Final

MAT-2910: Analyse Numérique pour ingénieur — Hiver 2018

- L'examen est noté sur 100 points et compte pour 30.0% de la note finale.
- Donner tous les développements et calculs. **Pour recevoir des points, toute réponse doit être convenablement** JUSTIFIÉE**.**
- Seules les calculatrices avec l'auto-collant de la Faculté sont autorisées.
- Répondre aux questions sur le questionnaire. **Utiliser le verso des feuilles si nécessaire**.
- Un aide mémoire se retrouve à la fin du questionnaire, vous pouvez le détacher.
- N'oubliez pas d'identifier chaque page.

Je suis bien l'étudiant dont le nom et le numéro de dossier sont écrits ci-dessous. J'ai lu et compris les directives et je m'engage à les respecter.	
Nom:	
Prénom:	
Matricule:	
Signature:	

À remplir par le(s) correcteur(s)

Q1 (/15)	Q2 (/20)	Q3 (/10)	Q4 (/10)	Q5 (/20)	Q6 (/15)	Q7 (/10)	Total

Question 1 (10+5) **Nom, Prénom:**________________________________

Pour l'approximation de $\int_0^1 f(x)dx$, on considère la formule de quadrature suivante:

$$Q(f) = \alpha f(0) + \beta f(1) + \gamma f'(0)$$

a) Déterminer les coefficients réels α, β et γ tels que la formule soit exacte pour les polynômes de degré 2 (et moins).

b) Cette formule de quadrature est-elle exacte pour les polynômes de degré 3 ?

Question 2 (5+5+5+5) **Nom, Prénom:**______________________________

Le but de cet exercice est d'obtenir une approximation de

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+x^6} dx \tag{1}$$

a) Déterminer une approximation de I en utilisant la quadrature de Gauss-Legendre à 2 points.

b) Déterminer une approximation de I en utilisant la formule des trapèzes composée, avec 5 points.

suite de la question 2, page suivante...

c) Sachant qu'on a obtenu l'approximation suivante avec la méthode des trapèzes et $h = \frac{1}{8}$,

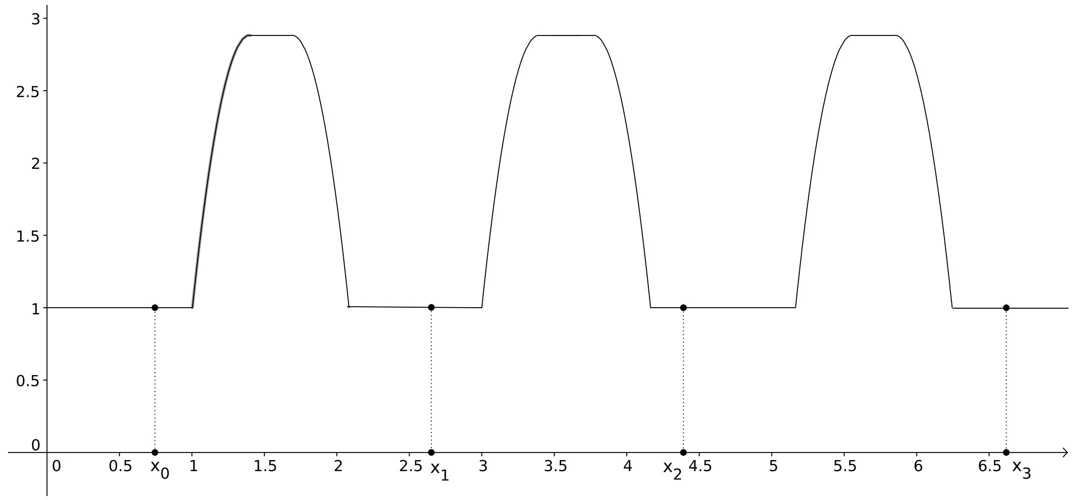
$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^6} dx \approx 0.90181$$

déterminer une nouvelle approximation d'ordre au moins 3.

d) Sachant que $|f''(x)| \leq 5, \forall\, x \in [0,1]$, déterminer le nombre de points d'intégration nécessaire pour garantir une erreur inférieure à 10^{-5} avec la méthode des trapèzes.

