Mat-1910 : Mat-Ing-II. Corrigé de l'examen-type 3, Hiver 2019.

Question 1

(a) La paramétrisation est donnée par

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = 16 - r \end{cases} \qquad 1 \le r \le 16, \quad \pi/4 \le \theta \le \pi/2,$$

(b) Au point $(3, 4, 11)$, on obtient que $r = 5$ et que $\cos\theta = 3/5$ et $\sin\theta = 4/5$.

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial r}(3,4,11) = (\cos\theta, \sin\theta, -1) = (3/5, 4/5, -1)$$
$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}(3,4,11) = r(-\sin\theta, \cos\theta, 0) = (-4, 3, 0)$$
$$\vec{N} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = (3, 4, 5)$$

La droite normale s'écrit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad -\infty < t < \infty$$

Question 2

(a) On évalue $x^2 + y^2$:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (\cos\theta - t\sin\theta)^2 + (\sin\theta + t\cos\theta)^2 \\ &= \cos^2\theta + t^2\sin^2\theta - 2t\cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta + t^2\cos^2\theta + 2t\cos\theta\sin\theta \\ &= 1 + t^2 \\ &= 1 + z^2 \end{aligned}$$

L'équation de la surface s'écrit : $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

(b) Si $t = t_0$, on obtient que $x^2 + y^2 = 1 + t_0^2$ donc un cercle de rayon $\sqrt{1 + t_0^2}$ centrée en $(0, 0, t_0)$ situé dans le plan $z = t_0$.
Si $\theta = \theta_0$, on écrit la paramétrisation sous la forme

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_0 \\ \sin\theta_0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\sin\theta_0 \\ \cos\theta_0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc une droite passant par le point $(\cos\theta_0, \sin\theta_0, 0)$ et parallèle au vecteur $(-\sin\theta_0, \cos\theta_0, 1)$.

(c) Au point $P = (1, 1, 1)$, on a que $t = 1$ et

$$\begin{array}{l} x = 1 = \cos\theta - \sin\theta \\ y = 1 = \sin\theta + \cos\theta \end{array} \Longrightarrow \cos\theta = 1, \quad \sin\theta = 0 \Longrightarrow \theta = 0$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{r}}{\partial t}(P) &= (-\sin\theta, \cos\theta, 1) = (0, 1, 1) \\
\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}(P) &= (-\sin\theta - t\cos\theta, \cos\theta - t\sin\theta, 0) = (-1, 1, 0) \\
\vec{N} &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = (-1, -1, 1)
\end{aligned}$$

L'équation du plan tangent est

$$(x-1) + (y-1) - (z-1) = 0 \Longleftrightarrow x + y - z = 1$$

Question 3

On paramétrise la surface par

$$\vec{r}(y, \theta) = \begin{cases} x = \sin\theta \\ y = y \\ z = \cos\theta \end{cases} \qquad 0 \le \theta \le \pi/2, \quad 0 \le y \le 1$$

On a que $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial y} = (0, 1, 0)$ et $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = (\cos\theta, 0, -\sin\theta)$. L'élément d'aire est donné par :

$$dA = \|\frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}\|\, dy\, d\theta = \|\frac{\partial \vec{r}}{\partial y}\| \ \|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}\|\ dy\ d\theta = dy\ d\theta \quad \text{car } \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \perp \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}.$$

Le moment d'inertie est fournie par

$$\iint_S (x^2 + y^2)\ \sigma\ dA = 5 \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \sin^2\theta + y^2\ dy\ d\theta = 5 \int_0^{\pi/2} \sin^2\theta + \frac{1}{3}\ d\theta = \frac{25\pi}{12}$$

Question 4

On peut paramétriser directement et obtenir que le flux vaut π. Nous choisissons une alternative.
Soit D le disque $x^2 + y^2 \le 1,\ z = 1$. La surface $S \cup D$ est fermée et délimite un solide K auquel le théorème de la divergence s'applique.

$$\iint\limits_S \vec{v}\cdot\vec{n}_e\,dA + \iint\limits_D \vec{v}\cdot\vec{n}_e\,dA = \iiint\limits_K \nabla\cdot\vec{v}\,dV.$$

Or $\phi = x^2+y^2+z^2$ donc, $\vec{v} = \nabla\phi = 2(x,y,z)$.

Puisque, sur D, la normale extérieure vaut $\vec{k}$, on a $\vec{v}\cdot\vec{n} = 2\,z = 2$. La seconde intégrale de surface est donc

$$\iint\limits_D \vec{v}\cdot\vec{n}_e\,dA = 2\,A(D) = 2\pi.$$

Par ailleurs, $\nabla\cdot\vec{v} = 6$, d'où, finalement, en utilisant les coordonnées cylindriques,

$$\iint\limits_S \vec{v}\cdot\vec{n}_e\,dA = 6\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{r^2}^1 r\,dz\,dr\,d\theta - 2\pi = 6(2\pi)(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}) - 2\pi = \pi.$$

Puisque, sur S, la troisième composante de $\vec{n}_e$ est négative, nous avons calculé le flux dans la bonne direction.

