GEL-2001 83320: ANALYSE DES SIGNAUX

Examen partiel A2012 : Solutions

Département de génie électrique et de génie informatique

PROBLÈME 1 (12 POINTS)

a)

On demande de calculer la transformée de Fourier du signal $f_{\mathrm{p}}(t) = |\cos(\omega_0 t/2)|$ restreint sur une période ($[\,-T_0/2, T_0/2]$). On peut écrire la fonction restreinte comme:

$$f_{\mathrm{r}}(t) = \mathrm{Rect}\left(\frac{t}{T_0}\right)\cos(\omega_0 t/2)\,, \tag{1}$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t/2}\mathrm{Rect}\left(\frac{t}{T_0}\right) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t/2}\mathrm{Rect}\left(\frac{t}{T_0}\right)\,. \tag{2}$$

$$\tag{3}$$

Ensuite, on utilise les deux propriétés suivantes :

$$\boxed{\begin{aligned}\mathrm{Rect}(\frac{t}{\tau}) &\Longleftrightarrow \tau Sa\left(\frac{\tau\omega}{2}\right)\\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}bt}g(t) &\Longleftrightarrow G(\omega - b)\end{aligned}}$$

pour trouver la transformation de Fourier restreinte.

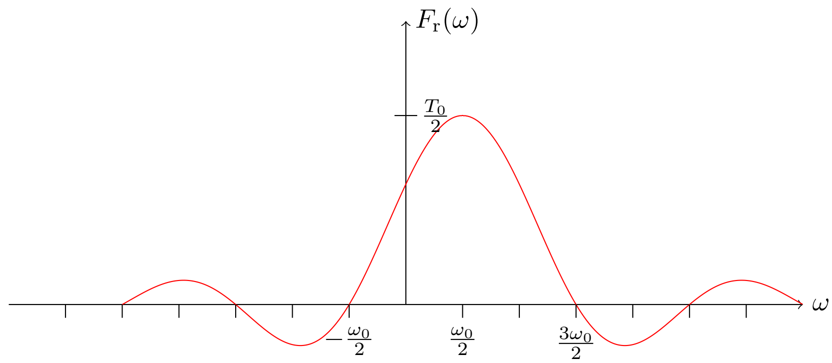
$$F_{\mathrm{r}}(\omega) = \frac{T_0}{2}\mathrm{Sa}\left(\frac{T_0}{2}\left(\omega - \frac{\omega_0}{2}\right)\right) + \frac{T_0}{2}\mathrm{Sa}\left(\frac{T_0}{2}\left(\omega + \frac{\omega_0}{2}\right)\right)\,. \tag{4}$$

b)

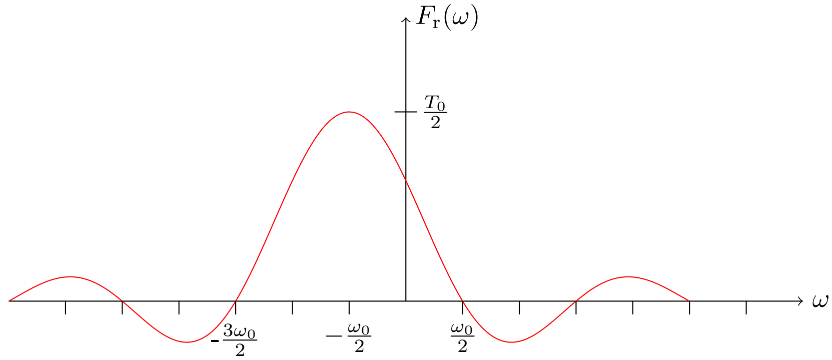
Il s'agit d'un signal d'énergie, car sa puissance est nulle et son énergie finie.

c)

$F_{\mathrm{r}}(\omega)$ est réel et le premier terme donne:



Le deuxième terme de $F_{\mathrm{r}}(\omega)$ donne:



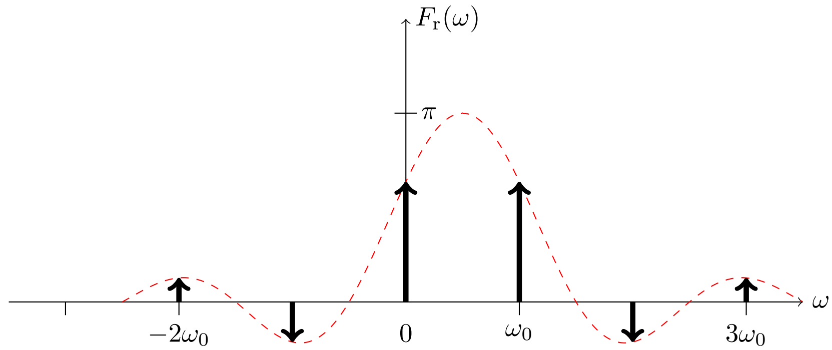
d)

La transformée de Fourier de $f_{\mathrm{p}}(t)$ est:

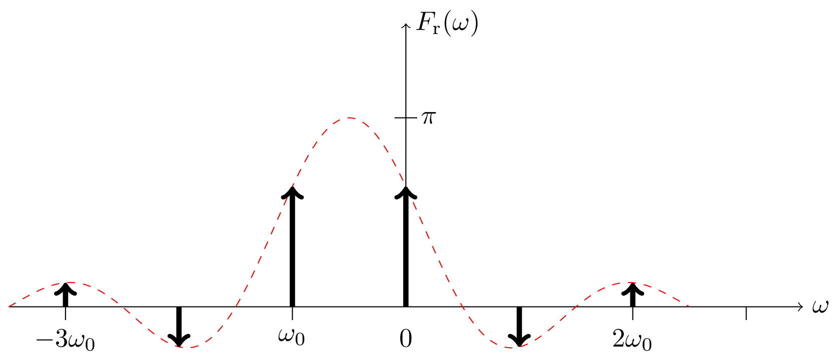
$$F(\omega) = \frac{2\pi}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_{\mathrm{r}}(n\omega_0)\delta(\omega - n\omega_0)\,, \tag{5}$$

$$= \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[Sa\left(n\pi - \pi/2\right) + Sa\left(n\pi + \pi/2\right)\right] \delta(\omega - n\omega_0)\,. \tag{6}$$

Le graphique du premier terme est:



Le graphique du deuxième terme est:



e)

La puissance DC est:

$$P(0) = |F_{\mathrm{n}}(0)|^2 = \left[\frac{1}{2}\left[Sa\left(-\pi/2\right) + Sa\left(\pi/2\right)\right]\right]^2 = \frac{4}{\pi^2}\,. \tag{7}$$

La puissance à la fréquence fondamentale est :

$$\begin{aligned}
P(1) &= |F_{\mathrm{n}}(-1)|^2 + |F_{\mathrm{n}}(1)|^2\,, && (8)\\
&= \left[\frac{1}{2}\left[Sa\left(-3\pi/2\right) + Sa\left(-\pi/2\right)\right]\right]^2 + \left[\frac{1}{2}\left[Sa\left(\pi/2\right) + Sa\left(3\pi/2\right)\right]\right]^2\,, && (9)\\
&= \frac{8}{9\pi^2}\,. && (10)
\end{aligned}$$

32/9pi^2

Problème 2 (8 points)

a)

On demande de trouver et tracer en module et phase la transformée de Fourier de la fonction suivante:

$$f(t) = \delta_{T_0}(t - \tau)\,. \tag{11}$$

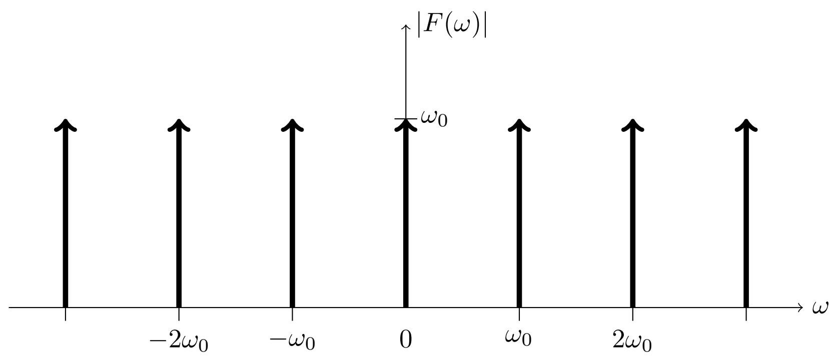
On utilise les propriétés suivantes:

$$\boxed{\begin{gathered} f(t+a) \Longleftrightarrow \mathrm{e}^{\mathrm{j}a\omega} F(\omega) \\ \delta_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0) \Longleftrightarrow \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) \end{gathered}}$$

