1. **(5 points) BONUS - QUESTIONS DE COMPRÉHENSION** : 1 point par bonne réponse, 5, 6 ou 7 bonnes réponses sur 7 donnent 5 points. **Les calculs ne sont pas exigés.**

   (a) Une matrice est inversible si son déterminant est différent de <u>O</u> (un nombre).

   (b) Deux vecteurs sont orthogonaux si leur produit scalaire est égal à <u>O</u> (un nombre).

   (c) Quelles sont les valeurs **propres** de la matrice A :

   $$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$$

   MATRICE TRIANGULAIRE → DONC, ÉLÉMENTS DE LA DIAGONALE

   RÉP: a, d et f

   (d) Quel est le déterminant de la matrice A :

   $$A = \begin{bmatrix} 2a & 2a & 2a & 2a \\ a & a & a & a \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

   LIGNE 1 MULTIPLE DE LIGNE 2. DONC, DET(A) = 0

   RÉP: 0

   (e) Qui suis-je? Je suis une matrice toujours diagonalisable, toujours diagonalisable orthogonalement, dont les valeurs propres sont toujours réelles et dont la décomposition spectrale est possible. Je suis une matrice _______ (un mot). SYMÉTRIQUE

   (f) Quels est l'intervalles (axe réel seulement) de l'estimation de la valeur propre centrée à 6 de la matrice A en utilisant la technique des disques de Gerschgorin. Vous pouvez utiliser une notation du style *valeur* $\pm$ *rayon* : SELON LA LIGNE : $|1| + |1+i| = 1+\sqrt{2} \approx 2,4142$

   SELON LA COLONNE : $|2| + |i| = 2+1 = 3$

   $$A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 1+i \\ 2 & a & b \\ i & c & d \end{bmatrix}$$

   RÉP: $6 \pm (1+\sqrt{2})$

   $6 \pm 2,4142$

   LE PLUS PETIT RAYON EST SELON LA LIGNE.

   (g) Toute matrice $n \times n$ admettant n valeurs propres DISTINCTES est diagonalisable (un mot).

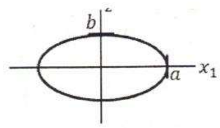


Figure 1: Ellipse - Question 2-a)

2. **(15 points) DÉTERMINANTS (manuel)**

   (a) (2 points) L'aire d'une ellipse (figure 1) est donnée par $Aire = \pi ab$

   i. Si $a = 2$ et $b = 1$, utilisez le déterminant pour calculer la nouvelle aire si on applique à l'ellipse la transformation représentée par la matrice T?

$$T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

a) Aire ellipse $= \pi a b = \pi \times 2 \times 1 = 2\pi$ Aire après transformation $=$ Aire $\times \det(T)$
$\det(T) = 2 \times 4 - 0 \times 0 = 8$ Nouvelle aire $= 2\pi \times 8 = 16\pi$
Remarque : on obtient un cercle de rayon 4 : Aire $= \pi R^2 = 16\pi$

   (b) (4 points) Résoudre le système $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ avec la méthode de Cramer.

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix}$$

b) $\det(A) = 4 \times 2 - 1 \times 5 = 3$ $\det(A_1) = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 6 \times 2 - 1 \times 7 = 5$ $x_1 = \frac{5}{3}$ $x_2 = -\frac{2}{3}$
$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 4 \times 7 - 6 \times 5 = 28 - 30 = -2$

   (c) (9 points) Inverse d'une matrice. Soit la matrice A :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

   i. (1 points) Calculez le déterminant de A.
   ii. (3 points) Calculez la matrice des cofacteurs de A.
   iii. (2 points) Donnez la matrice adjointe de A.
   iv. (3 points) Calculez l'inverse de A à l'aide des éléments que vous venez de calculer.

c) i) Matrice triangulaire : $\det(A) = 3 \times 1 \times 2 = 6$

ii) $C_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2$ $C_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 2$ $C_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -1$ $Cof(A) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & -9 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

$C_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$ $C_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 6$ $C_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -9$

$C_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$ $C_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$ $C_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3$

iii) $adj(A) = (cof(A))^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ -1 & -9 & 3 \end{bmatrix}$

(v) $A^{-1} = \frac{1}{\det A} adj(A) = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ -1 & -9 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ -1/6 & -3/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

(a) (3 points) Quel est le polynôme caractéristique de A (au choix, sous forme d'un polynôme ou sous forme factorisée)?

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

(b) (4 points) Quelles sont les valeurs propres de la matrice précédente?