Question 3 (3+3+2+2) **Nom, Prénom:**________________________________

On considère la fonction suivante définie sur $[0, 7]$:



On veut interpoler cette fonction à l'aide d'un polynôme passant par les 4 points x_0, x_1, x_2 et x_3.

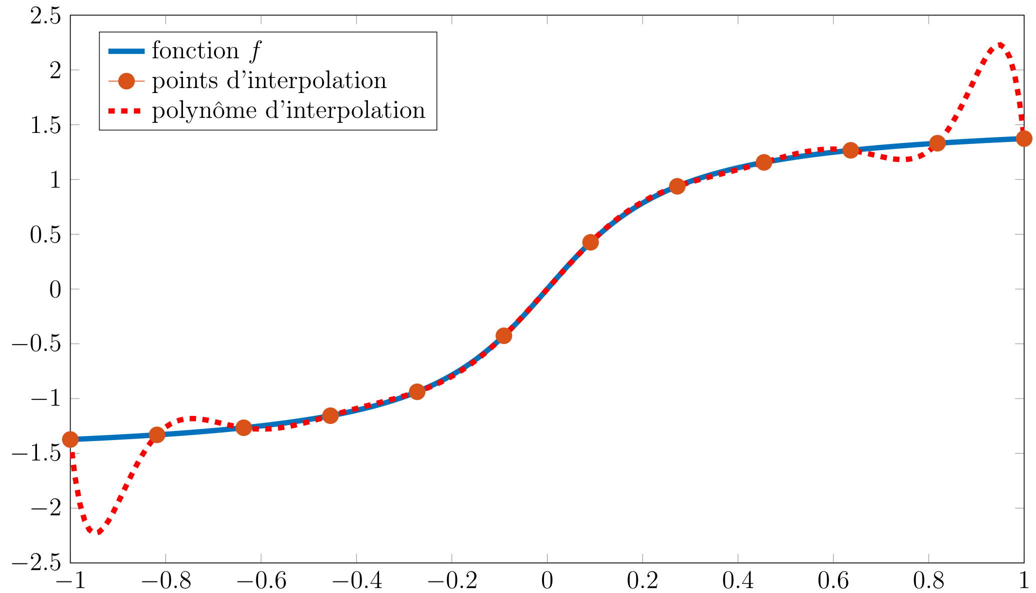
a) Déterminer le polynôme de degré minimal qui interpole la fonction précédente aux points x_0, x_1, x_2 et x_3.

b) Ajouter 3 points sur la figure précédente (les dessiner par des croix) qui permettraient une meilleure interpolation.

suite de la question 3, page suivante...

Question 3 (3+3+2+2) **Nom, Prénom:**______________________________

c) On décide d'interpoler à l'aide de 12 points sur $[-1, 1]$ la fonction f tracée (en ligne pleine) sur le graphique ci-dessous. Le polynôme d'interpolation est tracé en pointillé. Expliquez brièvement les oscillations observées ? (on pourra utiliser l'expression de l'erreur d'interpolation).



d) Quelle solution proposeriez-vous pour supprimer ces oscillations tout en interpolant f de façon précise ?

Question 4 (5+5) **Nom, Prénom:**______________________________

a) On considère les points $(0,1)$ et $(1,3)$. Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange.

b) On interpole à l'aide d'une spline cubique naturelle les points $(-1,1)$, $(0,2)$ et $(1,-1)$:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = a + b(x+1) + c(x+1)^2 - (x+1)^3 \text{ pour } -1 \leq x \leq 0 \\ S_1(x) = 2 - x - 3x^2 + x^3 \text{ pour } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Déterminer a, b et c.

