GEL-4101/7012 Introduction au traitement de signal
Département de génie électrique et de génie informatique
H-14

Examen partiel

Enseignant : Paul Fortier
Durée : 2 heures 50 minutes

Remarques importantes : seules les calculatrices approuvées par la Faculté des sciences et de génie sont permises. Donnez tous les détails de vos calculs.

Question 1

(*20 points*) Soit

$$X(z) = \frac{4 - 0.6z^{-1} + 0.2z^{-2}}{(1 - 0.5z^{-1})(1 + 0.4z^{-1})}$$

En utilisant la technique d'expansion en fractions partielles, déterminez toutes les transformée en z inverses de $X(z)$. Pour chacune des transformées inverses, tracez la région de convergence (ROC) et discutez de la stabilité et de la causalité.

Question 2

Une chaîne idéalisée de traitement en temps discret d'un signal en temps continu est illustrée à la figure 1. La fréquence de coupure du filtre passe-bas idéal est ω_c. Un signal réel en temps continu, $x_c(t)$, est placé à l'entrée de ce système. Le spectre de $x_c(t)$ est montré à la figure 2.

a) (*10 points*) On suppose que $x_c(t)$ est échantillonné à la fréquence de Nyquist. Calculez ω_c pour obtenir un signal continu à la sortie $y_c(t)$ ayant un spectre tel qu'illustré à la figure 3. Tracez les spectres des signaux $x[n]$ et $y[n]$.

b) (*5 points*) Sans nécessairement retracer les spectres, calculez ω_c si le signal est échantillonné à 5 fois la fréquence de Nyquist.

c) (*10 points*) Est-il possible d'obtenir le spectre donné à la figure 3 en échantillonnant en bas de la fréquence de Nyquist ? Si oui, donnez la fréquence d'échantillonnage minimale et la valeur de ω_c. Sinon, expliquez pourquoi. Dans les deux cas, justifiez bien votre réponse.

Question 3

Un signal discret composé de trois impulsions (A, B et C) est illustré à la figure 4. La figure 5 présente le module de la transformée de Fourier de ce signal (fréquences positives seulement). Notez que le spectre correspondant à chacune des impulsions est identifié. Ce signal est filtré par un système linéaire invariant dans le temps et causal. Le module de la réponse en fréquence de ce système (fréquences positives seulement) est illustré à la figure 6 tandis que son retard de groupe en fonction de la fréquence (fréquences positives seulement) est montré à la figure 7.

a) (*10 points*) Tracez à main levée la sortie de ce système en fonction du temps. Identifiez bien la ou les impulsions à la sortie (A, B ou C) de même que les amplitudes maximales approximatives et les positions temporelles approximatives.

b) (*10 points*) Si vous aviez à réaliser un système ayant un module et un retard de groupe similaire à ce qui est illustré aux figures 6 et 7, où placeriez-vous les pôles et les zéros ? Justifiez votre réponse et illustrez-la en traçant approximativement un diagramme pôles-zéros. Indiquez si les pôles ou les zéros sont multiples.

Question 4

Soit le système causal, linéaire et invariant dans le temps

$$H(z) = \frac{(1+4z^{-2})(1-\frac{3}{2}z^{-1}-z^{-2})}{(1-\frac{9}{16}z^{-2})(1-z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2})}$$

a) *(5 points)* Tracez le diagramme pôles-zéros de $H(z)$.

b) *(5 points)* $H(z)$ est-il stable ? Expliquez.

c) *(5 points)* Le système $1/H(z)$ est-il stable et causal ? Expliquez.

d) *(10 points)* Trouvez $H_1(z)$ tel que $H(z)H_1(z)$ soit stable et causal et $|H(z)H_1(z)| = 1$

Question 5

Soit l'équation aux différences

$$y[n] = x[n] - 0.9x[n-1] + 0.2x[n-2] + 0.5y[n-1] - 0.6y[n-2]$$

a) *(5 points)* Trouvez la fonction de transfert $H(z)$ correspondant à ce système.

b) *(5 points)* Tracez le graphe de fluence pour une implémentation de $H(z)$ sous la forme directe II transposée.

c) *(10 points)* Tracez le graphe de fluence pour une implémentation de $H(z)$ en une cascade d'éléments du premier ordre sous la forme directe II.

Question 6

Soit le système linéaire invariant dans le temps donné à la figure 8 avec

$$H_1(z) = \frac{1+z^{-1}}{1-0.5z^{-1}} \quad \text{et} \quad H_2(z) = \frac{0.4(1-z^{-1})}{(1-0.4z^{-1})}$$

a) *(10 points)* Sans en calculer la fonction de transfert globale, tracez le graphe de fluence pour ce système calqué sur la structure montrée à la figure 8. Pour $H_1(z)$ et $H_2(z)$, utilisez la forme directe II.

b) *(10 points)* Calculez maintenant la fonction de transfert globale de ce système, $H(z)$, et tracez le graphe de fluence pour une implémentation sous la forme directe II.

c) *(5 points)* Comparez le nombre d'additionneurs, d'éléments de retard et de multiplicateurs (ne comptez pas les multiplications par 1) des graphes obtenus en a) et en b). Commentez.

