2008 Examen partiel – *Solutionnaire*

Problème 1 (10 points bonus)

A. (3.33 points) L'interférence intersymbol produit un effet que nous appelons « the patterning effect », où le taux d'erreur binaire varie en fonction du patron de bits envoyé. Par exemple, le patron 1110 génère plus d'erreurs que le patron 0000. Pourquoi?

Considérons un signal qui est étalé par le canal, donc un signal qui a une duré plus grand qu'un bit. Supposons que ce signal à une valeur d'un pendant l'échantillonnage de son bit d'information. Nous appelons le temps de l'échantillonnage du premier bit temps t=0. L'étalement fait que à temps $t=T$ au lieu d'être zéro le signal du premier bit a une valeur résiduelle de, disons, 10%; à temps $t=2T$ le signal du premier bit a une valeur résiduelle de, disons, 5%; à temps $t=3T$ le signal du premier bit a une valeur résiduelle de, disons, 1%.

Prenons l'exemple OOK avec amplitude un pour logique un. Le patron 1110 aura un échantillon à temps t=3T dû au quatrième bit ***et*** les résiduelles des bits précédents

$$\underbrace{0}_{4^{\text{ième}}\text{ bit}} + \underbrace{10\%}_{3^{\text{ième}}\text{ bit}} + \underbrace{5\%}_{2^{\text{ième}}\text{ bit}} + \underbrace{1\%}_{1^{\text{ier}}\text{ bit}} = 16\%$$

Pour OOK, à temps t=3T, le patron 0000 aura un échantillon de

$$\underbrace{0}_{4^{\text{ième}}\text{ bit}} + \underbrace{0}_{3^{\text{ième}}\text{ bit}} + \underbrace{0}_{2^{\text{ième}}\text{ bit}} + \underbrace{0}_{1^{\text{ier}}\text{ bit}} = 0$$

Le seuil pour OOK est 50%. Donc, il sera plus facile à détecter le patron 0000 que détecter le patron 1110, sur tout pour le quatrième bit. Dans le patron 1110 l'échantillon pour le quatrième bit (16%) est plus proche du seuil 50% que l'échantillon du quatrième bit du patron 0000 (0%).

Pour un autre exemple considérons BPSK avec amplitude un pour logique un et amplitude moins un pour logique zéro. Pour BPSK, à temps t=3T, le patron 1110 aura un échantillon à temps t=3T dû au quatrième bit ***et*** les résiduelles des bits précédents.

$$\underbrace{-1}_{4^{\text{ième}}\text{ bit}} + \underbrace{10\%}_{3^{\text{ième}}\text{ bit}} + \underbrace{5\%}_{2^{\text{ième}}\text{ bit}} + \underbrace{1\%}_{1^{\text{ier}}\text{ bit}} = -84\%$$

Le patron 0000 aura un échantillon de

$$\underbrace{-1}_{4^{\text{ième}}\text{ bit}} + \underbrace{-10\%}_{3^{\text{ième}}\text{ bit}} + \underbrace{-5\%}_{2^{\text{ième}}\text{ bit}} + \underbrace{-1\%}_{1^{\text{ier}}\text{ bit}} = -184\%$$

Le seuil pour BPSK est 0%. Donc, il sera plus facile à détecter le patron 0000 que détecter le patron 1110, sur tout pour le quatrième bit. Dans le patron 1110 l'échantillon pour le quatrième bit (-84%) est plus proche du seuil 0% que l'échantillon du quatrième bit du patron 0000 (-184%). Le bruit est moins probable de déplacer -1.84 vers zéro que de déplacer -.84 vers zéro.

B. (3.33 points) Supposons que nous mesurons le taux d'erreur binaire pour les quatre patrons 00, 01, 10 et 11 comme le suivant : P_{00} P_{01} P_{10} P_{11}. En plus, supposons que le zéro logique est trois fois plus probable que l'un logique. Quel est le taux d'erreur binaire moyenne?

