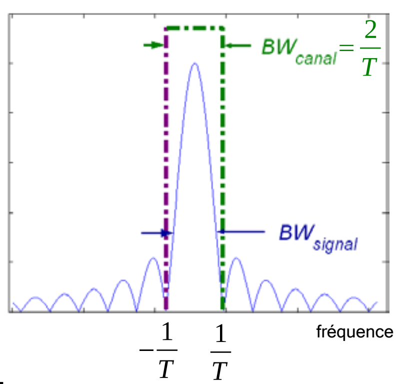
2007 Examen partiel – Solutionnaire

Problème 1 (25 points sur 100)

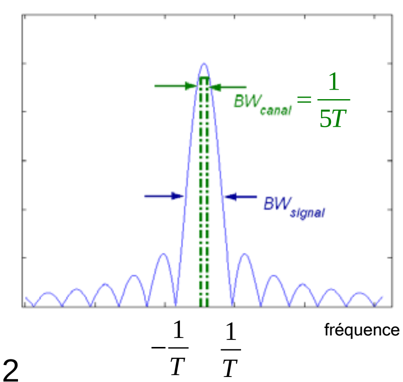
A. (15 points) Complétez la table suivante.

Format de modulation	Dimensionnalité de l'espace du signal	Symboles d'énergie égale (oui/non)	Modulation orthogonale (oui/non)
16PSK	2	Oui	Non
OOK	1	Non	Oui
BPSK	1	Oui	Non
64QAM	2	Non	Non
8FSK	8	Oui	Oui
DPSK	1	Oui	Non

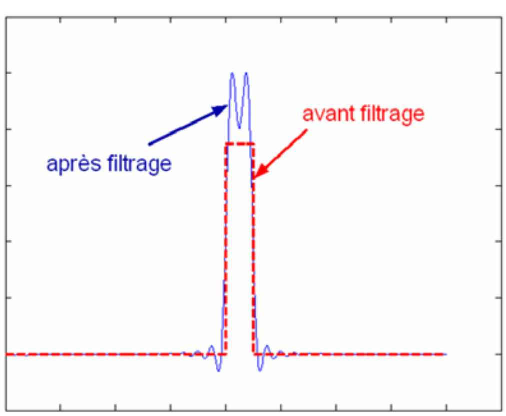
B. (10 points) Considérez une impulsion rectangulaire en temps avec duré T. Comment est-ce que l'impulsion sera modifiée en passant par un canal limité en largeur de bande? Considérez les deux cas suivants pour la largeur de bande du canal.

