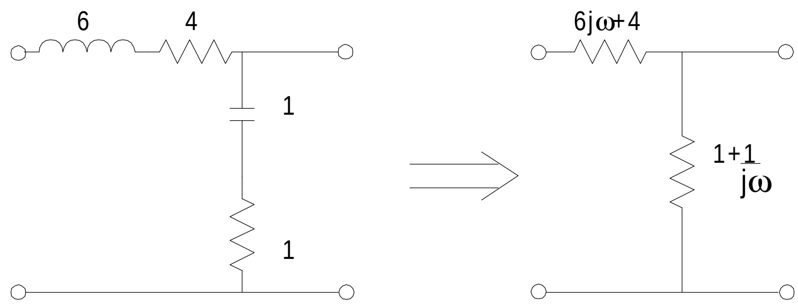
Examen Final - *Solutions*

Problème 1 (8 points sur 45)



Pour trouver la réponse impulsionnelle, on cherche la réponse en fréquence, $H(j\omega)$, et ensuite la transformée inverse. Pour trouver la réponse en fréquence, on remplace:

- le condensateur avec une impédance complexe $\dfrac{1}{j\omega C}$
- l'inductance avec une impédance complexe $j\omega L$

et, on utilise les équations de Kirchoff pour calculer le courant et la tension. La réponse en fréquence de ce circuit est

$$H(j\omega) = \frac{1+\dfrac{1}{j\omega}}{6j\omega+4+1+\dfrac{1}{j\omega}} = \frac{1+\dfrac{1}{j\omega}}{6j\omega+5+\dfrac{1}{j\omega}}$$

$$= \frac{1+j\omega}{6(j\omega)^2+5j\omega+1} = \frac{1+j\omega}{(1+2j\omega)(1+3j\omega)}$$

Pour trouver la transformée inverse on utilise les fractions partielles.

$$H(j\omega) = \frac{1+j\omega}{(1+2j\omega)(1+3j\omega)} = \frac{A}{1+2j\omega} + \frac{B}{1+3j\omega}$$

Les coefficients A et B satisfont

$$A + 3Aj\omega + B + 2Bj\omega = 1 + j\omega$$

Donc $A=-1$ et $B=2$.

$$H(j\omega) = \frac{-1}{1+2j\omega} + \frac{2}{1+3j\omega}$$
$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{\frac{1}{2}+j\omega} + \frac{2}{3}\frac{1}{\frac{1}{3}+j\omega}$$

On peut trouver les transformées inverses en utilisant la table de transformées:

$$h(t) = \mathscr{F}^{-1}\left[H(j\omega)\right]$$
$$= -\frac{1}{2}\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{1}{\frac{1}{2}+j\omega}\right] + \frac{2}{3}\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{1}{\frac{1}{3}+j\omega}\right]$$
$$= -\frac{1}{2}e^{-t/2}U(t) + \frac{2}{3}e^{-t/3}U(t)$$

Problème 2 (11 points sur 45)

