Q1 (/5) **a)** **b)**	
Q2 (/10) **a)** **b)**	
Q3 (/10) **a)** **b)**	
Q4 (/15) **a)** **b)** **c)**	
Total :	

Gel-2000: Électromagnétisme

Mini-test #1

Mercredi le 5 octobre 2016

Ce test comprend 4 questions.
Attention de bien indiquer les unités.
Attention de bien indiquer les orientations des vecteurs.
Il faut simplifier les expressions obtenues

Question 1 (5 points):

On considère deux vecteurs, exprimés dans le système de coordonnées sphériques (r, θ, ϕ), qui ont comme point d'origine $(1, \pi/2, \pi/2)$:

$$\vec{A} = 2\,\hat{a}_r$$

$$\vec{B} = \hat{a}_r - 2\,\hat{a}_\theta$$

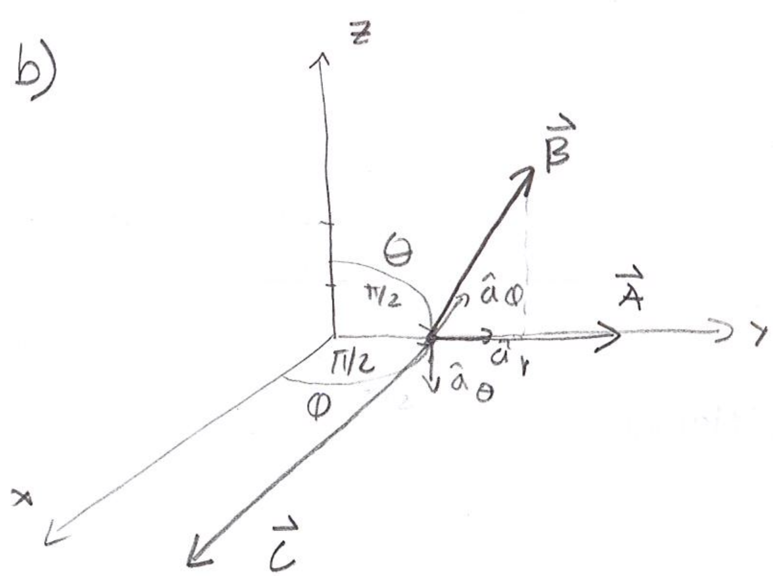
a) Faites le produit vectoriel $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$

b) Faites un schéma, indiquant clairement le système de coordonnées, et représentez les trois vecteurs $\vec{A}, \vec{B}, et\,\vec{C}$.

a) $\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{a}_r & \hat{a}_\theta & \hat{a}_\phi \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0\,\hat{a}_r + 0(-\hat{a}_\theta) + (-4)\hat{a}_\phi = -4\hat{a}_\phi$

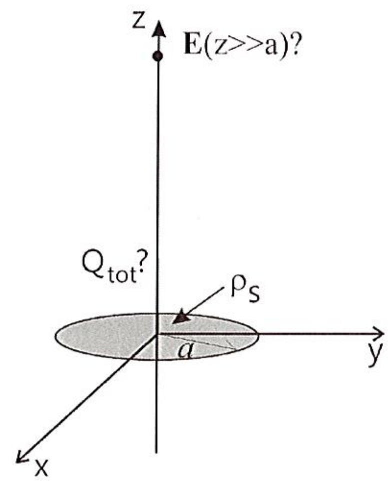
aussi $\vec{A} \times \vec{B} = (2\hat{a}_r) \times (\hat{a}_r - 2\hat{a}_\theta) = -4\,(\hat{a}_r \times \hat{a}_\theta) = -4\,\hat{a}_\phi$

b)



Question 2 (10 points) :

(Q1.2.1)



On considère un disque de rayon a portant une densité de charge de surface $\rho_s = \rho_0 \left(r/a \right)^3$ exprimée en C/m^2. Le centre du disque est situé à l'origine du système de coordonnées et la normale à sa surface pointe vers $+\hat{a}_z$.

a) Quelle est la charge totale Q_{tot} (exprimée en C) portée par le disque?

b) À un point d'observation situé sur l'axe z à une distance z>>a, quel sera le champ électrique? Faites les approximations nécessaires.

a) $$Q_{tot} = \iint \rho_s \, ds = \int_0^{2\pi}\int_0^{a} \rho_0 \left(\frac{r}{a}\right)^3 r \, dr \, d\varphi$$

