MAT-1910 : Mathématiques de l'ingénieur II
Solutionnaire de l'examen 1 $\left(33\,\frac{1}{3}\%\right)$
Vendredi le 10 février 2017 de 18h30 à 20h20

Section A : Robert Guénette
Section B : Hugo Chapdelaine
Section C : Alexandre Girouard

Identification

Prénom : ______________________ Nom : ______________________

N° de dossier ______________________ Section : ______________________

Résultats

Question:	1	2	3	4	5	Total
Points:	20	20	20	20	20	100
Note :						

Directives

— Veuillez désactiver la sonnerie de vos appareils électroniques et les ranger hors de portée.
— Vous avez droit à un aide-mémoire manuscrit d'une feuille 8"$\frac{1}{2}$ par 11" recto-verso.
— **Sauf avis contraire**, vous devez rédiger des solutions complètes et justifiées.
— **Sauf avis contraire**, vous devez donner des réponses exactes, et par conséquent vous ne pouvez pas approximer les quantités qui interviennent dans vos calculs.
— Vérifiez que le questionnaire comporte 5 questions réparties sur 8 pages.
— Vous avez droit à une calculatrice autorisée par la faculté des sciences et génie.

Évaluation des qualités

Qualités
1.1.1 Compréhension des notions mathématiques : questions 1 et 2
1.1.2 Capacité à résoudre des problèmes mathématiques : questions 3 et 4
1.1.3 Capacité à interpréter et à utiliser la terminologie appropriée : question 5

Question 1 (20 points)

(6) (a) Représenter graphiquement le domaine d'intégration parcouru par la somme des deux intégrales doubles suivante :

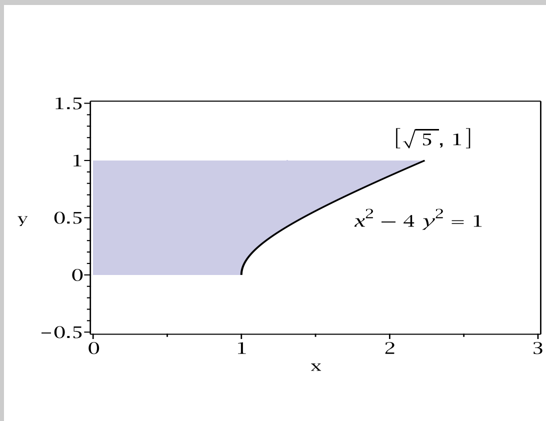
$$\int_0^1 \int_0^1 x \sin\left(\frac{4y^3}{3} + y\right) dydx + \int_1^{\sqrt{5}} \int_{\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}}^1 x \sin\left(\frac{4y^3}{3} + y\right) dydx. \qquad (1)$$

(8) (b) Réécrire la somme (1) comme une seule intégrale double itérée.

(6) (c) Évaluer l'intégrale double trouvée en (b).

Solution :

(a)



(b) On trouve

$$\int_{y=0}^1 \int_{x=0}^{\sqrt{1+4y^2}} x \sin\left(\frac{4y^3}{3} + y\right) dxdy.$$

(c) On a

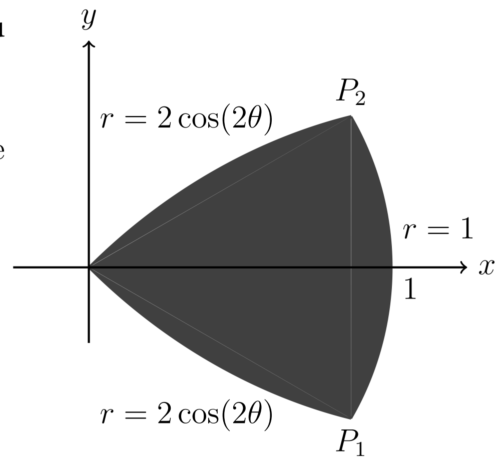
$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1+4y^2}} x \sin\left(\frac{4y^3}{3} + y\right) dxdy, \\
&= \int_0^1 \frac{x^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{1+4y^2}} \sin\left(\frac{4y^3}{3} + y\right) dy, \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(1 + 4y^2\right) \sin(4y^3/3 + y) dy, \\
&= -\frac{1}{2} \cos(4y^3/3 + y)\Big|_0^1, \\
&= \frac{-1}{2}(\cos(7/3) - 1) \approx 0,845.
\end{aligned}$$

Question 2 (20 points)

On considère la région D dans le demi-plan $x \geq 0$ située à l'intérieur du cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$ et délimitée par la courbe polaire $r = 2\cos(2\theta)$.

(6) (a) Calculer les coordonnées polaires des deux points d'intersection P_1 et P_2 du cercle avec la courbe polaire.

(14) (b) Calculer l'aire de la région D, c'est-à-dire la région ombragée ci-contre.



