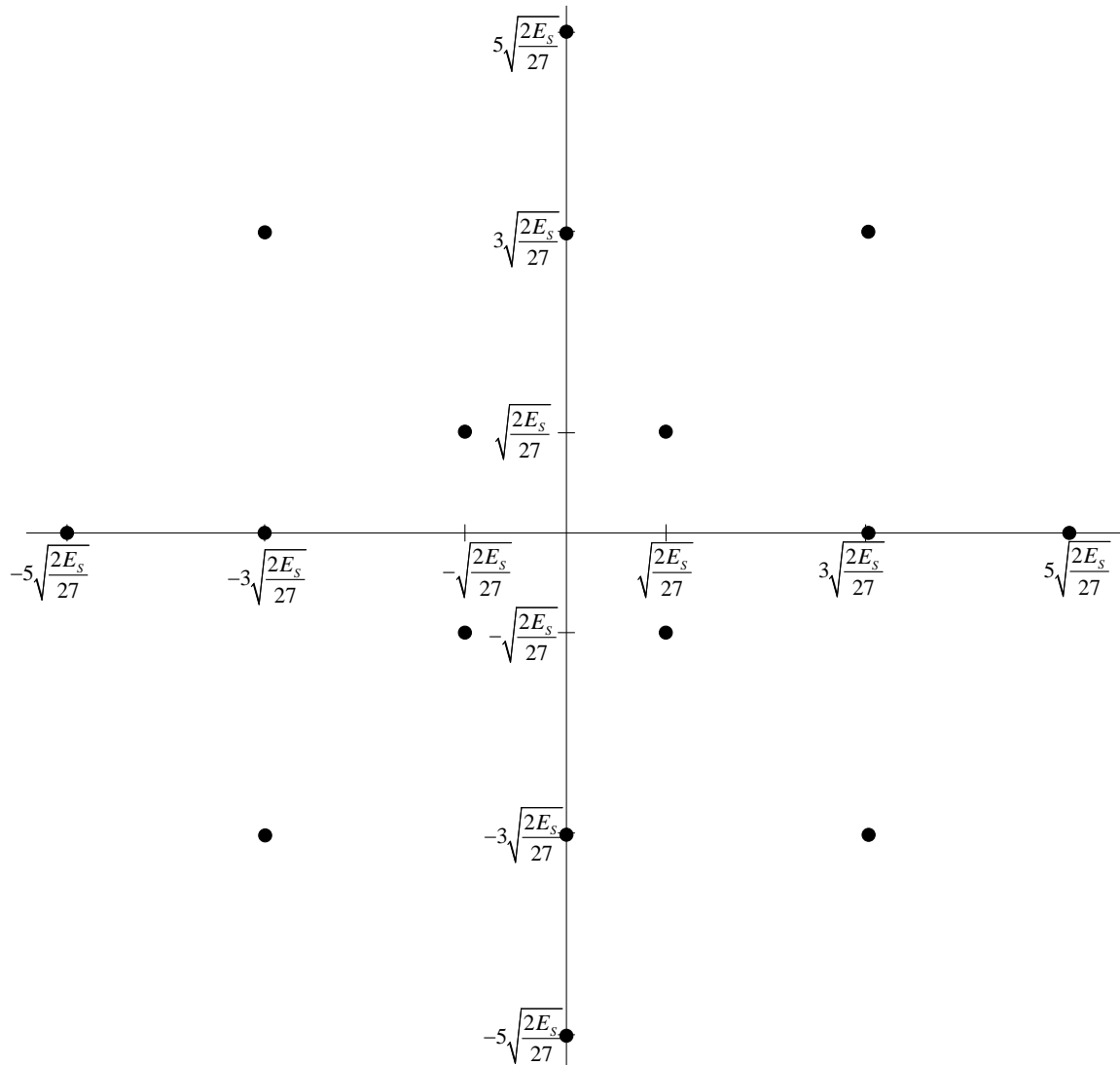


*Mercredi 1 mars 2017; Durée: 13h30 à 15h20*

*Aucune documentation permise; une calculatrice permise.*

### Problème 1 (15 points sur 100)

Considérez la constellation 16QAM suivante (non carrée) qui est représentée dans l'espace du signal.



- A. (5 points)      Donnez la distance minimale.
- B. (8 points)      Donnez la probabilité d'erreur du symbole en utilisant l'approximation venant de la borne d'union.

