GEL-2001 83320 : Analyse des signaux

Mini-test 2 A2010 : Solutions

Département de génie électrique et de génie informatique

Problème 1 (1 point)

a)

On demande si $F(\omega)G(\omega) = f(t)$ x $g(t)$. La réponse est faux, car
$F(\omega)G(\omega) \Longleftrightarrow f(t) * g(t)$.

b)

On demande si un système linéaire et invariant dans le temps ayant une fonction de transfert imaginaire pure peut être causal. La réponse est faux, car une fonction de transfert imaginaire pure implique que $h(t)$ doit être anti symétrique. Dans ce cas, la fonction est non causale car $h(t)$ n'est pas nulle pour tout les $t < 0$.

c)

On demande si le filtre $\mathrm{e}^{-j\omega}/(1 - j\omega\tau)$ est causal. La réponse est faux, car la fonction $h(t)$ est $\frac{1}{\tau}\mathrm{e}^{\frac{1}{\tau}(t-1)}U(-(t-1))$ est stable, mais non causale.

d)

On demande si un système qui transforme un sinus en onde carrée peut être linéaire et invariant dans le temps. La réponse est faux, car un tel le système serait invariant dans le temps mais non linéaire. En effet, un système linéaire et invariant dans le temps peut seulement changer l'amplitude et la phase d'un sinus.

Problème 3 (2 points)

a)

On demande de trouver la fonction de transfert $H(\omega)$ en module et phase. Pour trouver la fonction de transfert, on débute avec la règle du diviseur de tension. Donc :

$$H(\omega) = \frac{\frac{1}{jC\omega} + R}{\frac{1}{jC\omega} + R + jL\omega} = \frac{1 + jRC\omega}{jRC\omega + 1 - LC\omega^2}.$$

Le module est :

$$|H(\omega)| = \frac{|num|}{|denum|} = \frac{\sqrt{real^2 + imag^2}}{\sqrt{real^2 + imag^2}} = \frac{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2}}.$$

La phase est :

$$\angle H(\omega) = \angle num - \angle denum = atan(\frac{\omega RC}{1}) - atan(\frac{\omega RC}{1 - \omega^2 LC}) + \pi \mathrm{u}(-\mathrm{sgn}(1 - \omega^2 LC)).$$

où $\mathrm{u}(t)$ est la fonction échelon et $\mathrm{sgn}(t)$ vaut 1 lorsque t est positif et -1 lorsqu'il est négatif. Le dernier terme de l'expression représente donc un saut de phase de π lorsque le dénominateur du deuxième terme devient négatif.

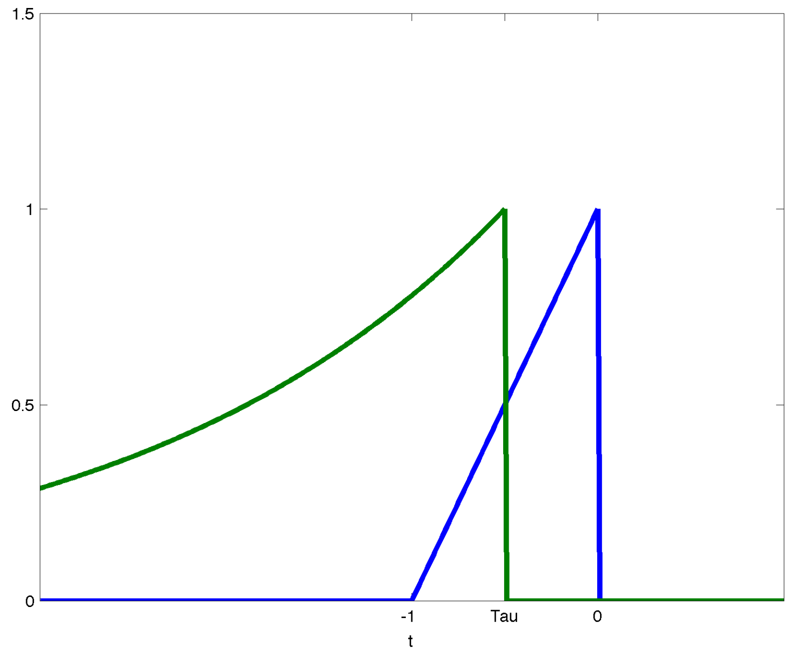
b)

On demande le spectre de sortie si $X(\omega) = Tri(\omega)$, $\omega = 1$, $R = 1$, $C = 1$ et $L = 1$.