Soit $P(1)$ la probabilité d'un « un » logique. La probabilité totale de zéro et un est évidement un, donc

$$P(1)+P(0)=P(1)+3P(1)=1$$
$$P(1)=.25$$
$$P(1)=.75$$

Les probabilités des patrons sont

$$P(00)=P(0)\cdot P(0)=9/16$$
$$P(01)=P(0)\cdot P(1)=3/16$$
$$P(10)=P(1)\cdot P(0)=3/16$$
$$P(11)=P(1)\cdot P(1)=1/16$$

La probabilité d'erreur binaire moyenne est donc

$$P_B=P(00)P_{00}+P(01)P_{01}+P(10)P_{10}+P(11)P_{11}$$
$$=\frac{9}{16}P_{00}+\frac{3}{16}P_{01}+\frac{3}{16}P_{10}+\frac{1}{16}P_{11}$$
$$P(01)=\frac{1}{16}\left[9P_{00}+3P_{01}+3P_{10}+P_{11}\right]$$

C. (3.33 points) Comment est-ce que la relation vectorielle

$$\left\|\underline{r}-\underline{s}_i\right\|^2=\left\|\underline{r}\right\|^2-2\left\langle \underline{r},\underline{s}_i\right\rangle+\left\|\underline{s}_i\right\|^2$$

nous amène à un corrélateur pour le détecteur ML? MAP?

Commençons avec le détecteur ML qui choisis le signal qui minimise $\left\|\underline{r}-\underline{s}_i\right\|^2$. Nous voyons que minimiser $\left\|\underline{r}-\underline{s}_i\right\|^2$ est l'équivalent de maximiser $\left\langle \underline{r},\underline{s}_i\right\rangle-½\left\|\underline{s}_i\right\|^2$ étant donné que le signal reçu $\underline{r}$ est le même pour tous les signaux $\underline{s}_i$. Nous reconnaissons $\left\langle \underline{r},\underline{s}_i\right\rangle$ comme un corrélateur. Le logique qui suit les sorties des corrélateurs $\left\langle \underline{r},\underline{s}_i\right\rangle$ pour choisir la plus grande sortie peut tenir compte des énergies du signal $\left\|\underline{s}_i\right\|^2$ qui peuvent varier d'un signal à l'autre.

Pour le récepteur MAP, nous minimisons $\left\|\underline{r}-\underline{s}_i\right\|^2-N_0\ln P\left(\underline{s}_i\right)$, l'équivalent de maximiser $\left\langle \underline{r},\underline{s}_i\right\rangle-½\left\|\underline{s}_i\right\|^2+½N_0\ln P\left(\underline{s}_i\right)$. Nous voyons encore les corrélateurs $\left\langle \underline{r},\underline{s}_i\right\rangle$. Le logique de décision après le banque de corrélateurs peut tenir compte des probabilités *a priori* $P(\underline{s}_i)$ non égale, autant que les énergies non-égales.

Problème 2 (15 points sur 70)

A. (5 points) Quel format de modulation peut être utilisé pour atteindre 19.2kb/s dans un canal avec largeur de bande de 2400 Hz?

$$R_S = \frac{2400 \text{ symboles}}{\text{sec}} \cdot \frac{k \text{ bit}}{\text{symbole}} = 19,200$$

$$k = \frac{19200}{2400} = 8 \qquad M = 2^k = 2^8 = 256$$

La modulation 256QAM ou 256PSK peut fournir le taux binaire 19.2 kb/s dans 2400 Hz. Une autre manière de voir le problème : nous cherchons une efficacité spectrale de

$$\eta = \frac{19200}{2400} = 8 \qquad \eta_{MQAM,MPSK} = \log_2 M \qquad \eta_{MFSK} = \frac{2\log_2 M}{M+1}$$

$$M_{MQAM,MPSK} = 2^8 = 256 \qquad \eta_{MFSK}(\text{maximal}) = 2$$

Il n'est pas possible d'utiliser MFSK, mais 256QAM ou 256PSK marchera.

B. (10 points) Quel rapport signal-à-bruit (SNR) est nécessaire pour atteindre un taux d'erreur de 10^{-5}? Est-ce que ce SNR est raisonnable?

