1997 Mini-test 1 - *Solutions*

Problème 1 *(1 point sur 5)*

a) Quelles sont les coefficients complexes de Fourier pour la fonction suivante?

$$1+4\sin 2\pi t-2\cos 4\pi t$$

Il y a un seul candidat possible pour la fréquence fondamentale: $\omega_0=2\pi$. Donc pour trouver les coefficients de Fourier par inspection, il faut simplement écrire le cosinus et sinus dans leurs formes complexes.

$$\begin{aligned}
&1+4\sin 2\pi t-2\cos 4\pi t\\
&=1+4\frac{1}{2j}\left(e^{j2\pi t}-e^{-j2\pi t}\right)-2\frac{1}{2}\left(e^{j4\pi t}+e^{-j4\pi t}\right)\\
&=1+\frac{2}{j}\left(e^{j2\pi t}-e^{-j2\pi t}\right)-\left(e^{j4\pi t}+e^{-j4\pi t}\right)\\
&=1-2je^{j2\pi t}+2je^{-j2\pi t}-e^{j4\pi t}-e^{-j4\pi t}\\
&=F(0)+F(1)e^{j2\pi t}+F(-1)e^{-j2\pi t}+F(2)e^{j4\pi t}+F(-2)e^{-j4\pi t}
\end{aligned}$$

4. $F(0)=1\quad F(1)=-2j\quad F(-1)=2j\quad F(2)=-1\quad F(-2)=-1$

b) Quelle est la puissance présente dans la première harmonique?

La théorème de Parseval nous donne l'expression suivante pour la puissance présente dans la *n*-ième harmonique

$$P(n)=|F(n)|^2+|F(-n)|^2$$

Même sans avoir la bonne réponse pour partie **a)**, on peut voir dans les quatre réponses possibles que les modules de la première harmonique sont toujours les mêmes.

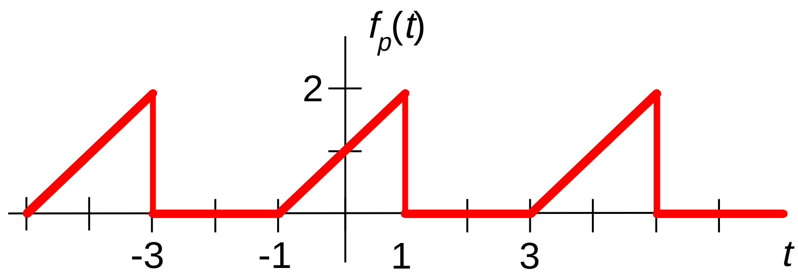
$$\begin{aligned}
P(1)&=|F(1)|^2+|F(-1)|^2\\
&=|-2j|^2+|2j|^2=4+4=8
\end{aligned}$$

Problème 2 *(1 point sur 5)*

1. $f_p(t)$ est une fonction réelle, donc on sait que $F^*(n)=F(-n)$ est **VRAI**.
2. $f_p(t)$ est une fonction réelle, donc on sait que « $A(n)$ est impaire » est **FAUX** parce que elle est paire.

3. $f_p(t)$ est une fonction paire, donc on sait que $F(n)$ est imaginaire pure est **FAUX**, parce que les coefficients sont réelles pour $f_p(t)$ paire.
4. $f_p(t)$ est une fonction paire, donc on sait que $B(n) = 0 \quad \forall n$ est **VRAI**, parce que les coefficients sont réelles pour $f_p(t)$ paire.

Problème 3 *(3 points sur 5)*



$$f_p(t) = \begin{cases} 0 & -2 < t < -1 \\ t+1 & -1 < t < 1 \\ 0 & 1 < t < 2 \end{cases} \qquad f_p(t+4) = f_p(t)$$

a) *1 point*

Quelle est l'expression analytique de ***la partie impaire*** de cette fonction périodique? Quelle est la période fondamentale et la fréquence fondamentale de ***la partie impaire*** de cette fonction périodique?

