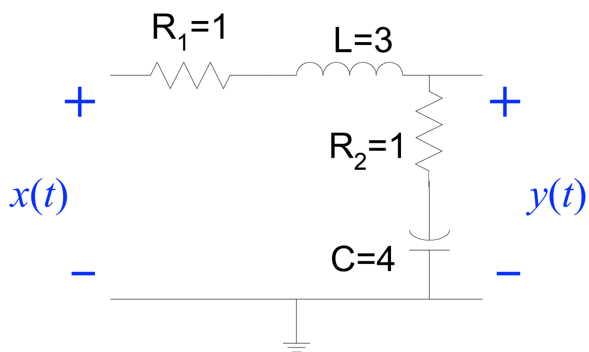
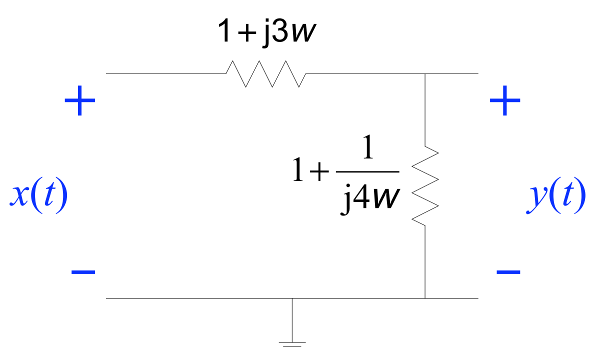
1998 Examen Final - *Solutions*

Problème 1



En remplaçant la bobine et le condensateur par leur impédance complexe, nous obtenons le diviseur de tension suivant



La relation entre les transformée de Fourier de l'entrée et la sortie est donc

$$H(\omega)=\frac{Y(\omega)}{X(\omega)}=\frac{1+\frac{1}{j4\omega}}{1+\frac{1}{j4\omega}+1+j3\omega}=\frac{1+j4\omega}{1+j8\omega-12\omega^2}$$

Nous pouvons factoriser le dénominateur pour arriver à

$$H(\omega)=\frac{1+j4\omega}{(1+j2\omega)(1+j6\omega)}$$

Pour chercher la transformée inverse (c'est à dire la réponse impulsionnelle), nous utilisons les fractions partielles

$$H(\omega) = \frac{A}{1 + j2\omega} + \frac{B}{1 + j6\omega}$$

Après un peu d'algèbre, nous trouvons

$$A = B = \frac{1}{2}$$

Donc,

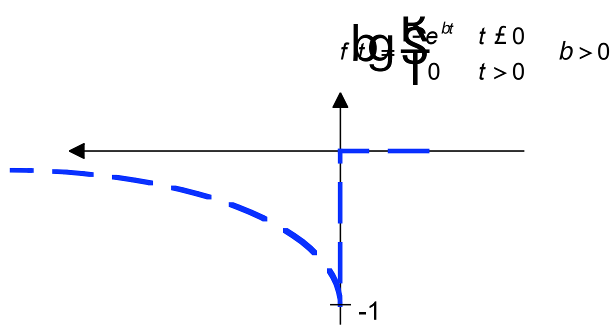
$$H(\omega) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 + j2\omega} + \frac{1}{1 + j6\omega}\right) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2} + j\omega} + \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{6} + j\omega}$$

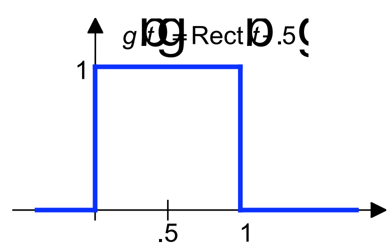
Nous trouvons transformée inverse dans la table des transformées de Fourier fourni :

$$h(t) = \frac{1}{4}e^{-t/2}U(t) + \frac{1}{12}e^{-t/6}U(t) = \frac{1}{12}U(t)\left[3e^{-t/2} + e^{-t/6}\right]$$

b) Comme $h(t)$=0 pour t<0 (voir la fonction échelon) le système est causal.

