- Cet examen contient 9 page(s) et 7 exercices.
- Durée de l'examen : 50 minutes
- Calculatrice autorisée

Exercice 1 : [15 points]

Pour l'approximation de $\int_0^1 f(x)dx$, on considère la formule de quadrature suivante :

$$Q(f) = \alpha f(0) + \beta f(1) + \gamma f'(0)$$

1) Déterminer les coefficients réels α, β et γ tels que la formule soit exacte pour les polynômes de degré 2 (et moins).

> **Solution :**
> On veut intégrer de façon exacte les polynômes de degré 2. On veut donc que les conditions suivantes soient vérifiées :
>
> $$\int_0^1 1dx = 1 = \alpha + \beta$$
>
> $$\int_0^1 tdx = \frac{1}{2} = \beta + \gamma$$
>
> $$\int_0^1 t^2dx = \frac{1}{3} = \beta$$
>
> ce qui donne :
>
> $$\alpha = \frac{2}{3}, \quad \beta = \frac{1}{3}, \quad \gamma = \frac{1}{6}$$

2) Cette formule de quadrature est-elle exacte pour les polynômes de degré 3 ?

> **Solution :**
> Non. Il suffit de remarquer que :
>
> $$\int_0^1 t^3dx = \frac{1}{4}.$$
>
> or $Q(t^3) = \beta \neq \frac{1}{4}$.

Exercice 2 : [20 points]

Le but de cet exercice est d'obtenir une approximation de

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^6}dx \tag{1}$$

1) Déterminer une approximation de I en utilisant la quadrature de Gauss-Legendre à 2 points. On fera attention aux bornes d'intégration. On rappelle que les poids d'intégration

sont $w_1 = w_2 = 1$ et les points associés sont $t_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ et $t_2 = \frac{-1}{\sqrt{3}}$. Pour simplifier les calculs on donne également

$$\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}+1}{2}\right)^6 = 0.240651, \quad \left(\frac{\frac{-1}{\sqrt{3}}+1}{2}\right)^6 = 8.90642 \times 10^{-5}$$

Solution :

On utilise le changement de variable $x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}$ dans l'intégrale pour se ramener entre $[-1, 1]$. On trouve :

$$I = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+\left(\frac{y+1}{2}\right)^6}\, dx.$$

On peut alors approcher I :

$$I \approx \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}+1}{2}\right)^6} + \frac{1}{1+\left(\frac{\frac{-1}{\sqrt{3}}+1}{2}\right)^6}\right) = 0.90296969584$$

2) Déterminer une approximation de I en utilisant la formule des trapèzes composée, avec 5 points.

Solution :

5 points donnent 4 sous intervalles donc $h = \frac{1}{4}$.

$$\frac{1}{8}\left(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + f(x_4)\right) = 0.895820805169732 \approx \int_0^1 \frac{1}{1+x^6} dx$$

3) Sachant qu'on a obtenu l'approximation suivante avec la méthode des trapèzes et $h = \frac{1}{8}$,

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^6} dx \approx 0.90181$$

déterminer une nouvelle approximation d'ordre au moins 3.

Solution :

Richardson $\rightarrow \frac{4Q(\frac{1}{8}) - Q(\frac{1}{4})}{3} \approx 0.903806398276756$

4) Sachant que $|f''(x)| \leq 5, \forall\, x \in [0, 1]$, déterminer le nombre de points d'intégration nécessaire pour garantir une erreur inférieure à 10^{-5} avec la méthode des trapèzes.

