# EXAMEN PARTIEL 1

MAT-18996: analyse numérique pour l'ingénieur — Hiver 2007
Date: 2 mars, 18h30-20h20.

Remarques:

1) Documents admis: deux feuilles 8 1/2 × 11, recto-verso.
2) Seulement les calculatrices avec l'auto-collant de la Faculté seront admises.
3) Vous pouvez répondre aux questions dans l'ordre de votre choix, mais identifiez clairement les questions.
4) Pour chaque question on fournira le détail des calculs et du raisonnement. En l'absence de ces détails, une solution sera considérée comme nulle.
5) Déposez votre carte d'identité avec photo sur le coin de votre table.

**Question 1. (15 points)**

L'équation $f(x) = x^2 - x - 2 = 0$ possède la racine positive $r = 2$. On considère la famille d'algorithmes du point fixe

$$x_{n+1} = x_n - \lambda(x_n^2 - x_n - 2)$$

dépendant d'un paramètre réel $\lambda$.

(a) [7 pts] Sans calculer d'itération, faites l'étude de la convergence pour chacune des méthodes correspondant aux valeurs $\lambda = 1/4$ et $\lambda = 1/12$. Identifier le type de convergence (linéaire ou quadratique) et, le cas échéant, donner le taux de convergence. Laquelle des deux méthodes converge le plus rapidement?

(b) [4 pts] Pour quelles valeurs de $\lambda$ a-t-on une méthode du point fixe qui converge linéairement? Justifier.

(c) [4 pts] Peut-on trouver une valeur de $\lambda$ assurant une convergence quadratique? Si oui, déterminer cette valeur (ou ces valeurs) de $\lambda$. Sinon, dites pourquoi.

| $n$ | $r_1$ | $r_2$ |
|---|---|---|
| 1 | $-2.3333$ | 0.1111 |
| 2 | $-2.1556$ | 0.7211 |
| 3 | $-2.0756$ | 0.9595 |
| 4 | $-2.0373$ | 0.9989 |
| 5 | $-2.0185$ | 1.0000 |
| 6 | $-2.0092$ | |

**Question 2. (20 points)**

L'équation $f(x) = 0$ possède deux racines $r_1 = -2$ et $r_2 = 1$. L'application de la méthode de Newton à l'équation $f(x) = 0$ produit les résultats ci-dessus.

a) [12 pts] Déterminer, à partir de ces résultats numériques, si cet algorithme converge linéairement ou quadratiquement et ce, pour chacune des racines.

b) [4 pts] Dans le cas de la convergence linéaire, donner une approximation du taux de convergence.

c) [4 pts] Que peut-on dire de la multiplicité de chacune des racines ? Justifier.

**Question 3. (15 points)**

On considère le système linéaire

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) [9 pts] Soit $A$ la matrice du membre de gauche. Factoriser $A$ en un produit de deux matrices triangulaires. Justifier votre choix de la méthode de factorisation en vous basant sur les critères suivants: (i) structure particulière de $A$, (ii) économie de l'espace, (iii) économie de calcul.

b) [6 pts] Utiliser cette factorisation pour résoudre le système linéaire.

**Question 4. (15 points)**

On considère le système d'équations linéaires

$$\begin{array}{lcr} x_2 - 2\,x_3 & = & 2 \\ 3\,x_1 + x_2 - x_3 & = & -2 \\ x_1 - 4\,x_2 - 2\,x_3 & = & 1. \end{array}$$

a) [6 pts] Peut-on utiliser la méthode de Jacobi ou celle de Gauss-Seidel pour résoudre ce système? Sinon, arranger les équations ou les inconnues pour qu'on puisse appliquer ces deux méthodes en étant assuré de la convergence.

b) [9 pts] Calculer, pour chacune de ces deux méthodes, le premier itéré qu'on obtiendrait en prenant comme approximation initiale $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}) = (0,0,0)$.

**Question 5. (16 points)**

Considérons le système non linéaire

$$\left\{ \begin{array}{lcr} x^2 - y & = & 1, \\ x^2 + y^2 & = & 9/4. \end{array} \right.$$

a) [3 pts] A l'aide d'une représentation graphique, donner le nombre exact de racines du système. Ne pas évaluer les racines.

b) [10 pts] Faire une itération de la méthode de Newton à partir du point $(1,1)$.

c) [3 pts] Trouver l'ensemble des points de départ pour lequel la méthode de Newton n'est pas applicable et dire pourquoi.

**Question 6. (19 points)**

On considère le système linéaire

$$A\,\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1.01 \\ 1.01 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{b}.$$

a) [4 pts] Déterminer la solution exacte $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ du système linéaire.

b) [3 pts] Calculer le résidu correspondant à la solution $\hat{\mathbf{x}} = (-4.5, 5.5)$.

c) [9 pts] Trouver une borne inférieure du conditionnement de $A$ en utilisant la norme infinie. Cette matrice est-elle mal conditionnée? Justifier.

d) [3 pts] La valeur du conditionnement est-elle affectée si l'on change le second membre du système linéaire par $\mathbf{b} = (-1, 1)$?