2011 Examen partiel – Solutionnaire

Problème 1 (30 points sur 100)

A. (10 points) Supposons que nous avons N symboles dans une constellation et que notre processus de Gram Schmidt génère que M, $M < N$, vecteurs de base. Quel genre de relation y a-t-il entre les symboles? Comment pouvons-nous exploiter ce fait pour réduire la complexité de notre récepteur?

Les symboles sont linéairement dépendants, c.-à-d., que N-M symboles peuvent être décrits comme des combinaisons linéaires de M autres symboles.

Les récepteurs MAP et ML sont composés de N branches, une branche pour chaque symbole. Un récepteur équivalent avec seulement M branches peut être exploité pour calculer la décision MAP ou ML.

B. (10 points) Discuter les différences entre les rapports SNR et E_b/N_0. Dans quelles circonstances devrait-on utiliser chaque rapport? Vous pouvez utiliser l'exemple d'une ligne téléphonique (comme discuté en classe) pour souligner les différences.

Le SNR est le rapport de puissance; il est utilisé surtout pour les systèmes analogique. Le rapport E_b/N_0 est un rapport d'énergie sur densité de puissance. Ce rapport est utilisé pour les systèmes numériques pour comparer le comportement des systèmes quand l'énergie par bit est égale. Dans le cas d'une ligne téléphonique, nous pouvons effectuer un mesure analogique du SNR pour voir le niveau de E_b/N_0 disponible. Le SNR est égal à l'efficacité spectrale fois E_b/N_0, donc une fonction de la modulation utilisée.

C. (10 points) En quoi est-ce que le BPSK est mieux/pire que le DPSK? Discutez leur performance relative pour chacun des trois critères de performance pour un système de communication.

Les trois aspects les plus importants sont : i) largeur de bande (ou efficacité spectrale, ii) probabilité d'erreur (ou efficacité en puissance), et iii) complexité du récepteur. Le BPSK et DPSK ont la même efficacité spectrale. Le DPSK a une pénalité de ~1 dB par rapport à BPSK, donc moins efficace en puissance. Le DPSK est supérieur au BPSK dans l'item iii) soit la complexité du récepteur. Le BPSK avec détection cohérente prend une connaissance exacte de la phase du signal reçu. Le DPSK peut éviter le PLL pour suivre la phase, donc le récepteur est moins complexe.

Problème 2 (15 points)

Considérez le graphique du « Plan de l'efficacité spectrale ».

J'ai créé un nouveau système de modulation LAR qui est aussi efficace spectralement que le QPSK. La pénalité de 8LAR par rapport à QPSK est 5 dB, et la pénalité de 16LAR par rapport à QPSK est 8 dB.

Trouvez les coordonnées de 8LAR et 16LAR pour le graphique du « Plan de l'efficacité spectrale ».

L'efficacité spectral de MPSK est $\log_2 M$, donc l'efficacité spectrale de 8LAR est $\log_2 8=3$ b/s/Hz et l'efficacité spectrale de 16LAR est $\log_2 16=4$ b/s/Hz. Ces sont les coordonnées « x » pour le graphique du « Plan de l'efficacité spectrale ». Pour chercher les coordonnées « y », il faut savoir le E_b/N_0 pour atteindre probabilité d'erreur de 10^{-5}. Pour atteindre 10^{-5}, QPSK a besoin de $E_b/N_0 = 9.8$ dB, donc 8LAR a besoin de 13.8 dB et 16LAR a besoin de 17.8 dB. Les coordonnées sont

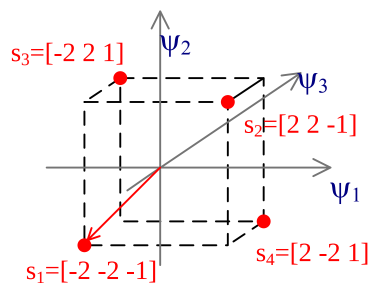
8LAR : (3 b/s/Hz, 13.8 dB)

16LAR : (4 b/s/HZ 17.8 dB)

Problème 3 (30 points sur 100)

