2002 Examen final – *Solutionnaire*

Problème 1

Nous commençons avec l'analyse d'un système sans codage. Le rapport E_b/N_0 est 10 dB, donc $E_b/N_0 = 10^{10/10} = 10$. La probabilité d'erreur est donc :

$$P_b^u = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}10} = .5e^{-.5} = 3.36\times 10^{-3}$$

P_b^u est la probabilité d'erreur de bit sans codage. Pour comparer la performance avec codage, il faut considérer la probabilité d'erreur d'un message, soit un bloc de k=12 bits. Un message n'aura pas d'erreur si aucun bit n'est inversé dans les k bits.

$$P(pas\ d'\ erreur\ de\ message) = \left(1 - P_b^u\right)^k$$

Donc, la probabilité d'avoir une erreur dans le message (soit un bit, deux bits, etc.) est :

$$P_m^u = 1 - \left(1 - P_b^u\right)^k = 1 - \left(1 - 3.36\times 10^{-3}\right)^{12} = 3.96\times 10^{-2}$$

pour un message de k bits.

Maintenant, nous allons examiner la probabilité d'erreur de message pour un système avec codage. Nous commençons avec le calcul du rapport signal-à-bruit pour le système codé. Le taux de codage est $12/24 = k/n = 1/2$. Donc, l'énergie E_b est partagée sur 2 bits de code est $E_c = E_b/2$

$$\frac{E_c}{N_0} = \frac{E_b|^2}{N_0} = 10/2 = 5$$

Le taux d'erreur pour le BPSK non cohérent codé est :

$$P_b^c = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}.5} = 4.1\times 10^{-2}$$

Nous sommes en mesure de corriger des erreurs d'un bit et de deux bits, donc, nous aurons une erreur de message juste quand il y a 3, 4, 5... ou k bits inversés dans le message. La probabilité d'avoir inversé m bits est :

$$\binom{n}{m}\left(P_b^c\right)^m\left(1-P_b^c\right)^{n-m} \quad \text{où} \quad \binom{n}{m}=\frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Donc, la probabilité d'erreur d'un message codé est :

$$\begin{aligned} P_m^c &= \sum_{m=3}^{k}\binom{n}{m}\left(P_b^c\right)^m\left(P_b^c\right)^{n-m} \\ &\cong \binom{n}{3}\left(P_b^c\right)^3\left(1-P_b^c\right)^{24-3} \end{aligned}$$

Donc, nous avons l'approximation :

$$\begin{aligned} P_m^c &\cong \binom{24}{3}\left(4.1\times10^{-2}\right)^3\left(1-4.1\times10^{-2}\right)^{21} \\ &= 2024\left(4.1\times10^{-2}\right)^3\left(1-4.1\times10^{-2}\right)^{21} \\ &= 5.7\times10^{-2} \end{aligned}$$

Nous voyons que le taux d'erreur de message codé $\left(5.7\times10^{-2}\right)$ est pire que le taux d'erreur de message sans codage $\left(3.96\times10^{-2}\right)$. Le codage n'aide pas ici parce que le rapport signal-à-bruit est trop faible.

Avec $E_b/N_b = 14dB$ nous aurons :

$$P_m^c = 1.56\times10^{-6} \text{ et } P_m^u = 2.11\times10^{-5}$$

soit un avantage de 11.3 dB.

Problème 2

A. Les trois caractéristiques désirables d'une séquence pseudo-bruit sont :
   1) balancées – le même nombre de 0 et 1 dans la séquence
   2) pas de longue suite – dans une séquence, la moitié des suites doit être de longueur un, un quart de longueur deux, un huitième des suite de longueur trois, etc.
   3) faible corrélation croisée – le rapport entre le pique d'autocorrélation et la valeur maximale de la corrélation croisée doit être grand. Par exemple de séquence – m de longueur $2^m - 1 - p$, ont un rapport de p.

B. Les trois approches pour fournir une référence de phase pour un PLL sont :
   1) tonalité ou pilote
   2) signal MPSK qui passe par une non-linéarité qui met le signal à la puissance M.
   3) Remodulation du signal, par exemple la boucle de Costas.

C. Un ***code parfait*** est un code qui va corriger tous les patrons d'erreur d'un certain poids et pas juste un sous-ensemble des patrons. Un ***code systématique*** est un code qui contient les k bits de données comme sous-séquence dans le mot de code de n bits.

D. La modulation avec codage en treillis exploite la modulation d'ordre supérieure pour éviter l'expansion en largeur de bande qui arrive dans le codage convolutif. Le TCM est plus efficace en largeur de bande.

