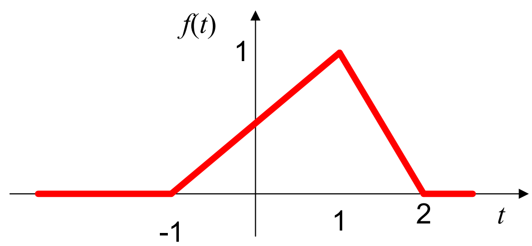
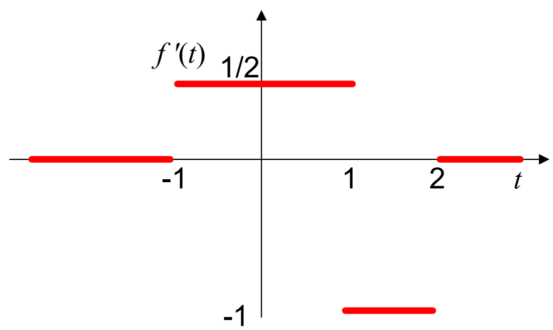
2003 Examen Partiel - *Solutions*

Problème 1



A. (9 points)

Méthode 1:



En utilisant l'approche du chapitre 5, on va examiner la dérivée de la fonction. La fonction est constante jusqu'à *t=-1*, donc la dérivée est nulle jusqu'à *t*=-1. De *t*=-1 à *t*=1 la fonction a une pente constante d'un demi, donc la dérivée est une constante, soit un demi. De *t*=1 à *t*=2, la pente est constante, égale à moins un, donc la dérivée est constante et égale à moins un. Après ce point la dérivée est nulle.

$$\frac{df}{dt} = \frac{1}{2}\mathrm{Rect}\left(\frac{t}{2}\right) - \mathrm{Rect}\left(\frac{t-3/2}{1}\right)$$

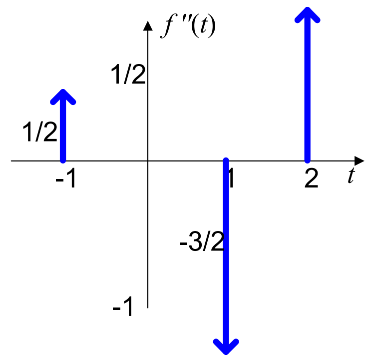
Le théorème de la différentiation en temps nous donne

$$\begin{aligned}
j\omega F(\omega) &= \frac{1}{2} TF\left\{\mathrm{Rect}\left(\frac{t}{2}\right)\right\} - TF\left\{\mathrm{Rect}\left(\frac{t-3/2}{1}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{2} TF\left\{\mathrm{Rect}\left(\frac{t}{2}\right)\right\} - e^{-j3\omega/2} TF\left\{\mathrm{Rect}(t)\right\} \\
&= \mathrm{Sa}(\omega) - e^{-j3\omega/2}\,\mathrm{Sa}(\omega/2)
\end{aligned}$$

$$F(\omega) = \frac{\mathrm{Sa}(\omega) - e^{-j3\omega/2}\,\mathrm{Sa}(\omega/2)}{j\omega}$$

On vérifie bien que la transformée est imaginaire, puisque *f*(*t*) est ni paire, ni impaire.✓

Méthode 2:
Nous pouvons aussi retrouver la transformée à partir de la deuxième dérivée avec le théorème de la différentiation dans le temps.



La deuxième dérivée est donnée par :

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = \frac{1}{2}\delta(t+1) - \frac{3}{2}\delta(t-1) + \delta(t-2)$$

Prenons la transformée de Fourier des deux cotés de l'équation,

$$\begin{aligned}(j\omega)^2 F(\omega) &= \frac{1}{2}TF\{\delta(t+1)\} - \frac{3}{2}TF\{\delta(t-1)\} + TF\{\delta(t-2)\} \\ &= \frac{1}{2}e^{j\omega} - \frac{3}{2}e^{-j\omega} + e^{-2j\omega} = \frac{1}{2}(e^{j\omega} - e^{-j\omega}) - e^{-j\omega} + e^{-2j\omega} \\ &= j\sin\omega - \left(e^{-j\omega} - e^{-2j\omega}\right) = j\sin\omega - e^{-j3\omega/2}\left(e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}\right) \\ &= j\sin\omega - 2je^{-j3\omega/2}\sin\frac{\omega}{2}\end{aligned}$$

