Université Laval
Professeur: Leslie A. Rusch

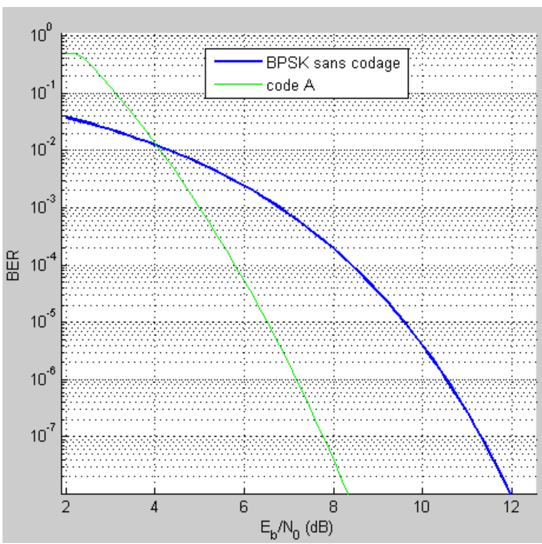
Département de génie électrique
et de génie informatique

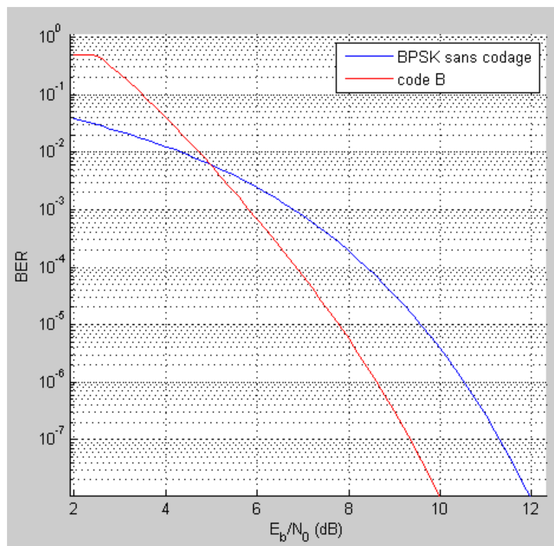
GEL4200: Communications numériques
2016 Examen final

Mercredi le 22 avril 2016; Durée: 11h30 à 13h20
Documentation fournie; une calculatrice permise

Problème 1 (10 points sur 100)

Voici les courbes de probabilité d'erreur (BER) par bit vs le rapport Eb/N0 pour la transmission BPSK. Le graphique à droit présente les courbes pour le BER sans codage, avec un code convolutif A. Le graphique à gauche présente les courbes pour le BER sans codage, avec un ***autre*** code convolutif B.





A. (5 points) L'un des codes convolutifs a une longueur de contraint de K = 4 et l'autre K = 7. Indiquez le quel code (A ou B) a K = 7 et justifiez votre choix.

B. (5 points) Quelle est la définition de seuil de codage (FEC threshold)? Identifier le seul de codage pour le code A et le code B.

.

Problème 2 (20 points sur 100)

Voici les équations de parité pour un code en bloc.

$$p_1 = m_1 + m_2 + m_4$$
$$p_2 = m_1 + m_3 + m_4$$
$$p_3 = m_1 + m_2 + m_3$$
$$p_4 = m_2 + m_3 + m_4$$

A. (3 points) Trouvez *n*, la longueur des mots de codes, *k*, la longueur des messages de données, et *r,* le taux de code.

B. (8 points) Donnez la matrice génératrice pour un code systématique.

C. (9 points) Trouvez la distance minimale du code.

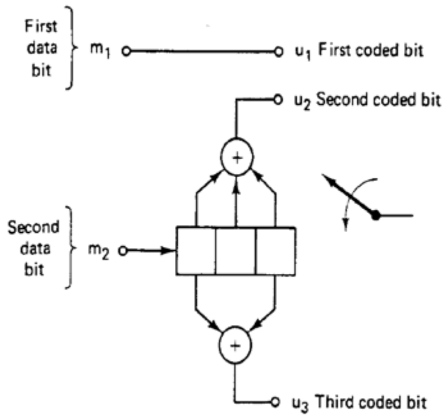
Problème 3 (25 points sur 100)

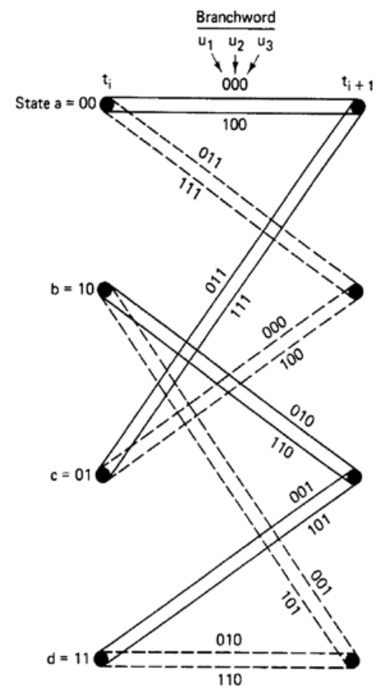
A. (10 points) Pourquoi la connaissance du canal est-elle requise pour l'égalisation à maximum de vraisemblance (MLSE)? Comment les informations de canal sont-elles exploitées?

B. (15 points) Contraster l'égaliseur « zero forcing » et l'égaliseur à erreur quadratique minimale. Comment sont-ils semblables? Comment sont-ils différents? Quand sont-ils équivalents? Quel égaliseur est le plus performant?

