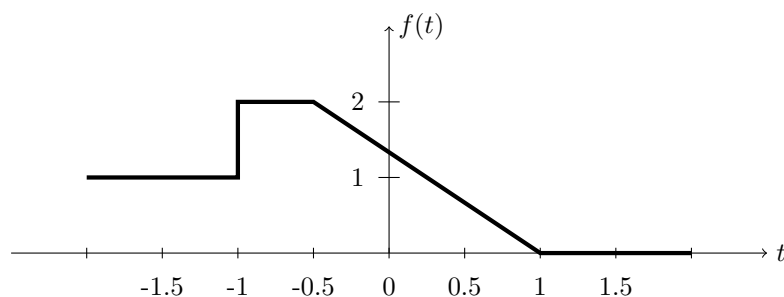


Examen final A2008 : Solutions

Département de génie électrique et de génie informatique

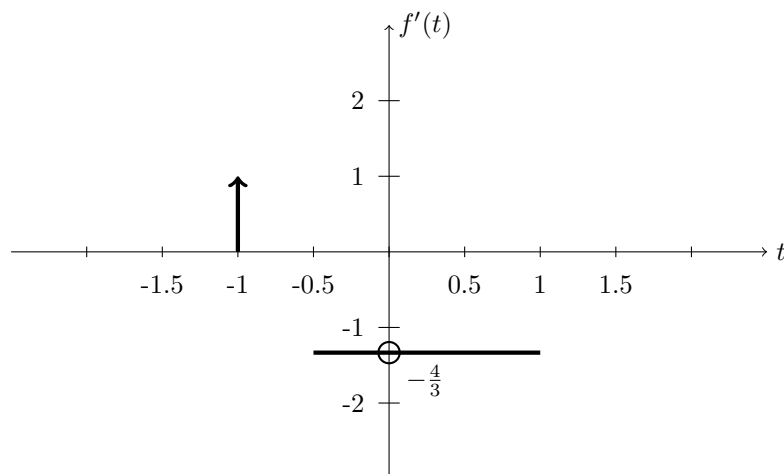
PROBLÈME 1 (15 PT)

On donne la fonction $f(t)$ sous forme de graphique:

a)

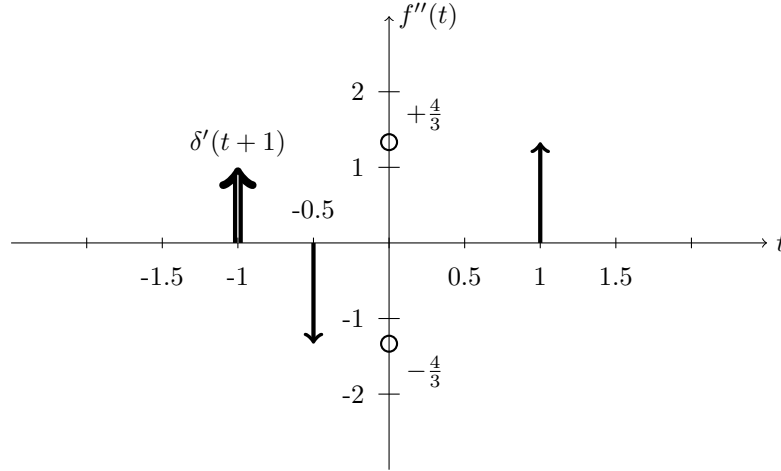
On veut calculer la transformation de Fourier du signal $f(t)$ tel qu'illustré. Plusieurs méthodes peuvent être employées, mais la méthode par dérivation facilite énormément la résolution de ce problème.

On trouve d'abord la dérivée première $f'(t)$ du signal $f(t)$:



$$f'(t) = \delta(t+1) + \left[-\frac{4}{3}\right]_{\text{Pour } t \in [-0.5, 1]} \quad (1)$$

Puis, on peut trouver la dérivée seconde $f''(t)$ de $f(t)$:



$$f''(t) = \delta'(t+1) - \frac{4}{3}\delta(t+0.5) + \frac{4}{3}\delta(t-1). \quad (2)$$

La transformation de Fourier de la dérivée seconde de $f(t)$ se trouve aisément connaissant la transformation de Fourier des impulsions et avec la propriété de décalage:

$$F''(\omega) = j\omega e^{j\omega} - \frac{4}{3}e^{j\omega/2} + \frac{4}{3}e^{-j\omega}. \quad (3)$$