Problème 2

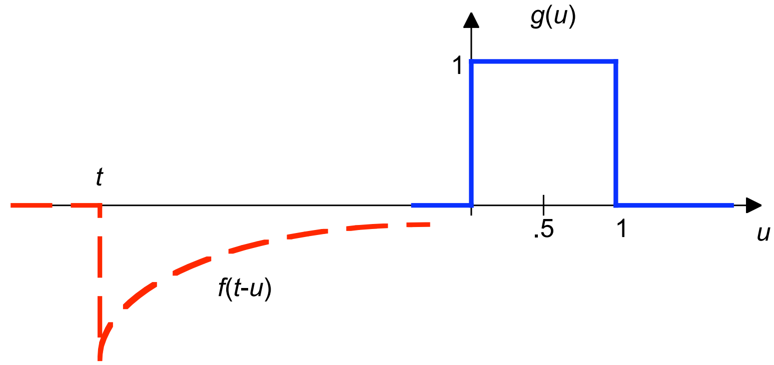




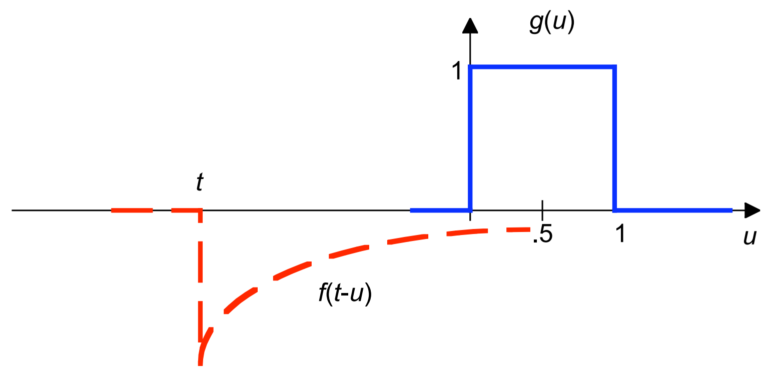
Prenons l'exponentielle pour faire le déplacement. L'équation de *f*(*t*-*u*) est

$$f(t-u)=\begin{cases}-e^{\beta(t-u)} & t-u\le 0\\ 0 & t-u>0\end{cases} \quad =\begin{cases}-e^{\beta t}e^{-\beta u} & t\le u\\ 0 & t>u\end{cases}$$

et le graphique est



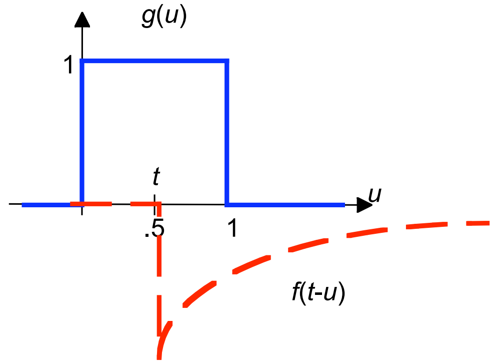
Il y a trois régions de définition pour la convolution. Pour *t*<0, l'exponentielle recouvre tout le rectangle. L'intégration couvre 0<*u*<1 où le rectangle vaut 1, et où *f*(*t*-*u*) est encore égale à $-e^{\beta t}e^{-\beta u}$ comme $t\le u$.



Dans cette région de définition

$$\begin{aligned} f*g &= \int_0^1 -e^{\beta t}e^{-\beta u}du \qquad t\le 0\\ &= -e^{\beta t}\int_0^1 e^{-\beta u}du\\ &= -e^{\beta t}\left.\frac{e^{-\beta u}}{\beta}\right|_0^1 = -\frac{e^{\beta t}}{\beta}\left[e^{-\beta}-1\right]\end{aligned}$$

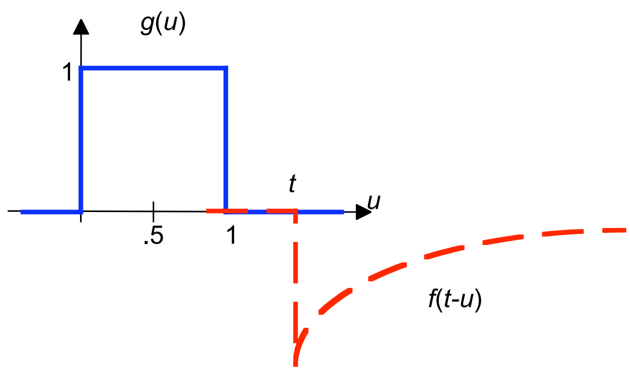
Pour 0<*t*<1, l'exponentielle couvre partiellement le rectangle