(c) (8 points) Soit la matrice A. Déterminez, pour la valeur propre $\lambda = 5$, une base du sous-espace propre associé.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

a) $\det(A - \lambda I) = 0 \quad \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (8-\lambda) & 2 \\ 3 & (3-\lambda) \end{bmatrix}$

$\begin{vmatrix} (8-\lambda) & 2 \\ 3 & (3-\lambda) \end{vmatrix} = (8-\lambda)(3-\lambda) - 6 = 24 - 11\lambda + \lambda^2 - 6 = 0$

$\lambda^2 - 11\lambda - 18 = 0$ ou $(\lambda - 9)(\lambda - 2) = 0$

b) $\lambda_1 = 9$ et $\lambda_2 = 2$

c) $[A - \lambda I \,\vdots\, 0] = \left[\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \vdots & 0 \\ \vdots & 0 \end{matrix}\right] = \begin{bmatrix} -4 & 3 & \vdots & 0 \\ 4 & -3 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -4 & 3 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$

Variable libre $x_2 \Rightarrow x_2 = s \quad -4x_1 + 3s = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{3}{4}s$

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 3/4 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 3/4 \\ 1 \end{bmatrix}$

4. **(15 points) ORTHOGONALITÉ ET FACTORISATION QR (manuel)**

(a) (7 points) Gram-Schmidt. Utilisez la méthode de Gram-Schmidt pour déterminer une base **orthogonale** de l'espace représenté par les col(A).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\vec{V}_1 = \vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Remarque : $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ et $\vec{x}_3$ forment une base de $\mathbb{R}^3$ car linéairement indépendants.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\vec{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\vec{V}_2 = \vec{x}_2 - \dfrac{\vec{x}_2 \cdot \vec{V}_1}{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_1} \vec{V}_1$ $\quad \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_1 = 1\times1 + 1\times1 + 1\times1 = 3$ $\quad \vec{x}_2 \cdot \vec{V}_1 = 1\times1 + 1\times1 + 0\times1 = 2$

$\vec{V}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \dfrac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{bmatrix}$

$\vec{V}_3 = \vec{x}_3 - \dfrac{\vec{x}_3 \cdot \vec{V}_1}{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_1} \vec{V}_1 - \dfrac{\vec{x}_3 \cdot \vec{V}_2}{\vec{V}_2 \cdot \vec{V}_2} \vec{V}_2$ $\quad \vec{x}_3 \cdot \vec{V}_1 = 1\times1 + 1\times0 + 1\times0 = 1$ $\quad \vec{x}_3 \cdot \vec{V}_2 = 1\times\frac{1}{3} + 0\times\frac{1}{3} + 0\times\left(\frac{-2}{3}\right) = \frac{1}{3}$

$\vec{V}_2 \cdot \vec{V}_2 = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ $\quad \vec{V}_2 \cdot \vec{V}_2 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \left(\frac{-2}{3}\right)\left(\frac{-2}{3}\right)$

$\vec{V}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \dfrac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \dfrac{1}{\cancel{3}} \cdot \dfrac{\cancel{3}}{2} \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/6 \\ 1/6 \\ -2/6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6/6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2/6 \\ 2/6 \\ 2/6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/6 \\ 1/6 \\ -2/6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\vec{V}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad \vec{V}_2 = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{bmatrix}$ $\quad \vec{V}_3 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$

(b) (8 points) Factorisation QR. W est une base **orthogonale** de col(A) obtenue avec la méthode de Gram-Schmidt. Déterminez une matrice Q et une matrice R tel que A = QR.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad W = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Q doit être une base orthoNORMALE de col(A). W est une base orthogonale mais pas orthonormale. Il faut donc normaliser (rendre unitaire) les colonnes de W.

$\vec{V}_1 = \dfrac{\vec{w}_1}{\|\vec{w}_1\|} = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad \|\vec{w}_1\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{6}$

$\|\vec{w}_2\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$

$\vec{V}_2 = \dfrac{\vec{w}_2}{\|\vec{w}_2\|} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 0 \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$ $\quad Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & 0 \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$

$R(1,1) = \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{4}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + 0 = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$

$R(1,2) = \frac{3}{\sqrt{6}} + \frac{8}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + 0 = \frac{12}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{6}$

$R(2,1) = \frac{1}{\sqrt{3}} + 0 - \frac{1}{\sqrt{3}} + 0 = 0$

$R(2,2) = \frac{3}{\sqrt{3}} + 0 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

$R = Q^T A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 2\sqrt{6} \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$

$R = \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 2\sqrt{6} \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$

5. **(15 points) DIAGONALISATION (manuel)**

(a) (8 points) La diagonalisation d'une matrice consiste à trouver une matrice P et une matrice D tel que A=PDP⁻¹. Calculez P et D pour la matrice A.

$$A = \begin{bmatrix}1 & 3\\ 4 & 2\end{bmatrix}$$

Valeurs propres de A : $\det(A-\lambda I)=0 \Rightarrow A-\lambda I = \begin{bmatrix}1&3\\4&2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}(1-\lambda)&3\\4&(2-\lambda)\end{bmatrix}$

$(1-\lambda)(2-\lambda)-12=0 \Rightarrow 2-\lambda-2\lambda+\lambda^2-12=0 \Rightarrow \lambda^2-3\lambda-10=0$

$\frac{-b\pm\sqrt{b-4ac}}{2a} = \frac{3\pm\sqrt{9+40}}{2} = \frac{3\pm 7}{2} \Rightarrow \lambda_1=5 \quad \lambda_2=-2$

Base pour $\lambda_1=5$: $A-\lambda_1 I$: $\begin{bmatrix}1&3\\4&2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}5&0\\0&5\end{bmatrix} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c}-4&3&0\\4&-3&0\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c}-4&3&0\\0&0&0\end{array}\right]$ Var. libre : $x_2=s$; $-4x_1+3s=0$ $x_1=\frac{3}{4}$