On connaît le lien entre la transformation de Fourier et la dérivation. Ce lien peut aussi être utilisé au besoin pour retrouver la transformée de Fourier de la dérivée du delta-dirac:

$$\frac{d^n}{dt^n} f(t) \leftrightarrow (j\omega)^n F(\omega). \quad (4)$$

Avec cette relation, on peut écrire:

$$f''(t) \leftrightarrow (j\omega)^2 F(\omega) = j\omega e^{j\omega} - \frac{4}{3}e^{j\omega/2} + \frac{4}{3}e^{-j\omega}, \quad (5)$$

d'où

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2} \left[j\omega e^{j\omega} - \frac{4}{3}e^{j\omega/2} + \frac{4}{3}e^{-j\omega} \right], \quad (6)$$

En simplifiant, on obtient:

$$F(\omega) = \frac{e^{j\omega}}{j\omega} + \frac{4}{3} \frac{e^{j\omega/2}}{\omega^2} - \frac{4}{3} \frac{e^{-j\omega}}{\omega^2}. \quad (7)$$

Finalement, il faut tenir compte de la composante continue. En observant $f(t)$, on doit remarquer que cette fonction possède une composante continue (ou DC, ou valeur moyenne) de 0.5. Cette valeur DC ajoute une impulsion au spectre $F(\omega)$ pour $\omega = 0$. Le spectre final est donc:

$$F(\omega) = \frac{e^{j\omega}}{j\omega} + \frac{4}{3} \frac{e^{j\omega/2}}{\omega^2} - \frac{4}{3} \frac{e^{-j\omega}}{\omega^2} + \frac{1}{2}\delta(\omega). \quad (8)$$

b)

On demande si le signal $f(t)$ est à énergie finie ou à puissance finie. Ce signal n'est pas à énergie finie puisqu'il n'est pas de carré intégrable. L'énergie est infinie. Il est toutefois à puissance finie puisqu'il possède une composante continue (un DC).

c)

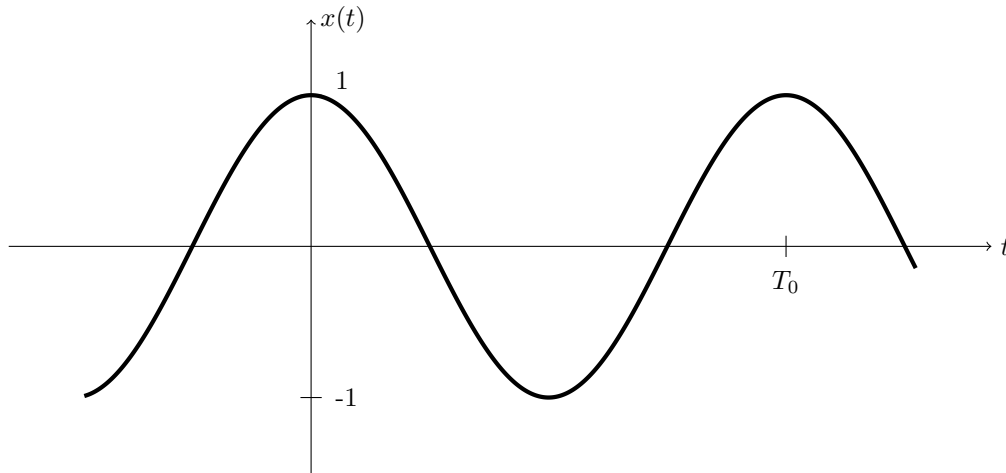
On demande le taux de décroissance asymptotique des lobes de $F(\omega)$. Comme la fonction $f(t)$ est discontinue (discontinuité d'ordre 0), la décroissance est en $1/\omega$.

PROBLÈME 2 (15 PT)

On a le signal $x(t) = \cos(\omega_0 t)$ qui est échantillonné à une fréquence $\omega_s = 4\omega_0$ pour obtenir un signal $x_e(t)$.

