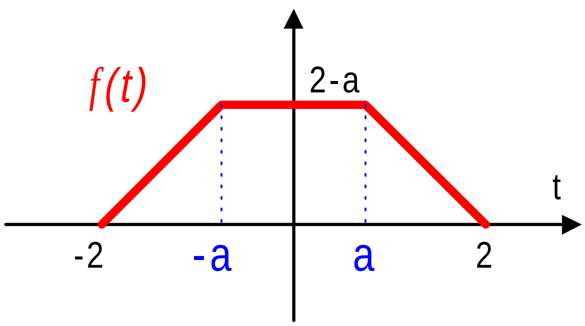
Université Laval
Professeur: Christophe Deutsch

Département de Génie Électrique
et de Génie Informatique

GEL19962: Analyse des signaux

Examen partiel - Solutions

Problème 1 (8 points sur 35)



Soit $f(t)$ la fonction suivante:

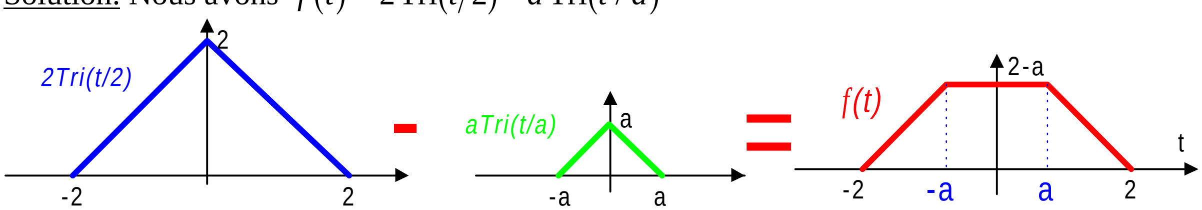
$$f(t)=\begin{cases} 0 & \text{si } t<-2 \\ 2+t & \text{si } -2\le t<-a \\ 2-a & \text{si } -a\le t<a \\ 2-t & \text{si } a\le t<2 \\ 0 & \text{si } t\ge 2 \end{cases}$$

avec $0\le a\le 2$

Trouver la transformée de Fourier $F(\omega)$ de la fontion $f(t)$ en utilisant **<u>une</u>** des deux méthodes proposées. Vous devez faire la question A **<u>ou</u>** la question B, mais pas les deux.

A- Considérer la fonction $f(t)$ comme la différence de deux fonctions triangles bien choisies et trouver $F(\omega)$.

<u>Solution:</u> Nous avons $f(t)=2\,\mathrm{Tri}(t/2)-a\,\mathrm{Tri}(t/a)$

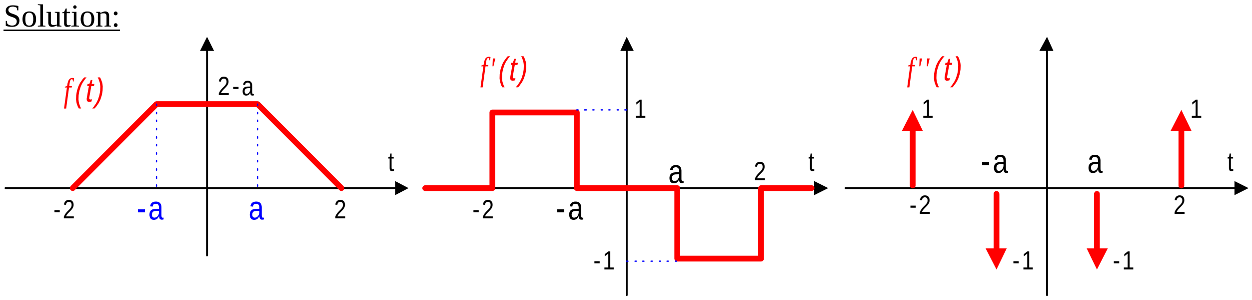


Par conséquent:

$$\boxed{F(\omega)=4Sa^2(\omega)-a^2Sa^2(\omega a/2)}$$

B- Calculer la dérivée seconde de $f(t)$ <u>au sens des distributions</u> et trouver $F(\omega)$.