La modulation 256QAM est carré et la probabilité d'erreur est donné par

$$P_e = 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{256}}\right) Q\left(\sqrt{\frac{3\log_2 256}{(256-1)} \frac{E_b}{N_0}}\right) \qquad d_{\min} = \sqrt{\frac{6\log_2 16}{256-1}} = \sqrt{\frac{24}{255}}.$$

La perte de 256QAM par rapport au QPSK est

$$-10\log_{10}\frac{24}{255}\cdot\frac{1}{2} = -10\log_{10}\frac{12}{255} = 13.3 \text{ dB}.$$

Pour atteindre 10^{-5}, QPSK doit avoir $E_b/N_0 = 10 \text{ dB}$, donc 256 QAM doit avoir $E_b/N_0 = 23.3 \text{ dB}$. Pour calculer le SNR nécessaire nous avons

$$SNR = \frac{E_b}{N_0}\eta = \frac{E_b}{N_0}\log_2 M = \frac{E_b}{N_0}\log_2 256 = 8\frac{E_b}{N_0}$$

Donc le SNR nécessaire pour atteindre 10^{-5} avec 256QAM est

$$SNR = 23.3 \text{ dB} + 10\log_{10} 8 = 23.3 \text{ dB} + 9 \text{ dB} = 32.3 \text{ dB}$$

Une ligne téléphonique de bonne qualité a un SNR de 35-40 dB, donc oui c'est raisonnable.

Un calcul similaire est possible pour 256MPSK, mais il demande un SNR nettement supérieur, donc un SNR qui n'est pas raisonnable.

Problème 3 (40 points sur 70)

$$\text{Pour les signaux}\quad \begin{aligned} s_1(t) &= 1, & 0 \le t \le 1 \\ s_2(t) &= \cos 2\pi t, & 0 \le t \le 1 \\ s_3(t) &= \cos^2 \pi t, & 0 \le t \le 1 \end{aligned}$$

A. (10 points) Est-ce que ces signaux ont la même énergie? Quelle est l'énergie moyenne par bit?

Calculons l'énergie pour chaque symbole

$$E_1 = \int_0^1 s_1^2(t)\,dt = 1$$

$$E_2 = \int_0^1 s_2^2(t)\,dt = \int_0^1 \cos^2 2\pi t dt = ½\int_0^1 dt + ½\int_0^1 \cos 4\pi t dt$$

$$= ½ + \left.\frac{\sin 4\pi t}{8\pi}\right|_0^1 = ½$$

$$E_3 = \int_0^1 s_3^2(t)\,dt = \int_0^1 \cos^4 \pi t dt = ¼\int_0^1 (1+\cos 2\pi t)^2\,dt + ½\int_0^1 \cos 4\pi t dt$$

$$= ¼\int_0^1 \left(1 + 2\cos 2\pi t + \cos^2 2\pi t\right)dt$$

$$= ¼\int_0^1 \left(1 + 2\cos 2\pi t + ½ + ½\cos 4\pi t\right)dt$$

$$= \frac{3}{8}\int_0^1 dt + ½\int_0^1 \cos 2\pi t dt + \frac{1}{8}\int_0^1 \cos 2\pi t dt = \frac{3}{8}$$

Donc les énergies ne sont pas égales. L'énergie moyenne par symbole est

$$E_S = \frac{1}{3}\left[E_1 + E_2 + E_3\right] = \frac{1}{3}\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{8}\right] = \frac{5}{8}$$

L'énergie moyenne par bit est

$$E_b = \frac{E_S}{\log_2 3} = \frac{5}{8}\frac{1}{1.58} = .39$$

B. (10 points) Donnez une base orthonormée pour ces trois signaux.

$$\psi_1(t) = s_1(t)\big/\sqrt{E_1} = s_1(t) = 1,\ 0 \le t \le 1$$

Pour trouver le deuxième vecteur de base,

$$\theta_2(t) = s_2(t) - \left\langle s_2(t), \psi_1(t)\right\rangle \psi_1(t)$$

$$\left\langle s_2(t), \psi_1(t)\right\rangle = \int_0^1 s_2(t)\,dt = \int_0^1 \cos 2\pi t dt = 0$$

$$\theta_2(t) = s_2(t) \qquad ,$$

$$\psi_2(t) = \frac{\theta_2(t)}{\sqrt{\int_0^1 \theta_2^2(t)\,dt}} = \frac{s_2(t)}{\sqrt{\int_0^1 s_2^2(t)\,dt}} = \sqrt{2}\cos 2\pi t$$