**Problème 2 (10 points sur 100)**

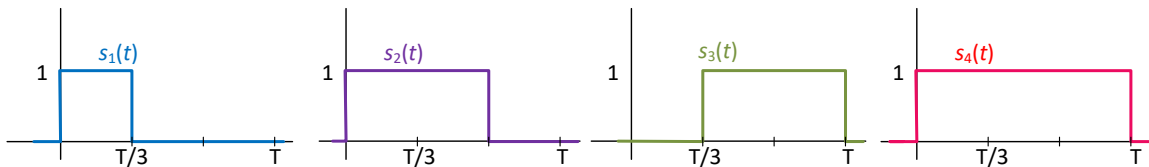
Considérez le graphique du « Plan de l'efficacité spectrale ». Trouvez les coordonnées de 16QAM (carrée) et 8FSK (cohérente) pour une probabilité d'erreur de  $10^{-6}$ .

**Problème 3 (20 points sur 100)**

- A. (10 points) Donnez une description du phénomène ISI – l'interférence intersymbole. Décrivez les circonstances où on risque d'avoir l'ISI. Comment une impulsion Nyquist peut-elle combattre l'ISI?
- B. (10 points) Donnez une définition de la probabilité *a priori* dans un système de communications. Comment peut-on exploiter une connaissance de la probabilité *a priori* pour améliorer la performance d'un système de communications?

**Problème 4 (30 points sur 100)**

Considérez l'ensemble suivant de quatre signaux.



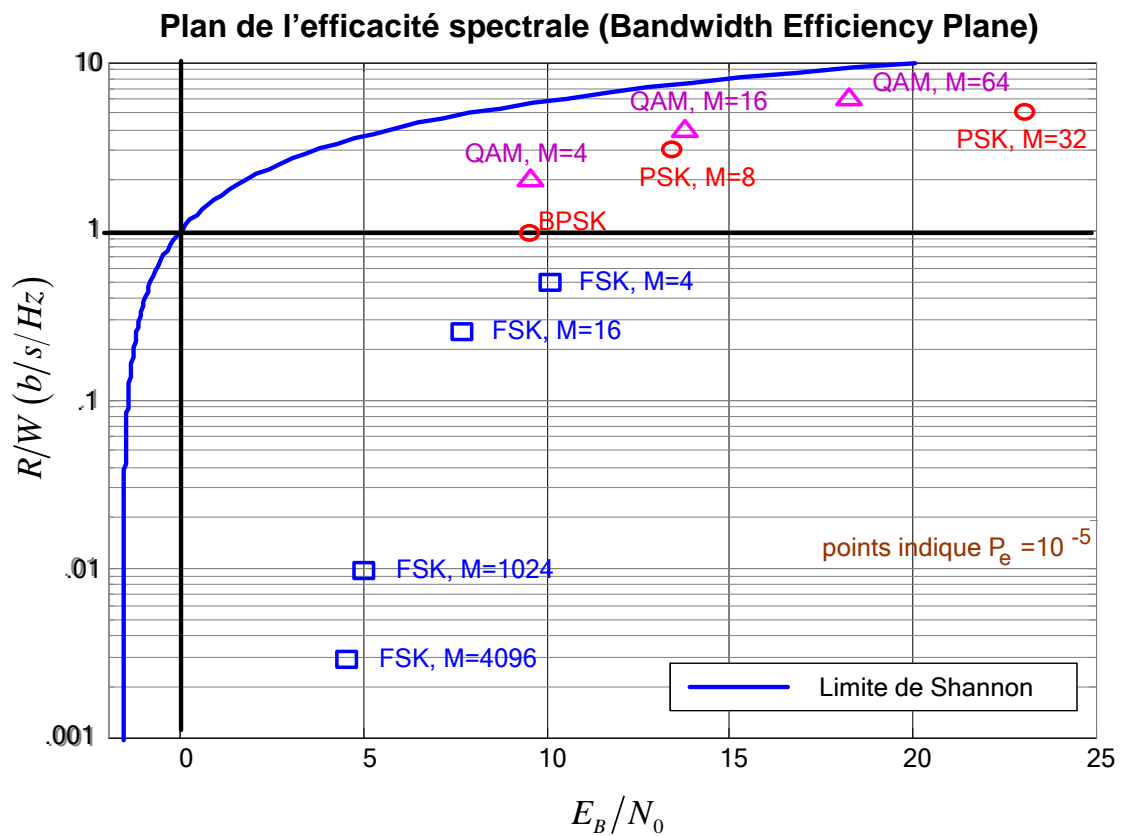
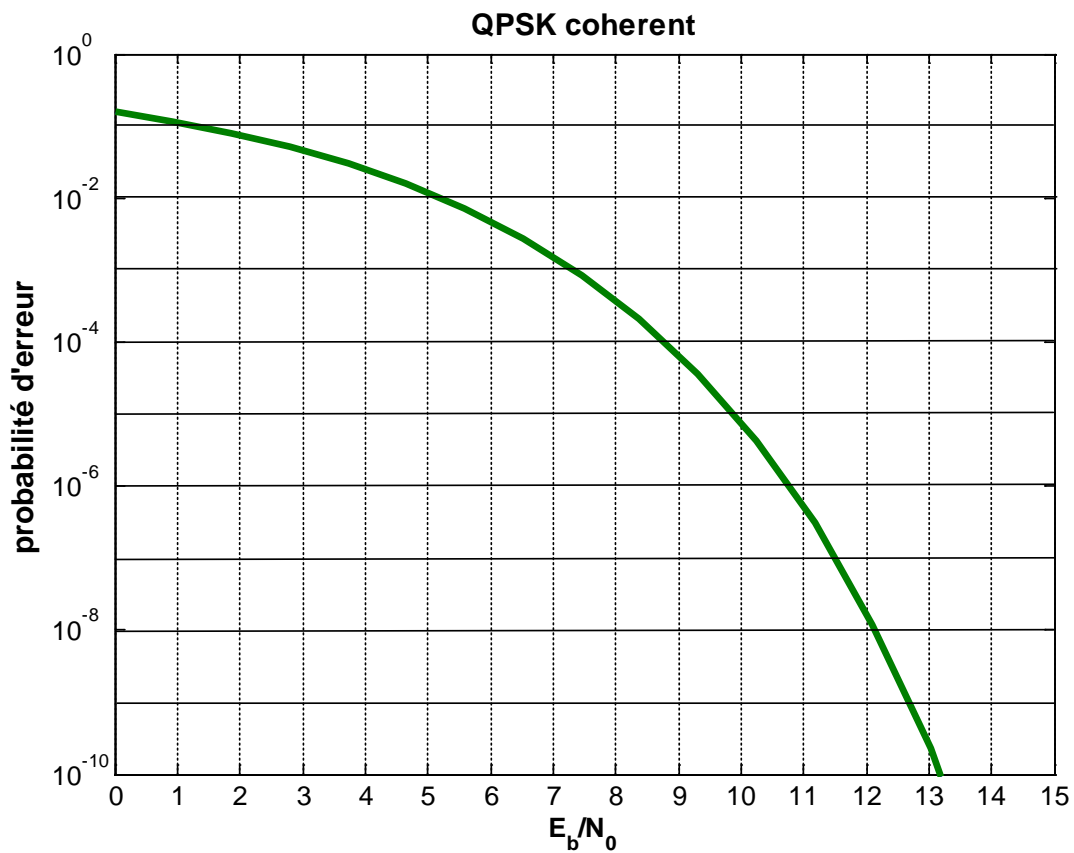
- A. (20 points) Trouvez un ensemble de vecteurs orthonormés qui forme une base pour ces quatre signaux.
- B. (10 points) Donnez les coordonnées des symboles dans l'espace du signal. Les coordonnées doivent être exprimés en termes de l'énergie moyenne par bit,  $E_b$ .