<u>Solution:</u>



GEL19962: Analyse des signaux
Examen partiel - Solutions

$$f'(t)=\begin{cases} 0 & \text{si } t<-2 \\ 1 & \text{si } -2\le t<-a \\ 0 & \text{si } -a\le t<a \\ -1 & \text{si } a\le t<2 \\ 0 & \text{si } t\ge 2 \end{cases} \quad \text{et} \qquad f''(t)=\delta(t+2)-\delta(t+a)-\delta(t-a)+\delta(t-2)$$

La transformée de Fourier de $f''(t)$ est $-\omega^2F(\omega)$ et celle de $\delta(t-\tau)$ est $e^{-j\omega\tau}$.

Donc:

$$\boxed{-\omega^2F(\omega)=e^{2j\omega}-e^{j\omega a}-e^{-j\omega a}+e^{-2j\omega}}$$

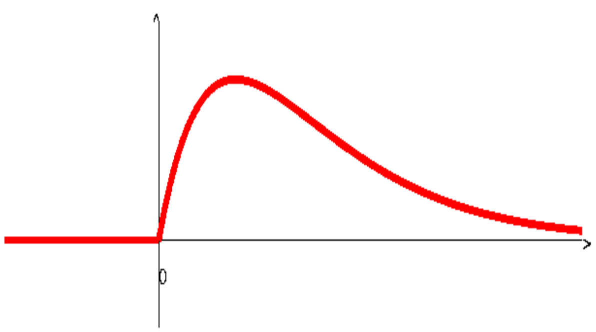
Comme la fonction de départ est une fonction d'énergie finie la transformée de Fourier ne contient pas de distribution de Dirac.

D'où:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{1}{\omega^2}\left[-2\cos(2\omega)+2\cos(\omega a)\right] \\ &= \frac{2}{\omega^2}\left[-1+2\sin^2(\omega)+1-2\sin^2(\omega a/2)\right] \\ &= 4Sa^2(\omega)-a^2Sa^2(\omega a/2) \end{aligned}$$

On retrouve donc bien le résultat de la question A.

Problème 2 (9 points sur 35)



a- Trouver la transformée de Fourier de la fonction: $f(t)=te^{-\beta t}U(t)$ avec $\beta>0$.

Solution:

Nous savons que $e^{-\beta t}U(t)\Leftrightarrow\dfrac{1}{\beta+j\omega}$

Par conséquent nous aurons: $f(t)=te^{-\beta t}U(t)\Leftrightarrow j\dfrac{d}{d\omega}\left\{\dfrac{1}{\beta+j\omega}\right\}=\dfrac{-j^2}{(\beta+j\omega)^2}$

D'où:

$$\boxed{F(\omega)=\frac{1}{(\beta+j\omega)^2}}$$

GEL19962: Analyse des signaux
Examen partiel - Solutions

b- Quel est l'énergie totale de $f(t)$?

Solution:

L'énergie totale est donné par: $E = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt$.

Nous aurons donc: $E = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-2\beta t} dt = \frac{2}{(2\beta)^3} = \frac{1}{4\beta^3}$ (en utilisant $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-at} dt = \frac{2}{a^3}$ avec $a > 0$)

L'énergie totale est:

$$\boxed{E = \frac{1}{4\beta^3}}$$

c- Quel est le pourcentage d'énergie contenue dans la bade de fréquence $-2\beta \le \omega \le 2\beta$?

Solution:

Pour calculer le pourcentage d'énergie contenue dans la bande de fréquence $-2\beta \le \omega \le 2\beta$ il faut tout d'abord calculer l'énergie contenue dans cette bande de fréquence. La spectre d'énergie est: $E(\omega) = \frac{1}{2\pi}|F(\omega)|^2 = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{(\beta^2+\omega^2)^2}$

