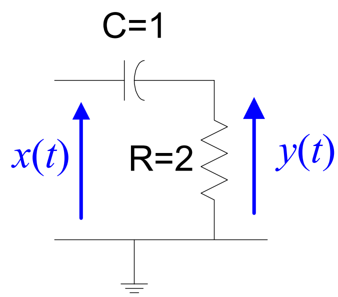
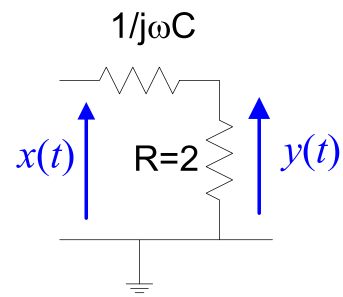
2002 Examen final - *Solutions*

Problème 1





En remplaçant le condensateur par son impédance complexe, nous obtenons le diviseur de tension à droite. La relation entre les transformée de Fourier de l'entrée et la sortie est donc

$$H(\omega)=\frac{Y(\omega)}{X(\omega)}=\frac{R}{\frac{1}{j\omega C}+R}=\frac{j\omega RC}{1+j\omega RC}=\frac{j\omega}{1/RC+j\omega}=\frac{j\omega}{1/2+j\omega}$$

Pour chercher la transformée inverse (c'est à dire la réponse impulsionnelle), nous regardons le table de transformées

$$e^{-t/RC}U(t)\Leftrightarrow\frac{1}{1/RC+j\omega}$$
$$\frac{d}{dt}e^{-t/RC}U(t)\Leftrightarrow\frac{j\omega}{1/RC+j\omega}$$

Donc, il faut évaluer la dérivée

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}e^{-t/RC}U(t)&=U(t)\frac{d}{dt}e^{-t/RC}+e^{-t/RC}\frac{d}{dt}U(t)\\&=U(t)\frac{-1}{RC}e^{-t/RC}+e^{-t/RC}\delta(t)\\&=\delta(t)-\frac{1}{RC}e^{-t/RC}U(t)\end{aligned}$$

Pour *R*=1 et *C*=2, a réponse impulsionnelle est donc

$$\boxed{\delta(t)-\frac{1}{2}e^{-t/2}U(t)}$$

b) Voir aussi devoir pour chapitre 6, problème 9e, et transparents de chapitre 6, page 5 « Réponse à un signal périodique ». L'entrée est un train des exponentiels complexes, soit la représentation en série de Fourier d'une fonction périodique. Comme le système est linéaire, la sortie sera aussi périodique, soit

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} H(n\omega_0) X(n) e^{jn\omega_0 t}$$

Nous savons déjà les coefficients

$$X(\omega) = \frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi/2}$$

et la fréquence fondamentale est donné dans l'exponentielle de la représentation en série de Fourier de l'entrée, soit $\pi/2$. La sortie est donc

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{jn\omega_0}{1/2 + jn\omega_0} \frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi/2} e^{jn\pi t/2} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{j\,n\pi/2}{1/2 + j\,n\pi/2} \frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi/2} e^{jn\pi t/2} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{j\sin(n\pi/2)}{1/2 + j\,n\pi/2} e^{jn\pi t/2} \end{aligned}$$

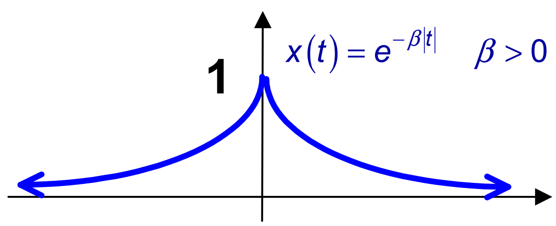
Nous pouvons simplifier le sinus, en exploitant

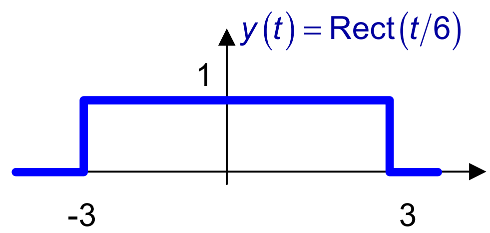
$$\sin\frac{n\pi}{2} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \quad n \text{ impair}$$

Donc,

$$\boxed{y(t) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \text{ impair}}}^{+\infty} \frac{2j(-1)^{(n-1)/2}}{1 + jn\pi} e^{jn\pi t/2}}$$