Pour trouver le troisième vecteur de base,

$$\theta_3(t) = s_3(t) - \langle s_3(t), \psi_2(t)\rangle \psi_2(t) - \langle s_3(t), \psi_1(t)\rangle \psi_1(t)$$

$$\begin{aligned}\langle s_3(t), \psi_1(t)\rangle &= \int_0^1 s_3(t)\,dt = \int_0^1 \cos^2 \pi t dt = ½\int_0^1 (1+\cos 2\pi t)\,dt \\ &= ½\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle s_3(t), \psi_2(t)\rangle &= \sqrt{2}\int_0^1 \cos^2 \pi t \cos 2\pi t dt = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^1 (1+\cos 2\pi t)\cos 2\pi t dt\ , \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^1 \cos 2\pi t dt + \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^1 \cos^2 2\pi t dt = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^1 \cos^2 2\pi t dt \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4}\int_0^1 (1+\cos 4\pi t)\,dt = \frac{\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

Avec ces projections nous passons au troisième vecteur de base :

$$\theta_3(t) = \cos^2 \pi t - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{2}\cos 2\pi t = \frac{1}{2}(1+\cos 2\pi t) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\pi t = 0\ ,$$

Nous aurions pu éviter tous ces calculs en observant que $s_3(t) = \cos^2 \pi t = ½ + ½\cos 2\pi t$. Clairement le troisième signal peut être écrit comme une combinaison linéaire des autres signaux $s_3(t) = \cos^2 \pi t = ½ s_1(t) + ½ s_2(t)$, donc l'espace est de dimension deux et le troisième vecteur de base est zéro.

Donc l'espace du signal est de dimension deux avec la base suivante

$$\begin{aligned}\psi_1(t) &= 1 & 0 \le t \le 1 \\ \psi_2(t) &= \sqrt{2}\cos 2\pi t & 0 \le t \le 1\end{aligned}$$

C. (10 points) Donnez les coordonnées des signaux; donnez une esquisse de la constellation dans l'espace du signal.

Pour le premier signal

$$\langle s_1(t), \psi_1(t)\rangle = 1 \quad \langle s_1(t), \psi_2(t)\rangle = 0$$

$$s_1 = [1 \quad 0]$$

Pour le deuxième signal

$$\langle s_2(t), \psi_1(t)\rangle = \int_0^1 s_2(t)\,dt = \int_0^1 \cos 2\pi t dt = 0$$

$$\langle s_2(t), \psi_2(t)\rangle = \sqrt{2}\int_0^1 \cos^2 2\pi t dt = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^1 (1+\cos 4\pi t)\,dt = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$s_2 = \left[0 \quad \frac{\sqrt{2}}{2}\right] = [0 \quad .707]$$