Question 5 (10+10) **Nom, Prénom:**________________________________

a) Déterminer une approximation de $y(2)$ avec la méthode d'Euler et $h = 0.5$ sachant que y est la solution de l'équation différentielle

$$y'(t) + y(t) - t^2 = 0, \qquad y(1) = 2.$$

b) Déterminer une approximation de $y(1)$ et $y'(1)$ avec la méthode d'Euler et $h = 0.5$ sachant que y est la solution de

$$y''(t) \;=\; -y(t) + t^2, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 3.$$

Question 6 (3+4+3+5) **Nom, Prénom:**________________________________

On cherche à interpoler une fonction f inconnue par un polynôme p, dont on connaît les valeurs et les valeurs des dérivées en deux points, 0 et 1. On cherche donc p tel que:

$$\begin{aligned} p(0) &= f(0) = 1, \qquad p'(0) = f'(0) = 2 \\ p(1) &= f(1) = 3, \qquad p'(1) = f'(1) = -1 \end{aligned} \tag{2}$$

On le cherche de la forme :

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

a) Justifier le degré du polynôme choisi.

b) Écrire les conditions (2) portant sur le polynôme p sous forme d'un système linéaire. À la manière de la méthode de Vandermonde vue en cours on trouvera une matrice A telle que:

$$A \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

suite de la question 6, page suivante...

Question 6 (3+4+3+5) **Nom, Prénom:**________________________________

c) On peut montrer que $\det(A) = -1$. Que pouvez-vous en conclure ?

d) On introduit les 4 polynômes suivants:

$$\begin{aligned} p_1(x) &= 2x^3 - 3x^2 + 1 \quad && \text{tel que } p_1(0) = 1,\ p_1(1) = 0,\ p_1'(0) = p_1'(1) = 0 \\ p_2(x) &= 3x^2 - 2x^3 && \text{tel que } p_2(0) = 0,\ p_2(1) = 1,\ p_2'(0) = p_2'(1) = 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \tilde{p}_1(x) &= x^3 - 2x^2 + x \quad && \text{tel que } \tilde{p}_1(0) = \tilde{p}_1(1) = 0,\ \tilde{p}_1'(0) = 1,\ \tilde{p}_1'(1) = 0 \\ \tilde{p}_2(x) &= x^3 - x^2 && \text{tel que } \tilde{p}_2(0) = \tilde{p}_2(1) = 0,\ \tilde{p}_2'(0) = 0,\ \tilde{p}_2'(1) = 1 \end{aligned}$$

Construire le polynôme d'interpolation p vérifiant (2) à partir des polynômes p_1, p_2, $\tilde{p}_1$ et $\tilde{p}_2$ (ces polynômes joueront un rôle similaire aux polynômes L_i dans l'interpolation de Lagrange).

Question 7 (3+4+3) **Nom, Prénom:**______________________________

On considère le programme Matlab suivant:

```
function  [t, y] = methode(f, t0, y0, h, nmax)

nbeq = length(y0);
y0 = y0';
y = zeros(nmax,nbeq);
n = 1;
t(1) = AAA;
y(1,:) = y0';
BBB(n <= nmax),
    fy0 = f(t(n),y0);
    yint = y0 + h*fy0;
    t(n+1) = t(n) + CCC;
    fyint = f(t(n+1),yint);
    y0 = y0 +  h/2*(fy0 + fyint);
    y(n+1,:) = y0';
    n = n+1;
end
```

a) Quelle est cette méthode numérique ?

b) Dans un script séparé, on souhaite utiliser notre fonction avec $f(t, y(t)) = t + y(t)$ (en matlab `f=@(t,y) t+y`) avec pour condition initiale $y(0) = 1$, un pas de temps de 0.1, et en faisant au plus 50 itérations. Donner un exemple d'appel de la fonction `methode` dans le script.

c) Par quoi doit-on remplacer chacune des triples lettres? Choisissez parmi les 3 options proposées en encerclant votre choix.

