Identification

NOM, PRÉNOM: ____________________

NUMÉRO DE DOSSIER: ____________________

SECTION: ____________________

MAT-1900: Mathématiques de l'ingénieur 1

Examen 2 (37%)

Le vendredi 10 novembre 2017 de 18h30 à 20h20

Enseignants

Section 80094: Jérémie Rostand

Section 80096: Hugo Chapdelaine

Section 80097: Line Baribeau

Solutions

Directives

- Identifiez immédiatement votre cahier d'examen.
- Assurez-vous que cet examen comporte 6 questions réparties sur 9 pages.
- Assurez-vous que les sonneries de vos appareils électroniques sont désactivées et rangez-les hors de portée.
- Vous avez droit à une feuille-résumé *manuscrite* et recto-verso $8\frac{1}{2}$" par 11".
- Sauf indication contraire, vous devez rédiger des solutions complètes et justifiées.
- Vous avez droit à une calculatrice autorisée par la faculté des sciences et génie.
- Dans tous les cas où c'est possible, vous devez écrire la valeur exacte et non une valeur numérique approchée (p.ex. si $x^2 = 2$ et $x > 0$ vous devriez écrire $x = \sqrt{2}$ plutôt que $x \approx 1,414$).

Résultats

Questions	1	2	3	4	5	6	Total
Points	15	10	15	15	20	25	100
Note:							

Question 1 (15 pts) Trouvez la solution générale de l'équation différentielle $4y'' + 12y' + 45 = 0$.

écriture sous la forme standard : $y'' + 3y' \overset{(*)}{=} -\frac{45}{4}$

EDL ordre 2, inhomogène à coeff. constants.

$f(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda = \lambda(\lambda + 3) \qquad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -3$

$y_{h,g}(x) = C_1 + C_2 \cdot e^{-3x}$

$y_p(x)$: La méthode des coeff. indéterminés indique que y_p est de la forme $y_p = Ax$

Après substitution dans $(*)$ on trouve

$$3A = -\frac{45}{4} \implies A = -\frac{45}{12} = -\frac{15}{4}$$

Ainsi $y_p(x) = -\frac{15}{4} \cdot x$

La solution générale est donc $y_g(x) = C_1 + C_2 e^{-3x} + -\frac{15}{4} \cdot x$

Question 2 (10 pts) On considère l'équation différentielle

$$(\star) \qquad xy' + y = \frac{x^2}{y}.$$

Vous pouvez tenir pour acquis que cette équation différentielle n'est pas à variables séparables.

(a) (4 pts) Quel changement de variable peut-on faire pour ramener $(\star)$ à une équation différentielle à variables séparables ?

(b) (6 pts) Effectuez le changement de variable identifié en (a) et donnez la nouvelle équation différentielle sous une forme qui montre clairement qu'elle est à variables séparables. (*Il n'est pas demandé de résoudre cette équation différentielle.*)

(a) On a $y' + \frac{y}{x} = \frac{x}{y} \Rightarrow y' = -\frac{y}{x} + \frac{x}{y}$ $(\dagger)$

On pose $u(x) = u = \frac{y}{x}$ afin d'obtenir une EDO séparable.

b) $xu = y \Rightarrow u + x \cdot u' = y'$. Après substitution dans $(\dagger)$ on trouve $u + xu' = -u + \frac{1}{u} \Rightarrow xu' = -2u + \frac{1}{u}$

$$\Rightarrow x\frac{du}{dx} = -2u + \frac{1}{u}$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{\left(-2u + \frac{1}{u}\right)}{x}$$

↳ ceci est clairement à variables séparables

Questions 3 (15 pts) On considère la famille de courbes

$$\mathcal{F}_c : \quad y^2 = cx^3$$

où $c \in \mathbb{R}$ est le paramètre.

(a) (5 pts) Trouvez l'équation différentielle qui caractérise la famille de courbes $\mathcal{F}_c$.

(b) (7 pts) Trouvez la famille des trajectoires orthogonales à la famille $\mathcal{F}_c$.