$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = s\begin{bmatrix}3/4\\1\end{bmatrix}$ $\vec{v}_1=\begin{bmatrix}3/4\\1\end{bmatrix}$

Base pour $\lambda_2=-2$: $A-\lambda I$: $\begin{bmatrix}1&3\\4&2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c}3&3&0\\4&4&0\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c}1&1&0\\0&0&0\end{array}\right]$ Var. libre : $x_2=s$; $x_1+s=0 \Rightarrow x_1=-s$ $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=s\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$ $\vec{v}_2=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$

$P=[\vec{v}_1\vec{v}_2]=\begin{bmatrix}3/4&-1\\1&1\end{bmatrix}$ et $D=\begin{bmatrix}5&0\\0&-2\end{bmatrix}$ Autre réponse : $P=\begin{bmatrix}-1&3/4\\1&1\end{bmatrix}$ et $D=\begin{bmatrix}-2&0\\0&5\end{bmatrix}$

(b) (7 points) Soit la matrice A dont les valeurs propres sont $\lambda_1=3$ et $\lambda_2=1$. Une base pour λ_1 est $\mathbf{v_1}$ et une base pour λ_2 est $\mathbf{v_2}$.

$$A = \begin{bmatrix}9 & -4\\ 12 & -5\end{bmatrix} \quad \mathbf{v_1} = \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} \quad \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

À partir de ces informations, utilisez la diagonalisation pour calculer A^4.

$P=[\vec{v}_1\vec{v}_2]=\begin{bmatrix}2&1\\3&2\end{bmatrix}$ $D=\begin{bmatrix}3&0\\0&1\end{bmatrix}$ $D^4=\begin{bmatrix}81&0\\0&1\end{bmatrix}$ $\det(P)=2\times2-1\times3=4-3=1$

Ici, $|x|$ signifie « déterminant de ».

Inverse de P : $C_{11}=(-1)^2|2|=2$ $C_{21}=(-1)^3|3|=-3$ $Cof(P)=\begin{bmatrix}2&-3\\-1&2\end{bmatrix}$ $Adj(P)=(Cof(P))^T=\begin{bmatrix}2&-1\\-3&2\end{bmatrix}$

$C_{21}=(-1)^3|1|=-1$ $C_{22}=(-1)^4|2|=2$

$P^{-1}=\frac{1}{\det(P)}Adj(P)=\frac{1}{1}\begin{bmatrix}2&-1\\-3&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-1\\-3&1\end{bmatrix}$ $A^4=PD^4P^{-1}=\begin{bmatrix}2&1\\3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}81&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-1\\-3&2\end{bmatrix}$

$PD^4=\begin{bmatrix}2&1\\3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}81&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}162&1\\243&2\end{bmatrix} \Rightarrow PD^4P^{-1}=\begin{bmatrix}162&1\\243&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-1\\-3&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}321&-160\\480&-239\end{bmatrix}$

$324-3=321$

$-162+2=-160$

$2\times243=486$ $486-6=480$

$-243+4=-239$

$$A^4=\begin{bmatrix}321&-160\\480&-239\end{bmatrix}$$

6. **(15 points) MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS (manuel)**

Soit les points (θ, y) mesurés suivants : (0, 2), ($\frac{\pi}{4}$, 2), ($\frac{\pi}{2}$, 1). Les angles θ sont en *radians*. Trouvez la solution $\hat{\mathbf{x}}$ au sens des moindres carrés avec la méthode 1 qui approxime l'équation de la forme :

$y = a \cdot sin(\theta) + b \cdot cos(\theta)$ où :

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Conseil : conserver le symbole de la racine carrée $\sqrt{}$ jusqu'à la fin des calculs devrait vous permettre d'aller plus vite.

$$A = \begin{bmatrix} \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(0) & \cos(0) \\ \sin(\frac{\pi}{4}) & \cos(\frac{\pi}{4}) \\ \sin(\frac{\pi}{2}) & \cos(\frac{\pi}{2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$ Angles en radians

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$ Première méthode : $\hat{x} = (A^TA)^{-1}A^T\vec{b}$

$$A^TA = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$(A^TA)^{-1} = \frac{1}{\det(A^TA)} Adj(A^TA)$$

Si $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $com(M) = cof(M) = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$

Raccourci :

$$\det(A^TA) = \frac{3}{2}\times\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{9}{4} - \frac{1}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

$|?|$: dét.

Comatrice de A^TA : $C_{11} = (-1)^2\left|\frac{3}{2}\right| = \frac{3}{2}$ $C_{12} = (-1)^3\left|\frac{1}{2}\right| = -\frac{1}{2}$ $Com(A^TA) = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$

(Matrice des cofacteurs ou Cof) $C_{21} = (-1)^3\left|\frac{1}{2}\right| = -\frac{1}{2}$ $C_{22} = (-1)^4\left|\frac{3}{2}\right| = \frac{3}{2}$

$$Adj(A^TA) = (Com(A^TA))^T = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow (A^TA)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

$$A^T\vec{b} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} + 1 \\ \frac{2}{\sqrt{2}} + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{2} \\ 2 + \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = (A^TA)^{-1}A^T\vec{b} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 2+\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4}(1+\sqrt{2}) - \frac{1}{4}(2+\sqrt{2}) \\ -\frac{1}{4}(1+\sqrt{2}) + \frac{3}{4}(2+\sqrt{2}) \end{bmatrix}$$

$$a = \frac{3}{4} + \frac{3\sqrt{2}}{4} - \frac{2}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{4} + \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,9571$$

$$b = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{6}{4} + \frac{3\sqrt{2}}{4} = \frac{5}{4} + \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{5}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 1,9571$$

