UNIVERSITÉ
LAVAL

FACULTÉ DES SCIENCES ET DE GÉNIE
DÉPARTEMENT DE GÉNIE ÉLECTRIQUE ET DE GÉNIE INFORMATIQUE

GEL-2001 Analyse des signaux
Jérôme Genest

Examen partiel

DATE: Jeudi le 17 octobre 2019

DURÉE: de 8h30 à 10h30

SALLE: VCH-3860

Cet examen vaut 40% de la note finale.

Remarques:

i) *L'utilisation d'une calculatrice est permise.*

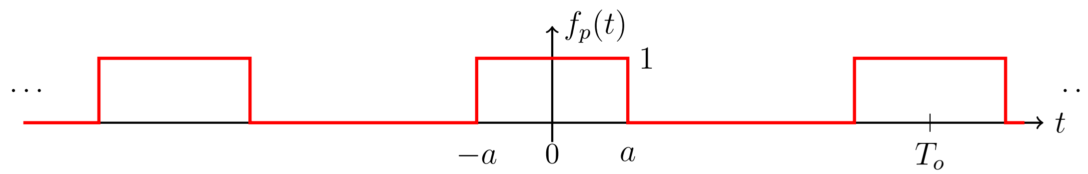
ii) *Aucun document n'est permis durant l'examen.*

iii) *Seule la liste des formules fournie à la fin du questionnaire est permise.*

iv) *Votre carte d'identité doit être placée sur votre bureau en conformité avec le règlement de la Faculté.*

Problème 1 (10 points)

Soit une fonction périodique $f_p(t)$, telle qu'illustrée ci-bas:



a) Calculez la transformation de Fourier (TF) de la fonction $f_p(t)$.

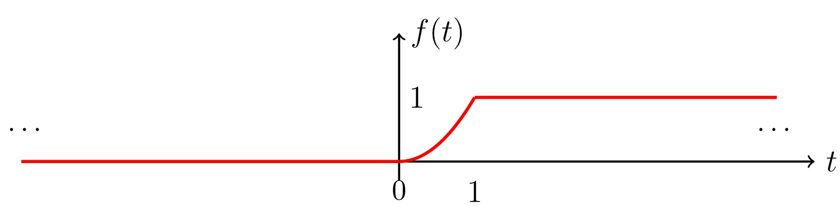
b) Calculez la puissance à la fréquence fondamentale (première harmonique).

c) Tracez le spectre pour $T_o = 4a$.

d) Tracez le spectre pour $T_o = 1.5a$.

e) En traçant $f_p(t)$ dans le cas $T_o = 1.5a$ on voit qu'on peut exprimer $f_p(t)$ comme une constante moins une onde carrée périodique d'une largeur différente. Calculez la TF de $f_p(t)$ en utilisant cette façon de voir le signal. Réconciliez (en les traçant) les spectres obtenus en d) et en e)

Problème 2 (10 points)



Soit la fonction $f(t)$ illustrée ci-haut et définie telle que:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & -\infty < t < 0 \\ t^2 & 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & 1 < t < \infty \end{cases}$$

a) Calculez la Transformation de Fourier (TF) de la fonction $f(t)$ ci-haut.

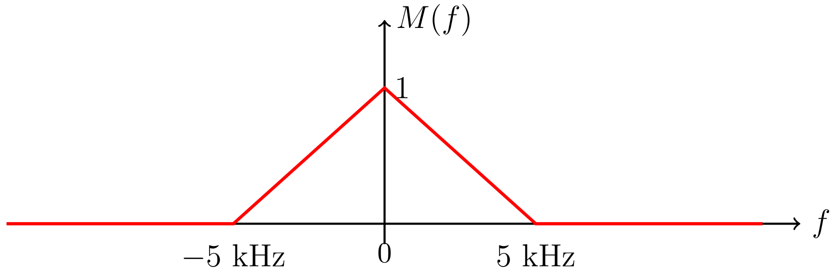
b) Quel est le taux de décroissance asymptotique de la TF $f(t)$, pourquoi ?

c) Quelle est l'énergie du signal $f(t)$?

d) Quelle est la puissance signal $f(t)$?

