Université Laval
Professeur: Jérôme Genest

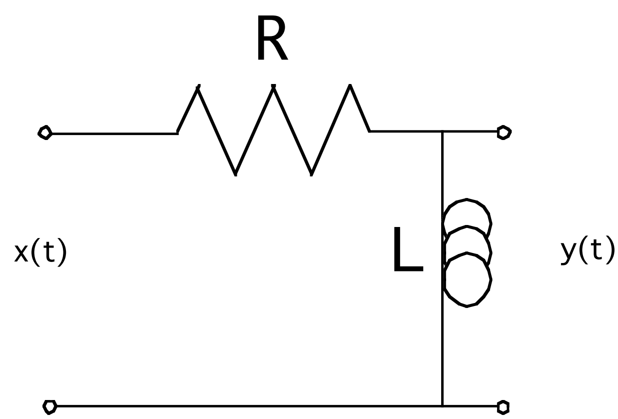
Département de génie électrique
et de génie informatique

GEL19962: Analyse des signaux
Examen final 2004

Lundi le 13 décembre 2004 ; durée: 8h30 à 10h20
Aucune feuille de documentation permise; une calculatrice permise

---

Problème 1 (9 points sur 45)



A. (7 points) Calculez la réponse impulsionnelle (h(t)) du circuit-ci haut.
B. (1 point) S'agit-il d'un système causal ?
C. (1 point) Est-ce que ce filtre coupe les hautes ou les basse fréquences ?

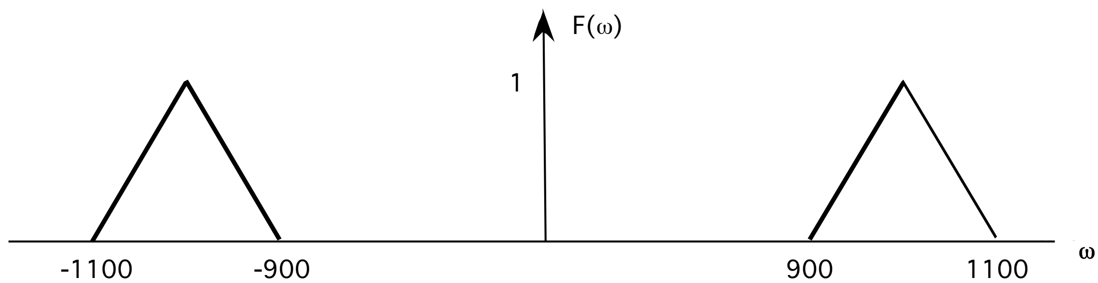
Problème 2 (11 points sur 45)

Calculez la convolution de Rect(t-1/2) avec $(1-e^{-t})\, u(t)$.

Prenez bien soin d'illustrer graphiquement les différentes étapes.

Problème 3 (14 points sur 40)

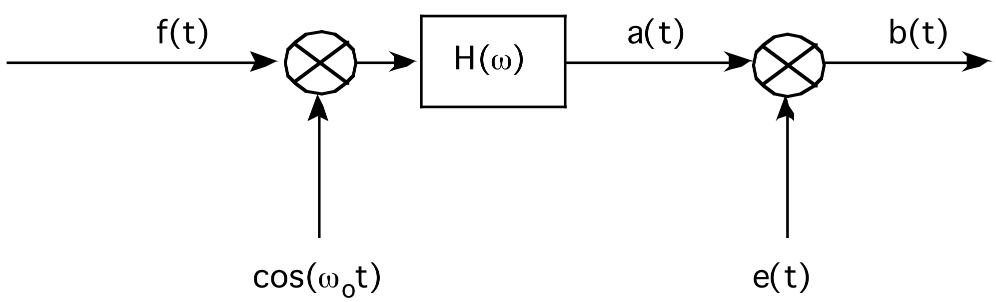
Un signal f(t) a un spectre $F(\omega)$ tel qu'illustré ci-bas.



A. (1 point) Quelle est la puissance totale de ce signal ?

B. (2 points) Calculez l'énergie totale du signal.

Le signal est envoyé au système suivant :



$$H(\omega) = \mathrm{Rect}(\omega/2000) \qquad e(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_e)$$

avec ω_o = 1000 rad/s et $T_e = 2\,\pi/180$.

C. (4 points) Calculez et tracez la transformée de Fourier de a(t).

D. (4 points) Calculez et tracez la transformée de Fourier de b(t).

E. (0.5 point) Quelle est l'utilité de la première multiplication (par le cosinus) ?

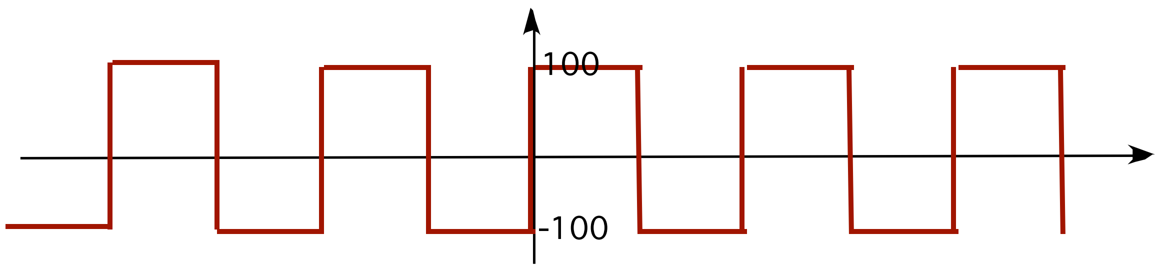
F. (0.5 point) À quoi sert le filtre $H(\omega)$?

