GEL19962: Analyse des signaux
Mini-test 1 - Solutions

Problème 1 (1 point sur 5)

$$2+2\sin(2\pi t)-4\cos(2\pi t)+6\sin(3\pi t)$$

Il y a deux candidats possibles pour la fréquence:

$$\omega_0 = 2\pi, \quad \omega_0 = 3\pi$$

Si je commence avec la première possibilité, $\omega_0 = 2\pi$, on ne peut pas trouver l'autre fréquence comme un multiple **entier** de cette fréquence. La seule fréquence fondamentale pour laquelle l'autre fréquence est un multiple est $\omega_0 = \pi$. Cette fréquence est la fréquence fondamentale.

$$\omega_0 = \pi \quad \Rightarrow \quad T_0 = 2$$

$$2+2\sin(2\pi t)-4\cos(2\pi t)+6\sin(3\pi t)$$

$$= 2+\frac{2}{2j}\left(e^{j2\pi t}-e^{-j2\pi t}\right)-\frac{4}{2}\left(e^{j2\pi t}+e^{-j2\pi t}\right)+\frac{6}{2j}\left(e^{j3\pi t}-e^{-j3\pi t}\right)$$

$$= 2+(-2-j)e^{j2\pi t}+(-2+j)e^{-j2\pi t}-3je^{j3\pi t}+3je^{-j3\pi t}$$

$$= 3je^{-j3\pi t}+(-2+j)e^{-j2\pi t}+2+(-2-j)e^{j2\pi t}-3je^{j3\pi t}$$

Donc

3. $F(0) = 2 \quad F(2) = -2-j \quad F(-2) = -2+j \quad F(3) = -3j \quad F(-3) = 3j$

GEL19962: Analyse des signaux

Mini-test 1 - Solutions

Problème 2 (1 point sur 5)

$$f_p(t) = \begin{cases} 0 & -3 < t < -2 \\ Sinc(t/2) & -2 < t < 2 \\ 0 & 2 < t < 3 \end{cases} \quad , \quad f_p(t+6) = f_p(t)$$

$f_p(t)$ est une fonction réelle, donc on sait que

1. $F^*(n) = F(-n)$ **VRAI**

$f_p(t)$ est une fonction réelle, donc on sait que la partie réelle de la série de Fourier est paire.

2. $A(n)$ est impair **FAUX**

$f_p(t)$ est une fonction réelle paire, donc on sait que la série de Fourier *F(n)* est réelle et paire.

3. $F(n)$ est imaginaire pure **FAUX**

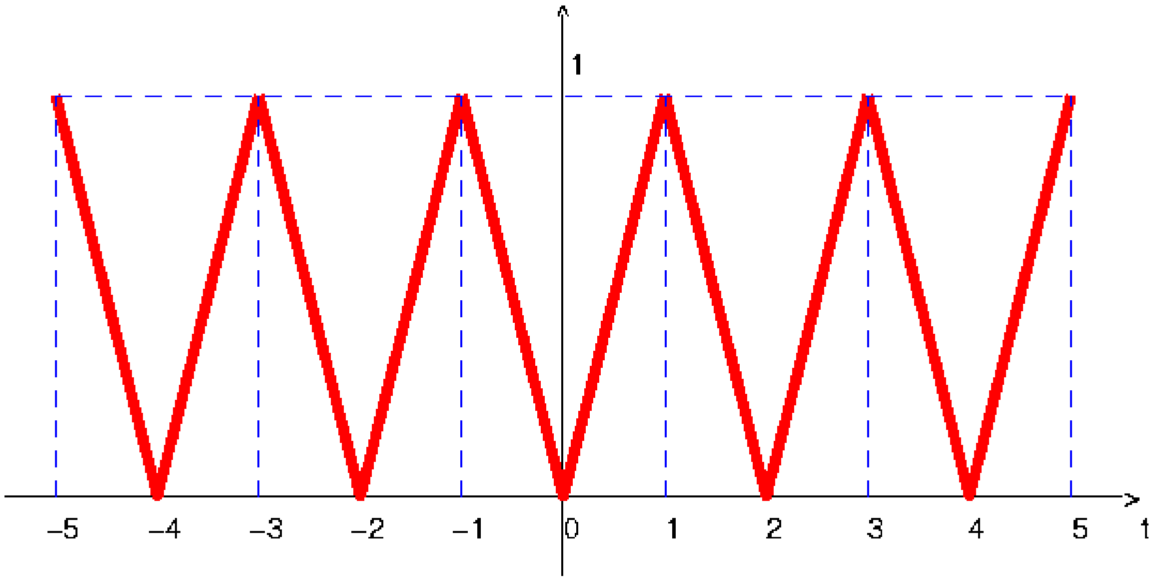
$f_p(t)$ est une fonction réelle paire, donc on sait que la série de Fourier *F(n)* est réelle et paire et par conséquent la partie imaginaire de la série de Fourier est nulle.