Problème 2

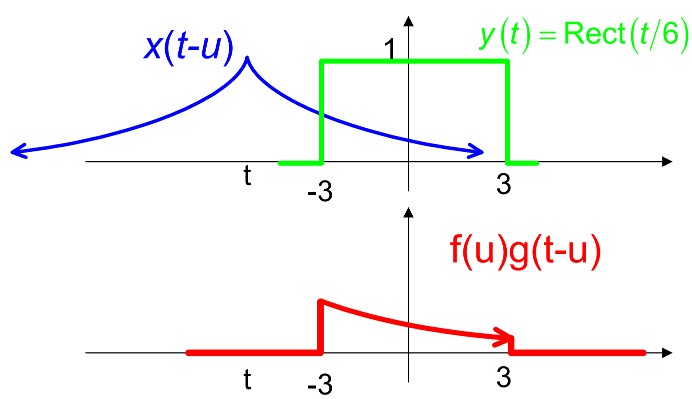




Prenons l'exponentielle pour faire le déplacement. L'équation de *x*(*t*-*u*) est

$$x(t-u) = e^{-\beta|t-u|} \quad = \begin{cases} e^{-\beta(u-t)} & t \le u \\ e^{-\beta(t-u)} & t > u \end{cases}$$

Il y a trois régions de définition pour la convolution et il y a toujours de recouvrement entre les deux fonctions étant donné que l'exponentielle va de moins infini à infini. Pour *t* < -3, nous avons cette situation :



Donc la convolution dans cette région est

$$f * g = \int_{-3}^{3} e^{\beta|t-u|} du \qquad t < -3$$

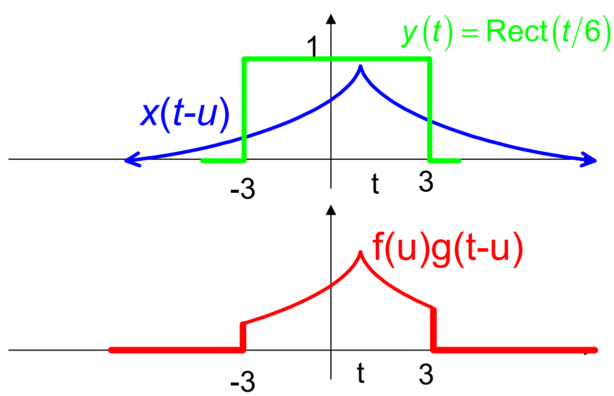
Pour évaluer l'intégrale il faut remplacer la valeur absolue par soit *t-u* ou *u-t*. Nous savons que *t* < -3; dans l'intervalle d'intégration, -3 < *u* < 3; donc u>t et la valeur absolue de la différence est *u-t.*

$$f * g = \int_{-3}^{3} e^{-\beta(u-t)} du \qquad t < -3$$

$$= e^{\beta t} \int_{-3}^{3} e^{-\beta u} du = -e^{\beta t} \left. \frac{e^{-\beta u}}{\beta} \right|_{-3}^{3}$$

$$= \frac{e^{\beta t}}{\beta} \left(e^{3\beta} - e^{-3\beta} \right) = \frac{2e^{\beta t}}{\beta} \sinh 3\beta$$

Quand -3 < t < 3 nous avons le graphique



Pour évaluer l'intégrale il faut encore remplacer la valeur absolue par soit *t-u* ou *u-t*. Nous savons que pour -3 < u < t nous avons une exponentielle, et une autre pour t < u < 3. Donc, il faut séparer l'intégrale en deux pour être capable d'enlever la valeur absolue.

$$f * g = \int_{-3}^{3} e^{\beta|t-u|} du \qquad -3 < t < 3$$

$$= \int_{-3}^{t} e^{\beta|t-u|} du + \int_{t}^{3} e^{\beta|t-u|} du$$

Pour chaque intégrale nous pouvons maintenant enlever la valeur absolue. Dans la première intégrale -3 < u < t et la valeur absolue est *t-u*; pour la deuxième, t < u < 3; donc u>t et la valeur absolue de la différence est *u-t.*

$$f * g = \int_{-3}^{t} e^{\beta|t-u|} du + \int_{t}^{3} e^{\beta|t-u|} du \qquad -3 < t < 3$$

