Département de génie électrique et de génie informatique Université Laval
Prof. : André Zaccarin

GEL-19964 – Signaux et systèmes discrets

Examen partiel #2

Vendredi le 17 novembre 2006 Durée: 8h30-10h20

Vous devez montrer vos calculs et justifier vos réponses. Une bonne réponse seule ne vaut aucun point.

Question 1 (25 pts)

Le signal à l'entrée d'un système linéaire et invariant, $x[n]$, a 1000 points ($0 \le n \le 999$). La réponse à l'impulsion du système, $h[n]$, a 50 points ($0 \le n \le 49$). Le signal $y[n]$ est la sortie du système.

a) Expliquez comment calculer $y[n]$ en utilisant des DFT et DFT inverse.

b) Le signal $g[n]$ est la DFT inverse de $G[k]$ où $G[k] = X[k]H[k]$, et où $X[k]$ et $H[k]$ sont les DFT sur 1000 points de $x[n]$ et $h[n]$.

Quels points de $y[n]$ ne se retrouvent pas dans le signal $g[n]$? Quels points du signal $x[n]$ faut-il utiliser pour calculer ces points manquants ?

Question 2 (20 pts)

On veut déterminer, par DFT, les composantes sinusoïdales d'un signal discret $x[n]$ tout en respectant les contraintes suivantes :

- on veut déterminer la fréquence des sinusoïdes avec une précision d'au moins 0.001 radians par échantillon.
- on veut minimiser le nombre de points du signal $x[n]$.

On sait aussi que la différence entre les fréquences de deux sinusoïdes voisines est plus grande que 0.01 radians par échantillon.

a) Donnez les valeurs des paramètres qu'il faut utiliser lors du calcul de la DFT.

b) Si on pondère le signal $x[n]$ avec une fenêtre de Hamming avant de calculer la DFT, est-ce que les valeurs des paramètres données en a) doivent changer ?

Question 3 (15 pts)

La fonction de transfert d'un système linéaire et invariant est

$$H(z) = \frac{1}{1+2z^{-2}}$$

Utilisez l'équation aux différences de ce système pour calculer les sept premiers points de la réponse à l'impulsion du système. Est-ce que le système est stable ?

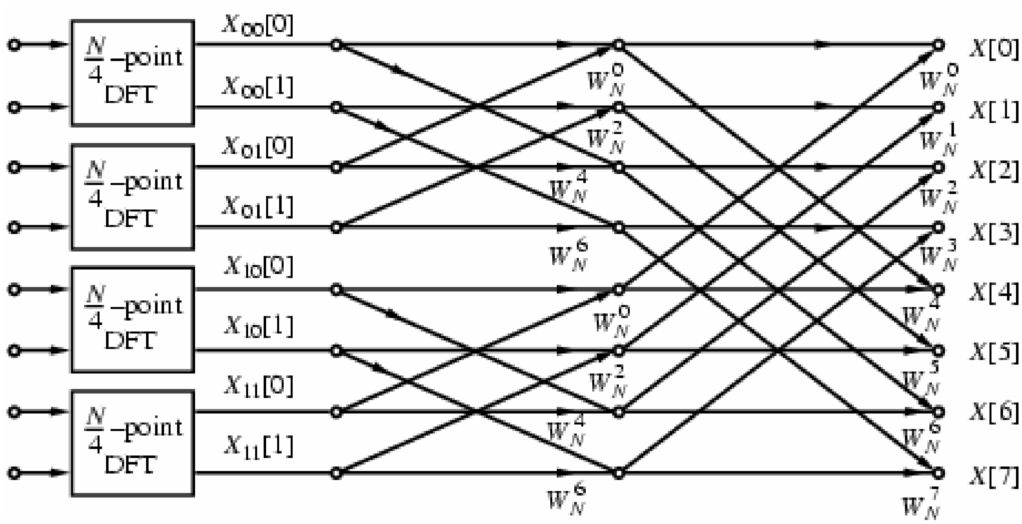
Question 4 (20 pts)

La réponse à l'impulsion d'un filtre est $h[n] = \{1,2,1\}$ pour $n = -1,0,1$.

