Mini Test 1

MAT-2910 : Analyse Numérique pour ingénieur Hiver 2012

Remarques :

1) Toutes les réponses doivent être justifiées. Dans le cas contraire, une réponse sera considérée comme nulle.
2) Seules les calculatrices avec l'auto-collant de la Faculté sont autorisées.
3) L'examen est noté sur 100 points et compte pour 12.5% de la note finale.

Aide Mémoire

⊙ erreur absolue : $\Delta x = |x - x^*|$, erreur relative : $E_r(x) = \frac{\Delta x}{|x|} \approx \frac{\Delta x}{|x^*|}$

⊙ chiffres significatifs :

$$\Delta x \leq 0.5 \times 10^m$$

C.S. : la m^{eme} puissance de 10 et ceux à gauche sauf s'ils sont tous nuls (alors aucun).

⊙ Développement de Taylor de degré n de f autour de x_0 :

$$p_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2} f''(x_0) + ... + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

$$p_n(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) + ... + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

⊙ Théorème de Taylor-Lagrange : autour de x_0, il existe ξ entre x_0 et $x = x_0 + h$ ($x_0 < \xi < x$ ou $x < \xi < x_0$) tel que

$$f(x) - p_n(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(\xi) = \frac{h^{n+1}}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

⊙ inégalité du triangle : $|a + b| \leq |a| + |b|$, a, $b \in \mathbb{R}$

⊙ propagation d'erreur :

dimension 1 : $\Delta f = |f(x) - f(x^*)| \approx |f'(x^*)|\Delta x$

dimension 3 : $\Delta f \approx \Delta x|\frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*, z^*)| + \Delta y|\frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*, z^*)| + \Delta z|\frac{\partial f}{\partial z}(x^*, y^*, z^*)|$

Question 1. (10 points)

Soit $x^* = 1,0161468$ une approximation d'un nombre x.

a) [5 pts] Si $\Delta x = 0,43 \times 10^{-3}$, indiquer le nombre de chiffres significatifs de l'approximation x^*.

b) [5 pts] Donner la représentation de x^* en notation flottante avec 3 chiffres (avec arrondi).

Question 2. (90 points)

Sur $[0,1]$, on considère la fonction $f(x) = e^x + \sin x$.

a) [25 pts] Trouver le développement de Taylor de degré 2 ($p_2(x)$) de la fonction $f(x)$ au voisinage de $x_0 = 0$.

b) [25 pts] Donner une borne supérieure de l'erreur commise en approximant $f(x)$ par $p_2(x)$.

c) [15 pts] En déduire l'odre de cette approximation (justifier brièvement).

d) [15 pts] En utilisant $p_2(x)$ donner une approximation de $f(0,1)$. En utilisant la valeur "exacte" obtenue avec votre calculatrice, estimer l'erreur absolue et l'erreur relative.

e) [10 pts] Quels sont les chiffres significatifs de l'approximation obtenue en d).

Question BONUS (10 points)

Calculer en arithmétique à virgule flottante avec 3 chiffres, l'expression

$$(x + y) + z$$

sachant que x = fl(x) = $0,324 \times 10^3$, y = fl(y) = $0,754 \times 10^3$ et z = fl(z)=$0,219 \times 10^2$.