15
10

$Q_3 = 25$
$Q_4 = 25$
10
15

100

Section: C
Lettre A-K

MAT-10363 Examen partiel du 5 octobre 2007

Directives: Répondez sur la feuille dans l'espace alloué, en indiquant votre démarche.

1. (15 points) Dans cette question, z représente le nombre complexe $4 - 3i$. Calculer les nombres complexes suivants, en exprimant chaque réponse sous la forme $a + ib$, avec a et b des nombres réels.

15

(a) $\frac{1+iz}{z-i}$ $= \frac{1 + i(4-3i)}{(4-3i) - i} = \frac{1+4i+3}{4-3i-i} = \frac{4i+4}{4-4i} \cdot \frac{4+4i}{4+4i} = \frac{16i-16+16+16i}{16+16}$

$= \frac{32i}{32} = i = 0 + 1i$ ✓ 5

(b) $\frac{z+\overline{z}}{z-\overline{z}}$ $= \frac{(4-3i)+(4+3i)}{(4-3i)-(4+3i)} = \frac{8}{-6i} = \frac{8}{-6i} \cdot \frac{6i}{6i} = \frac{48i}{36} = 0 + \frac{4}{3}i$

✓ 5

(c) $e^{i\pi z}$ $= e^{i\pi(4-3i)} = e^{4i\pi + 3\pi} = e^{3\pi} e^{4i\pi} = e^{3\pi}(\cos 4\pi + i \sin 4\pi)$

$= e^{3\pi}(1 + 0)$

$= e^{3\pi} + 0i$ ✓ 5

2. (10 points) Calculer le module et l'argument principal (c'est-à-dire dans l'intervalle $(-\pi, \pi]$) du nombre complexe $(1-i)^{2007}$.

$1-i$ peut s'écrire sous la forme polaire :

$$\sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} \theta = \frac{7\pi}{4}.$$

$$1-i = \sqrt{2}e^{i7\pi/4}$$

Donc ; $\left(\sqrt{2}e^{i7\pi/4}\right)^{2007}$

$$= \left(\sqrt{2}\right)^{2007}\left(e^{i\frac{14049\pi}{4}}\right)$$

$$= \left(\sqrt{2}\right)^{2007}\left(e^{i\frac{14044\pi}{4} + \frac{5\pi}{4}i}\right)$$

$$= \left(\sqrt{2}\right)^{2007} e^{i3511\pi} \cdot e^{\frac{5\pi}{4}i}$$

$$= \left(\sqrt{2}\right)^{2007} (-1) \cdot e^{i5\pi/4}$$

$$= -\left(\sqrt{2}\right)^{2007} e^{i5\pi/4} = \sqrt{2}^{2007} e^{i\pi} e^{i\pi 5/4} = \sqrt{2}^{2007} e^{i\pi/4}$$

$$\mathrm{Mod}\left((1-i)^{2007}\right) = \theta\left(\sqrt{2}\right)^{2007}$$

$$\mathrm{Arg}\left((1-i)^{2007}\right) = \frac{5\pi}{4}$$

3. (25 points) 25

(a) Trouver toutes les solutions de l'équation $z^4 = -1$

$r^4 = \sqrt{(-1)^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad r = 1$

$4\theta = \pi$

$z_k = 1^{1/4}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{4}\right)\right) \quad [k = 0, 1, 2, 3]$

$$\boxed{\begin{aligned}
z_0 &= \left(\cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \\
z_1 &= \cos\left(3\pi/4\right) + i\sin\left(3\pi/4\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \\
z_2 &= \cos\left(5\pi/4\right) + i\sin\left(5\pi/4\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \\
z_3 &= \cos\left(7\pi/4\right) + i\sin\left(7\pi/4\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}}$$

Factorisation complète

(b) Quelle est la factorisation complète du polynôme $p(z) = z^4 + 1$?

Dans $\mathbb{C}$: $p(z) = \left(z - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\right)\left(z - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\right)\left(z - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\right)\left(z - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\right)$

c)

Factorisation complète

Dans $\mathbb{R}$: $p(z) = \left(z^2 - 2\frac{\sqrt{2}}{2}z + 1\right)\left(z^2 - \left(2\frac{\sqrt{2}}{2}\right)z + 1\right)$

$p(z) = \left(z^2 - \sqrt{2}z + 1\right)\left(z^2 + \sqrt{2}z + 1\right)$

(c) Écrire le polynôme $z^4 + 1$ comme produit de deux polynômes de degré 2 à coefficients réels.

$p(z) = z^4 + 1 = \left(z^2 - \sqrt{2}z + 1\right)\left(z^2 + \sqrt{2}z + 1\right)$

(Vérification : $z^4 + \cancel{\sqrt{2}z^3} + z^2 - \cancel{\sqrt{2}z^3} - \cancel{2z^2} - \cancel{\sqrt{2}z} + \cancel{z^2} + \cancel{\sqrt{2}z} + 1$
$= z^4 + 1$ OK!)

(d) Parmi les choix (1) à (4) suivants, encercler la commande Maple qui aurait permis de factoriser $p(z)$ en quatre facteurs. (Note: chaque commande est proposée dans la notation de l'interface actuelle, de même que dans la notation des interfaces des versions plus anciennes de Maple.)