Solution :

(a) On pose $r = 2\cos(2\theta) = 1 \Longrightarrow \cos(2\theta) = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow 2\theta = \dfrac{\pi}{3} \Longrightarrow \theta = \dfrac{\pi}{6}$.
Les coordonnées polaires (r, θ) des deux points d'intersection P_1 et P_2 sont

$$P_1 = (1, -\frac{\pi}{6}) \qquad \text{et} \qquad P_2 = (1, \frac{\pi}{6}).$$

(b) En premier, on évalue les angles qui délimitent la région D. Pour cela, on pose

$$r = 2\cos(2\theta) = 0 \Longrightarrow 2\theta = \pm\frac{\pi}{2} \Longrightarrow \theta = \pm\frac{\pi}{4}.$$

Par la suite, on décompose le domaine en deux sous-régions et on utilise la symétrie par rapport à l'axe des x

$$A(D) = 2\,[A(D_1) + A(D_2)]$$

où D_1 est le secteur d'anneau qui va de $\theta = 0$ à $\dfrac{\pi}{6}$ et $r = 0$ à 1, D_2 est la partie de D qui va de $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ à $\dfrac{\pi}{4}$.

Calcul de $A(D_1)$:

$$A(D_1) = \text{aire d'un secteur d'anneau } = \pi\,\frac{\pi/6}{2\pi} = \frac{\pi}{12}.$$

On peut aussi calculer $A(D_1)$ par la formule

$$A(D_1) = \int_{\theta=0}^{\pi/6} \int_{r=0}^{1} r\; dr d\theta = \int_{\theta=0}^{\pi/6} \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1 d\theta = \frac{\pi}{12}.$$

Calcul de $A(D_2)$:

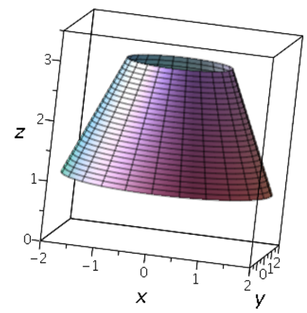
$$\begin{aligned}
A(D_2) &= \int_{\theta=\pi/6}^{\pi/4} \int_{r=0}^{2\cos(2\theta)} r\ drd\theta, \\
&= \int_{\theta=\pi/6}^{\pi/4} \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{2\cos(2\theta)} d\theta, \\
&= \int_{\theta=\pi/6}^{\pi/4} 2\cos^2(2\theta)\ d\theta, \\
&= \int_{\theta=\pi/3}^{\pi/2} \cos^2(u)\ du \qquad \text{en posant } u = 2\theta \Longrightarrow du = 2d\theta, \\
&= \left[\frac{u}{2} + \frac{1}{4}\sin 2u\right]_{\pi/3}^{\pi/2}, \\
&= \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8} \approx 0.0453.
\end{aligned}$$

Finalement, on combine les deux valeurs pour obtenir

$$A(D) = 2\left[A(D_1) + A(D_2)\right] = 2\left[\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}\right] = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \approx 0.614.$$

Question 3 (20 points)

Un solide homogène S de densité égale à 1 est obtenu en perçant dans un cône tronqué de surface latérale $z = 5 - 2\sqrt{x^2 + y^2},\ z \in [1, 3]$ un trou cylindrique de même axe et de rayon 1.



(6) (a) Écrire l'intégrale triple itérée suivant l'ordre $dzdrd\theta$ en coordonnées cylindriques pour calculer le moment d'inertie par rapport à l'axe z **(Ne pas évaluer)**

$$J_z = \iiint_S x^2 + y^2 \, dV.$$

(6) (b) Écrire l'intégrale triple itérée suivant l'ordre $drdzd\theta$ en coordonnées cylindriques pour calculer J_z. **(Ne pas évaluer)**

(8) (c) Évaluer le moment d'inertie J_z du solide S.

Solution :

(a) On a $z = 5 - 2r$. Pour $z = 1 \Longrightarrow r = 2$ et pour $z = 3 \Longrightarrow r = 1$. On obtient

$$J_z = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=1}^{2} \int_{z=1}^{5-2r} r^3 \, dzdrd\theta.$$

(b) On a $z = 5 - 2r \Longrightarrow r = \frac{5-z}{2}$. On obtient

$$J_z = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=1}^{3} \int_{r=1}^{\frac{5-z}{2}} r^3 \, drdzd\theta.$$

(c) En utilisant a), on obtient

$$\begin{aligned} J_z &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=1}^{2} \int_{z=1}^{5-2r} r^3 \, dzdrd\theta, \\ &= 2\pi \int_{r=1}^{2} r^3 \, (4 - 2r) \, dr, \\ &= 2\pi \left[r^4 - \frac{2r^5}{5} \right]_1^2, \\ &= 2\pi \, \frac{13}{5}, \\ &= \frac{26\pi}{5}. \end{aligned}$$

Question 4 (20 points)

On considère un solide S qui est délimité par les surfaces décrites en coordonnées sphériques par les équations suivantes :

$$\rho = 2\cos(\phi), \quad \phi = \pi/2, \quad \rho = 2.$$

(6) (a) Décrire les surfaces qui délimitent le solide.