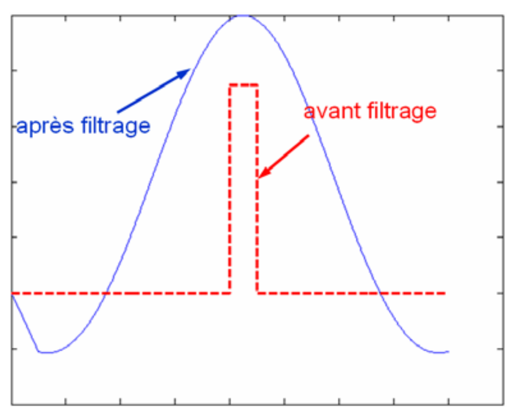


Cas 1



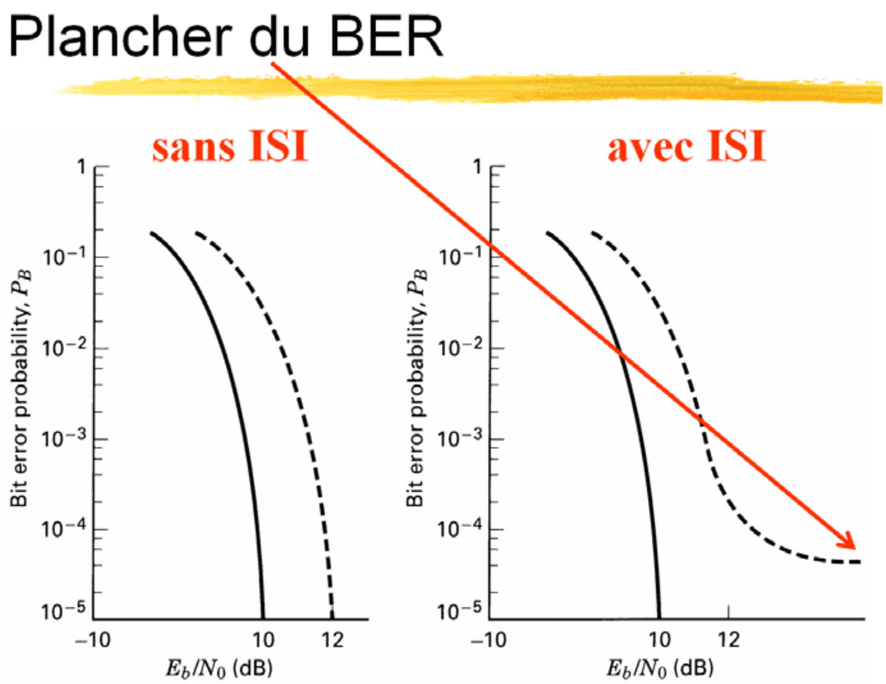
Cas 2





Pour le deuxième cas nous aurons de l'interférence intersymbol qui peut engendre un plancher de BER.

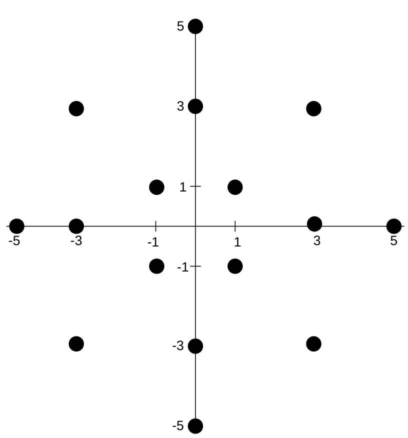
C. (10 points) Donnez une esquisse typique d'une graphique de BER vs. E_b/N_0 . Donnez une esquisse de BER vs. E_b/N_0 avec un plancher du BER. Expliquez comment un plancher du BER peut arriver.

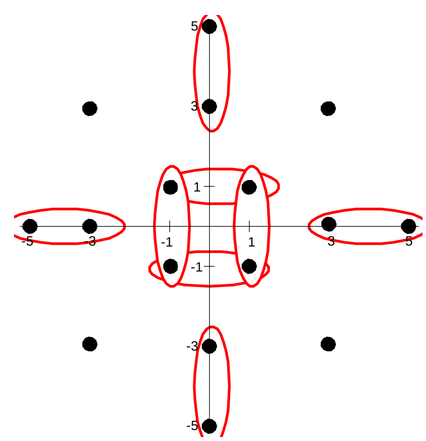


L'interférence intersymbole peut engendre un plancher du BER. Le signal lui-même génère l'interférence, donc d'augmenter l'énergie du bit n'aidera pas améliorer la performance.

Problème 2 (30 points sur 100)

Soit une modulation 16QAM ***NON***-rectangulaire. Les coordonnées de la constellation dans l'espace I/Q sont (±1, ±1) (±3, ±3) (0, ±3) (±3,0) (0, ±5) (±5,0)





Nous pouvons conter les paires avec une séparation de distance minimale, comme indiqué dans la figure, soit K=8. Pour chercher les coordonnées dans l'espace de signal nous utilisons le formule suivante

$$\left(\tilde{a}_n^I, \tilde{a}_n^Q\right) = \sqrt{\frac{ME_s}{\sum_{i=1}^{M}\left[\left(a_n^I\right)^2 + \left(a_n^Q\right)^2\right]}}\left(a_n^I, a_n^Q\right)$$