Les coefficients de quatre symboles dans l'espace « I/Q » sont

$$\begin{aligned} s_1 &= [-2 \quad -2 \quad -1] \\ s_2 &= [\;2 \quad\; 2 \quad -1] \\ s_3 &= [-2 \quad\; 2 \quad\; 1] \\ s_4 &= [\;2 \quad -2 \quad\; 1] \end{aligned}$$



A. (10 points) Donnez les coordonnées dans l'espace du signal.

Pour chercher les coordonnées dans l'espace du signal nous utilisons

$$\left(\tilde{a}_n^I, \tilde{a}_n^Q\right) = \sqrt{\frac{M \cdot E_s}{\sum_{i=1}^{M}\left[\left(a_n^I\right)^2 + \left(a_n^Q\right)^2\right]}}\left(a_n^I, a_n^Q\right)$$

coordonnées, espace du signal

coordonnées, espace I/Q

Calculons $\sqrt{(-2)^2+(2)^2+(1)^2} = \sqrt{9} = 3$, donc

Les quatre symboles sont équidistants donc le coefficient de normalisation est simplement

$$\sqrt{\frac{4\cdot E_s}{4\cdot 9}}=\frac{\sqrt{E_s}}{3}$$

Les coefficients de symboles sont

$$\begin{aligned}
s_1 &= [-2 \quad -2 \quad -1]\sqrt{E_s}/3\\
s_2 &= [\;\;2 \quad\;\; 2 \quad -1]\sqrt{E_s}/3\\
s_3 &= [-2 \quad\;\; 2 \quad\;\; 1]\sqrt{E_s}/3\\
s_4 &= [\;\;2 \quad -2 \quad\;\; 1]\sqrt{E_s}/3
\end{aligned}$$

B. (10 points) Donnez la distance minimale $D_{\min}$

La distance entre s_1 et s_2 est

$$\begin{aligned}
\|s_1-s_2\| &= \frac{\sqrt{E_s}}{3}\sqrt{(-2-2)^2+(-2-2)^2+(-1-(-1))^2}\\
&= \frac{\sqrt{E_s}}{3}\sqrt{(4)^2+(4)^2}=\frac{4\sqrt{2E_s}}{3}
\end{aligned}$$

Les autres distances sont

$$\begin{aligned}
\|s_1-s_3\| &= \frac{\sqrt{E_s}}{3}\sqrt{(-2-(-2))^2+(-2-2)^2+(-1-1)^2}\\
&= \frac{\sqrt{E_s}}{3}\sqrt{(4)^2+(2)^2}=\frac{2\sqrt{5E_s}}{3}\\
\|s_1-s_4\| &= \frac{\sqrt{E_s}}{3}\sqrt{(-2-2)^2+(-2-(-2))^2+(-1-1)^2}\\
&= \frac{\sqrt{E_s}}{3}\sqrt{(4)^2+(2)^2}=\frac{2\sqrt{5E_s}}{3}\\
\|s_2-s_3\| &= \frac{\sqrt{E_s}}{3}\sqrt{(2-(-2))^2+(2-2)^2+(-1-1)^2}\\
&= \frac{\sqrt{E_s}}{3}\sqrt{(4)^2+(2)^2}=\frac{2\sqrt{5E_s}}{3}\\
\|s_2-s_4\| &= \frac{\sqrt{E_s}}{3}\sqrt{(2-2)^2+(2-(-2))^2+(-1-1)^2}\\
&= \frac{\sqrt{E_s}}{3}\sqrt{(4)^2+(2)^2}=\frac{2\sqrt{5E_s}}{3}
\end{aligned}$$

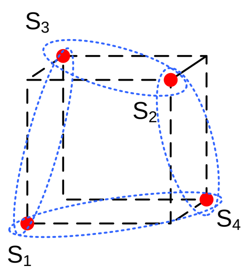
$$\|s_3 - s_4\| = \frac{\sqrt{E_s}}{3}\sqrt{(-2-2)^2 + (2-(-2))^2 + (1-1)^2}$$
$$= \frac{\sqrt{E_s}}{3}\sqrt{(4)^2 + (4)^2} = \frac{4\sqrt{2E_s}}{3}$$

