Université Laval
Professeur: Leslie A. Rusch

Département de génie électrique
et de génie informatique

GEL10280: Communications numériques
2006 Examen Partiel

Mercredi le 1 mars 2006; Durée: 13h30 à 15h20
Une feuille documentation permise; une calculatrice permise

Problème 1 (25 points sur 100)

A. (5 points) Donnez la définition et trois exemples d'une impulsion Nyquist.

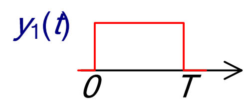
B. (10 points) Quels sont les trois aspects les plus importants pour l'évaluation d'un système de communication numérique?

C. (10 points) Pour un système binaire avec $s_1(t) = -s_0(t) = s(t)$, et T secondes pour le temps d'un bit, donnez une esquisse du filtre adapté et son implémentation en corrélateur avec tous les paramètres donnés en termes de $s(t)$ et T.

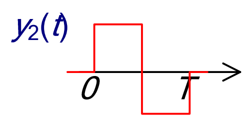
Problème 2 (30 points sur 100)

Un processus Gram Schmidt a été utilisé pour trouver les vecteurs de base :

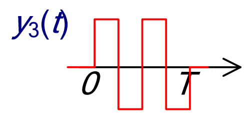
$$\psi_1(t) = \begin{cases} 1/\sqrt{T} & 0 \le t \le T \\ 0 & \textit{ailleurs} \end{cases}$$



$$\psi_2(t) = \begin{cases} 1/\sqrt{T} & 0 \le t \le T/2 \\ -1/\sqrt{T} & T/2 < t \le T \\ 0 & \textit{ailleurs} \end{cases}$$

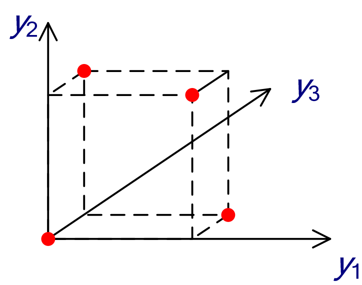


$$\psi_3(t) = \begin{cases} 1/\sqrt{T} & 0 \le t \le T/4, \quad T/2 \le t \le 3T/4 \\ -1/\sqrt{T} & T/4 \le t \le T/2, \quad 3T/4 \le t \le T \\ 0 & \textit{ailleurs} \end{cases}$$



Les coefficients des quatre signaux sont

$$s_1 = [0 \quad 0 \quad 0]\sqrt{E_b}$$
$$s_2 = [4/3 \quad 4/3 \quad 0]\sqrt{E_b}$$
$$s_3 = [0 \quad 4/3 \quad 2/3]\sqrt{E_b}$$
$$s_4 = [4/3 \quad 0 \quad 2/3]\sqrt{E_b}$$



A. (5 points) Donnez les signaux $s_1(t)$, $s_2(t)$.

B. (5 points) Vérifiez que l'énergie moyenne par bit est bien E_b.

C. (10 points) Donnez la distance minimale $D_{\min}$

D. (10 points) Donnez une approximation pour la probabilité d'erreur en termes de E_b/N_0 .

Problème 3 (20 points sur 100)

Considérons encore le système de problème 2. En faisant une translation des signaux pour que l'origine de l'espace du signal se trouve au centre de masse des signaux, la probabilité d'erreur est minimisée.

A. (10 points) Quels sont les vecteurs pour les signaux dans une telle configuration?

B. (5 points) Donnez la distance minimale $D_{\min}$.

C. (5 points) Quelle est l'amélioration de la performance en dB par rapport au système du Problème 2?

Problème 4 (25 points sur 100)

Considérons deux systèmes de communications satellite. Dans un cas nous transmettons 100 kb/s à un bateau avec un antenne de diamètre 1 m, $E_b/N_0 = 10\,\mathrm{dB}$. Dans un deuxième cas nous transmettons 72 Mb/s à une station terrestre avec un antenne de 30 m, $E_b/N_0 = 20\,\mathrm{dB}$. Dans les deux systèmes une bande de fréquence 50 MHz de large est disponible.