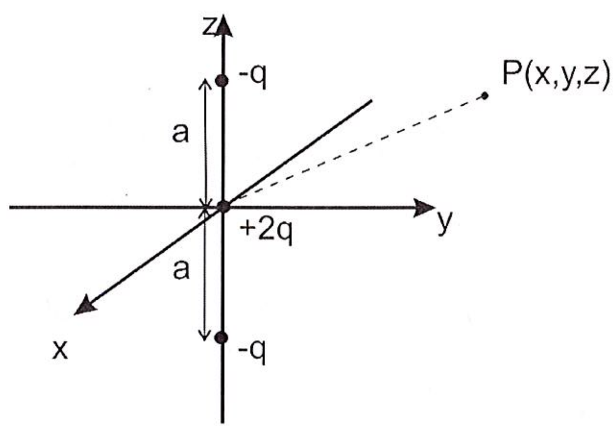
$$Q_{tot} = \frac{2\pi \rho_0}{a^3} \left[\int_0^a r^4 dr \right] = \frac{2\pi \rho_0}{a^3} \frac{r^5}{5} = \frac{2\pi \rho_0 a^2}{5}$$

b) si z>>a on peut s'attendre à avoir le champ d'une charge ponctuelle, donc

$$\vec{E} = \frac{Q_{tot}}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \hat{a}_z = \frac{2\pi \rho_0 a^2}{5 \times 4\pi \varepsilon_0 z^2} \hat{a}_z$$

$$\vec{E} = \frac{\rho_0 a^2}{10 \varepsilon_0 z^2} \hat{a}_z \quad \text{ou} \quad \vec{E} = \frac{\rho_0 a^2}{10 \varepsilon_0 r^2} \hat{a}_r$$

Question 3 (10 points)



On considère un système de trois charges placées au points suivants exprimés en coordonnées cartésiennes : -q à (0,0,a), +2q à (0,0,0), et -q à (0,0,-a).

a) Donnez l'expression exacte du potentiel scalaire V(x,y,z) en tout point de l'espace. (Sans faire d'approximations)

b) Quelle est la force s'exerçant sur le charge -q située à (0,0,a)?

a) $V_{tot} = \Sigma V_i$

$$V_{tot} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-1}{(x^2+y^2+(z-a)^2)^{1/2}} + \frac{2}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} + \frac{-1}{(x^2+y^2+(z+a)^2)^{1/2}}\right]$$

ou on a utilisé

$\vec{r} = x\hat{a}_x + y\hat{a}_y + z\hat{a}_z$

$\vec{r}_{-q,a} = a\,\hat{a}_z$

$\vec{r}_{-q,-a} = -a\,\hat{a}_z$

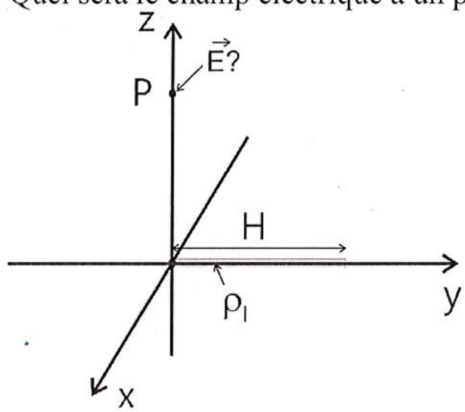
$\vec{r}_{+2q} = 0$

b) $$\vec{F} = \Sigma F_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-q(2q)}{a^2}\,\hat{a}_z + \frac{-q(-q)}{(2a)^2}\,\hat{a}_z\right]$$

$$\vec{F} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\left[-2 + \frac{1}{4}\right] = \frac{-7}{16\pi\varepsilon_0}\,\frac{q^2}{a^2}\,\hat{a}_z$$

Question 4 (15 points) (Q1.2.2)

a) On considère une ligne de longueur *H* chargée avec un densité de charge linéique uniforme $+\rho_\ell$ exprimée en C/m . La ligne est située sur l'axe y entre y=0 et y=H tel que représenté sur le figure. Quel sera le champ électrique à un point P situé sur l'axe z?