L'intégrale sera donc de *t* à 1 pour cette région. La fonction rectangle vaut 1 et *f*(*t*-*u*) est encore égale à $-e^{\beta t}e^{-\beta u}$ comme $t \le u$.

$$
\begin{aligned}
f * g &= \int_t^1 -e^{\beta t}e^{-\beta u}du \qquad 0<t<1 \\
&= -e^{\beta t}\int_t^1 e^{-\beta u}du \\
&= -e^{\beta t}\frac{e^{-\beta u}}{\beta}\bigg|_t^1 = -\frac{e^{\beta t}}{\beta}\left[e^{-\beta} - e^{-\beta t}\right] = -\frac{e^{\beta t}e^{-\beta}-1}{\beta}
\end{aligned}
$$

Quant *t*>1, il n'y a pas de recouvrement entre *f*(*t-u)* et *g*(*u*), donc la convolution est nulle.

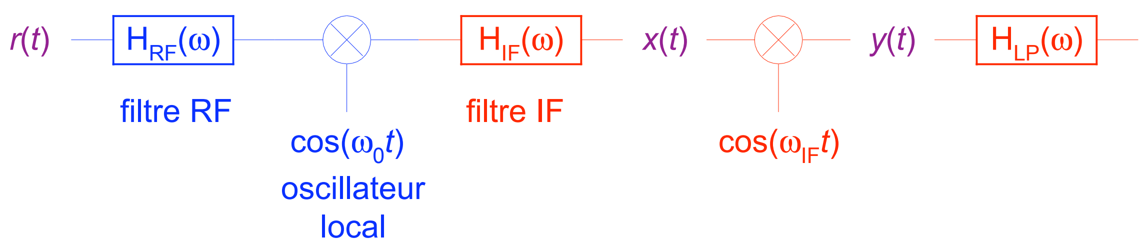


Cette convolution est donc

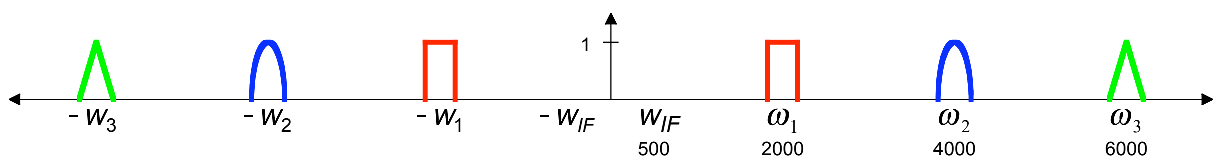
$$f * g = \begin{cases} -\dfrac{e^{\beta t}}{\beta}\left[e^{-\beta} - 1\right] & t \le 0 \\ -\dfrac{e^{\beta t} e^{-\beta} - 1}{\beta} & 0 < t < 1 \\ 0 & t \ge 1 \end{cases}$$

Problème 3

Voici une portion du récepteur superhétérodyne que nous avons vu en classe.



Le spectre du signal reçu $r(t)$ est



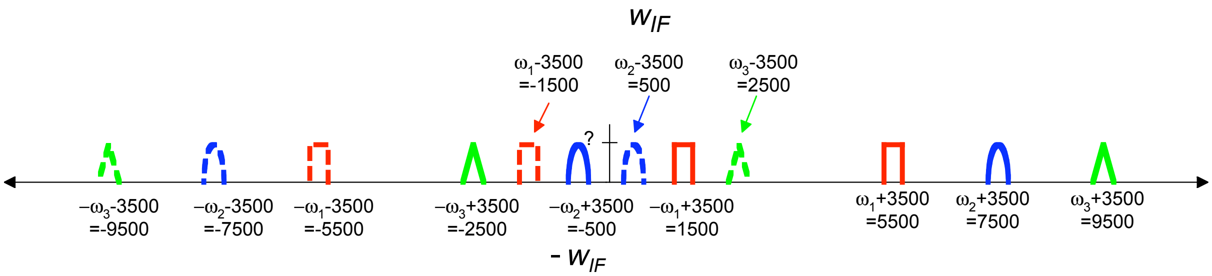
$$H_{IF}(\omega) = \begin{cases} 1 & 490 < |\omega| < 510 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Le filtre LP a le réponse en fréquence suivant