Donc,

$$F(\omega) = \frac{\sin\omega - 2e^{-j3\omega/2}\sin\frac{\omega}{2}}{j\omega^2}$$

Méthode 3:

$$f(t) = \begin{cases} .5(t+1) & -1 < t < 1 \\ 2-t & 1 < t < 2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} = .5(t+1)\operatorname{Rect}\left(\frac{t}{2}\right) + (2-t)\operatorname{Rect}\left(\frac{t-3/2}{1}\right)$$

La transformée de Fourier du Rect est

$$\operatorname{Rect}\left(\frac{t}{2}\right) \Leftrightarrow 2\operatorname{Sa}(\omega)$$

$$\operatorname{Rect}\left(\frac{t-3/2}{1}\right) \Leftrightarrow e^{-j3\omega/2}\operatorname{Sa}(\omega/2)$$

Donc, en exploitant la propriété

$$tf(t) \Leftrightarrow j\frac{dF(\omega)}{d\omega}$$

Nous savons que

$$\begin{aligned}F(\omega) &= 2\,\mathrm{Sa}(\omega) + 2j\frac{d}{d\omega}\mathrm{Sa}(\omega) + e^{-j3\omega/2}\,\mathrm{Sa}(\omega/2) + j\frac{d}{d\omega}e^{-j3\omega/2}\,\mathrm{Sa}(\omega/2) \\ &= 2\,\mathrm{Sa}(\omega) + 2j\frac{d}{d\omega}\frac{\sin(\omega)}{\omega} + e^{-j3\omega/2}\,\mathrm{Sa}(\omega/2) + j\frac{d}{d\omega}\frac{e^{-j3\omega/2}\sin(\omega/2)}{\omega/2}\end{aligned}$$, etc.

Méthode 4:
Il est toujours possible de calculer la transformée en utilisant l'équation d'analyse.

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-1}^{1} -.5(t+1)e^{-j\omega t}dt + \int_{1}^{2}(2-t)e^{-j\omega t}dt$$, etc.

$\boxed{\#1}$ A. Avec $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{-j\omega t}$

on a: $F(\omega) = \int_{-1}^{1} 0.5(t+1)e^{-j\omega t}dt + \int_{+1}^{2}(2-t)e^{-j\omega t}dt$

Avec des intégrales par parties on a:

$u_1 = t+1 \quad dv_1 = e^{-j\omega t}dt = dv_2 \quad u_2 = 2-t$

$$F(\omega) = 0{,}5\left[\frac{(t+1)e^{-j\omega t}}{-j\omega}\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}dt\right] + \left[\frac{(2-t)e^{-j\omega t}}{-j\omega} + \int_{1}^{2}\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}dt\right]$$

$$= 0{,}5\left[\frac{2e^{-j\omega}}{-j\omega} - 0 - \frac{e^{-j\omega t}}{\omega^2}\Big|_{-1}^{1}\right] + \left(\frac{+e^{-j\omega}}{j\omega} + \frac{e^{-j\omega t}}{\omega^2}\Big|_{1}^{2}\right)$$

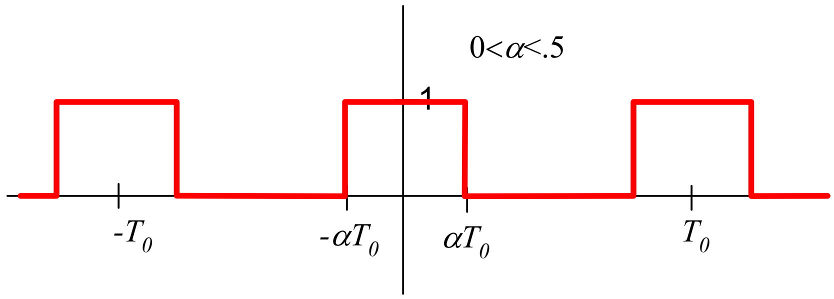
$$= -\cancel{\frac{e^{-j\omega}}{j\omega}} - \frac{1}{2}\left(\frac{e^{-j\omega}}{\omega^2} - \frac{e^{j\omega}}{\omega^2}\right) + \cancel{\frac{e^{-j\omega}}{j\omega}} + \frac{e^{-2j\omega}}{\omega^2} - \frac{e^{-j\omega}}{\omega^2}$$

$$= -\frac{3}{2\omega^2}e^{-j\omega} + \frac{1}{2\omega^2}e^{j\omega} + \frac{1}{\omega^2}e^{-2j\omega}$$

$$= \frac{1}{\omega^2}\left[e^{-2j\omega} - \frac{3}{2}e^{-j\omega} + \frac{1}{2}e^{j\omega}\right]$$

B. (1 point)
La fonction $f(t)$ est continue, mais sa première dérivée a deux discontinuités, donc la décroissance est comme $1/\omega^2$.