On en déduit que l'énergie contenue dans la bande de fréquence est:

$$E(-2\beta \le \omega \le 2\beta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-2\beta}^{2\beta} \frac{d\omega}{(\beta^2+\omega^2)^2} = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\beta^3}\int_{-2\beta}^{2\beta} \frac{d\omega/\beta}{\left(1+(\omega/\beta)^2\right)^2} \text{ on pose } u = \omega/\beta$$

$$= \frac{1}{2\pi\beta^3}\int_{-2}^{2} \frac{du}{(1+u^2)^2}$$

$$= \frac{1}{2\pi\beta^3}\left[\arctan(2) + \frac{2}{5}\right] \quad \left(\text{en utilisant } \int_{-a}^{a} \frac{du}{(1+u^2)^2} = \arctan(a) + \frac{a}{1+a^2}\right)$$

A présent on peut calculer le pourcentage d'énergie contenue dans la bande:

$$\%E = \frac{E(-2\beta \le \omega \le 2\beta)}{E} = \frac{\frac{1}{2\pi\beta^3}\left[\arctan(2)+\frac{2}{5}\right]}{\frac{1}{4\beta^3}} = \frac{2}{\pi}\left[\arctan(2)+\frac{2}{5}\right] \cong \frac{3}{3.14} \cong 95,5\%$$

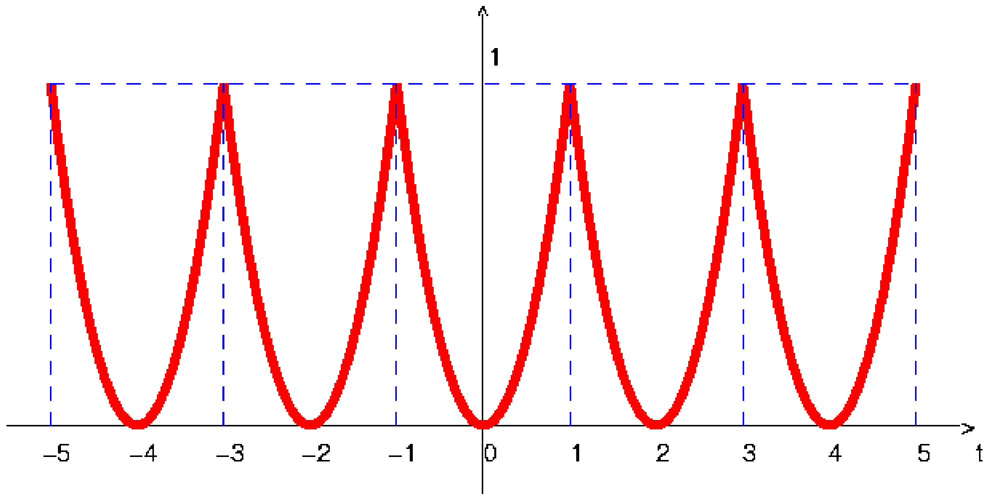
La réponse est donc:

$$\boxed{\%E = 95.5\%}$$

GEL19962: Analyse des signaux

Examen partiel - Solutions

Problème 3 (10 points sur 35)



Soit $f_p(t)$ la fonction périodique définie par $f_p(t) = t^2$ pour $-1 \le t < 1$

Le but de cet exercice est de trouver la transformée de Fourier de cette fonction périodique sans calculer les coeffiecients de la série de Fourier qui y est associée.

a- Donner la période et la pulsation propre de cette fonction.

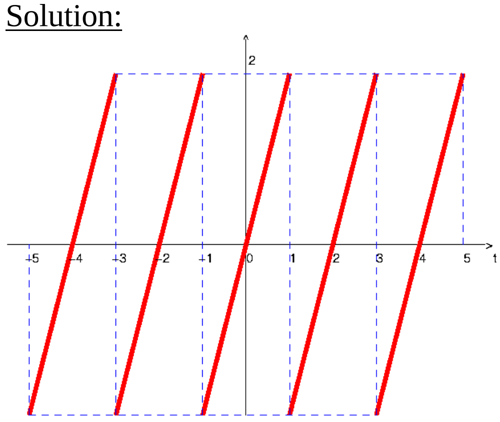
Solution:

$$\boxed{T_0 = 2 \text{ et } \omega_0 = \pi}$$

b- En calculant la dérivée seconde de $f_p(t)$ **au sens des distributions**, montrer que:

$$f_p''(t) = 2 - 4\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-1-2n).$$

Solution:



On constate que la fonction $f_p(t)$ est continue. Par conséquent sa dérivée au sens des distributions sera la même que la dérivée au sens des fonctions.

