STT-2920 LISTE DES FORMULES POUR L'EXAMEN 1 VERSION 2017

- $\mathbb{P}[\emptyset] = 0,\ \ 0 \leq \mathbb{P}[A] \leq 1$ et $\mathbb{P}[\Omega] = 1$.
- Si $A_1, A_2, A_3, \ldots$ sont mutuellement exclusifs, alors $\mathbb{P}[\cup_i A_i] = \sum_i \mathbb{P}[A_i]$.
- $\mathbb{P}[A] = 1 - \mathbb{P}[A^c]$.
- Si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}[A] \leq \mathbb{P}[B]$.
- $\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[A \cap B]$.
- $\mathbb{P}[A \cup B \cup C] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] + \mathbb{P}[C] - \mathbb{P}[A \cap B] - \mathbb{P}[B \cap C] - \mathbb{P}[A \cap C] + \mathbb{P}[A \cap B \cap C]$.
- Dans le cas équiprobable (c'est-à-dire le cas où Ω est un ensemble fini et où chaque élément de Ω a la même probabilité de se réaliser), on a $\mathbb{P}[A] = \text{Cardinal}(A)/\text{Cardinal}(\Omega)$.
- Nombre de façons de choisir k objets parmi n objets : $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
- Théorème du binôme de Newton : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$
- $\mathbb{P}[A|B] = \dfrac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[B]}$.
- A et B sont indépendants si et seulement si $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A]\,\mathbb{P}[B]$.
- La règle de multiplication :
  - $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A]\,\mathbb{P}[B|A]$.
  - $\mathbb{P}[A \cap B \cap C] = \mathbb{P}[A]\,\mathbb{P}[B|A]\,\mathbb{P}[C|A \cap B]$.
- Si $B_1, B_2, \ldots, B_k$ sont mutuellement exclusifs et exhaustifs (c'est-à-dire si $B_1, B_2, \ldots, B_k$ forment une partition de Ω), alors
  - $\mathbb{P}[A] = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}[B_i]\,\mathbb{P}[A|B_i]$. (Loi des probabilités totales).
  - $\mathbb{P}[B_j|A] = \dfrac{\mathbb{P}[B_j]\,\mathbb{P}[A|B_j]}{\sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}[B_i]\,\mathbb{P}[A|B_i]}$. (Théorème de Bayes).

Loi	Fonction de masse ou densité	Moyenne	Variance
Bernoulli (p)	$\mathbb{P}[X=0] = 1-p,\ \ \mathbb{P}[X=1] = p$	p	$p(1-p)$
Binomiale (n,p)	$\mathbb{P}[X=k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, pour $0 \leq k \leq n$	np	$np(1-p)$
Géométrique (p)	$\mathbb{P}[X=k] = (1-p)^{k-1} p$, pour $k \geq 1$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{1-p}{p^2}$
Poisson (ν)	$\mathbb{P}[X=k] = e^{-\nu}\,\nu^k/k!$, pour $k \geq 0$	ν	ν
Exponentielle (λ)	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, pour $x \geq 0$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$
Uniforme (a,b)	$f(x) = \dfrac{1}{b-a}$, $a < x < b$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$

Cas d'une variable discrète	Cas d'une variable continue
$\mathbb{P}[a < X \leq b] = \sum_{a<x\leq b} p(x)$	$\mathbb{P}[a < X \leq b] = \int_a^b f(x)dx$
$F(x) = \mathbb{P}[X \leq x] = \sum_{-\infty<u\leq x} p(u)$	$F(x) = \mathbb{P}[X \leq x] = \int_{-\infty}^x f(u)du$
$p(x) = \mathbb{P}[X = x]$	$f(x) = \frac{d}{dx}F(x)$
$\mu = \mathbb{E}[X] = \sum_x xp(x)$	$\mu = \mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$
$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_x g(x)p(x)$	$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$

- $\mathbb{E}[aX + b] = a\mathbb{E}[X] + b \qquad \sigma^2 = \mathbb{V}\text{ar}[X] = \mathbb{E}[(X - \mu)^2] = \mathbb{E}[X^2] - \mu^2$
- $\mathbb{V}\text{ar}[aX + b] = a^2\mathbb{V}\text{ar}[X]$

Cas de deux variables discrètes	Cas de deux variables continues
$\mathbb{P}[(X, Y) \in B] = \sum_{(x,y)\in B} p(x, y)$	$\mathbb{P}[(X, Y) \in B] = \int\int_B f(x, y)dxdy$
$F(x, y) = \sum_{-\infty<u\leq x} \sum_{-\infty<v\leq y} p(u, v)$	$F(x, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f(u, v)dudv$
$p(x, y) = \mathbb{P}[(X = x) \cap (Y = y)]$	$f(x, y) = \frac{d^2}{dxdy}F(x, y)$
$\mathbb{E}[g(X, Y)] = \sum_x \sum_y g(x, y)p(x, y)$	$\mathbb{E}[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y)f(x, y)dxdy$
$p_X(x) = \sum_y p(x, y)$	$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dy$
$p_{Y\|X=x}(y) = \frac{p(x, y)}{p_X(x)}$	$f_{Y\|X=x}(y) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}$

- $\mathbb{C}\text{ov}[X, Y] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] \qquad \rho = \mathbb{C}\text{ov}[X, Y]/\sigma_X\sigma_Y$
- Si X et Y sont indépendantes, $\mathbb{E}[h(X)g(Y)] = \mathbb{E}[h(X)]\mathbb{E}[g(Y)]$
- $\mathbb{V}\text{ar}[\sum_{i=1}^n X_i] = \sum_{i=1}^n \mathbb{V}\text{ar}[X_i] + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} \mathbb{C}\text{ov}[X_i, X_j]$
- Si X et Y sont indépendantes, $\mathbb{C}\text{ov}[X, Y] = 0$

- Pour $n = 0, 1, 2, 3, ...$ on a $\int_a^b x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_a^b = \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}$
- Pour $m = 2, 3, 4, ...$ et $0 < a < b$, on a $\int_a^b \frac{1}{x^m} \, dx = \left(\frac{-1}{(m-1)x^{m-1}}\right)\Big|_a^b = \frac{1}{m-1}\left(\frac{1}{a^{m-1}} - \frac{1}{b^{m-1}}\right)$
- Pour $n = 0, 1, 2, 3, ...$ on a $\int_0^\infty u^n \, e^{-u} \, du = n!$
- Pour $\theta \in \mathbb{R}$ on a $\int_a^b e^{\theta x} \, dx = \frac{e^{\theta x}}{\theta}\Big|_a^b = \frac{e^{\theta b}-e^{\theta a}}{\theta}$