Solution :

On note N le nombre de sous-intervalles. On veut $E(h) \leq 10^{-5}$.

$$|E(h)| \leq \frac{5}{12}h^2 = \frac{5}{12}\frac{1}{N^2} \leq 10^{-5}$$

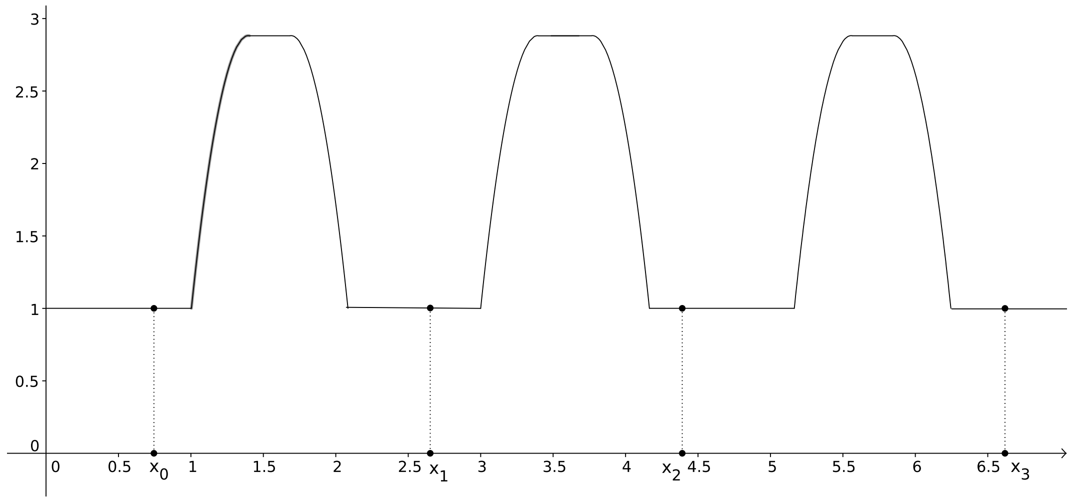
Il faut donc

$$N > \sqrt{\frac{5}{12 \times 10^{-5}}} \approx 204.12$$

et donc $N \geq 205$. Il faut donc au minimum 206 points.

Exercice 3 : [10 points]

On considère la fonction suivante définie sur $[0, 7]$:



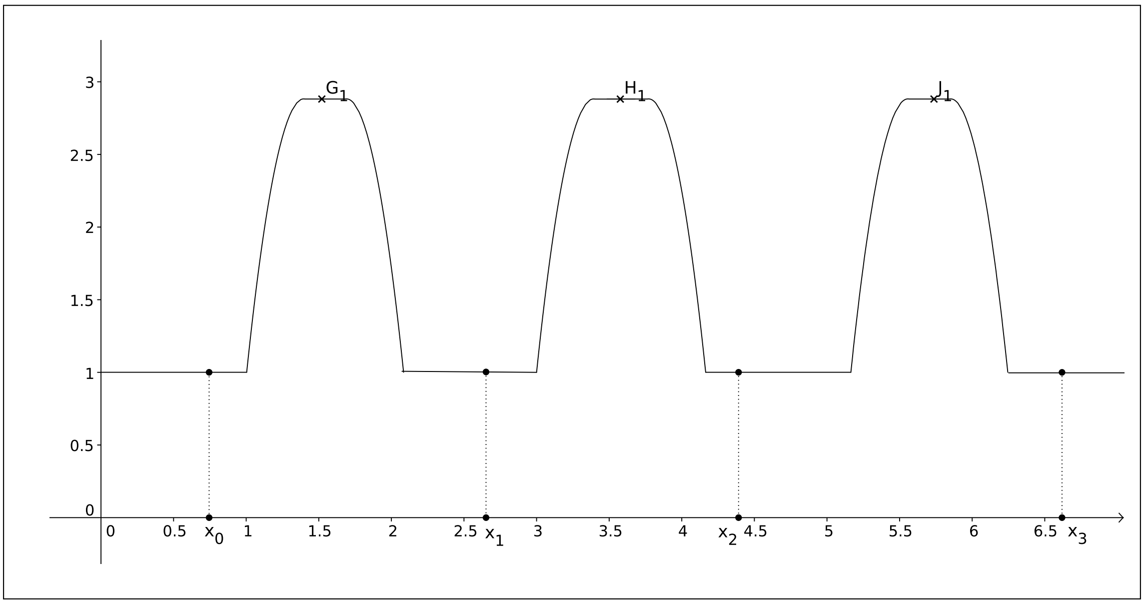
On veut interpoler cette fonction à l'aide d'un polynôme passant par les 4 points x_0, x_1, x_2 et x_3.

