Analyse des signaux

GEL-2001

Corrigé de l'examen 2

Assistant:
Philippe Guay

Professeur:
Jérôme Genest

10 décembre 2020

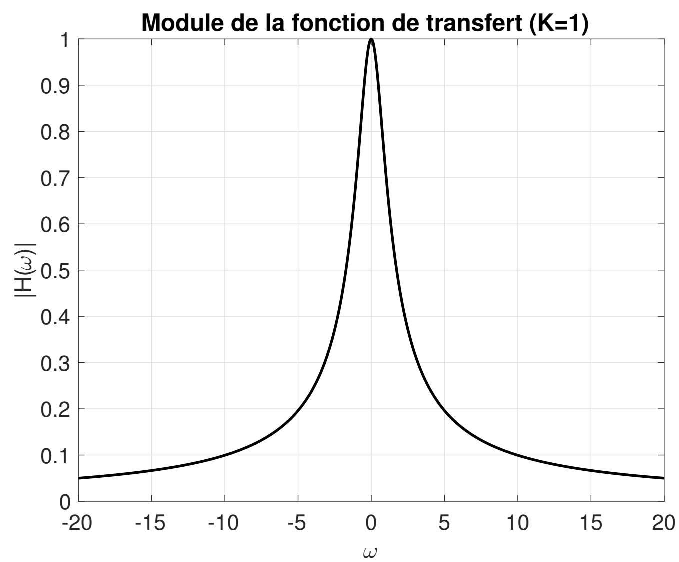
Problème 1

a) La fonction de transfert d'un filtre de 1er ordre où $\tau = RC = 1$ et de gain arbitraire K est

$$H(\omega) = \frac{K}{1 + j\omega}$$

et son module est donné par

$$|H(\omega)| = \frac{|K|}{\sqrt{1+\omega^2}}.$$



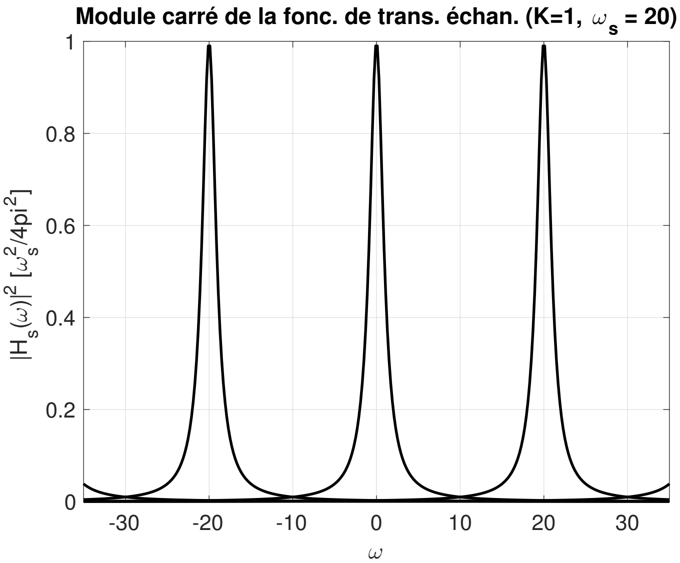
b) Comme la réponse impulsionnelle est échantillonnée, son spectre est convolué par un peigne de fréquence dont le taux de répétition est de ω_s.

c) En posant $K = 1$ et comme $|H(0)|^2 = 1$, on peut écrire

$$\begin{aligned}
|H_s(\omega)|^2 &< 1\% \\
\left(\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}\right)^2 &< 0.01 \\
\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}} &< 0.1 \\
10 &< \sqrt{1+\omega^2} \\
99 &< \omega^2
\end{aligned}$$

Donc, c'est à $\omega = \sqrt{99}$ que le signal vaut 1% de sa valeur maximale. La fréquence d'échantillonnage ω_s doit donc être à 2 fois cette fréquence.

