2009 Examen partiel – *Solutionnaire*

Problème 1 (10 points)

Supposons que nous utilisons OOK et qu'il y a de l'interférence inter-symbole. Les taux d'erreur binaire pour les quatre patrons 00, 01, 10 et 11 sont: P_{00} P_{01} P_{10} P_{11}.

A. (5 points) Laquelle(s) des quatre probabilités risque d'être la(les) plus grande(s)? Pourquoi?

B. (5 points) Laquelle(s) des quatre probabilités risque d'être la(les) plus petite(s)? Pourquoi?

Indice : Vous devrez focaliser votre attention aux erreurs lors de la détection de deuxième bit dans le patron.

Nous utilisons OOK, donc il y a seulement de l'énergie transmise pour l'envoi d'un "1" logique.

- Le patron 00 aura seulement le bruit Gaussien lors de la réception du deuxième 0; il n'y aura pas d'énergie venant du bit 0 précédent.
- Le patron 01 aura le signal plus le bruit pour la réception du logique 1; il n'y aura pas d'énergie résiduelle dû au bit 0 précédent
- Le patron 11 aura le signal plus le bruit, plus l'énergie résiduelle du bit 1 précédent. Le signal va être très fort, donc peu de chance de se tromper avec un 0.
- Le patron 10 aura le bruit plus le résiduel du bit 1 précédent. Le signal risque d'être suffisamment fort pour causer des erreurs quand le résiduel plus le bruit dépasse le seuil de détection.

Pire probabilité : patron 10
Meilleure probabilité: patron 11

Les autres probabilités (patrons 01 et 00) seront semblent aux probabilités quand il n'ya pas ISI...

Problème 2 (15 points)

Dans tout système de communications numériques un compromis est fait entre BER vs. E_b/N_0 , efficacité spectrale, et complexité (coûts).

A. (5 points) Comment peut-on réduire la complexité ?

Pour réduire la complexité, nous pouvons utiliser une détection incohérente au lieu d'une détection cohérente. La détection cohérente exige un PLL pour poursuivre la phase. Nous pouvons éviter l'utilisation des codes correcteurs d'erreurs pour réduire la complexité. En général l'électronique à haut débit coute plus cher que l'électronique moins vite, donc nous pouvons réduire le taux binaire pour réduire la complexité.

B. (5 points) Comment peut-on exploiter une augmentation de la complexité pour améliorer la performance BER vs. E_b/N_0 ?

Les codes correcteurs d'erreurs peuvent améliorer le BER pour un même rapport signal à bruit. Nous pouvons aussi utiliser la détection cohérente qui a une meilleure performance, mais qui coute plus cher.

C. (5 points) Comment peut-on exploiter une augmentation de la complexité pour améliorer l'efficacité spectrale ?

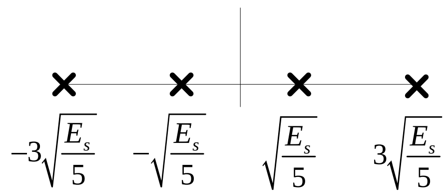
Les modulations QAM et MPSK d'ordre avancé (M plus grand) ont une meilleure efficacité spectrale. Ces modulations sont plus complexes à cause du traitement additionnel demandé: détection cohérente obligatoire; codes correcteurs nécessaires pour avoir une bonne performance quand le rapport signal à bruit est restreint.

Problème 3 (15 points)

A. (5 points) Pour la détection cohérente et les impulsions de Nyquist idéales, donnez l'efficacité spectrale (en b/s/Hz) pour les trois constellations suivantes en supposant un taux binaire de 800 kb/s.

$$
\begin{aligned}
s_1 &= [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]\sqrt{E_s} \\
s_2 &= [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]\sqrt{E_s} \\
s_3 &= [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]\sqrt{E_s} \\
s_4 &= [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]\sqrt{E_s}
\end{aligned}
$$

4FSK



4PAM

Pour MFSK cohérente

$$\eta = \frac{2\log_2 M}{M+1} = \frac{2 \cdot 2}{5} = \frac{4}{5} \text{ b/s/Hz}$$

Pour 4PAM = 4QAM avec une forme géométrique en ligne

$$\eta = \log_2 M = \log_2 4 = 2 \text{ b/s/Hz}$$

Notons que le taux binaire n'effect pas l'efficacité spectrale.