1) Déterminer le polynôme de degré minimal qui interpole la fonction précédente aux points x_0, x_1, x_2 et x_3.

Solution :
Les points étant alignés sur la droite $y = 1$, le polynôme de degré minimal qui passe par ces points et le polynôme $p(x) = 1$.

2) Ajouter 3 points sur la figure précédente (les dessiner par des croix) qui permettraient une meilleure interpolation.

Solution :



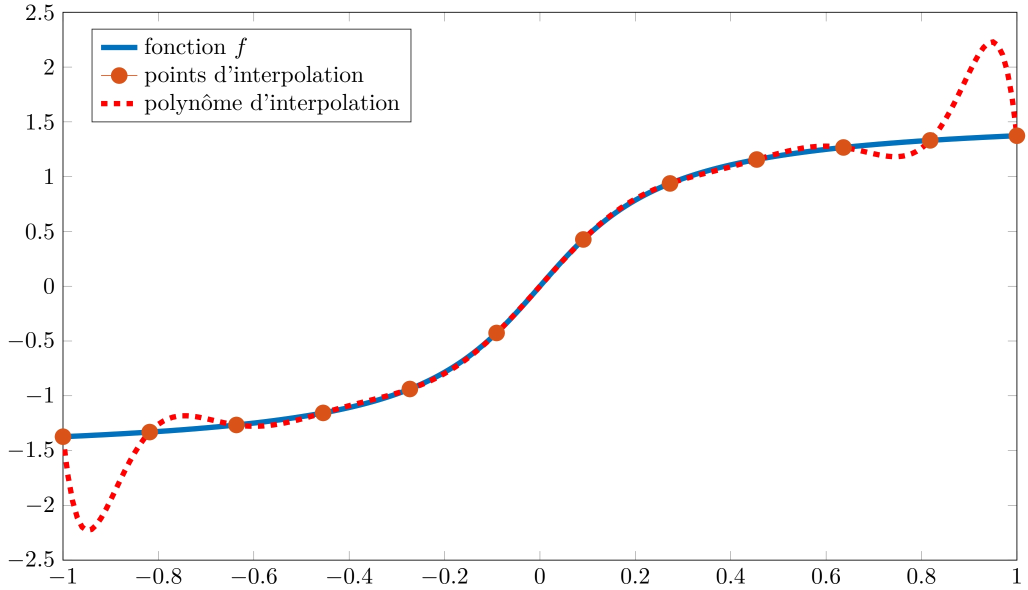
3) On décide d'interpoler à l'aide de 12 points sur $[-1, 1]$ la fonction f tracée (en ligne pleine) sur le graphique ci-dessous. Le polynôme d'interpolation est tracé en pointillé. Expliquez brièvement les oscillations observées ? (on pourra utiliser l'expression de l'erreur d'interpolation).

Solution :

Quand on interpole une fonction à l'aide d'un polynôme de degré élevé, la fonction d'interpolation peut présenter de fortes oscillations. Cette possibilité est visible dans l'expression du terme d'erreur qui s'écrit :

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n) \quad \text{pour} \quad \xi(x) \in]x_0, x_n[.$$

Les oscillations sont dues à l'action conjuguée d'une valeur de la dérivée $n+1$-ième importante et de la forme du polynôme qui intervient dans l'expression. Ce polynôme donne lieu a de nombreux changements de signe.



4) Quelle solution proposeriez-vous pour supprimer ces oscillations tout en interpolant f de façon précise ?

Solution :

Plusieurs possibilités. On peut utiliser des splines cubiques, des interpolations linéaires par morceaux. L'autre type de possibilité est de choisir d'autres points d'interpolation (points de Tchebychev par exemple).