Pour calculer la somme, nous utilisons les observations suivantes

$\left(a_n^I, a_n^Q\right)$	# de points	*distance*^{2} de l'origine	Sous-total
$(\pm 1, \pm 1)$	4	2	8
$(0, \pm 3)$ $(\pm 3, 0)$	4	9	36
$(\pm 5, 0)$ $(0, \pm 5)$	4	25	100
$(\pm 3, \pm 3)$	4	18	72
$\sum_{i=1}^{M}\left[\left(a_n^I\right)^2 + \left(a_n^Q\right)^2\right]$			216

Donc les coordonnées sont

$$\left(\tilde{a}_n^I, \tilde{a}_n^Q\right) = \sqrt{\frac{16E_s}{216}}\left(a_n^I, a_n^Q\right) = \sqrt{\frac{2E_s}{27}}\left(a_n^I, a_n^Q\right)$$

et la distance minimale est $D_{\min} = 2\sqrt{2E_s/27}$ ou

$$d_{\min} = \frac{D_{\min}}{\sqrt{2E_b}} = 2\sqrt{\frac{\log_2 16 \cdot 2E_b}{27} \cdot \frac{1}{2E_b}} = \frac{4}{\sqrt{27}} = .77$$

A. (25 points) La probabilité d'erreur est donc approximée par

$$P_e \approx \frac{2 \cdot 8}{16} Q\left(\sqrt{\frac{16}{27}\frac{E_b}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{.59\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

B. (5 points) La perte est $10\log_{10}(.8/.59) = 1.3\,\mathrm{dB}$ par rapport à 16 QAM rectangulaire.

Problème 3 (15 points sur 100)

Il n'est pas possible d'avoir une communication fiable pour $\frac{E_b}{N_0} < \ln 2 = -1.6\,\mathrm{dB}$

A. (10 points) Utilisez l'approximation $2^x \approx 1 + x\ln 2$ pour $x \ll 1$, pour développer cette limite sur E_b/N_0.

Nous utilisons la loi de Shannon qui dit

$$C = W \log_2 (1 + SNR)$$

Pour évaluer le SNR nous utilisons la relation suivante

$$SNR = \frac{E_b}{N_0}\frac{R_b}{W}$$

Nous cherchons la limite sur Eb/N0, donc quand nous envoyons l'information à la limite de capacité, soit Rb=C.

$$C = W \log_2\left(1 + \frac{E_b}{N_0}\frac{R_b}{W}\bigg|_{R_b=C}\right) = W \log_2\left(1 + \frac{E_b}{N_0}\frac{C}{W}\right)$$

Donc nous avons

$$\frac{C}{W} = \log_2\left(1 + \frac{E_b}{N_0}\frac{C}{W}\right) \quad \Rightarrow \quad 2^{C/W} = 1 + \frac{E_b}{N_0}\frac{C}{W}$$

$$2^{C/W} - 1 = \frac{E_b}{N_0}\frac{C}{W}$$

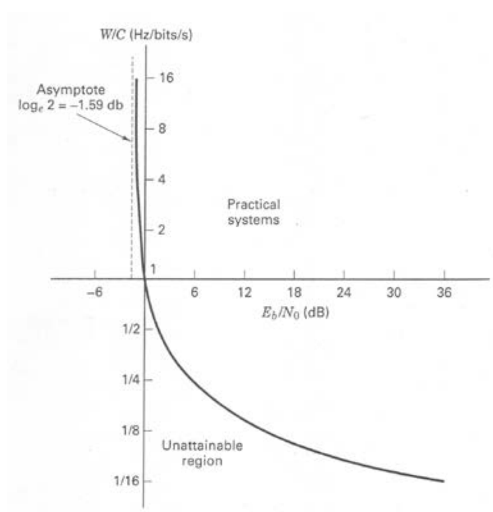
$$\frac{W}{C}\left(2^{C/W} - 1\right) = \frac{E_b}{N_0}$$

Maintenant nous exploitons l'approximation fourni pour $2^{C/W}$.