La partie impaire d'une fonction est donné par

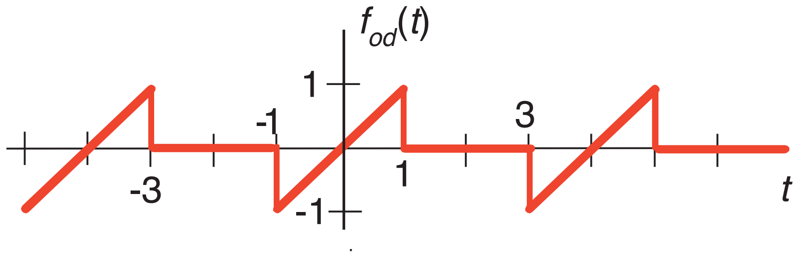
$$f_{od}(t) = \frac{1}{2}\left(f_p(t) - f_p(-t)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\begin{cases} 0 & -2 < t < -1 \\ t+1 & -1 < t < 1 \\ 0 & 1 < t < 2 \end{cases} - \frac{1}{2}\begin{cases} 0 & -2 < -t < -1 \\ -t+1 & -1 < -t < 1 \\ 0 & 1 < -t < 2 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{cases} 0 & -2 < t < -1 \\ t+1 & -1 < t < 1 \\ 0 & 1 < t < 2 \end{cases} - \frac{1}{2}\begin{cases} 0 & 1 < t < 2 \\ -t+1 & -1 < t < 1 \\ 0 & -2 < t < -1 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{cases} 0 & -2 < t < -1 \\ 2t & -1 < t < 1 \\ 0 & 1 < t < 2 \end{cases} = \begin{cases} 0 & -2 < t < -1 \\ t & -1 < t < 1 \\ 0 & 1 < t < 2 \end{cases}$$

Le graphique de la partie impaire est



La période ne change pas, elle est encore T_0=4. Donc l'expression analytique est

$$f_{od}(t)=\begin{cases}0 & -2<t<-1\\ t & -1<t<1\\ 0 & 1<t<2\end{cases} \qquad f_{od}(t)=f_{od}(t+4)$$

b) *2 points*

Quelles sont les coefficients complexes de Fourier pour ***la partie impaire*** de cette fonction périodique?

- On commence avec *n=0*.

$$F_{od}(0)=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f_{od}(t)dt=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1} tdt=\left.\frac{t^2}{8}\right|_{-1}^{1}=0$$

- Pour les autres valeurs de *n*:

$$\begin{aligned}F_{od}(n)&=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1} te^{-jn\pi t/2}dt\\
&=\left.\frac{te^{-jn\pi t/2}}{-4jn\pi/2}\right|_{-1}^{1}+\frac{1}{4jn\pi/2}\int_{-1}^{1}e^{-jn\pi t/2}dt\\
&=\frac{\left(e^{-jn\pi/2}-(-1)\cdot e^{jn\pi/2}\right)}{-2jn\pi}-\frac{1}{j^2n^2\pi^2}\left.e^{-jn\pi t/2}\right|_{-1}^{1}\\
&=\frac{j}{n\pi}\frac{\left(e^{jn\pi/2}+e^{-jn\pi/2}\right)}{2}+\frac{1}{n^2\pi^2}\left[e^{-jn\pi/2}-e^{jn\pi/2}\right]\\
&=\frac{j}{n\pi}\cos(n\pi/2)-\frac{2j}{n^2\pi^2}\sin(n\pi/2)\end{aligned}$$

Pour n pair on a

$$\cos(n\pi / 2) = (-1)^{n/2} \qquad \sin(n\pi / 2) = 0$$

Pour n impair on a

$$\cos(n\pi / 2) = 0 \qquad \sin(n\pi / 2) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}$$

Donc les coefficients sont

$$F_{od}(n) = \begin{cases} \dfrac{j}{n\pi}(-1)^{n/2} & n \text{ paire} \\ 0 & n = 0 \\ \dfrac{2j}{n^2\pi^2}(-1)^{(n+1)/2} & n \text{ impaire} \end{cases}$$

On peut voir en tout cas que les coefficients sont entièrement imaginaires, comme prevue pour une fonction impaire.