GEL2001 SOLUTIONNAIRE EXAMEN 1 A2019

Département de génie électrique et de génie informatique

13 décembre 2019

Problème 1 (15 pts)

(a) La transformée de Fourier de $s(t)$ est donnée par

$$S(\omega) = \frac{\pi\omega_r}{\omega_b}\left[\text{Rect}\left(\frac{\omega-\omega_0}{\omega_b}\right)\delta_{\omega_r}(\omega-\omega_0) + \text{Rect}\left(\frac{\omega+\omega_0}{\omega_b}\right)\delta_{\omega_r}(\omega+\omega_0)\right]$$

Le graphique est donné à la figure 1.

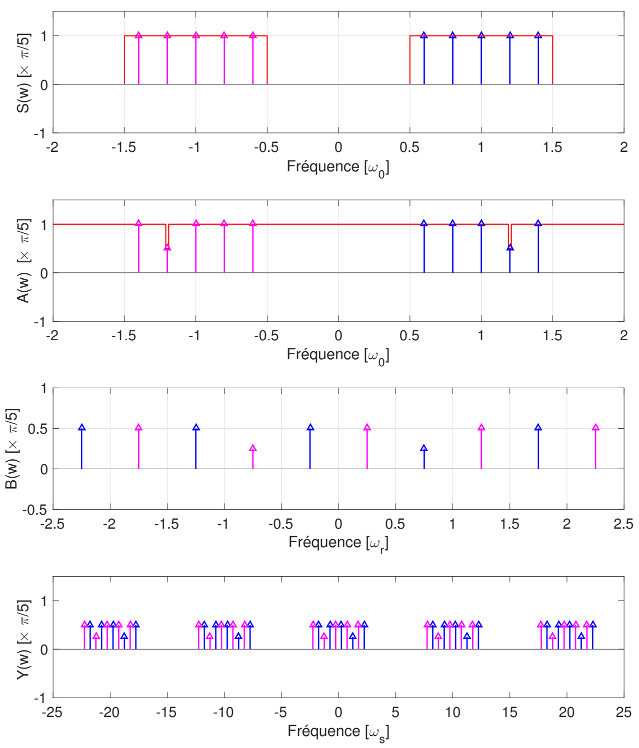

Figure 1: Problème 1

(b) Le graphique est donné à la figure 1.

(c) Le graphique est donné à la figure 1.

(d) Afin d'éliminer les copies se trouvant autour de $2\omega_0$, une filtre dont la coupure est à ω_0 est adéquat. Un filtre plus étroit est possible tant que le signal en bande de base n'est pas altéré. Filtrer avec une fréquence de coupure 10 fois supérieure à la fréquence d'échantillonnage est plus réaliste

(e) Physiquement réalisable. Atténuation et phase négligeables ($\omega_0 >>> \omega_s$), mais présentes.

(f) La fréquence minimale d'échantillonnage pour éviter le repliement spectral est donnée par le critère de Nyquist.

$$\begin{aligned} f_{\text{Nyquist}} &= 2f_{\text{max}} \\ &= 2\frac{9\omega_r}{4} \\ &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

(g) Le graphique est donné à la figure 1.

(h) Faire la transformée de Fourier du signal et utiliser une dent sur deux.

Problème 2 (15 pts)

a) L'énergie du signal peut être calculée avec

$$E = \int_{f_1}^{f_2} E(f)df = \int_{-5}^{5} |M(f)|^2 \, df = \frac{10}{3}$$

qui correspond à l'aire sous la courbe du spectre mis au carré. La puissance quant à elle est nulle puisque le signal possède une énergie finie.

b) La fonction $g(t)$ peut s'écrire

$$\begin{aligned} g(t) &= 0.5m(t)\sin(\omega_0 t) + \sin(\omega_0 t) \\ &= 0.5m(t)\frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} + \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} \end{aligned}$$

ce qui devient dans le domaine de Fourier

$$G(\omega) = \frac{1}{4j}M(\omega - \omega_0) - \frac{1}{4j}M(\omega + \omega_0) + \frac{\pi}{j}\delta(\omega - \omega_0) - \frac{\pi}{j}\delta(\omega + \omega_0)$$

en ayant utilisé la propriété du décalage.