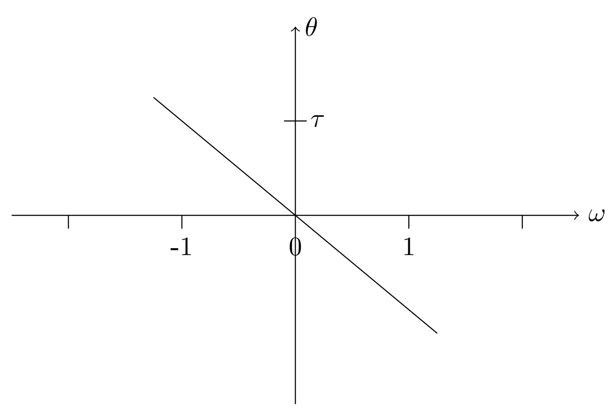
La transformée de Fourier de $f(t)$ est alors:

$$F(\omega) = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\tau\omega}\,. \tag{12}$$

Le module du spectre est:



La phase est:



b)

On demande de trouver et tracer la transformée de Fourier de la fonction suivante:

$$f(t) = \delta_{T_0}(at)\,. \tag{13}$$

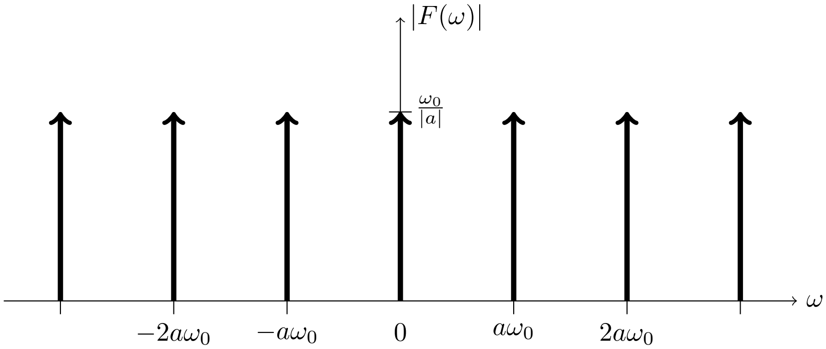
On utilise les propriétés suivantes:

$$f(at) \Longleftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$
$$\delta_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0) \Longleftrightarrow \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0)$$

La transformée de Fourier de $f(t)$ est alors:

$$F(\omega) = \frac{\omega_0}{|a|} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{\omega}{a} - n\omega_0\right). \tag{14}$$

Le module du spectre est:



La phase est nulle.

c)

On demande de trouver et tracer la transformée de Fourier inverse de la fonction suivante:

$$F(\omega) = \delta_{\omega_s}(\omega - \omega_0) Sa(\omega - \omega_0) + \delta_{\omega_s}(\omega + \omega_0) Sa(\omega + \omega_0). \tag{15}$$

En utilisant le fait que:

$$\omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}nT_0\omega}$$

on trouve que:

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}nT_s(\omega-\omega_0)} Sa(\omega - \omega_0) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}nT_s(\omega+\omega_0)} Sa(\omega + \omega_0). \tag{16}$$

Il manque 1/ws devant chaque terme dans l'eq 16.

En utilisant les propriétés suivantes dans l'ordre:

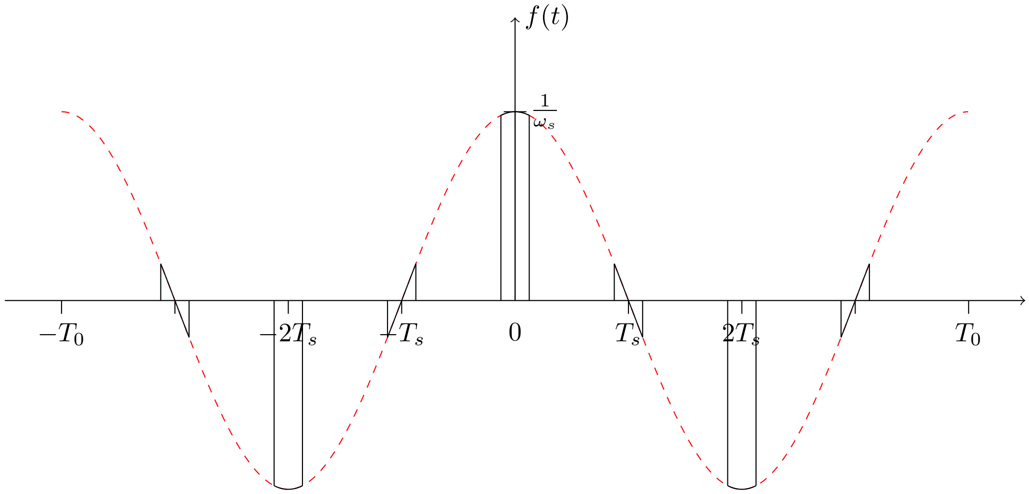
$$\mathrm{Rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \Longleftrightarrow \tau Sa\left(\frac{\tau\omega}{2}\right)$$
$$f(t + a) \Longleftrightarrow \mathrm{e}^{\mathrm{j}a\omega} F(\omega)$$
$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}bt} f(t) \Longleftrightarrow F(\omega - b)$$

On trouve:

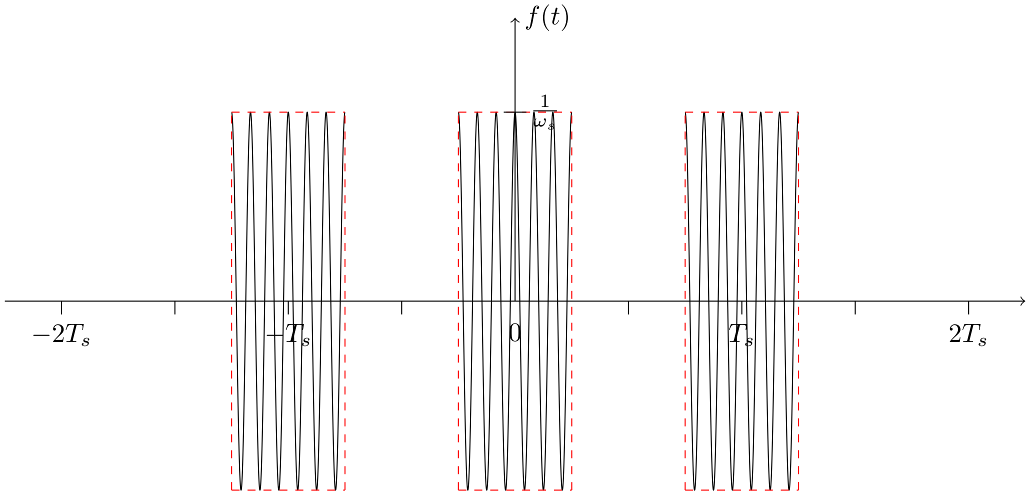
$$f(t) = \frac{1}{2\omega_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{Rect}\left(\frac{t-nT_s}{2}\right) \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t} + \frac{1}{2\omega_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{Rect}\left(\frac{t-nT_s}{2}\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t} \tag{17}$$

$$= \frac{1}{\omega_s} \cos(\omega_0 t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{Rect}\left(\frac{t-nT_s}{2}\right). \tag{18}$$

Lorsque $T_s < T_0$ La partie réelle est:



Lorsque $T_s > T_0$ La partie réelle est:

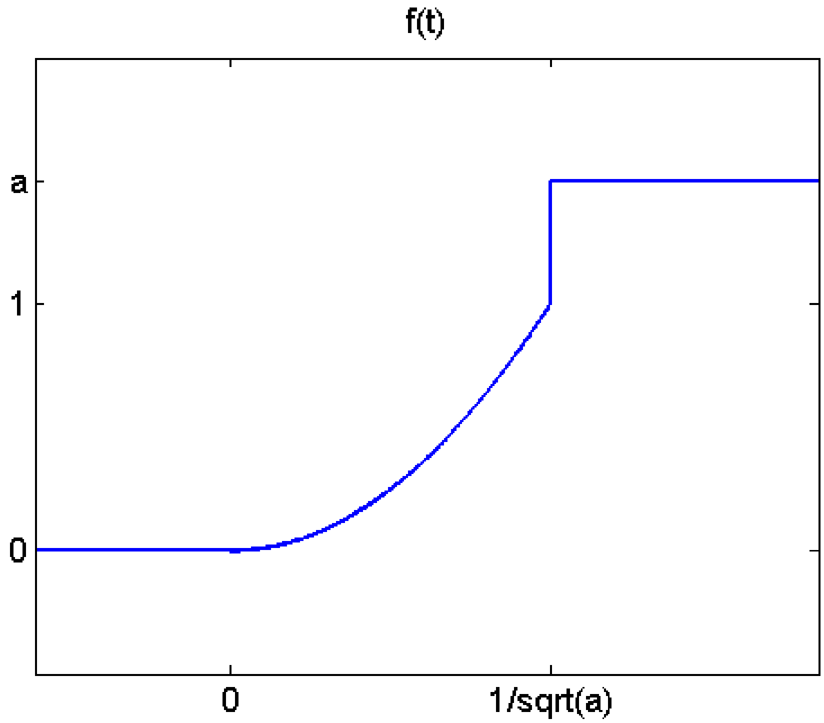


La partie imaginaire est nulle dans les deux cas.

Problème 3

a)

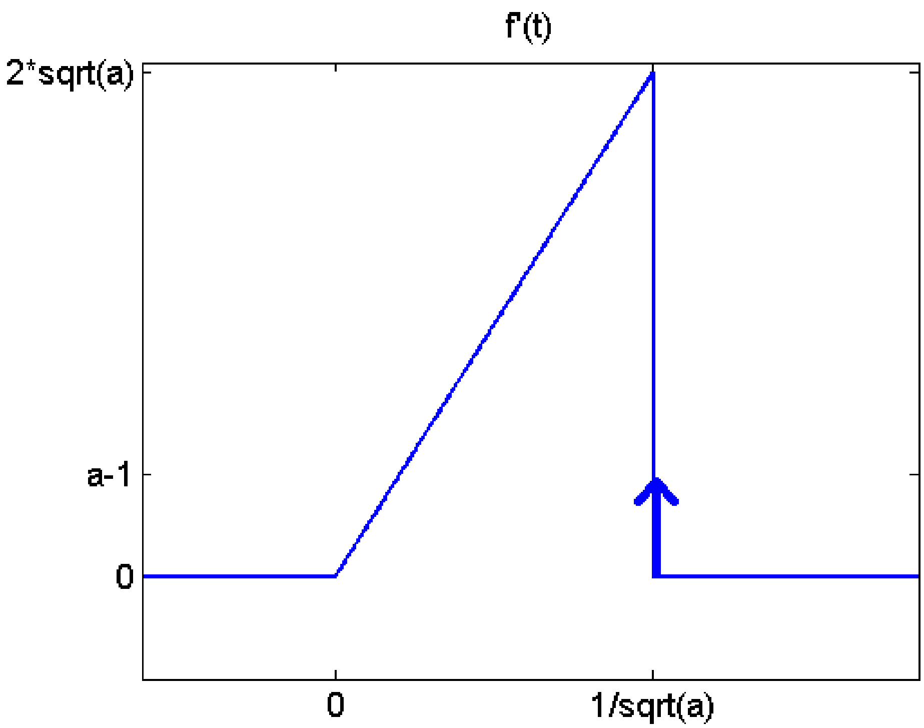
La fonction $f(t)$ a une discontinuité d'amplitude $a-1$ à $t=\frac{1}{\sqrt{a}}$. Le signe de la discontinuité n'a pas d'importance lorsqu'on trace le graphique. Il faut seulement être conséquent lorsqu'on trace les graphiques subséquents.



