

GEL-2000 ÉLECTROMAGNÉTISME

EXAMEN PARTIEL

Mercredi le 26 octobre 2016

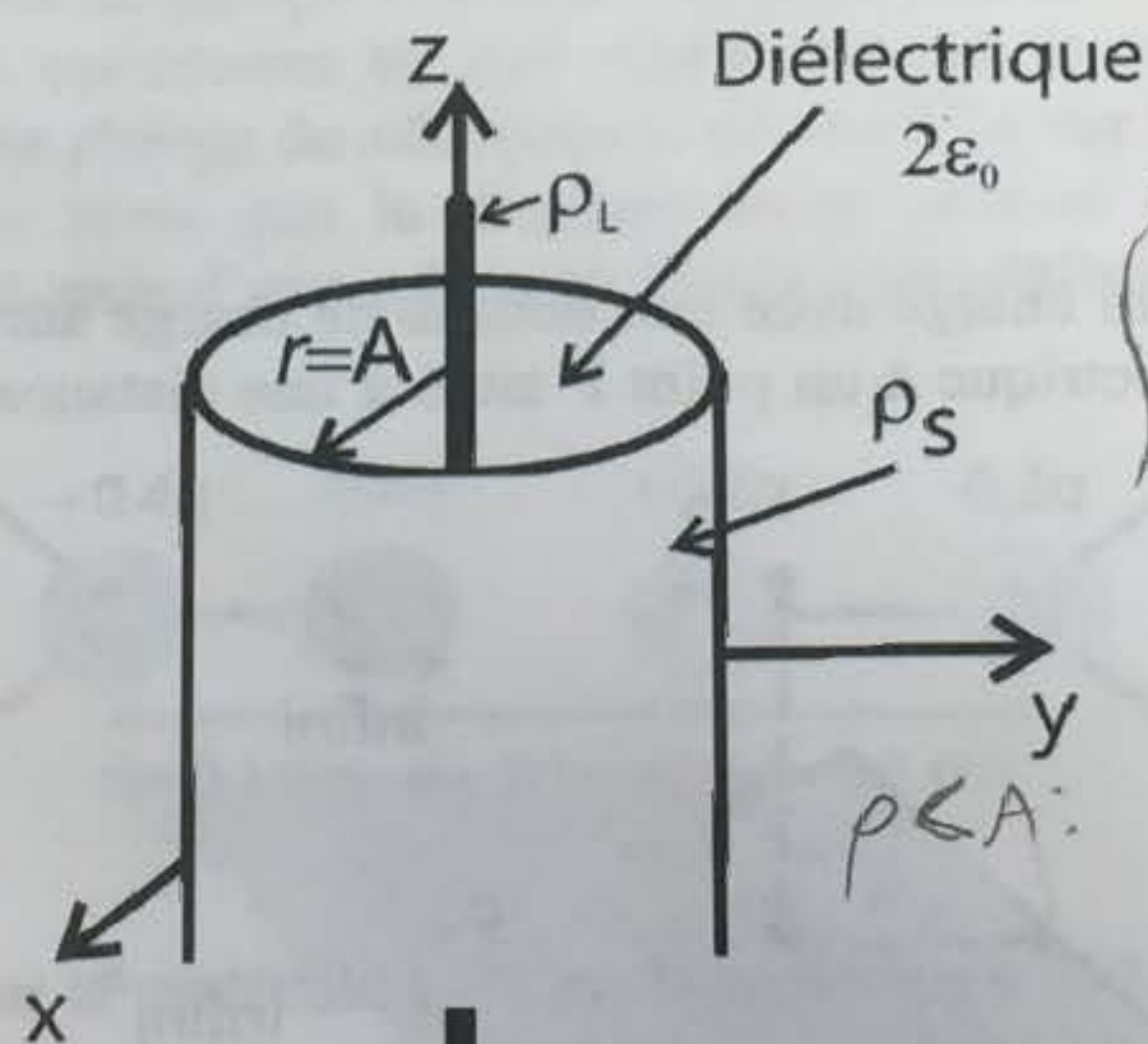
NOM :

Instructions :

- Le seul document permis à l'examen est l'aide-mémoire.
- Répondez dans le cahier d'examen sur la page de **droite** uniquement.
- Indiquez votre nom et remettez ce questionnaire en même temps que votre cahier.
- Vous devez faire les questions 1 à 3, vous avez le choix entre les questions 4 et 5.