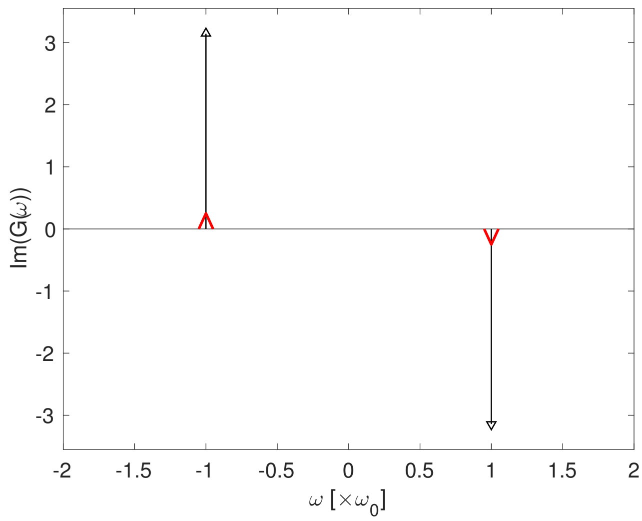

FIGURE 2: Partie imaginaire du spectre pour $g(t)$

c) Le signal $g(t)$ comporte le signal $\sin(\omega_0 t)$ qui est un signal d'énergie infinie alors son énergie est infinie. Pour ce qui est de la puissance, puisque celle de $m(t)$ est nulle, la puissance est définie à partir du signal $\sin(\omega_0 t)$. Ce faisant, la puissance de $g(t)$ est $\frac{1}{2}$.

Il s'agit d'une modulation d'amplitude avec porteuse

d) Non, il n'est pas possible de retrouver le signal désiré autour de la fréquence zéro puisque les copies qui s'additionnent à DC sont de signes opposés. Le développement qui suit l'explique.

$$h(t) = 0.5m(t)\sin(\omega_0 t)\cos(\omega_0 t) + \sin(\omega_0 t)\cos(\omega_0 t)$$

ce qui devient

$$h(t) = 0.5m(t)\frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}\frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} + \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}\frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}.$$

En multipliant les exponentielles et utilisant la propriété du décalage, la transformée de Fourier peut s'écrire

$$H(\omega) = \frac{M(\omega - 2\omega_0)-}{8j}\frac{M(\omega + 2\omega_0)}{8j} + \frac{\pi\delta(\omega - 2\omega_0)}{2j} - \frac{\pi\delta(\omega + 2\omega_0)}{2j}$$

où les termes autour de DC ne sont pas présents dans l'équation car ils s'annulent, ce qui est montré par la figure qui suit. Comme la fonction est imaginaire pure, seule la partie imaginaire est tracée.

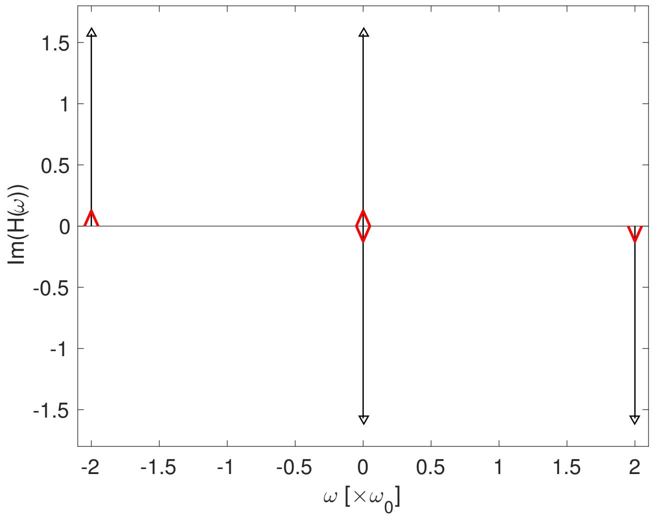

FIGURE 3: Partie imaginaire du spectre pour $h(t)$

e) Oui, il est possible de retrouver le signal désiré.