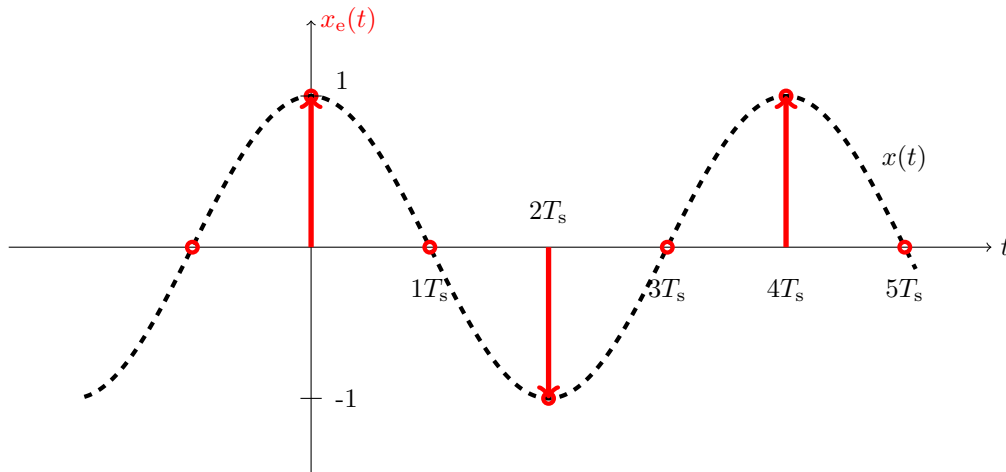
a)

On demande de tracer le signal original $x(t)$. Avec $T_0 = 2\pi/\omega_0$, on trace:



b)

On demande de tracer sur le même graphique que $x(t)$ la version échantillonnée du signal, $x_e(t)$:

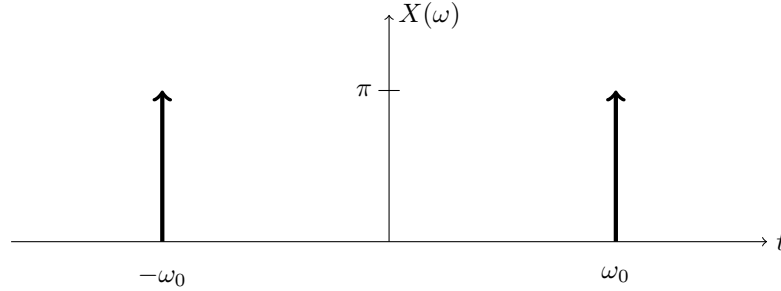


Le signal échantillonné $x_e(t)$ est constitué d'un train d'impulsions à une période $T_s = 2\pi/\omega_s$ et ayant $x(t)$ comme enveloppe. On doit remarquer que certaines impulsions sont nulle puisqu'elles correspondent aux zéro de l'enveloppe $x(t)$.

c)

On demande de tracer le spectre $X(\omega)$ de $x(t)$. Utilisant les tables des transformées de Fourier fournie, on sait que:

$$x(t) = \cos(\omega_0 t) \leftrightarrow X(\omega) = \pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] . \quad (9)$$



d)

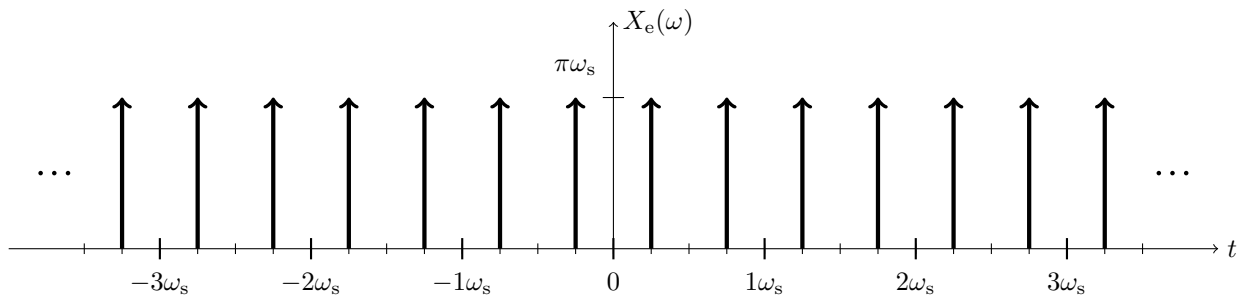
Sur un autre graphique qu'en c), on demande de tracer le spectre $X_e(\omega)$ du signal échantillonné $x_e(t)$. On sait que l'échantillonnage du signal temporel aura comme effet de périodiser le spectre avec une période ω_s . En d'autres mots, le produit avec peigne de dirac dans le temps correspond à une convolution avec un peigne de dirac dans le domaine spectral. Mathématiquement, on a:

Il manque $1/2\pi$ à la convolution ici

$$X_e(\omega) = X(\omega) * \left[\omega_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s) \right] , \quad (10)$$

$$= \omega_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\omega_s) , \quad (11)$$

$$= \omega_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi \delta(\omega - k\omega_s - \omega_0) + \pi \delta(\omega - k\omega_s + \omega_0) . \quad (12)$$



Sur la figure principale, les subdivisions mineures en abscisse correspondent à des multiples de ω_0 et les coordonnées majeures en abscisse correspondent à des multiples de ω_s . (Rappel: $\omega_s = 4\omega_0$).

e)

Le signal $x(t)$ est maintenant regardé à travers une fenêtre d'observation rectangulaire d'une durée $400T_s$. Ceci correspond à une multiplication avec un rectangle de largeur $400T_s$:

$$x_m(t) = x(t) \times \text{Rect}\left(\frac{t}{400T_s}\right), \quad (13)$$

$$x_{e,m}(t) = x_e(t) \times \text{Rect}\left(\frac{t}{400T_s}\right). \quad (14)$$

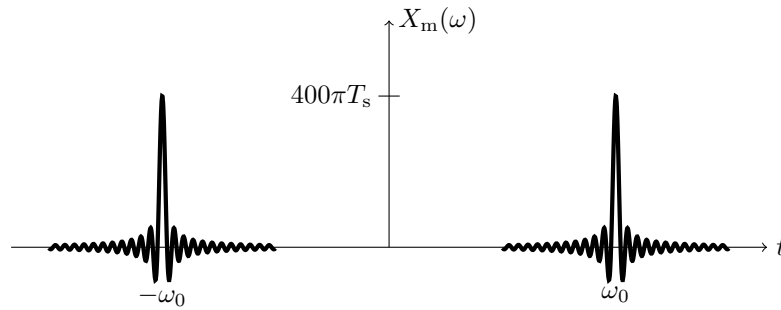
Dans le domaine spectral, ce fenêtrage correspond à une convolution avec la transformée de Fourier de la fenêtre rectangulaire:

$$X_m(\omega) = X(\omega) * 400T_s \text{Sa}\left(\frac{400T_s\omega}{2}\right), \quad (15)$$

$$X_{e,m}(\omega) = X_e(\omega) * 400T_s \text{Sa}\left(\frac{400T_s\omega}{2}\right). \quad (16)$$

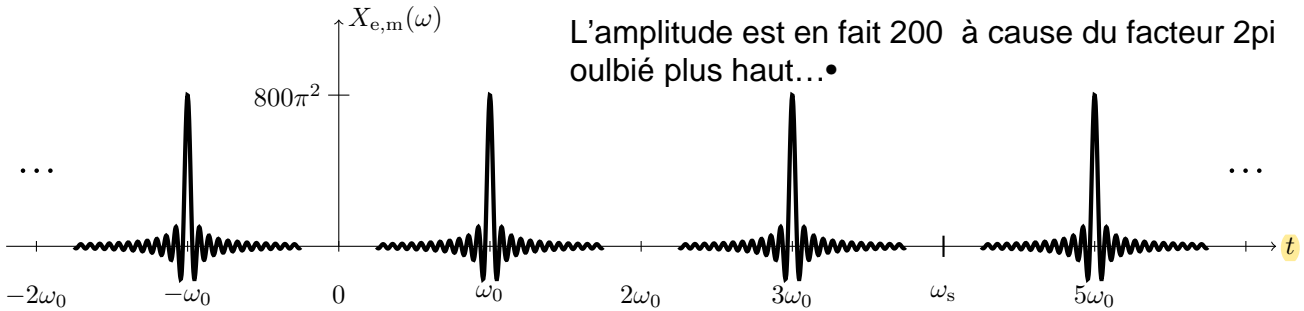
Les zéros du terme en $\sin(\omega)/\omega$ se situent aux multiples de $\pi/200T_s$. Le lobe principal est donc beaucoup plus étroit que la période de $X_e(\omega)$. Le spectre $X_m(\omega)$ peut être approximé par la figure suivante:

L'amplitude est en fait $200T_s$ à cause du facteur 2π oublié plus haut...



