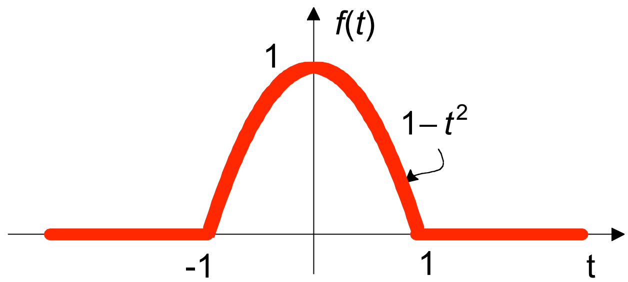
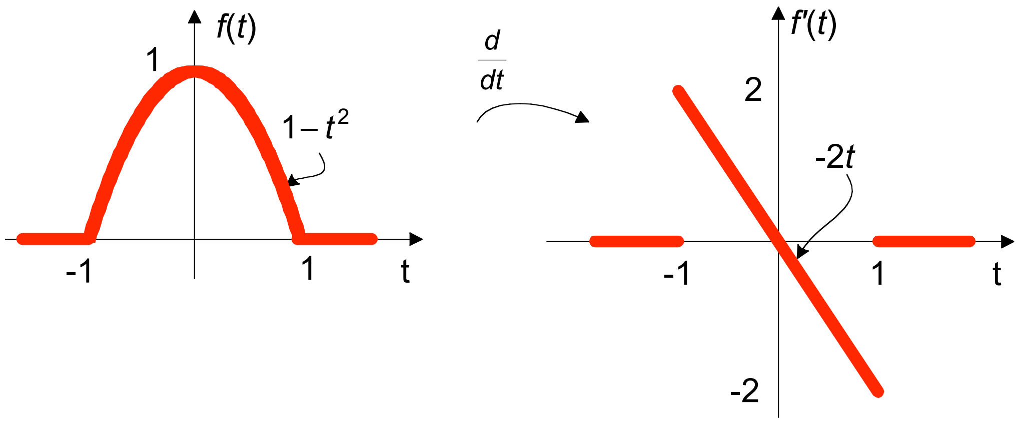
1998 Examen Partiel - *Solutions*