$$= \int_{-3}^{t} e^{\beta(u-t)} du + \int_{t}^{3} e^{\beta(t-u)} du$$

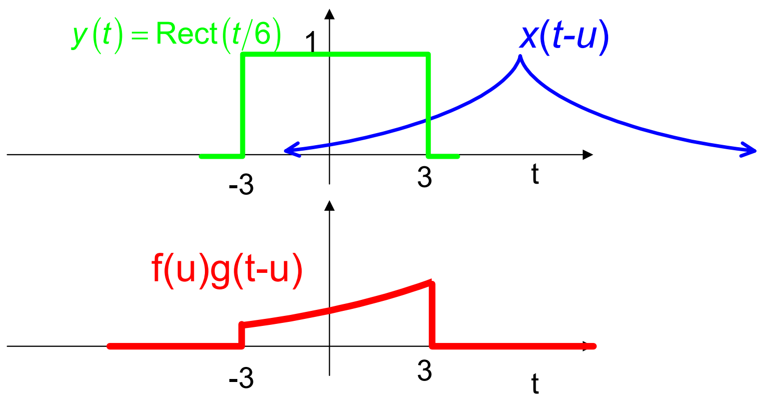
$$= e^{-\beta t} \int_{-3}^{t} e^{\beta u} du + e^{\beta t} \int_{t}^{3} e^{-\beta u} du$$

$$f*g = e^{-\beta t}\left.\frac{e^{\beta u}}{\beta}\right|_{-3}^{t} - e^{\beta t}\left.\frac{e^{-\beta u}}{\beta}\right|_{t}^{3} = \frac{1}{\beta}\left[e^{-\beta t}e^{\beta t} - e^{-\beta t}e^{-3\beta} - e^{\beta t}e^{-3\beta} + e^{\beta t}e^{-\beta t}\right]$$

$$= \frac{1}{\beta}\left[1 - e^{-\beta t}e^{-3\beta} - e^{\beta t}e^{-3\beta} + 1\right] = \frac{1}{\beta}\left[2 - e^{-3\beta}\left(e^{-\beta t} + e^{\beta t}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\beta}\left[2 - e^{-3\beta}2\cosh\beta t\right] = \frac{2}{\beta}\left[1 - e^{-3\beta}\cosh\beta t\right]$$

Pour la dernière région de définition, nous avons



L'intégrale de convolution donc couvre l'intervalle de zéro vers *t*:

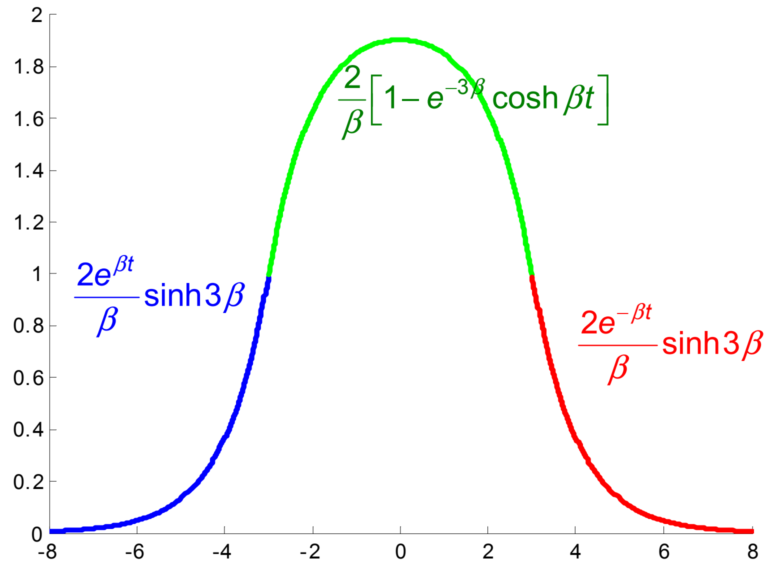
$$f*g = \int_{-3}^{3} e^{-\beta(t-u)}du \qquad t>3$$

$$= e^{-\beta t}\int_{-3}^{3} e^{\beta u}du = e^{-\beta t}\left.\frac{e^{\beta u}}{\beta}\right|_{-3}^{3}$$

$$= \frac{e^{-\beta t}}{\beta}\left(e^{3\beta} - e^{-3\beta}\right) = \frac{2e^{-\beta t}}{\beta}\sinh 3\beta$$

La convolution est donc

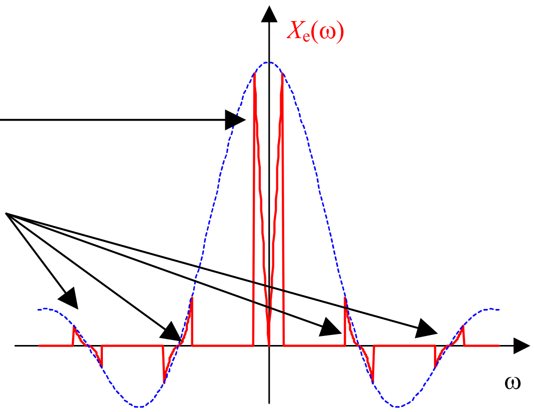
$$\boxed{f * g = \begin{cases} \dfrac{2e^{\beta t}}{\beta}\sinh 3\beta & t < -3 \\ \dfrac{2}{\beta}\left[1 - e^{-3\beta}\cosh \beta t\right] & -3 < t < 3 \\ \dfrac{2e^{-\beta t}}{\beta}\sinh 3\beta & t > 3 \end{cases}}$$