Problème 4 (25 points sur 100)

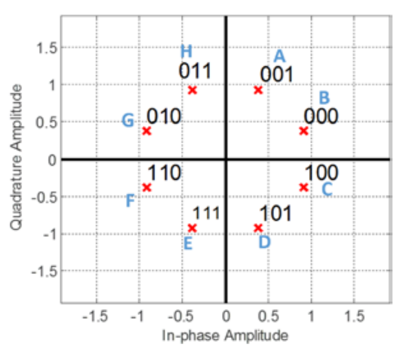
Voici un encodeur TCM.



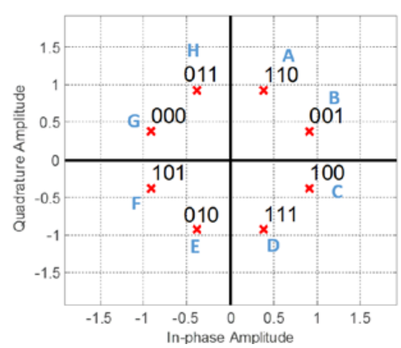


A. (10 points) En supposant que nous commençons à l'état a, trouvez la sortie de l'encodeur pour une entrée de 00 11 01 10 00

B. (5 points) Choisir la meilleure correspondance entre les mots de codes et les symboles de 8PSK. Justifiez votre choix.



Option 1

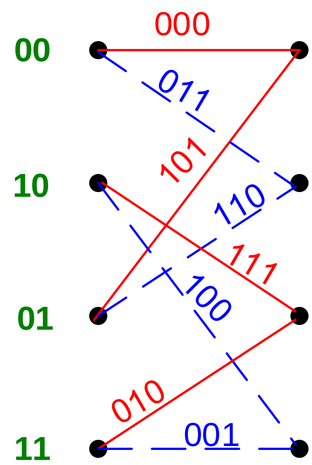


Option 2

C. (10 points) En utilisant l'option choisi en partie 4B, trouvez la séquence de symboles (A, B etc.) transmise pour une entrée de 00 11 01 10 00.

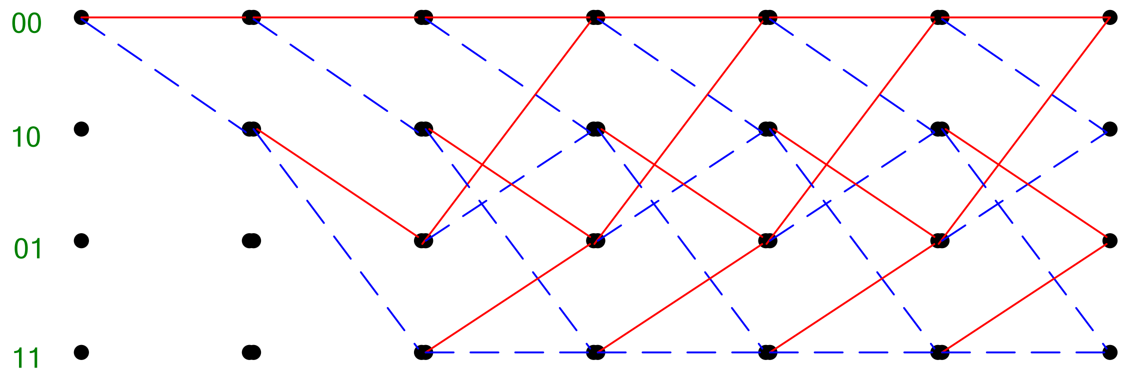
Problème 5 (20 points sur 100)

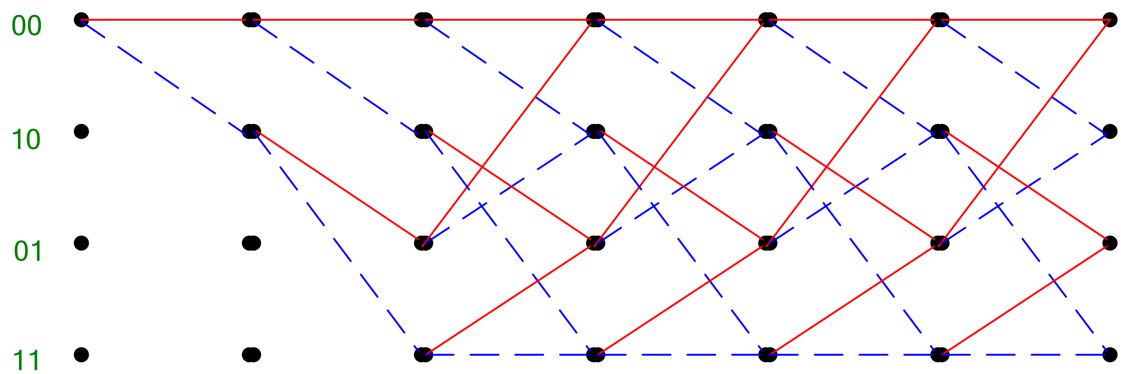
Considérons le treillis d'encodage suivant pour un code convolutif.

