Created using Click to Convert Trial - http://www.clicktoconvert.com

1998 Mini-Test 1 : Solutions

Problème 1 (1 point sur 5)

$$3+4\sin(2\pi t)-2\cos(6\pi t)-4\sin(6\pi t)$$

Il y a deux candidats possibles pour la fréquence:

$$\omega_0 = 2\pi, \quad \omega_0 = 6\pi$$

Si on commence avec la première possibilité, $\omega_0 = 2\pi$, on peut trouver l'autre fréquence comme un multiple **entier** de cette fréquence, *i.e.*, $6\pi = 3\omega_0 = 3\cdot 2\pi$. La fréquence fondamentale est donc $\omega_0 = 2\pi$.

$$\omega_0 = 2\pi \quad \Rightarrow \quad T_0 = 1$$

Les coefficients sont calculer ainsi

$$\begin{aligned}
&3+4\sin(2\pi t)-2\cos(6\pi t)-4\sin(6\pi t)\\
&= 3+\frac{4}{2j}\left(e^{j2\pi t}-e^{-j2\pi t}\right)-\frac{2}{2}\left(e^{j6\pi t}+e^{-j6\pi t}\right)-\frac{4}{2j}\left(e^{j6\pi t}-e^{-j6\pi t}\right)\\
&= 3-2j\left(e^{j2\pi t}-e^{-j2\pi t}\right)-\left(e^{j6\pi t}+e^{-j6\pi t}\right)+2j\left(e^{j6\pi t}-e^{-j6\pi t}\right)\\
&= 3-2je^{j2\pi t}+2je^{-j2\pi t}+(2j-1)e^{j6\pi t}-(2j+1)e^{-j6\pi t}\\
&= -(2j+1)e^{-j6\pi t}+2je^{-j2\pi t}+3-2je^{j2\pi t}+(2j-1)e^{j6\pi t}
\end{aligned}$$

Donc, la réponse est **2**.

$$F(0)=3 \quad F(3)=2j-1 \qquad F(-3)=-2j-1 \quad F(1)=-2j \quad F(-1)=2j$$

Problème 2 (1 point sur 5)

$$f_p(t)=\begin{cases} 2+t & -2<t<-1\\ -t & -1<t<1\\ -2+t & 1<t<2\end{cases} \quad , \quad f_p(t+4)=f_p(t)$$

Cette fonction est réelle et impaire…

1. $f_p(t)$ est une fonction réelle, donc on sait que

   $F^*(n)=F(-n)$ est VRAI

Created using Click to Convert Trial - http://www.clicktoconvert.com

2. L'argument d'une fonction donne toujours un réelle, donc on sait que

   $\operatorname{Arg} F(n)$ est imaginaire est FAUX

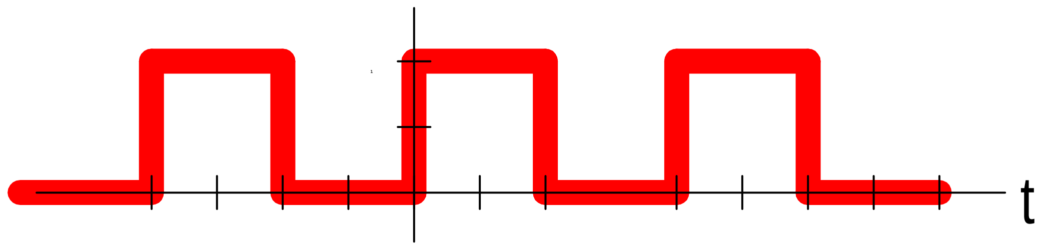
3. $f_p(t)$ est une fonction réelle, donc on sait que

   $|F(n)|$ est impaire est FAUX

4. $f_p(t)$ est une fonction impaire, donc on sait que

   $A(n) = 0 \quad \forall n$ est VRAI

Problème 3 (3 points sur 5)



Expression analytique: $f_p(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < 1 \\ 0 & 1 < t < 2 \end{cases}, \quad f_p(t+2) = f_p(t)$

Les coefficients complexes de Fourier pour cette fonction périodique sont déterminés par

$$F(n) = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} f_p(t)e^{-j\omega_0 nt}dt = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f_p(t)e^{-j\omega_0 nt}dt$$

Notez: on peut utiliser n'importe quelle période pour l'intégration.

On commence avec *n=0*.

$$F(0) = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} f_p(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^1 dt = \frac{1}{2}$$

Pour les autres valeurs de *n*:

Created using Click to Convert Trial - http://www.clicktoconvert.com

$$F(n) = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-j\omega_0 nt}dt = \frac{1}{2}\frac{e^{-j\omega_0 nt}}{-j\omega_0 n}\Bigg|_0^1 = \frac{j}{2\pi n}\left[e^{-j\pi n} - 1\right]$$

$$= \frac{j}{2\pi n}\left[\cos n\pi - j\sin n\pi - 1\right] = \frac{j}{2\pi n}\left[(-1)^n - 1\right]$$

$$= \begin{cases} \dfrac{-j}{\pi n} & n \text{ impair} \\ 0 & n \text{ pair} \end{cases}$$

b) *1 point*

Le théorème de Parseval nous dit que

$$P_{tot} = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}\left|f_p(t)\right|^2 dt = \int_0^{½} dt = \frac{1}{2}$$

La puissance de $f_p(t)$ pour $-3 \le n \le 3$ est

$$\sum_{n=-3}^{3}\left|F(n)\right|^2 = \frac{2}{9\pi^2} + \frac{2}{\pi^2} + \frac{1}{4} = 0.475158 = 95.03\%$$