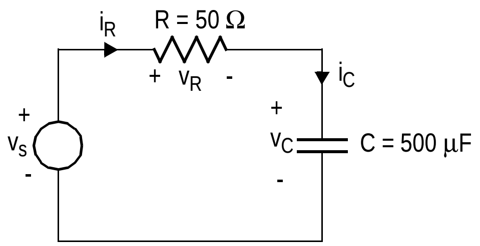
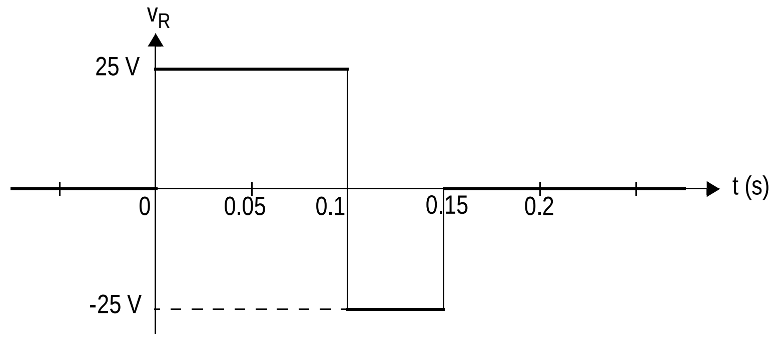
Corrigé de l'examen partiel Hiver 2000

Problème no. 1 (20 points)

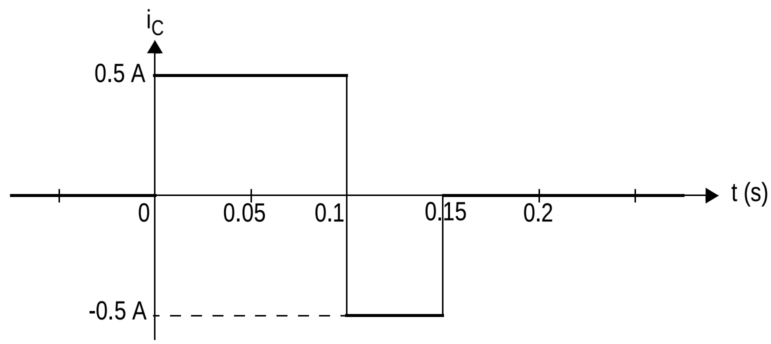
a)





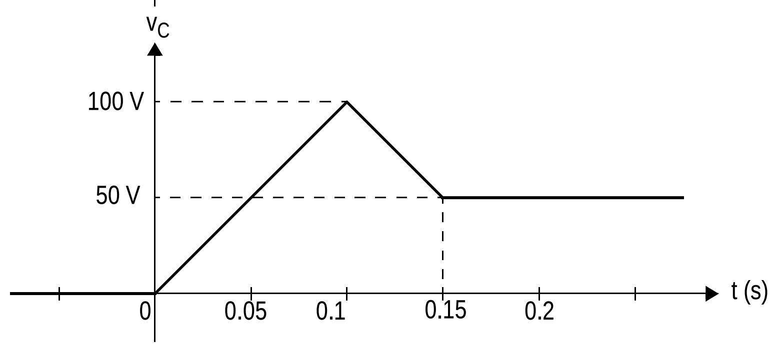
Le courant dans le condensateur est égal au courant dans la résistance:

$$i_C = i_R = \frac{v_R}{R} = \frac{v_R}{50}$$



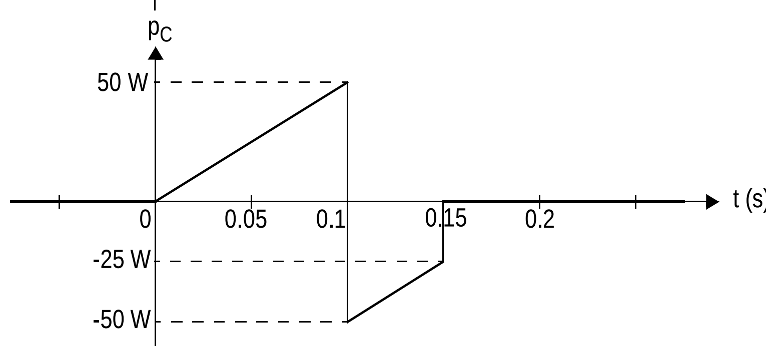
La tension aux bornes du condensateur est égale à:

$$v_C = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C dt$$



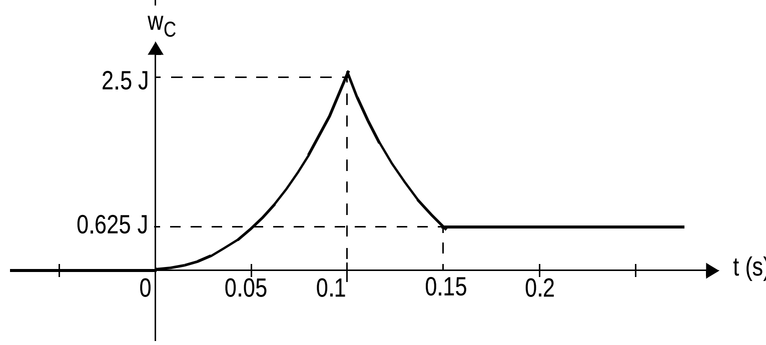
La puissance dans le condensateur est égale au produit v_C et i_C:

$$p_C = v_C \times i_C$$

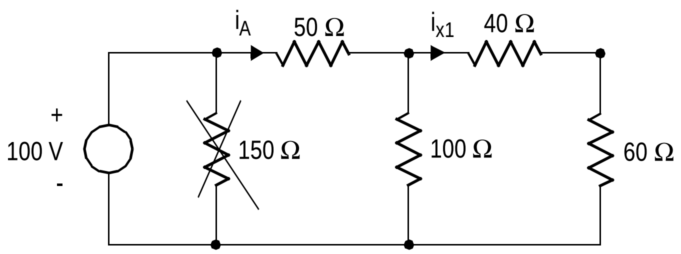


L'énergie dans le condensateur est égale à:

$$w_C = \int_{-\infty}^{t} p_C dt$$



b)
<u>Étape 1</u>: On considère la source de tension seule

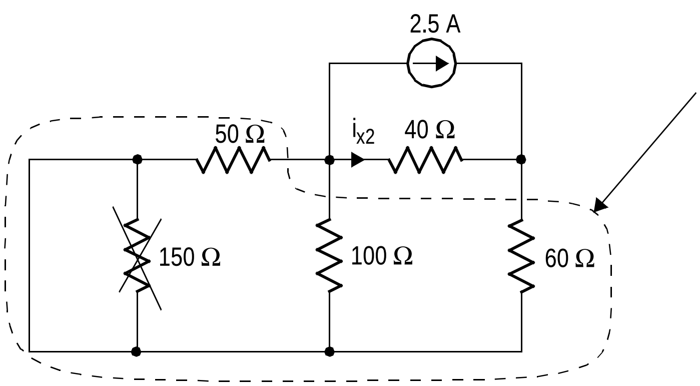


$$i_A = \frac{100V}{50 + 100 \parallel (40 + 60)} = \frac{100V}{100\Omega} = 1A$$

Divisieur de courant:

$$i_{x1} = \frac{100}{100 + (40 + 60)} \times i_A = 0.5A$$

<u>Étape 2</u>: On considère la source de courant seule



$$R_{eq} = (50 \parallel 100) + 60 = 93.33\Omega$$

Divisieur de courant:

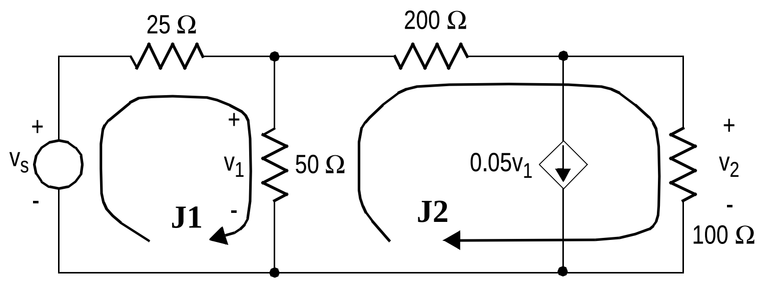
$$i_{x2} = -\frac{R_{eq}}{R_{eq} + 40} \times 2.5 = -1.75A$$

<u>Étape 3</u>: Superposition des deux sources

$$i_x = i_{x1} + i_{x2} = 0.5 - 1.75 = -1.25\,A$$

Problème no. 2 (20 points)

a) Méthode des mailles



On écrit: $$\begin{bmatrix} 25+50 & -50 \\ -50 & 200+100+50 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_s \\ 100\times 0.05v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_s \\ 5v_1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