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{5}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0,9571 \\ 1,9571 \end{bmatrix}$$

7. **(15 points) PSEUDOINVERSE ET MOINDRES CARRÉS (manuel)**
Soit le système $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ suivant :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

On vous fournit une décomposition en valeurs singulières de la matrice A, soit les matrice U, Σ et V :

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \Sigma = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) (10 points) Calculez le pseudoinverse A^+.

(b) (5 points) Utilisez le résultat obtenu en (a) pour calculer la solution $\bar{\mathbf{x}}$ au sens des moindres carrés.

a) $A^+ = V\Sigma^+U^T$

Σ^+ est une matrice $n \times m$ (Contrairement à Σ qui est $m \times n$)
Comme A est une matrice 3x2
Σ^+ est une matrice 2x3

$$\Sigma^+ = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} D^{-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]}_{2} \Big\}\, 3$$

On a $\Sigma = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, on a $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \Sigma^+ = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^+ = \underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{} = V\Sigma^+U^T$$

$$A^+ = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

b)

$$\bar{x} = A^+\vec{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

8. **(30 points) DÉCOMPOSITION EN VALEURS SINGULIÈRES (manuel)**

Déterminez une décomposition en valeurs singulières de la matrice A (on veut les matrices U, Σ et V) :

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^TA = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 74 & 32 \\ 32 & 26 \end{bmatrix} \Rightarrow A^TA - \lambda I = \begin{bmatrix} 74 & 32 \\ 32 & 26 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & \\ & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (74-\lambda) & 32 \\ 32 & (26-\lambda) \end{bmatrix}$$

$$\det(A^TA - \lambda I) = 0 \Rightarrow (74-\lambda)(26-\lambda) - 32 \times 32 = 1924 - 74\lambda - 26\lambda + \lambda^2 - 1024 = 0$$

$$\lambda^2 - 100\lambda + 900 = 0 \Rightarrow \frac{100 \pm \sqrt{10000 - 3600}}{2} = 50 \pm 40 \quad \lambda_1 = 90 \quad \lambda_2 = 10$$

Base pour

$$\lambda_1 = 90 : A^TA - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} 74 & 32 \\ 32 & 26 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 90 & 0 \\ 0 & 90 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} -16 & 32 & 0 \\ 32 & -64 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} -16 & 32 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

NORMALISATION

Var. libre: $x_2 \Rightarrow x_2 = s \Rightarrow -x_1 + 2x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2s$ $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ou $\begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$

Base pour

$$\lambda_2 = 10 : A^TA - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} 74 & 32 \\ 32 & 26 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 64 & 32 & 0 \\ 32 & 16 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 64 & 32 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Var. libre : x_2

NORMALISATION

Var. lib. $x_2 \rightarrow x_2 = s \Rightarrow 2x_1 + x_2 = 0 \rightarrow x_1 = -\frac{1}{2}s \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ou $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$

$$V = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

V est une matrice n×n. La normalisation est obligatoire !

Calcul de Σ : A est une matrice m×n. Il en est de même pour Σ. Dans notre cas, m = 3 et n = 2.

$$\Sigma = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} D & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]}_{2}\Big\}3 \qquad D = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix}$$

où $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$ et $\sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{10}$

$$D = \begin{bmatrix} 3\sqrt{10} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \end{bmatrix} \Longrightarrow \Sigma = \begin{bmatrix} 3\sqrt{10} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Σ est une matrice m×n.

Calcul de U : dans notre cas toutes les valeurs singulières sont non nulles et donc, utilisables.

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\sigma_1}A\vec{v}_1 = \frac{1}{3\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 15/\sqrt{5} \\ 0 \\ 15/\sqrt{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{\sqrt{10}\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{5}{\sqrt{10}\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{\sqrt{2}\sqrt{5}\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{5}{\sqrt{2}\sqrt{5}\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\vec{u}_2 = \frac{1}{\sigma_2} A\vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} -5/\sqrt{5} \\ 0 \\ 5/\sqrt{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-5}{\sqrt{2}\sqrt{5}\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{5}{\sqrt{2}\sqrt{5}\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

U est une matrice $m \times m$. Dans notre cas, U est une 3×3. $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ ne forment pas une base de $\mathbb{R}^3$ (il manque un vecteur $\vec{u}$). Il faut trouver un vecteur $\vec{u}_3$ orthoNORMAL à $\vec{u}_1$ et à $\vec{u}_2$.