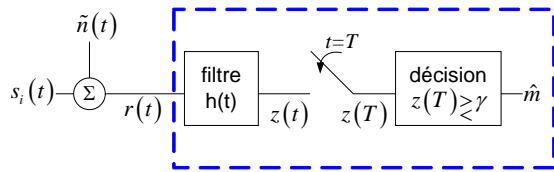
**Problème 5 (25 points sur 100)**

Trouvez un système de communications dans la table qui est limité en bande. Justifiez votre choix, c.-à-d., expliquez les qualités d'un système limité en bande. Suggérez un format de modulation approprié pour ce système.

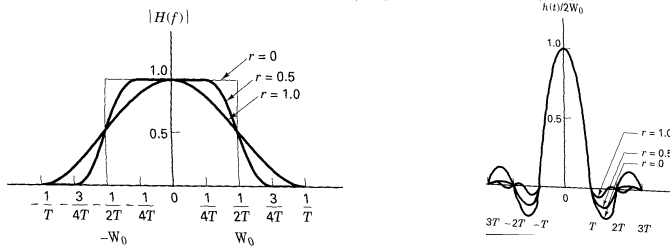
Trouvez un système de communications dans la table qui est limité en puissance. Justifiez votre choix, c.-à-d., expliquez les qualités d'un système limité en puissance. Suggérez un format de modulation approprié pour ce système.