Question 5

On commence par calculer

$$\vec{w} = \vec{a}\times\vec{r} = (-hy, hx, 0).$$

La surface considérée est un morceaux du cône d'axe Oz, de sommet $\vec{r}(0,v) = (0,0,h)$. Le bord de ce cône

$$\vec{r}(h\,\tan\alpha, v) = (h\,\tan\alpha\cos v, h\,\tan\alpha\sin v, 0), \quad v\in[0,2\pi),$$

est un cercle centré en $(0,0,0)$ et de rayon $\rho = h\,\tan\alpha$. Pour le sens choisi de la normale, ce cercle est bien orienté positivement.

Puisqu'on veut le flux d'un rotationnel, il est normal de penser au théorème de Stokes qui s'écrit ici (la surface est appelée C et le cercle C_0)

$$\iint\limits_C \nabla\times\vec{w}\cdot\vec{n}\,dA = \int_{C_0}\vec{w}\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi}(-h\rho\,\sin v, h\rho\,\cos v, 0)\cdot(-h\rho\,\sin v, h\rho\,\cos v, 0)\,dv = 2\pi\,h^3\,\tan^2\alpha.$$

Question 6

Partout, nous utiliserons la notation

$$\vec{v} = (y\vec{i}+x\vec{j}+z\vec{k})\times(z\vec{i}+y\vec{j}+x\vec{k}) = (x^2-z\,y, z^2-y\,x, y^2-x\,z).$$

a) Pour que la normale soit intérieure à K, il faut prendre celle dont la troisième composante est positive. Le bord de P et celui de D est le cercle, $C : x^2 + y^2 = 4$ orienté positivement et paramétrisé par

$$\vec{r}(\theta) = (2\cos\theta, 2\sin\theta, 0), \theta \in [0, 2\pi).$$

Donc, si applique Stokes

$$\iint\limits_P \vec{W} \cdot \vec{n}\, dA = \int_C \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} (4\cos^2\theta, -4\sin\theta\cos\theta, 4\sin^2\theta) \cdot (-2\sin\theta, 2\cos\theta, 0)\, d\theta = 0.$$

b) P et D ont le même bord. Donc selon Stokes

$$\iint\limits_D \vec{W} \cdot \vec{n}\, dA = \int_C \vec{v} \cdot d\vec{r} = \iint\limits_P \vec{W} \cdot \vec{n}\, dA = 0$$

Pour l'orientation sur la surface D, on doit choisir $\vec{n} = \vec{k}$ soit la normale extérieure de la sous-question.

On peut aussi répondre à la sous-question en effectuant un calcul direct. En premier, on évalue le rotationnel de $\vec{v}$ qui donne $\vec{W} = \nabla \times \vec{v} = (2y - 2z)\vec{i} + (z - y)\vec{j} + (z - y)\vec{k}$. Ensuite, la normale est $\vec{n} = \vec{k}$. Donc

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D \vec{W} \cdot \vec{n}\, dA &= \iint\limits_D (2y - 2z)\vec{i} + (z - y)\vec{j} + (z - y)\vec{k} \cdot \vec{k}\, dA \\
&= \iint\limits_D z - y\, dA \\
&= \iint\limits_D -y\, dA \qquad \text{car } z = 0 \\
&= -\bar{y}A(D) = 0 \qquad \text{car } \bar{y} = 0
\end{aligned}$$

c) On applique Gauss sur la surface totale $\Sigma = S \cup D$.

$$\iint\limits_S \vec{W} \cdot \vec{n}\, dA = \iiint_K \text{div } \vec{W} \cdot \vec{n}\, dA = 0$$

car div $\vec{W} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{v}) = 0$, i.e. la divergence d'un rotationnel est nulle. Donc le flux total est nul.

Question 7

La surface n'est pas fermée, pour appliquer le théorème de la divergence, on la ferme par deux disques,

- $D_1, x^2 + y^2 = 1, z = 1,$
- $D_2, x^2 + y^2 = 4, z = 0.$

Pour D_1, la normale extérieure est $\vec{k}$, pour D_2 c'est $-\vec{k}$. Le flux cherché peut s'écrire

$$\iint\limits_C \vec{v}\cdot\vec{n}\,dA = \iiint\limits_K \nabla\vec{v}\,dV - \iint\limits_{D_1} \vec{v}\cdot\vec{k}\,dA - \iint\limits_{D_2} \vec{v}\cdot(-\vec{k})\,dA.$$

Calculons chacun des trois termes. $\nabla\vec{v} = y$, donc

$$\iiint\limits_K \nabla\vec{v}\,dV = \iiint\limits_K y\,dV = \mathrm{vol}\,(K)\,\bar{y} = 0.$$

Pour D_2, $\vec{v}\cdot(-\vec{k}) = -y\,z = 0$ donc le flux sur D_2 est nul. Pour D_1, $\vec{v}\cdot(\vec{k}) = y\,z = y$, donc

$$\iint\limits_{D_1} \vec{v}\cdot\vec{k}\,dA = \iint\limits_{D_1} y\,dA = A(D_1)\bar{y} = 0.$$

Le flux cherché est donc nul et ce, quel que soit le sens de la normale !