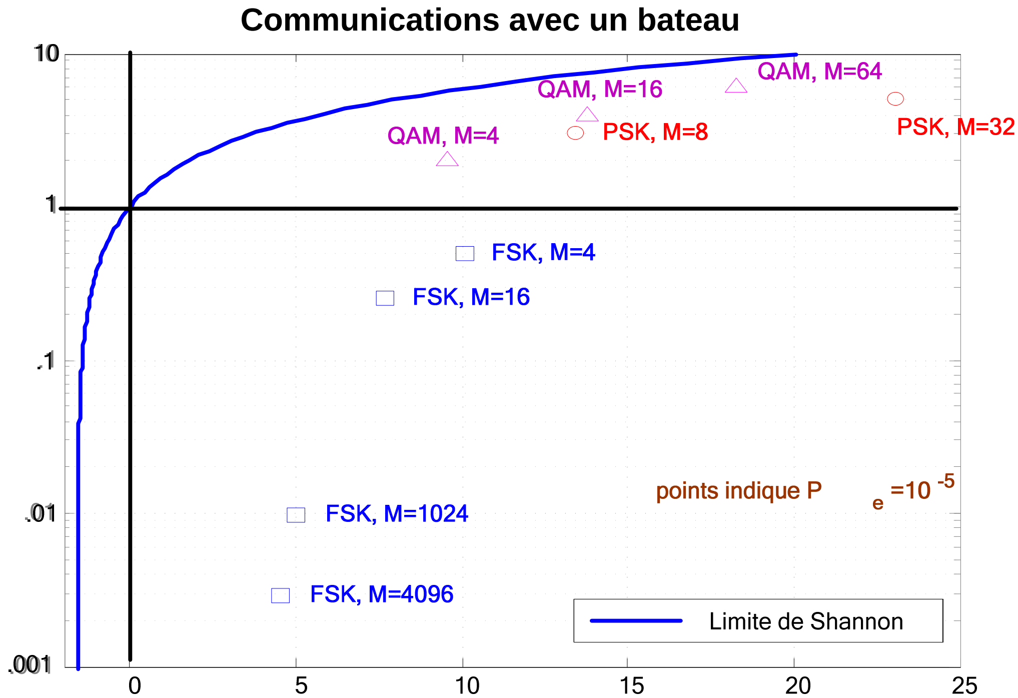
A. (10 points) Dans la feuille suivant vous trouverez deux copies de l'efficacité spectrale vs. E_b/N_0 avec la limite de Shannon tracée. Utilisez une de copie pour tracez la région admissible pour le système bateau. Utilisez la deuxième copie pour le système de station terrestre. Mettez la feuille dans le cahier bleu avec votre nom et matricule inscrit dans la feuille.