Problème 1

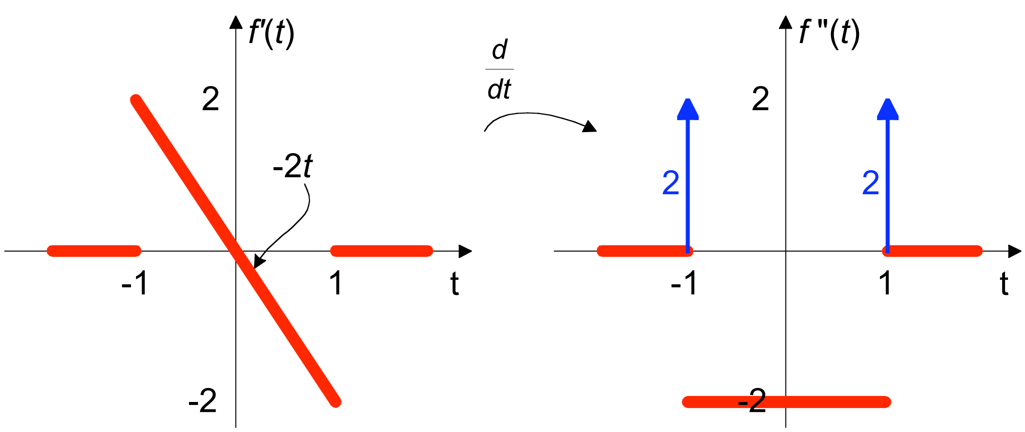


Méthode A

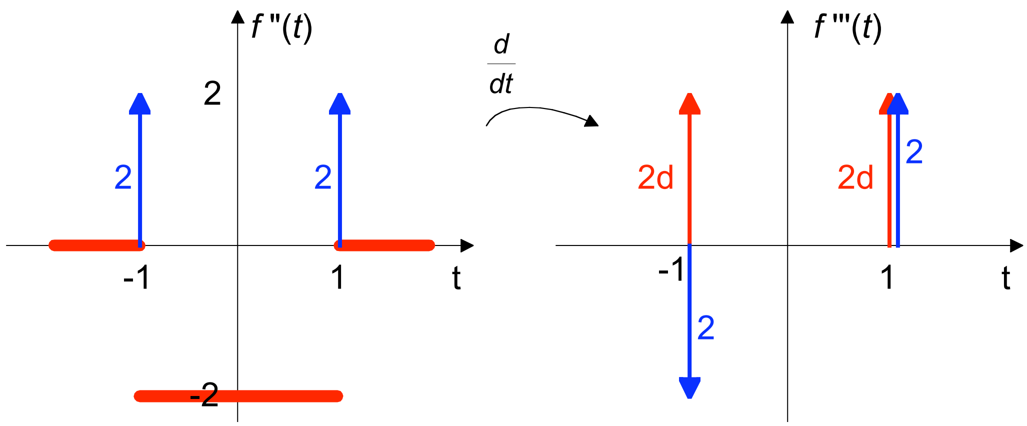
On va utiliser les méthodes de dérivée. Nous commençons avec la première



dérivée de cette fonction continue. La première dérivée n'est pas continue. La deuxième dérivée contiendra donc des fonctions delta.



La troisième dérivée contient deux fonctions delta correspondantes aux deux discontinuités de la deuxième dérivée, et elle contient en plus deux doublets qui sont les dérivées des fonctions delta.



L'équation pour la troisième dérivée est donc

$$f'''(t) = 2\delta(t-1) - 2\delta(t+1) + 2\delta'(t-1) + 2\delta'(t+1)$$

La transformée de Fourier des deux côtés de cette équation est

$$\begin{aligned}
TF\{f'''(t)\} &= 2TF\{\delta(t-1)\} - 2TF\{\delta(t+1)\} + 2TF\{\delta'(t-1)\} + 2TF\{\delta'(t+1)\} \\
&= 2e^{-j\omega}TF\{\delta(t)\} - 2e^{j\omega}TF\{\delta(t)\} + 2e^{-j\omega}TF\{\delta'(t)\} + 2e^{j\omega}TF\{\delta'(t)\} \\
&= -2\left(e^{j\omega} - e^{-j\omega}\right)TF\{\delta(t)\} + 2\left(e^{j\omega} + e^{-j\omega}\right)TF\{\delta'(t)\} \\
&= -4j\sin\omega TF\{\delta(t)\} + 4\cos\omega TF\{\delta'(t)\} \\
&= -4j\sin\omega + 4j\omega\cos\omega \\
&= -4j(\sin\omega - \omega\cos\omega)
\end{aligned}$$

En utilisant le théorème de dérivation nous avons que

$$(j\omega)^3 F(\omega) = -4j(\sin\omega - \omega\cos\omega)$$

Comme $f(t)$ est une fonction intégrable (elle est bornée et de durée finie) nous avons que sa transformée est

$$F(\omega) = \frac{-4j(\sin\omega - \omega\cos\omega)}{-j\omega^3} = 4\frac{\sin\omega - \omega\cos\omega}{\omega^3}$$

Méthode B

Nous pouvons évaluer la transformée en écrivant la fonction comme la somme d'un rectangle plus un rectangle multipliée par t^2. Nous pouvons utiliser la relation pour la transformée d'une fonction multipliée par une puissance de t.

$$\begin{aligned}F(\omega) &= TF\left\{\mathrm{Rect}\left(\frac{t}{2}\right)\right\} - TF\left\{t^2\,\mathrm{Rect}\left(\frac{t}{2}\right)\right\}\\
&= TF\left\{\mathrm{Rect}\left(\frac{t}{2}\right)\right\} - (j)^2\,\frac{d^2TF\left\{\mathrm{Rect}\left(\frac{t}{2}\right)\right\}}{d\omega^2}\\
&= 2\,\mathrm{Sa}\,\omega + 2\frac{d^2\,\mathrm{Sa}\,\omega}{d\omega^2}\\
&= 2\,\mathrm{Sa}\,\omega + 2\frac{d^2\,\sin\omega/\omega}{d\omega^2}\end{aligned}$$

La deuxième dérivée n'est pas trop difficile de trouver.

$$\begin{aligned}F(\omega) &= 2\frac{\sin\omega}{\omega} + 2\frac{d}{d\omega}\left(\frac{\cos\omega}{\omega} - \frac{\sin\omega}{\omega^2}\right)\\
&= 2\frac{\sin\omega}{\omega} + 2\left(-\frac{\sin\omega}{\omega} - \frac{\cos\omega}{\omega^2} - \frac{\cos\omega}{\omega^2} + \frac{2\sin\omega}{\omega^3}\right)\\
&= 2\left(\frac{2\sin\omega}{\omega^3} - \frac{2\cos\omega}{\omega^2}\right) = 4\,\frac{\sin\omega - \omega\cos\omega}{\omega^3}\end{aligned}$$

