

# Examen 1 : Solutionnaire

Francis Gagnon 2020-10-19

Q1

- (a) Faux, la rotation est une transformation linéaire, les coordonnées homogènes ne sont pas nécessaires pour des opérations linéaires.
- (b) Vrai, car si  $A$  est inversible,  $A^T$  l'est aussi, donc les vecteurs colonnes de  $A^T$  forment un ensemble linéairement indépendant.
- (c) Faux, si  $u \cdot v = 0$ ,  $u$  et  $v$  sont orthogonaux. On a donc que  $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ , c'est-à-dire pythagore.
- (d) Faux, le conditionnement d'une matrice donnée ne change pas.
- (e) Vrai, car si  $A$  est non-singulière  
On a :  $A^{-1}AB = A^{-1}AC$   
 $I B = I C$   
 $B = C$

Q2

$$(a) \left[ \begin{array}{cc|c} -2 & 3 & b_1 \\ -1 & 2 & -5 \\ 6 & -9 & 9 \end{array} \right] \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_1} \left[ \begin{array}{cc|c} -2 & 3 & b_1 \\ 0 & 1/2 & -5 - \frac{b_1}{2} \\ 6 & -9 & 9 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{L_3 + 3L_2} \left[ \begin{array}{cc|c} -2 & 3 & b_1 \\ 0 & 1/2 & -5 - \frac{b_1}{2} \\ 0 & 0 & 9 + 3b_1 \end{array} \right]$$

si  $9 + 3b_1 = 0 \Rightarrow$  consistent

$$\boxed{b_1 = -3}$$

$$(b) \begin{pmatrix} * \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{F2} & 3 & -3 \\ 0 & \boxed{1/2} & -7/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} 1/2 x_2 &= -7/2 \\ x_2 &= -7 \\ -2x_1 + 3(-7) &= -3 \\ x_1 &= -9 \end{aligned}$$

$$\boxed{x = \begin{bmatrix} -9 \\ -7 \end{bmatrix}}$$

(c) Non, l'inversion matricielle n'existe pas pour une matrice rectangulaire

(d)  $\text{rang}(A) = 2$  car 2 colonnes pivot dans (\*)

(e)  $\vec{u} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}$  et  $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -9 \end{bmatrix}$  sont les 2 vecteurs colonnes associés aux pivots

(f) 0 car 0 colonne non-pivot (ou 0 var. libre)

(g)  $\vec{r} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  car  $A\vec{r} = \vec{0}$

Q3 voir question 3.m

Q4 voir question 4.m

```

% =====
% ===== Examen 1, question 3 =====
% ===== Solutionnaire =====
% ===== Francis Gagnon, 2020-10-19 =====
% =====
%#ok<*NOPTS>

% ----- (a) -----
b = [2;-2;-5];
v1 = [0;1;-6];
v2 = [-1;3;0];
v3 = [5;-4;1];
rrefAaug = rref([v1,v2,v3,b])
disp(['Le système est consistant puisque la dernière colonne ',newline,...
      'de la forme échelon réduit n\'est pas une colonne pivot.'])

% ----- (b) -----
A = [v1,v2,v3]
% ----- (c) -----
[L,U,P] = lu(A)
% ----- (d) -----

% solution A (plus optimal, un for fonctionne aussi)
bp = P*b;
y1 = bp(1);
y2 = bp(2)-L(2,1)*y1;
y3 = bp(3)-L(3,1)*y1-L(3,2)*y2;
x3 = (y3)/U(3,3);
x2 = (y2-U(2,3)*x3)/U(2,2);
x1 = (y1-U(1,3)*x3-U(1,2)*x2)/U(1,1);
x = [x1;x2;x3]

% % solution B (moins optimal mais accepté)
% bp = P*b;
% Q = rref([L bp]);
% y = Q(:,end);
% R = rref([U y]);
% x = R(:,end)

```

```

% =====
% ===== Examen 1, question 4 =====
% ===== Solutionnaire =====
% ===== Francis Gagnon, 2020-10-19 =====
% =====
%#ok<*NOPTS>

% ----- (a) -----
P = [0.65 0.20 0.10;0.30 0.78 0.15;0.05 0.02 0.75]

% ----- (b) -----
x = [0;0;1000000];
x_data = zeros(3,24);
for i=1:24
    x = P*x;
    x_data(:,i) = x;
end
x_data_24_mois = x_data'

% ----- (c) -----

% solution A (approximation numérique)
x_ss_perc = x/sum(x)

% % solution B (calcul théorique)
% Q = rref([eye(3)-P, zeros(3,1); ones(1,4)]);
% x_ss_perc = Q(1:3,end)

% ----- (d) -----
x_data_2 = zeros(3,24);
for i=1:24
    x = P*x;
    if i==1
        x(1) = x(1) - 100000;
        x(3) = x(3) + 100000;
    end
    x_data_2(:,i) = x;
end
x_data = [x_data,x_data_2];
t = 1:48;
plot(t,x_data(1,:),t,x_data(2,:),t,x_data(3,:))
title('Évolutions des 3 souches avec injection antivirale au mois 25')
xlabel('temps (mois)')
ylabel('copies/mL')
legend('souche A','souche B','souche C')

% ----- (e) -----
disp(['Non, puisque l\'écart est de 5 mois après l\'injection,',newline,...
    'les 3 souches retournent au même état qu\'avant ',newline,...
    'l\'injection.'])
disp(['Oui, puisque P est inversible, la chaîne de ',newline,...
    'Markov converge nécessairement vers l\'état ',newline,...
    'stationnaire calculé ci-dessus, peu importe ',newline,...
    'les conditions initiales. L\'antiviral ne fait que ',newline,...
    'ré-initialiser les états à une autre condition initiale.'])

```

