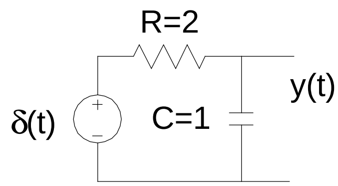
1997 Mini-Test 2 · *Solutions*

Problème 1

a)



$$\Rightarrow \quad y(t) = \frac{1}{2} e^{-t/2} U(t)$$

Pour trouver la réponse en fréquence, on remplace le condensateur avec une impédance complexe 1/ $j\omega C$ et, ensuite, on utilise les équations de Kirchoff pour calculer le courante et la tension. Le rapport des tensions dans ce circuit est donné par un simple diviseur de tension, donc

$$H(j\omega) = \frac{V_{in}(\omega)}{V_{out}(\omega)} = \frac{1/\ j\omega}{2 + 1/\ j\omega} = \frac{1}{1 + 2j\omega}$$

Comme $v_{in}(t) = \delta(t)$, on sait que la transformée de Fourier de l'entrée est

$$V_{in}(\omega) = 1$$

Donc la sortie sera

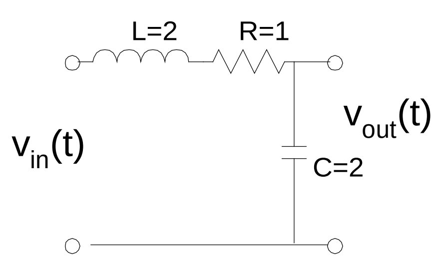
$$V_{out}(\omega) = V_{in}(\omega) H(j\omega) = 1 \cdot \frac{1}{1 + 2j\omega} = \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{1}{2} + j\omega}$$

Pour trouver la sortie dans le domaine du temps, il faut trouver la transformée inverse de la sortie dans le domaine fréquentiel.

$$v_{out}(t) = \mathrm{TF}^{-1}\{V_{out}(\omega)\} = \frac{1}{2} \mathrm{TF}^{-1}\left\{\frac{1}{\frac{1}{2} + j\omega}\right\} = \frac{1}{2} e^{-t/2} U(t)$$

en utilisant la table de transformées. Donc l'énoncé est **Vrai**.

b)



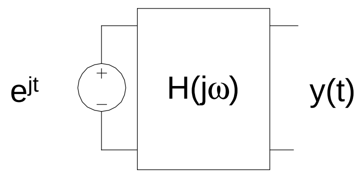
$$\Rightarrow \quad H(j\omega) = \frac{1}{1 + 4j\omega - 2\omega^2}$$

Pour trouver la réponse en fréquence, on remplace le condensateur avec une impédance complexe $1/\ j\omega 2$ et on remplace la bobine avec l'impédance complexe $2j\omega$, ensuite, on utilise les équations de Kirchoff pour calculer le courante et la tension. Le rapport des tensions dans ce circuit est donné par un simple diviseur de tension, donc

$$
\begin{aligned}
H(j\omega) &= \frac{V_{out}(\omega)}{V_{in}(\omega)} \\
&= \frac{1/2j\omega}{1+2j\omega+1/2j\omega} \\
&= \frac{1}{1+2j\omega-4\omega^2}
\end{aligned}
$$

Donc l'énoncé est **Faux**

c)



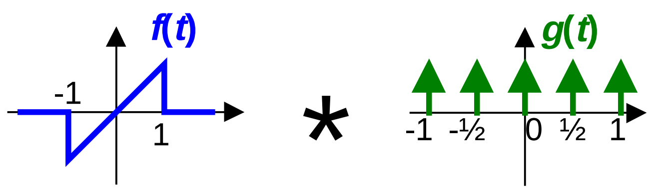
$$\Rightarrow \quad y(t) = |H(\omega = 1)| e^{jt}$$

La réponse d'un filtre à un phaseur c'est un phaseur dont l'amplitude est égale au module de la fonction de transfert évalué à la fréquence du phaseur d'entrée multipliée par celui de ce dernier, et la phase est égale à la phase du phaseur d'entrée augmenté par la phase du filtre évaluée à la fréquence du phaseur d'entrée.

Dans cet exemple la propriété sur l'amplitude est bien respectée mais celle de la phase ne l'est pas. Donc l'énoncé est **Faux**.

Problème 2

a)



$$f(t) = \begin{cases} t & -1 < t < 1 \\ 0 & \textit{ailleurs} \end{cases} \qquad g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n/2)$$

i) $\quad f * g$ ***est périodique***

Le produit de convolution est

$$
\begin{aligned}
f(t) * g(t) &= f(t) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n/2) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t) * \delta(t - n/2) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t - n/2)
\end{aligned}
$$

Le dernier passage est rendu possible grâce à la propriété de l'élément neutre que possède la fonction Dirac. La fonction résultante est donc périodique.

