Corrigé Mini 1 H2012

Question 1.

$$x^* = 1.0161468, \qquad \Delta x = 0.43 \times 10^{-3}$$

a) On a

$$0.5 \times 10^{-4} \leq \Delta x \leq 0.5 \times 10^{-3}$$

alors selon la convention vue en classe, le chiffre significatif « le plus à droite » correspond à la puissance -3 des dizaines :

$$\overset{10^{0}}{\downarrow}\hspace{-0.6em}1.01\overset{10^{-3}}{\downarrow}\hspace{-0.6em}61468$$

seul 1.016 sont significatifs ce qui fait 4 chiffres significatifs.

b) Si on veut une représentation en virgule flottante à 3 chiffres avec arrondi pour remplir la mantisse alors on aura

$$fl(x^*) = fl(1.016468) = fl(0.1016468 \times 10^1) = 0.102 \times 10^1$$

Question 2.

$$f(x) = e^x + \sin x \qquad x \in [0,1]$$

a) Pour le polynôme de Taylor de degré 2, avec $x_0 = 0$, il nous faut :

$$f(x_0) = f(0) = 1$$

$$f'(x) = e^x + \cos x \quad \rightarrow \quad f'(x_0) = f'(0) = 2$$

$$f^{(2)}(x) = e^x - \sin x \quad \rightarrow \quad f^{(2)}(x_0) = f^{(2)}(0) = 1$$

Et pour le terme d'erreur

$$f^{(3)}(x) = e^x - \cos(x)$$

On sait que

$$p_2(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2} f^{(2)}(x_0) = 1 + 2x + \frac{x^2}{2}$$

Version « **super**! »

b) On remarque que le terme suivant qui serait utilisé pour le polynôme de degré 3 est nul

$$f^{(3)}(x_0) = f^{(3)}(0) = 0$$

Donc le polynôme de degré 3 coïncide avec le polynôme de degré 2! Le terme d'erreur du polynôme $p_2(x)$ est donc

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi_x)}{4!}(x - x_0)^4 = \frac{f^{(4)}(\xi_x)}{4!}x^4$$

Avec $\xi_x \in [0, x]$ car $x \in [0,1]$. On a

$$f^{(4)}(\xi_x) = e^{\xi_x} + \sin \xi_x$$

Puisque e^x est croissante et $\sin x$ est croissante sur $[0, x]$ et $x \leq 1$ on a

$$f^{(4)}(\xi_x) = e^{\xi_x} + \sin \xi_x \leq e^x + \sin x \leq e + \sin 1 \approx 3.56$$

D'où

$$R_3(x) \leq \frac{e^x + \sin x}{24}x^4 \leq \frac{3.56}{24}\, x^4 \approx 0.15x^4$$

Et on peut dire que l'erreur est d'ordre 4 au maximum.

Version « **normale** »

b) Un polynôme de Taylor de degré 2 est au minimum d'ordre 3, car le terme d'erreur est

$$R_2(x) = \frac{f^{(3)}(\xi_x)}{3!}(x - x_0)^3 = \frac{f^{(3)}(\xi_x)}{3!}x^3$$

Avec $\xi_x \in [0, x]$ car $x \in [0,1]$. On a

$$f^{(3)}(\xi_x) = e^{\xi_x} - \cos \xi_x$$

Puisque e^x est croissante et $-\cos x$ est croissante sur $[0, x]$ et $x \leq 1$ on a

$$f^{(4)}(\xi_x) = e^{\xi_x} - \cos \xi_x \leq e^x - \cos x \leq e - \cos 1 \approx 2.17$$

D'où

$$R_2(x) \leq \frac{e^x - \cos x}{6} \leq \frac{2.17}{6}\, x^3 \approx 0.36x^3$$

c) voir **b)**!

d) En utilisant **a)** on a

$$f(0.1) \approx p_2(0.1) = 1 + 2(0.2) + \frac{(0.1)^2}{2} = 1.205$$

En utilisant la calculatrice comme référence, on a

$$E_a\big(p_2(0.1)\big) = \; |p_2(0.1) - f(0.1)| \approx 4.334722475 \times 10^{-6}$$

$$E_r\big(p_2(0.1)\big) = \frac{E_a\big(p_2(0.1)\big)}{|f(0.1)|} \approx 3.597267122 \times 10^{-6}$$

e) En utilisant l'erreur absolue, on a

$$E_a\big(p_2(0.1)\big) \approx 0.4334722475 \times 10^{-5} \leq 0.5 \times 10^{-5}$$

Donc par convention le chiffre significatif « le plus à droite » correspond à la puissance -5 des dizaines :

$$p_2(0.1) = 1.20500$$

Où tous les chiffres sont significatifs ce qui fait 6 chiffres significatifs.

Bonus

Ici on nous laisse le choix d'arrondir ou de tronquer.

Si on a pris l'arrondi. On doit respecter l'ordre de priorité des parenthèses! Alors

$$(x+y) \;\rightarrow\; fl\big(fl(x)+fl(y)\big) = fl(0.324\times10^3 + 0.754\times10^3) = fl(1.078\times10^3) = 0.108\times10^4$$
$$(x+y)+z \quad\rightarrow\quad fl(0.108\times10^4 + 0.219\times10^2) = fl(0.108\times10^4 + 0.002\times10^4) = 0.110\times10^4$$

Si on a pris la troncature. On doit respecter l'ordre de priorité des parenthèses! Alors

$$(x+y) \;\rightarrow\; fl\big(fl(x)+fl(y)\big) = fl(0.324\times10^3 + 0.754\times10^3) = fl(1.078\times10^3) = 0.107\times10^4$$
$$(x+y)+z \quad\rightarrow\quad fl(0.107\times10^4 + 0.219\times10^2) = fl(0.107\times10^4 + 0.002\times10^4) = 0.109\times10^4$$