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{W}{C}\left(2^{C/W} - 1\right) \approx \frac{W}{C}\left(1 + \frac{C}{W}\ln 2 - 1\right) = \frac{W}{C}\frac{C}{W}\ln 2 = \ln 2 = -1.6\text{dB}$$

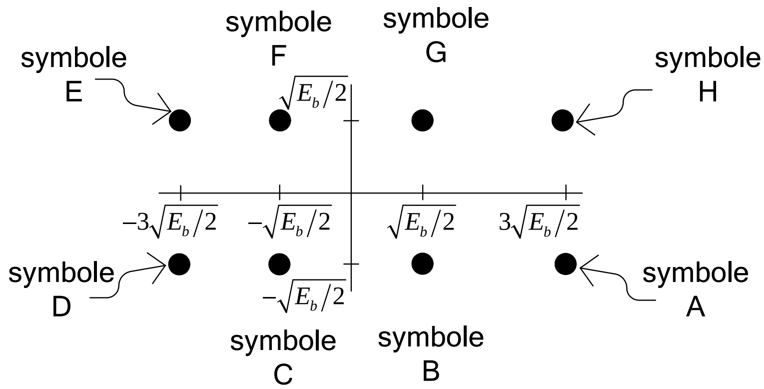
B. (5 points) Est-ce qu'il est possible de contourner cette limite en utilisant une modulation orthogonale de haute complexité (i.e., avec largeur de bande infinie)?

Même si nous avons $W \to \infty$, nous voyons que la limite de Shannon donne que sans avoir rapport E_b/N_0 plus grande que -1.6dB nous ne pouvons pas avoir de communications fiable.

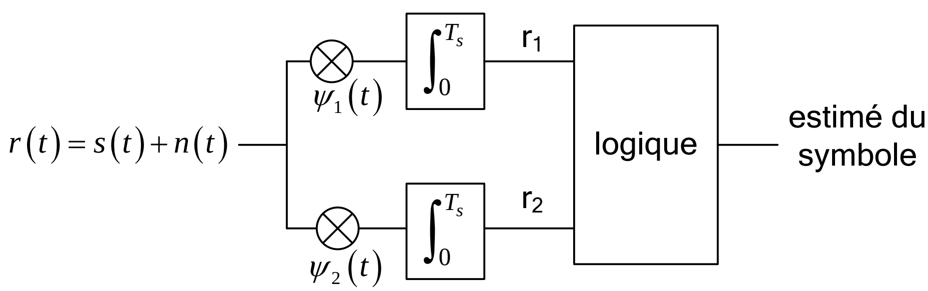


Problème 4 (20 points sur 100)

Considérons une détection cohérente de la modulation 8QAM rectangulaire. Voici l'espace du signal pour cette modulation.



Le détecteur optimal MAP est



Supposons que $E_b/N_0 = 10\text{dB}$ et le vecteur reçu est

$$r = [r_1, r_2] = \left[\sqrt{E_b}, -1.5\sqrt{E_b}\right]$$

A. (5 points)Quel est l'estimé du symbole reçu si les symboles ont tous la même probabilité a priori?

Quand tous les symboles ont la même probabilité *a priori*, le détecteur MAP est l'équivalent du détecteur ML. La règle est de choisir le symbole le plus proche du signal reçu. Les coordonnés des symboles sont :

Symbole A $\left(3\sqrt{\frac{E_b}{2}}, -\sqrt{\frac{E_b}{2}}\right)$	Symbole B $\left(\sqrt{\frac{E_b}{2}}, -\sqrt{\frac{E_b}{2}}\right)$	Symbole C $\left(-\sqrt{\frac{E_b}{2}}, -\sqrt{\frac{E_b}{2}}\right)$	Symbole D $\left(-3\sqrt{\frac{E_b}{2}}, -\sqrt{\frac{E_b}{2}}\right)$
Symbole E $\left(-3\sqrt{\frac{E_b}{2}}, \sqrt{\frac{E_b}{2}}\right)$	Symbole F $\left(-\sqrt{\frac{E_b}{2}}, \sqrt{\frac{E_b}{2}}\right)$	Symbole G $\left(\sqrt{\frac{E_b}{2}}, \sqrt{\frac{E_b}{2}}\right)$	Symbole H $\left(3\sqrt{\frac{E_b}{2}}, \sqrt{\frac{E_b}{2}}\right)$