Il est important de remarquer que toute fonction de la forme $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t-n/2)$ est périodique indépendamment de la forme de *f(t). Donc la convolution de* $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-n/2)$ avec n'importe quelle fonction donne nécessairement une fonction périodique. Donc l'énoncé est **VRAI**.

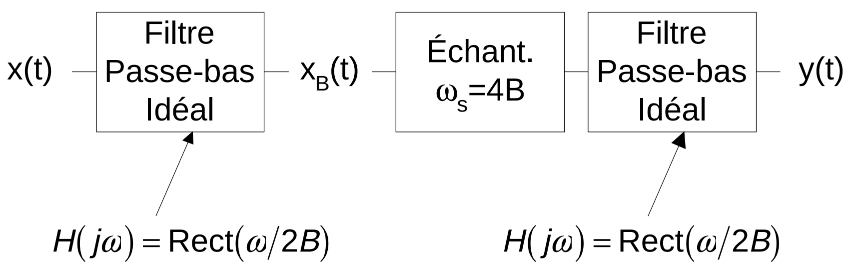
ii) $f \cdot g$ ***est périodique***

$$\begin{aligned} f(t)\cdot g(t) &= f(t)\cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-n/2) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n/2)\cdot \delta(t-n/2) \\ &= ½\delta(t-½) - ½\delta(t+½) \end{aligned}$$

en supposant que $f(t)$ est nulle pour $t \geq 1$ et $t \leq -1$. Le produit n'est pas périodique, Donc l'énoncé est **Faux**. Note que même si on suppose que $f(1) = 1$ et $f(-1) = -1$ le produit ne sera pas périodique.

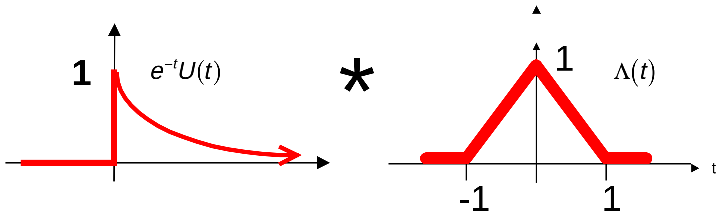
b)

$$x(t) = \mathrm{Rect}(t)$$



i) Le signal $x(t)$, a une transformée de Fourier $Sa(\omega/2)$, qui n'est pas limité en fréquence. Le premier filtre, donc, élimine une partie de l'information de $x(t)$, et ceci ne va jamais être retrouvé quelque soit le traitement ultérieur donc l'énoncé est **faux**.
ii) Après le premier filtre, il est clair que le signal $x_B(t)$ est devenue à bande limité entre -B et B. L'échantillonnage respecte le critère de Nyquist. Le spectre du signal échantillonné est donc périodisé. La période centrale de ce spectre sera une copie conforme du spectre de $x_B(t)$. Le deuxième filtrage extrait exactement le spectre de $x_B(t)$. L'énoncé est donc **vrai**.
iii) La discussion dans i) montre que $y(t) \neq x(t)$. Donc cette partie de l'énoncé est vraie. La discussion dans ii) montre que $y(t)=x_B(t)$, donc cette partie de l'énoncé est fausse. L'énoncé global est donc **faux**.
iv) Les discussions précédentes montrent que cet énoncé est **faux**.

Problème 3



a)
On cherche la convolution de la fonction

$$x(t) = e^{-t}U(t)$$

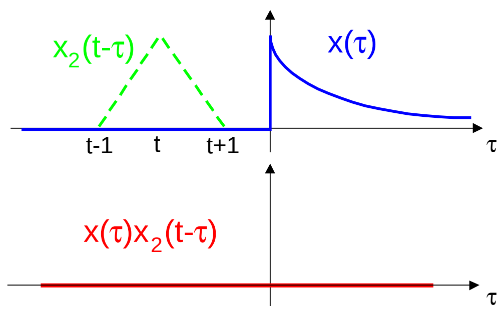
et la fonction

$$x_2(t) = \begin{cases} 1-t & 0 < t < 1 \\ t+1 & -1 < t < 0 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

Dans ce cas il est plus intéressant de prendre la forme $\{x_2 * x\}(t)$ car il est plus facile de déplacer un triangle qu'une exponentielle décroissante.

