Mat 10364, Mathématiques de l'ingénieur II : examen I, 22/02/02

- Durée de l'examen : deux heures.
- Documentation permise : deux feuilles-résumé.
- Vous êtes priés de vous identifier (nom et numéro matricule) sur le cahier et de placer votre carte d'étudiant sur la table à côté de vous.
- **Chaque réponse devra être accompagnée des calculs détaillés. Dans le cas contraire, elle sera considérée comme nulle.**

---

n° 1 (20pts) On considère le domaine D du plan défini par les inégalités $y \leq \frac{1}{2}$, $x + y \geq 1$ et la courbe $y + x^2 \leq 1$.

(a) (8pts) Faites une représentation graphique de D.

(b) (12pts) Calculer le moment d'inertie de D par rapport à Ox sous l'hypothèse que la masse surfacique est $\sigma = x$ $1/24$

n° 2 (20pts) Un solide S représenté à la figure 2, est constitué d'une portion du cylindre $x^2+y^2 = 1$ et de deux calottes sphériques d'équation $x^2+y^2+z^2 = 4$.

$\frac{1}{\sin\phi}$

$\pi/6$ ...

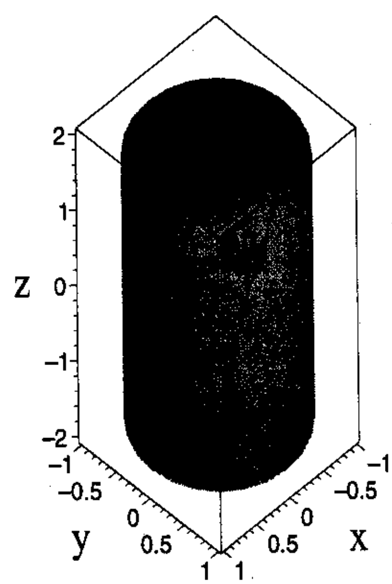


figure 2

$r^2 \sin^2\phi \cos^2\theta + r^2 \sin^2\phi \sin^2\theta = 1$

$r^2 \sin^2\phi = 1$

$r \sin\phi = 1$

$r = 1/\sin\phi$

Ecrire le volume de S à l'aide d'une intégrale en coordonnées sphériques. **Ne pas évaluer.**

n° 3 (20pts) L'intégrale

$$I = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{6}} \int_{r=0}^{\frac{\sqrt{3}}{\cos\theta}} r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta,$$

exprimée en coordonnées polaires (r, θ) est définie sur le domaine du plan xOy illustré à la figure 3.

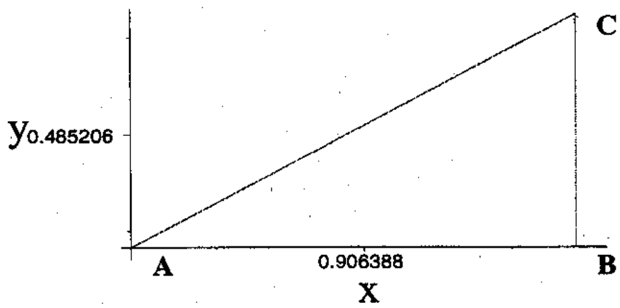
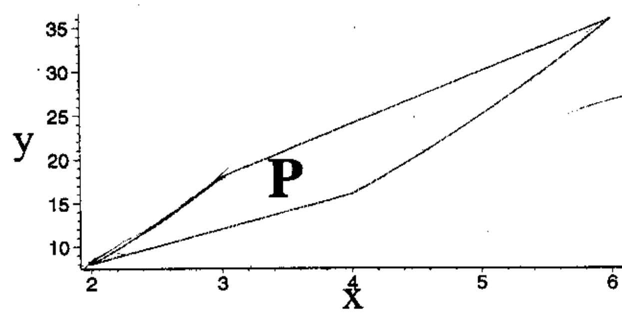


figure 3

(a) (6pts) Déterminer les coordonnées cartésiennes des points B et C.

(b) (14pts) Transformer I en une intégrale en coordonnées cartésiennes. **Ne pas évaluer.**

n° 4 (20pts) On considère la plaque P, de la figure 4, qui prend la forme du domaine délimité par les paraboles $y = x^2$ et $y = 2x^2$ et les droites $y = 4x$ et $y = 6x$.