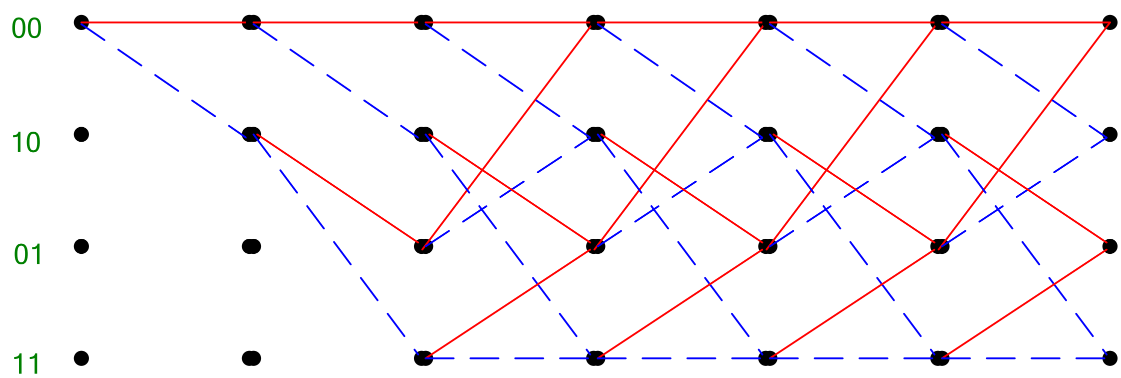


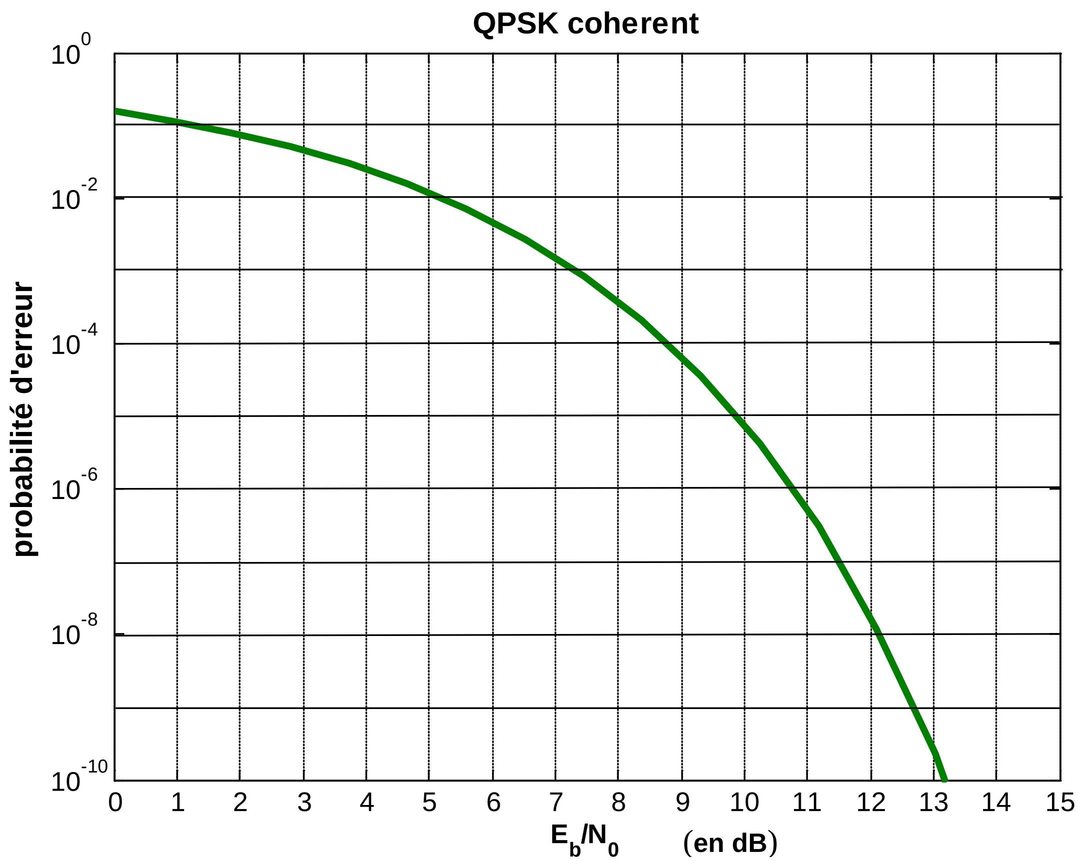
Trouvez la distance libre d_f du code convolutif en supposant que les décisions sont fermes. Combien de chemins y a-t-il à cette distance minimale?

SVP utilisez les feuilles de treillis de décodage fournies. Mettez ces feuilles dans votre cahier bleu.