Donc la distance minimale est

$$D_{\min} = \frac{2\sqrt{5E_s}}{3} = \frac{2\sqrt{5\log_2 4E_b}}{3} = \frac{2\sqrt{10E_b}}{3} = \sqrt{\frac{40E_b}{9}}$$

C. (10 points) Donnez une approximation pour la probabilité d'erreur en termes de E_b/N_0 .

Il y a 4 paires de symboles à la distance minimale



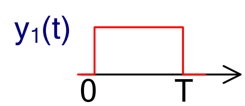
Donc la probabilité d'erreur est

$$P_e \approx \frac{2K}{M} Q\left(\frac{D_{\min}}{\sqrt{2N_0}}\right) = \frac{2\cdot 4}{4} Q\left(\frac{\sqrt{40E_b}}{\sqrt{9\cdot 2N_0}}\right) = 2Q\left(\sqrt{\frac{20}{9}\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

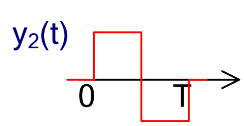
Problème 4 (25 points sur 100)

Supposons que les vecteurs de base pour les signaux du problème 3 sont les suivants

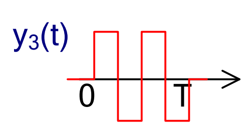
$$\psi_1(t) = \begin{cases} 1/\sqrt{T} & 0 \le t \le T \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$



$$\psi_2(t) = \begin{cases} 1/\sqrt{T} & 0 \le t \le T/2 \\ -1/\sqrt{T} & T/2 < t \le T \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$



$$\psi_3(t) = \begin{cases} 1/\sqrt{T} & 0 \le t \le T/4, \quad T/2 \le t \le 3T/4 \\ -1/\sqrt{T} & T/4 \le t \le T/2, \quad 3T/4 \le t \le T \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$



Il n'y a pas de porteuse; les signaux sont en bande de base.

A. (5 points) Est-ce que nous parlons d'une modulation orthogonale?

La modulation n'est pas orthogonale. La base est toujours orthogonale, mais dans problème il y a 4 symboles dans une espace de dimension 3, donc un symbole peut être écrit comme une combinaison linéaire des trois autres; ils ne sont pas orthogonaux.

B. (15 points) Quelle est la largeur de bande (en termes de T) pour chaque vecteur de base en supposant une impulsion de Nyquist idéale? Quelle est la largeur de bande (en termes de T) pour chaque symbole en supposant une impulsion de Nyquist idéale?

Les trois vecteurs ont des largeurs de bande progressivement plus grande : le troisième vecteur de base est 4 fois plus rapide que le premier vecteur de base.

La largeur de bande de premier vecteur de base avec une impulsion de Nyquist idéale est

$$W_{\Psi_1} = \frac{1}{T}$$

La largeur de bande de deuxième vecteur de base avec une impulsion de Nyquist idéale est

$$W_{\Psi_2} = \frac{1}{T/2} = \frac{2}{T}$$

La largeur de bande de troisième vecteur de base avec une impulsion de Nyquist idéale est

$$W_{\Psi_3} = \frac{1}{T/4} = \frac{4}{T}$$

La largeur de bande totale de l'espace du signal est la superposition des trois spectres en bande de base. Donc la largeur de bande est déterminée par le vecteur de base avec le spectre le plus large, soit

$$W = \frac{4}{T}$$

C. (5 points) Quelle est l'efficacité spectrale de ce format de modulation?

Le taux de symbole est $1/T$. Le taux binaire est $\log_2 M$ fois le taux de symbole, donc

$$R_b = \frac{\log_2 M}{T} = \frac{\log_2 4}{T} = \frac{2}{T}$$

La largeur de bande est $4/T$, donc l'efficacité spectrale est

$$\eta = \frac{R_b}{W} = \frac{2}{T} \cdot \frac{1}{W} = \frac{2}{T} \cdot \frac{T}{4} = \frac{1}{2} \text{ b/s/Hz}$$