B. (10 points) Si la première porteuse pour 4FSK est à 900MHz, quelle est la plage de fréquence occupée par le système 4FSK ? Si la porteuse pour 4PAM est à 900MHz, quelle est la plage de fréquence occupée par le système 4PAM?

$R_b = 800\,kb/s \Rightarrow R_s = R_b \times \frac{1 \text{ symbole}}{2 \text{ bits}}$

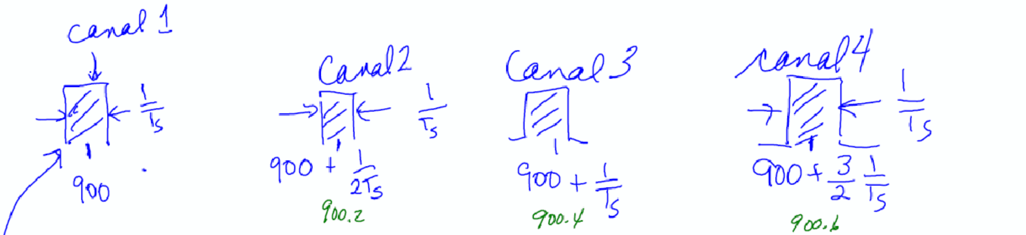
$= 400\,k\,Sym/s$

$T_s = \frac{1 sec}{400k} = 2.5 \times 10^{-6}\,s$

$1/T_s = 400\ kHz$

largeur de bande minimale $= \frac{1}{2T_s} = 200\,kHz$

séparation minimale $= \frac{1}{T_s} = 400\ kHz$



commence à $\underbrace{900 - \frac{1}{2T_s}}$; termine à $900 + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{T_s} + \frac{1}{2T_s}$

899.8 MHz à 900.8 MHz

Pour 4PAM $BW = 1/T_s = 800\,kHz$

$900\,MHz - 400\,kHz \rightarrow 900\,MHz + 400\,kHz$

899.6 MHz à 900.4 MHz

Notons pour 4FSK cohérent

$$\eta = \frac{2 \log_2 M}{M+1} = \frac{2 \log_2 4}{4+1} = \frac{2 \cdot 2}{5} = 4/5 = .8$$

Aussi

$$\eta = \frac{R_b}{BW} = \frac{800\,kb/s}{900.8 - 899.8} = \frac{800\,kb/s}{1\,MHz} = \frac{.8}{1}\ bits/Hz = .8 \checkmark$$

Problème 4 (35 points)

A. (10 points) Trouvez la distance minimale (D_{min}) pour 8PAM en fonction de E_s, l'énergie moyenne par symbole.

A. Espace IQ pour 8 PAM = 8QAM linéaire

Coordonnées dan l'espace du signal

$$\sum_{i=1}^{8}\left[(a_i^I)^2+(a_i^Q)^2\right] = \sum_{i=1}^{8}(a_i^I)^2$$

$$= 2\times\left[1^2+3^2+5^2+7^2\right]$$

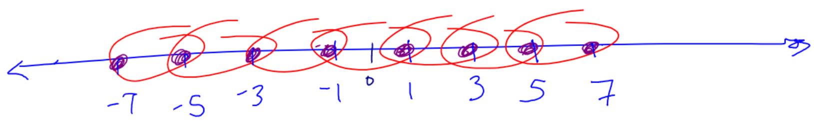
$$= 2\left[1+9+25+49\right] = 2\cdot 84 = 168$$

$$\tilde{a}^I = \frac{\sqrt{8\cdot E_s}}{\sqrt{168}}\, a^I = \sqrt{\frac{E_s}{21}}\, a^I$$

$$D_{min} = 2\cdot\sqrt{\frac{E_s}{21}}$$

B. (5 points) Trouvez la probabilité d'erreur en fonction de E_b/N_0 pour 8PAM en utilisant l'estimé provenant de la borne de l'union.