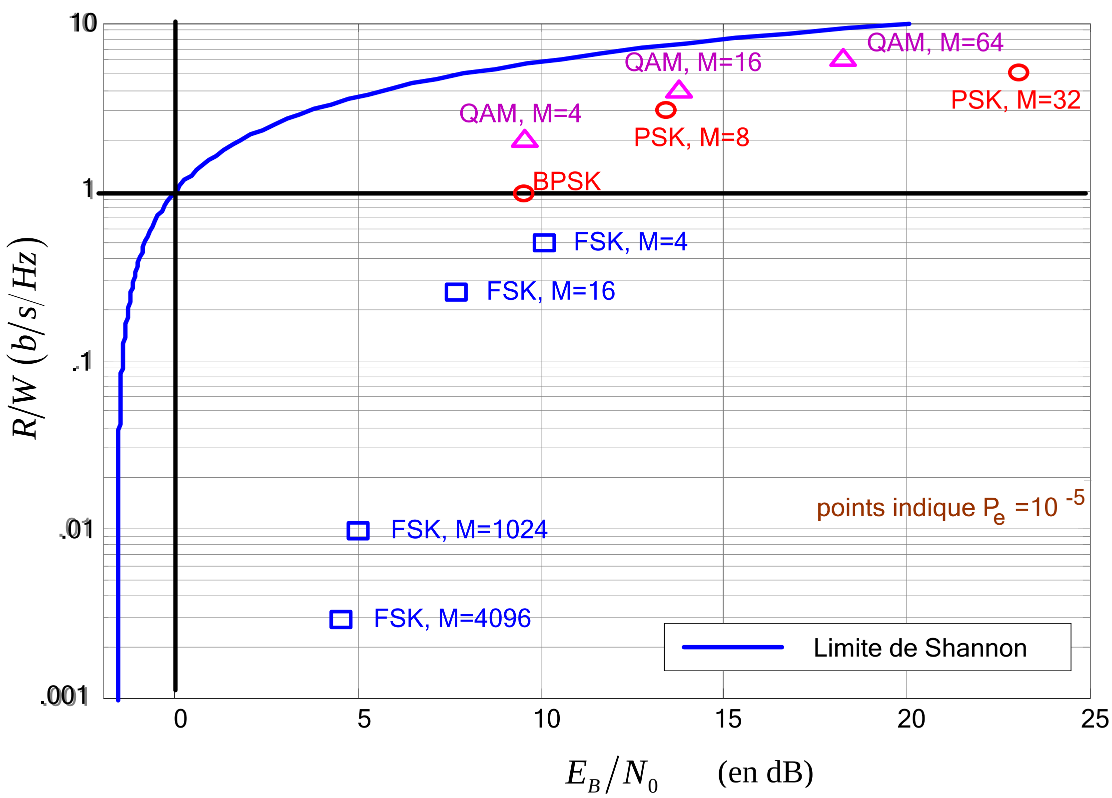

00
10
01
11


00
10
01
11

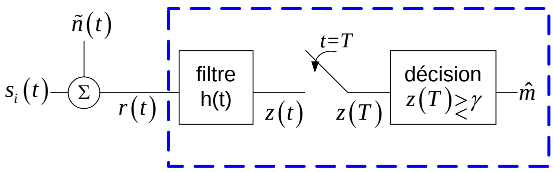

00
10
01
11



Plan de l'efficacité spectrale (Bandwidth Efficiency Plane)



Récepteur d'échantillonnage



MAP: i qui maximise $p(z|s_i)\,p(s_i)$

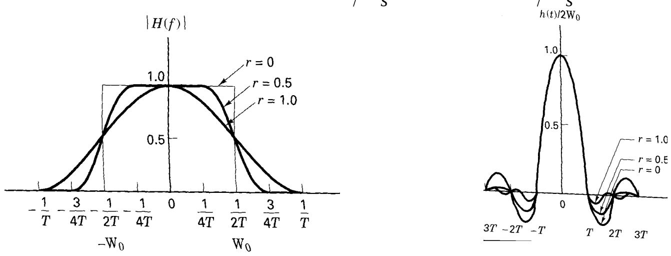
i qui minimise $\left\|\mathbf{r}-\mathbf{s}_i\right\|^2 - N_0 \ln P(\mathbf{s}_i)$

$P(\mathbf{s}_i) =$ probabilité a priori de symbole $\mathbf{s}_i$

ML: i qui maximise $p(z|s_i)$

i qui minimise $\left\|\mathbf{r}-\mathbf{s}_i\right\|^2$

Raised cosine $v(t) = \dfrac{\sin(\pi t/T_s)}{\pi t/T_s}\dfrac{\cos(r\pi t/T_s)}{1-4r^2t^2/T_s^2}$



Énergie moyenne

$$E_{moy} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\left\|\mathbf{s}_i\right\|^2 = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\left[\text{énergie du signal } i\right]$$

Énergie par bit v. énergie par symbole

$$E_b \log_2 M = E_s$$

QAM $\eta = \log_2 M$ †

Conversion de l'espace I/Q vers espace du signal

$$\left(\tilde{a}_n^I,\tilde{a}_n^Q\right) = \sqrt{\frac{M\cdot E_s}{\sum_{i=1}^{M}\left[\left(a_n^I\right)^2+\left(a_n^Q\right)^2\right]}}\left(a_n^I,a_n^Q\right)$$

coordonnées, espace du signal

coordonnées, espace I/Q

cas rectangulaire (carrée) $M=L^2$

$$P_e = 2\left(1-\frac{1}{\sqrt{M}}\right)Q\left(\sqrt{\frac{3\log_2 M}{(M-1)}\frac{E_b}{N_0}}\right) \qquad d_{\min} = \sqrt{\frac{6\log_2 L}{L^2-1}}$$

Borne d'union

$$P_e \approx \frac{2K}{M}Q\left(\frac{D_{\min}}{\sqrt{2N_0}}\right) = \frac{2K}{M}Q\left(d_{\min}\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

K est le nombre des paires des signaux séparés par la distance minimale D_{min}

Distance minimale dans l'espace du signal

$$D_{\min} = \min_{i\neq k}\left\|\mathbf{s}_i-\mathbf{s}_k\right\| \text{ et } d_{\min} = \frac{D_{\min}}{\sqrt{2E_b}}$$

$$P_e(BPSK) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

$$P_e(OOK) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

$$P_e(QPSK) \approx 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

Perte par rapport à QPSK

$$d_{\min} = \sqrt{x}\sqrt{2} \qquad \text{perte} = -10\log_{10} x$$

Pour une modulation orthogonale

$$P_e(bit) = P_b = P_e(symbol)\frac{M/2}{M-1}$$

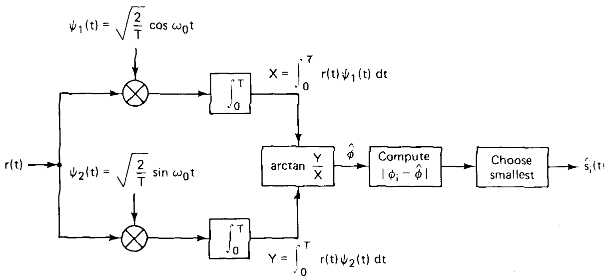
Pour une modulation non-orthogonale avec codage de gray