Question 1 (25 points) Q1.2.2

On considère un système composé d'un fil infini, chargé avec une densité de charge linéique uniforme ρ_L en [C/m], dont l'axe est placé suivant l'axe z du système de coordonnées. Le fil est entouré d'un diélectrique de permittivité $\epsilon = 2\epsilon_0$, puis d'une pellicule conductrice mince située à $r = A$ et portant une densité de charge surfacique uniforme ρ_s en [C/m²]. On considère que le diélectrique et la pellicule conductrice sont aussi de longueurs infinies. La permittivité est ϵ_0 à l'extérieur du cylindre.



$$\int_0^h \int_0^{2\pi} E(\rho) \rho d\phi dz = \frac{Q_{enc}}{\epsilon}$$

$$= h 2\pi \rho E(\rho) = \frac{Q_{enc}}{\epsilon}$$

$$Q_{enc} = \rho_L \cdot h$$

a) Écrivez l'expression du champ électrique partout dans l'espace, c'est-à-dire pour $0 < r < \infty$. Veuillez noter que l'on utilise ici r pour représenter la coordonnée radiale en coordonnées cylindriques afin d'éviter la confusion avec la densité de charge.

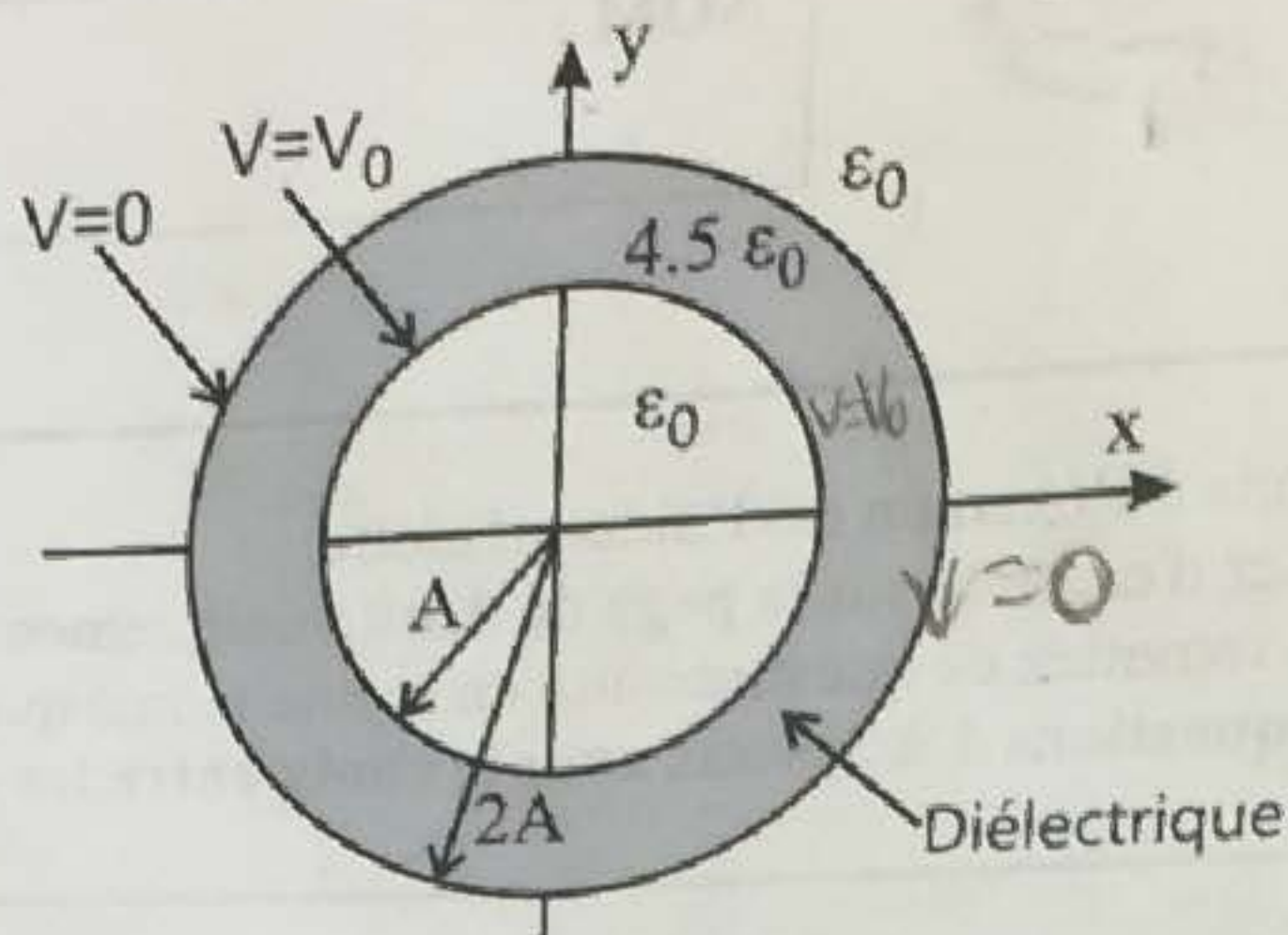
b) Tracez l'amplitude du champ électrique en fonction du rayon r .