Exercice 4 : [10 points]

1) On considère les points $(0, 1)$ et $(1, 3)$. Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange.

Solution :

Les polynômes de Lagrange associés aux points sont respectivement :

$$L_1(x) = \frac{x-1}{(-1)} = 1 - x$$

et

$$L_2(x) = x$$

et le polynôme d'interpolation est :

$$p(x) = 3L_2(x) + L_1(x) = 3x + 1 - x = 2x + 1$$

2) On interpole à l'aide d'une spline cubique naturelle les points $(-1, 1)$, $(0, 2)$ et $(1, -1)$:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = a + b(x+1) + c(x+1)^2 - (x+1)^3 \text{ pour } -1 \leq x \leq 0 \\ S_1(x) = 2 - x - 3x^2 + x^3 \text{ pour } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Déterminer a, b et c.

Solution :

On cherche une spline donc $S_0(-1) = 1$ ce qui donne $a = -1$. De plus cette spline est écrite sous forme canonique et est naturelle. Donc $c = 0$. Pour déterminer b, on utilise la continuité des dérivées premières en 0.

$$S_0'(0) = S_1'(0) = -1$$

et $S_0'(0) = b - 3$ donc $b = 2$.

Exercice 5 : [20 points]

1) Déterminer une approximation de $y(2)$ avec la méthode d'Euler et $h = 0.5$ sachant que y est la solution de l'équation différentielle

$$y'(t) + y(t) - t^2 = 0, \qquad y(1) = 2.$$

Solution :

On remarque que l'équation différentielle se met sous la forme :

$$y'(t) = -y(t) + t^2$$

donc $f(t, y) = -y + t^2$. Il suffit d'appliquer la méthode d'Euler en prenant garde que $t_0 = 1$. Pour arriver en 2 avec un pas de 0.5 il faut faire deux itérations.

$$y_1 = 2 + 0.5 * (-2 + 1) = 1.5$$

$$y_2 = 1.5 + 0.5(-1.5 + 1.5^2) = 1.875$$

donc $y(2) \approx 1.875$.

2) Déterminer une approximation de $y(1)$ et $y'(1)$ avec la méthode d'Euler et $h = 1$ sachant que y est la solution de

$$y''(t) \quad = \quad -y(t) + t^2, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 3.$$

Solution :

On pose $y_1 = y$ et $y_2 = y' = y_1'$. On peut donc écrire le système suivant :

$$Y' = F(t, Y)$$

avec $Y = (y_1, y_2)$ et :

$$F(t, Y) = \left(y_2, -y_1 + t^2\right).$$

Les conditions initiales $y_1(0) = 2$ et $y_2(0) = 3$. On applique la méthode d'Euler une fois pour arriver en 1 (on part de $t_0 = 0$ dans cette question).

$$y_1^1 = 2 + 3 = 5$$

et

$$y_2^1 = 3 + (-2 + 0^2) = 1.$$

donc $y(1) \approx 5$ et $y'(1) \approx 1$.

Exercice 6 : [15 points]

On cherche à interpoler une fonction f inconnue par un polynôme p, dont on connaît les valeurs aux points 0 et 1, ainsi que les valeurs des dérivées en ces mêmes points. On cherche donc p tel que :

$$\begin{aligned} p(0) &= f(0) = 1, \qquad p'(0) = f'(0) = 2 \\ p(1) &= f(1) = 3, \qquad p'(1) = f'(1) = -1 \end{aligned} \tag{2}$$

On cherche le polynôme p de la forme :

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

1) Justifier le degré du polynôme choisi.

Solution :

On a 4 équations dans (2), on ne peut donc a priori déterminer qu'au plus 4 paramètres. Or un polynôme de degré 3 possède 4 coefficients que l'on va chercher à déterminer.