$$P_e(bit) = P_b = \frac{P_e(symbol)}{\log_2 M}$$

Efficacité spectrale

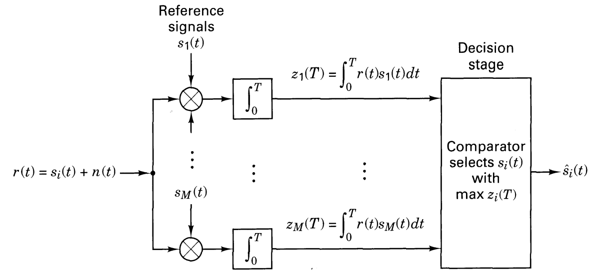
$$\eta = \frac{R_b}{W} = \frac{1}{T_b}\frac{1}{W}\text{ bits/s/Hz}$$

MPSK cohérent $\eta = \log_2 M$ †



$$P_e(M) \approx 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}} \sin\frac{\pi}{M}\right)$$
$$= 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_b \log_2 M}{N_0}} \sin\frac{\pi}{M}\right)$$

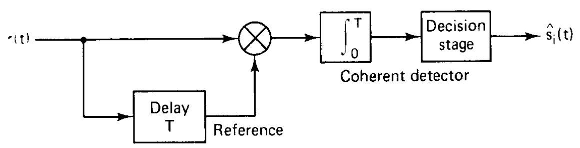
MFSK cohérent $\eta = \dfrac{2\log_2 M}{M+1}$ †



$$P_e = (M-1)Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) = (M-1)Q\left(\sqrt{\frac{E_b \log_2 M}{N_0}}\right)$$

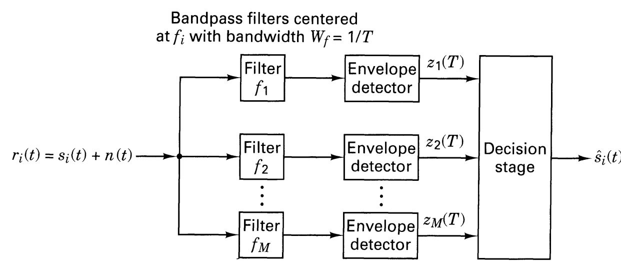
Séparation minimale $1/2T_s$

DPSK incohérent $P_e = \dfrac{1}{2} e^{-E_b/N_0}$



~1 dB de perte entre DPSK et BPSK

MFSK incohérent $\eta = \dfrac{\log_2 M}{M}$ †



$$P_e(BFSK) = \frac{1}{2} e^{-E_b/2N_0}$$

~1 dB de perte BFSK cohérente vs. incohérente

Séparation minimale $1/T_s$

Loi de Shannon

$$C = W \log_2(1 + SNR) \qquad SNR = \frac{E_b}{N_0}\eta$$

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{W}{C}\left(2^{C/W} - 1\right) \qquad \frac{C}{W} \to 0 \;\Rightarrow\; \frac{E_b}{N_0} \to -1.6dB$$

Relations trigonométriques

θ	$\cos\theta$	$\sin\theta$	$\tan\theta$
0	1	0	0
$\pi/8$	.85	.38	.41
$\pi/4$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	1
$\pi/3$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}$
$\pi/2$	0	1	∞

$$\tan(y) = x \Leftrightarrow y = \arctan x + k\pi$$

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \sin\beta + \cos\alpha\cos\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

Processus Gram Schmidt

$$\psi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{E_1}} s_1(t) \text{ où } E_1 = \int_0^T s_1^2(t)\,dt$$

$$\theta_2(t) = s_2(t) - \langle s_2(t), \psi_1(t)\rangle \psi_1(t)$$

$$E_2 = \int_0^T \theta_2^2(t)\,dt \qquad \psi_2(t) = \frac{\theta_2(t)}{\sqrt{E_2}}$$

$$i. \quad \theta_i(t) = s_i(t) - \sum_{k=1}^{i-1} \langle s_i(t), \psi_k(t)\rangle \psi_k(t)$$

$$E_i = \int_0^T \theta_i^2(t)\,dt \qquad \psi_i(t) = \frac{\theta_i(t)}{\sqrt{E_i}}$$

† en supposant une impulsion Nyquist idéale

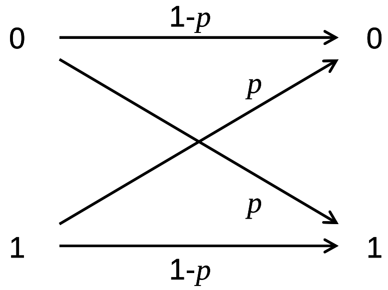
Corrélation croisée

$$z_{ij} \triangleq \int_0^T s_j(t) s_i(t)\, dt$$

Matrices de Hadamard

$$H_{n+1} = \begin{bmatrix} H_n & H_n \\ H_n & \bar{H}_n \end{bmatrix}$$

Le canal binaire symétrique (BSC)



