GEL19962 : Analyse des signaux

Mini-test 2 A2005 : Solutions

Département de génie électrique et de génie informatique

Problème 1 (3 pts)

a)

On demande à calculer graphiquement la convolution suivante :

$$rect(t) * (rect(t) + \delta_{T_s}(t))$$

$\delta_{T_s}(t)$ étant le peigne de dirac de période $T_s = 4$. En utilisant la propriété de distributivité de l'opération de convolution, on peut séparer le calcul en la somme de deux convolutions assez simples.

$$rect(t) * (rect(t) + \delta_{T_s}(t)) = rect(t) * rect(t) + rect(t) * \delta_{T_s}(t)$$

On a déja vu dans le cours que la convolution de deux rectangles donnait un triangle, donc :

$$rect(t) * rect(t) = tri(t)$$

D'autre part le résultat de la convulotion d'un rectangle avec un peigne de dirac est la fonction réctangle périodisée avec la période $T_s = 4$:

$$rect(t) * \delta_{T_s}(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} rect(t - nT_s)$$

Le resultat final de la convolution sera donc donné par la somme de la fonction triangle et la fonction rectangle périodisée. Cette somme peut être faite graphiquement comme montré dans la figure qui suit :

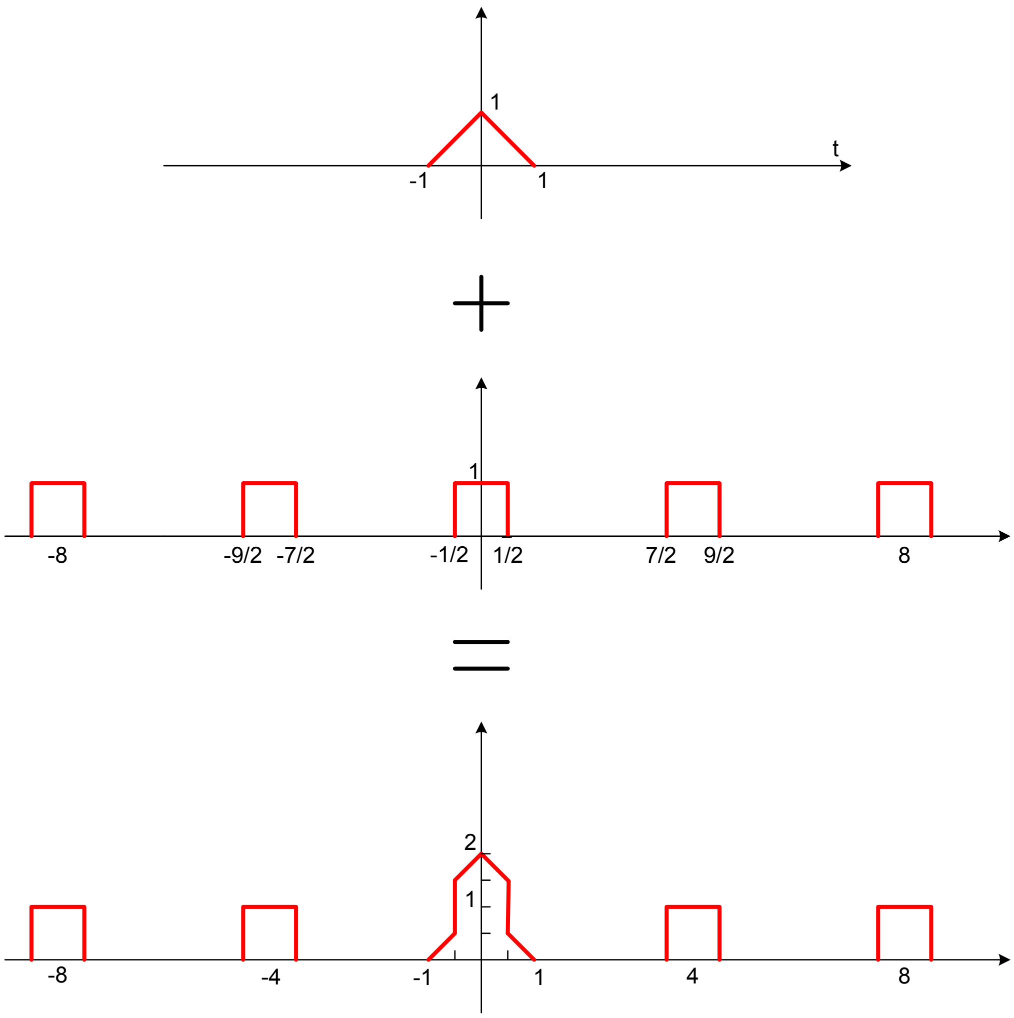

FIG. 1 – $rect(t) * (rect(t) + \delta_{T_s}(t))$.