a) 8 pts: On cherche la convolution de la fonction

$$x(t) = e^{-|t|}U(t)$$

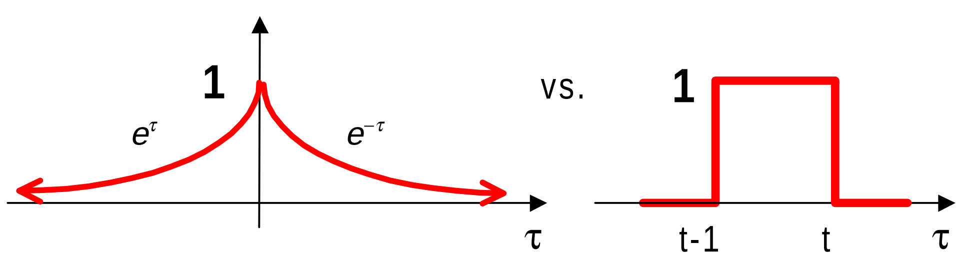
et la fonction

$$f(t) = \text{Rect}\left(t - \tfrac{1}{2}\right)$$

On utilise la définition de la convolution

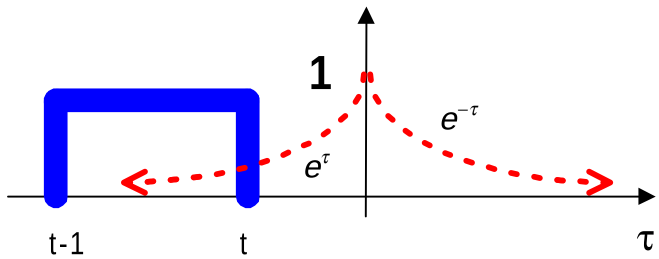
$$x(t) * f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)x(\tau)d\tau$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau}U(\tau)\text{Rect}\left(t-\tau-\tfrac{1}{2}\right)d\tau$$

Graphiquement on aura une exponentielle de deux côtés qui ne bouge pas. Le rectangle sera réfléchi par l'axe *t=0*, et déplacé. Donc la fin du rectangle sera à tau égale à *t*, avec une largeur d'un.



Graphiquement on va voir qu'il y a trois régions d'intégration.

Pour *t* très négatif, le rectangle sera à la gauche de l'axe verticale. Le rectangle sera recouverte par l'exponentielle avec l'équation *exp(tau)*.

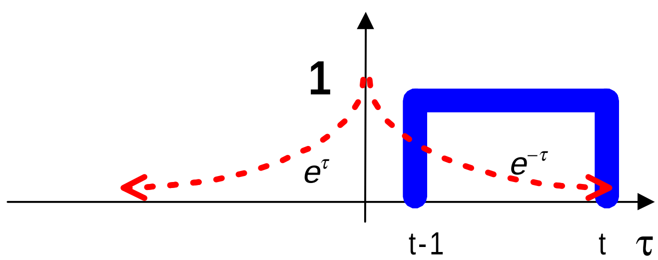


.

Donc pour *t<0*, la convolution sera

$$\int_{t-1}^{t} e^{\tau} d\tau = e^{\tau}\Big|_{t-1}^{t} = e^{t} - e^{t-1}$$

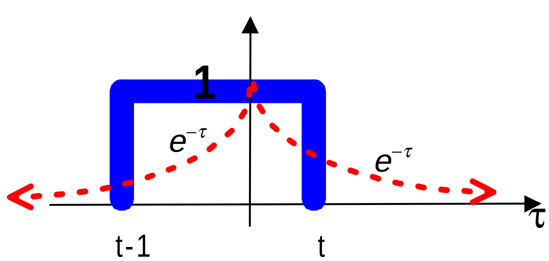
Pour *t* très positif, le rectangle sera à la droit de l'axe verticale. Le rectangle sera recouverte par l'exponentielle avec l'équation *exp(-tau)*.



Donc pour *t-1>0*, la convolution sera

$$\int_{t-1}^{t} e^{-\tau} d\tau = -e^{-\tau}\Big|_{t-1}^{t} = e^{-t+1} - e^{-t}$$

Pour *0<t<1* une portion du rectangle sera couverte par l'exponentielle avec l'équation *exp(-tau)*, et l'autre portion sera couverte par l'exponentielle avec l'équation *exp(tau)*.



Donc pour *0<t<1* la convolution sera

$$\int_{t-1}^{0} e^{\tau} d\tau + \int_{0}^{t} e^{-\tau} d\tau = e^{\tau}\Big|_{t-1}^{0} - e^{-\tau}\Big|_{0}^{t}$$
$$= 1 - e^{t-1} - e^{-t} + 1$$
$$= 2 - e^{t-1} - e^{-t}$$

Pour résumer, on a trouvé que la convolution est donnée par

$$x(t) * f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 2 - e^{-t} - e^{t-1} & 0 < t < 1 \\ e^{-t+1} - e^{-t} & t > 1 \end{cases}$$

b) 3 pts:

La convolution dans le temps correspond à une multiplication dans le domaine fréquenciel. Donc il faut chercher la transformée de chaque fonction, et le produit sera la transformée de la convolution. La transformée de la première fonction est

$$\mathscr{F}\left\{e^{-|t|}\right\} = \frac{2}{1+\omega^2}$$

La transformée de la deuxième fonction est

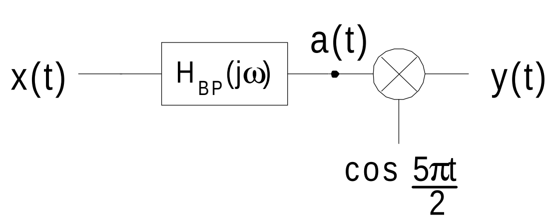
$$\mathscr{F}\left\{\text{Rect}\left(t - \tfrac{1}{2}\right)\right\} = e^{-j\omega/2} \mathscr{F}\left\{\text{Rect}(t)\right\} = e^{-j\omega/2}\,\text{Sa}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

Le produit donc est

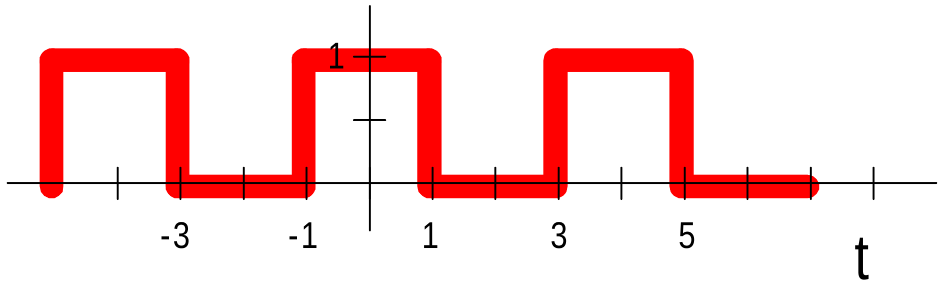
$$\frac{2}{1+\omega^2} e^{-j\omega/2}\,\text{Sa}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

qui est aussi la transformée de la convolution.

Problème 3 (12 points sur 45)



où l'entrée est la fonction périodique suivante



et le filtre passe-bande a une réponse en fréquence

$$H_{BP}(j\omega) = \begin{cases} 3 & 3 \le |\omega| \le 6 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

a) 3 pts: Pour trouver la transformée de l'entrée, il faut trouver la en premier la représentation en série de Fourier de l'entrée périodique. Le méthode le plus simple est d'utiliser la somme de Poisson. On cherche la transformée d'une seule période de *x(t)*, qui dans ce cas est la transformée de la fonction *Rect(t/2)*. La transformée est dans les tables:

$$\mathscr{F}\left[\text{Rect}(t/2)\right] = 2\,\text{Sa}(\omega)$$

La période de l'entrée est 4, donc la fréquence fondamentale est pi sur deux. La somme de Poisson nous donne les coefficients de Fourier de la représentation en série de Fourier:

$$X(n) = \frac{1}{T_0} 2\,\text{Sa}(\omega)\Big|_{\omega = n\omega_0} = \frac{1}{4} 2\,\text{Sa}\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\text{Sa}\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

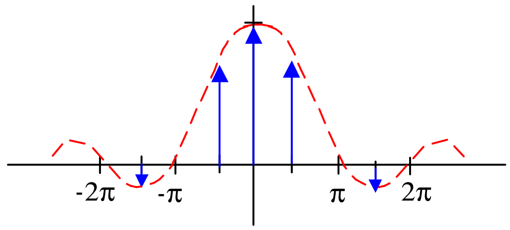
Donc la série de Fourier est

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\text{Sa}\left(\frac{n\pi}{2}\right) e^{jn\pi t/2}$$

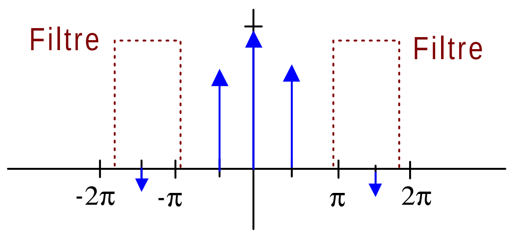
La transformée de l'entrée est la somme des transformées de chaque terme:

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\text{Sa}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cdot 2\pi \cdot \delta\left(\omega - \frac{n\pi}{2}\right) \\ &= \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \delta\left(\omega - \frac{n\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

La transformée donc est un train des impulsions avec les poids déterminés par la fonction *Sa*.



b) 3 pts: Le graphique du filtre passe-bande est superposé sur la graphique du train des impulsions.