Problème 3

Le bloqueur d'ordre zéro a deux défis :

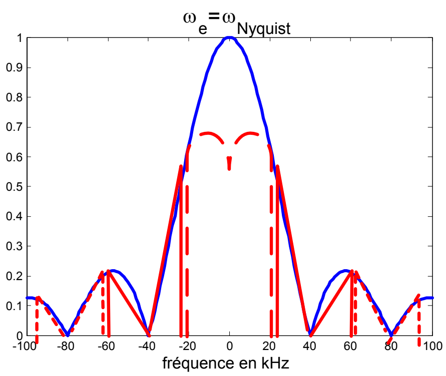
1) la distorsion introduite dans le spectre du message en bande de base, et
2) les « images » du spectre qui sont centrés aux harmoniques de la fréquence d'échantillonnage



En faisant un échantillonnage très élevé, nous pouvons facilement éviter ces deux problèmes.

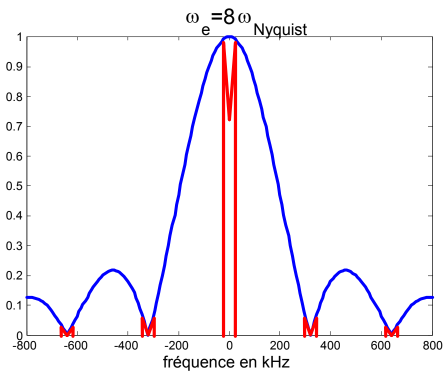
Nous savons que notre oreille peut juste entendre les sons en bas de 20 kHz, donc la musique sur un disque est limitée en bande à 20 kHz. La fréquence de Nyquist est deux fois la fréquence maximale, donc 40 kHz. Il faut considérer ce graphique générique pour les deux cas spécifiques : $\omega_e=\omega_{Nyquist}$ et $\omega_e=8\omega_{Nyquist}$.

Voici la situation pour $\omega_e=\omega_{Nyquist}$.



Le largueur de bande du signal remplie la plupart du lobe primaire du sync. Celui introduit beaucoup de distorsion. Les images sont très larges par rapport aux lobes secondaires du sync, donc elles sont très peut atténuées. Ce bloqueur aura besoin d'un très bon filtre passe-bas et aussi un filtre pour compenser, ou égaliser, la distorsion en bande de base.

Voici la situation pour $\omega_e=8\omega_{Nyquist}$.



Le largueur de bande du signal sur-échantillonné est beaucoup plus petit que le lobe primaire du sync. Celui introduit presque pas de distorsion étant donnée que le sync est assez plat proche de zéro. (Ca correspond à notre intuition qu'une échantillonnage plus vite doit aider les systèmes de bien représenter les hautes fréquences). Les images sont aussi très atténuées, parce que le largueur de bande de la musique est très petit et représente une région où le sync est très petit. Le système aura ***pas besoin d'un filtre passe-bas (les images sont déjà très petites) ni un filtre égalisateur (pas de distorsion à corriger).***

Problème 4

Nous commençons avec la réponse fréquentielle quand la sortie est *x(t)+ x(t-τ)*. Nous calculons comme

$$Y(\omega) = X(\omega) + TF\{ax(t-\tau)\} = X(\omega) + ae^{-j\omega\tau}X(\omega) = X(\omega)\left[1+ae^{-j\omega\tau}\right]$$

La réponse fréquentielle est donc

$$H_{exact}(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{X(\omega)\left[1+ae^{-j\omega\tau}\right]}{X(\omega)} = 1+ae^{-j\omega\tau}$$

Nous cherchons la transformée inverse dans le table de transformées pour avoir la réponse impulsionnelle

$$h_{exact}(t) = TF^{-1}\left\{1+ae^{-j\omega\tau}\right\} = \delta(t) + a\delta(t-\tau)$$

Le calcul pour partie b est semblable

$$Y(\omega) = X(\omega) + TF\{bx(t-T_e)\} = X(\omega)\left[1+be^{j\omega T_e}\right]$$
$$H_{approx}(\omega) = 1+be^{j\omega T_e}$$
$$h_{approx}(t) = TF^{-1}\left\{1+be^{-j\omega T_e}\right\} = \delta(t) + b\delta(t-T_e)$$