Posons:

$$\vec{u}_1^T \cdot \vec{x} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{u}_2^T \cdot \vec{x} = 0 \qquad \text{où } \vec{x} = [x_1\, x_2\, x_3]^T$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} x_1 + 0x_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} x_3 = 0 \quad \text{ou} \quad x_1 + 0x_2 + x_3 = 0$$
$$-\frac{1}{\sqrt{2}} x_1 + 0x_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} x_3 = 0 \quad \text{ou} \quad -x_1 + 0x_2 + x_3 = 0$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Variable libre: } x_2 \Rightarrow x_2 = s \\ x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \rightarrow x_1 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 = 0 \rightarrow x_3 = 0 \end{array}\right\} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \vec{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Déjà normalisé.

$$U = [\vec{u}_1\, \vec{u}_2\, \vec{u}_3] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = U \Sigma V^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3\sqrt{10} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

La commande MATLAB svd donne un résultat similaire AU SIGNE PRÈS!
(en décimales bien sûr!!!)

$$U = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \quad S\,(\text{ou } \Sigma) = \begin{bmatrix} 3\sqrt{10} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad V = \begin{bmatrix} -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

9. **(15 points) MATLAB : Compression d'image avec la SVD**

Le fichier **carillon.m** lit et convertit l'image **carillon.bmp** pour la stockez dans la variable A.

(a) Compressez l'image en utilisant la décomposition en valeurs singulières en ne gardant que les 7 valeurs singulières les plus grandes. Vous pouvez utiliser, au choix, la commande **svd()** ou la commande **svds()**. Si vous utilisez la commande svd(), vous devrez générer vous-même les nouvelles matrices U, S et V à partir de celles fournies par la commande svd().

20-12-18

(b) **Calculez le taux de compression comme expliqué au cours.**

(c) Ensuite, construisez une nouvelle image compressée A2. Le code d'affichage et de sauvegarde de la nouvelle image est déjà fourni.

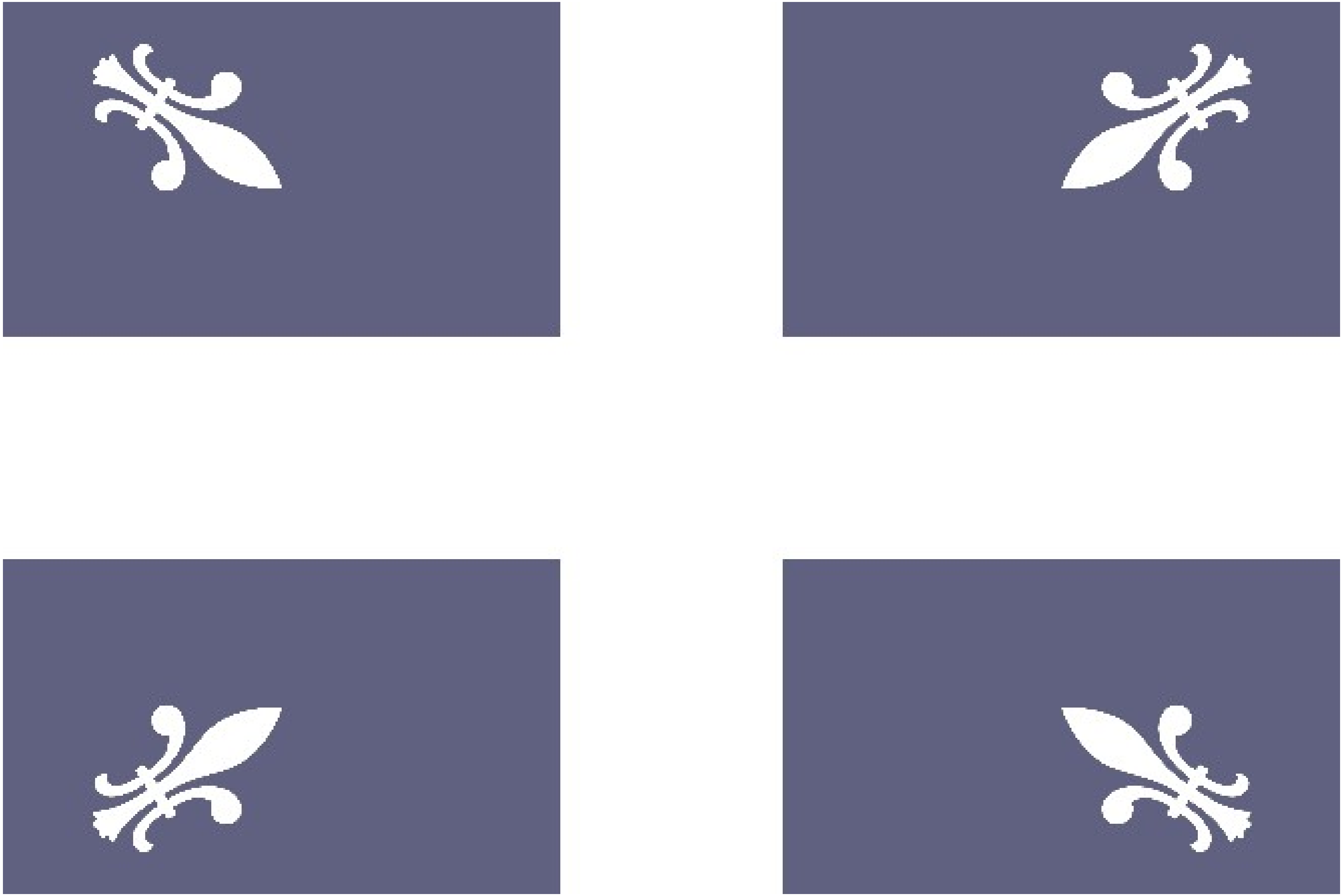
La commande **imshow(A2/255)** est déjà dans le fichier. Pour cette question, le hardcoding est accepté. **Insérez votre code dans le fichier carillon.m à l'endroit indiqué.**

```
clear all;
close all;

k = 7
I = imread('carillon.bmp');
A = double(I);
figure(1)
imshow(A/255);

% SOLUTION AVEC LA COMMANDE SVDS()
[U,S,V] = svds(A,k);
disp('d) Calculer le taux de compression (suite à svds).');
Taille_I = size(A)
Taille_I = Taille_I(1)*Taille_I(2)
taille_U = size(U)
taille_U = taille_U(1)*taille_U(2)
taille_V = size(V);
taille_V = taille_V(1)*taille_V(2)
Taille_ImCompressee = taille_U + taille_V + k

disp(['Calcul du taux de compression en %']);
TauxCompression= (Taille_I-Taille_ImCompressee)/Taille_I*100
A2 = U*S*V';
figure(2)
imshow(A2/255);
```