$\frac{5908}{15}$

$u = y/x$

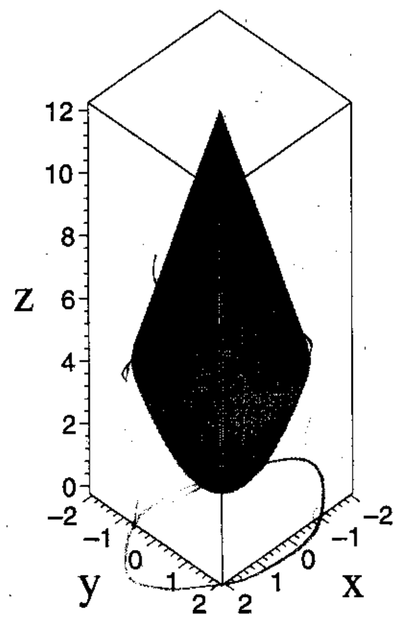
$v = y/x$

figure 4

Sachant que la masse surfacique de cette plaque est $\sigma = y$, calculer sa masse. (**Note :** Utiliser un changement de variables approprié.)

n° 5 (20pts) Le récepteur d'une antenne parabolique d'axe Oz et d'équation $z = x^2 + y^2$ prend la forme du solide R de la figure 5, délimité par ce paraboloïde et par le cône $z = 12 - 4\sqrt{x^2 + y^2}$.

4/8



en cylindriques

figure 5

Sachant que le volume de R est $V = \frac{56}{3}\pi$ et que le matériau est homogène (c'est-à-dire que sa densité est constante), calculer la position $\bar{z}$ du centre de gravité.

I) Quelques angles remarquables

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
0	0	1	0
$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$
$\pi/2$	1	0	$-$
$2\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$-1/2$	$-\sqrt{3}$
$3\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	-1
$5\pi/6$	$1/2$	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/3$
π	0	-1	0
$3\pi/2$	-1	0	$-$
2π	0	1	0

II) Quelques intégrales utiles.

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int f'(x)(f(x))^n\,dx = \frac{1}{n+1}(f(x))^{n+1} + C, \quad \text{si } n \neq -1$$

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C$$

$$\int e^{f(x)} f'(x)\,dx = e^{f(x)} + C$$

$$\int x\ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

$$\int \sqrt{a^2x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2x^2+1} + \frac{1}{2a}\ln\left(ax + \sqrt{a^2x^2+1}\right) + C$$

Soit $a \neq 0$; alors

$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctan \dfrac{x}{a} + C$

$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$

$\int \sin(ax)\, dx = -\frac{1}{a} \cos(ax) + C$

$\int \cos(ax)\, dx = \frac{1}{a} \sin(ax) + C$

$\int \tan(ax)\, dx = -\frac{1}{a} \ln|\cos(ax)| + C$

$\int \cot(ax)\, dx = \frac{1}{a} \ln|\sin(ax)| + C$

$\int \sec^2(ax)\, dx = \frac{1}{a} \tan(ax) + C$

$\int \csc^2(ax)\, dx = -\frac{1}{a} \cot(ax) + C$

$\int \sec(ax)\, dx = \frac{1}{a} \ln|\sec(ax) + \tan(ax)| + C$

$\int \csc(ax)\, dx = \frac{1}{a} \ln|\csc(ax) - \cot(ax)| + C$

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right) + C$

$\int \sin^2 x\, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$

$\int \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$

$\int \sin^3 x\, dx = -\frac{1}{3} \cos t \left(\sin^2 t + 2\right) + C$

$\int \cos^3\, dx = \frac{1}{3} \sin x \left(\cos^2 x + 2\right) + C$

$\int \sin^4 x\, dx = -\frac{1}{8}\left(2\sin^3 x \cos x + 3\cos x \sin x + 3x\right) + C$

$\int \cos^4 x\, dx = \frac{1}{8}\left(2\cos^3 x \sin x + 3\cos x \sin x + 3x\right) + C$

$\int e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a \cos bx + b \sin bx) + C$