c) Y a-t-il des endroits où l'amplitude du champ électrique est discontinue? Si oui, à quelle coordonnée et pourquoi.

Discontinuités car changement de permittivité et densité surfacique de charge

Question 2 (25 points)

Si la densité de charge est nulle, on aura $\nabla^2 V = 0$

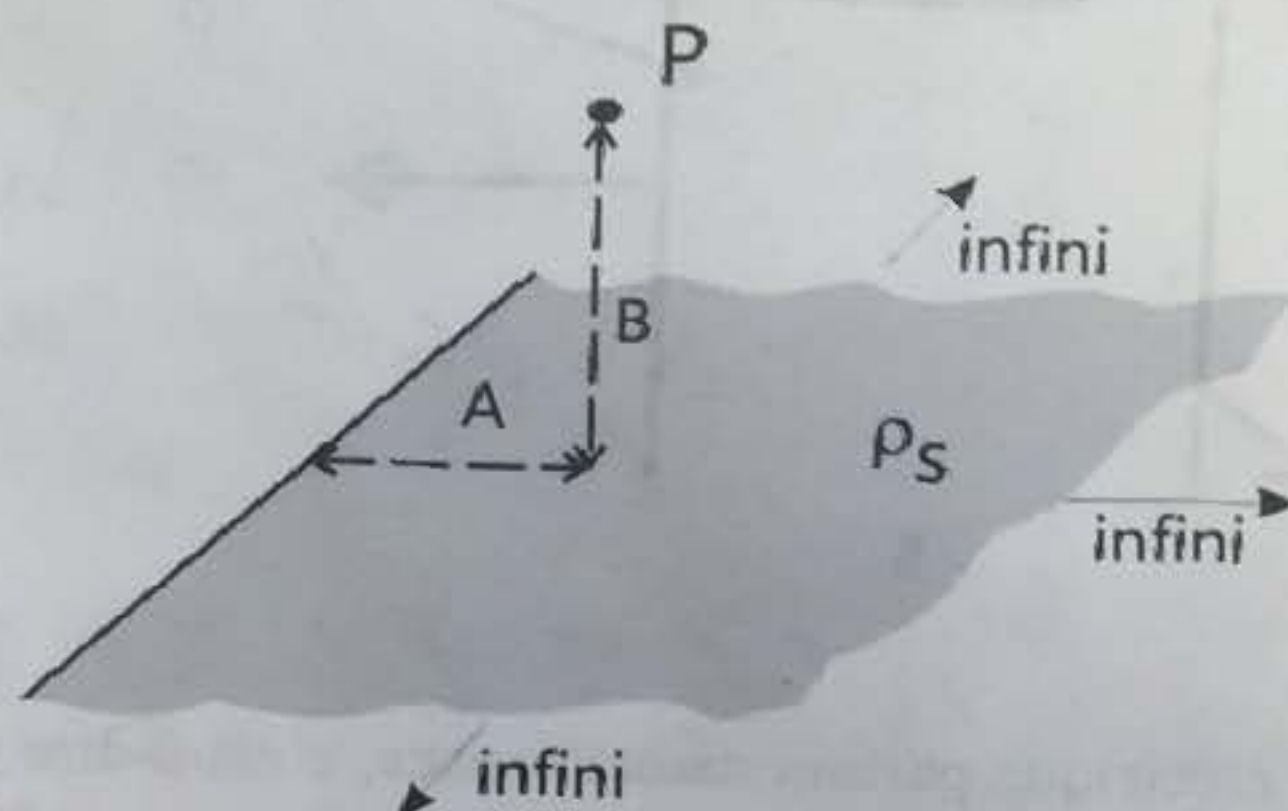


On considère un système capacitif de géométrie sphérique dont l'électrode interne de rayon $r=A$ est maintenue à un potentiel $V=V_0$ alors que l'électrode externe de rayon $r=2A$ est à la masse $V=0$. Entre les deux électrodes, on a placé un diélectrique de permittivité $\epsilon=4.5 \epsilon_0$

Quelle est l'expression de la fonction potentielle entre les deux électrodes, $V(r)$ pour $A < r < 2A$?

Question 3 (25 points) Q1.2.1

On considère un plan semi-infini chargé avec une densité de charge surfacique ρ_s uniforme (en C/m^2). On désire calculer le champ électrique à un point P situé à une distance A du bord et à une hauteur B par rapport au plan.



- Faites le schéma du système en indiquant clairement le système de coordonnées utilisé.
- Quelle sera l'orientation du champ électrique au point P. Indiquez si certaines composantes sont nulles.
- Écrivez l'intégrale permettant de calculer le champ électrique. Il n'est pas nécessaire de résoudre l'intégrale mais vous devez en expliciter chacun des termes.