(c) (3 pts) Quelles sont les courbes trouvées en (b) (vous n'avez qu'à encercler la bonne réponse ci-bas) ?

(1) Des paraboles (2) Des droites (3) Des ellipses (4) Des hyperboles (5) Aucune des réponses précédentes

(a) $2yy' = 3cx^2$ & $\frac{y^2}{x^3} = c \longrightarrow 2yy' = 3\frac{y^2}{x^3}x^2 = 3\frac{y^2}{x}$

$\Longrightarrow 2y' = 3\frac{y}{x}$

$\Longrightarrow \boxed{y' = \frac{3}{2}\frac{y}{x}}$

(b) $y' = -\frac{2}{3}\cdot\frac{x}{y} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2}{3}\frac{x}{y} \Longrightarrow y\,dy = -\frac{2}{3}x\,dx$

$\Longrightarrow \int y\,dy = -\frac{2}{3}\int x\,dx$

$\Longrightarrow \frac{y^2}{2} = -\frac{2}{3}\frac{x^2}{2} + C$

$\Longrightarrow y^2 + \frac{2}{3}x^2 = D$

$\Longrightarrow \frac{y^2}{D} + \frac{x^2}{\left(\frac{3}{2}D\right)} = 1$

$\Longrightarrow \frac{y^2}{(\sqrt{D})^2} + \frac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{3}{2}D}\right)^2} = 1$

$$\boxed{\mathcal{F}_D^{\perp} : \frac{x^2}{\left(\sqrt{3/2\, D}\right)^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{D})^2} = 1}$$

Question 4 (15 pts) On considère l'équation différentielle

$$(\star\star) \qquad (1+x)y' - y = x(1+x)^2.$$

Trouvez la solution à l'équation différentielle $(\star\star)$ qui satisfait la condition $y(1) = 5$.

$$y' \underbrace{- \frac{1}{(1+x)}}_{p} y = \underbrace{x(1+x)}_{q}$$

$$y_h = e^{-\int \frac{-1}{(1+x)} dx} = e^{\log|1+x|} = (1+x)$$

$$y_p = y_h \int q \cdot y_h^{-1} \, dx = (1+x) \int \frac{x(1+x)}{(1+x)} dx = (1+x) \cdot \frac{x^2}{2}$$

Ainsi $y_g(x) = C \cdot (1+x) + (1+x) \cdot \frac{x^2}{2}$ où $C \in \mathbb{R}$

$$5 = y(1) = C \cdot (1+1) + (1+1) \cdot \frac{1^2}{2} = 2C + 1$$

$$\Longrightarrow C = 2$$

Donc

$$\boxed{y(x) = 2(1+x) + \frac{(1+x)x^2}{2} = (1+x)\left[2 + \frac{x^2}{2}\right].}$$

Q4. <u>Méthode de la variation de la constante</u>

(méthode de Lagrange)

$$y' + \underbrace{\left(\frac{-1}{1+x}\right)}_{p} y = \underbrace{x(1+x)}_{q}$$

ED homo. associée $\quad y' + \left(\frac{-1}{1+x}\right) y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x} y$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1+x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \log|y| \qquad \int \frac{dx}{1+x} = \log|1+x| + C$$

$$\Rightarrow \underline{y(x) = A \cdot (1+x) \quad \text{où } A \in \mathbb{R}}$$

On pose

$$y_p(x) = K(x) \cdot (1+x) \Rightarrow y_p' = K' \cdot (1+x) + K \cdot 1$$

Ainsi $\quad K' \cdot (1+x) + K \cdot 1 + \frac{-1}{(1+x)} (1+x) \cdot K = x(1+x)$

$$\Rightarrow K' \cdot (1+x) = x(1+x) \Rightarrow K' = x \Rightarrow \int K' dx = \int x \, dx = \frac{x^2}{2} + B$$

$$\int K' dx = K(x) \qquad B \in \mathbb{R}$$

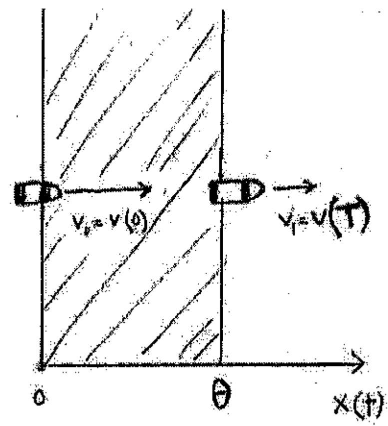
Ainsi $y_p = \left(\frac{x^2}{2} + B\right) \cdot (1+x) \quad$ pour $B \in \mathbb{R}$

