Université Laval
Professeur: Christophe Deutsch

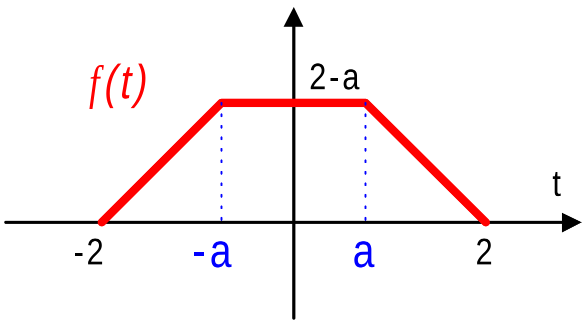
Département de Génie Électrique
et de Génie Informatique

GEL19962: Analyse des signaux

Examen partiel

Mardi le 24 octobre 1995; Durée: 13h30 à 15h20
Aucune documentation permise.

Problème 1 (8 points sur 35)



Soit $f(t)$ la fonction suivante:

$$f(t)=\begin{cases} 0 & \text{si } t<-2 \\ 2+t & \text{si } -2\le t<-a \\ 2-a & \text{si } -a\le t<a \\ 2-t & \text{si } a\le t<2 \\ 0 & \text{si } t\ge 2 \end{cases}$$

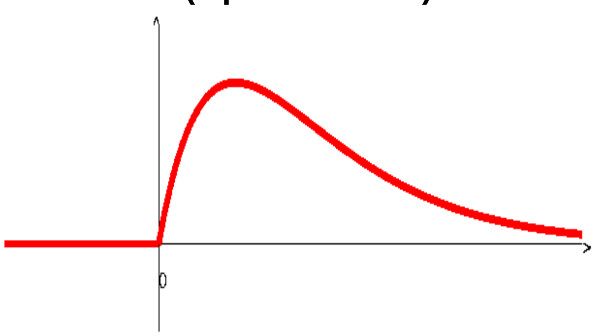
avec $0\le a\le 2$

Trouver la transformée de Fourier $F(\omega)$ de la fontion $f(t)$ en utilisant **<u>une</u>** des deux méthodes proposées. Vous devez faire la question A **<u>ou</u>** la question B, mais pas les deux.

A- Considérer la fonction $f(t)$ comme la différence de deux fonctions triangles bien choisies et trouver $F(\omega)$.

B- Calculer la dérivée seconde de $f(t)$ <u>au sens des distributions</u> et trouver $F(\omega)$.

Problème 2 (9 points sur 35)



a- Trouver la transformée de Fourier de la fonction: $f(t)=te^{-\beta t}U(t)$ avec $\beta>0$.

b- Quel est l'énergie totale de $f(t)$?

c- Quel est le pourcentage d'énergie contenue dans la bande de fréquence $-2\beta\le\omega\le 2\beta$?

