STT-2920 - A — *Examen 2* — 21 décembre 2016

R. Kandri-Rody — 15h30-17h20

Répondez dans l'espace réservé qui suit chaque question sur ce questionnaire. Cet examen compte pour 40% de la note finale.
L'examen compte 5 exercices répartis dans un questionnaire de **12 pages**, dont une page d'espace supplémentaire à la toute fin.
Vous avez **110 minutes** pour faire cet examen.
Donnez tous les développements et calculs.
Toutes les réponses doivent être convenablement justifiées.
Une liste de formules et des tables statistiques sont distribuées avec cet examen. Utilisez le verso des feuilles pour le brouillon. Celui-ci ne sera pas corrigé. Éteingnez et rangez tout appareil électronique.

À remplir par l'étudiant(e)(en lettres **MAJUSCULES**)

NOM :
Prénom :
Matricule :

À remplir par le(s) correcteur(s)

Exercice 1	/ 14
Exercice 2	/ 20
Exercice 3	/ 22
Exercice 4	/ 22
Exercice 5	/ 22
Total	/100

Exercice 1 : (14 pts)
On a mesuré, par un processus de vieillissement accéléré, la durée de vie, en mois, d'un échantillon de 24 composantes d'un certain type. Les résultats obtenus sont les suivants.

1	2	3	5	5	6	6	6	7	7	9	9
11	11	13	14	14	14	14	14	15	17	18	19

(a) Trouvez la médiane, le premier quartile et le troisième quartile de ces données. (6 pts)

(b) Tracez le diagramme en boîte de cet ensemble de données. (8 pts)

Exercice 2 : (20 pts)
Une compagnie construit des prototypes de moteur de 1.5L. On suppose que la puissance des moteurs produits est distribuée aléatoirement selon une loi normale de moyenne et de variance inconnues.
Lors d'un test, 12 de ces moteurs sont pris au hasard et mis à l'essai sur un dynamomètre qui mesure leur couple. La moyenne échantillonnale des 12 couples est de 212 Newton-mètres et leur écart-type échantillonnal est de 6 Newton-mètres.

(a) Donnez un intervalle de confiance à 95% pour le couple moyen des moteurs produits par la compagnie. (7 pts)

(b) La qualité de l'assemblage devra être revue si le couple moyen des moteurs produits est différent de 210 Newton-mètres. Au seuil 5%, faites un test pour savoir si les données recueillies démontrent de l'évidence que le couple moyen est différent de 210 Newton-mètres ? (9 pts)

(c) Encadrez par les valeurs les plus proches sur la table statistique appropriée, le seuil observé (p-value) de ce test. (4 pts)

Exercice 3 : (22 pts)
Supposons que la durée de vie d'une ampoule d'un certain type soit distribuée suivant une loi exponentielle avec une moyenne de 4 ans.

a) Quelle est la probabilité qu'une ampoule de ce type, choisie au hasard, ait une durée de vie d'au moins 3 ans ? (7 pts)

b) Si vous avez un lot de 100 ampoules de ce type, quelle est la probabilité qu'au moins la moitié d'entre elles aient une durée de vie d'au moins 3 ans ? (8 pts)

c) Vous utilisez ce type d'ampoules et, ce qui vous intéresse maintenant, est le nombre d'ampoules qui grilleront dans les trois prochaines années. Quelle est la probabilité que ce nombre soit 2 ou plus ? (7 pts)

Exercice 4 :(22 pts)

Soit X une variable aléatoire de distribution uniforme dans l'intervalle $[0, \theta]$ où le paramètre θ est un nombre réel positif inconnu. À partir d'un échantillon aléatoire $X_1, \cdots .X_n$, on considère la statistique $Y = \max\{X_1, \cdots, X_n\}$, dont la distribution est définie par la densité :

$$g(y) = \begin{cases} \frac{ny^{n-1}}{\theta^n} & \text{si } 0 \leq y \leq \theta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(a) Calculez $E(Y)$ et $V(Y)$. (6 pts)

(b) Déterminez a tel que la statistique $\widehat{\theta_1} = aY$ soit un estimateur sans biais de θ. (6 pts)

(c) Trouvez l'estimateur $\widehat{\theta_2}$ de θ par la méthode des moments. (6 pts)

(d) Comparez les deux estimateurs $\widehat{\theta_1}$ et $\widehat{\theta_2}$. (4 pts)

Exercice 5 : (22 pts)

Soit X une variable aléatoire dont la distribution est définie par la densité :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} x^{-\frac{1}{\theta}-1} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où le paramètre θ est un nombre réel positif inconnu. On considère un échantillon aléatoire $X_1, \cdots .X_n$ de même loi que X.

(a) Déterminez l'estimateur $\widehat{\theta}$ du maximum de vraisemblance de θ. (8 pts)

(b) Calculez la fonction de répartition de la variable aléatoire $Y = \ln(X)$ et **en déduire** qu'elle est de loi exponentielle dont on précisera le paramètre. (8 pts)

(c) En utilisant les résultats des questions précédentes, montrez que l'estimateur $\widehat{\theta}$ est sans biais. (6 pts)