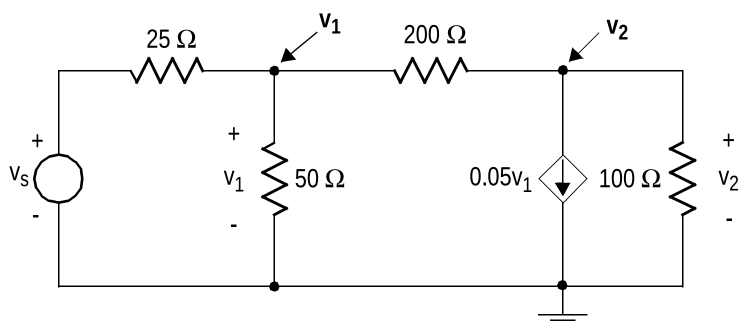
On a: $v_1 = 50(J_1 - J_2)$

L'équation (1) devient: $$\begin{bmatrix} 75 & -50 \\ -50 & 350 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_s \\ 5\times 50(J_1 - J_2) \end{bmatrix} \quad (2)$$

Ou encore: $$\begin{bmatrix} 75 & -50 \\ (-50-250) & (350+250) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_s \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Finalement: $$\begin{bmatrix} 75 & -50 \\ -300 & 600 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_s \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

b) Méthode des noeuds



On écrit: $$\begin{bmatrix} \frac{1}{25}+\frac{1}{50}+\frac{1}{200} & -\frac{1}{200} \\ -\frac{1}{200} & \frac{1}{200}+\frac{1}{100} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{v_s}{25} \\ -0.05v_1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

L'équation (5) devient: $$\begin{bmatrix} 0.065 & -0.005 \\ -0.005 & 0.015 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.04v_s \\ -0.05v_1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Ou encore:

$$\begin{bmatrix} 0.065 & -0.005 \\ -0.005+0.05 & 0.015 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.04v_s \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Finalement:

$$\begin{bmatrix} 0.065 & -0.005 \\ 0.045 & 0.015 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.04v_s \\ 0 \end{bmatrix} \tag{8}$$

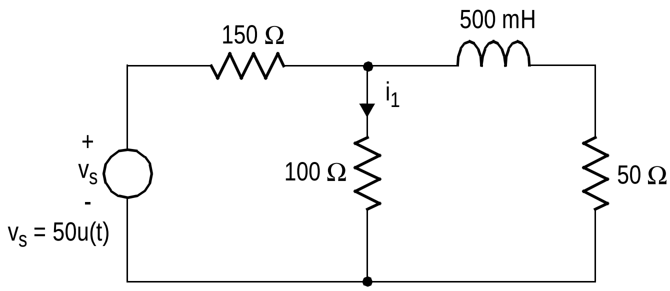
c) Pour déterminer la tension v_2, on résout l'équation (8):

$$v_2 = \frac{\begin{vmatrix} 0.065 & 0.04v_s \\ 0.045 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0.065 & -0.005 \\ 0.045 & 0.015 \end{vmatrix}} = \frac{-0.0018v_s}{0.0012} = -1.5v_s$$

La tension v_2 est donc: $\boxed{v_2 = -1.5v_s}$

Problème no. 3 (20 points)

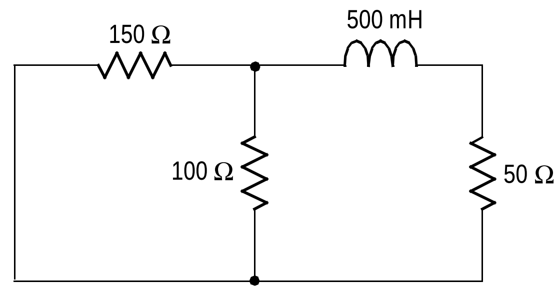
a)



C'est un circuit du 1er ordre. La constante de temps de ce circuit est calculée en utilisant le circuit de base (obtenu en annulant les sources).

