2017 Mini-test 1 - *Solutions*

Problème 1

a) Quelle est la fréquence fondamentale ? $f(t) = 2 - \cos(3t) + \sin(2t)$

Nous avons deux candidates pour la fréquence fondamentale. Nous cherchons le plus grand commun diviseur (PGCD) pour identifier la fréquence fondamentale :

Diviseurs de 2 : 1, 2 Diviseurs de 3 : 1, 3

PGCD : 1

Donc la fréquence fondamentale est $\omega_0 = 1$

b) Quelles sont les coefficients complexes de Fourier pour la fonction suivante?

$$f(t) = 2 - \cos(3t) + \sin(2t)$$

On trouve les coefficients de Fourier par inspection, en écrivant le cosinus et sinus dans leurs formes complexes.

$$\begin{aligned}
&2 - \cos(3t) + \sin(2t) \\
&= 2 - \frac{1}{2}\left(e^{j3\pi t} + e^{-j3\pi t}\right) + \frac{1}{2j}\left(e^{j2\pi t} - e^{-j2\pi t}\right) \\
&= 2 - \frac{1}{2}\left(e^{j3\pi t} + e^{-j3\pi t}\right) - \frac{j}{2}\left(e^{j2\pi t} - e^{-j2\pi t}\right) \\
&= 2 - \frac{1}{2} je^{j3\pi t} - \frac{1}{2} je^{-j3\pi t} - \frac{j}{2} e^{j2\pi t} + \frac{j}{2} e^{-j2\pi t} \\
&= F(0) + F(3)e^{j3\pi t} + F(-3)e^{-j3\pi t} + F(2)e^{j2\pi t} + F(-2)e^{-j2\pi t}
\end{aligned}$$

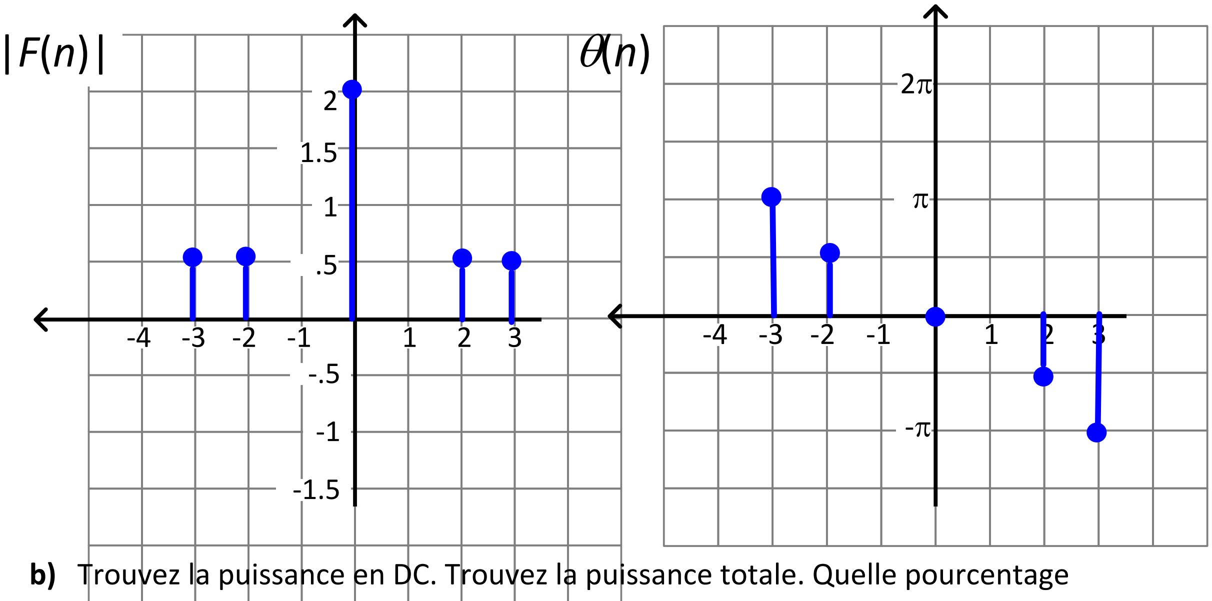
$$F(0) = 2 \quad F(2) = -\frac{j}{2} \quad F(-2) = \frac{j}{2} \quad F(3) = -\frac{1}{2} \quad F(-3) = -\frac{1}{2}$$

c) Donnez les graphiques du module des coefficients, $|F(n)|$ et la phase des coefficients, $\theta(n)$.