	Largeur de bande	Taux binaire	Source de puissance	Qualité du signal
Paire torsadée	3 kHz	10 kb/s	réseau électrique	~30 dB
Déverrouillage d'une voiture	20 MHz	10 b/s	batterie	varient énormément avec distance; besoin d'une ligne de vue
Lien microonde	30 MHz	100 Mb/s	réseau électrique	bon; distance choisie pour un signal fort et une ligne de vue
Robot sur mars	4 GHz	20 kb/s	panneaux solaires	Très faible, même avec des antennes avec gain important
Données cellulaires	100 kHz	1 Mb/s	batterie	varient énormément avec distance
Câble internet	10 MHz	50 Mb/s	réseau électrique	~25 dB



**Récepteur d'échantillonnage****MAP:**  $i$  qui maximise  $p(z|s_i) p(s_i)$  $i$  qui minimise  $\|\mathbf{r} - \mathbf{s}_i\|^2 - N_0 \ln P(\mathbf{s}_i)$  $P(\mathbf{s}_i)$  = probabilité a priori de symbole  $\mathbf{s}_i$ **ML:**  $i$  qui maximise  $p(z|s_i)$  $i$  qui minimise  $\|\mathbf{r} - \mathbf{s}_i\|^2$ 

**Raised cosine**  $v(t) = \frac{\sin(\pi t/T_s)}{\pi t/T_s} \frac{\cos(r\pi t/T_s)}{1 - 4r^2 t^2/T_s^2}$

**Énergie moyenne**

$$E_{\text{moy}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \|\mathbf{s}_i\|^2$$

$$= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M [\text{énergie du signal } i]$$

**Énergie par bit v. énergie par symbole**

$$E_b \log_2 M = E_s$$

**Conversion de l'espace I/Q vers espace du signal**

$$(\tilde{a}_n^I, \tilde{a}_n^Q) = \sqrt{\frac{M \cdot E_s}{\sum_{i=1}^M [(a_n^I)^2 + (a_n^Q)^2]}} (a_n^I, a_n^Q)$$

coordonnées, espace du signal (pointing to  $\tilde{a}_n^I, \tilde{a}_n^Q$ )

coordonnées, espace I/Q (pointing to  $a_n^I, a_n^Q$ )

**QAM cas rectangulaire (carrée)  $M=L^2$** 

$$P_e = 2 \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{M}} \right) Q \left( \sqrt{\frac{3 \log_2 M}{(M-1)} \frac{E_b}{N_0}} \right) \quad d_{\min} = \sqrt{\frac{6 \log_2 L}{L^2 - 1}}$$

**Borne d'union**

$$P_e \approx \frac{2K}{M} Q \left( \frac{D_{\min}}{\sqrt{2N_0}} \right) = \frac{2K}{M} Q \left( d_{\min} \sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right)$$

 $K$  est le nombre des paires des signaux séparés par la distance minimale  $D_{\min}$ **Distance minimale** dans l'espace du signal

$$D_{\min} = \min_{i \neq k} \|\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_k\| \quad \text{et} \quad d_{\min} = \frac{D_{\min}}{\sqrt{2E_b}}$$

$$P_e(BPSK) = Q \left( \sqrt{\frac{2E_b}{N_0}} \right)$$

$$P_e(OOK) = Q \left( \sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right)$$

$$P_e(QPSK) \approx 2Q \left( \sqrt{\frac{2E_b}{N_0}} \right)$$

**Perte par rapport à QPSK**

$$d_{\min} = \sqrt{x} \sqrt{2} \quad \text{perte} = -10 \log_{10} x$$

**Pour une modulation orthogonale**

$$P_e(\text{bit}) = P_b = P_e(\text{symbol}) \frac{M/2}{M-1}$$

**Pour une modulation non-orthogonale avec codage de gray**

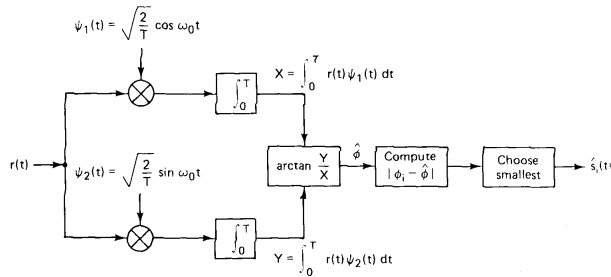
$$P_e(\text{bit}) = P_b = \frac{P_e(\text{symbol})}{\log_2 M}$$