Constante de temps:

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{0.5}{(150 \| 100) + 50} = 4.5\text{ms}$$



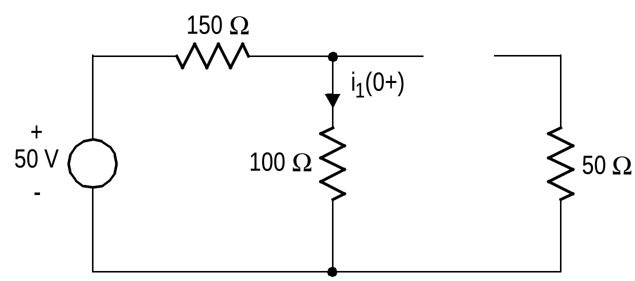
La source v_s est une source échelon. Le courant i_1 sera de la forme suivante:

$$i_1(t) = [A + Be^{-t/\tau}]u(t)$$

Les constantes A et B sont déterminée à l'aide des conditions initiale (t = 0+) et finale ($t \rightarrow \infty$) de i_1.

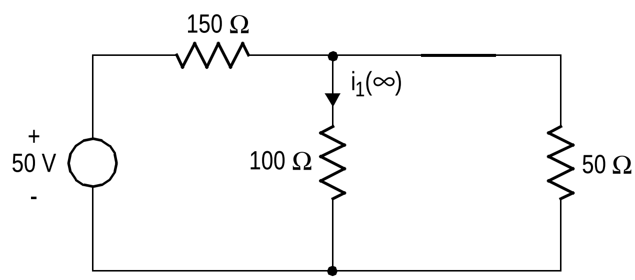
À t = 0+

$$i_1(0+) = \frac{50}{150 + 100} = 0.2\text{A}$$



Lorsque $t \rightarrow \infty$

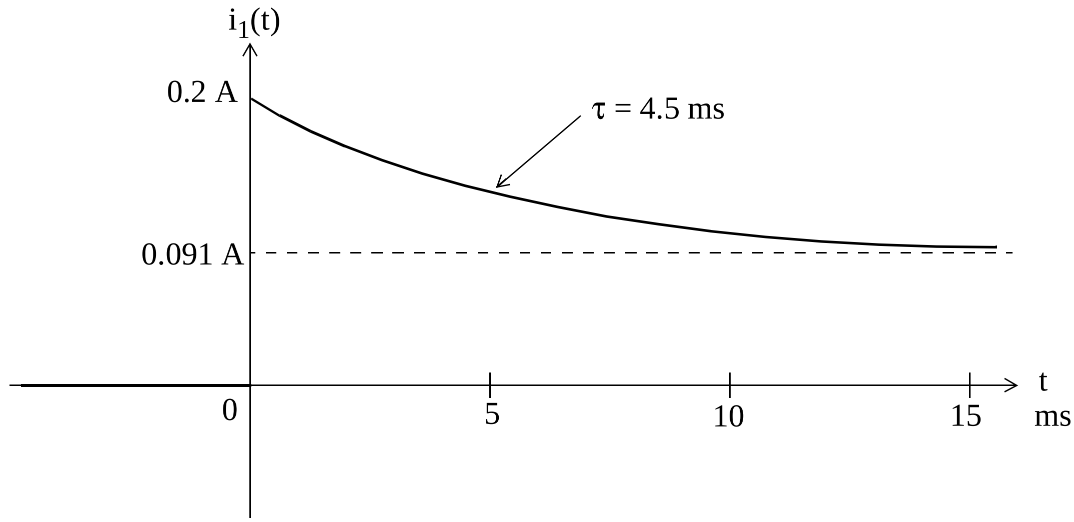
$$i_1(\infty) = \frac{50}{150 + (100 \| 50)} \times \frac{50}{50 + 100} = 0.091\text{A}$$



Les constantes A et B sont: A = 0.091 B = 0.109

Donc le courant i_1 est: $\boxed{i_1(t) = [0.091 + 0.109e^{-t/\tau}]u(t)}$

où τ = 4.5 ms.



La durée du régime transitoire est égale à 5 fois la constante de temps du circuit:

$$d_{trans} = 5 \times \tau = 5 \times 4.5\,\text{ms} = 22.5\,\text{ms}$$

b)

Dans question a, nous avons obtenu la réponse du circuit à une source v_s égale à un échelon de 50 V.