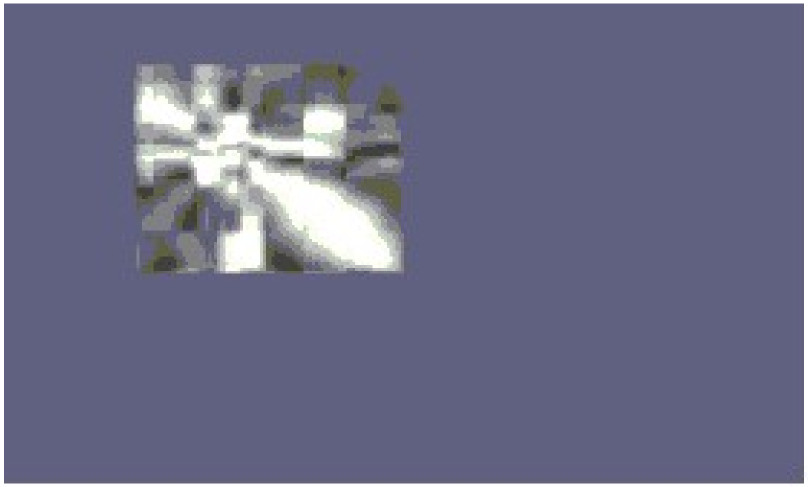
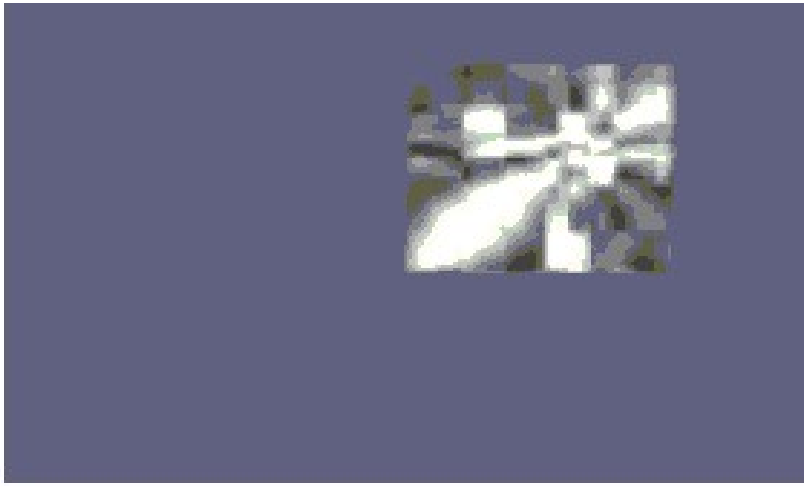
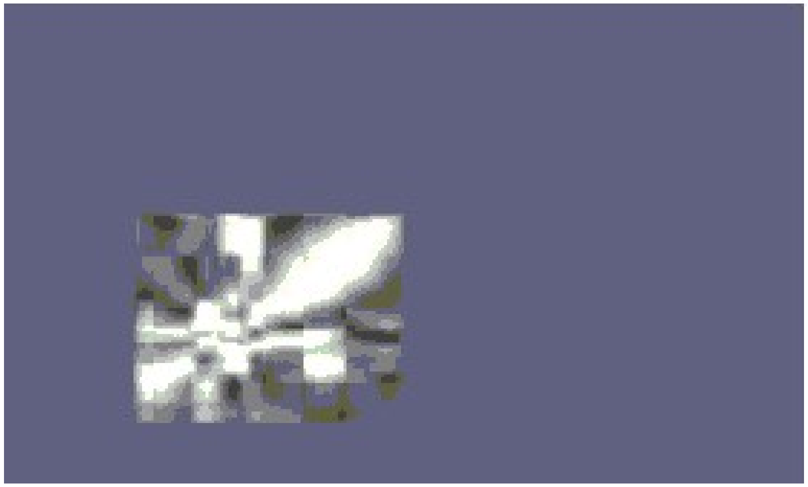
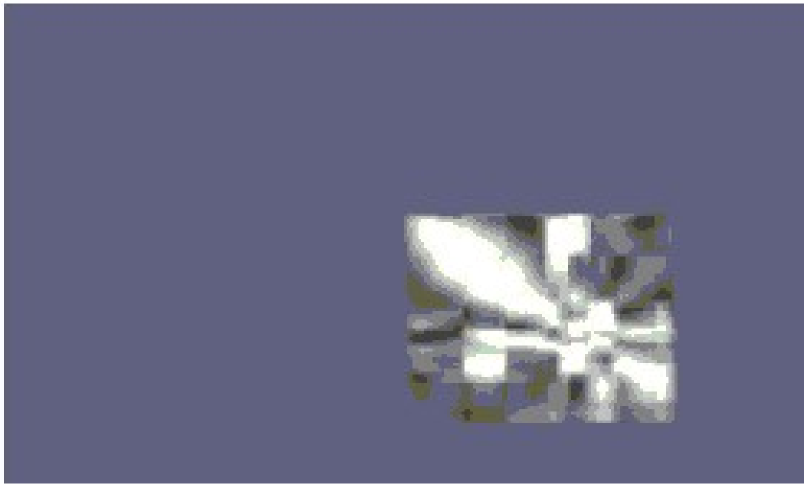
Taux de compression (en %) = 97.3751

```
% SOLUTION AVEC LA COMMANDE SVD()
[U,S,V] = svd(A);
U2 = U(:,1:k);
S2 = S(1:k,1:k);
V2 = V(:,1:k);

disp('d) Calculer le taux de compression (suite à svd).');
Taille_I = size(A)
Taille_I = Taille_I(1)*Taille_I(2)
taille_U = size(U2)
taille_U = taille_U(1)*taille_U(2)
taille_V = size(V2);
taille_V = taille_V(1)*taille_V(2)
Taille_ImCompressee = taille_U + taille_V + k

disp(['Calcul du taux de compression en %']);
TauxCompression = (Taille_I-Taille_ImCompressee)/Taille_I*100

A2 = U2*S2*V2';
figure(3)
imshow(A2/255);
imwrite(A2/255, 'carillon2.bmp', 'bmp');
```