Problème 3

L'entrée du PLL est la référence $\theta(t)$ qui a un saut de phase au temps zéro.

$$\Theta(\omega) = \frac{1}{j\omega}$$

Voici un graphique du comportement en temps et la transformée de Fourrier. Le filtre de boucle est passe-tout, donc l'entrée dans le VCO est juste la différence entre $\theta(t)$ et l'estimé $\hat{\theta}(t)$. La sortie de VCD a une dérivée égale à K fois l'entrée, donc :

$$\frac{d\hat{\theta}(t)}{dt} = K\left(\theta(t) - \hat{\theta}(t)\right)$$

En utilisant l'analyse de Fourrier

$$j\omega\hat{\Theta}(\omega) = K\Theta(\omega) - K\hat{\Theta}(\omega)$$

et

$$H(\omega) = \frac{\hat{\Theta}(\omega)}{\Theta(\omega)} = \frac{K.}{j\omega + K}$$

donc

$$\hat{\theta}(t) = F^{-1}\left\{\hat{\Theta}(\omega)H(\omega)\right\} = F^{-1}\left\{\frac{K}{j\omega + K}\cdot\frac{1}{j\omega}\right\}$$

Avec la table fournie, nous cherchons la transformée inverse :

$$\hat{\theta}(t) = u(t)\left[1 - e^{-KT}\right]$$

Le problème demande la valeur de *K* pour assurer que l'estimé de phase atteint 90% de la valeur (soit .9) avant 6=10secondes. Donc, nous voulons :

$$\begin{aligned} .9 &= 1 - e^{-10K} \\ e^{-10K} &= .1 \\ -10K &= \ln .1 \\ K &= \frac{1}{10}\ln 10 = .23 \end{aligned}$$

B. La définition de la largeur de bande équivalente du bruit est :

$$\begin{aligned} 2B_N &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|H(\omega)\right|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{K}{j\omega + K}\right|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{K^2}{\omega^2 + K^2} d\omega = \frac{K^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2 + K^2} \\ &= \frac{K^2}{2\pi}\cdot\frac{\pi}{K} = \frac{K}{2} \end{aligned}$$

Donc, la largeur de bande équivalente du bruit est :

$$B_N = \frac{K}{4} = \frac{23}{4} = .0575Hz$$

Pour voir la fréquence à laquelle le module de la fonction de transfert a diminué de moitié :

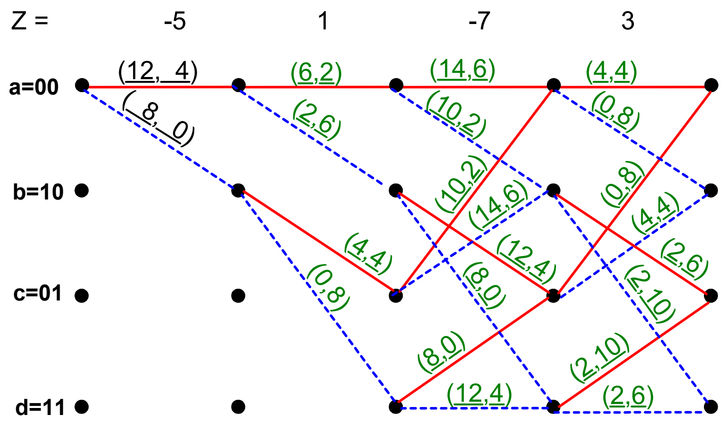
$$\left|H(j\omega)\right|^2 = \frac{K^2}{\omega^2 + K^2}$$

valeur maximale à $\omega = 0$ est 1, donc :

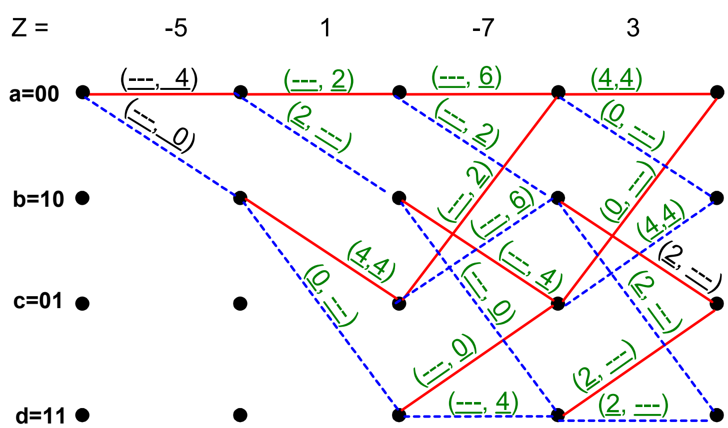
$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= \frac{K^2}{\omega_{3\mathrm{dB}}^2 + K^2} \\ \omega_{3\mathrm{dB}}^2 + K^2 &= 2K^2 \\ \omega_{3\mathrm{dB}} &= K + .23rad \\ f_{3\mathrm{dB}} &= \frac{\omega_{3\mathrm{dB}}}{2\pi} = .037Hz \end{aligned}$$