Méthode C

Nous pouvons toujours calculer la transformée directement de l'équation d'analyse,

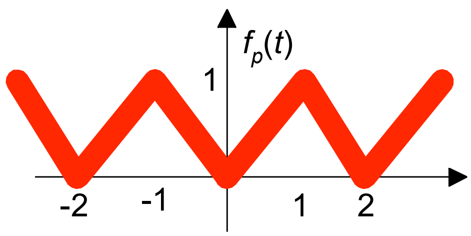
$$\begin{aligned}F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-1}^{1}\left(1-t^2\right)e^{-j\omega t}dt\\
&= \int_{-1}^{1} e^{-j\omega t}dt - \int_{-1}^{1} t^2 e^{-j\omega t}dt\end{aligned}$$

Nous pouvons évaluer la deuxième intégrale en utilisant l'intégration par parties deux fois.

Vérification

La fonction originale *f*(*t*) est réelle et paire. Sa transformée doit être entièrement réelle et paire. *F*(ω) est bien réelle et, en plus, elle est une fonction paire.

Problème 2



A) (12 pts) La fonction est périodique, donc nous savons de départ que la transformée aura la forme suivante

$$F(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_{Série}(n)\delta(\omega - n\omega_0)$$

La période est T_0=2 et la fréquence fondamentale est $\omega_0=\pi$. Il faut trouver les coefficients de la série de Fourier, et nous avons deux méthodes pour le faire. Nous pouvons calculer les coefficients à partir de l'équation d'analyse, ou nous pouvons utiliser la restriction de la fonction $f_r(t)$ et la relation suivante

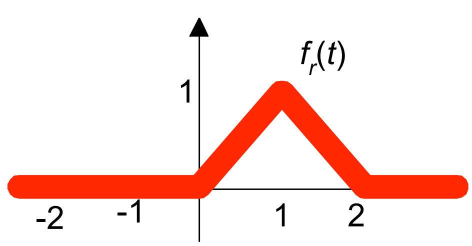
$$F_{Série}(n) = \frac{F_{Restriction}(n\omega_0)}{T_0}$$

où $f_r(t) \Leftrightarrow F_{Restriction}(\omega)$. Nous commencerons avec cette deuxième méthode. Avant que nous commençons, nous calculons $F_{Série}(n=0)$. Ça doit être calculé directement pour toutes les méthodes.

$$F(0) = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}|t|\,dt = \int_0^1 t\,dt = \left.\frac{t^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2}$$

Méthode A

Nous allons utiliser la table de transformées pour chercher les coefficients de la série de Fourier. La restriction de la fonction $f(t)$ est



Nous pouvons identifier la restriction comme la fonction Tri(t) déplacée dans le temps, *i.e.*,

$$f_r(t) = \mathrm{Tri}(t-1)$$

En utilisant la propriété de déplacement en temps, nous savons que

$$\begin{aligned} F_{Restriction}(\omega) &= e^{-j\omega} TF\left\{\mathrm{Tri}(t)\right\} \\ &= e^{-j\omega} Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \end{aligned}$$

où nous avons utilisé la table pour chercher la transformée de la fonction Tri(*t*). Les coefficients sont

$$\begin{aligned} F_{Série}(n) &= \frac{F_{Restriction}(n\omega_0)}{T_0} = \frac{1}{2} e^{-jn\pi} Sa^2\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}(\cos n\pi - j\sin n\pi)\left[\frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi/2}\right]^2 \\ &= \frac{1}{2}(-1)^n\left[\frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi/2}\right]^2 \\ &= \frac{2}{n^2\pi^2}(-1)^n \begin{cases} 1 & n \text{ impair} \\ 0 & n \text{ pair} \end{cases} \\ &= \frac{-2}{n^2\pi^2} \begin{cases} 1 & n \text{ impair} \\ 0 & n \text{ pair} \end{cases} \end{aligned}$$