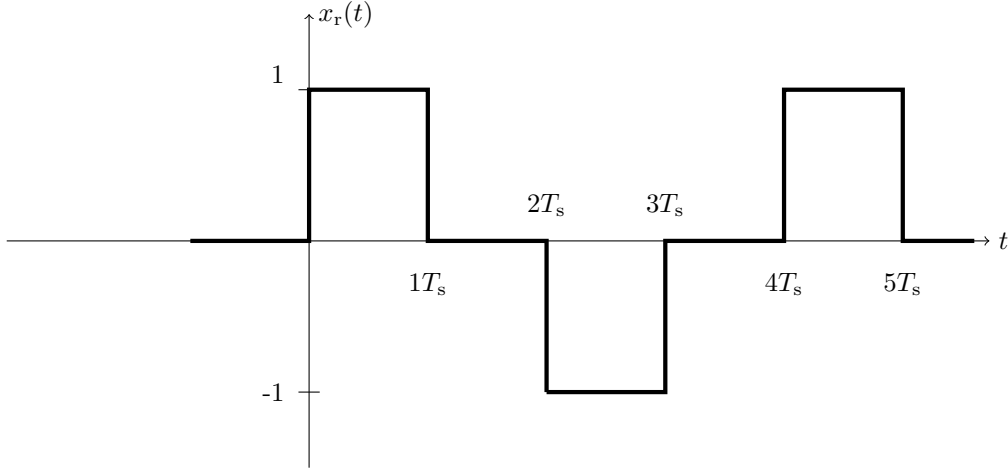
Et la figure suivante donne $X_{e,m}(\omega)$, le spectre du signal fenêtré et échantillonné:

L'amplitude est en fait 200 à cause du facteur 2π oublié plus haut...•

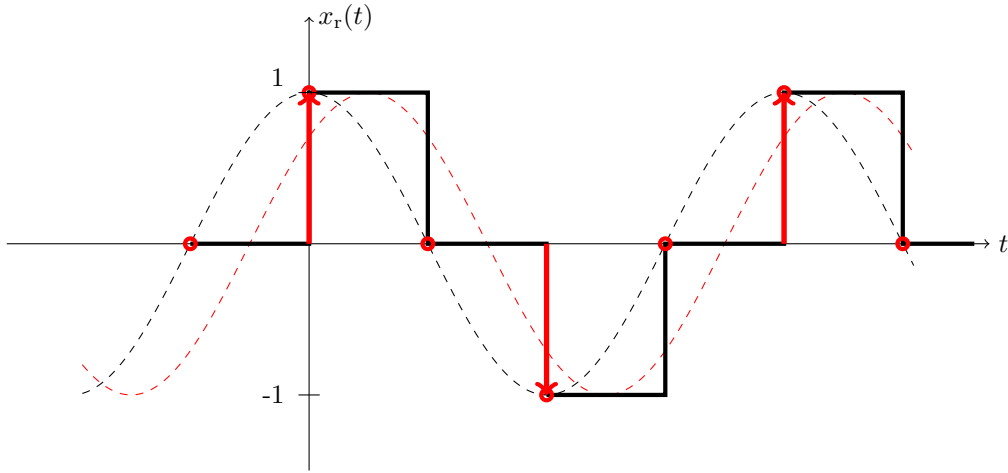


f)

On cherche à reconstruire le signal original $x(t)$ à partir du signal échantillonné x_e . Pour se faire, on utilise un bloqueur d'ordre zéro. On demande de tracer le signal $x_r(t)$ ainsi obtenu:



Pour faciliter la visualisation, le même signal reconstruit $x_r(t)$ est présenté ici sur la même figure que le signal échantillonné $x_e(t)$ (rouge), le signal original (pointillé noir) et le signal original avec un déphasage (pointillé rouge). On constate que le signal $x_r(t)$ présente une phase de $T_s/2$ par rapport au signal original.

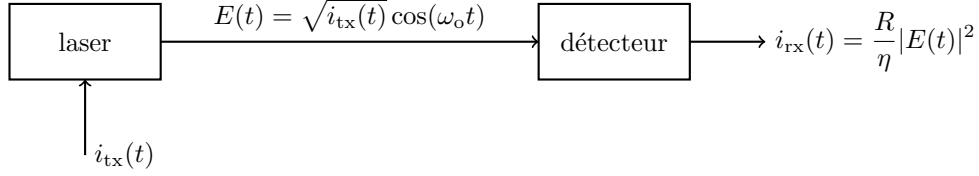


PROBLÈME 3 (15 PT)

Le problème 3 est un problème de modulation optique. Ce type de modulation est similaire à la modulation d'amplitude. On spécifie qu'un laser émet un champ électrique $E(t)$ de la forme $A(t) \cos(\omega_o t)$ avec $A(t) = \sqrt{i_{tx}(t)}$. Ici, $i_{tx}(t)$ est le courant d'alimentation du laser et c'est en modulant ce courant qu'on fait varier l'intensité du laser.