4. $B(n) = 0 \quad \forall n$ **VRAI**

GEL19962: Analyse des signaux

Mini-test 1 - Solutions

Problème 3 (3 points sur 5)



a) expression analytique:

La période est $T_0 = 2 \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = 2\pi / T_0 = \pi$

$$f_p(t) = \begin{cases} -t & pour \quad -1 < t \le 0 \\ t & pour \quad 0 < t \le 1 \end{cases}, \quad f_p(t+2) = f_p(t)$$

b) coefficients complexes de Fourier

- On commence avec *n=0*.

$$F(0) = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f_p(t)dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0}(-t)dt + \frac{1}{2}\int_{0}^{1} tdt = \frac{-1}{2}\frac{t^2}{2}\bigg|_{-1}^{0} + \frac{1}{2}\frac{t^2}{2}\bigg|_{0}^{1} = \frac{1}{2}$$

GEL19962: Analyse des signaux

Mini-test 1 - Solutions

- Pour les autres valeurs de *n*:

$$F(n) = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f_p(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = \frac{-1}{2}\int_{-1}^{0} te^{-jnt\pi}dt + \frac{1}{2}\int_{0}^{1} te^{-jnt\pi}dt$$

$$= \frac{-1}{2}\left\{\left.\frac{te^{-jnt\pi}}{-jn\pi}\right|_{-1}^{0} + \frac{1}{jn\pi}\int_{-1}^{0} e^{-jnt\pi}dt\right\} + \frac{1}{2}\left\{\left.\frac{te^{-jnt\pi}}{-jn\pi}\right|_{0}^{1} + \frac{1}{jn\pi}\int_{0}^{1} e^{-jnt\pi}dt\right\}$$

$$= \frac{-1}{2}\left\{\frac{-e^{jn\pi}}{jn\pi} + \frac{1}{jn\pi}\left.\frac{e^{-jnt\pi}}{-jn\pi}\right|_{-1}^{0}\right\} + \frac{1}{2}\left\{\frac{-e^{-jn\pi/2}}{jn\pi} + \frac{1}{jn\pi}\left.\frac{e^{-jnt\pi}}{-jn\pi}\right|_{0}^{1}\right\}$$

$$= \frac{e^{jn\pi}}{2jn\pi} + \frac{-1}{2n^2\pi^2}(1-e^{jn\pi}) - \frac{e^{-jn\pi}}{2jn\pi} + \frac{1}{2n^2\pi^2}(e^{-jn\pi}-1)$$

$$= \frac{1}{n\pi}\frac{1}{2j}(e^{jn\pi}-e^{-jn\pi}) + \frac{1}{2n^2\pi^2}(e^{jn\pi}+e^{-jn\pi}-2)$$

$$= \frac{\sin(n\pi)}{n\pi} + \frac{1}{n^2\pi^2}(\cos(n\pi)-1)$$

or $\sin(n\pi) = 0 \quad \forall n$

et $\cos(n\pi) = (-1)^n$

Nous en déduisons:

$$F(n) = \begin{cases} \frac{1}{2} & pour \quad n = 0 \\ 0 & pour \quad n\ pair\ et\ n \neq 0 \\ \frac{-2}{n^2\pi^2} & pour \quad n\ impair \end{cases}$$