Faire une seule des deux questions suivantes : Q1.1.3

3

Choisir entre la question 4 et la question 5, indiquez clairement votre choix

Question 4 (25 points)

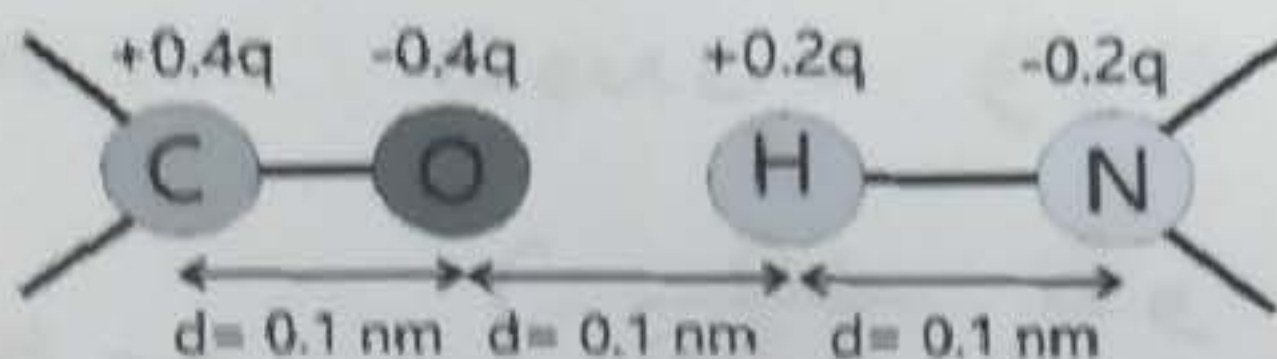
Considérant que la rigidité diélectrique de l'air (dielectric strength) à pression atmosphérique est de 3 MV/m, et faisant l'hypothèse que la terre est une sphère métallique ayant un rayon de $R=6400$ km portant une charge totale Q_{tot} .

- a) Quelle est l'expression du champ électrique très près de la surface de la terre?
- b) Quelle serait la charge totale nécessaire pour qu'il y ait apparition d'arc électrique?
- c) Commentez votre réponse sachant que la densité d'électrons dans le sol est de $7 \times 10^{29} \text{ m}^{-3}$.

Il y a nécessairement plusieurs trous aussi dans le sol sinon il y aurait toujours des arcs électriques

Question 5 (25 points)

On considère une molécule ayant un groupe C-O à proximité d'une molécule ayant un groupe H-N. Les axes des deux molécules sont colinéaires tel que représenté sur le schéma. L'électronégativité des atomes créent l'équivalent d'une charge de $\pm 0.4q$ sur C-O et $\pm 0.2q$ sur H-N où $q=1.6 \times 10^{-19}$. La charge portée par chacun des atomes ainsi que la distance entre ceux-ci sont également indiquées. On considère que le lien entre les atomes d'une même molécule ne se déforme pas.