2) Écrire les conditions (2) portant sur le polynôme p sous forme d'un système linéaire. À la manière de la méthode de Vandermonde vue en cours on trouvera une matrice A telle que :

$$A \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Solution :

On écrit les condtions (2) :

$$\begin{aligned} &a_0 = 1 \\ &a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 3 \\ &a_1 = 2 \\ &a_1 + 2a_2 + 3a_3 = -1 \end{aligned}$$

ce qui se met sous forme de système linéaire avec la matrice A suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

3) On peut montrer que $\det(A) = -1$. Que pouvez-vous en conclure ?

Solution :

Le système précédent possède une unique solution. Le polynôme interpolateur cherché existe et est donc unique.

4) On introduit les 4 polynômes suivants :

$$\begin{aligned} p_1(x) &= 2x^3 - 3x^2 + 1 \quad && \text{tel que } p_1(0) = 1,\ p_1(1) = 0,\ p_1'(0) = p_1'(1) = 0 \\ p_2(x) &= 3x^2 - 2x^3 && \text{tel que } p_2(0) = 0,\ p_2(1) = 1,\ p_2'(0) = p_2'(1) = 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \tilde{p}_1(x) &= x^3 - 2x^2 + x \quad && \text{tel que } \tilde{p}_1(0) = \tilde{p}_1(1) = 0,\ \tilde{p}_1'(0) = 1,\ \tilde{p}_1'(1) = 0 \\ \tilde{p}_2(x) &= x^3 - x^2 && \text{tel que } \tilde{p}_2(0) = \tilde{p}_2(1) = 0,\ \tilde{p}_2'(0) = 0,\ \tilde{p}_2'(1) = 1 \end{aligned}$$

Construire le polynôme d'interpolation p vérifiant (2) à partir des polynômes p_1, p_2, $\tilde{p}_1$ et $\tilde{p}_2$ (ces polynômes joueront un rôle similaire aux polynômes L_i dans l'interpolation de Lagrange).

Solution :

Les polynômes p_1 et p_2 permettent d'interpoler les valeurs de la fonction. Les polynômes $\tilde{p}_1$ et $\tilde{p}_2$ permettent d'interpoler les valeurs de la dérivée de la fonction. Le polynôme d'interpolation s'écrit donc :

$$p(x) = p_1(x) + 3p_2(x) + 2\tilde{p}_1(x) - \tilde{p}_2(x)$$

Exercice 7 : [10 points]

On considère le programme Matlab suivant :

```
function [t, y] = methode(f, t0, y0, h, nmax)

nbeq = length(y0);
y0 = y0';
y = zeros(nmax,nbeq);
n = 1;
t(1) = AAA;
```

```
    y(1,:) = y0';
    BBB(n <= nmax),
        fy0 = f(t(n),y0);
        yint = y0 + h*fy0;
        t(n+1) = t(n) + CCC;
        fyint = f(t(n+1),yint);
        y0 = y0 + h/2*(fy0 + fyint);
        y(n+1,:) = y0';
        n = n+1;
    end
```

1) Quelle est cette méthode numérique ?

> **Solution :**
>
> C'est la méthode d'Euler modifié.

2) Par quoi doit-on remplacer chacune des triples lettres ? Choisissez parmi les 3 options proposées en encerclant votre choix.

AAA : 1) 0   2) t0   3) 1

BBB : 1) while   2) for   3) do

CCC : 1) 1   2) n   3) h

> **Solution :**
>
> AAA = 2), BBB = 1) et CCC = 3).

3) Dans un script séparé, on souhaite utiliser notre fonction avec $f(t, y(t)) = t + y(t)$, avec pour condition initiale $y(0) = 1$, un pas de temps de 0.1, et en faisant au plus 50 itérations. Donner un exemple d'appel de la fonction `methode` dans le script (on considère que f a été déclarée de la manière suivante dans le script : `fun=@(t,y) t+y`).

> **Solution :**
>
> On écrirait : `[t,y]=methode(fun,0,1,0.1,50)`