AAA: 1) 0 2) t0 3) 1
BBB: 1) while 2) for 3) do
CCC: 1) 1 2) n 3) h

Aide-mémoire MAT-2910

Chapitre 5

- Différences divisées: $f[x_i] = f(x_i)$,

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}, \quad f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{(x_{i+2} - x_i)}, \quad \text{etc.}$$

- Erreur d'interpolation:

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n) \quad \text{pour} \quad \xi(x) \in]x_0, x_n[$$

Chapitre 6

Dérivée première:

Avant d'ordre 1	$f'(x) = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} + O(h)$
Arrière d'ordre 1	$f'(x) = \dfrac{f(x) - f(x-h)}{h} + O(h)$
Avant d'ordre 2	$f'(x) = \dfrac{-f(x+2h) + 4f(x+h) - 3f(x)}{2h} + O(h^2)$
Centrée d'ordre 2	$f'(x) = \dfrac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2)$
Arrière d'ordre 2	$f'(x) = \dfrac{3f(x) - 4f(x-h) + f(x-2h)}{2h} + O(h^2)$

Dérivées supérieure:

Arrière d'ordre 1	$f''(x) = \dfrac{f(x-2h) - 2f(x-h) + f(x)}{h^2} + O(h)$
Avant d'ordre 1	$f''(x) = \dfrac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2} + O(h)$
Centrée d'ordre 2	$f''(x) = \dfrac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + O(h^2)$

- Extrapolation de Richardson: $Q_{exa} = \dfrac{2^n Q_{app}(\frac{h}{2}) - Q_{app}(h)}{(2^n - 1)} + O(h^{n+1})$
- Formule des trapèzes:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left(f(x_0) + 2\left[f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})\right] + f(x_n)\right) - \frac{(b-a)}{12} f''(\eta)h^2$$

- Formule de Simpson 1/3:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \cdots$$
$$+ 4f(x_{2n-3}) + 2f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})) - \frac{(b-a)}{180} f''''(\eta)h^4$$

- Formule de Simpson 3/8:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{3h}{8}(f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + 2f(x_3) + 3f(x_4) + \cdots$$
$$+ 2f(x_{3n-3}) + 3f(x_{3n-2}) + 3f(x_{3n-1}) + f(x_{3n})) - \frac{(b-a)f''''(\eta)}{80} h^4$$

- Intégration de Gauss (voir plus bas pour les w_i et t_i):

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{(b-a)}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{(b-a)t + (a+b)}{2}\right) dt = \frac{(b-a)}{2} \int_{-1}^1 g(t)dt \simeq \frac{(b-a)}{2} \sum_{i=1}^n w_i g(t_i)$$

Table des valeurs des points et des poids pour Gauss-Legendre à n points:

n	t_i	w_i
1	0	2
2	-0.57735	1
	0.57735	1
3	-0.77460	0.55556
	0	0.88889
	0.77460	0.55556
4	-0.86114	0.34785
	-0.33998	0.65215
	0.33998	0.65215
	0.86114	0.34785
5	-0.90618	0.23693
	-0.53847	0.47863
	0	0.56889
	0.53847	0.47863
	0.90618	0.23693

Chapitre 7

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

- Taylor (ordre 2): $y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) + \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial f(t_n, y_n)}{\partial t} + \frac{\partial f(t_n, y_n)}{\partial y} f(t_n, y_n)\right)$
- Euler modifiée (ordre 2): $\hat{y} = y_n + hf(t_n, y_n)$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(f(t_n, y_n) + f(t_n + h, \hat{y})\right)$$

- Point milieu (ordre 2): $k_1 = hf(t_n, y_n)$

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right)$$

- Runge-Kutta d'ordre 4:

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(t_n, y_n) \\ k_2 &= hf(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}) \\ k_3 &= hf(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}) \\ k_4 &= hf(t_n + h, y_n + k_3) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right) \end{aligned}$$