Problème 3 (10 points)

Soit un signal $m(t)$ contenant de l'information destinée à être transmise par ondes radio. Le spectre $M(\omega)$ est limité en fréquence et est illustré ci-bas (en f tel que $\omega = 2\pi f$):



a) Calculez l'énergie et la puissance du signal $m(t)$

b) Pour transmettre le signal $m(t)$ par voie aérienne, on doit utiliser une porteuse qui se propage aisément dans l'atmosphère. C'est le cas des ondes radio. Nous allons utiliser une porteuse de fréquence $f_o = 100$ kHz. (100000 Hz, avec $\omega_o = 2\pi f_o$). Le signal transmis par l'antenne de l'émetteur est :

$$g(t) = (0.5 \times m(t) + 1)\sin(\omega_o t).$$

Calculez et tracez la transformée de Fourier de $g(t)$. (Tracez le spectre en partie réelle et imaginaire, c'est plus facile)

c) Calculez l'énergie et la puissance du signal $g(t)$.

d) À la réception du signal, il faut effectuer une opération qui permet de retrouver un signal similaire au message initial. On veut retrouver un spectre de même forme autour de 0 Hz.

Pour ce faire, on va d'abord multiplier le signal $g(t)$ par $\cos(\omega_0 t)$:

$$h(t) = g(t)\cos(\omega_o t).$$

Calculez et tracez la transformée de Fourier de $h(t)$. Est-ce que cela permet de retrouver le signal désiré autour de la fréquence zéro? Expliquez les différences entre $M(\omega)$ et $H(\omega)$.

e) Si au lieu on multiplie le signal $g(t)$ par $\sin(\omega_0 t)$:

$$z(t) = g(t)\sin(\omega_o t).$$

Calculez et tracez la transformée de Fourier de $z(t)$. Est-ce que cela permet de retrouver le signal désiré autour de la fréquence zéro? Expliquez les différences $M(\omega)$ et $Z(\omega)$.

f) Pourquoi l'un des deux cas (d et e) fonctionne et pas l'autre ?

Problème 4 (10 points)

Les impulsions produites par un laser peuvent être représentées par une porteuse multipliée par une succession d'enveloppes gaussiennes:

$$h(t) = \cos(\omega_c t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp[-\pi(t - nT_r)^2/T_p^2]$$

Notez qu'avec une telle expression, il est bien difficile d'isoler une période dans ce signal, puisque chacune des gaussiennes a un support non borné.

Rappel, la TF d'une gaussienne est une gaussienne:

$$e^{-\pi t^2} \Longleftrightarrow e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}}$$

Pour les besoins du problème, vous pouvez supposer que $T_r = 1$, $\omega_c = 21\pi$ et que $T_p = 0.1$.

a) Est-ce les impulsions successives sont identiques? (indice: évaluez les impulsions pour $n = -1, 0, 1$ à leur valeur centrale).

b) Tracez le signal temporel sur trois périodes. Pour le graphique, vous pouvez supposer que les impulsions successives sont indépendantes, même si ce n'est pas strictement le cas. Tenez compte de ce que vous avez trouvé en a) et prenez soin d'indiquer les points importants.

c) Calculez la transformation de Fourier de $f(t) = e^{-\pi t^2/{T_p}^2}$.

d) Calculez la transformation de Fourier de :

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi(t-nT_r)^2/T_p^2}$$

e) Finalement, calculez $H(\omega)$ la transformation de Fourier de $h(t)$.

f) Tracez la fonction $H(\omega)$.

fonction temporelle	transformée
$\mathrm{Rect}(t/\tau)$ [1]	$\tau\,\mathrm{Sa}(\omega\tau/2)$
$\mathrm{Tri}(t/\tau)$ [2]	$\tau\,\mathrm{Sa}^2(\omega\tau/2)$
$\delta(t)$	1
1	$2\pi\delta(\omega)$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$
$\mathrm{U}(t)$	$1/j\omega+\pi\delta(\omega)$
$\mathrm{Sgn}(t)$	$2/j\omega$
$\delta_{T_0}(t)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT_0)$	$\omega_0\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-n\omega_0)$
$e^{-\beta t}\,\mathrm{U}(t)$	$\dfrac{1}{\beta+j\omega}$
$e^{-\beta\lvert t\rvert}$	$\dfrac{2\beta}{\beta^2+\omega^2}$
$\delta'(t)$	$j\omega$
$\delta''(t)$	$(j\omega)^2$