(8) (b) Écrire son volume sous la forme d'une intégrale itérée en coordonnées sphériques.

(6) (c) Calculer ce volume.

Solution :

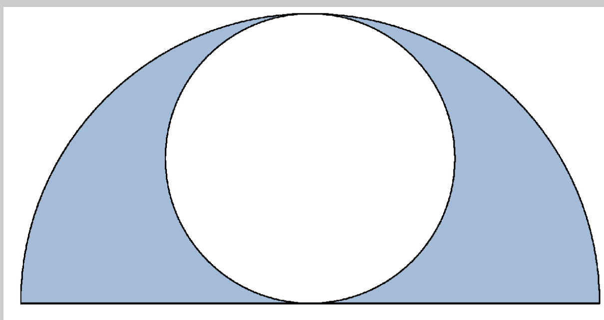
(a) L'équation $\phi = \pi/2$ décrit le plan $z = 0$ alors que $\rho = 2$ décrit la sphère de rayon 2 centrée à l'origine. L'équation $\rho = 2\cos(\phi)$ est équivalente à $\rho^2 = 2\rho\cos(\phi)$, qui correspond en coordonnées cartésiennes à

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2z.$$

En complétant un carré on obtient

$$x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1.$$

Cette équation décrit donc une sphère de rayon 1 centrée en $(0, 0, 1)$. Le solide décrit par ces équations est donc la demie-boule de rayon 2 privée d'une boule de rayon 1.



(b) Le volume du solide S est

$$V = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\phi=0}^{\pi/2} \int_{\rho=2\cos(\phi)}^{2} \rho^2 \sin(\phi)\, d\rho d\phi d\theta.$$

(c) On peut déduire la réponse directement du problème géométrique car le solide est constitué d'une demie-boule de rayon 2 de volume $V_1 = \frac{4\pi\times 2^3}{3} \times 1/2 = 16\pi/3$ qui est privée d'une boule de rayon 1, de volume $V_2 = 4\pi \times 1^3/3$. Le volume du solide S est donc $V = V_1 - V_2 = 4\pi$.

On peut aussi calculer l'intégrale précédente :

$$\begin{aligned}
V &= 2\pi \int_{\phi=0}^{\pi/2} \sin(\phi) \left(\frac{\rho^3}{3} \Big|_{\rho=2\cos(\phi)}^{2} \right) \, d\phi \\
&= 2\pi \int_{\phi=0}^{\pi/2} \sin(\phi) (\frac{8}{3} - \frac{8}{3} \cos(\phi)^3) \, d\phi \\
&= \frac{16\pi}{3} \left(-\cos(\phi) \Big|_{\phi=0}^{\pi/2} + \frac{\cos(\phi)^4}{4} \Big|_{\phi=0}^{\pi/2} \right) = \frac{16\pi}{3} \left(1 - \frac{1}{4} \right) = 4\pi.
\end{aligned}$$

Question 5 (20 points)

Pour chacune des questions suivantes, encercler la bonne réponse. **(La réponse est (a))**

1. L'intégrale de la fonction définie par $f(x, y, z) = xy + xz + yz$ sur une boule de rayon 1 centrée à l'origine est :
   (a) 0,
   (b) 1,
   (c) 3,
   (d) 3π.
2. En coordonnées sphériques, l'équation $\phi = \pi/4$ décrit **(La réponse est (b))**
   (a) un cercle,
   (b) un cône,
   (c) un plan,
   (d) un cylindre,
   (e) aucune de ces réponses.
3. En coordonnées cylindrique, l'équation $\theta = \pi/2$ décrit **(La réponse est (d))**
   (a) un cercle,
   (b) un cône,
   (c) un cylindre,
   (d) aucune de ces réponses.
4. L'intégrale $\int_{-1}^{4} \int_{y+1}^{5} e^{x^2}\, dxdy$ est **(La réponse est (b))**
   (a) impossible à évaluer car la fonction e^{x^2} n'admet pas de primitive élémentaire,
   (b) égale à $\frac{1}{2}(e^{25} - 1)$,
   (c) égale à -2,
   (d) égale à 2,
   (e) aucune de ces réponses.
5. Le point de coordonnées cartésiennes $(1, 1, 1)$ est représenté en coordonnées sphériques par **(La réponse est (b))**
   (a) $\rho = \sqrt{3},\ \phi = \arctan(\sqrt{2}),\ \theta = \pi/2$,
   (b) $\rho = \sqrt{3},\ \phi = \arctan(\sqrt{2}),\ \theta = \pi/4$,
   (c) $\rho = 3,\ \phi = \arctan(\sqrt{2}),\ \theta = \pi/4$,
   (d) $\rho = \sqrt{3},\ \phi = \pi/6,\ \theta = \pi/4$.