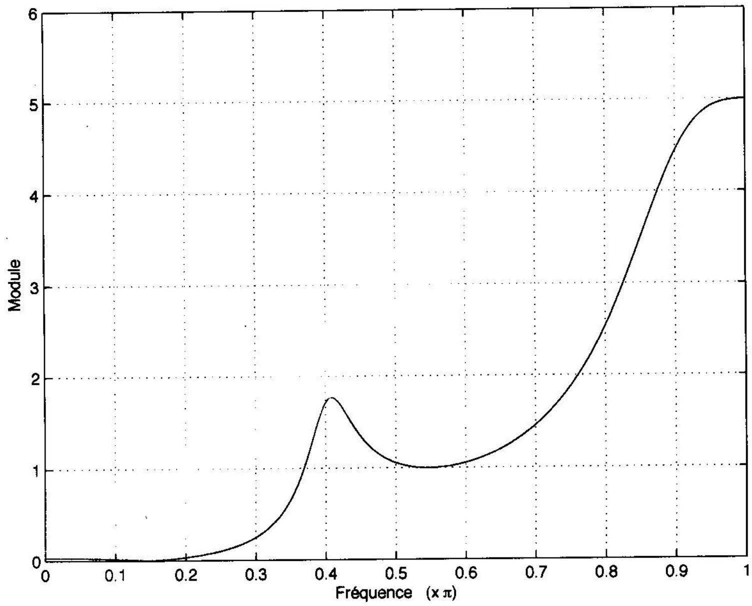

FIGURE 6 – Amplitude (module) de la réponse en fréquence du système.

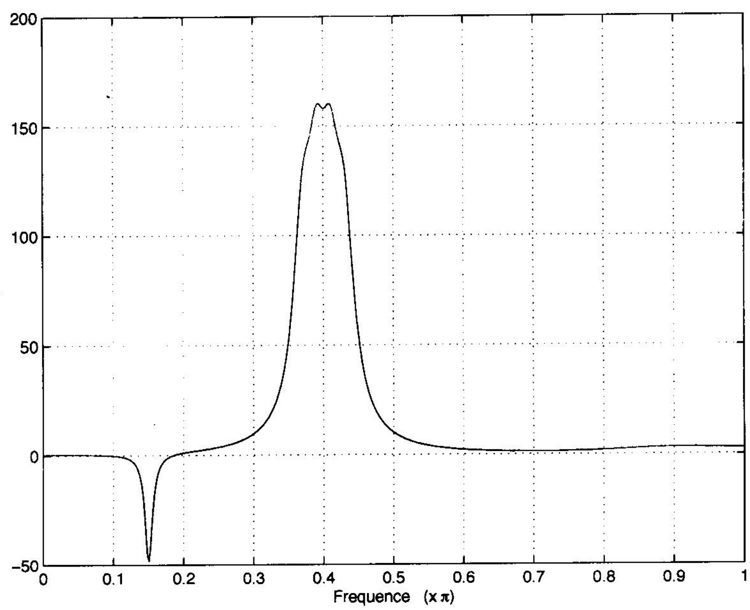

FIGURE 7 – Retard de groupe du système.

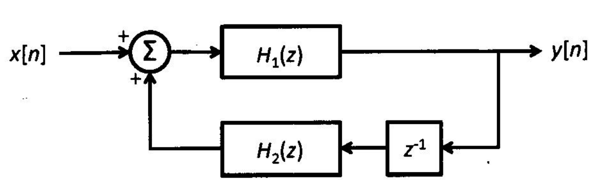

FIGURE 8 – Système linéaire et invariant dans le temps.

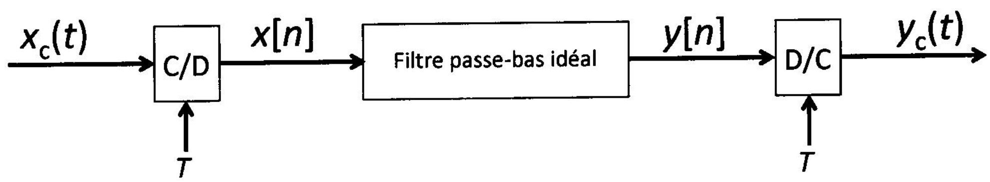

FIGURE 1 – Chaîne idéalisée de traitement en temps discret d'un signal en temps continu.