$$\omega_s > 2\sqrt{99} \approx 20$$

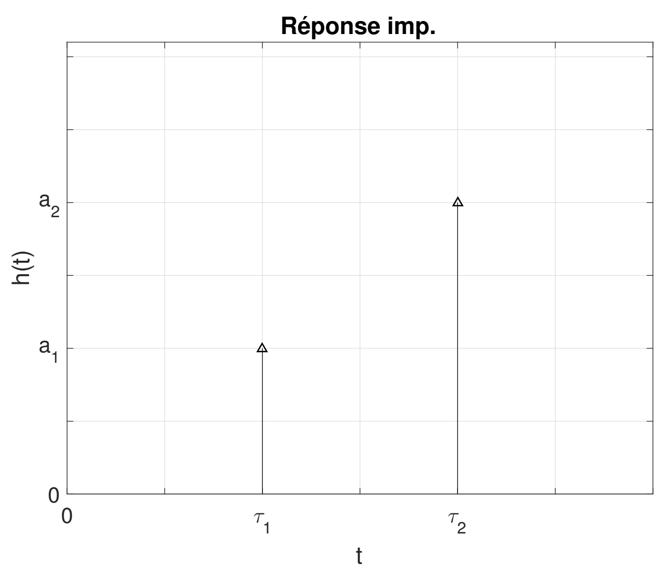


Problème 2

a) La réponse impulsionnelle est donnée comme

$$h(t) = a_1\delta(t-\tau_1) + a_2\delta(t-\tau_2)$$

b) Voir la figure



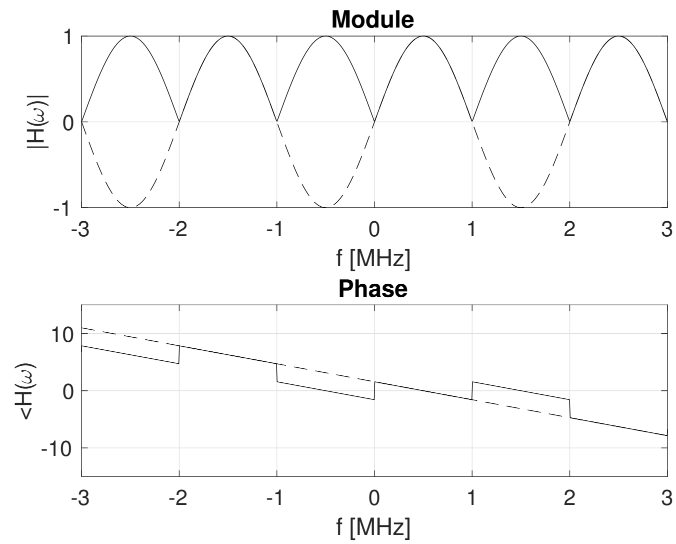
c) La fonction de transfert est

$$
\begin{aligned}
H(\omega) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-j\omega(10^{-6})} \\
&= je^{-j\omega(10^{-6})/2}\sin\left(\omega(10^{-6})/2\right)
\end{aligned}
$$

Le module et la phase de la fonction de transfert sont

$|H(\omega)| = |\sin\left(\omega(10^{-6})/2\right)| \quad < H(\omega) = \pi/2 - \omega(10^{-6})/2 \quad$ avec $0/\pi$ de plus selon le signe du sin

d) Comme le module de la fonction de transfert à $f = 1$ MHz est nul, la sortie est nulle.



e) La réponse impulsionnelle produit 2 copies du signal dont une décalée d'une période et soustrait ceux-ci. On s'attend bien à ce que la sortie soit nulle.

f) Pour les fréquences $<$ 500 kHz, c'est un dérivateur.

Problème 3

a) La densité spectrale d'énergie est calculée avec

$$
E(\omega) = \frac{|Y(\omega)|^2}{2\pi}
$$

où $Y(\omega) = S(\omega)H(\omega)$. Ainsi, pour un signal plus large que le filtre et de niveau N_1 en [V/Hz], l'énergie E [J] qui passe dans le filtre est donné comme

$$
E = N_1^2 h^2 \frac{\Delta\omega}{2\pi} \quad \left[\frac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{Hz}^2}\mathrm{Hz} = \mathrm{J}\right].
$$

Pour un signal plus étroit que le filtre et de niveau N_2 en [V/Hz], l'énergie E [J] qui passe dans le filtre est donné comme

$$E = N_2^2 h^2 \frac{\delta\omega}{2\pi} \quad \left[\frac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{Hz}^2}\mathrm{Hz} = \mathrm{J}\right].$$

b) La convolution.

c) On divise par $h^2\Delta\omega$.