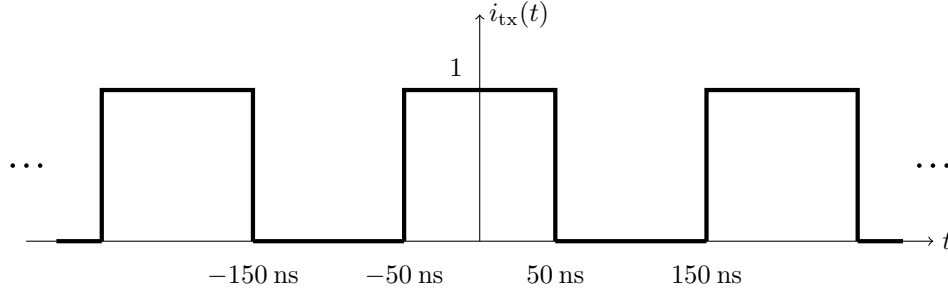
L'intensité lumineuse sur le détecteur est donnée par $I(t) = |E(t)|^2/\eta$ et le courant à la sortie du détecteur est donné par $i_{rx}(t) = RI(t)$. Ici, η et R sont respectivement l'impédance du milieu de propagation du laser et la responsivité du détecteur. Ces deux grandeurs sont considérées constantes.

Le système complet peut être illustré par le schéma suivant:



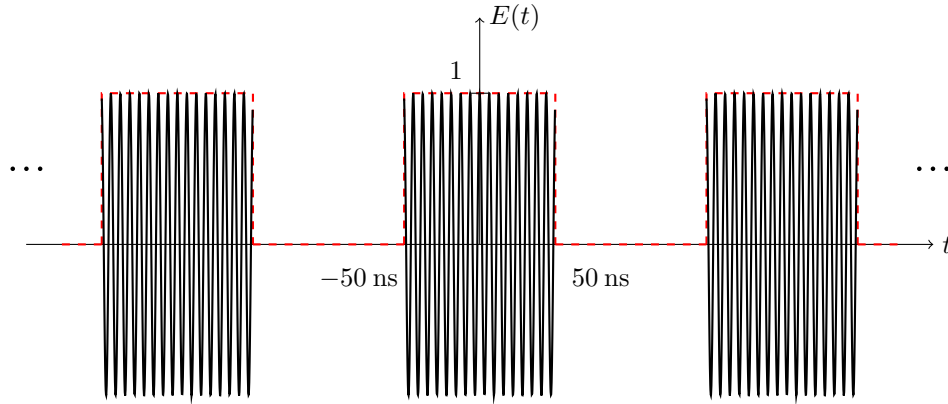
a)

On a le signal $i_{tx}(t)$, une onde carrée, tel que:



Ici, il faut remarquer que le signal $i_{tx}(t)$ est un signal **périodique** avec une période T_{tx} de 200 ns. La fréquence fondamentale de signal, f_{tx} est donc de 5 MHz. Puisque ce signal est périodique, on sait déjà que le spectre de $i_{tx}(t)$ doit être discret.

On demande de tracer le signal $E(t)$ émis par le laser ainsi que le spectre $E(\omega)$ de ce signal. Le signal temporel est tout simplement le produit de la racine carrée de $i_{tx}(t)$ avec un cosinus à une fréquence de 100 THz (note: la fréquence du cosinus représenté sur le graphique n'est pas à l'échelle):



Pour trouver le spectre de $E(t)$ plus facilement, on peut remarquer que $\sqrt{i_{tx}(t)} = i_{tx}(t)$. Ceci n'est vrai que dans ce cas précis parce que nous avons une onde carrée d'amplitude unitaire. On trouve alors que:

$$E(t) \leftrightarrow E(\omega) \quad (17)$$

$$\sqrt{i_{tx}(t)} \cos(\omega_o t) \leftrightarrow I_{tx}(\omega) * \pi [\delta(\omega - \omega_o) + \delta(\omega + \omega_o)] \quad (18)$$

d'où on trouve:

$$E(\omega) = \pi I_{tx}(\omega - \omega_o) + \pi I_{tx}(\omega + \omega_o). \quad (19)$$

Ce même résultat aurait pu tout aussi bien être trouvé de façon intuitive avec une compréhension de l'effet de la modulation d'amplitude sur le spectre d'un signal.