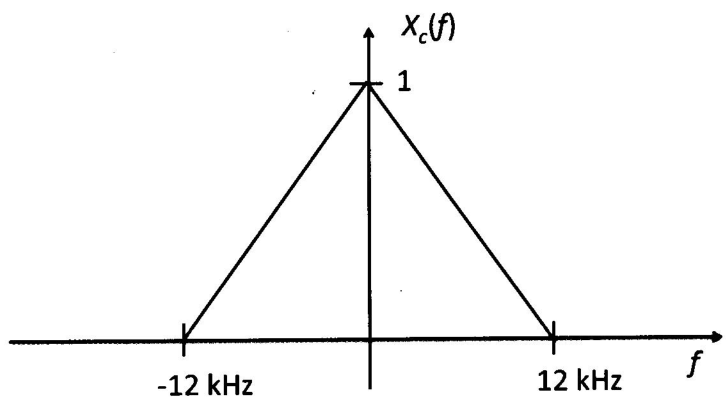

FIGURE 2 – Spectre du signal continu à l'entrée.

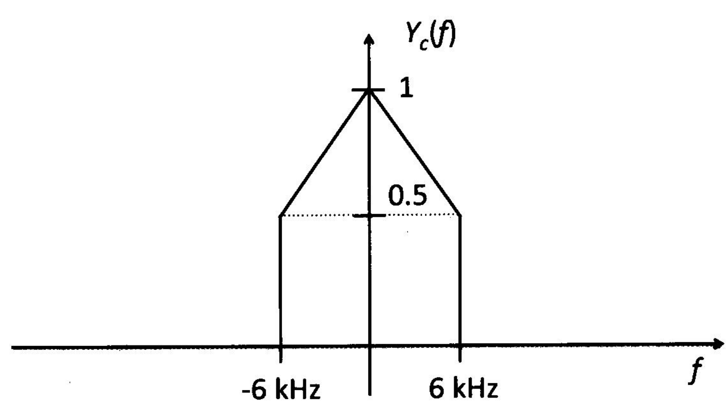

FIGURE 3 – Spectre du signal continu à la sortie.

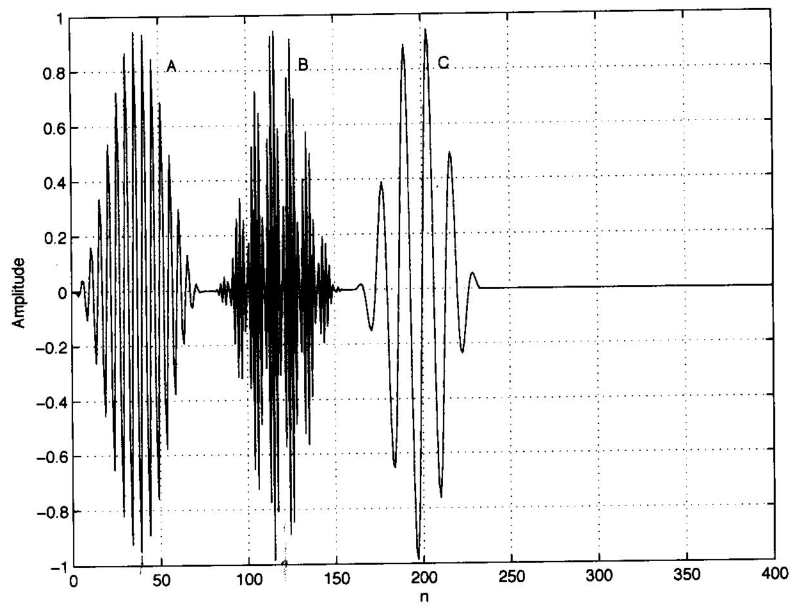

FIGURE 4 – Impulsions.

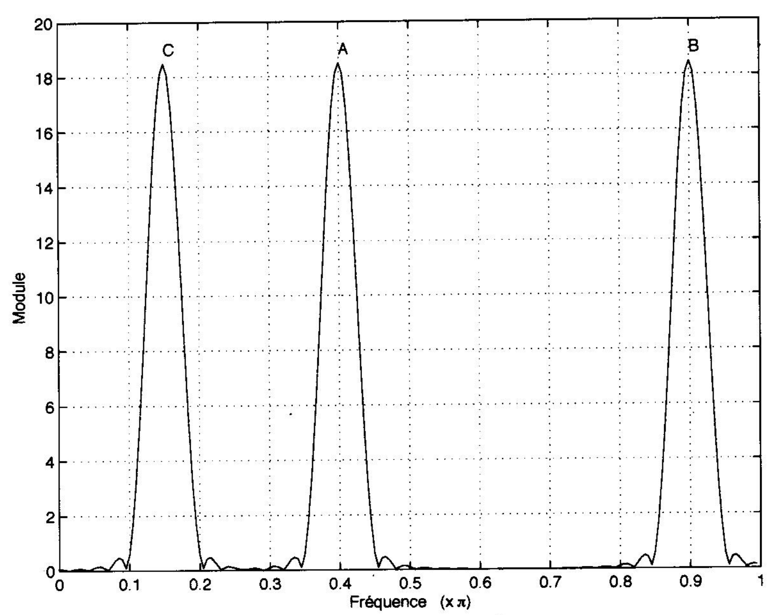

FIGURE 5 – Transformée de Fourier du signal.