_3(t), \psi_2(t)\rangle &= \sqrt{2}\int_0^1 \cos^2 \pi t \cos 2\pi t dt = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^1 (1+\cos 2\pi t)\cos 2\pi t dt\ , \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^1 \cos 2\pi t dt + \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^1 \cos^2 2\pi t dt = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^1 \cos^2 2\pi t dt \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4}\int_0^1 (1+\cos 4\pi t)\,dt = \frac{\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

Avec ces projections nous passons au troisième vecteur de base :

$$\theta_3(t) = \cos^2 \pi t - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{2}\cos 2\pi t = \frac{1}{2}(1+\cos 2\pi t) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\pi t = 0\ ,$$

Nous aurions pu éviter tous ces calculs en observant que $s_3(t) = \cos^2 \pi t = ½ + ½\cos 2\pi t$. Clairement le troisième signal peut être écrit comme une combinaison linéaire des autres signaux $s_3(t) = \cos^2 \pi t = ½ s_1(t) + ½ s_2(t)$, donc l'espace est de dimension deux et le troisième vecteur de base est zéro.

Donc l'espace du signal est de dimension deux avec la base suivante

$$\begin{aligned}\psi_1(t) &= 1 && 0 \le t \le 1 \\ \psi_2(t) &= \sqrt{2}\cos 2\pi t && 0 \le t \le 1\end{aligned}$$

Prob 2

March 6, 2014 9:16 PM

$$\int s_2^2(t)\,dt = \int_0^1 \cos^2 2\pi t\,dt = \int_0^1 \tfrac{1}{2}(1+\cos 4\pi t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_0^1 \cos 4\pi t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin 4\pi t\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\sin 4\pi - \sin 0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(0-0) = \frac{1}{2}$$

$$\int s_3^2(t)\,dt = \int_0^1 \cos^4 \pi t\,dt = \int \tfrac{1}{2}(1+\cos^2 2\pi t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_0^1 \cos^2 2\pi t\,dt = \frac{1}{2} + \int_0^1 \tfrac{1}{2}(1+\cos 4\pi t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\int_0^1 \cos 4\pi t = \frac{3}{4}$$

$$E_1 = 1 \qquad E_2 = \frac{1}{2} \qquad E_3 = \frac{3}{4}$$

$$E_s = \frac{1}{3}\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{4+2+3}{4}\right] = \frac{11}{12}$$

B. $\psi_1(t) = s_1(t) = 1 \qquad 0 \le t \le 1$

$$\theta_2 = s_2(t) - \langle \psi_1, s_2 \rangle$$

$$\langle \psi_1, s_2 \rangle = \int_0^1 s_2(t)\cdot 1\,dt = \int_0^1 \cos 2\pi t\,dt = 0$$

$$\theta_2 = s_2 \qquad \psi_1 = \frac{\theta_2}{\sqrt{E_{\theta_2}}} = \frac{s_2}{\sqrt{E_2}}$$

$$= \sqrt{2}\, s_2(t)$$

$$= \sqrt{2}\cos 2\pi t \qquad 0 \le t \le 1$$

$$\theta_3 = s_3 - \langle \psi_1, s_3 \rangle - \langle \psi_2, s_3 \rangle$$

$$\langle \psi_1, s_3 \rangle = \int_0^1 \cos^2 \pi t \cdot 1 \, dt = \frac{1}{2} \int_0^1 (1 + \cos 2\pi t) \, dt$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\langle \psi_2, s_3 \rangle = \sqrt{2} \int_0^1 \cos^2 \pi t \cos 2\pi t \, dt = \sqrt{2} \int_0^1 \frac{1}{2} (1 + \cos 2\pi t) \cos 2\pi t \, dt$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^1 \cos 2\pi t \, dt + \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^1 \cos^2 2\pi t \, dt$$

$$= 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^1 \frac{1}{2} (1 + \cos 4\pi t) \, dt$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\theta_3 = \cos^2 \pi t - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} \sqrt{2} \cos 2\pi t$$

$$= \frac{1}{2} (1 + \cos 2\pi t) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\pi t$$

$$= 0$$

espace de dimension 2

$\psi_1(t) = 1 \qquad 1 \leq t \leq 1$

$\psi_2(t) = \sqrt{2} \cos 2\pi t \qquad 0 \leq t \leq 1$

Prob 3a

March 6, 2014 10:04 PM

A: 8PAM pulse amplitude modulation
seulement l'amplitude de la partie
en quadrature est modulé;

B: 8 QAM l'amplitude et la phase est modulé,
i.e. espace de 2 dimensions

C: 8 PSK seulement la phase est modulé;
l'amplitude est toujours $= \underline{1}$

D: 8FSK chaque fréquence est une dimension

Prob 3b

March 6, 2014 10:07 PM

Dans l'espace du signal l'energie est (la distance à l'origin)^2. Pour la constellation D, la distance à l'origin est $\sqrt{E_s}$ pour chaque symbol.