$$\begin{aligned} \mathrm{DSE} = \frac{N_1^2 h^2 \Delta\omega}{2\pi h^2 \Delta\omega} = & \quad \left[\frac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{Hz}^2}\frac{\mathrm{Hz}}{\mathrm{Hz}}\right] \\ = \frac{N_1^2}{2\pi} \quad & \quad \left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{Hz}}\right]. \end{aligned}$$

d) Comme le signal est plus étroit en fréquence que le filtre, la largeur de ce dernier n'a pas d'effet. On divise plutôt seulement par h^2.

$$\begin{aligned} E &= \frac{N_2^2 h^2 \delta\omega}{2\pi h^2} \quad \left[\frac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{Hz}^2}\mathrm{Hz}\right] \\ &= \frac{N_2^2}{2\pi}\delta\omega \qquad [\mathrm{J}] \end{aligned}$$

e) Il est impossible de calibrer simultanément pour un signal plus large et pour un signal plus étroit que le filtre de mesure.

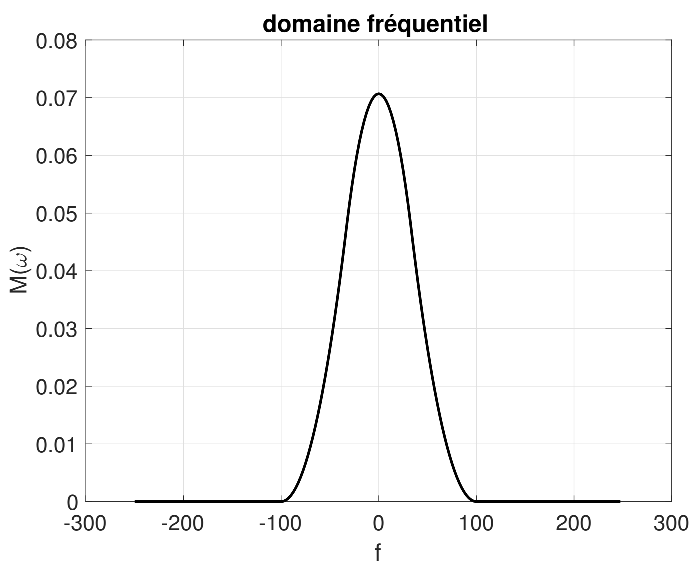
Problème 4

a) Comme le signal peut s'écrire comme

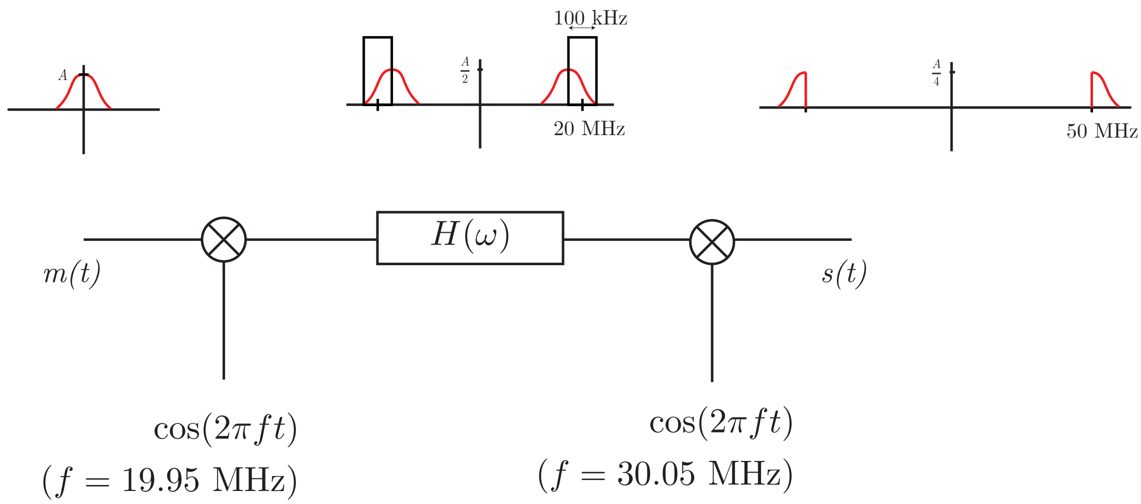
$$M(\omega) = \frac{3}{2f}\text{Rect}\left(\frac{\omega}{\frac{4\pi f}{3}}\right) * \frac{3}{2f}\text{Rect}\left(\frac{\omega}{\frac{4\pi f}{3}}\right) * \frac{3}{2f}\text{Rect}\left(\frac{\omega}{\frac{4\pi f}{3}}\right)$$