Problème 2



A. (8 points)
La restriction de la fonction est

$$f_r(t) = \text{Rect}\left(\frac{t}{2\alpha T_0}\right)$$

La transforme de la restriction est

$$\begin{aligned}F_r(\omega) &= TF\left\{\text{Rect}\left(\frac{t}{2\alpha T_0}\right)\right\} = 2\alpha T_0 \,\text{Sa}\left(2\alpha T_0\, \omega/2\right) \\ &= 2\alpha T_0 \,\text{Sa}\left(\omega \alpha T_0\right) \\ &= \frac{2}{\omega}\sin\left(\omega\alpha T_0\right)\end{aligned}$$

Les coefficients de la série de Fourier sont

$$\begin{aligned}F(n) &= \frac{1}{T_0}F_r(n\omega_0) = \frac{1}{T_0}2\alpha T_0\,\text{Sa}\left(2\alpha T_0\, n\omega_0/2\right) = 2\alpha\,\text{Sa}\left(\alpha T_0 n\omega_0\right) \\ &= 2\alpha\,\text{Sa}\left(2\pi n\alpha\right) \\ &= \frac{\sin\left(2\pi n\alpha\right)}{\pi n}\end{aligned}$$

Pour n=0,

$$F(n=0) = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)\,dt = \frac{1}{T_0}\int_{-\alpha T_0}^{\alpha T_0} dt = 2\alpha$$

En résumé,

$$F(n) = \begin{cases} 2\alpha \,\mathrm{Sa}\left(2\pi n\alpha\right) & n \neq 0 \\ 2\alpha & n = 0 \end{cases} = 2\alpha \,\mathrm{Sa}\left(2\pi n\alpha\right)$$

La transformée de Fourier est donc

$$\begin{aligned} F(\omega) &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_{Série}(n)\delta(\omega - n\omega_0) \\ &= 4\pi\alpha \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{Sa}(2\pi n\alpha)\delta(\omega - 2\pi n/T_0) \\ &= 2\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(2\pi n\alpha)}{n}\delta(\omega - 2\pi n/T_0) \\ &= 4\pi\alpha \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{Sinc}(2n\alpha)\delta(\omega - 2\pi n/T_0) \end{aligned}$$

B. (4 points)
La puissance dans la bande de fréquence indiquée est

$$P(-2\omega_0 \le \omega \le 2\omega_0) = \sum_{n=-2}^{2} \left|F(n)\right|^2 = \left|F(0)\right|^2 + 2\left|F(1)\right|^2 + 2\left|F(2)\right|^2$$

Nous calculons les coefficients pour le DC et les premiers 2 harmoniques

$$\begin{aligned} &F(n=0) = 2\alpha \\ &F(n=1) = F(n=-1) = 2\alpha\,\mathrm{Sa}(2\pi\alpha) = \frac{\sin 2\pi\alpha}{\pi} \\ &F(n=2) = F(n=-2) = 2\alpha\,\mathrm{Sa}(4\pi\alpha) = \frac{\sin 4\pi\alpha}{2\pi} \end{aligned}$$

La puissance totale est

$$P = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \left|f(t)\right|^2 dt = \frac{1}{T_0}\int_{-\alpha T_0}^{\alpha T_0} dt = 2\alpha$$

Donc le pourcentage de la puissance dans la bande de fréquence indiquée est

$$\frac{P(-2\omega_0 \le \omega \le 2\omega_0)}{P} = \frac{4\alpha^2 + 2\dfrac{\sin^2 2\pi\alpha}{\pi^2} + 2\dfrac{\sin^2 4\pi\alpha}{4\pi^2}}{2\alpha} = 2\alpha + \frac{\sin^2 2\pi\alpha}{\alpha\pi^2} + \frac{\sin^2 4\pi\alpha}{4\alpha\pi^2}$$