Taux de compression (en %) = 97.3751



https://fr.wikipedia.org/wiki/Carillon_moderne

10. **(15 points) MATLAB : Méthode de la puissance inverse**

Implémentez l'algorithme de la puissance inverse pour calculer la valeur propre λ de la matrice A **la plus petite en valeur absolue**. On fournit la valeur de $\mathbf{x_0}$. Faites 10 itérations. À chaque itération **k**, affichez dans un vecteur $\mathbf{x_k}$ les valeurs propres, le vecteur $\mathbf{y_k}$ normalisé par rapport à la valeur propre la plus importante, ainsi que la valeur propre la plus importante $\mathbf{m_k}$. À la toute fin, affichez la valeur propre λ la plus petite de la matrice A. **Insérez votre code dans le fichier puissanceinv.m à l'endroit indiqué.**

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -8 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & -4 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x_0} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

```
%
% INSCRIVEZ VOTRE NOM ET MATRICULE
%
% NOM :
% MATRICULE :
%
% solution_puissanceinv.m
% MAT-2930 Algèbre linéaire appliquée
% Examen final automne 2020

clear all;
close all;

A   =   [   3   2   -8  ; % REMARQUE : IL Y AVAIT UN - DEVANT LE 2.
            0   5   -2  ; % IL A ÉTÉ DIT DE L'ENLEVER, MAIS QUE DE TOUTE
            0   -4  3   ] % FAÇON, LA MÉTHODE DOIT MARCHER POUR N'IMPORTE
                          % QUELLE MATRICE À NOMBRES RÉELS.
x0  =   [   1   1   1   ]'
K = 10

% INSÉREZ LE CODE ICI
yk = x0
xk = x0
A2 = inv(A)
for i=1:K
    xk = A2*yk
    absXk = abs(xk);
    maxAbsXk = max(absXk);
    ind = find(maxAbsXk == absXk);
    mk = xk(ind(1))
    yk = 1/mk*xk
end

lambda = 1/mk

% On peut vérifier avec la commande [V, D] = eig(A)
```

$\boxed{\lambda = 1}$

11. **(15 points) MATLAB : Classement (avec les valeurs propres et vecteurs propres)**

La figure 2 représente un graphe **non orienté**. Chaque lien est donc **bidirectionnel**. Une connexion entre les noeuds A et B implique donc automatiquement une connexion entre les noeuds B et A.

La matrice d'adjacence A Du graphe en a) vous est fournie dans le fichier **graphe.m** avec une valeur de 1 à chaque lien. On vous demande d'effectuer le classement des noeuds du graphe en utilisant les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice d'adjacence. Le code pour l'affichage et le tri est fourni en commentaires, vous devez le décommenter. **Vous devez insérer votre code dans le fichier graphe.m aux endroits indiqués pour chaque sous-question.**

(a) Affichez le vecteur propre à utiliser pour le classement que vous nommerez **monVecteurPropre1**.