$$z(t) = 0.5m(t)\sin(\omega_0 t)\sin(\omega_0 t) + \sin(\omega_0 t)\sin(\omega_0 t)$$

ce qui devient

$$z(t) = 0.5m(t)\frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}\frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} + \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}\frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}.$$

En multipliant les exponentielles et utilisant la propriété du décalage, la transformée de Fourier peut s'écrire

$$Z(\omega) = -\frac{M(\omega - 2\omega_0)}{8} + \frac{M(\omega)}{4} - \frac{M(\omega + 2\omega_0)}{8} - \frac{\pi\delta(\omega - 2\omega_0)}{2} + \pi\delta(\omega) - \frac{\pi\delta(\omega + 2\omega_0)}{2}.$$

f) En raison de la phase de la porteuse qui induit des phases opposées aux copies qui se retrouvent additionnées à DC. Les fonctions sin() et cos() sont des fonctions orthogonales (en quadrature).

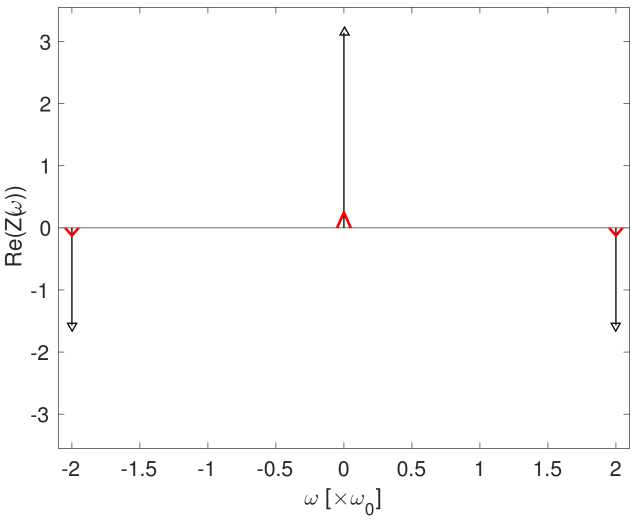

FIGURE 4: Spectre pour $z(t)$

Problème 3 (15 pts)

La solution à l'équation différentielle gouvernant la diffusion de la chaleur

$$T(x,t) = e^{-u^2 t} e^{jux}$$

indique que l'atténuation de chaque sinus spatial présent dans la distribution de température d'un objet dépend de sa fréquence u. Afin de connaitre la distribution de température à un temps ultérieur, il importe de se questionner sur l' évolution des différentes composantes fréquentielles de la distribution initiale. L'équation ci-haut nous indique qu'à un temps $t = 1$, chaque fréquence sera atténuée du facteur e^{-u^2}. Nous savons donc l'atténuation que chaque fréquence aura. **Il s'agit donc de la fonction de transfert du système**. Appliquons celle-ci en multipliant cette fonction de transfert par la transformée de Fourier (TF) de la distribution spatiale de température.

Pour trouver la TF, on utilise le facteur d'échelle

$$e^{-\pi(kx)^2} \Leftrightarrow \frac{1}{|k|} e^{\frac{-u^2}{4\pi k^2}},$$

et on pose $k = \sqrt{\frac{1}{\pi}}$

$$T(u,0) = \sqrt{\pi} e^{\frac{-u^2}{4}}$$

On applique la fonction de transfert.

$$T(u,1) = \sqrt{\pi} e^{\frac{-u^2}{4}} e^{-u^2} = \sqrt{\pi} e^{\frac{-5u^2}{4}}$$

On fait la TF inverse avec le facteur d'échelle $k = \sqrt{\frac{1}{5\pi}}$ pour trouver le profil de température au temps $t = 1$.

$$T(x,1) = \frac{\sqrt{5}}{5} e^{-\frac{x^2}{5}}$$

Bonus (2 pts)

Il s'agit d'une gaussienne en 2D qui s'élargira et qui s'écrasera en fonction du temps.

$$T(x,y,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{\frac{-(x^2+y^2)}{4t}}$$