Problème 4

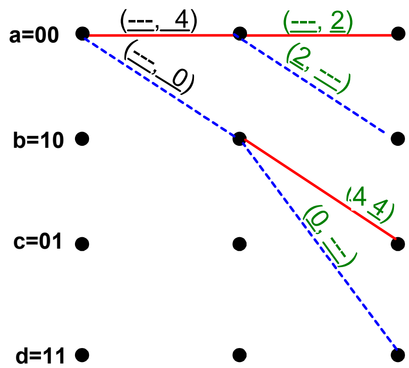
Partie A – calculer les distances



Partie B – éliminer les distances plus grandes



Partie C – calculer les métriques (distances)

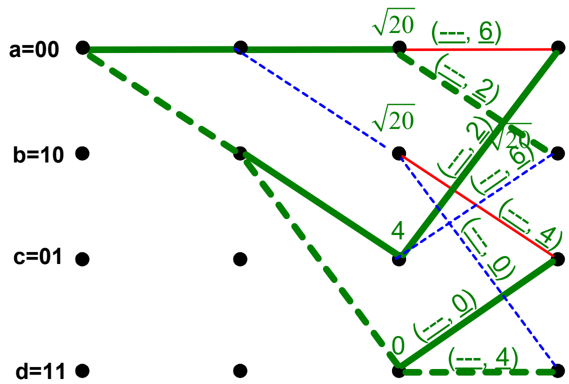


dist= $\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}$

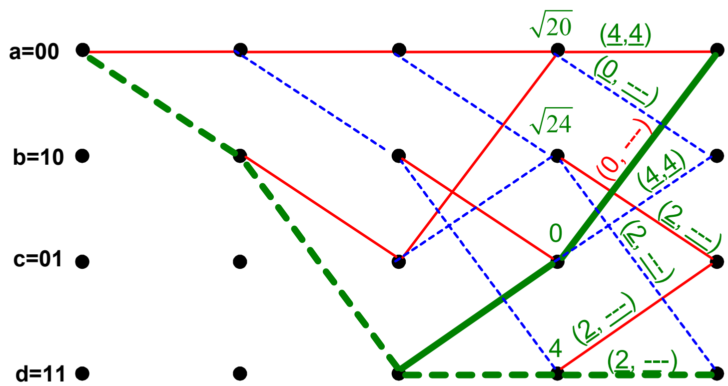
dist= $\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}$

dist= $\sqrt{4^2+0^2}=4$

dist= 0

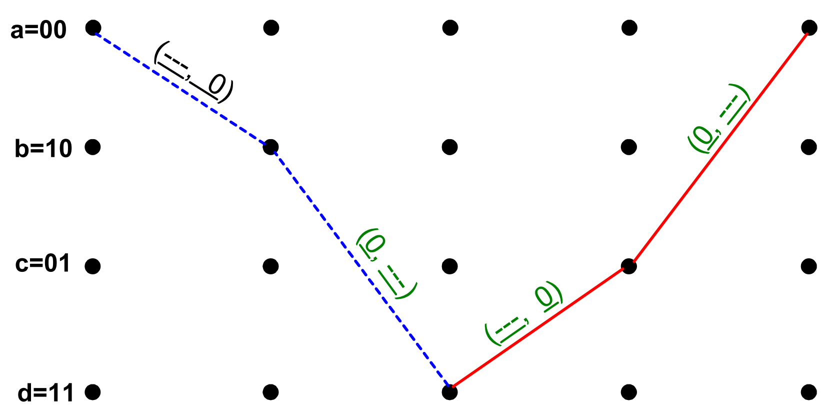


chemin en haut	distance chemin en bas	chemin gagnant
$\sqrt{20+36}=\sqrt{56}$	$\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}$	BAS
$\sqrt{20+4}=\sqrt{24}$	$\sqrt{4^2+6^2}=\sqrt{52}$	HAUT
$\sqrt{20+16}=6$	0	BAS
$\sqrt{20}$	4	BAS



chemin en haut	distance chemin en bas	chemin gagnant
$\sqrt{20+16}=6$	0	BAS
$\sqrt{16+4}=\sqrt{20}$	4	BAS
$\sqrt{24+4}=\sqrt{28}$	$\sqrt{20}$	BAS
$\sqrt{24+4}=\sqrt{28}$	$\sqrt{20}$	BAS