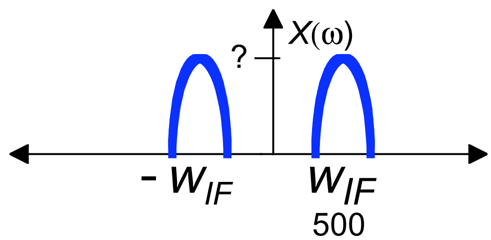
$$H_{LP}(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < 10 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

a)(4 pts) Nous voulons recevoir le signal à 4,000. Trouvez une fréquence de l'oscillateur local ω_0 qui permet cette réception, i.e. qui amène le signal de 4,000 à 500. Tracez les spectres avant et après la modulation IF, c'est-à-dire, $X(\omega)$ et $Y(\omega)$

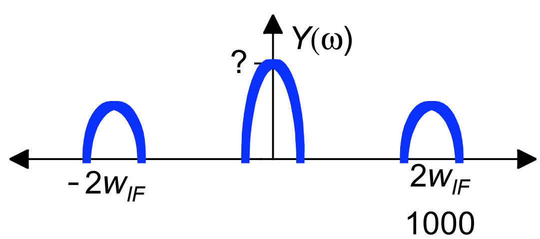
Afin d'amener le signal de 4000 à 500, l'oscillateur local doit être à 3500 ou 4500, choisissons 3500. Après la première modulation le spectre original sera déplacer par 3500 à gauche et une deuxième copie du spectre original sera déplacer par 3500 à droite. Le spectre après l'oscillateur local est donné dans le graphique suivant, avec la copie à gauche tracée en lignes solides et la copie à droite tracée en lignes pointillés.



Après le filtre IF nous allons couper tous les composants sauf le signal désiré

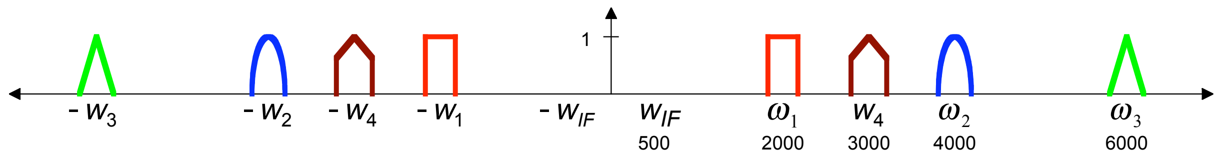


Le spectre après la modulation IF, c'est-à-dire, $Y(\omega)$ est

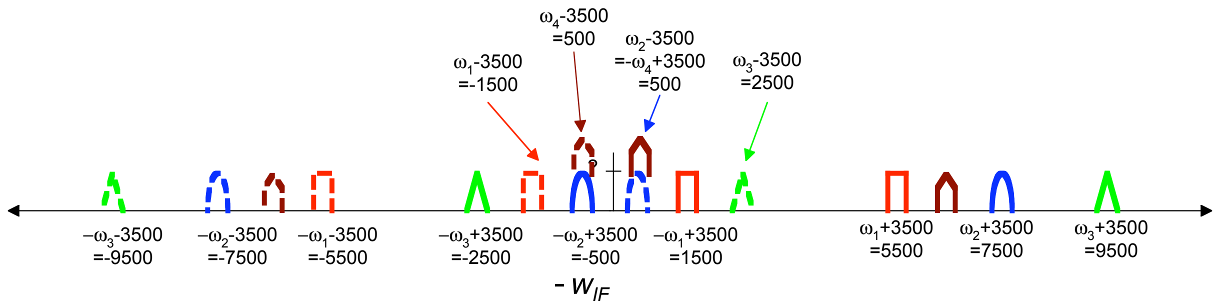


Et nous avons notre signal désiré à bande de base

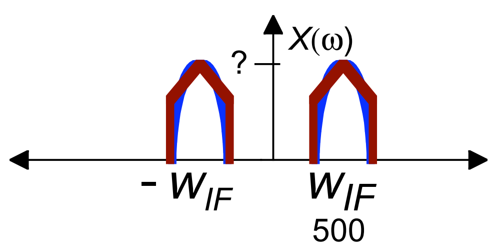
b) Supposons que le signal reçu a le spectre