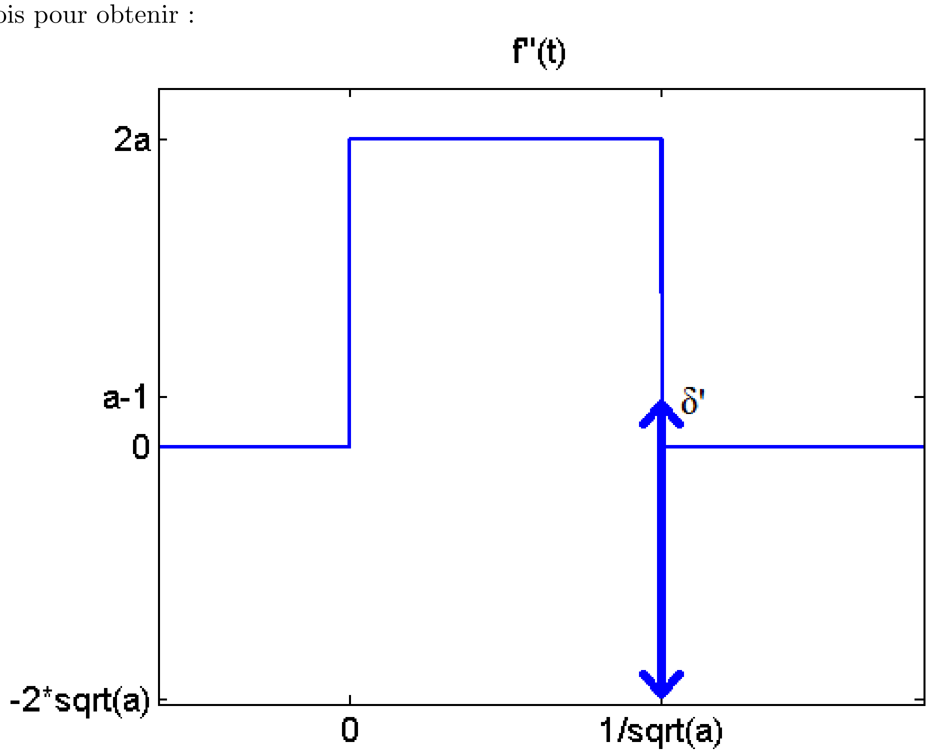
b)

On peut calculer la TF de la fonction facilement en faisant des dérivées successives jusqu'à ce qu'on obtienne des Dirac et des fonctions qu'on trouve dans la table.

Après la première dérivée, on obtient la fonction suivante :



Puisqu'on n'a pas encore une fonction qu'on trouve dans la table, on dérive une deuxième fois pour obtenir :



On peut donc écrire

$$f''(t) = 2a\mathrm{Rect}(\frac{t-\frac{1}{2\sqrt{a}}}{1/\sqrt{a}}) + (a-1)\delta'(t-\frac{1}{\sqrt{a}}) - 2\sqrt{a}\delta(t-\frac{1}{\sqrt{a}})$$

La transformée de Fourier de $f''(t)$ est donnée par

$$\text{TF}\{f''(t)\} = 2\sqrt{a}\text{Sa}(\frac{\omega}{2\sqrt{a}})\exp(-\frac{j\omega}{2\sqrt{a}}) + j\omega(a-1)\exp(-\frac{j\omega}{\sqrt{a}}) - 2\sqrt{a}\exp(-\frac{j\omega}{\sqrt{a}})$$

Ici, la transformée de Rect(t) a été obtenue dans la table et les propriétés de décalage et de dérivée ont été utilisées.

Finalement, en observant que $f(t)$ contient une valeur DC de $a/2$ qui a été perdue en dérivant et qui contribue un Dirac à la transformée de Fourier, on peut donner la transformée de Fourier de $f(t)$:

$$F(\omega) = \pi a\delta(\omega) - \frac{1}{\omega^2}[2\sqrt{a}\text{Sa}(\frac{\omega}{2\sqrt{a}})\exp(-\frac{j\omega}{2\sqrt{a}}) + j\omega(a-1)\exp(-\frac{j\omega}{\sqrt{a}}) - 2\sqrt{a}\exp(-\frac{j\omega}{\sqrt{a}})]$$

c)

Le taux de convergence de $F(\omega)$ peut prendre deux valeurs qui dépendent de a. Si $a = 1$, $f(t)$ est continue et la première discontinuité se trouve dans $f'(t)$. Le taux de convergence est donc de $1/\omega^2$. Pour $a \neq 1$, $f(t)$ est discontinue et le taux de convergence est de $1/\omega$. On peut aussi le constater directement à partir de $F(\omega)$.

d)