- a) Quelle est la force exercée par la molécule H-N sur la molécule C-O?
- b) Quelle est la force exercée par la « molécule » C-O sur la « molécule » H-N?

Examen 2016

Question 1:

- a) Il y a deux régions à considérer, pour $\rho < A$ on peut utiliser l'expression du fil infini et pour $\rho > A$ la loi de Gauss en faisant la somme des charges encloses.

loi de Gauss $\oint \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_{enc}$

par symétrie (distribution de charge ne dépend pas de z et ϕ) on écrit :

$$\vec{D}(\rho) = D_e(\rho) \hat{a}_\rho \quad \text{et} \quad d\vec{s} = \rho d\phi dz \hat{a}_\rho$$

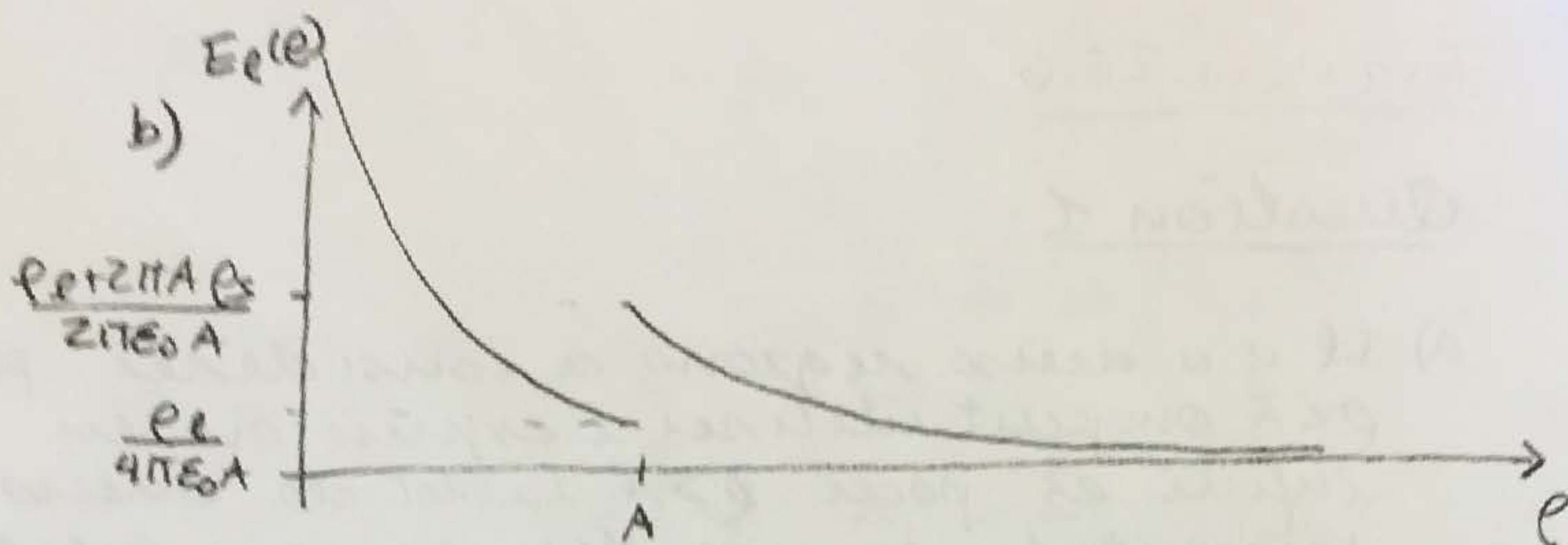
$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{s} = 2\pi \rho h D_e(\rho) = Q_{enc}$$

$$\rho < A : \quad Q_{enc} = \rho_e h$$

$$A < \rho < \infty : \quad Q_{enc} = \rho_e h + 2\pi A h \rho_s$$

$$\text{d'où} \quad \vec{D}(\rho) = \begin{cases} \frac{\rho_e}{2\pi \rho} \hat{a}_\rho & 0 < \rho < A \\ \frac{\rho_e + 2\pi A \rho_s}{2\pi \rho} \hat{a}_\rho & A < \rho < \infty \end{cases}$$

$$\text{et} \quad \vec{E}(\rho) = \begin{cases} \frac{\rho_e}{4\pi \epsilon_0 \rho} \hat{a}_\rho & 0 < \rho < A \\ \frac{(\rho_e + 2\pi A \rho_s)}{2\pi \epsilon_0 \rho} \hat{a}_\rho & A < \rho < \infty \end{cases}$$



c) Discontinuité de \vec{E} à $r = A$ due aux deux facteurs suivants :

- changement de permittivité
- densité surfacique de charges.