L'energie moyenne par symbole $= \frac{1}{8} \sum_{i=1}^{8} (\sqrt{E_s})^2$

$$= \frac{8 E_s}{8} = E_s$$

Nous sommes donné que E_s est l'energie moyenne par symbole, donc les coordonées respect

distance à l'origine = $\sqrt{\text{energie}}$

Prob 3c

March 6, 2014 10:13 PM

$R_b = 1\ \text{Mb/s}$ $\quad R_s = 1\ \text{Mb/s} \times \frac{\text{symbol}}{3\ \text{bit}} = \frac{1}{3}\ \text{M symbols/sec}$

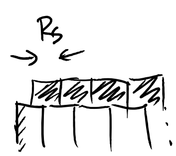
$BW = R_s = \frac{1}{3}\ \text{MHz}$

Constellation A: $BW = \frac{1}{3}\ \text{MHz}$ seulement en quadrature

B: $BW = \frac{1}{3}\ \text{MHz}$ en phase et en quadrature superposé spectralement

C: $BW = \frac{1}{3}\ \text{MHz}$ en phase et en quadrature superposé spectralement

D: $BW = 4.5\ \frac{1}{3}\ \text{MHz}$ une bande par fréquence, separation minimale de $1/2T_s = R_s/2$



$= \frac{9}{6}\ \text{MHz}$

efficacité spectrale

A: $\frac{R_b}{BW} = \frac{1\ \text{MHz}}{1/3\ \text{MHz}} = 3\ \text{b/s/Hz}$

B: $\frac{R_b}{BW} = \frac{1\ \text{MHz}}{1/3\ \text{MHz}} = 3\ \text{b/s/Hz}$

C: $\frac{R_b}{\ } = \frac{1\ \text{MHz}}{\ } = 3\ \text{b/s/Hz}$

C: $\frac{R_b}{BW} = \frac{1\ MHz}{1/3\ MHz} = 3\ b/s/Hz$

D: $\frac{R_b}{BW} = \frac{1\ MHz}{9/6\ MHz} = 6/9 = 2/3$

or $\frac{2\log_2 8}{8+1} = \frac{2 \cdot 3}{9} = 2/3$ ✓

Prob 3d

March 6, 2014 10:33 PM

A: $\left((1)^2+(3)^2+5^2+7^2\right)2 =$

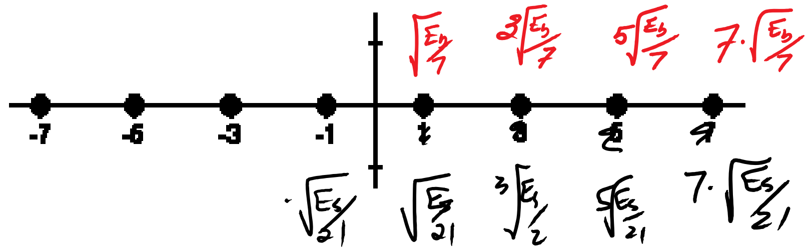
$(1+9+25+49)2 = (50+34)2 = 84\cdot 2 = 168$

$$(\tilde{a}_n^I, \tilde{a}_n^Q) = \sqrt{\frac{8\,E_s}{168}}\cdot(a_n^I, a_n^Q)$$