Maintenant nous sommes capables d'écrire la transformée de cette fonction périodique

$$\begin{aligned} F(\omega) &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_{Série}(n)\delta(\omega - n\omega_0) \\ &= 2\pi \sum_{\substack{n=-\infty, \\ n\neq 0, n \text{ impair}}}^{+\infty} \frac{-2}{n^2\pi^2}\delta(\omega - n\pi) + 2\pi F(0)\delta(\omega) \\ &= \sum_{\substack{n=-\infty, \\ n\neq 0, n \text{ impair}}}^{+\infty} \frac{-4}{n^2\pi}\delta(\omega - n\pi) + \pi\delta(\omega) \end{aligned}$$

Méthode B

Nous pouvons aussi calculer les coefficients de la série de Fourier en utilisant le calcul direct à partir de l'équation d'analyse

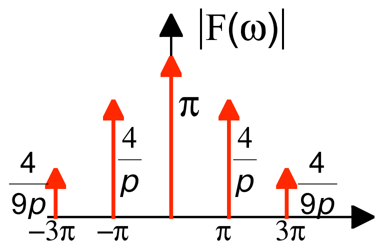
$$F(n) = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}|t|\,e^{-jn\pi t}dt$$
$$= -\frac{1}{2}\int_{-1}^{0} te^{-jn\pi t}dt + \frac{1}{2}\int_{0}^{1} te^{-jn\pi t}dt$$

Nous pouvons évaluer la deuxième intégrale en utilisant l'intégration par parties deux fois.

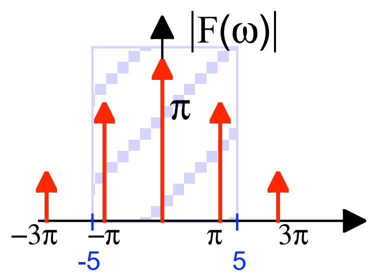
Vérification

La fonction originale *f*(*t*) est réelle et paire. Sa transformée doit être entièrement réelle et paire. *F*(ω) est bien réelle et, en plus, elle est une fonction paire, comme nous voyons dans le spectre d'amplitude

B) (2 pts) Le spectre d'amplitude est



C) (2 pts) Dans la bande de fréquence -5<ω<5, nous avons juste trois fonctions delta, ça veut dire il y en a juste trois coefficients de la série de Fourier.



La puissance moyenne dans cette bande de fréquence est donc

$$P = \sum_{n=-1}^{1}|F(n)|^2 = |F(-1)|^2 + |F(0)|^2 + |F(1)|^2$$
$$= \left(\frac{2}{\pi^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{\pi^2}\right)^2 = \frac{8}{\pi^4} + \frac{1}{4}$$

Problème 3

Méthode A

Pour chercher la transformée inverse de

$$F(\omega) = \frac{\cos(\omega)}{\omega + \frac{\pi}{2}}$$

nous devons simplifier le dénominateur en écrivant

$$F\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\cos\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right)}{\omega}$$

Nous utilisons les relations trigonométriques pour simplifier encore

$$\begin{aligned} F\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right) &= \frac{\cos\omega \cos\pi/2 + \sin\omega \sin\pi/2}{\omega} \\ &= \frac{\cos\omega \cdot 0 + \sin\omega \cdot 1}{\omega} = \frac{\sin\omega}{\omega} \\ &= \mathrm{Sa}\,\omega \end{aligned}$$

Maintenant nous avons une forme que nous pouvons utiliser pour exploiter l'information dans la table de transformées et les propriétés des transformées. Admettons que

$$f(t) \Leftrightarrow F(\omega)$$

En utilisant la propriété de la déplacement en fréquence nous savons que

$$e^{jt\pi/2} f(t) \Leftrightarrow F\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right)$$

Donc

$$e^{jt\pi/2} f(t) \Leftrightarrow Sa(\omega)$$

Nous pouvons trouver la transformée inverse de Sa(ω) dans la table.

$$e^{jt\pi/2} f(t) = \frac{1}{2}\mathrm{Rect}\left(\frac{t}{2}\right)$$

où nous avons choisi τ=2. Donc

$$f(t) = \frac{e^{-jt\pi/2}}{2}\mathrm{Rect}\left(\frac{t}{2}\right)$$

est la transformée inverse.

B) (2 pts) L'aire sous la courbe de f(t) est donné par l'équation d'analyse

$$F(0) = F(\omega)\Big|_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt\Big|_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j0t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$$

La transformée pour ω=0 est simplement

$$F(0) = \frac{\cos(\omega)}{\omega + \frac{\pi}{2}}\Bigg|_{\omega=0} = \frac{\cos(0)}{0 + \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$$