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho_\ell \, d\ell \, (\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

où $\vec{r} = z\hat{a}_z$ $\qquad d\ell = dy'$

$\vec{r}\,' = y'\hat{a}_y$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^H \rho_\ell \frac{(-y'\hat{a}_y + z\hat{a}_z)\, dy'}{(y'^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\vec{E} = \frac{\rho_\ell}{4\pi\varepsilon_0} \left[\int_0^H \frac{(-y'dy')}{(y'^2+z^2)^{3/2}} + \int_0^H \frac{z\,dy'}{(y'^2+z^2)^{3/2}} \right]$$

table $\qquad \int \frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{-1}{\sqrt{x^2+a^2}}$

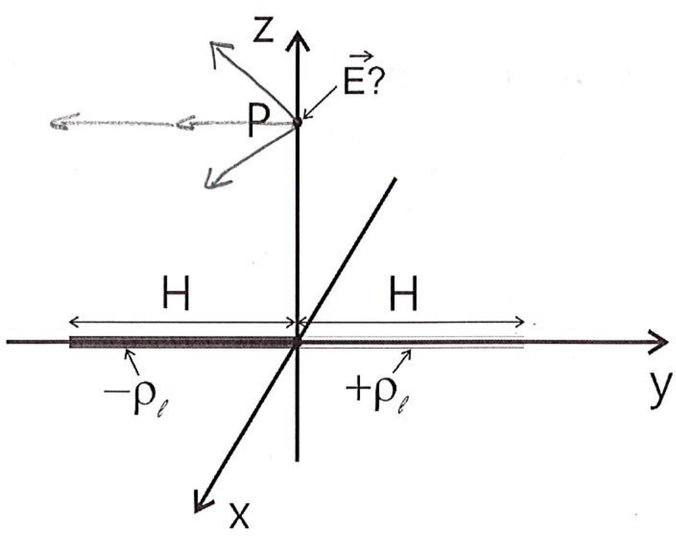
$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2(x^2+a^2)^{1/2}}$$

$$\vec{E} = \frac{\rho_\ell}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{y'^2+z^2}}\Bigg|_0^H \hat{a}_y + z\,\frac{y'}{z^2(y'^2+z^2)^{1/2}}\Bigg|_0^H \hat{a}_z \right]$$

$$\vec{E} = \frac{\rho_\ell}{4\pi\varepsilon_0}\left[\left(\frac{1}{\sqrt{H^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{z^2}}\right)\hat{a}_y + \frac{z\,H\,\hat{a}_z}{z^2(H^2+z^2)^{1/2}} \right]$$

$$\vec{E} = \frac{\rho_\ell}{4\pi\varepsilon_0}\left[\left(\frac{1}{\sqrt{H^2+z^2}} - \frac{1}{|z|}\right)\hat{a}_y + \frac{H}{z}\,\frac{\hat{a}_z}{(H^2+z^2)^{1/2}} \right]$$

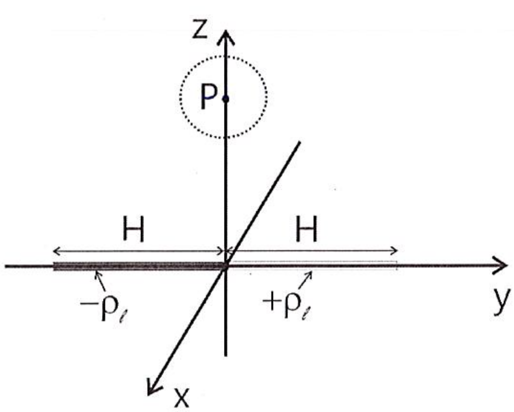
b) On ajoute maintenant une deuxième ligne de longueur *H* mais celle-ci chargée avec un densité de charge linéique uniforme - ρ_ℓ exprimée en C/m . La ligne est située sur l'axe y entre y=0 et y=-H. Sans refaire de calcul et en utilisant l'expression trouvée en a), déterminez quel est maintenant le champ électrique à un point P situé sur l'axe z?



Puisque les charges sont de signes opposés les composantes en $\hat{a}_z$ vont s'annuler, il reste 2x les composantes en $\hat{a}_y$

$$\vec{E} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \rho_l \left[\frac{1}{(H^2+z^2)^{1/2}} - \frac{1}{|z|} \right] \hat{a}_z$$

c) On place autour du point P situé à la position (0, 0, z) une sphère de rayon r telle que r<z. Quel est le flux du champ électrique traversant la surface de la sphère, c'est-à-dire, quelle est $\iint_S \vec{E}.d\vec{s}$ sur la surface de la sphère?



D'après la loi de Gauss

$$\iint \vec{E}.d\vec{s} = 0$$

car $Q_{enc} = 0$