$$= \sqrt{E_s/21}\,(a_n^I, a_n^Q)$$

$E_s = E_b \log_2 M = 3E_b$

$$= \sqrt{\frac{3E_b}{21}} = \sqrt{E_b/7}$$



B $\left[(1)^2+(1^2)\right]\cdot 4 + \left[(1)^2+(3)^2\right]\cdot 4$

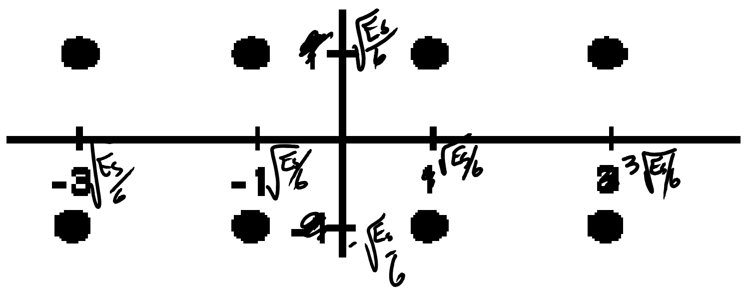
$= 8 + 40 = 48$

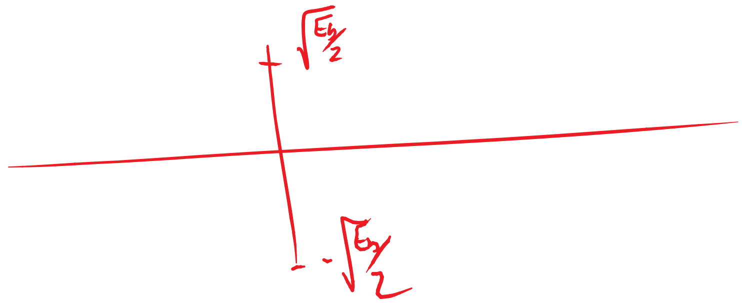
$$(\tilde{a}_n^I, \tilde{a}_n^Q) = \sqrt{\frac{8\,E_s}{48}}\cdot(a_n^I, a_n^Q)$$

$$= \sqrt{E_s/6}\,(a_n^I, a_n^Q)$$

$E_b \cdot \log_2 8 = E_s$

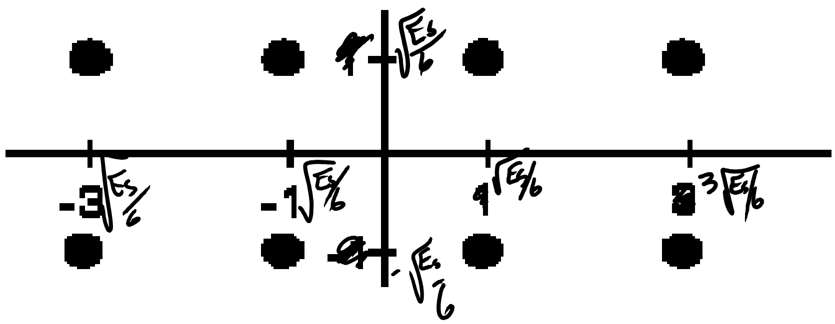
$\sqrt{E_s} = \sqrt{3E_b} = \sqrt{E_b/2}$


$1\sqrt{E_s/6}$
$-3\sqrt{E_s/6}$
$-1\sqrt{E_s/6}$
$1\sqrt{E_s/6}$
$3\sqrt{E_s/6}$
$-\sqrt{E_s/6}$


$\sqrt{E_s/2}$
$-\sqrt{E_s/2}$

$$(a_n^{I}, a_n^{Q}) = \sqrt{\frac{8E_s}{48}} \cdot (a_n, a_n')$$

$$= \sqrt{\frac{E_s}{6}}\,(a_n^I, a_n^Q)$$



Prob 3e

March 6, 2014 10:39 PM

E. Pour constellation A,

$$D_{min} = 2 \cdot \sqrt{E_s/21}$$

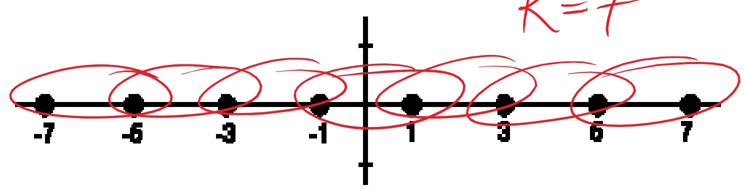
$E_s = E_b \cdot \log_2 M = 3E_b$

$2\sqrt{3E_b/21} = 2\sqrt{E_b/7}$

$$\Rightarrow P_e = \frac{2K}{M} Q\left(\frac{D_{min}}{\sqrt{2N_0}}\right)$$

$M=8$

$K=7$



$$P_e = \frac{7}{4} Q\left(2 \frac{\sqrt{E_b/7}}{\sqrt{2N_0}}\right) = \frac{7}{4} Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{7N_0}}\right)$$

$$= \frac{7}{4} Q\left(\sqrt{\frac{2}{7}} \cdot \sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) = \frac{7}{4} Q\left(\frac{1}{\sqrt{7}} \cdot \sqrt{2E_b/N_0}\right)$$

Prob 3f

March 6, 2014 10:44 PM

F: QPSK : $\propto Q\left(\sqrt{2E_b/N_0}\right)$

Const A : $\propto Q\left(\sqrt{\frac{1}{7}} \cdot \sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$

perte par rapport à QPSK

$$-10\log_{10}\left(\frac{1}{7}\right) = 8.4\text{ dB}$$

Prob 3g

March 6, 2014 10:46 PM

Const A : perte 8.4 dB

$P_e = 10^{-5}$ @ $\frac{E_b}{N_0} = 10$ dB pour QPSK

$\Rightarrow \frac{E_b}{N_0} = 10 + 8.4$ dB pour const A

$= 18.4$ dB

$\eta = 3$ b/s/Hz

$\Rightarrow$ coordonnées (18.4 dB, 3 b/s/Hz)