Question 8

Ici le plus simple est d'utiliser le théorème de Stokes. Le bord de la surface est le le cercle de rayon 1, centré en $(0,0)$ du plan $z=0$. Pour le choix de la normale, le sens de parcours est celui des θ croissants. Etant donné la paramétrisation

$$\vec{r}(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, 0), \theta\in[0,2\pi),$$

on a

$$\vec{a}(\vec{r}(\theta)) = (\cos\theta, \sin\theta+\cos\theta, 0), \quad \vec{r}'(\theta) = (-\sin\theta, \cos\theta, 0) \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{r}' = \cos^2\theta$$

Le flux cherché est

$$\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\,d\theta = \pi.$$

Question 9

(a) La condition d'intégrabilité pour que $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ soit potentiel s'écrit :

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}, \qquad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x}, \qquad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}$$

Dans notre cas, cela se réduit à

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \Longrightarrow 4xy = 2\alpha xy \Longrightarrow \alpha = 2$$

Pour le potentiel :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2 \Longrightarrow f = x^2y^2 + g(y) \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2y + g'(y) \Longrightarrow g'(y) = 0$$

On choisira $g(y) = 0$, donc $f(x, y, z) = x^2y^2$.

(b) On a que

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} = f(B) - f(A)$$

où $A = \vec{r}(0) = (2, 0, 0)$ et $B = \vec{r}(\pi/2) = (1, 1, \pi/2)$

Le travail est $W = f(1, 1, \pi/2) - f((2, 0, 0) = 1$.

Question 10

(a) On applique la condition d'intégrabilité.

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial x} \Longrightarrow e^x = e^x$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial x} \Longrightarrow 2x\cos z = 2x\cos z$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial y} \Longrightarrow 0 = 0$$

ce qui montre que le champ $\vec{v}$ est potentiel ou conservatif.

Calcul du potentiel :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\sin z + ye^x \Longrightarrow f = x^2\sin z + ye^x + g(y, z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^x + \frac{\partial g}{\partial y} \Longrightarrow \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \Longrightarrow g(y, z) = h(z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = x^2\cos z + h'(z) \Longrightarrow h'(z) = 0 \Longrightarrow h(z) = c$$

On choisira $h(z) = 0$, donc le potentiel est $f(x, y, z) = x^2\sin z + ye^x$.

(b) Sachant que le champ est potentiel, il est inutile de paramétriser la courbe. Il suffit de connaitre les deux extrémités : $A = (-\sqrt{3}, 3, 0)$ et $B = (\sqrt{3}, 3, 0)$. On a que

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_C \vec{\nabla} f\cdot d\vec{r} = f(B)-f(A) = f(\sqrt{3}, 3, 0)-f(-\sqrt{3}, 3, 0) = 3(e^{\sqrt{3}}-e^{-\sqrt{3}})$$

Question 11

(a) On pose $\vec{F} = (P(x,y), Q(x,y)) = (2xy + x^2, 3x + \cos y)$. On applique le théorème de Green

$$\begin{aligned}\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy \\ &= \iint_D 3 - 2x = 3A(D) - 2A(D)\,\bar{x}\end{aligned}$$

Or l'aire de D est égal à $\pi/2$ et $\bar{x} = 0$ par symétrie. La réponse est

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{3\pi}{2}$$

(b) On utilise le fait que

$$\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Evaluons l'intégrale sur C_1. On observe que sur C_1, on a que $y = 0 \Rightarrow dy = 0$.

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} (x^2, 3x+1) \cdot (dx, dy) = \int_{-1}^{1} x^2\, dx = 2/3$$

La réponse est

$$\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{3\pi}{2} - \frac{2}{3}$$

Question 12

(a) On paramétrise le segment de droite allant du point (x_1, y_1) au point (x_2, y_2) :

$$\begin{aligned} x &= x_1 + t(x_2 - x_1) = x_1 + t\Delta x \\ y &= y_1 + t(y_2 - y_1) = y_1 + t\Delta y \end{aligned} \qquad \text{pour } 0 \le t \le 1 \text{ et } \Delta x = x_2 - x_1, \Delta y = y_2 - y_1$$

On évalue l'intégrale

$$\begin{aligned}\int_C x\, dy - y\, dx &= \int_0^1 (x_1 + t\Delta x)\Delta y - (y_1 + t\Delta y)\Delta x\, dt \\ &= \int_0^1 x_1\Delta y + t\Delta x\Delta y - y_1\Delta x - t\Delta y\Delta x\, dt \\ &= \int_0^1 x_1\Delta y - y_1\Delta x\, dt \\ &= x_1(y_2 - y_1) - y_1(x_2 - x_1) = x_1y_2 - x_2y_1. \\ &= \det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

(b) On applique le résultat précédent et la formule calculant l'aire d'un domaine à l'aide du théorème de Green :

$$A(D) = \frac{1}{2}\int_C x\, dy - y\, dx = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\int_{C_i} x\, dy - y\, dx = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\det\begin{pmatrix} x_i & x_{i+1} \\ y_i & y_{i+1}\end{pmatrix} = 14$$

avec la convention que $(x_5, y_5) = (x_1, y_1)$.