$$|F(0)| = |2| = 2 \quad |F(2)| = \left|-\frac{j}{2}\right| = \frac{1}{2} \quad |F(-2)| = \left|\frac{j}{2}\right| = \frac{1}{2} \quad |F(3)| = \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} \quad |F(-3)| = \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

$$\angle F(0) = \angle 2 = 0 \quad \angle F(2) = \angle(-j/2) = -\pi/2 \quad \angle F(-2) = \angle(j/2) = \pi/2$$

$$\angle F(3) = \angle(-1/2) = \pm\pi \quad \angle F(-3) = \angle(-1/2) = \pm\pi$$



b) Trouvez la puissance en DC. Trouvez la puissance totale. Quelle pourcentage de la puissance totale est en DC?

Le théorème de Parseval nous donne l'expression suivante pour la puissance présente dans la *n*-ième harmonique

$$P(n) = |F(n)|^2 + |F(-n)|^2$$

La puissance en DC est

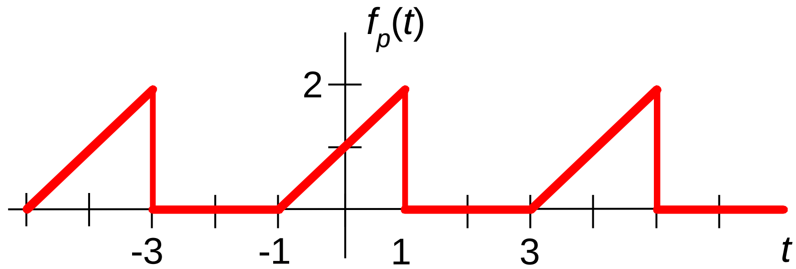
$$P(0) = |F(0)|^2 = 2^2 = 4$$

La puissance totale est

$$\begin{aligned} P &= |F(0)|^2 + |F(-2)|^2 + |F(2)|^2 + |F(-3)|^2 + |F(3)|^2 \\ &= 2^2 + (1/2)^2 + (1/2)^2 + (1/2)^2 + (1/2)^2 = 4 + 4(1/4) = 5 \end{aligned}$$

Le pourcentage de puissance à DC est 4/5 = 80%

Problème 3



$$f_p(t)=\begin{cases}0 & -2<t<-1\\ t+1 & -1<t<1\\ 0 & 1<t<2\end{cases}\qquad f_p(t+4)=f_p(t)$$

En utilisant le table d'intégrales :

$$F(n)=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}e^{-jn\pi t/2}dt+\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}te^{-jn\pi t/2}dt$$

$$=\left.\frac{e^{-jn\pi t/2}}{-4jn\pi/2}\right|_{-1}^{1}+\frac{1}{4}\left(\frac{t}{-jn\pi/2}-\frac{1}{(jn\pi/2)^2}\right)e^{-jn\pi t/2}\Big|_{-1}^{1}$$

$$=\frac{\left(e^{-jn\pi/2}-e^{jn\pi/2}\right)}{-2jn\pi}+\frac{1}{2n\pi}\left(-\frac{t}{j}+\frac{2}{n\pi}\right)e^{-jn\pi t/2}\Big|_{-1}^{1}$$

$$=\frac{1}{n\pi}\frac{\left(e^{jn\pi/2}-e^{-jn\pi/2}\right)}{2j}+\frac{1}{2n\pi}\left[\left(-\frac{1}{j}+\frac{2}{n\pi}\right)e^{-jn\pi/2}-\left(\frac{1}{j}+\frac{2}{n\pi}\right)e^{jn\pi/2}\right]$$

$$=\frac{1}{n\pi}\frac{\left(e^{jn\pi/2}-e^{-jn\pi/2}\right)}{2j}+\frac{1}{2n\pi}\left[-\frac{\left(e^{jn\pi/2}+e^{-jn\pi/2}\right)}{j}-\frac{2\left(e^{jn\pi/2}-e^{-jn\pi/2}\right)}{n\pi}\right]$$

$$=\frac{1}{n\pi}\sin(n\pi/2)+\frac{j}{n\pi}\cos(n\pi/2)-\frac{2j}{n^2\pi^2}\sin(n\pi/2)$$