Question 2 :

On utilise l'équation de Laplace en coordonnées sphériques, ici $V(r)$ est fonction de la coordonnée r uniquement

$$\nabla^2 V(r) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV(r)}{dr} \right) = 0 \quad \text{car il n'y a pas de } \theta, \phi$$

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV(r)}{dr} \right) = 0$$

$$\frac{dV(r)}{dr} = \frac{C_1}{r^2}$$

$$V(r) = -\frac{C_1}{r} + C_2$$

$$\text{à } r = A \quad (1) \quad V(0) = V_0 = -\frac{C_1}{A} + C_2$$

$$r = 2A \quad (2) \quad V(2A) = 0 = -\frac{C_1}{2A} + C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{C_1}{2A}$$

$$\text{de (1)} \quad V_0 = -\frac{C_1}{A} + \frac{C_1}{2A} = -\frac{C_1}{2A}$$

$$C_1 = -2A V_0$$

$$\text{d'où} \quad V(r) = \frac{2A V_0}{r} - \frac{2A V_0}{2A}$$

$$V(r) = V_0 \left(\frac{2A}{r} - 1 \right) = V_0 2A \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2A} \right)$$

$$\text{et } \vec{E} = -\nabla V(r) = \frac{V_0 2A}{r^2} \hat{a}_r$$

$$2 \frac{4\pi\epsilon_0}{\hbar} \frac{V_0 \psi_0}{\hbar} = \psi_0$$

$$2 \frac{4\pi\epsilon_0}{\hbar} V_0 \psi_0 = \psi_0$$

$$V_0 = \frac{\psi_0 \hbar}{2 (4\pi\epsilon_0)} \frac{4\pi\epsilon_0}{\hbar}$$

$$\psi_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \psi_0}{4\pi\epsilon_0 \hbar} \frac{\hbar}{2 \psi_0} \psi_0$$

$$\psi_0 = \frac{(4\pi\epsilon_0 \hbar^2)}{4\pi\epsilon_0 \hbar} \psi_0$$

Question 3

a)



