Corrigé Intra H2012

Question 1.

a) Ici L est triangulaire inférieure, U est triangulaire supérieure et la diagonale de U est composée de 1. On vérifier que $A = LU$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 6 & -5 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

Et on conclut qu'il s'agit bien d'une factorisation de Crout.

b) Par a) $det\,(A) = det(L)\det(U) = (2)(-1)(8)(3) = -48 \neq 0$. Alors la matrice A est inversible et le système ne peut avoir qu'une seule solution.

c) Étape 1 : $Ly = b$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{gathered} y_1 = 1 \\ -y_2 = 1 - y_1 = 0 \\ 8y_3 = 6 - 6y_1 - y_2 = 0 \\ 3y_4 = 3 + 3y_3 \quad \Leftrightarrow y_4 = 1 \end{gathered}$$

Étape 2 : $Ux = y$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{gathered} x_4 = 1 \\ x_3 = x_4 = 1 \\ x_2 = x_3 = 1 \\ x_1 = 1 + x_2 - 2x_4 = 0 \end{gathered}$$

Et la solution du problème est (0,1,1,1)

Question 2.

a) La matrice est à diagonale dominante :

ligne 1 : $a_{11} = 25 > |a_{12}| + |a_{13}| = 5 + 10$

ligne 2 : $a_{22} = 10 > |a_{21}| + |a_{23}| = 5 + 2$

ligne 3 : $a_{33} = 13 > |a_{31}| + |a_{32}| = 10 + 2$

Et la diagonale est positive, on peut en conclure que la factorisation de Cholesky $A = L^T L$ est possible.

b) On cherche a, b et c tels que

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 3 & 0 \\ c & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 5 & 10 \\ 5 & 10 & 2 \\ 10 & 2 & 13 \end{pmatrix}$$

Il faut alors que

$$a^2 = 25, a > 0 \Longrightarrow a = 5 \qquad ab = 5 \;\Rightarrow b = 1 \qquad ac = 10 \;\Longrightarrow c = 2$$

Question 3.

a) On doit **majorer**

$$R_n(h) = \frac{h^5}{120}\frac{1}{1+\xi}(cos\xi + sin\xi) \qquad \xi \in [1,1+h]$$

Puisque $\xi \in [1,1+h]$ il est clair que

$$\frac{1}{2+h} \leq \frac{1}{1+\xi} \leq \frac{1}{2}$$

D'autre part,

$$-2 \leq cos\xi + sin\xi \leq 2$$

Et

$$\frac{h^5}{120}\left(\frac{1}{2}\right)(-2) = -\frac{h^5}{120} \leq R_n(h) \leq \frac{h^5}{120}\left(\frac{1}{2}\right)(2) = \frac{h^5}{120}$$

b) L'ordre de l'approximation correspond à la puissance de h dans le terme d'erreur. Ici la puissance est 5, donc l'ordre de l'approximation est 5.

c) On approxime $f(1.1)$ en utilisant $P_n(h)$ avec $h = 0.1$ alors par a) l'erreur est au plus de

$$\frac{(0.1)^5}{120} \approx 0.8333 \times 10^{-7} \leq 0.5 \times 10^{-6}$$

Utilisant la convention vue en classe, le C.S. le plus à droite de l'approximation sera en position 10^{-6}. Puisque

$$P_n(0.1) = 0.1415926535$$

On aura 6 chiffres significatifs.

Question 3.

a) Ici on doit calculer a et f pour calculer c, d et e

$$a = x_5 = x_4 - \frac{x_4^2(\sin x_4)^2}{2x_4(\sin x_4)^2 + 2x_4^2 \sin x_4 \cos x_4} = 1.186519335 \times 10^{-3}$$

$$b = f(x_5) = 1.98197912 \times 10^{-12}$$

$$f = 8.898894317 \times 10^{-4}$$

$$c = 2.966299034 \times 10^{-4}, \qquad d = 0.749999502 \qquad e = 1896.299894$$

b) Oui la méthode converge car $f(x_n)$ tend vers zéro, de même E_n diminue de plus en plus.

c) C'est la méthode de Newton mais le rapport

$$\frac{E_{n+1}}{E_n} \longrightarrow 0.75$$

On en conclut que la convergence est linéaire et le taux de convergence est de 0.75.

d) Puisque la convergence est linéaire de taux 0.75, on sait que la racine est multiple, sa multiplicité m vérifie

$$1-\frac{1}{m}=0.75 \quad \Longrightarrow m=4$$

e) Il y a bien entendu plusieurs façons de faire

1) modifier Newton en se basant sur m : $x_{n+1}=x_n-m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

2) utiliser la méthode de Newton sur la fonction $\tilde{f}(x)=\frac{f(x)}{f'(x)}$

3) Appliquer la méthode de Steffenson sur la fonction $g_N(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$

Question 5.

a) Il suffit d'évaluer g_1 et g_2 au point $r=21^{\frac{1}{3}}$, on pourrait utiliser la calculatrice, mais c'est facile :

$$g_1(r)=\left(\frac{21}{r}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{21^{\frac{1}{2}}}{21^{\frac{1}{6}}}=21^{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}}=21^{\frac{1}{3}}=r$$

$$g_2(r)=\frac{2r}{3}+\frac{7}{r^2}=\frac{2(21)^{\frac{1}{3}}}{3}+\frac{7}{(21)^{\frac{2}{3}}}=\frac{2(21)}{3(21)^{\frac{2}{3}}}+\frac{3(7)}{3(21)^{\frac{2}{3}}}=21^{\frac{1}{3}}=r$$

b) On regarde la valeur de la dérivée de g_1 et g_2 au point $r=(21)^{\frac{1}{3}}$

$$g_1'(x)=(21)^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}} \Longrightarrow g_1'(r)=-\frac{1}{2}(21)^{\frac{1}{2}}(21)^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}$$

$$g_2'(x)=\frac{2}{3}-\frac{14}{x^3} \quad \Longrightarrow g_2'(r)=\frac{2}{3}-\frac{14}{21}=0$$

Donc la méthode de point fixe converge linéairement avec un taux de ½ lorsqu'appliquée à g_1 et la convergence est au moins d'ordre 2 pour la méthode appliquée à g_2.

c) $x_0=1$, $x_1=g_1(x_0)=4.582575695$, $x_2=g_1(x_1)=2.140695143$

d) Évidemment le point de départ ne peut être nul ou négatif : division par zéro et utilisation de complexe étant exclus.