MAT-2910 H14 (section B) : Mini-test 1
05 février 2014

Remarques :

1) Toutes les **réponses doivent être justifiées**. Dans le cas contraire, une réponse sera considérée comme nulle.
2) Seules les calculatrices avec l'auto-collant de la Faculté sont autorisées.
3) Déposez votre **carte d'identité avec photo sur le coin gauche** de votre table et **assoyez-vous du côté droit**.

1 Question 1 [30pts]

Soient $x^\star = 3.250$ et $y^\star = 0.4$ des approximations de x et y, respectivement.

a) [10pts] Sachant qu'elles ont 2 chiffres significatifs, donner une majoration des erreurs absolues Δx et Δy.
Réponse : Comme le dernier chiffre significatif de $x^\star$ est le 2, c'est à dire le chiffre des dixièmes (ou chiffre des 10^{-1}), $\Delta x \leq 0.5\,10^{-1}$. De même, comme le dernier chiffre significatif de $y^\star$ est le 0 (non visible) à droite du 4, c'est à dire le chiffre des centièmes (ou chiffre des 10^{-2}), $\Delta y \leq 0.5\,10^{-2}$. Comme ce sont les seules informations à notre disposition sur les erreurs, nous utiliserons ces majorations comme valeurs de ces erreurs.

b) [10pts] Donner une approximation de $5 \times x \times y^2$, et déterminer une majoration de l'erreur absolue.
Réponse : Posons $f(x,y) = 5xy^2$. Une approximation de $f(x,y)$ est donnée par $f(x^\star, y\star) = 5 \times 3.25 \times 0.4^2 = 2.6$. Par ailleurs, on va utiliser la formule de propagation de l'erreur

$$\Delta f \;=\; \left|\frac{\partial f(x^\star, y^\star)}{\partial x}\right| \Delta x + \left|\frac{\partial f(x^\star, y^\star)}{\partial y}\right| \Delta y$$

Or, $\frac{\partial f(x^\star,y^\star)}{\partial x} = 5(y^\star)^2 = 0.8$, $\frac{\partial f(x^\star,y^\star)}{\partial y} = 10x^\star y^\star = 13.$
Donc $\Delta f = 0.8 \times 0.5\,10^{-1} + 13 \times 0.5\,10^{-2} = 1.05\,10^{-1}$.

c) [10pts] Calculer, de deux manières différentes, $5 \times x^\star \times y^\star$ en arithmétique flottante à 2 chiffres dans la mantisse en utilisant l'arrondi.
Réponse : En commençant par la gauche :
$5 \times x^\star \to fl(fl(5) \times fl(3.25)) = fl(5 \times 3.3) = fl(16.5) = 17.$
$17 \times y^\star \to fl(fl(17) \times fl(0.4)) = fl(17 \times 0.4) = fl(6.8) = 6.8.$
En commençant par la droite :
$x^\star \times y^\star \to fl(fl(3.25) \times fl(0.4)) = fl(3.3 \times 0.4) = fl(1.32) = 1.3.$
$5 \times 1.3 \to fl(fl(5) \times fl(1.3)) = fl(5 \times 1.3) = fl(6.5) = 6.5.$

2 Question 2 [70pts]

Soit $f(x) = x^2 + x^3$.

a) [5pts] Déterminer les racines de l'équation $f(x) = 0$.
Réponse : $f(x) = 0 \iff x^2+x^3 = 0 \iff x^2(1+x) = 0 \iff x = 0$ *ou* $x = -1$. *D'où les deux racines,* $r_1 = 0$ *et* $r_2 = -1$.

b) [20pts] Peut-on appliquer la méthode de la bissection en partant de l'intervalle $[-2,\ 1]$ (justifier) ? Si oui, vers quelle racine la méthode converge-t'elle ? Déterminer le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir une approximation de cette racine à 10^{-2} près.
Réponse : Comme $f(-2) = -4$ *et* $f(1) = 2$*, on a un changement de signe sur l'intervalle. On peut donc appliquer la méthode de la bissection.*
Les deux racines sont dans l'intervalle. Pour savoir vers quelle racine l'algorithme va converger, faisons les premières itérations.
La première approximation d'une racine est le milieu de l'intervalle, $x_m = -0.5$. *Or* $f(-0.5) > 0$*, donc le changement de signe a lieu sur le sous-intervalle de gauche,* $[-2,\ -0.5]$*, où se trouve la seule racine* $r_2 = -1$. *La méthode de la bissection converge donc vers* r_2 *dans ce cas-ci.*

c) [15pts] Déterminer 3 méthodes de point fixe à partir de l'équation $f(x) = 0$
Réponse : $g_1(x) = x + f(x)$, $g_2(x) = x - f(x)$, $g_3(x) = x - 2f(x)$.

d) [30pts] Pour chacune des racines obtenues en a), ces méthodes de point fixe convergent-elles (ne pas faire d'itérations) ? Déterminer l'ordre de convergence le cas échéant (sans faire d'itérations).
Réponse :

1. $g_1'(x) = 1 + 2x + 3x^2$. $g_1'(r_1) = 1$ *donc indéterminé.* $g_1'(r_2) = 2$ *donc diverge.*

2. $g_2'(x) = 1 - 2x - 3x^2$. $g_2'(r_1) = 1$ *donc indéterminé.* $g_2'(r_2) = 0$ *donc converge, à l'ordre au moins 2. Comme,* $g_2''(x) = -2 - 6x$*, alors* $g_2''(r_2) \neq 0$*, donc convergence d'ordre 2.*

3. $g_3'(x) = 1 - 4x - 6x^2$. $g_3'(r_1) = 1$ *donc indéterminé.* $g_3'(r_2) = -1$ *donc indéterminé.*

MAT-2910 : Aide-mémoire pour le mini-test 1

Analyse d'erreurs

— Erreur du développement de Taylor :

$$R_n(h) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} h^{(n+1)} \qquad \text{où } \xi \text{ est compris entre } x_0 \text{ et } x_0 + h$$

— Propagation d'erreurs

$$\Delta f \;\simeq\; \left|\frac{\partial f(x^*,y^*,z^*)}{\partial x}\right| \Delta x \;+\; \left|\frac{\partial f(x^*,y^*,z^*)}{\partial y}\right| \Delta y + \left|\frac{\partial f(x^*,y^*,z^*)}{\partial z}\right| \Delta z$$

Équations non linéaires

— Convergence des méthodes de points fixes : si $e_n = x_n - r$ alors

$$e_{n+1} = g'(r)e_n + \frac{g''(r)e_n^2}{2} + \frac{g'''(r)e_n^3}{3!} + \cdots$$