Au final $y_p(x) = A \cdot (1+x) + \left(\frac{x^2}{2} + B\right)(1+x) = A \cdot (1+x) + \frac{x^2}{2}(1+x)$

$A, B \in \mathbb{R}$ $\qquad$ pour $A \in \mathbb{R}$

Question 5 (20 pts)

Intérieur de la plaque



Une balle de fusil de m_0 kilogrammes est tirée perpendiculairement sur une plaque d'acier d'épaisseur θ mètres située en position verticale. Lorsque la balle commence à rentrer à l'intérieur de la plaque (voir la figure à droite), sa vitesse est de v_0 m/s, et lorsqu'elle ressort, sa vitesse est de v_1 m/s. On sait que la force de résistance que la plaque exerce sur la balle à chaque instant est proportionnelle à $v(t)^2$ où $v(t)$ correspond à la vitesse de la balle au temps t. On notera par T le temps nécessaire pour que la balle traverse complètement la plaque d'acier. Ainsi $v(T) = v_1$ m/s.

(a) (3 pts) Expliquez brièvement pourquoi l'équation différentielle qui modélise ce problème est de la forme

$$(\dagger) \qquad \frac{dv}{dt} = -kv^2,$$

où k est une constante positive.

(b) (5 pts) Vérifiez que la solution $v(t)$ qui satisfait l'équation différentielle (†) et la condition initiale $v(0) = v_0$ est donnée par $v(t) = \dfrac{v_0}{v_0kt+1}$.

force de résistance

(a) La 2e loi de Newton nous donne $m_0 \dfrac{dv}{dt} = (\text{somme des forces}) = F_R$

constante de proportionnalité

$= C \cdot v^2$ car $F_R \propto C\, v^2$

Notons que C est négatif (il s'agit d'une force de résistance)

Ainsi $\dfrac{dv}{dt} = \left(\dfrac{C}{m_0}\right) \cdot v^2$ où $-k = \dfrac{C}{m_0}$ Comme $(C < 0$ et $m_0 > 0) \Rightarrow k > 0$

(b) $\dfrac{dv(t)}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{v_0}{v_0kt+1}\right) = -v_0 (v_0kt+1)^{-2} v_0k = \dfrac{-kv_0^2}{(v_0kt+1)^2}$

$-kv(t)^2 = -k\left(\dfrac{v_0}{v_0kt+1}\right)^2 = -\dfrac{kv_0^2}{(v_0kt+1)^2}$. Ainsi $v(t) = \dfrac{v_0}{v_0kt+1}$

satisfait l'éqn (†)

(c) (5 pts) On a vu en (b) que la vitesse est donnée par $v(t) = \frac{v_0}{v_0kt+1}$. Déterminez $x(t)$, la position de la balle au temps t (telle qu'illustrée sur le diagramme de la page précédente).

(d) (4 pts) Calculez la constante k qui apparaît dans l'équation différentielle (†) de la page précédente, à savoir

$$(\dagger) \qquad \frac{dv}{dt} = -kv^2,$$

en fonction des quantités v_0, v_1 et θ.

Indice: Utilisez les deux observations que $x(T) = \theta$ et que $v(T) = v_1$ dans la solution trouvée en (c).