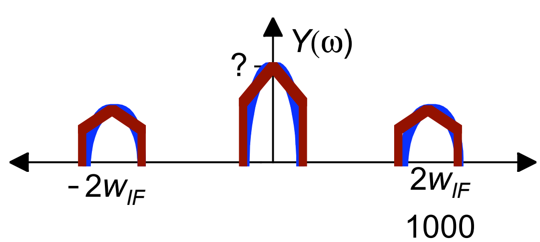
Après la modulation par l'oscillateur local le spectre sera



On remarque que une copie du signal à –3000 tombe à 500, tout comme une copie du signal à 4000. Ils sont maintenant confondus



Le spectre après la modulation IF, c'est-à-dire, $Y(\omega)$ est

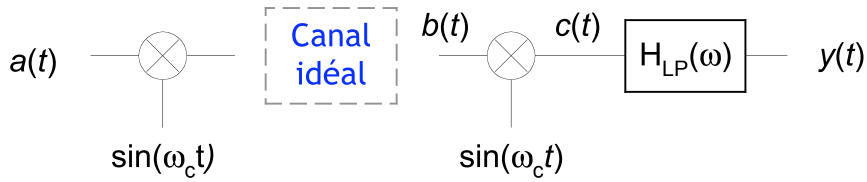


c) Avec l'aide d'un filtre RF pas très étroit autour de 4000, l'on peut seulement conserver le deuxième signal. Par exemple,

$$H_{RF}(\omega)=\begin{cases}1 & 3500<|\omega|<4500\\ 0 & \text{ailleurs}\end{cases}$$

Le filtre doit être syntonisable sur une large bande afin de choisir le signal que l'on veut.

Problème 4



a) Nous avons que $b(t) = a(t)\sin\omega_c t$, donc

$$B(\omega) = \frac{1}{2\pi}A(\omega) * \frac{\pi}{j}\left[\delta(\omega-\omega_0) - \delta(\omega+\omega_0)\right]$$
$$= \frac{1}{2\mathrm{j}}\left[A(\omega-\omega_0) - A(\omega+\omega_0)\right]$$

Et après la démodulation nous aurons,

$$C(\omega) = \frac{1}{2\pi}B(\omega) * \frac{\pi}{j}\left[\delta(\omega-\omega_0) - \delta(\omega+\omega_0)\right]$$
$$= \frac{1}{2\mathrm{j}}\left[B(\omega-\omega_0) - B(\omega+\omega_0)\right]$$
$$= -\frac{1}{4}\left[A(\omega-\omega_0-\omega_0) - A(\omega-\omega_0+\omega_0) - A(\omega+\omega_0-\omega_0) + A(\omega+\omega_0+\omega_0)\right]$$
$$= \frac{1}{4}\left[2A(\omega) - A(\omega-2\omega_0) - A(\omega+2\omega_0)\right]$$

Nous savons que *a*(*t*) est limité en bande à $B \ll \omega_c$ donc, après le passage par un filtre passe-bas, seulement la copie de *A*(ω) restera.

$$Y(\omega) = \frac{1}{2}A(\omega)$$

b) Le message est une fonction périodique. Pour trouver la transformée, nous allons utiliser la restriction de *m*(*t*) qui est juste *p*(*t*). Comme *m*(*t*) est périodique, sa transformée est donnée dans la table comme

$$M(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} M(n)\delta(\omega - n\omega_0)$$

La période est 2τ, donc $\omega_0 = \dfrac{\pi}{\tau}$. Il faut chercher les coefficients de la série de Fourier en utilisant la transformée de la restriction (voir table)

$$M(n) = \frac{P(\omega)\big|_{n\omega_0}}{T_0} = \frac{1}{2\tau}\left[\frac{-2\pi\tau\cos\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\omega^2\tau^2 - \pi^2}\right]_{n\pi/\tau}$$

ou nous avons utilisé la transformée donné dans le problème.