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) = Tri(\omega)H(\omega) = Tri(\omega)\frac{1 + j}{1 + j - 1} = Tri(1)(1 - j) = 0(1 - j) = 0.$$

Question 2

On désire calculer la convolution d'une exponentielle décroissante et d'une rampe fenêtrée. Les fonctions à multiplier et intégrer sont illustrées dans le graphique qui suit :



En balayant τ, on distingue trois zones où les intégrales à calculer diffèrent.
Pour $\tau < -1$, les deux fonctions ne se recouvrent pas, donc $(x * h)(\tau) = 0$:
Pour $1 < \tau < 0$, on a

$$(x * h)(\tau) = \int_{-1}^{\tau} \exp(\frac{t - \tau}{RC})(t + 1)dt$$

Pour $\tau > 0$, on a :

$$(x * h)(\tau) = \int_{-1}^{0} \exp(\frac{t - \tau}{RC})(t + 1)dt$$

On remarque que la borne d'intégration supérieure est la seule chose qui diffère entre les deux dernières zones. Afin d'éviter de faire les mêmes calcules plusieurs fois, on calcule cette intégrale avec un paramètre, a, comme borne supérieure :

$$
\begin{aligned}
(x*h)(\tau) &= \int_{-1}^{a} \exp(\frac{t-\tau}{RC})(t+1)dt \\
&= \exp(-\frac{\tau}{RC}) \int_{-1}^{a} \exp\frac{t}{RC}(t+1)dt \\
&= \exp(-\frac{\tau}{RC})\ [RC\exp(\frac{t}{RC})\Big|_{-1}^{a} + RCt\,\exp(\frac{t}{RC})\Big|_{-1}^{a} - \int_{-1}^{a} RC\exp\frac{t}{RC}dt] \\
&= \exp(-\frac{\tau}{RC})\ [RC\exp(\frac{t}{RC})\Big|_{-1}^{a} + RCt\,\exp(\frac{t}{RC})\Big|_{-1}^{a} - (RC)^2\,\exp\frac{t}{RC}\Big|_{-1}^{a}] \\
&= \exp(-\frac{\tau}{RC})\left[(RC+RCt-(RC)^2)\exp\frac{t}{RC}\right]_{-1}^{a}
\end{aligned}
$$

Il reste maintenant à substituer les bonnes bornes pour chaque zone d'intégration. Donc, pour $1 < \tau < 0$, on a

$$
\begin{aligned}
(x*h)(\tau) &= \exp(-\frac{\tau}{RC})\left[(RC+RCt-(RC)^2)\exp\frac{t}{RC}\right]_{-1}^{\tau} \\
&= \exp(-\frac{\tau}{RC})\left[(RC+RC\tau-(RC)^2)\exp\frac{\tau}{RC} + (RC)^2\exp(-\frac{1}{RC})\right]
\end{aligned}
$$

Pour $\tau > 0$, on obtient

$$
\begin{aligned}
(x*h)(\tau) &= \exp(-\frac{\tau}{RC})\left[(RC+RCt-(RC)^2)\exp(\frac{t}{RC})\right]_{-1}^{0} \\
&= \exp(-\frac{\tau}{RC})\left[RC-(RC)^2+(RC)^2\exp(-\frac{1}{RC})\right]
\end{aligned}
$$

$$
(x*h)(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{si } \tau < -1; \\ \exp(-\frac{\tau}{RC})\left[(RC+RC\tau-(RC)^2)\exp\frac{\tau}{RC} + (RC)^2\exp(-\frac{1}{RC})\right] & \text{si } -1 < \tau < 0; \\ \exp(-\frac{\tau}{RC})\left[RC-(RC)^2+(RC)^2\exp(-\frac{1}{RC})\right] & \text{si } \tau > 0. \end{cases}
$$