Sa largeur est 3 fois celle du signal $\frac{3}{2f}\text{Rect}\left(\frac{\omega}{\frac{4\pi f}{3}}\right)$, soit de $\omega = 4\pi f$. La hauteur est donnée par l'aire de recouvrement à délai nul entre un triangle et un rectangle de paramètre $\tau = \frac{4\pi f}{3}$ et d'amplitude $\frac{3}{2f}$. On obtient donc l'aire d'un rectangle surmonté d'un triangle multipliée par les hauteurs des 2 fonctions.

$$A = \left(\frac{3}{2f}\right)^2 \left[\frac{4\pi f}{3}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{\frac{4\pi f}{3}\left(1 - \frac{1}{2}\right)}{2}\right]$$
$$A = \frac{9\pi}{4f} \approx 0.0707$$



b) Voir figure

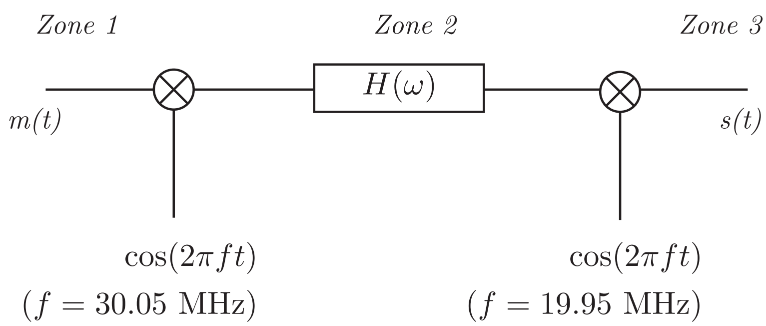


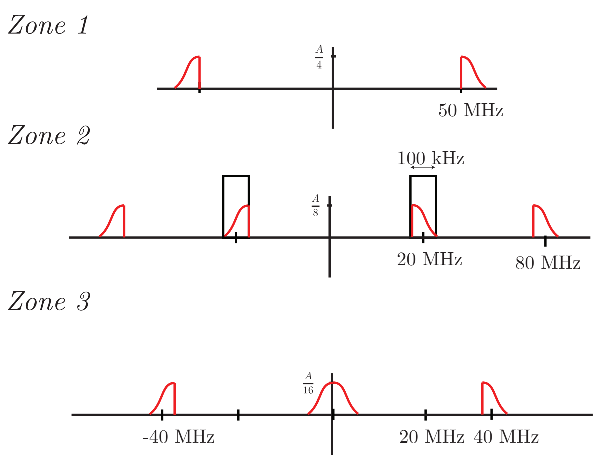
c) Voir figure précédente

d) Voir figure

e) Il sert à isoler le canal qu'on veut démoduler. Il y a en réalité 2 canaux qui peuvent passer dans le filtre (concept de fréquence image).

f) Une erreur de fréquence ($\Delta\omega$) à la démodulation entraine un décalage fréquentiel (spectre pas à la bonne place en fréquence). S?il y avait une erreur de phase ($\Delta\phi$), il y aurait une phase non nulle dans le spectre. Cette erreur de phase introduite de la distorsion pour la modulation BLU, contrairement à la modulation DBAP qui aura subi une atténuation de signal. Si le message était de la voix et qu?il y avait une erreur de phase, on entendrait une voix de "Donald Duck".


Zone 1
Zone 2
Zone 3
$H(\omega)$
m(t)
s(t)
$\cos(2\pi f t)$
$(f = 30.05 \text{ MHz})$
$\cos(2\pi f t)$
$(f = 19.95 \text{ MHz})$


Zone 1
$\frac{A}{4}$
50 MHz
Zone 2
100 kHz
$\frac{A}{8}$
20 MHz
80 MHz
Zone 3
$\frac{A}{16}$
-40 MHz
20 MHz
40 MHz