(b) Classez les noeuds en ordre **décroissant** de connectivité, du plus connecté au moins connecté (code fourni dans **graphe.m** à décommenter).

(c) Modifiez la matrice d'adjacence A pour ajouter un lien bidirectionnel de valeur 1 entre les noeuds A et E, tel qu'illustré sur la figure b), et affichez la nouvelle matrice d'adjacence.

(d) Affichez le vecteur propre à utiliser pour le nouveau classement que vous nommerez **monVecteur-Propre2**.

(e) Classez les noeuds en ordre **décroissant** de connectivité, du plus connecté au moins connecté (code fourni dans **graphe.m** à décommenter).

(f) Affichez les classements pour les deux graphes (code fourni dans **graphe.m** à décommenter.

(g) Y a-t-il un noeud dont l'ordre de classement a été amélioré ? Si oui, quel noeud ? Répondez en affichant un commandaire à l'écran avec la commande **disp('Ma réponse')**.

Pour cette question, le hardcoding est accepté. **Insérez votre code dans le fichier graphe.m aux endroits indiqués.**

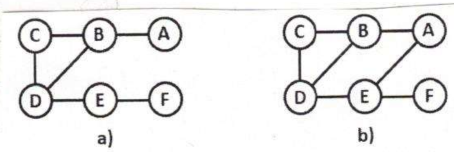


Figure 2: Graphe non orienté - Question 11

```
clear all;
close all;

A  =  [  0    1    0    0    0    0 ;
         1    0    1    1    0    0 ;
         0    1    0    1    0    0 ;
         0    1    1    0    1    0 ;
         0    0    0    1    0    1 ;
         0    0    0    0    1    0 ]

% INSÉREZ LE CODE ICI
[V, D] = eig(A)
% La valeur propre dominante est la sixième
monVecteurPropre1 = -V(:,6) % On change de signe car le vecteur est négatif
[c,Noeuds1]=sort(monVecteurPropre1,'descend')
B = ['A','B','C','D','E','F']
BClassement1 = B(Noeuds1);
% INSÉREZ LE CODE ICI - ajout du lien et 2ème classement
A(1,5) = 1 % Dans les 2 sens car ...
A(5,1) = 1 % ... c'est un graphe non-orienté (chaque lien bidirectionnel)
[V, D] = eig(A)
% La valeur propre dominante est la sixième
% On NE change PAS de signe car le vecteur est déjà POSITIF
monVecteurPropre2 = V(:,6)
[c,Noeuds2]=sort(monVecteurPropre2,'descend')
BClassement2 = B(Noeuds2);
BClassement1
BClassement2
disp('Le noeud E a amélioré sont classement, passant de la quatrième ')
disp('à la troisième position');
```

```
>> solution_graphe

V =
    0.2522   -0.4310   -0.1680    0.7618    0.2957   -0.2337
   -0.4388    0.5922    0.0999    0.2089    0.3251   -0.5454
   -0.0978   -0.5610    0.5143   -0.3890    0.1843   -0.4753
    0.6089    0.1785   -0.4056   -0.3155   -0.1225   -0.5641
   -0.5227   -0.2764   -0.3730    0.0936   -0.6441   -0.2960
    0.3005    0.2012    0.6274    0.3412   -0.5857   -0.1268

D =
   -1.7397         0         0         0         0         0
         0   -1.3738         0         0         0         0
         0         0   -0.5945         0         0         0
         0         0         0    0.2742         0         0
         0         0         0         0    1.0996         0
         0         0         0         0         0    2.3342

monVecteurPropre1 =

    0.2337
    0.5454
    0.4753
    0.5641
    0.2960
    0.1268

c =
    0.5641
    0.5454
    0.4753
    0.2960
    0.2337
    0.1268

Noeuds1 =

     4
     2
     3
     5
     1
     6

B =

    'ABCDEF'

A =
     0     1     0     0     1     0
     1     0     1     1     0     0
     0     1     0     1     0     0
     0     1     1     0     1     0
     1     0     0     1     0     1
     0     0     0     0     1     0
```

```
V =
    0.4618   -0.2499   -0.0274    0.7310    0.2465    0.3583
   -0.4271    0.5135   -0.3412    0.2927   -0.3153    0.5023
   -0.0208   -0.6993   -0.2815   -0.2869   -0.4337    0.4011
    0.4715    0.3299    0.4934   -0.3677   -0.1541    0.5163
   -0.5594   -0.2121    0.3560   -0.1018    0.5821    0.4076
    0.2619    0.1759   -0.6584   -0.3900    0.5378    0.1605


D =
   -2.1364         0         0         0         0         0
         0   -1.2061         0         0         0         0
         0         0   -0.5406         0         0         0
         0         0         0    0.2611         0         0
         0         0         0         0    1.0825         0
         0         0         0         0         0    2.5395


monVecteurPropre2 =

    0.3583
    0.5023
    0.4011
    0.5163
    0.4076
    0.1605

c =
    0.5163
    0.5023
    0.4076
    0.4011
    0.3583
    0.1605


Noeuds2 =

     4
     2
     5
     3
     1
     6


BClassement1 =

    'DBCEAF'


BClassement2 =

    'DBECAF'
```

Le noeud E a amélioré son classement, passant de la quatrième à la troisième position