Pour les fonctions qui ont une valeur (ou tendent vers) une valeur constante à $-\infty$ et ∞, on obtient la puissance avec :

$$P = \frac{1}{2}[f^2(-\infty) + f^2(\infty))] = a^2/2.$$

Plutôt (a/2)^2

La valeur moyenne est a/2

c'est ((f(-inf)+f(inf))/2)^2

Problème 4

Puisqu'on connait la TF de la Gaussienne, on n'a qu'à utiliser les propriétés pour obtenir la réponse :

$$\exp(-t^2/2) \Longleftrightarrow \sqrt{2\pi}\exp(-\omega^2/2).$$

Donc,

$$2t\exp(-t^2/2) \Longleftrightarrow 2j\frac{d}{d\omega}\sqrt{2\pi}\exp(-\omega^2/2) = -2j\omega\sqrt{2\pi}\exp(-\omega^2/2).$$

Problème initial sans que la TF de la gaussienne soit donnée

Notez que ce problème (sans l'indice) N'A PAS été donné en examen, il a été jugé trop difficile et faisant appel à des notions au dela du contenu du cours. La solution est donnée ici à titre informatif.

Comme pour le cas de la Gaussienne dans les notes, on peut dériver $f(t)$ jusqu'à ce qu'on obtienne une équation différentielle linéaire en $f(t)$ et en prendre la transformée de Fourier pour obtenir une équation différentielle en $F(\omega)$. Si les équations différentielles sont identiques, il est possible que $f(t)$ soit auto-transformante.

On part de

$$f(t) = 2t\exp(-t^2/2). \tag{1}$$

On dérive :

$$f'(t) = 2\exp(-t^2/2) - 2t^2\exp(-t^2/2). \tag{2}$$

On dérive une deuxième fois :

$$f''(t) = -6t\exp(-t^2/2) + 2t^3\exp(-t^2/2) = -3f(t) + t^2 f(t). \tag{3}$$

On prend la transformée de Fourier de (3) :

$$(j\omega)^2 F'(\omega) = j^2 F''(\omega) - 3F(\omega). \tag{4}$$

On réarrange :

$$F''(\omega) = -3F(\omega) + \omega^2 2F(\omega). \tag{5}$$

Notez que cette équation différentielle est l'équation de Schrodinger pour un état de l'oscillateur harmonique quantique.

L'équation différentielle obtenue pour $F(\omega)$ est identique à celle obtenue pour $f(t)$. Il serait tenant de conclure directement que $F(\omega)$ est de la même forme que $f(t)$, mais puisque l'équation différentielle considérée est un équation linéaire homogène du deuxième ordre (et par conséquent a deux solutions linéairement indépendantes), il faut éliminer l'autre solution avant d'aller plus loin. Par un raisonnement qu'on ne développera pas ici, il est possible de démontrer que l'une des solutions diverge pour ω tendant vers l'infini et, par conséquent, n'est pas une candidate valide pour la TF de $f(t)$.

On sait donc maintenant que la TF de $f(t)$ a la forme suivante : $F(\omega) = k\omega\exp(-\omega^2/2)$. En appliquant le théorème de Parseval sur $f(t)$, on peut trouver le module de k :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |k|^2 |f(\omega)|^2 d\omega. \tag{6}$$

On en tire que $|k|^2/(2\pi) = 1$ et donc que $|k| = \sqrt{2\pi}$. À noter que que cette relation est vraie pour toutes les fonctions auto-transformantes.

Puisque $f(t)$ est impaire, on sait aussi que k doit être imaginaire.

Il reste maintenant à déterminer le signe de k. En utilisant la propriété qui relie la dérivée en fréquence à la fonction temporelle, on trouve :

$$\frac{t}{j} 2t \exp(-t^2/2) = -2jt^2 \exp(-t^2/2) \Longleftrightarrow k \frac{d}{d\omega} 2\omega \exp(-\omega^2/2). \tag{7}$$

En appliquant la relation $\int_{-\infty}^{\infty} g(t) = G(0)$ à l'équation 7 et en en remarquant que

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 \exp(-t^2/2) > 0 \tag{8}$$

et que

$$\frac{d}{d\omega} 2\omega \exp(-\omega^2/2) > 0, \tag{9}$$

on peut conclure que k est un nombre imaginaire négatif.

En combinant toutes les informations obenues sur k, on obtient $k = -j\sqrt{2\pi}$ et donc que

$$F(\omega) = -2j\sqrt{2\pi}\omega \exp(-\omega^2/2) \tag{10}$$