Une autre démarche de simplification :

$$F(n)=\frac{1}{n\pi}\frac{\left(e^{jn\pi/2}-e^{-jn\pi/2}\right)}{2j}+\frac{1}{2n\pi}\left[-\frac{\left(e^{jn\pi/2}+e^{-jn\pi/2}\right)}{j}-\frac{2\left(e^{jn\pi/2}-e^{-jn\pi/2}\right)}{n\pi}\right]$$

$$=\frac{1}{2jn\pi}\left(\cancel{e^{jn\pi/2}}-e^{-jn\pi/2}-\cancel{e^{jn\pi/2}}-e^{-jn\pi/2}\right)-\frac{e^{jn\pi/2}-e^{-jn\pi/2}}{n^2\pi^2}$$

$$=\frac{je^{-jn\pi/2}}{n\pi}-\frac{2j}{n^2\pi^2}\sin(n\pi/2)$$

$$=\frac{j}{n\pi}\left[\cos(n\pi/2)-j\sin(n\pi/2)\right]-\frac{2j}{n^2\pi^2}\sin(n\pi/2)$$

En utilisant l'intégration par parties :

$$
\begin{aligned}
F(n) &= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} e^{-jn\pi t/2}dt + \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} te^{-jn\pi t/2}dt \\
&= \left.\frac{e^{-jn\pi t/2}}{-4\,jn\pi/2}\right|_{-1}^{1} + \left.\frac{te^{-jn\pi t/2}}{-4\,jn\pi/2}\right|_{-1}^{1} + \frac{1}{4\,jn\pi/2}\int_{-1}^{1} e^{-jn\pi t/2}dt \\
&= \frac{\left(e^{-jn\pi/2} - e^{jn\pi/2}\right)}{-2\,jn\pi} + \frac{\left(e^{-jn\pi/2} - (-1)\cdot e^{jn\pi/2}\right)}{-2\,jn\pi} - \left.\frac{1}{j^2 n^2\pi^2} e^{-jn\pi t/2}\right|_{-1}^{1} \\
&= \frac{1}{n\pi}\frac{\left(e^{jn\pi/2} - e^{-jn\pi/2}\right)}{2j} + \frac{j}{n\pi}\frac{\left(e^{jn\pi/2} + e^{-jn\pi/2}\right)}{2} + \frac{1}{n^2\pi^2}\left[e^{-jn\pi/2} - e^{jn\pi/2}\right] \\
&= \frac{1}{n\pi}\sin\left(n\pi/2\right) + \frac{j}{n\pi}\cos\left(n\pi/2\right) - \frac{2j}{n^2\pi^2}\sin\left(n\pi/2\right)
\end{aligned}
$$

Le coefficient à n = 0 est bien défini.

Pour n pair on a

$$\cos(n\pi/2) = (-1)^{n/2} \qquad \sin(n\pi/2) = 0$$

Pour n impair on a

$$\cos(n\pi/2) = 0 \qquad \sin(n\pi/2) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}$$

Donc les coefficients sont

$$
F(n) = \begin{cases}
\dfrac{j}{n\pi}(-1)^{n/2} & n \text{ paire} \\
\dfrac{1}{2} & n = 0 \\
\left[\dfrac{1}{n\pi} - \dfrac{2j}{n^2\pi^2}\right](-1)^{(n-1)/2} & n \text{ impaire}
\end{cases}
$$

La fonction est ni paire, ni impaire, et les coefficients sont complexes, comme prévue.