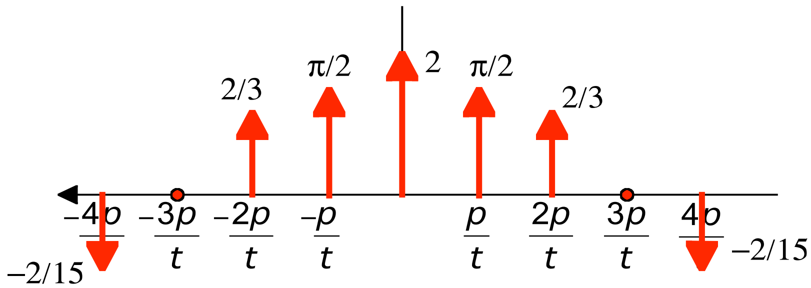
$$M(n) = -\pi\left[\frac{\cos\left(\frac{n\pi\tau}{\tau 2}\right)}{\left(\frac{n\pi}{\tau}\right)^2\tau^2 - \pi^2}\right] = -\pi\left[\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{(n\pi)^2 - \pi^2}\right]$$

$$= -\frac{1}{\pi}\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2 - 1} = \begin{cases} -\dfrac{1}{\pi}\dfrac{(-1)^{n/2}}{n^2-1} & n \text{ pair} \\ \dfrac{1}{4} & n = 1 \\ 0 & n \text{ impair}, n \neq 1 \end{cases}$$

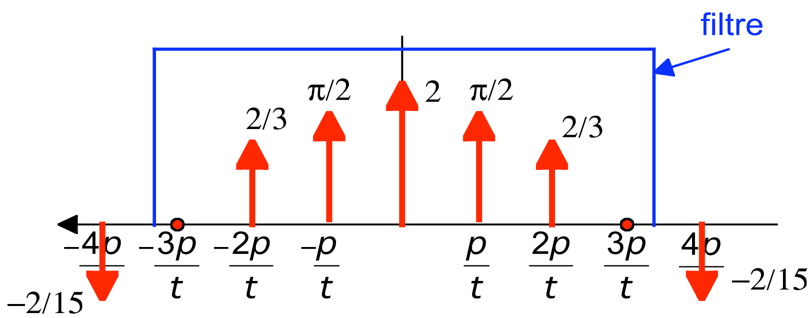
La transformée est donc

$$M(\omega) = \frac{\pi}{2}\delta\left(\omega - \frac{\pi}{\tau}\right) + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\ pair}}^{\infty} -2\frac{(-1)^{n/2}}{n^2-1}\delta\left(\omega - \frac{n\pi}{\tau}\right) + \frac{\pi}{2}\delta(\omega + \pi/\tau)$$

avec le spectre suivant



c) Pour trouver $A(\omega)$ = transformée de Fourier de $a(t)$ il faut réaliser que $3\pi < 10 < 4\pi$, donc le rectangle du filtre passe bas tombe entre les termes M(2) et M(3), et entre M(-2) et M(-3).



Donc à la sortie, il restera que cinq impulsions,

$$A(\omega)=2\pi M(0)\delta(\omega)+2\pi M(1)\delta\left(\omega-\frac{\pi}{\tau}\right)$$

$$+2\pi M(-1)\delta\left(\omega+\frac{\pi}{\tau}\right)+2\pi M(2)\delta\left(\omega-\frac{2\pi}{\tau}\right)+2\pi M(-2)\delta\left(\omega+\frac{2\pi}{\tau}\right)$$

$$=2\delta(\omega)+\frac{\pi}{2}\delta\left(\omega-\frac{\pi}{\tau}\right)+\frac{\pi}{2}\delta\left(\omega+\frac{\pi}{\tau}\right)+\frac{2}{3}\delta\left(\omega-\frac{2\pi}{\tau}\right)+\frac{2}{3}\delta\left(\omega+\frac{2\pi}{\tau}\right)$$

Le graphique est