Partie D – indiquer le chemin le plus probable (gagnant)



Données	1	1	0	1	1	0	0	0
	m_1	m_2	m_1	m_2	m_1	m_2	m_1	m_2

Problème 5

Nous avons deux contraintes importantes :

1) la probabilité d'erreur pas plus grande que 10^{-3}
2) pas de réflexions multi-parcours

Commençons avec la deuxième contrainte. Pour éviter les réflexions multi-parcours, il faut que le temps d'un chip soit plus petit que le délai dans le canal, donc :

$$T_c < 5\times 10^{-6} \text{ sec}\mathit{ondes}$$

Le temps d'un chip est déterminé par le temps d'un bit $(1/R = 1/56k)$ et la longueur de code $G \in \{15,31,63\}$. Les trois temps du chip possible sont :

$$T_c = \frac{1}{R}\cdot\frac{1}{G} \in \{\ 1.2\mu\text{sec} \quad .57\mu\text{sec} \quad .2834\mu\text{sec}\ \}$$

Donc, pour G=15, nous avons $T_c = 1.2\mu sec$ et pour G=31, nous avons $T_c = .51\mu sec$, trop lent pour éviter les réflexions. Nous pouvons juste avoir G=63 pour s'assurer que le récepteur va éviter les réflexions multi-parcours.

La probabilité d'erreur pour BPSK sans interférence est :

$$Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{2\cdot SNR}\right)$$

Ici, il y a aussi l'interférence, donc, nous utilisons $Q\left(\sqrt{2\cdot SNIR}\right)$. Avec le rapport SNIR, nous calculons comme :

$$\text{SNIR} = \frac{E_b}{\frac{(K-1)E_b}{G} + N_0} = \frac{1}{\frac{K-1}{G} + \frac{N_0}{E_b}} = \frac{1}{\frac{K-1}{G} + \frac{1}{\text{SNR}}}$$

$$\frac{1}{\text{SNIR}} = \frac{1}{\text{SNR}} + \frac{K-1}{G}$$

$$K = 1 + G\left(\frac{1}{\text{SNIR}} - \frac{1}{\text{SNR}}\right)$$

L'exigence de $P_c < 10^{-3}$ correspond à :

$$SNIR\big|_{2B} \geq 7dB$$

Pour $SNIR = 7dB = 5$, nous avons,

$$\begin{aligned} K &= 1 + 63\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{15.85}\right) \\ &= 9.6 \end{aligned}$$

Donc, le système peut supporter 9 usagers simultanés.

Extension du problème 3

Pour trouver l'erreur asymptotique, nous pouvons utiliser le "Final Value Theorem"

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} e(t) &= \lim_{j\omega\to 0} j\omega E(\omega)\\ &= \lim_{j\omega\to 0} j\omega\cdot\Theta(\omega)\left[1-H(\omega)\right]\\ &= \lim_{j\omega\to 0} j\omega\frac{1}{(j\omega)^2}\left[1-\frac{K}{j\omega+K}\right]\\ &= \lim_{j\omega\to 0}\frac{1}{j\omega}\frac{j\omega}{j\omega+K} = 1/K\end{aligned}$$

L'entrée est maintenant $\hat{\theta}(\omega)=\Theta(\omega)H(\omega)=\dfrac{1}{(j\omega)}=\dfrac{K}{K+j\omega}$

Dans la table fournie, nous cherchons la transformée inverse

$$\hat{\theta}(t)=u(t)\left[t-\frac{1-e^{-Kt}}{K}\right]$$

Extension du problème 5

Plus l'interférence est grande, moins nous pouvons supporter plusieurs usagers. Donc, le nombre maximal d'usager est limité par les cas extrêmes, soit :

$$E_i = E_b + 3dB = 2E_b$$

Le rapport signal a l'interférence, quand tous les K-1 interférents ont le double de l'énergie du signal désiré, est :

$$SNIR=\frac{E_b}{\frac{(K-1)2E_b}{G}+N_0}=\frac{1}{\frac{2(K-1)}{G}+\frac{1}{SNR}}$$

et

$$K=1+\frac{G}{2}\left(\frac{1}{SNIR}-\frac{1}{SNR}\right)$$

L'exigence pour le taux d'erreur n'a pas changée. L'exigence pour la longueur de code (pour éviter des réflexions) n'a pas changée non plus. Donc :

$$K=1+\frac{63}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{15.85}\right)=5.3$$

Avec le contrôle de puissance non idéal, nous pouvons juste supporter cinq usagers au lieu de neuf.