Analytiquement, on déduit aussi le même résultat :

$$rect(t) * (rect(t) + \delta_{T_s}(t))$$

or

$$rect(t) * rect(t) = \begin{cases} 1+t & \text{pour} \quad -1 \leq \text{t} \leq 0 \\ 1-t & \text{pour} \quad 0 \leq \text{t} \leq 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

et

$$rect(t) * \delta_{T_s}(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} rect(t - nT_s)$$

Finalement, la somme s'exprime comme suit :

Pour chaque région:

1+t -1<t<-1/2
2+t. -1/2 < t < 0
2-t. 0<t<1/2
1-t. 1/2<t<1

$$rect(t) * (rect(t) + \delta_{T_s}(t)) = \begin{cases} 1+t & \text{pour} \quad -1 \leq \text{t} \leq -1/2 \\ 1+t & \text{pour} \quad -1/2 \leq \text{t} \leq 0 \\ 1+t & \text{pour} \quad 0 \leq \text{t} \leq 1/2 \\ 1+t & \text{pour} \quad 1/2 \leq \text{t} \leq 1 \\ \sum\limits_{-\infty, n\neq 0}^{+\infty} rect(t - nT_s) & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Ce qui correspond au résultat final obtenu graphiquement dans la figure précédente.

Problème 2 (1 pt)

a)

L'affirmation ici était que $f * g(t) = G(\omega) \times H(\omega)$. Il faut remarquer que la la convolution de deux fonctions dans le domaine temporel possède une transformée de Fourier qui est donnée par la multiplication des transformée de Fourier de chacune des fonctions. La convolution dans le domaine des temps devient une simple multiplication dans le domaine des fréquences. Attention, il faut faire une trnsformée de Fourier pour passer d'un domaine à l'autre.
Ainsi l'égalité de l'affirmation est erronée et l'énoncé est **FAUX**.

b)

On veut savoir si le filtre possédant la fonction de transfert $Sa(\omega/2)e^{j\omega}$ était un filtre causal ou non ?
Pour ce, il faut d'abord calculer la réponse impulsionnelle du filtre $h(t)$.
$h(t)$ est obtenu en calculant la transformée de Fourier inverse de $H(\omega)$. On sait que :
$Sa(\omega/2) \Leftrightarrow Rect(t)$
et par la propriété de translation
$Sa(\omega/2)e^{j\omega} \Leftrightarrow Rect(t+1)$
Ainsi la réponse impulsionnelle est $h(t) = Rect(t+1)$.
On voit clairement que la réponse impulsionnelle est non nulle pour les t négatifs.

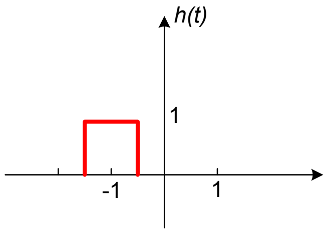

Fig. 2 – Réponse impulsionnelle $h(t)$.

Le filtre est donc non causal.
Donc l'énoncé est **FAUX**.

c)

L'affirmation est $x(t) \times \delta(t-a) = x(t-a)$.
On avait vu dans le cours $f(t) * \delta(t-\tau) = f(t-\tau)$. Donc si l'opération était la convolution l'affirmation serait vrai. Cependant l'opération utilisée dans l'affirmation est la multiplication.
Pour la multiplication on a plutôt (propriété de l'échantillonnage) :
$x(t) \times \delta(t-a) = x(a)$
L'énoncé est donc **FAUX**.

d)

$y(t) = h(t) * u(t)$.
$u(t)$ étant différent de $\delta(t)$ donc $y(t) \neq h(t)$.
L'énoncé est donc **FAUX**.

Problème 3 (1 pts)

a)

On voudrait connaître la sortie du système pour une entrée $sin(\omega_0 t)$ avec $\omega_0 = 3$. Il faut tout d'abord calculer la fonction de transfert $H(\omega)$ du filtre.

$$H(\omega) = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

La sortie est donnée par :

$$y(t) = |H(\omega_0)| \sin(\omega_0 t + Arg(H(\omega_0)))$$

Le module de la fonction de transfert $H(\omega)$ évalué à $\omega_0 = 3$ est :

$$|H(\omega_0)| = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (RC\omega_0)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (3)^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

L'argument est quant à lui donné par :

$$Arg(H(\omega_0)) = 0 - tg^{-1}\left(\frac{RC\omega_0}{1}\right) = -tg^{-1}(3) = -71.565°$$

Finalement, la sortie est :

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{\sqrt{10}} \sin(3t - tg^{-1}(3))}$$

b)

On sait que $Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$.
Pour $\omega = 1$ on a

$$Y(\omega = 1) = H(\omega = 1)X(\omega = 1) = \frac{1}{1+j} tri(\omega = 1)$$

or $tri(\omega = 1) = 0$, donc :

$$\boxed{Y(\omega = 1) = 0}$$