Nous aurons: $f_p'(t) = 2t$ pour $-1 \le t < 1$

On peut constater que $f_p'(t)$ est une fonction discontinue aux points $t = 2n+1$ et qu'au sens des fonction la dérivée de $f_p'(t)$ est constante et vaut 2.

GEL19962: Analyse des signaux

Examen partiel - Solutions

Calculons le saut de $f_p'(t)$ aux points $t = 2n+1$:

$$\sigma\left(f_p',2n+1\right) = -4 \quad \forall n$$

Nous pouvons maintenant calculer la dérivée de $f_p'(t)$ au sens des distributions:

$$\boxed{f_p''(t) = 2 + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sigma\left(f_p',2n+1\right)\delta\left(t-(2n+1)\right) = 2 - 4\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta\left(t-(2n+1)\right)}$$

On note $F(\omega)$ la transformée de Fourier de $f_p(t)$.

c- Calculer la transformée de Fourier de l'équation trouvée en b-.

<u>Solution:</u>

Nous avons:

$$f_p''(\mathrm{t}) \Leftrightarrow -\omega^2 F(\omega)$$

$$2 \Leftrightarrow 4\pi\delta(\omega)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta\left(t-(2n+1)\right) \Leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega(2n+1)}$$

La relation dans le domaine des fréquenciel est donc:

$$-\omega^2 F(\omega) = 4\pi\delta(\omega) - 4\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega(2n+1)}$$

Comme $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-jn\tau\omega} = \frac{2\pi}{\tau}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega - \frac{2\pi n}{\tau}\right)$, nous aurons:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega(2n+1)} = e^{-j\omega}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-j2n\omega} = e^{-j\omega}\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega - n\pi) = \pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-jn\pi}\delta(\omega - n\pi) = \pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n\delta(\omega - n\pi)$$

Ainsi nous aurons:

$$\boxed{-\omega^2 F(\omega) = 4\pi\delta(\omega) - 4\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n\delta(\omega - n\pi) = -4\pi\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty}(-1)^n\delta(\omega - n\pi)}$$

GEL19962: Analyse des signaux
Examen partiel - Solutions

d- Trouver une solution particulière de l'équation c- et donner la solution générale.

Solution:
En remarquant que $\omega^2\delta(\omega - n\pi) = n^2\pi^2\delta(\omega - n\pi)$, on obtient aisément qu'une solution particulière de cette équation est:

$$H(\omega) = 4\pi \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2\pi^2}\delta(\omega - n\pi)$$

La solution générale est donc:

$$F(\omega) = H(\omega) + C_0\delta(\omega) + C_1\delta'(\omega)$$

e- En utilisant le fait que $f_p(t)$ est une fonction périodique et en calculant $F_{série}(0)$, donner l'expression de la transformée de Fourier de $f_p(t)$

Solution:
Comme la fonction $f(t)$ est périodique nous savons que:

$$F(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_{série}(n)\delta(\omega - n\omega_0)$$

Par conséquent, nous aurons:

- $F_{série}(n) = \dfrac{2(-1)^n}{n^2\pi^2}$ pour tout $n \neq 0$
- $C_1 = 0$ puisqu'il n'y a aucun terme en δ' et
- $C_0 = 2\pi F_{série}(0) = 2\pi \dfrac{1}{T_0}\displaystyle\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)dt = \pi\int_{-1}^{1} t^2 dt = \dfrac{2\pi}{3}$.

La transformée de Fourier de $f(t)$ est donc

$$\boxed{F(\omega) = 2\pi \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2\pi^2}\delta(\omega - n\pi) + \frac{2\pi}{3}\delta(\omega)}$$

GEL19962: Analyse des signaux

Examen partiel - Solutions

Problème 4 (8 points sur 35)

a- Calculer la tranformée de Fourier $F(\omega)$ du signal $f(t) = m(t)\cos(\omega_0 t)$ en fonction de la transformée de Fourier $M(\omega)$ de $m(t)$.