B. $K = \#$ voisins à la distance minimale



$K = 7$

$$E_b = \frac{E_s}{\log_2 M} = \frac{E_s}{3}$$

$$P_e = \frac{2 \cdot 8}{8} Q\left(2\sqrt{\frac{E_s}{21}} \frac{1}{\sqrt{2N_0}}\right)$$

$$= 2Q\left(\sqrt{\frac{6E_b}{21 N_0}}\right) = 2Q\left(\sqrt{\frac{2}{7}} \cdot \sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

C. (5 points) Trouvez la perte en dB par rapport au QPSK pour 4PAM (voir problème 3 pour l'espace I/Q pour 4PAM) et 8PAM.

4PAM

Problème 2 — $D_{min} = 2\sqrt{E_s/5} \Rightarrow d_{min} = 2 \cdot \sqrt{\frac{2E_b}{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2E_b}}$

$d_{min} = 2\sqrt{\frac{1}{5}}$. $= \sqrt{\frac{2}{5}} \cdot \sqrt{2}$

← perte par rapport à QPSK

$10 \log_{10} \frac{2}{5} = 4.0\text{ dB}$

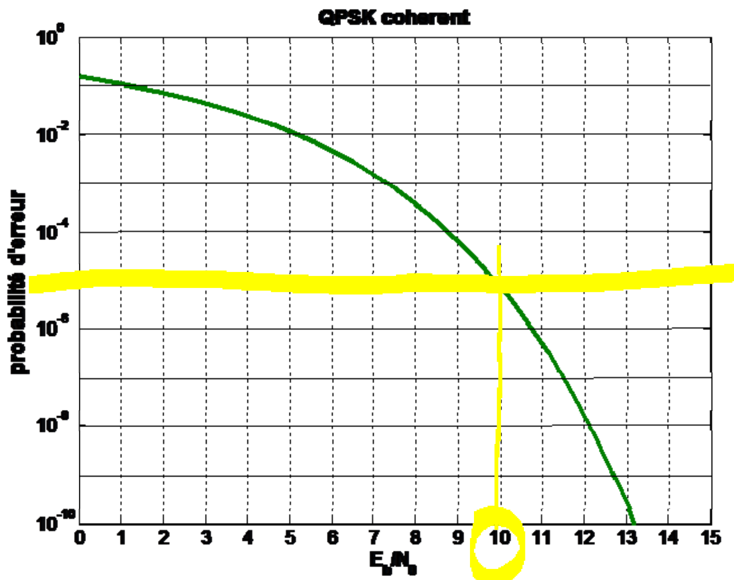
$M = 8$

perte par rapport à QPSK: $d_{min}\big|_{M=8} = 2\sqrt{\frac{E_s}{21}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2E_b}}$

$= 2\sqrt{\frac{E_b}{7}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2E_b}} = \sqrt{2/7}$

$\sqrt{\frac{2}{7}} = \sqrt{\frac{1}{7}} \cdot \sqrt{2} \Rightarrow 10 \log_{10} 1/7 = \underline{8.4\text{ dB}}$ perte par rapport à QPSK

D. (15 points) Considérez le graphique du « Plan de l'efficacité spectrale ». Trouvez les coordonnées de 4PAM et 8PAM pour le graphique du « Plan de l'efficacité spectrale ». Est-ce que PAM est dans la région « limitée en largeur de bande » ou la région « limitée en puissance »?