$$\vec{r} = 0 \hat{a}_x + A \hat{a}_y + B \hat{a}_z$$

$$\vec{r}' = x' \hat{a}_x + y' \hat{a}_y + 0 \hat{a}_z$$

b) composantes en \hat{a}_y et \hat{a}_z

pas de composantes en \hat{a}_x

$$\vec{E}(y, z) = E_y(y, z) \hat{a}_y + E_z(y, z) \hat{a}_z$$

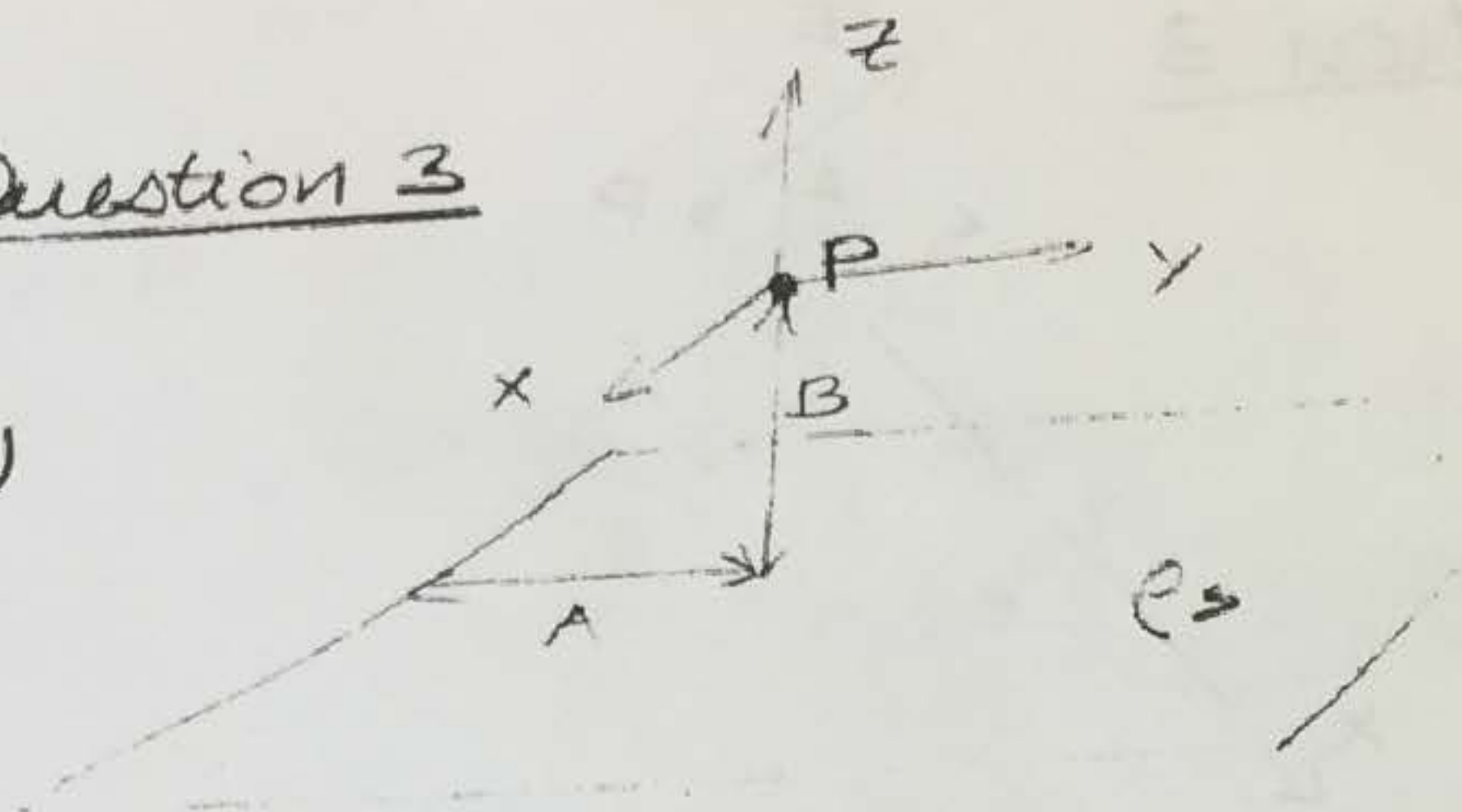
$$c) \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^a \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_s dx' dy' (-x' \hat{a}_x + (A - y') \hat{a}_y + (B) \hat{a}_z)}{((x')^2 + (A - y')^2 + B^2)^{3/2}}$$

Anc impaire en \hat{a}_x intégrée $\int_{-\infty}^{\infty} = 0$

$$\text{donc } \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_0^a \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(A - y') \rho_s dx' dy' \hat{a}_y}{((x')^2 + (A - y')^2 + B^2)^{3/2}} + \int_0^a \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B \rho_s dx' dy' \hat{a}_z}{((x')^2 + (A - y')^2 + B^2)^{3/2}} \right]$$

Question 3

a)



b) pas de composante en \hat{a}_x , seulement en \hat{a}_y et \hat{a}_z

c) $\vec{r} = 0$

$$\vec{r}' = x' \hat{a}_x + y' \hat{a}_y - B \hat{a}_z$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_{-A}^A \int_{-\infty}^{\infty} e_s \frac{(-x' \hat{a}_x - y' \hat{a}_y + B \hat{a}_z) dx' dy'}{(x'^2 + y'^2 + B^2)^{3/2}} \right]$$

en x func impaire intégrée de $-\infty$ à ∞

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_{-A}^A \int_{-\infty}^{\infty} e_s \frac{(-y' \hat{a}_y + B \hat{a}_z) dx' dy'}{(x'^2 + y'^2 + B^2)^{3/2}} \right]$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_{-A}^A \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-y' e_s dx' dy' \hat{a}_y}{(x'^2 + y'^2 + B^2)^{3/2}} + \int_{-A}^A \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B e_s dx' dy' \hat{a}_z}{(x'^2 + y'^2 + B^2)^{3/2}} \right]$$