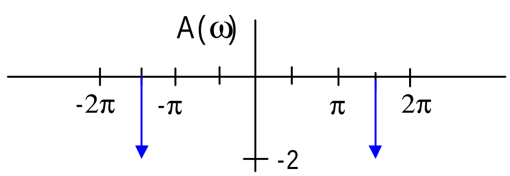
On peut voir qu'il y a seulement deux impulsions (*n=3* et *n=-3*) qui sortent du filtre. Donc le spectre de *a(t)* est

$$A(\omega) = 3\pi\,\mathrm{Sa}\left(\frac{3\pi}{2}\right)\delta\left(\omega - \frac{3\pi}{2}\right) + 3\pi\,\mathrm{Sa}\left(\frac{-3\pi}{2}\right)\delta\left(\omega + \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$= 3\pi\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{\left(\frac{3\pi}{2}\right)}\delta\left(\omega - \frac{3\pi}{2}\right) + 3\pi\frac{\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)}{\left(-\frac{3\pi}{2}\right)}\delta\left(\omega + \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$= 3\pi\frac{-1}{\left(\frac{3\pi}{2}\right)}\delta\left(\omega - \frac{3\pi}{2}\right) + 3\pi\frac{1}{\left(-\frac{3\pi}{2}\right)}\delta\left(\omega + \frac{3\pi}{2}\right)$$

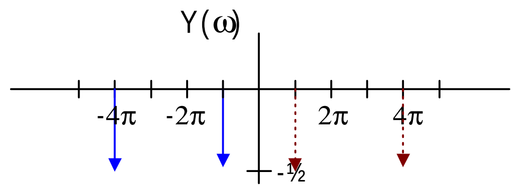
$$= -2\delta\left(\omega - \frac{3\pi}{2}\right) - 2\delta\left(\omega + \frac{3\pi}{2}\right)$$



C'est la transformée d'un cosinus.

c) 3 pts: L'effet d'une modulation par un cosinus est d'avoir deux copies de la transformée originale: une copie centré sur la positive de la fréquence de modulation, l'autre sur la négative de la fréquence de modulation. Le module est réduit par un demi.

Donc la spectre de *y(t)* est



On peut trouver le même réponse en utilisant la convolution

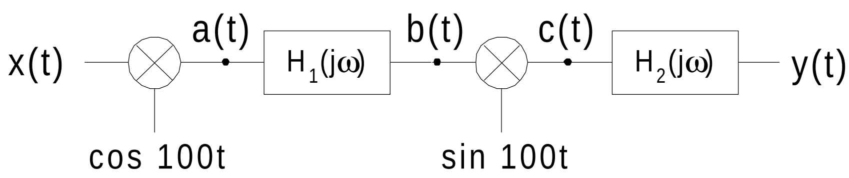
$$
\begin{aligned}
Y(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\left[-2\delta\left(\omega-\frac{3\pi}{2}\right)-2\delta\left(\omega+\frac{3\pi}{2}\right)\right]*\left[\pi\delta\left(\omega-\frac{5\pi}{2}\right)+\pi\delta\left(\omega+\frac{5\pi}{2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[-2\delta\left(\omega-\frac{3\pi}{2}\right)-2\delta\left(\omega+\frac{3\pi}{2}\right)\right]*\left[\pi\delta\left(\omega-\frac{5\pi}{2}\right)+\pi\delta\left(\omega+\frac{5\pi}{2}\right)\right] \\
&= -\left[\begin{array}{l}\delta\left(\omega-\frac{3\pi}{2}\right)*\delta\left(\omega-\frac{5\pi}{2}\right)+\delta\left(\omega+\frac{3\pi}{2}\right)*\delta\left(\omega-\frac{5\pi}{2}\right) \\ \qquad +\delta\left(\omega-\frac{3\pi}{2}\right)*\delta\left(\omega+\frac{5\pi}{2}\right)+\delta\left(\omega+\frac{3\pi}{2}\right)*\delta\left(\omega+\frac{5\pi}{2}\right)\end{array}\right] \\
&= -\left[\delta\left(\omega-\frac{3\pi}{2}-\frac{5\pi}{2}\right)+\delta\left(\omega+\frac{3\pi}{2}-\frac{5\pi}{2}\right)+\delta\left(\omega-\frac{3\pi}{2}+\frac{5\pi}{2}\right)+\delta\left(\omega+\frac{3\pi}{2}+\frac{5\pi}{2}\right)\right] \\
&= -\left[\delta(\omega-4\pi)+\delta(\omega-\pi)+\delta(\omega+\pi)+\delta(\omega+4\pi)\right]
\end{aligned}
$$