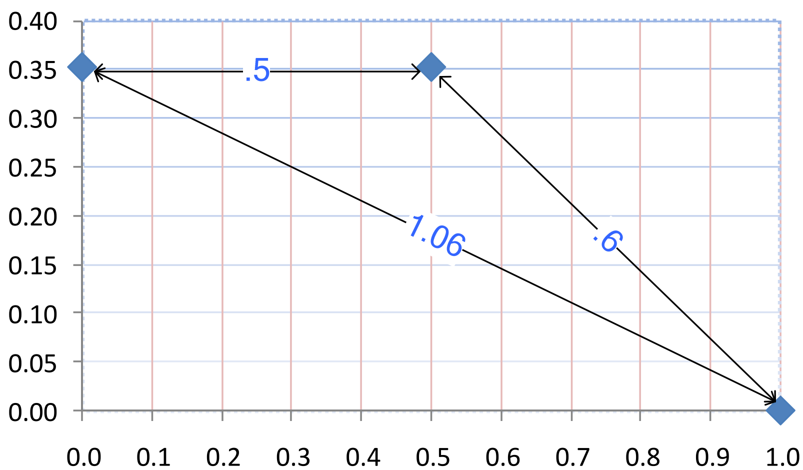
Pour le troisième signal

$$\langle s_3(t), \psi_1(t) \rangle = \int_0^1 \cos^2 \pi t dt = \frac{1}{2}$$

$$\langle s_3(t), \psi_2(t) \rangle = \sqrt{2} \int_0^1 \cos^2 \pi t \cos 2\pi t dt = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$s_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} \end{bmatrix} = [.5 \quad .353]$$

Une esquisse des points



D. (5 points) Quelle est la distance minimale dans l'espace du signal?

La distance entre points est calculée comme

$$\|s_1 - s_2\| = \sqrt{(s_{1,1} - s_{2,1})^2 + (s_{1,2} - s_{2,2})^2} = \sqrt{(1-0)^2 + (0-.707)^2} = 1.06$$

$$\|s_1 - s_3\| = \sqrt{(1-.5)^2 + (0-.353)^2} = .61$$

$$\|s_2 - s_3\| = \sqrt{(0-.5)^2 + (.707-.353)^2} = .61$$

La distance minimale est donc .61.

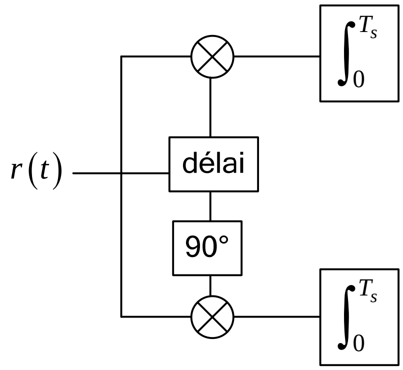
E. (5 points) Quelle est la perte par rapport à QPSK?

Rappel que $E_b = .39$, voir partie A, et que $D_{\min} = .61$, voir partie D, donc

$$d_{\min} = \frac{D_{\min}}{\sqrt{2E_b}} = \frac{.61}{\sqrt{2 \cdot .39}} = .693 \quad \Rightarrow \quad \text{perte} = -10 \log_{10} \frac{d_{\min}^2}{2} = -10 \log_{10} \frac{.693}{2} = 6.2 \text{ dB}$$

Problème 4 (15 points sur 70)

Supposons que nous avons un système à taux binaire de1 kb/s et nous exploitons une modulation différentielle de la phase, avec le récepteur non cohérent suivant.



A. (10 points) Pour envoyer l'information avec modulation DQPSK, quel est le délai du récepteur?

Le récepteur DPSK utilise une autoréférence de la phase. Le signal est corrélé avec lui-même après un délai d'un symbole. Le symbole est codé dans la différence de la phase d'un symbole à l'autre. Le délai est donc d'un symbole. Le taux binaire est 1kb/s, donc un intervalle de bit est 1 ms. Il y a deux bits par symbole pour DQPSK, donc un intervalle de symbole est deux intervalles de bit, soit 2 ms. Le délai est donc 2 ms.

B. (5 points) Supposons que le canal a une phase qui dérive lentement. La phase reste constante pendant une période de ~2ms. Est-ce que nous pouvons utiliser 16 DPSK pour envoyer l'information à 1 kb/s? Justifiez votre réponse.

L'autoréférence de la phase marche autant que la phase ne change pas d'un symbole à l'autre, donc qu'il ne change pas pendant deux intervalles de symbole. Le taux binaire est 1kb/s, donc un intervalle de bit est 1 ms. Il y a quatre bits par symbole pour D16PSK, donc un intervalle de symbole est quatre intervalles de bit, soit 4 ms. La phase est constante que pour ~2 ms, donc loin des 8 ms requis pour D16PSK, donc il n'est pas possible d'utiliser 16DPSK dans ce canal à 1kb/s.