(1)	$factor(z^4+1)$	ou, anciennement,	`>factor(z^4+1);`
(2)	$factor(z^4+1, complex)$	ou, anciennement,	`>factor(z^4+1,complex);`
(3)	$solve(z^4+1)$	ou, anciennement,	`>solve(z^4+1);`
(4)	$fsolve(z^4+1, z, complex)$	ou, anciennement,	`>fsolve(z^4+1,z,complex);`

25

4. (25 points) Certaines institutions financières offrent un intérêt composé continûment. Cela veut dire que $C(t)$, la valeur du capital au temps t, satisfait l'équation différentielle

$$C'(t) = rC(t) \tag{1}$$

où r est la taux d'intérêt annuel.

(a) Trouver la solution générale de l'équation (1).

$$\frac{dC}{dt} = rC(t)$$

$$\frac{dC}{C(t)} = r\,dt$$

$$\int \frac{dC}{C(t)} = \int r\,dt + K$$ où K est une constante

$$\ln|C(t)| = rt + K$$

$$e^{\ln|C(t)|} = e^{rt+K}$$

$$|C(t)| = e^{rt} \cdot e^{K}$$ $|C(t)| = \pm$ constante ...

$$C(t) = Ke^{rt}$$

(b) Si on investit un capital de 10 000$ à un taux annuel de 8% composé continûment, quelle sera la valeur du capital au bout de 10 ans?

$C(t) = 10000$ \$

$t = 10$ ans

$r = 8\%$

$C(t) = Ke^{rt}$

$C(10) = 10000e^{0,08(10)}$

$C(10) = 10000e^{4/5}$

$C(10) = 22\,255,41$ \$

Au temps $t=0$

$C(0) = 10000$

$C(0) = Ke^{0} = K$

donc $C(0) = K = 10000$

5

Au bout de 10 ans, la valeur du capital sera de 22 255,41\$

(c) Quel devrait être le taux d'intérêt pour que le capital triple en 10 ans?

$3C(0) = C(10)$

$3C(0) = C(0)\,e^{r(10)}$

$3 = e^{r \cdot 10}$

$\ln 3 = \ln e^{(r \cdot 10)}$

$\frac{\ln 3}{10} = \frac{r \cdot 10}{10}$

$\frac{\ln 3}{10} = r$

$0,1099 = r$

no

Donc le taux d'intérêt devrait être de 10,99%

15

5. (15 points)

(a) Déterminer l'équation différentielle de la famille de cercles d'équation

$$x^2 + (y-b)^2 = 1 + b^2. \quad (2)$$

constante

$x^2 + y^2 - 2yb + b^2 = 1 + b^2$

$\frac{x^2+y^2-1}{2y} = \frac{2yb}{2y}$

$\frac{x^2+y^2-1}{2y} = b$

$2x + 2(y-b)y' = 0$

$\frac{2(y-b)y'}{2(y-b)} = \frac{-2x}{2(y-b)}$

$y' = \frac{-2x}{2(y-b)}$

$y' = \frac{-x}{y-b}$

On remplace b :

L'équation différentielle associée à la famille de cercle : $\boxed{y' = \frac{-x}{y - \left(\frac{x^2+y^2-1}{2y}\right)}}$

(b) Écrire l'équation différentielle de la famille des trajectoires orthogonales à la famille (2). Note: on ne demande pas de résoudre cette équation.

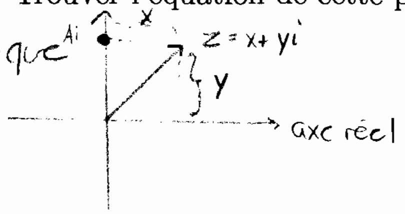
$y'(x) = \frac{-1}{f(x,y)}$

$$y'(x) = \frac{y - \left(\frac{x^2+y^2-1}{2y}\right)}{x}$$

10

6. (10 points) Soit A un nombre réel positif. Tous les nombres complexes $z = x + iy$ qui ont la propriété d'être à égale distance du point Ai et de l'axe réel se retrouvent sur une même parabole. Trouver l'équation de cette parabole.

Représentation géométrique



Équation d'une parabole:

a) $y = x^2 + bx + c$.

b) $x = y^2 + by + c$

La distance entre z et l'axe des réel doit être égale à la distance entre z et le point Ai

Définition de la distance :

$$|z - Ai| = |z - x|$$

$$|x + iy - Ai| = |\cancel{x} + iy - \cancel{x}|$$

$$|x + i(y - A)| = |iy|$$

$$\left(\sqrt{x^2 + (y-A)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{y^2}\right)^2$$

la distance entre z et l'axe des X = y

$$x^2 + (y-A)^2 = y^2$$

$$x^2 + \cancel{y^2} - 2yA + A^2 = \cancel{y^2}$$

$$\frac{x^2 + A^2}{2A} = \frac{2yA}{2A}$$

$$\boxed{y = \frac{x^2}{2A} + \frac{1A}{2}}$$

← Équation de la parabole