d) 3 pts: La transformée inverse est facile à trouver, c'est la somme des deux cosinus, un avec une fréquence de pi, l'autre avec une fréquence de quatre pi.

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \mathscr{F}^{-1}\left[Y(\omega)\right] = -\mathscr{F}^{-1}\left[\delta(\omega-4\pi)+\delta(\omega-\pi)+\delta(\omega+\pi)+\delta(\omega+4\pi)\right] \\
&= -\mathscr{F}^{-1}\left[\delta(\omega-\pi)+\delta(\omega+\pi)\right]-\mathscr{F}^{-1}\left[\delta(\omega-4\pi)+\delta(\omega+4\pi)\right] \\
&= -\frac{1}{\pi}\cos\pi t-\frac{1}{\pi}\cos 4\pi t
\end{aligned}
$$

Problème 4 (14 points sur 45)

a) 12 pts:



i) On cherche la transformée de

$$x(t) = \frac{5}{\pi}\mathrm{Sa}^2(5t)$$

On cherche dans le table, mais on a seulement le résultat

$$\Lambda\left(\frac{t}{\tau}\right) \Leftrightarrow \tau^2\,\mathrm{Sa}^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

Il faut utiliser la dualité pour arriver à

$$\tau^2\,\mathrm{Sa}^2\left(\frac{t\tau}{2}\right) \Leftrightarrow 2\pi\Lambda\left(\frac{-\omega}{\tau}\right)$$

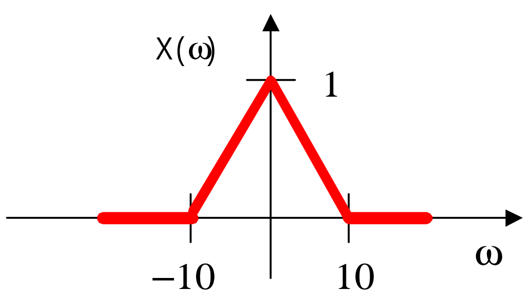
On veut avoir l'argument de *Sa* égale à 5*t*, donc on choisit tau égal à dix.

$$100\,\mathrm{Sa}^2(5t) \Leftrightarrow 2\pi\Lambda\left(\frac{-\omega}{5}\right)$$

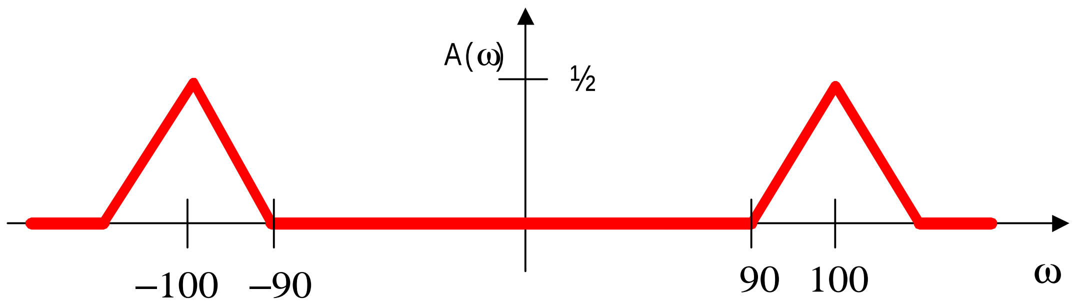
On divise les deux côtés vingt pi:

$$\frac{5}{\pi}\mathrm{Sa}^2(t) \Leftrightarrow \frac{1}{10}\Lambda\left(\frac{-\omega}{5}\right)$$