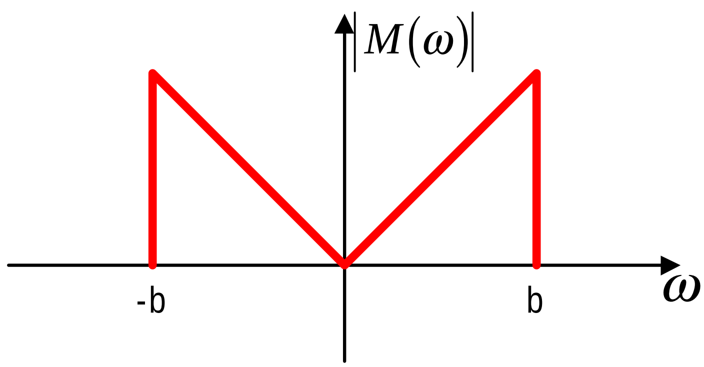
<u>Solution:</u>

Comme $\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right)$ nous aurons:

$$\boxed{F(\omega) = \frac{1}{2}\left\{M(\omega - \omega_0) + M(\omega + \omega_0)\right\}}$$

On suppose que le spectre d'amplitude de $M(\omega)$ est à support borné (c'est à dire que $|M(\omega)| = 0$ pour $|\omega| \geq b$).

Sa représentation est donnée ci -dessous.



<u>On suppose que</u> $\omega_0 > b$

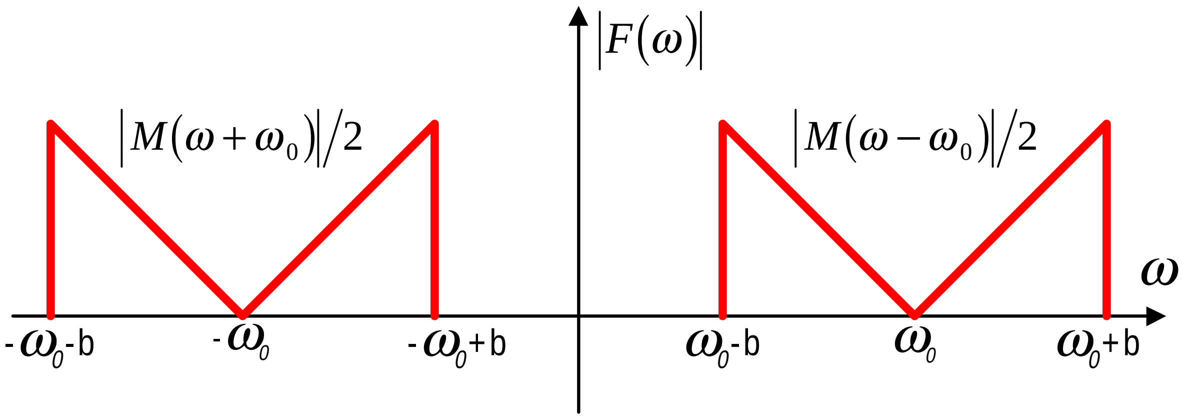
b- Représenter le spectre d'amplitude de $F(\omega)$.

<u>Solution:</u>

Comme $\omega_0 > b$ on va retrouver le spectre d'amplitude de $M(\omega)$ dédoubler aux fréquences: $+\omega_0$ et $-\omega_0$.

GEL19962: Analyse des signaux

Examen partiel - Solutions



c- Donner la transformée de Fourier $G(\omega)$ de $g(t)=f(t)\cos(\omega_0 t)$.