BPSK avec AWGN: $p = Q\left(\sqrt{2E_b/N_0}\right)$

Codes en bloc

m = message à encoder, **u** = mot de code généré

$$\mathbf{G} = [\mathbf{P} \mid \mathbf{I_k}] \qquad \mathbf{U} = \mathbf{mG}$$

$$\mathbf{H} = [\mathbf{I_{n\text{-}k}} \mid \mathbf{P}^T] \qquad \mathbf{S} = \mathbf{rH}^T$$

t = # d'erreurs qui peuvent être corrigés

$$t = \left\lfloor \frac{d_{\min} - 1}{2} \right\rfloor$$

Code Hamming (n,k)=(2^m-1,2^m-1-m)

Distance de Hamming

d(**u**,**v**) = # de positions de bits avec des valeurs différents dans les deux vecteurs **u** et **v**

Distance minimale

$$\min_{i,j} d(\mathbf{u}_j, \mathbf{v}_j) = \min_{j>2} \mathrm{w}(\mathbf{u}_j)$$

Probabilité d'erreur de bit p

Probabilité d'avoir plus que t erreurs de bits parmi un block de N bits

$$\sum_{k=t+1}^{N} \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} \approx \binom{N}{t+1} p^{t+1} (1-p)^{N-t-1}$$

$$\binom{N}{k} \equiv \frac{N!}{k!(N-k)!}$$

Tableau Standard

- Première rangé – mots de codes valides
- Première colonne – erreurs corrigibles
- Tous les 2^n mots de codes possibles sont inclus dans la table
- Il n'y a pas de répétition des mots de code

Corriger une erreur

1. Détecter l'erreur $\mathbf{S} = \mathbf{rH^T} \neq 0 \Rightarrow$ erreur v
2. Identifier la rangé avec $\mathbf{e_j H^T} = \mathbf{rH^T}$

   i.e. le syndrome identifie le coset
3. Corriger l'erreur en calculant $\mathbf{U} = \mathbf{r} + \mathbf{e_j}$

(le mot de code dans la colonne de tableau standard où on trouve)

Codes convolutifs

Exemple: $k=1,\ n=2,\ K=3$

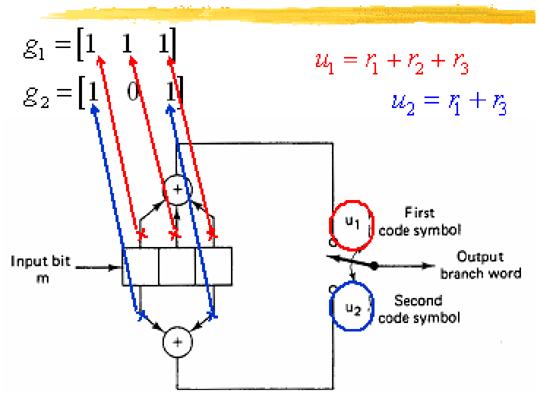
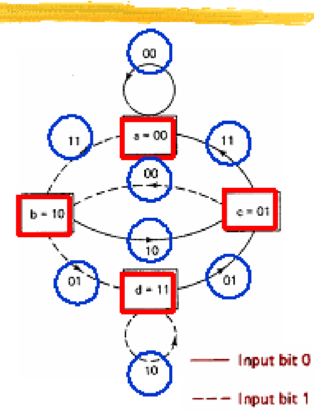


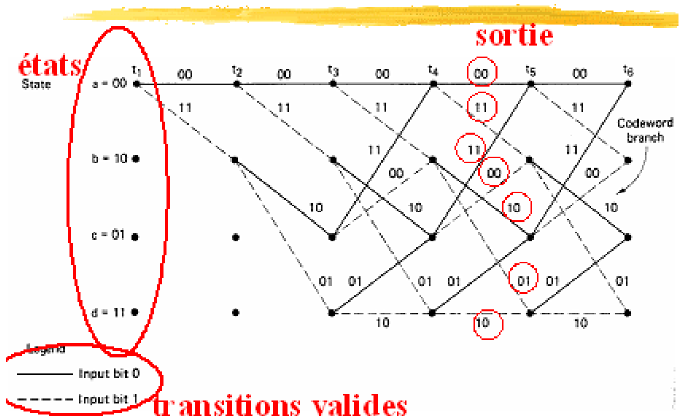
Diagramme de l'état

- Fixer les $2^{K\text{-}1}$ états
- Établir les transitions valides
- Générer les codes pour chaque transition

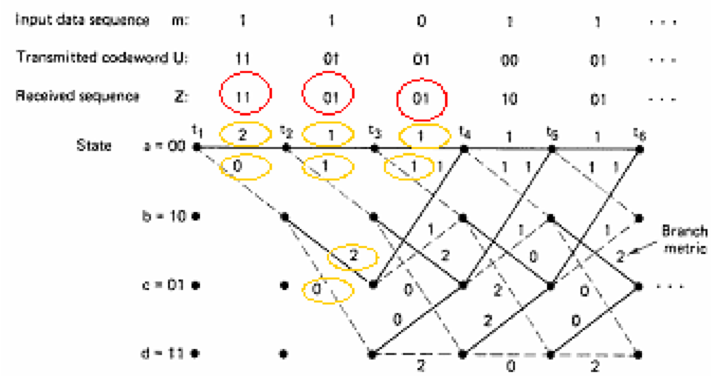
$$g_1 = [1 \quad 1 \quad 1]$$
$$g_2 = [1 \quad 0 \quad 1]$$