**Efficacité spectrale**

$$\eta = \frac{R_b}{W} = \frac{1}{T_b} \frac{1}{W} \text{ bits/s}$$

**MPSK cohérent**

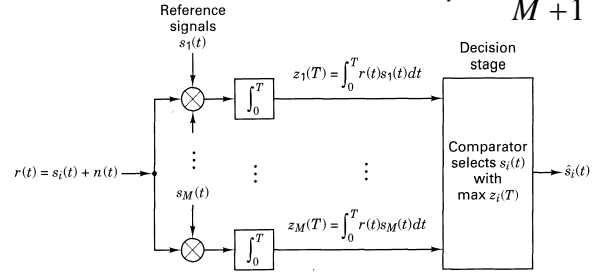
$$\eta = \log_2 M^\dagger$$



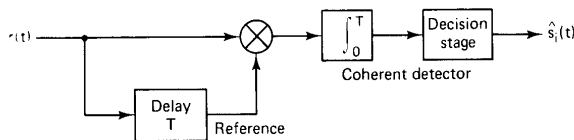
$$P_e(M) \approx 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}} \sin \frac{\pi}{M}\right) = 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_b \log_2 M}{N_0}} \sin \frac{\pi}{M}\right)$$

**MFSK cohérent**

$$\eta = \frac{2 \log_2 M}{M+1}^\dagger$$



$$P_e = (M-1)Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) = (M-1)Q\left(\sqrt{\frac{E_b \log_2 M}{N_0}}\right)$$

Séparation minimale  $1/2T_s$ **DPSK incohérent**

~1 dB de perte entre DPSK et BPSK

$$P_e = \frac{1}{2} e^{-E_b/N_0}$$

**Relations trigonométriques**

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - \sin^2 \theta \quad \tan \theta = \sin \theta / \cos \theta$$

**Processus Gram Schmidt**

$$\psi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{E_1}} s_1(t) \text{ où } E_1 \triangleq \int_0^T s_1^2(t) dt$$

$$\theta_2(t) \triangleq s_2(t) - \langle s_2(t), \psi_1(t) \rangle \psi_1(t)$$

$$E_2 \triangleq \int_0^T \theta_2^2(t) dt \quad \psi_2(t) = \frac{\theta_2(t)}{\sqrt{E_2}}$$

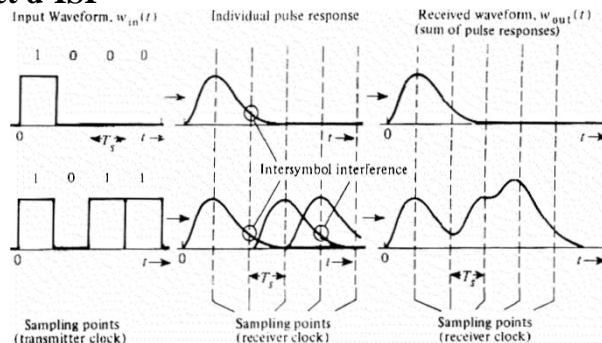
$$i. \quad \theta_i(t) = s_i(t) - \sum_{k=1}^{i-1} \langle s_i(t), \psi_k(t) \rangle \psi_k(t)$$

$$E_i \triangleq \int_0^T \theta_i^2(t) dt \quad \psi_i(t) = \frac{\theta_i(t)}{\sqrt{E_i}}$$

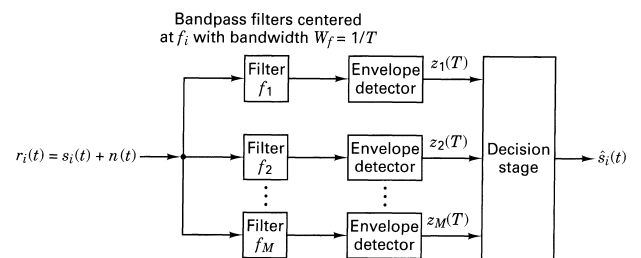
**Loi de Shannon**

$$C = W \log_2(1 + SNR) \quad SNR = \frac{E_b}{N_0} \frac{R_b}{W}$$

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{W}{C} (2^{C/W} - 1) \quad \frac{C}{W} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{E_b}{N_0} \rightarrow -1.6 \text{ dB}$$

**L'effet d'ISI****MFSK incohérent**

$$\eta = \frac{\log_2 M}{M}^\dagger$$



$$P_e(BFSK) = \frac{1}{2} e^{-E_b/2N_0}$$

~1 dB de perte entre BFSK cohérente et incohérente

Séparation minimale  $1/T_s$ 

† en supposant une impulsion Nyquist idéale