Question Q

a) $\vec{E} = \frac{Q_{tot} \vec{a}_r}{4\pi\epsilon_0 (6.4 \times 10^6)^2} = \frac{Q_{tot}}{4\pi\epsilon_0 (4.096 \times 10^{13})} \vec{a}_r$

$\vec{E} = \frac{Q_{tot} \vec{a}_r}{4\pi (362.5)} = \frac{Q_{tot}}{4.55 \times 10^{-3}} \vec{a}_r$

b) $Q_{tot} = 4.55 \times 10^2 \times 3 \times 10^6$

$Q_{tot} = 1.3666 \times 10^{10} \text{ C}$

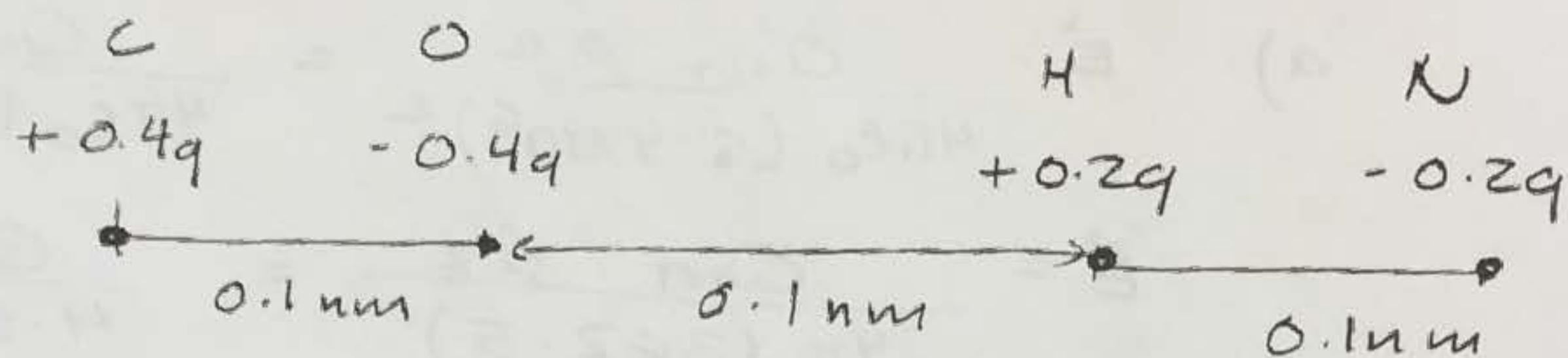
c) $N_e \text{ nécessaires} = \frac{Q_{tot}}{1.6 \times 10^{-19}} = 8.5 \times 10^{28}$

densité $7 \times 10^{29} \text{ m}^{-3}$

volume de sol = 0.12 m^3 ;

la terre est très neutre !

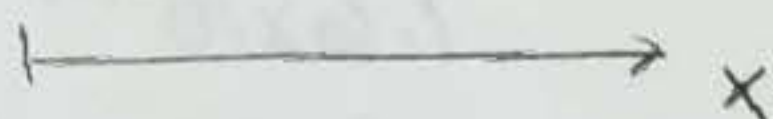
Question 5:



On calcule les forces de Coulomb

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \hat{r}_{12}$$

a) Force



$$\vec{F}_{CO} = \vec{F}_{H \rightarrow O} + \vec{F}_{H \rightarrow C} + \vec{F}_{N \rightarrow O} + \vec{F}_{N \rightarrow C}$$

$$\vec{F}_{CO} = \frac{(0.2q)(0.4q)}{4\pi\epsilon_0 (10^{-9})^2} \left[\frac{+1}{(0.1)^2} - \frac{1}{(0.2)^2} - \frac{1}{(0.2)^2} + \frac{1}{(0.3)^2} \right] \hat{a}_x$$

$$\vec{F}_{CO} = \frac{0.08 q^2}{4\pi\epsilon_0 (10^{-9})^2} (61.11)$$

$$\vec{F}_{CO} = \frac{0.08 \times (1.6 \times 10^{-19})^2}{4\pi \times 8.85 \times 10^{-12} \times 10^{-18}} \frac{61.11}{1} = -1.125 \times 10^{-9} \text{ N } \hat{a}_x$$

b) Force

$$\vec{F}_{HN} = -\vec{F}_{CO}$$

$$\vec{F}_{HN} = 1.125 \times 10^{-9} \text{ N } \hat{a}_x$$