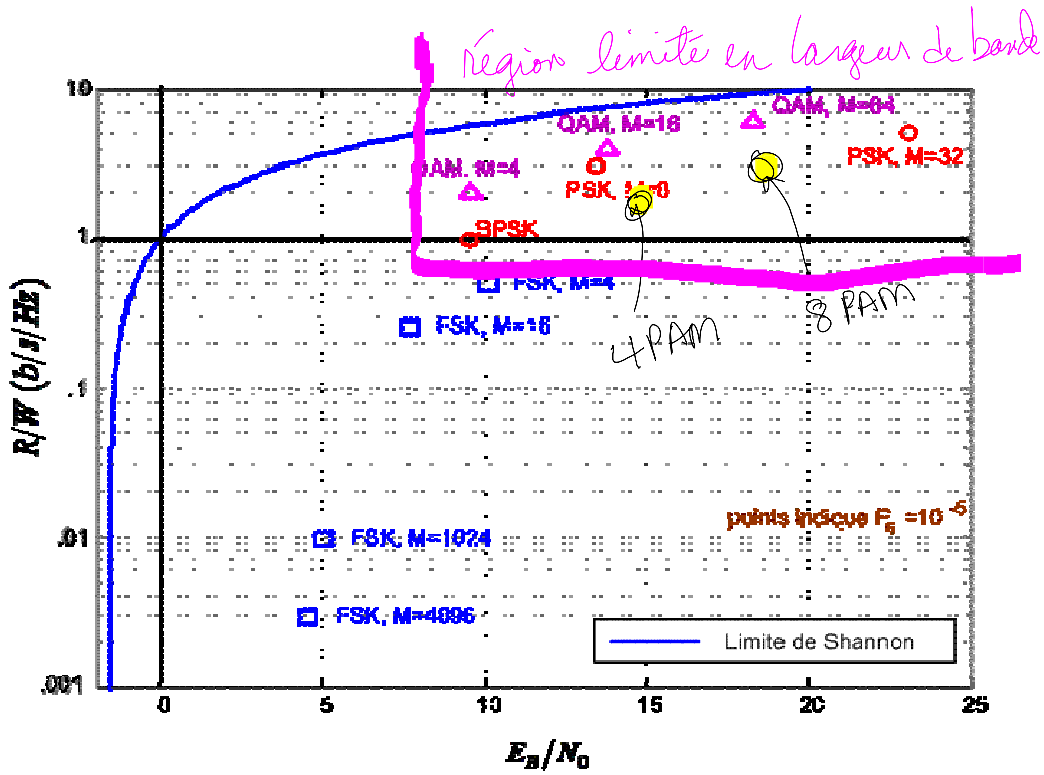
QPSK : $\frac{E_b}{N_0} = 10\,dB$ pour atteindre 10^{-5}

8PAM : $10\,dB + 8.4\,dB = 18.4\,dB$

$\Rightarrow$ coeff de 8PAM : $\left(\frac{E_b}{N} = 18.4,\ \eta = 3\,b/s/Hz\right)$

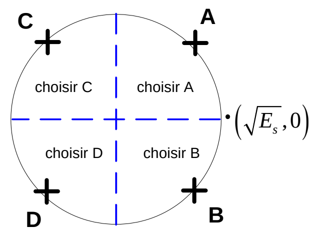
4PAM : $10\,dB + 4\,dB = 14\,dB$

Coefficients de 4PAM $\left(\frac{E_b}{N_0} = 14\,dB,\ \eta = 2\,b/s/Hz\right)$


région limité en largeur de bande
10
1
.1
.01
.001
R/W (b/s/Hz)
0
5
10
15
20
25
E_B/N_0
QAM, M=64
QAM, M=16
PSK, M=32
QAM, M=4
PSK, M=8
BPSK
FSK, M=4
FSK, M=16
4PAM
8PAM
points indique P_E =10 $^{-5}$
FSK, M=1024
FSK, M=4096
Limite de Shannon

Problème 5 (25 points)

Nous avons vu en classe que, pour les symboles avec la même probabilité *a priori,* le détecteur optimal pour QPSK compare l'angle du vecteur reçu avec les angles des symboles QPSK; le symbole avec l'angle le plus proche de l'angle reçu est choisi. Les régions sont