Nous voulons maintenant trouver l'erreur quadratique entre les deux modèles pour le canal avec une réflexion. Normalement l'erreur quadratique sera calculé comme

$$\text{erreur} = \int_{-\infty}^{\infty}\left|H_{approx}(\omega) - H_{exact}(\omega)\right|^2 d\omega$$

Dans ce système il faut changer les bornes d'intégration parce que nous avons un signal limité en bande (voir le filtre anti-repliement). Même si le modèle approximatif est très loin de la réalité hors la bande passante du signal, cette différence ne causera pas de problème. Il est juste la différence entre le modèle approximatif et le modèle exact dans la bande passante du signal qui est à-propos. Donc nous avons

Il manque un facteur 1/2pi ici…

$$\text{erreur} = \int_{-\omega_e/2}^{\omega_e/2}\left|H_{approx}(\omega) - H_{exact}(\omega)\right|^2 d\omega$$

étant donné que le filtre anti-repliement est Rect(ω/ω_e). Le module au carré est le produit des conjugués donc,

$$\begin{aligned}
\text{erreur} &= \int_{-\omega_e/2}^{\omega_e/2} \left[H_{approx}(\omega) - H_{exact}(\omega) \right]^* \left[H_{approx}(\omega) - H_{exact}(\omega) \right] d\omega \\
&= \int_{-\omega_e/2}^{\omega_e/2} \left[1 + be^{-j\omega T_e} - \left(1 + ae^{-j\omega\tau} \right) \right]^* \left[1 + be^{-j\omega T_e} - \left(1 + ae^{-j\omega\tau} \right) \right] d\omega \\
&= \int_{-\omega_e/2}^{\omega_e/2} \left[be^{-j\omega T_e} - ae^{-j\omega\tau} \right]^* \left[be^{-j\omega T_e} - ae^{-j\omega\tau} \right] d\omega \\
&= \int_{-\omega_e/2}^{\omega_e/2} \left[be^{j\omega T_e} - ae^{j\omega\tau} \right] \left[be^{-j\omega T_e} - ae^{-j\omega\tau} \right] d\omega
\end{aligned}$$

après d'avoir évaluer le conjuguée. Nous continuons avec la multiplications des termes

$$\begin{aligned}
\text{erreur} &= \int_{-\omega_e/2}^{\omega_e/2} \left[a^2 - abe^{j\omega T_e} e^{-j\omega\tau} - abe^{j\omega\tau} e^{-j\omega T_e} + b \quad \right] d\omega \\
&= \int_{-\omega_e/2}^{\omega_e/2} \left[a^2 + b^2 - abe^{j\omega(T_e - \tau)} ab - e^{j\omega(\tau - T_e)} \right] d\omega = \int_{-\omega_e/2}^{\omega_e/2} \left[a^2 + b^2 - 2ab\cos\omega\left(T_e - \tau\right) \right] d\omega \\
&= \left(a^2 + b^2 \right) \omega_e - 2ab \int_{-\omega_e/2}^{\omega_e/2} \cos\omega\left(T_e - \tau\right) d\omega
\end{aligned}$$

L'évaluation de l'intégrale d'un cosinus est un sinus…

$$\begin{aligned}
\text{erreur} &= \left(a^2 + b^2 \right) \omega_e - \frac{2ab}{T_e - \tau} \sin\omega\left(T_e - \tau\right) \Big|_{-\omega_e/2}^{\omega_e/2} \\
&= \left(a^2 + b^2 \right) \omega_e - \frac{2ab}{T_e - \tau} \left[\sin\frac{\omega_e}{2}\left(T_e - \tau\right) - \sin\frac{-\omega_e}{2}\left(T_e - \tau\right) \right] \\
&= \left(a^2 + b^2 \right) \omega_e - \frac{4ab\sin\frac{\omega_e}{2}\left(T_e - \tau\right)}{T_e - \tau}
\end{aligned}$$

La fréquence d'échantillonnage est deux pi sur l'intervalle d'échantillonnage, donc

$$\boxed{\begin{aligned}
\text{erreur} &= \left(a^2 + b^2 \right) \frac{2\pi}{T_e} - \frac{4ab\sin\frac{\pi}{T_e}\left(T_e - \tau\right)}{T_e - \tau} \\
&= \left(a^2 + b^2 \right) \frac{2\pi}{T_e} - \frac{4ab\sin\pi\left(1 - \tau/T_e\right)}{T_e - \tau}
\end{aligned}}$$