Dans la question b, la source v_s est une combinaison linéaire de deux échelons:

$$v_s = 150u(t) - 150u(t-0.1)$$

On peut déduire la réponse i_1 à cette excitation en utilisant le résultat obtenu en a:

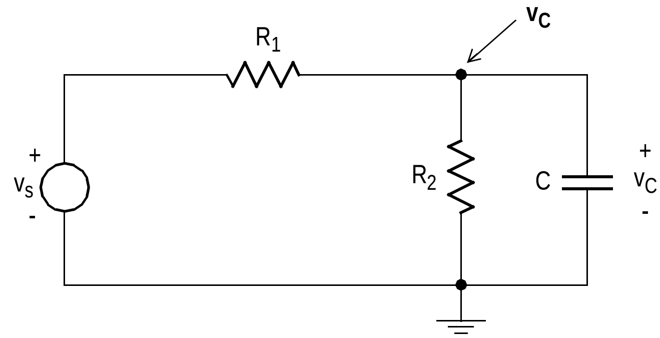
$$i_1(t) = \frac{150}{50} \times [0.091 + 0.109e^{-t/\tau}]u(t) - \frac{150}{50} \times [0.091 + 0.109e^{-(t-0.1)/\tau}]u(t-0.1)$$

Ou bien:

$$\boxed{i_1(t) = [0.273 + 0.327e^{-t/\tau}]u(t) - [0.273 + 0.327e^{-(t-0.1)/\tau}]u(t-0.1)}$$

Problème no. 4 (20 points)

a) On utilise la méthode des noeuds pour écrire l'équation du circuit:



On écrit: $$\left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + C\frac{d}{dt}\right]v_C = \frac{v_s}{R_1} \qquad (1)$$

Ou encore: $$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)v_C + C\frac{dv_C}{dt} = \frac{v_s}{R_1} \qquad (2)$$

L'équation différentielle qui relie la tension v_C à la source v_s est donc:

$$\boxed{C\frac{dv_C}{dt} + \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1R_2}\right)v_C = \frac{v_s}{R_1}} \qquad (3)$$

b) Pour le cas où:

$$v_s = [120\cos(200\pi t)]u(t)$$

$R_1 = 100\ \Omega$ $\qquad R_2 = 300\ \Omega$ $\qquad C = 20\ \mu F$

l'équation différentielle qui donnera v_C est:

$$20\times10^{-6}\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{75} = [1.2\cos(200\pi t)]u(t) = \mathrm{Re}\{1.2e^{j200\pi t}u(t)\} \qquad (4)$$

On résout en premier lieu l'équation différentielle suivante:

$$20\times10^{-6}\frac{dv_x}{dt} + \frac{v_x}{75} = 1.2e^{j200\pi t}u(t) \qquad (5)$$

Nous avons: $v_x = v_{xP} + v_{xH}$

v_{xP} est la solution particulière de l'équation (5):

$$v_{xP} = \frac{1.2}{20\times10^{-6}(j200\pi) + \frac{1}{75}}e^{j200\pi t} = \left(\frac{1.2}{0.0133 + j0.0126}\right)e^{j200\pi t} = (65.5\angle{-0.756})e^{j200\pi t}$$

v_{xH} est la solution homogène de l'équation (5): $\qquad v_{xH} = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$

où $\tau = RC = 75 \times 20\times10^{-6} = 1.5\,\mathrm{ms}$.

La constante A est déterminée par la condition de continuité de v_x à t = 0:

$$v_x(0+\ ) = v_x(0-\ ) = 0 = A + (65.5\angle{-0.756})$$

On déduit: $\qquad A = -(65.5\angle{-0.756})$

On a donc: $$v_x = \left[(65.5\angle{-0.756})e^{j200\pi t} - (65.5\angle{-0.756})e^{-\frac{t}{\tau}}\right]u(t)$$

On obtient v_1 en prenant la partie réelle de v_x:

$$v_1 = \mathrm{Re}\{v_x\} = \mathrm{Re}\left\{\left[(65.5\angle{-0.756})e^{j200\pi t} - (65.5\angle{-0.756})e^{-\frac{t}{\tau}}\right]u(t)\right\}$$

$$\boxed{v_1 = \left[\underbrace{65.5\cos(200\pi t - 0.756)}_{\text{Réponse permanente}} - \underbrace{47.66e^{-\frac{t}{\tau}}}_{\text{Réponse transitoire}}\right]u(t)}$$

La durée du régime transitoire est 5 fois la constante de temps τ:

$$d_{trans} = 5 \times \tau = 5 \times 1.5\,\mathrm{ms} = 7.5\,\mathrm{ms}$$