EXAMEN PARTIEL 1

Mathématiques de l'ingénieur II
MAT-10364
Date: 9 octobre.

Automne 98

Remarques:

- Durée de l'examen: deux heures
- Documentation permise: deux feuilles-résumé.
- Vous êtes priés de vous identifier (nom et numéro de matricule) sur le cahier et de placer votre carte d'identité sur la table à côté de vous.
- **Chaque réponse devra être accompagnée des calculs détaillés. Dans le cas contraire, elle sera considérée comme nulle.**

Question 1. (25 points)

Soit D une plaque mince occupant le domaine défini par

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + (y-1)^2 \leq 1\}$$

et de densité

$$\sigma(x, y) = y.$$

En utilisant les **coordonnés polaires:**

(a) (10pts) déterminer la masse de la plaque D,

(b) (15pts) calculer les coordonnées $(\bar{x}, \bar{y})$ du centre de masse de D.

Question 2. (15 points)

Soit D une plaque mince homogène (de densité égale à 1) délimitée par les deux cercles:

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 = 4$$

et les deux droites

y = 3x

$$y = x \quad \text{et} \quad y = \cancel{[illegible]} \quad (y \geq 0).$$

On effectue le changement de variables: $u = \dfrac{y}{x}$ et $v = x^2 + y^2$.

(a) (4pts) Représenter graphiquement le domaine transformé $\hat{D}$ dans le plan (u, v).

(b) (5pts) Quel est le Jacobien ($= \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$) de cette transformation?

(c) (6pts) Utiliser ce changement de variables pour écrire le moment d'inertie polaire J_0 de la plaque D sous la forme d'une intégrale double (**ne pas évaluer**).

Question 3. (15 points)

On considère l'intégrale triple itérée en coordonnées cylindriques

$$\int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1} \int_{z=r^2}^{1} f(r, \theta, z)\, r\, dz\, dr\, d\theta$$

(a) (6pts) Trouver les équations des surfaces qui délimitent le domaine d'intégration et en faire une représentation graphique.

(b) (9pts) Récrire l'intégrale triple en intégrant en premier par rapport à la variable r et ensuite par rapport à z et θ.

Question 4. (25 points)

Un solide homogène de densité volumique égale à 1 est obtenu en perçant dans la demie-sphère de rayon b ($z \geq 0$), un trou cylindrique d'axe z de rayon a vérifiant $a < b$. Déterminer les coordonnées du centre de masse de ce solide. Simplifier au maximum votre réponse.

Question 5. (20 points)

On considère un solide situé dans la région pour laquelle $y \geq 3$ et compris entre la sphère d'équation

$$x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 4$$

et le plan

$$y = 3.$$

Utiliser les **coordonnées sphériques** pour calculer le volume de ce solide.