Symbole A	Symbole B	Symbole C	Symbole D
$(2.1,-.71)\sqrt{E_b}$	$(.71,-.71)\sqrt{E_b}$	$(-.71,-.71)\sqrt{E_b}$	$(-2.1,-.71)\sqrt{E_b}$
Symbole E	Symbole F	Symbole G	Symbole H
$(-2.1,.71)\sqrt{E_b}$	$(-.71,.71)\sqrt{E_b}$	$(.71,.71)\sqrt{E_b}$	$(2.1,.71)\sqrt{E_b}$

Pour $r=[r_1,r_2]=\left[\sqrt{E_b},-1.5\sqrt{E_b}\right]=(1,-1.5)\sqrt{E_b}$ le symbole le plus proche est symbole B.

B. (15 points) Quel est l'estimé du symbole reçu si les symboles ont tous la même probabilité a priori, sauf le symbole A qui a une probabilité à priori de 90%?

Quand les symboles n'ont pas la même probabilité *a priori*, le détecteur MAP choisit le symbole qui minimise :

$$\|\mathbf{r}-\mathbf{s}_i\|^2 - N_0 \ln P(\mathbf{s}_i)$$

Étant donné que tous les symboles ont la même probabilité *a priori* sauf le symbole A, il faut simplement considérer

$$\|\mathbf{r}-A\|^2 - N_0 \ln P(A) \quad \text{et} \quad \|\mathbf{r}-B\|^2 - N_0 \ln P(B)$$

Le signal reçu est plus proche de symbole B, donc les symboles C, D, E, F, G, et H qui ont la même probabilité *a priori* que B seront toujours perdants. Il faut calculer

$$\|\mathbf{r}-A\|^2 - N_0 \ln P(A) \quad \text{et} \quad \|\mathbf{r}-B\|^2 - N_0 \ln P(B)$$

$$\left\|(1,-1.5)\sqrt{E_b}-(2.1,-.71)\sqrt{E_b}\;\right\|^2 - N_0\ln(.9) \quad \text{et} \quad \left\|(1,-1.5)\sqrt{E_b}-(.71,-.71)\sqrt{E_b}\;\right\|^2 - N_0\ln(.1/7)$$

$$E_b\left\|(1,-1.5)-(2.1,-.71)\right\|^2 - N_0\ln(.9) \quad \text{et} \quad E_b\left\|(1,-1.5)-(.71,-.71)\;\right\|^2 - N_0\ln(.1/7)$$

$$N_0\left[\frac{E_b}{N_0}\left\|(1,-1.5)-(2.1,-.71)\right\|^2 - \ln(.9)\right] \quad \text{et} \quad N_0\left[\frac{E_b}{N_0}\left\|(1,-1.5)-(.71,-.71)\;\right\|^2 - \ln(.1/7)\right]$$

$$N_0\left[10\left\|(1,-1.5)-(2.1,-.71)\right\|^2 + .1054\right] \quad \text{et} \quad N_0\left[10\left\|(1,-1.5)-(.71,-.71)\;\right\|^2 + 4.25\right]$$

$$N_0\left[10\left[(1-2.1)^2+(-1.5+.71)^2\right]+.1054\right] \quad \text{et} \quad N_0\left[10\left[(1-.71)^2+(-1.5+.71)^2\right]+4.25\right]$$

$$N_0[10\times 1.9+.1054] \quad \text{et} \quad N_0[10\times .71+4.25]$$

$$N_0[19+.1054] \quad \text{et} \quad N_0[7.1+4.25]$$

$$N_0[19.1054] \quad \text{et} \quad N_0[11.35]$$

✓ plus petit

Donc le signal le plus proche, même avec une pondération favorable pour symbole A est toujours le symbole B.