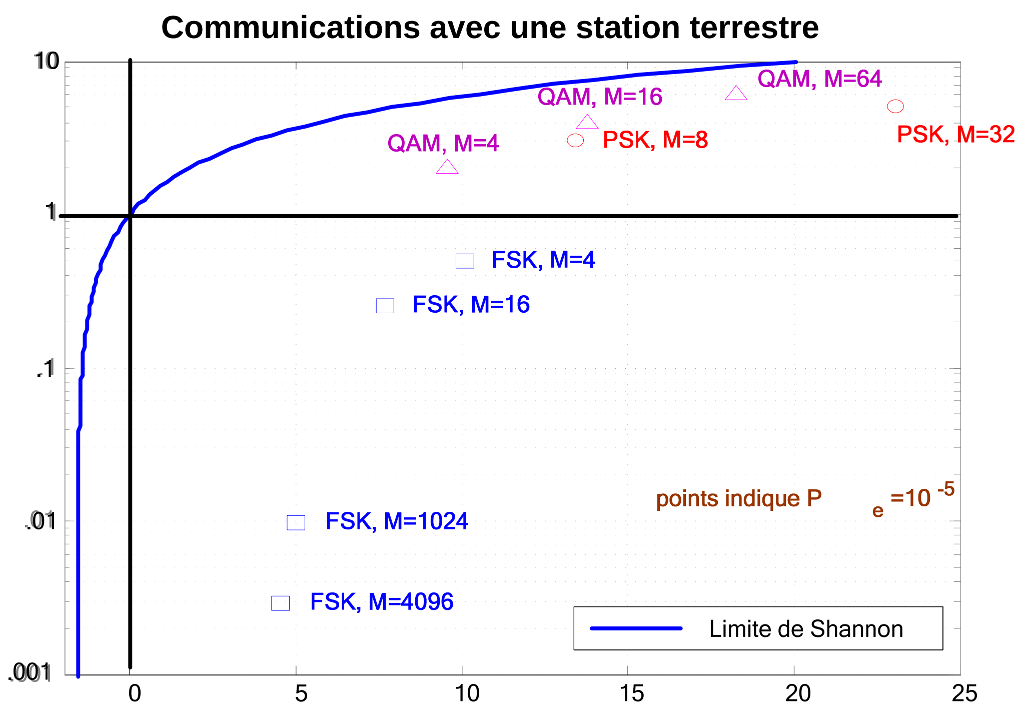
B. (15 points) Proposez un format de modulation pour chaque système qui est bien adapté aux besoins d'efficacité spectrale, E_b/N_0, taux binaire et le coût acceptable (le coût acceptable sera différent pour un bateau vs. une station terrestre). Vous pouvez supposer qu'un taux d'erreur de 10^{-5} est suffisant pour le bateau, mais que la station terrestre sera plus exigeante en terme de taux d'erreur.

Discutez votre raisonnement.

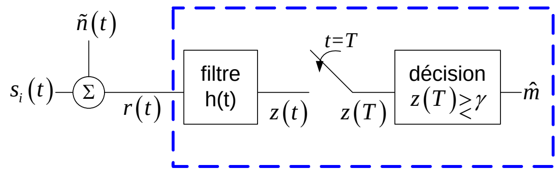
Matricule : Nom :

Problème 4





Récepteur d'échantillonnage



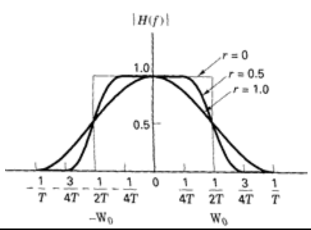
MAP: i qui maximise $p(z|s_i)\,p(s_i)$

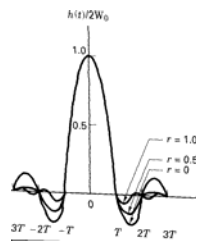
i qui minimise $\|\mathbf{r}-\mathbf{s}_i\|^2 - N_0 \ln P(\mathbf{s}_i)$

ML: i qui maximise $p(z|s_i)$

i qui minimise $\|\mathbf{r}-\mathbf{s}_i\|^2$

Raised cosine $v(t) = \dfrac{\sin(\pi t/T_s)}{\pi t/T_s}\dfrac{\cos(r\pi t/T_s)}{1-4r^2t^2/T_s^2}$





Énergie moyenne

$$E_{moy} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\|\mathbf{s}_i\|^2$$
$$= \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}[\text{énergie du signal } i]$$

Énergie par bit v. énergie par symbole

$$E_b \log_2 M = E_s$$

QAM

cas rectangulaire (carrée)

$$P_e = 2\left(1-\frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q\left(\sqrt{\frac{3\log_2 M}{(M-1)}\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