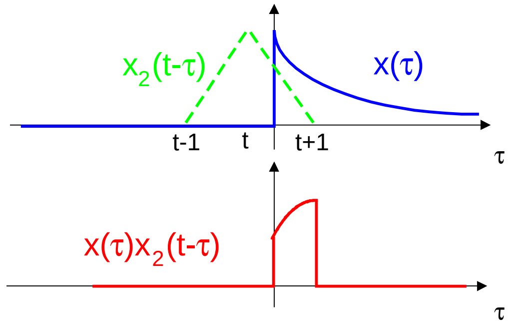
Cas 1 t<-1

Considérons l'intervalle de $t \in [-\infty,-1]$. Dans ce cas il n'y pas de recouvrement entre les deux fonctions, et la convolution est nulle, *i.e.*, $\{x_2 * x\}(t) = 0$



Cas 2 -1<t<0

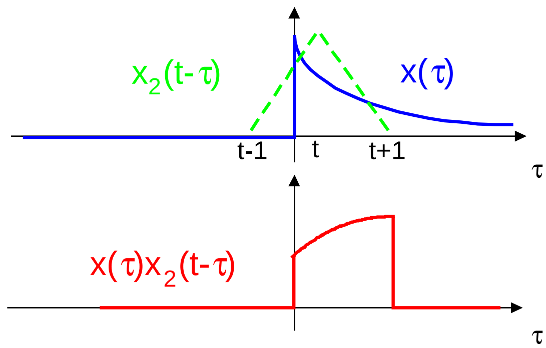
Une fois que t passe moins un, il y aura un recouvrement. Pour $t \in [-1,0]$ le recouvrement sera juste partielle.



Les bornes d'intégration sont donc de zéro à t+1.

Cas 3 0<t<1

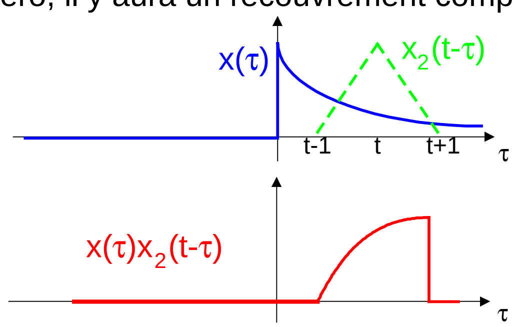
Une fois que t passe zéro, il y aura un recouvrement encore incomplet, mais différent.



Les bornes d'intégration sont donc de zéro à t et de t à t+1.

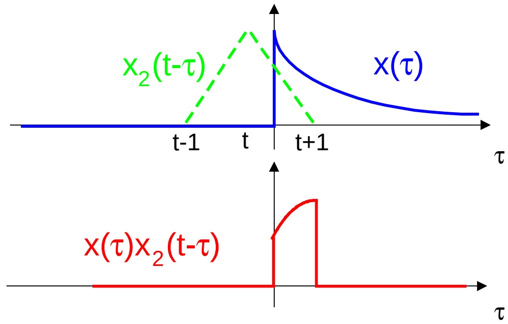
Cas 4 t>1

Une fois que t passe zéro, il y aura un recouvrement complet.



Pour $t\in[1,\infty]$ le recouvrement est complet, et les bornes d'intégration seront les limites du triangle, *i.e.*, t-1 jusqu'à t et de t jusqu'à t+1.

b) Pour -1<t<0 le chevauchement se produit seulement entre la partie décroissante de $x_2(t)$ et x(t).



L'intégration se fait de 0 à t+1. Il faut d'abord évaluer la fonction $x_2(t\text{-}\tau)$ pour -1<t<0, et lorsque 0<τ<t+1

$$x_2(t-\tau) = t+1-\tau \quad \text{pour } -1<t<0 \text{ et } 0<\tau<t+1$$

Le produit de convolution est donc

$$\begin{aligned}
x_2(t)*x(t) &= \int_0^{t+1}(t+1-\tau)e^{-\tau}d\tau \\
&= (t+1)\int_0^{t+1}e^{-\tau}d\tau - \int_0^{t+1}\tau e^{-\tau}d\tau \\
&= (t+1)\left[-e^{-\tau}\right]_0^{t+1} - \left[-\tau e^{-\tau}\right]_0^{t+1} + \int_0^{t+1}e^{-\tau}d\tau \\
&= (t+1)\left[e^{-0}-e^{-t-1}\right] + \left[(t+1)e^{-t-1} - 0\cdot e^{-0}\right] + \left[-e^{-\tau}\right]_0^{t+1} \\
&= (t+1)\left[1-e^{-t-1}\right] + (t+1)e^{-t-1} + \left[-e^{-\tau}\right]_0^{t+1} \\
&= (t+1)\left[1-e^{-t-1}+e^{-t-1}\right] + \left[e^{-0}-e^{-t-1}\right] \\
&= t+1+1-e^{-t-1} \\
&= 2+t-e^{-t-1}
\end{aligned}$$