(e) (3 pts) Exprimez le temps T, lequel correspond au temps nécessaire pour que la balle traverse la plaque d'acier, en fonction des quantités v_0, v_1 et θ.

c) $v(t) = \frac{dx}{dt} \Rightarrow x(t) = \int v(t)\,dt = \int \frac{v_0}{v_0kt+1} = \frac{v_0 \log|v_0kt+1|}{v_0k}$

$= \frac{1}{k}\log|v_0kt+1| + C$

On a la condition initiale $0 = x(0) = C$

Ainsi $x(t) = \frac{1}{k}\log|v_0kT+1|$

À l'aide des indices on trouve $\theta = x(T) \overset{(1)}{=} \frac{1}{k}\log|v_0kT+1|$

et $v_1 = v(T) = \frac{v_0}{v_0kT+1} \Rightarrow \frac{v_0}{v_1} \overset{(2)}{=} v_0kT+1$

Si on substitue (2) dans (1) on trouve

$\theta = \frac{1}{k}\log\frac{v_0}{v_1} \Rightarrow \boxed{k = \frac{1}{\theta}\log\frac{v_0}{v_1} \quad (3)}$

(e) De l'eqn(2) à la page précédente, on a

$$\frac{v_0}{v_1} = v_0 k T + 1 \Rightarrow \left(\frac{v_0}{v_1} - 1\right)\frac{1}{v_0 k} = T$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k}\left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_0}\right) \overset{(*)}{=} T$$

Si on substitue (3) dans (*) on trouve

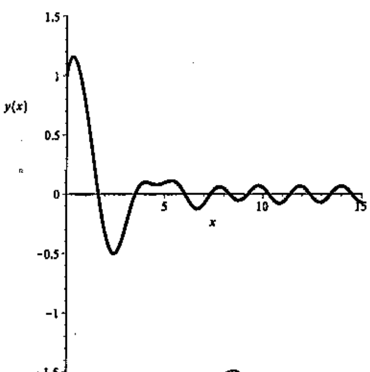
$$\boxed{\frac{\Theta}{\log \frac{v_0}{v_1}}\left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_0}\right) = T}$$

Question 6 (25 pts) Aucune justification n'est requise pour les sous-questions (a) et (b).

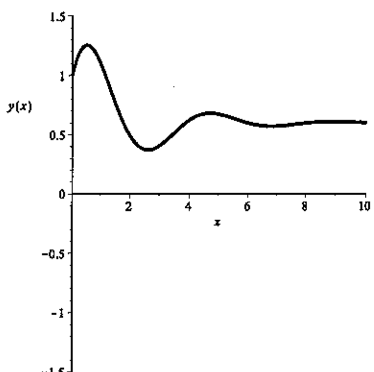
(a) (16 pts) Complétez le tableau ci-dessous en indiquant, pour chacune des équations différentielles linéaires non homogènes proposées, la forme sous laquelle il faut chercher une solution particulière y_p, si on applique la méthode des coefficients indéterminés.

No.	Équation différentielle	Forme de y_p
(1)	$2y'' + 5y = \sqrt{\frac{5}{2}} \cdot x$	$Ax + B$
(2)	$2y'' + 2y' + 5y = \sin 3x$	$A\sin(3x) + B\cos(3x)$
(3)	$2y'' + 2y' + 5y = 3$	A
	$y'''' + 81y = x \sin 3x$	$(Ax+B)\sin(3x) + (Cx+D)\cos(3x)$

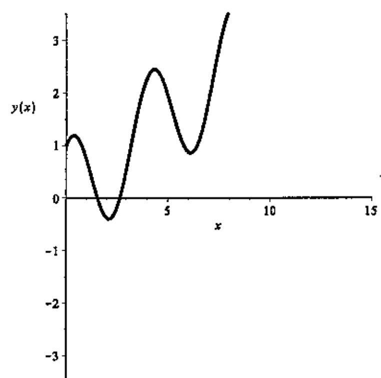
(b) (9 pts) Chacun des graphiques suivants représente la solution de l'une des équations (1), (2), (3) ci-dessus, pour les conditions initiales $y(0) = y'(0) = 1$. Inscrivez sous chacun le numéro de l'équation qui lui correspond.



éq. no. 2



éq. no. 3



éq. no. 1