Pour pouvoir tracer $E(\omega)$, il nous faut encore trouver le spectre I_{tx} qui est, rappelons-nous, discret. Le signal périodique $i_{\text{tx}}(t)$ a la fonction restreinte suivante (un rectangle de largeur de 100 ns):

$$f_r(t) = \text{Rect}\left(\frac{t}{100 \times 10^{-9}}\right). \quad (20)$$

La transformation de Fourier de $f_r(t)$ est simplement:

$$F_r(\omega) = 100 \times 10^{-9} \text{Sa}\left(\frac{100 \times 10^{-9} \omega}{2}\right), \quad (21)$$

d'où on trouve la série de Fourier:

$$F(n) = \frac{F_r(n\omega_{\text{tx}})}{T_{\text{tx}}} = \frac{1}{2} \text{Sa}\left(\frac{50 \times 10^{-9} n 2\pi}{200 \times 10^{-9}}\right), \quad (22)$$

$$F(n) = \frac{1}{2} \text{Sa}\left(\frac{n\pi}{2}\right), \quad (23)$$

car $T_{\text{tx}} = 200 \text{ ns}$ et $\omega_{\text{tx}} = 2\pi/T_{\text{tx}}$.

(24)

Enfin, le spectre de $i_{\text{tx}}(t)$ est donné par:

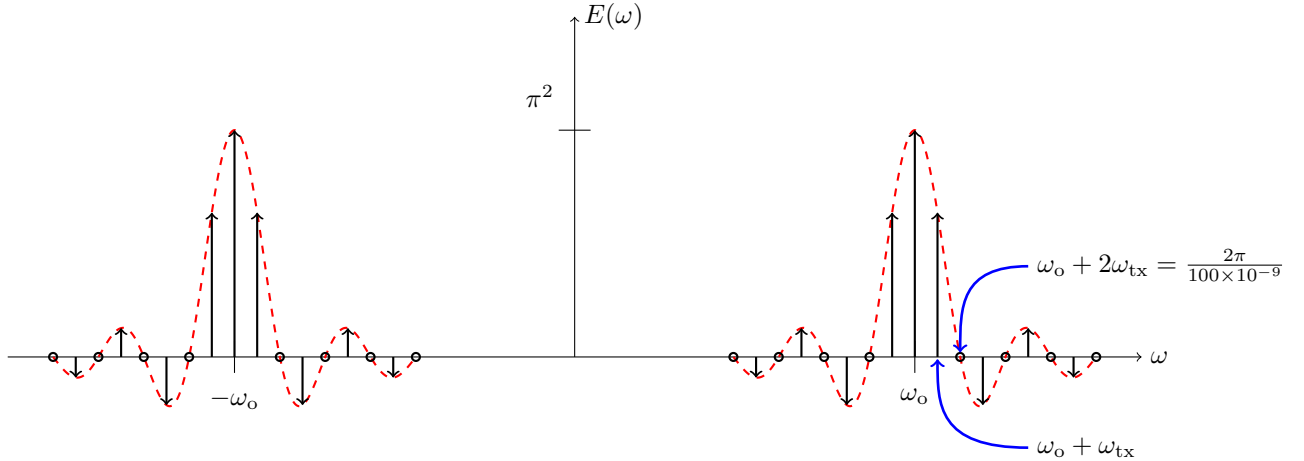
$$I_{\text{tx}}(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n) \delta(\omega - n\omega_{\text{tx}}), \quad (25)$$

et le spectre de $E(t)$ est alors:

$$E(\omega) = \pi I_{\text{tx}}(\omega - \omega_o) + \pi I_{\text{tx}}(\omega + \omega_o). \quad (26)$$

$$= 2\pi^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n) \delta(\omega - n\omega_{\text{tx}} - \omega_o) + 2\pi^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n) \delta(\omega - n\omega_{\text{tx}} + \omega_o) \quad (27)$$

La figure suivante illustre ce résultat graphiquement. L'enveloppe en $\sin(x)/x$ est indiquée en rouge pointillé:



b)

On demande où s'effectue le redressement pour la détection d'enveloppe. Le redressement est nécessaire pour la démodulation d'un signal modulé en amplitude (voir modulation *AM*). Dans le cas présenté ici, le redressement se fait au niveau du détecteur optique puisque celui-ci n'est pas sensible au champ électrique, mais bien à l'intensité du champ. Puisque l'intensité du champ est proportionnelle à $|E(t)|^2$, c'est bien là que le redressement s'effectue.