On modifie le filtre pour qu'il élimine la composante à 60 Hz de signaux échantillonnés à $f_s = 360Hz$, tout en changeant le moins possible la réponse en fréquence aux autres fréquences. On veut que le filtre soit causal, qu'il demeure stable et qu'il soit réel (i.e. que ces coefficients soient réels).

Donnez la fonction de transfert du filtre modifié

Question 5 (20 pts) Répondez à **deux** des trois sous-questions



La figure ci-haut est une illustration de la FFT pour calculer la DFT d'un signal de 8 points.

a) Donnez l'ordre dans lequel les points du signal $x[n]$ doivent apparaître aux entrées du diagramme et expliquez votre réponse.   Note : le bit reversal n'explique pas le résultat, ce n'est qu'un algorithme qui permet de trouver l'ordre de ces points.

b) Donnez le contenu de la boîte de « N/4 point DFT » (ici N=8), i.e., montrez comment calculer les deux points de sa sortie à partir des deux points de son entrée, en utilisant le moins d'opérations (+, ×, etc.) possible.

c) Si le signal $x[n]$ est réel, il n'est pas nécessaire de conserver tous les points de $X[k]$. Quels sont les points qu'il faut conserver ? Comment peut-on ensuite retrouver les points qui ont été jetés ?

$$r_{xy}[l] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, y[n-l] \qquad\qquad y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n+kN]$$

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\omega n} \qquad\qquad x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{j\omega}\right) e^{j\omega n} d\omega$$

$$x^*[n] \leftrightarrow X^*\left(e^{-j\omega}\right) \qquad x[n-n_o] \leftrightarrow e^{-j\omega n_o} X\left(e^{j\omega}\right); \qquad e^{j\omega_o n} x[n] \leftrightarrow X\left(e^{j(\omega-\omega_o)}\right);$$

$$x[n]y[n] \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{j(\theta)}\right) Y\left(e^{j(\omega-\theta)}\right) d\theta \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, y^*[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{j\omega}\right) Y^*\left(e^{j\omega}\right) d\omega$$

$$1\,(-\infty < n < \infty) \leftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\,\delta(\omega + 2\pi k), \qquad e^{j\omega_o n} \leftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\,\delta(\omega - \omega_o + 2\pi k)$$

$$h[n] = \begin{cases} 1, & -M \le n \le M \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases} \leftrightarrow H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{\sin\left((2M+1)\omega/2\right)}{\sin(\omega/2)}$$

Filtre passe-bas idéal avec fréquence de coupure ω_c : $h[n] = \begin{cases} \sin(\omega_c n)/(\pi n), & n \neq 0 \\ \omega_c/\pi, & n = 0 \end{cases}$

$$\sum_{n=N_1}^{N_2} a^n = \frac{a^{N_1} - a^{N_2+1}}{1-a} \quad \text{pour } N_1, N_2 \text{ fini}; \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a} \quad \text{pour } |a| < 1$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{M-1} x[n]\, W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{M-1} x[n]\, e^{-j2\pi kn/N} \quad \text{pour } 0 \le k \le N-1$$

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\, W_N^{-kn} \quad \text{pour } 0 \le n \le N-1$$

$$x^*[n] \leftrightarrow X^*[\langle -k\rangle_N] \qquad g\left[\langle n-n_o\rangle_N\right] \leftrightarrow W_N^{kn_o} G[k] \qquad W_N^{-k_o n} g[n] \leftrightarrow G\left[\langle k-k_o\rangle_N\right]$$

$$x[n] \textcircled{N} y[n] \leftrightarrow X[k]Y[k]$$

$$X[z] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, z^{-n}$$

$$g[n-n_o] \leftrightarrow z^{-n_o} G(z) \qquad g[-n] \leftrightarrow G(1/z) = G\left(z^{-1}\right) \qquad x[n] \circledast y[n] \leftrightarrow X(z)Y(z)$$