Indication: on pourra se servir du fait que $\cos^2(\omega_0 t)=\dfrac{\cos(2\omega_0 t)+1}{2}$

Solution:

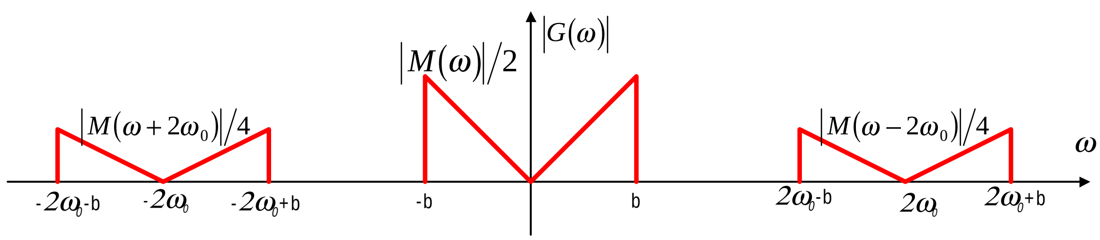
Nous aurons: $g(t)=m(t)\cos^2(\omega_0 t)=\dfrac{1}{2}m(t)\{\cos(2\omega_0 t)+1\}$

Par conséquent:

$$\boxed{G(\omega)=\frac{1}{2}M(\omega)+\frac{1}{4}\left(M(\omega-2\omega_0)+M(\omega+2\omega_0)\right)}$$

d- Représenter le spectre d'amplitude de $G(\omega)$. Comment faudrait-il faire pour retrouver le spectre d'amplitude de $M(\omega)$?

Solution:



On peut constater que par filtrage passe bas on retrouve le spectre de $M(\omega)$

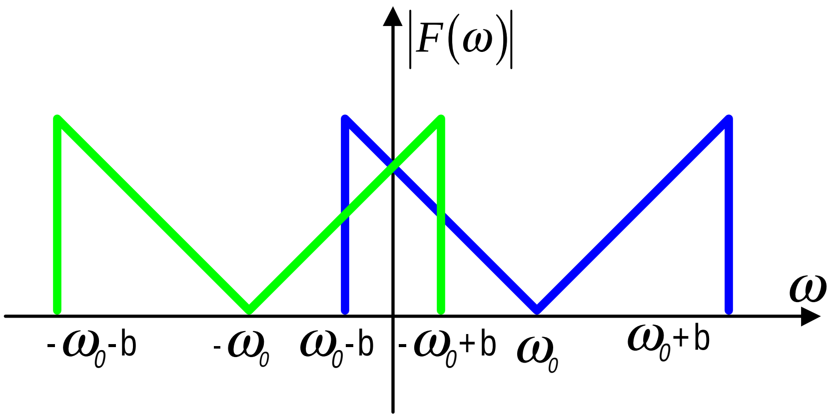
GEL19962: Analyse des signaux
Examen partiel - Solutions

Question bonus (2points) On suppose maintenant que $\omega_0 < b$

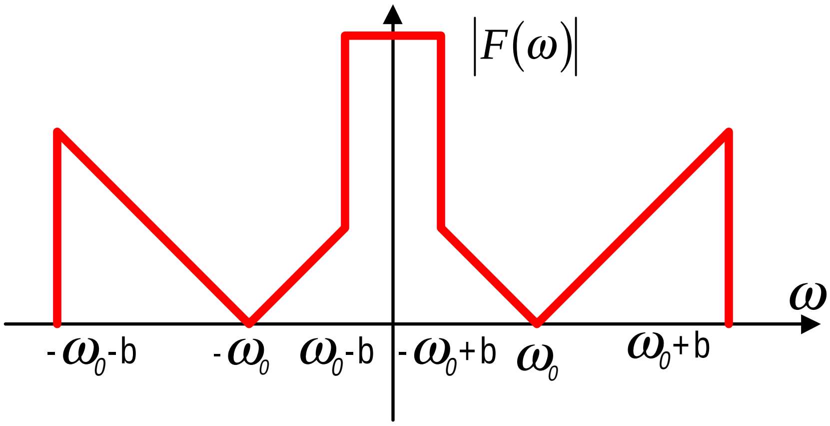
e- Représenter le spectre d'amplitude de $F(\omega)$.

Solution:

On peut constater cette fois-ci que le spectre déplacé en $+\omega_0$ vient chevaucher celui déplacé en $-\omega_0$.