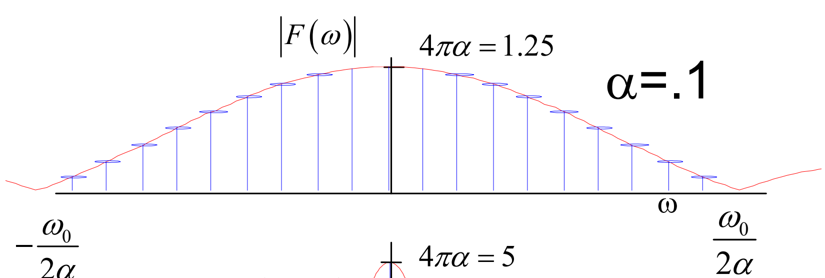
C. (2 points)
Calcul pour α=.01, α=.1, α=.4 :

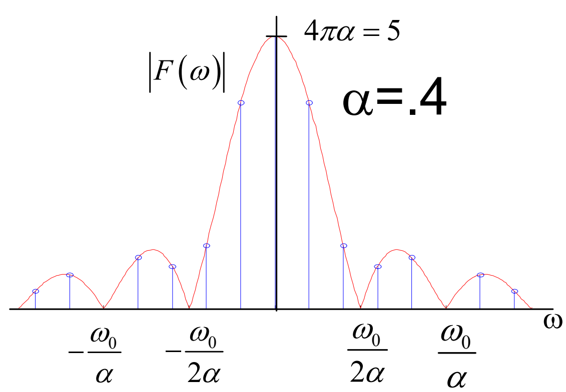
$$\alpha{=}.01 \qquad 2(.01)+\frac{\sin^2 .063}{.099}+\frac{\sin^2 .126}{.395}=10\%$$
$$\alpha{=}.1 \qquad 2(.1)+\frac{\sin^2 .63}{.99}+\frac{\sin^2 1.26}{3.95}=78\%$$
$$\alpha{=}.4 \qquad 2(.4)+\frac{\sin^2 2.5}{3.9}+\frac{\sin^2 5.0}{16}=94\%$$

D. (4 points)
L'enveloppe du spectre d'amplitude est

$$2\alpha\,\mathrm{Sa}\left(\frac{2\pi\alpha\omega}{\omega_0}\right)$$

et le spectre d'amplitude est non-nulle aux harmoniques de ω_0. Le premier zéro de l'enveloppe est à $\omega=\omega_0/2\alpha$. Pour α petite, l'enveloppe est très large et la bande $-2\omega_0 \le \omega \le 2\omega_0$ ne représente pas une grosse pourcentage de la puissance totale. Quand α est plus grande l'enveloppe est plus mince et la bande contient une plus grande pourcentage de la puissance totale. Pour α =.4 cette bande représente la lobe primaire. Dans la limite que $\alpha \to .5$ la fonction est constante et la transformée sera une seule fonction delta à DC. Quand α=.5, les coefficients $\mathrm{Sa}(2\pi n\alpha)$ sont non-nulles juste pour n=0.





Problème 3

A. (10 points)

Pour trouver la transformée de

$$f(t) = \frac{t}{\left(1+t^2\right)^2}$$

Nous commençons avec

$$e^{-\beta|t|} \Leftrightarrow \frac{2\beta}{\beta^2+\omega^2}$$

D'après la dualité on peut avoir

$$\frac{2\beta}{\beta^2+t^2} \Leftrightarrow 2\pi e^{-\beta|\omega|}$$

Pour β=1

$$\frac{1}{1+t^2} \Leftrightarrow \pi e^{-|\omega|}$$

Maintenant nous prenons la dérivée de la fonction en temps et exploitons

$$\frac{df(t)}{dt} \Leftrightarrow j\omega F(\omega)$$

Donc

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{1+t^2} \Leftrightarrow j\omega\pi e^{-|\omega|}$$

$$\frac{-2t}{\left(1+t^2\right)^2} \Leftrightarrow j\omega\pi e^{-|\omega|}$$

$$\frac{t}{\left(1+t^2\right)^2} \Leftrightarrow \frac{\omega}{2j}\pi e^{-|\omega|}$$

B. (2 points)

La valeur DC de la transformée est zéro après le résultat de partie A. Même sans calculer la transformée nous pouvons chercher la valeur DC à partir de l'intégrale

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt \quad \Rightarrow \quad F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{\left(1+t^2\right)^2}dt$$

La fonction est impaire, donc il faut que l'intégrale de moins infinité à infinité soit zéro.