G. (1 point) Pourrait-on reconstruire f(t) à partir de b(t) ? Pourquoi ?

H. (1 point) Quelle est la période d'échantillonnage maximale possible pour discrétiser a(t) sans perte d'information ?

Problème 4 (11 points sur 40)

Un onduleur produit un signal alternatif à f=60 Hz en inversant périodiquement le signe d'une tension continue. Le signal ainsi produit est illustré à la figure suivante.



L'amplitude de ce signal est +-100 Volts.

A. (6 points) Calculez la série de Fourier du signal périodique généré par l'onduleur.

L'onde carrée est filtrée avec un filtre idéal en Rect($\omega/2\omega_c$) avec une fréquence de coupure f_c = 75 Hz..

B. (2 points) Quel est le signal temporel à la sortie du filtre ?

C. (2 points) Quelle fraction de la puissance a été perdue par filtrage ?

Si au lieu l'onde carrée est filtrée avec un premier ordre réel tel que :

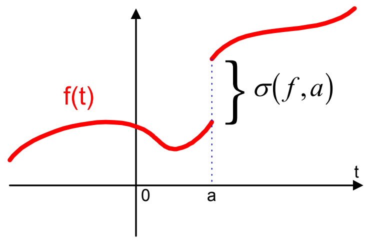
$$H(\omega) = \frac{1}{1 + \omega/\omega_c},$$

avec wc = 2 π 75 rad/s.

D. (1 point) Quelle est alors la puissance dans la première harmonique du signal filtré? Quelle est la puissance dans la troisième harmonique du même signal filtré ?

Tables de Transformées et Propriétés
Examen Final

Dérivée d'une fonction discontinue



$$(D_f)' = D_{f'} + \sigma(f,a)\delta_a$$

Manipulation sur la fonction delta

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$$

et $f(t)\delta(t-a) = f(a)\delta(t-a)$

$$f(t) * \delta(t) = f(t)$$

et $f(t) * \delta(t-a) = f(t-a)$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-jn\tau\omega} = \frac{2\pi}{\tau}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega - \frac{2\pi n}{\tau}\right)$$

Séries de Fourier

$F_{série}(n) = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f_p(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$ et $\qquad f_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_{série}(n)e^{jn\omega_0 t}$

Théorème de Parseval : $\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}\left|f_p(t)\right|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|F_{série}(n)\right|^2$

Calcul des coefficients de Fourier d'une fonction périodique

Soit $f_r(t)$ la restriction de la fonction $f_p(t)$ sur $[-T_0/2, T_0/2]$ et

$f_r(t) \Leftrightarrow F_r(\omega)$. Nous aurons: $F_{Série}(n) = \frac{F_r(n\omega_0)}{T_0}$

Transformée de Fourier

$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt \quad$ et $\quad f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$

Théorème de Parseval : $\int_{-\infty}^{+\infty}\left|f(t)\right|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|F(\omega)\right|^2 d\omega$

Produit de convolution

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(t-u)du = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)f(t-u)du$$

Tables de Transformées et Propriétés
Examen Final

Fonction	Transformée de Fourier	Fonction	Transformée de Fourier
$f(t)$	$F(\omega)$	$\delta(t)$	1
$F(t)$	$2\pi f(-\omega)$	1	$2\pi\delta(\omega)$
$f(t+a)$	$e^{ja\omega}F(\omega)$	$\delta_{T_0}(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT_0)$	$\omega_0\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-n\omega_0)$
$f(at)$	$\frac{1}{\|a\|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$	$\mathrm{U}(t)$	$\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$
$e^{jbt}f(t)$	$F(\omega-b)$	$\mathrm{Sgn}(t)$	$\frac{2}{j\omega}$
$t^n f(t)$	$(j)^n\frac{d^n}{d\omega^n}F(\omega)$	$\mathrm{Rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)$ †	$\tau\,\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$
$\frac{d^n}{dt^n}f(t)$	$(j\omega)^n F(\omega)$	$\mathrm{Tri}\left(\frac{t}{\tau}\right)$ ‡	$\tau^2\,\mathrm{Sa}^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$
$f(t)\times g(t)$	$\frac{1}{2\pi}F(\omega)*G(\omega)$	$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\,\delta(\omega-\omega_0)$
$f(t)*g(t)$	$F(\omega)\times G(\omega)$	$\cos(\omega_0 t)$	$\pi\left[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right]$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\omega_0 t}$	$2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\delta(\omega-n\omega_0)$	$\sin(\omega_0 t)$	$\frac{\pi}{j}\left[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)\right]$
$e^{-\beta t}\,\mathrm{U}(t)$	$\frac{1}{\beta+j\omega}$	$\mathrm{Sa}(tB)$	$\frac{\pi}{B}\mathrm{Rect}\left(\frac{\omega}{2B}\right)$
$e^{-\beta\|t\|}$	$\frac{2\beta}{\beta^2+\omega^2}$	$\mathrm{Sa}^2(tB)$	$\frac{\pi}{2B^2}\mathrm{Tri}\left(\frac{\omega}{2B}\right)$

† $\mathrm{Rect}\left(\frac{t-t_0}{\tau}\right)$ est un rectangle de hauteur un, centré sur $t=t_0$, et de longueur τ.

‡ $\mathrm{Tri}\left(\frac{t-t_0}{\tau}\right)$ est un triangle de hauteur τ centré sur $t=t_0$, avec un base de longueur 2τ.