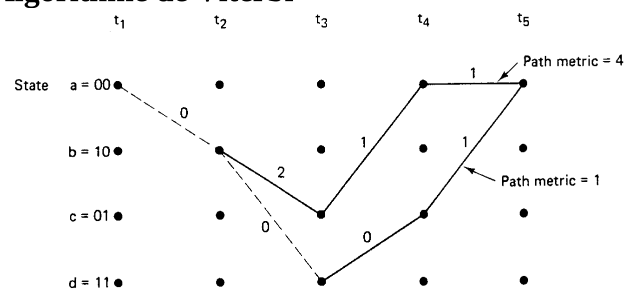
Treillis



Algorithme de Viterbi



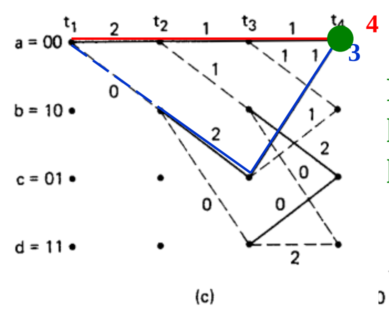
Algorithme de Viterbi



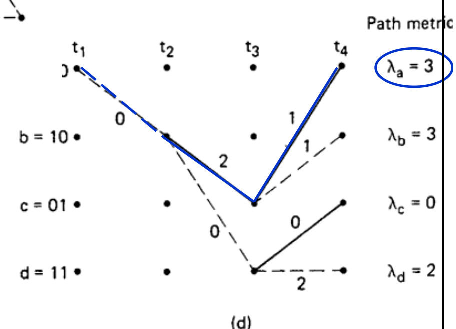
Deux métriques $dist(z_i, u_i)$

- Distance de Hamming
  - Pour les décisions fermes
  - $dist(\underline{z}_i, \underline{u}_i) = \#$ de bits differents
- Distance euclidienne
  - Pour les décisions souples
  - $dist(\underline{z}_i, \underline{u}_i) = \underline{z}_i^T \cdot \underline{u}_i = \sqrt{(z_{i1} - u_{i1})^2 + \cdots + (z_{in} - u_{in})^2}$

Algorithme de Viterbi



Focus:
le point de terminaison – le chemin vient d'ou?



Chapitre 7

Gain de codage: $10\log_{10} d_f^2 \big/ d^2_{\text{min,sans codage}}$

Borne supérieur de gain de codage (en dB)

$10\log_{10} rd_f$ $\qquad$ r = taux de codage = k/n

Valeurs typiques

- Décisions
  - Ferme
  - Souples avec 3 bits de quantification
- Longueur de contraint : $3 \le K \le 9$
- Taux de code : $r \ge 1/3$
- Chemin maximale : $h \le 5K$

Distance libre = distance minimale = d_f

- Codes linéaires
  - distance équivalent a la distance entre la séquence de zéros et n'importe quelle autre séquence
- Procédure
  1. Commence en état a
  2. Finir en état a
  3. Trajet le plus court ⇒ longueur = distance libre

t = # d'erreurs qui peuvent être corrigés

$$t = \left\lfloor \frac{d_f - 1}{2} \right\rfloor$$

TCM

Taux de codage = 1/*n*

- distance locale

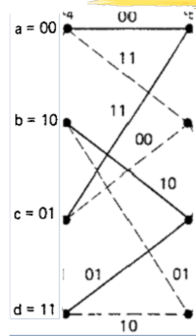
$$dist\left(\underline{u}_1,\underline{v}_1\right)=\sqrt{\left(u_{1_x}-v_{1_x}\right)^2+\left(u_{1_y}-v_{1_y}\right)^2}$$

- Définition de la distance globale
  (distance entre séquences,
  ou *SED square Euclidean distance*)

$$dist^2\left(U,V\right)=dist^2\left(\underline{u}_1,\underline{v}_1\right)+dist^2\left(\underline{u}_2,\underline{v}_2\right)+dist^2\left(\underline{u}_3,\underline{v}_3\right)+\cdots$$

pour le TCM et
les décisions souples

Exemple

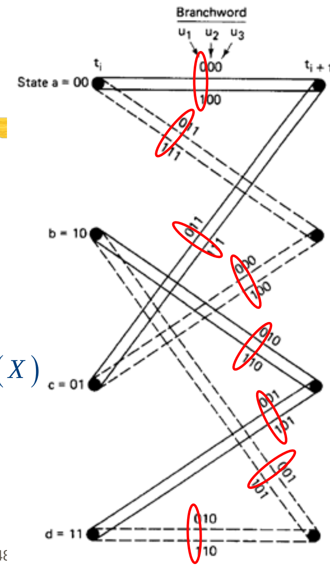


$u_1 = m_1$
(pas codé)

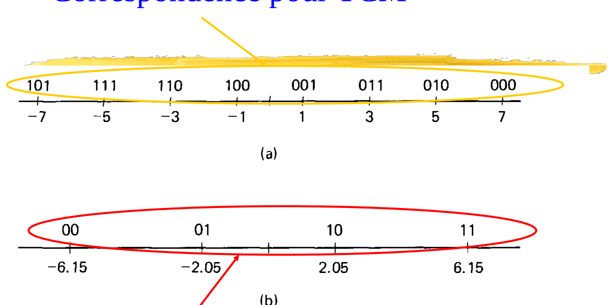
$u_2\left(X\right)=m_2\left(X\right)g_1\left(X\right)$
$u_3=m_2\left(X\right)g_2\left(X\right)$
codage convolutif