Conversion de l'espace I/Q vers espace du signal

$$\left(\tilde{a}_n^I, \tilde{a}_n^Q\right) = \sqrt{\frac{M \cdot E_s}{\sum_{i=1}^{M}\left[\left(a_n^I\right)^2 + \left(a_n^Q\right)^2\right]}}\left(a_n^I, a_n^Q\right)$$

coordonnées, espace du signal

coordonnées, espace I/Q

Borne d'union

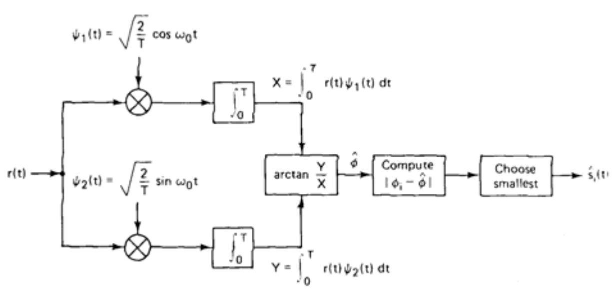
$$P_e \approx \frac{2K}{M} Q\left(\frac{D_{\min}}{\sqrt{2N_0}}\right) = \frac{2K}{M} Q\left(d_{\min}\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

K est le nombre des paires des signaux séparés par la distance minimale D_{min}

Distance minimale dans l'espace du signal

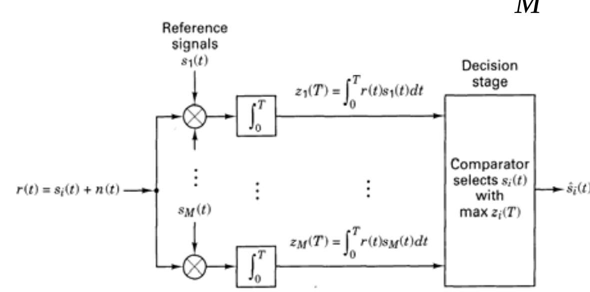
$$D_{\min} = \min_{i \neq k}\|\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_k\| \text{ et } d_{\min} = \frac{D_{\min}}{\sqrt{2E_b}}$$

MPSK cohérent $\eta = \log_2 M$



$$P_e(M) \approx 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}\sin\frac{\pi}{M}\right)$$
$$= 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_b \log_2 M}{N_0}}\sin\frac{\pi}{M}\right)$$

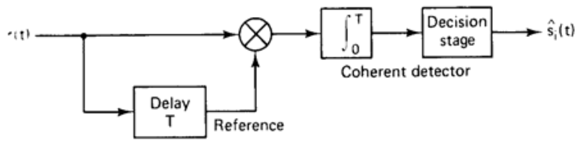
MFSK cohérent $\eta = \dfrac{\log_2 M}{M}$



$$P_e(M) = (M-1)Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right)$$
$$= (M-1)Q\left(\sqrt{\frac{E_b \log_2 M}{N_0}}\right)$$

Séparation minimale $1/2T_s$

DPSK incohérent $P_e = \frac{1}{2} e^{-E_b/N_0}$



Efficacité spectrale

$$\eta = \frac{R}{W} = \frac{1}{T_b}\frac{1}{W} \text{ bits/s}$$

Loi de Shannon

$C = W \log_2\left(1 + SNR\right)$

$$P_e\left(BPSK\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

$$P_e\left(OOK\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

$$P_e\left(QPSK\right) \approx 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

Perte par rapport à QPSK

$d_{\min} = \sqrt{x}\sqrt{2}$ perte $= -10\log_{10} x$

Processus Gram Schmidt

$$\psi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{E_1}} s_1(t) \text{ où } E_1 \triangleq \int_0^T s_1^2(t)\,dt$$

$$\theta_2(t) \triangleq s_2(t) - \langle s_2(t), \psi_1(t)\rangle \psi_1(t)$$

$$E_2 \triangleq \int_0^T \theta_2^2(t)\,dt \qquad \psi_2(t) = \frac{\theta_2(t)}{\sqrt{E_2}}$$

$$i. \qquad \theta_i(t) = s_i(t) - \sum_{k=1}^{i-1} \langle s_i(t), \psi_k(t)\rangle \psi_k(t)$$

$$E_i \triangleq \int_0^T \theta_i^2(t)\,dt \qquad \psi_i(t) = \frac{\theta_i(t)}{\sqrt{E_i}}$$

L'effet d'ISI