domaine temporel	domaine fréquentiel
$f(t)=\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$	$F(\omega)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$
$f(t)$	$F(\omega)$
$F(t)$	$2\pi f(-\omega)$
$f(t+a)$	$e^{ja\omega}F(\omega)$
$e^{jbt}f(t)$	$F(\omega-b)$
$f(at)$	$\dfrac{1}{\lvert a\rvert}F\left(\dfrac{\omega}{a}\right)$
$t^n f(t)$	$(j)^n\dfrac{d^n}{d\omega^n}F(\omega)$
$\dfrac{d^n}{dt^n}f(t)$	$(j\omega)^n F(\omega)$
$f(t)$ pas continue	décroissance $1/\omega$
$f(t)$ continue $f'(t)$ pas continue	décroissance $1/\omega^2$
$f(t), f'(t)$ continue $f''(t)$ pas continue	décroissance $1/\omega^3$
$E=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\lvert f(t)\rvert^2\,dt$	$E=\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\lvert F(\omega)\rvert^2\,d\omega$

---

[1] $\mathrm{Rect}\left(\dfrac{t-t_0}{\tau}\right)$ rectangle de hauteur un, centré sur $t=t_0$, et de longueur τ.

[2] $\mathrm{Tri}\left(\dfrac{t-t_0}{\tau}\right)$ triangle de hauteur un, τ centré sur $t=t_0$, avec une base de longueur 2τ.

$$f(t) \quad \Leftrightarrow \quad F(\omega)=TF\left\{f(t)\right\}$$

$$F(\omega)=A(\omega)+jB(\omega)=\left|F(\omega)\right|e^{jArg(\omega)}$$

$$E(\omega)=\frac{1}{2\pi}\left|F(\omega)\right|^2$$

fonction réelle en temps

$f(t)$ réelle $\Leftrightarrow$ $F^*(\omega)=F(-\omega)$	
paire	**impaire**
$A(\omega)=\operatorname{Re}F(\omega)$	$B(\omega)=\operatorname{Im}F(\omega)$
$\left\|F(\omega)\right\|$	$\operatorname{Arg}F(\omega)$
$f(t)=f_{paire}(t)+f_{impaire}(t)$	
$f_{paire}(t) \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Re}F(\omega)$	$f_{impaire}(t) \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Im}F(\omega)$

fonction delta, etc.

$$f_p(t) \Leftrightarrow 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_{Série}(n)\,\delta(\omega-n\omega_0)$$

$f_p(t)$ périodique avec période T_0, $T_0\omega_0=2\pi$

$$F_{Série}(n)=\frac{1}{T_0}\cdot F_r(\omega)\Big|_{\omega=n\omega_0},\; f_r(t)=\begin{cases} f_p(t) & \frac{-T_o}{2}<t<\frac{T_o}{2} \\ 0 & \textit{ailleurs} \end{cases}$$

$$f'(a)=\left[\lim_{t\to a^+} f(t)-\lim_{t\to a^-} f(t)\right]\delta(t-a)$$

$t=a$ est un point de discontinuité de $f(t)$

$$h(t)\,\delta(t-t_0)=h(t_0)\,\delta(t-t_0)$$

propriété d'échantillonnage

$$x_0\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-nx_0)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-j2\pi nx/x_0}$$

$\int e^{ax} \quad dx=\frac{1}{a}e^{ax}$	$\int x\cos ax \quad dx=\frac{1}{a^2}\cos ax+\frac{x}{a}\sin ax$
$\int e^{bx}\sin ax \quad dx=\frac{1}{a^2+b^2}e^{bx}(b\sin ax-a\cos ax)$	$\int xe^{ax} \quad dx=\left(\frac{x}{a}-\frac{1}{a^2}\right)e^{ax}$
$\int e^{bx}\cos ax \quad dx=\frac{1}{a^2+b^2}e^{bx}(a\sin ax+b\cos ax)$	$\int x^2e^{ax} \quad dx=\left(\frac{x^2}{a}-\frac{2x}{a^2}+\frac{2}{a^3}\right)e^{ax}$
$\cos x=\frac{e^{jx}+e^{-jx}}{2}$	$e^{jx}=\cos x+j\sin x$
$\sin x=\frac{e^{jx}-e^{-jx}}{2j}$	$e^{jn\pi}=(-1)^n$
$\cos^2\theta=\frac{1}{2}\left[1+\cos 2\theta\right]$	$e^{jn\pi/2}=\begin{cases}(-1)^{n/2} & n \text{ pair} \\ (-1)^{(n-1)/2} & n \text{ impair}\end{cases}$
$\cos\theta=\sin(\pi/2-\theta)$	