<u>Voici quelques informations qui peuvent être utile pour ce problème:</u>

$$\int_0^{+\infty} t^2 e^{-at}dt=\frac{2}{a^3} \quad \text{avec } a>0$$

$$\int_{-a}^{a}\frac{du}{\left(1+u^2\right)^2}=\arctan(a)+\frac{a}{1+a^2}$$

$\arctan(2)\cong 1.1$ et $3/3.14\cong 0.995$

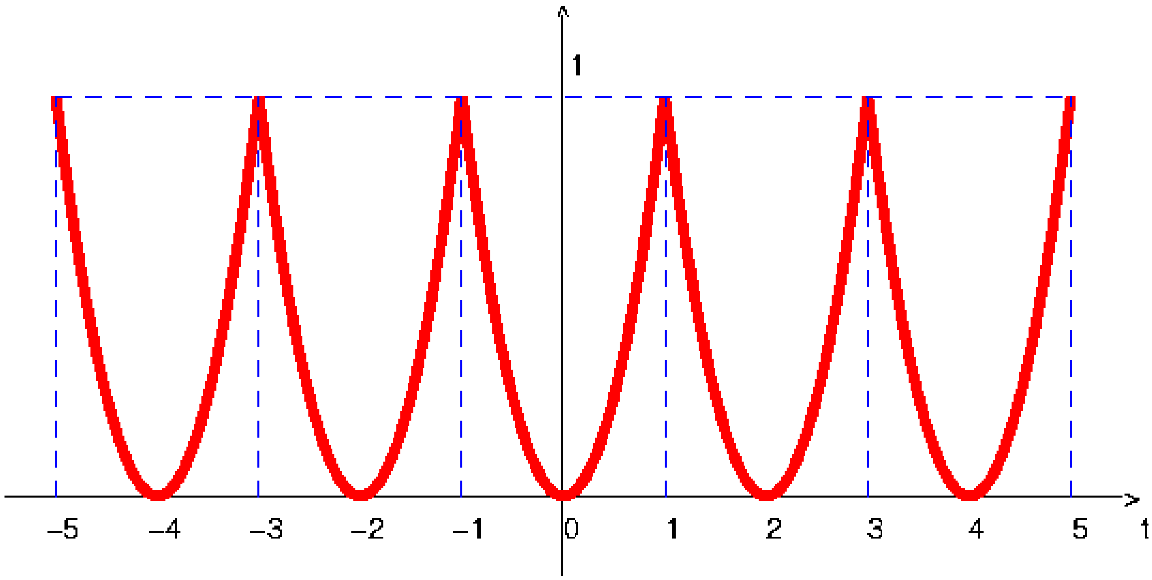
Université Laval
Professeur: Christophe Deutsch

Département de Génie Électrique
et de Génie Informatique

GEL19962: Analyse des signaux

Examen partiel

Problème 3 (10 points sur 35)



Soit $f_p(t)$ la fonction périodique définie par $f_p(t) = t^2$ pour $-1 \leq t < 1$

Le but de cet exercice est de trouver la transformée de Fourier de cette fonction périodique sans calculer les coeffiecients de la série de Fourier qui y est associée.

a- Donner la période et la pulsation propre de cette fonction.

b- En calculant la dérivée seconde de $f_p(t)$ **<u>au sens des distributions</u>**, montrer que:

$$f_p''(t) = 2 - 4\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - 1 - 2n).$$

On note $F(\omega)$ la transformée de Fourier de $f_p(t)$.

c- Calculer la transformée de Fourier de l'équation trouvée en b-.

d- Trouver une solution particulière de l'équation c- et donner la solution générale.

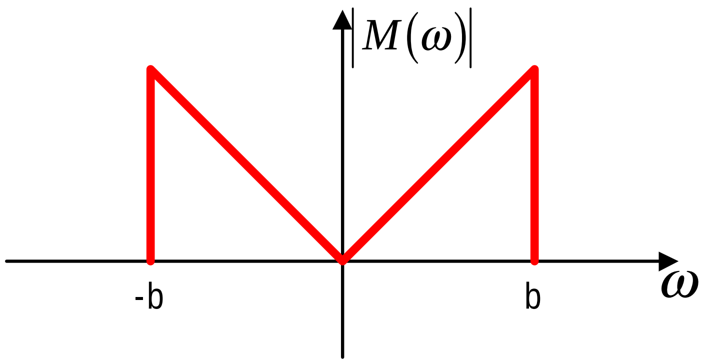
e- En utilisant le fait que $f_p(t)$ est une fonction périodique et en calculant $F_{série}(0)$, donner l'expression de la transformée de Fourier de $f_p(t)$.

GEL19962: Analyse des signaux
Examen partiel

Problème 4 (8 points sur 35): Modulation d'amplitude

a- Calculer la tranformée de Fourier $F(\omega)$ du signal $f(t) = m(t)\cos(\omega_0 t)$ en fonction de la transformée de Fourier $M(\omega)$ de $m(t)$.

On suppose que le spectre d'amplitude de $M(\omega)$ est à support borné (c'est à dire que $|M(\omega)| = 0$ pour $|\omega| \geq b$). Sa représentation est donnée ci -dessous.



<u>**On suppose que**</u> $\omega_0 > b$

b- Représenter le spectre d'amplitude de $F(\omega)$.

c- Donner la transformée de Fourier $G(\omega)$ de $g(t) = f(t)\cos(\omega_0 t)$.

<u>*Indication:*</u> on pourra se servir du fait que $\cos^2(\omega_0 t) = \dfrac{\cos(2\omega_0 t) + 1}{2}$

d- Représenter le spectre d'amplitude de $G(\omega)$.
Comment faudrait-il faire pour retrouver le spectre d'amplitude de $M(\omega)$?

e- **Question bonus** (2pts):
Que se passe-t-il lorsque $\omega_0 < b$?