On obtient donc finalement le résultat suivant:



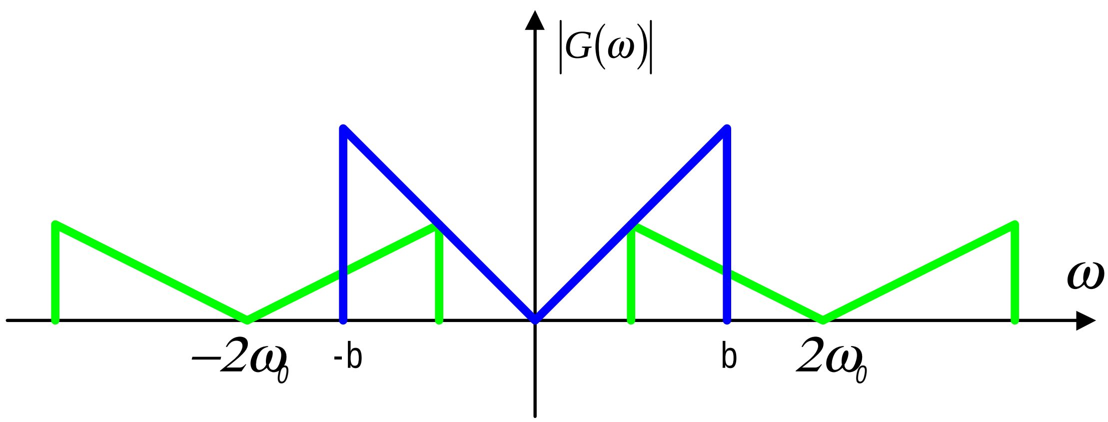
GEL19962: Analyse des signaux

Examen partiel - Solutions

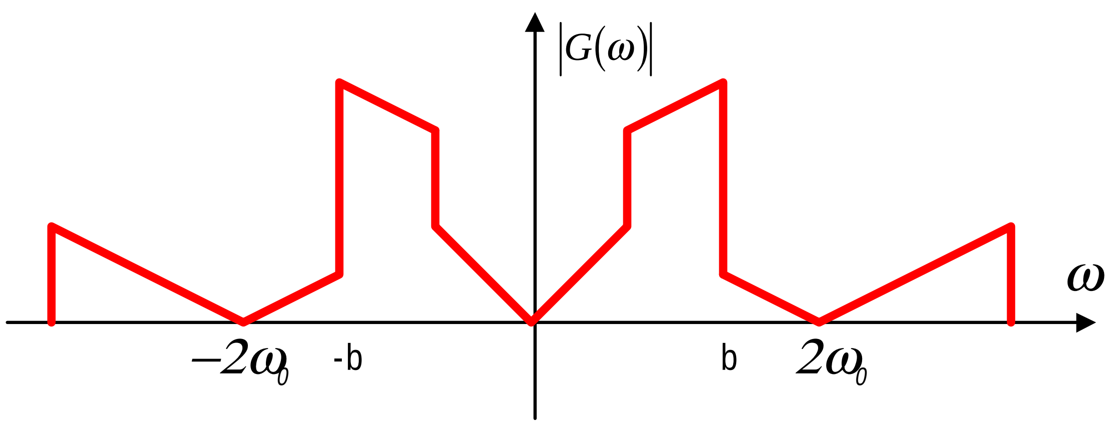
f- Représenter le spectre d'amplitude de $G(\omega)$. Peut-on encore retrouver le spectre d'amplitude de $M(\omega)$?

Solution:

Comme dans le cas où $\omega_0 > b$ On va retrouver la moitié du spectre d'amplitude de $M(\omega)$ centré en 0 et le quart du spectre d'amplitude de $M(\omega)$ aux fréquences $+2\omega_0$ et $-2\omega_0$. Le problème est que les parties de spectre en $+2\omega_0$ et $-2\omega_0$ viennent chevaucher le spectre centré en 0. La figure ci-après explique bien ce qui se passe:



On obtient donc:



On constate donc qu'il est impossible de retrouver le spectre de $M(\omega)$.