$g_1=\left[1 \quad 1 \quad 1\right]$
$g_2=\left[1 \quad 0 \quad 1\right]$

GEL10280/6448

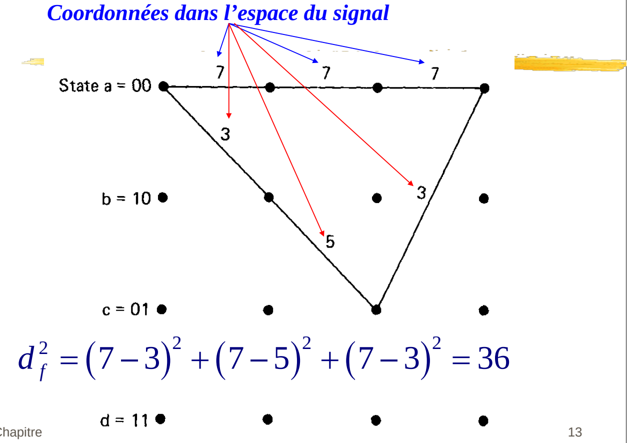


Correspondence pour TCM



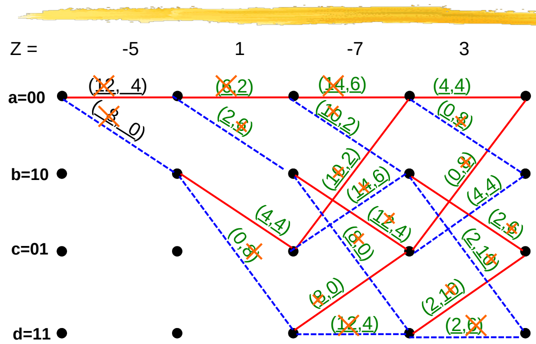
Correspondence de Gray

Coordonnées dans l'espace du signal

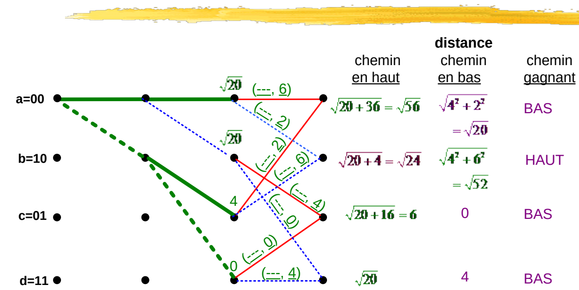


$$d_f^2=\left(7-3\right)^2+\left(7-5\right)^2+\left(7-3\right)^2=36$$

Calculer les distances locales



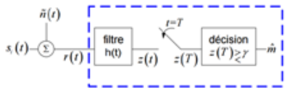
Calculer les distances globales *t*=3



Récepteur ML

- Sans ISI
  - examiner UN intervalle du symbole
  - choisir le plus proche

i qui minimise $\|\mathbf{r}-\mathbf{s}_i\|^2$



- Avec ISI
  - examiner une SÉQUENCE de symboles
  - séquence aussi longue que le mémoire du canal

$\{i(k)\}_{k=-L}^{0}$ qui minimise $\sqrt{\|\mathbf{r}(-LT)-\mathbf{s}_i\|^2 \cdots + \cdots \|\mathbf{r}(-kT)-\mathbf{s}_i\| \cdots + \cdots \|\mathbf{r}(0)-\mathbf{s}_i\|}$

seule décision retenue

Critère zéro ISI

- Entrée de l'égaliseur p_c (après le canal)
- Sortie

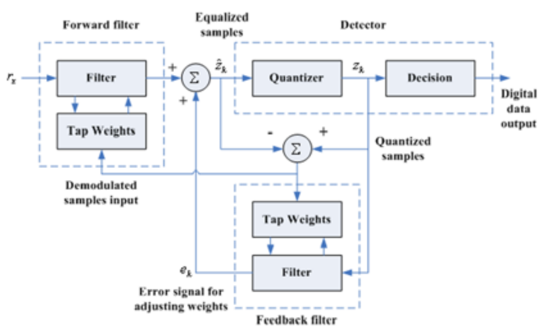
$$p_{\mathrm{eq}}(t) = \sum_{n=-N}^{N} \alpha_n p_c(t-n\Delta)$$

- Forcer zero ISI

$$p_{\mathrm{eq}}(mT) = \sum_{n=-N}^{N} \alpha_n p_c[(m-n)T]$$

$$= \begin{cases} 1, & m=0 \\ 0, & m\neq 0 \end{cases} \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm N$$

Egaliseur « decision feedback »



Chercher $\{\alpha\}$

$$[A] = [P_c]^{-1}[P_{\mathrm{eq}}] = [P_c]^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \text{ middle column of } [P_c]^{-1}$$

Critère MMSE

$$E\left\{[z(t)-d(t)]^2\right\} = \text{minimum}$$

$$z(t) = \sum_{n=-N}^{N} \alpha_n y(t-n\Delta)$$

Solution MMSE

$$E\left\{[z(t)-d(t)]^2\right\} = \text{minimum}$$

$$[R_{yy}][A]_{\mathrm{opt}} = [R_{yd}]$$

$$[A]_{\mathrm{opt}} = [R_{yy}]^{-1}[R_{yd}]$$

Bruit AWGN

- Largueur de bande $B=1/2T$ pour le signal

$$\sigma_N^2 = \frac{N_0}{2T}\sum_{j=-N}^{N} \alpha_j^2$$

- BPSK

$$Q\left(\sqrt{\frac{1}{\sum_j \alpha_j^2}\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

perte en rapport signal-à-bruit

DMT modulation par porteuse

- n_i bits dans la constellation pour porteuse i
- Taux de transmission $R_b = \sum_{i=1}^{N} n_i W_i$ bits/s
- Puissance totale divisé
  - Puissance P_j $\quad \sum_j P_j = P.$
- Trouver les $\{P_j\}$ qui maximise R_b

OFDM Temps et fréquence