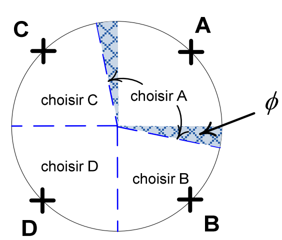
N'oublies pas que

$$\left\|\underline{r}-\underline{s}_i\right\|^2=\left\|\underline{r}\right\|^2-2\left\langle \underline{r},\underline{s}_i\right\rangle+\left\|\underline{s}_i\right\|^2$$

Traitant seulement l'angle du vecteur reçu est l'équivalent de supposer que le vecteur reçu tombe sur le cercle MPSK. À ce moment, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}\left\|\underline{r}-\underline{s}_i\right\|^2&=E_s-2E_s\cos\left(\theta_{\underline{r}}-\theta_{\underline{s}_i}\right)+E_s\\&=2E_s\left[1-\cos\left(\theta_{\underline{r}}-\theta_{\underline{s}_i}\right)\right]\\&=2E_s\left[1-\cos\Delta\theta_i\right]\end{aligned}$$

Supposons que $E_b/N_0=10\text{ dB}$ et que le symbole A a une probabilité *a priori* de 94%, pendant que B, C et D ont une probabilité *a priori* de 2% chacun. Quelle est le détecteur qui maximise la probabilité a posteriori ? C'est-à-dire, quel est l'angle ϕ pour lequel la région d'acceptation du symbole A est élargie?



Nous cherchons i qui minimise

$$\left\|\underline{r}-\underline{s}_i\right\|^2 - N_0 \ln P\left(\mathbf{s}_i\right) = 2E_s\left[1-\cos\Delta\theta_i\right] - N_0 \ln P\left(\mathbf{s}_i\right)$$

$$= N_0\left[4\frac{E_b}{N_0} - 4\frac{E_b}{N_0}\cos\Delta\theta_i - \ln P\left(\mathbf{s}_i\right)\right]$$

Par symétrie nous avons que considérer la frontière entre A/B.
Donc, nous avons besoin de comparer

$$4\cdot E_b/N_0 - 4\cdot E_b/N_0\cos\Delta\theta_A - \ln 94\% \quad vs. \quad 4\cdot E_b/N_0 - 4\cdot E_b/N_0\cos\Delta\theta_B - \ln 2\%$$

Or

$$-4\cdot E_b/N_0\cos\Delta\theta_A - \ln 94\% \quad vs. \quad -4\cdot E_b/N_0\cos\Delta\theta_B - \ln 2\%$$

$$\cos\Delta\theta_A - \cos\Delta\theta_B \quad vs. \quad \frac{-\ln 94\% + \ln 2\%}{4\left(E_b/N_0\right)} = \frac{-\ln 47}{4\left(E_b/N_0\right)}$$

À la frontière nous avons égalité

$$\cos\left(45^\circ+\phi\right) - \cos\left(45^\circ-\phi\right) = \frac{-\ln 47}{4\left(E_b/N_0\right)}$$

$$\cos\left(45^\circ\right)\cos\left(\phi\right) - \sin\left(45^\circ\right)\sin\left(\phi\right) - \cos\left(45^\circ\right)\cos\left(\phi\right) - \sin\left(45^\circ\right)\sin\left(\phi\right) = \frac{-\ln 47}{4\left(E_b/N_0\right)}$$

$$-2\sin\left(45^\circ\right)\sin\left(\phi\right) = \frac{-\ln 47}{4\left(E_b/N_0\right)}$$

$$2\left(.707\right)\sin\left(\phi\right) = \frac{\ln 47}{4\left(E_b/N_0\right)}$$

$$\sin\left(\phi\right) = \frac{\ln 47}{8\left(.707\right)\left(E_b/N_0\right)}$$

$$= \frac{3.85}{8\left(.707\right)\left(10\right)} = .0681$$

$$\phi = 1.95^\circ$$

```
P_A=.94;
P_B=(1-P_A)/3;
SNR_dB=1;
SNR=10^(SNR_dB/10);
phi_rad=asin(log(P_A/P_B)/8/sin(pi/4)/SNR);
phi_deg=phi_rad/2/pi*180;
```