La graphique de la transformée est



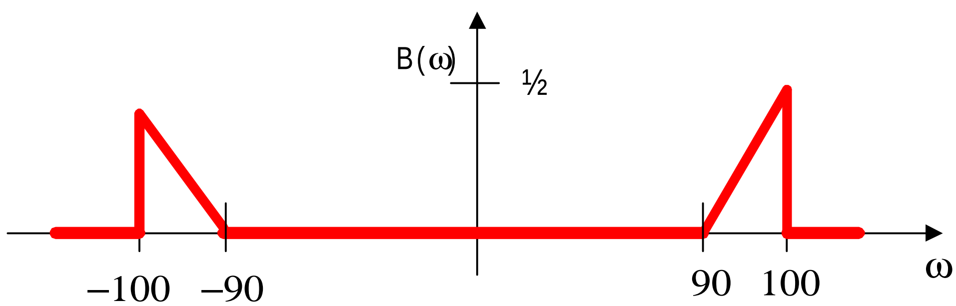
ii) 2 pts. L'effet d'une modulation par un cosinus est d'avoir deux copies de la transformée originale: une copie centré sur la fréquence 100, l'autre sur la fréquence -100. Le module est réduit par un demi. Donc la spectre de *a(t)* est



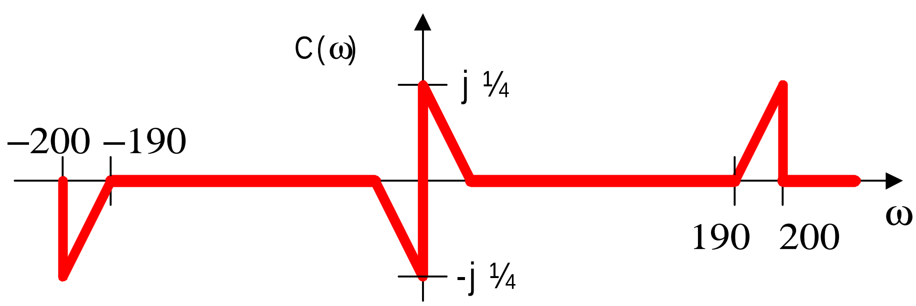
iii) 3 pts. Le signal passe par un filtre passe-bas.

$$H_1(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq 100 \\ 0 & |\omega| > 100 \end{cases}$$

Les fréquences plus petites que 100 passent, mais les fréquences plus grandes que 100 sont annulées. Donc la spectre de *b(t)* est



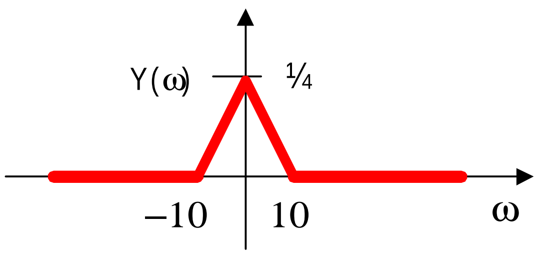
iv) 2 pts. L'effet d'une modulation par un sinus est d'avoir deux copies de la transformée originale: une copie centré sur la fréquence 100, l'autre sur la fréquence -100. L'amplitude est multiplié par moins un demi *j*. Donc la spectre de *c(t)* est



v) 3 pts. Le signal passe par un filtre passe-bas.

$$H_2(j\omega) = \begin{cases} j & 0 < \omega \le 30 \\ 0 & |\omega| > 30, \omega = 0 \\ -j & -30 \le \omega < 0 \end{cases}$$

Les fréquences plus petites que 30 passent, mais les fréquences plus grandes que 30 sont annulées. Les fréquences basses et positives sont multipliées par *j*, les fréquence basses et négatives sont multipliées par moins *j*. Donc la spectre de la sortie *y(t)* est



Donc la sortie est un quart de l'entrée.

b) On peut voir du graphique que la fréquence Nyquist (deux fois la fréquence maximale) est dix fois deux, ou vingt.

Cette page a été révisée le lundi, octobre 28, 1996 par Leslie A. Rusch.