c)

On cherche à calculer le spectre du signal $i_{\text{rx}}(t)$ au détecteur. On demande d'exprimer le spectre en terme de $I_{\text{tx}}(\omega)$. On part de l'expression du courant à la sortie du détecteur:

$$i_{\text{rx}}(t) = \frac{R}{\eta} |E(t)|^2, \quad (28)$$

$$= \frac{R}{\eta} |\sqrt{i_{\text{tx}}(t)} \cos(\omega_o)|^2, \quad (29)$$

$$= \frac{R}{\eta} |i_{\text{tx}}(t)| \cos^2(\omega_o), \quad (30)$$

$$= \frac{R}{\eta} i_{\text{tx}}(t) \cos^2(\omega_o), \quad (31)$$

$$= \frac{R}{\eta} i_{\text{tx}}(t) \left[\frac{1}{2} (e^{j\omega_o t} + e^{-j\omega_o t}) \right]^2, \quad (32)$$

$$= \frac{R}{4\eta} i_{\text{tx}}(t) [e^{j2\omega_o t} + e^{-j2\omega_o t} + 2], \quad (33)$$

$$= \frac{R}{4\eta} i_{\text{tx}}(t) e^{j2\omega_o t} + \frac{R}{4\eta} i_{\text{tx}}(t) e^{-j2\omega_o t} + \frac{R}{2\eta} i_{\text{tx}}(t). \quad (34)$$

En utilisant les propriétés de la transformation de Fourier, on trouve que le spectre $I_{\text{rx}}(\omega)$ est:

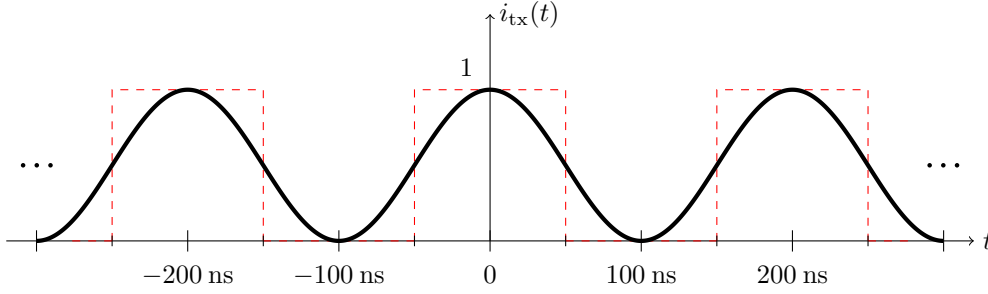
$$I_{\text{rx}}(\omega) = \frac{R}{4\eta} I_{\text{tx}}(\omega + 2\omega_o) - \frac{R}{4\eta} I_{\text{tx}}(\omega - 2\omega_o) + \frac{R}{2\eta} I_{\text{tx}}(\omega) \quad (35)$$

d)

Puisque le détecteur n'est pas assez rapide pour suivre la porteuse à une fréquence angulaire ω_o , forcément, il ne sera pas en mesure de suivre un signal au double de la fréquence, à $2\omega_o$. Les termes à cette fréquence sont filtrés et il ne restera que le signal en bande de base identifié en c).

e)

Pour diminuer la bande passante requise, on propose d'utiliser comme signal d'entrée $i_{\text{tx}}(t) = \frac{1}{2}[1 + \cos(\omega_m t)]$ avec $\omega_m/(2\pi) = 5$ GHz. Ce signal représente une alternance de 1 et de 0 de la même manière que le faisait l'onde carrée en a). Ce signal est illustré par la figure suivante (l'onde carrée de a) est illustré en rouge pointillé en guise de comparaison):



On demande de calculer le spectre $E(\omega)$ de $E(t)$ pour le signal décrit ci-haut. On a:

$$E(t) = \sqrt{i_{tx}(t)} \cos(\omega_o), \quad (36)$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}[1 + \cos(\omega_m t)]} \cos(\omega_o), \quad (37)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \cos(\omega_m t)} \frac{1}{2} (e^{j\omega_o t} + e^{-j\omega_o t}). \quad (38)$$

Ici, on donne comme indice le développement en série suivant: $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \frac{7x^5}{256} - \dots$ en spécifiant que l'on peut se limiter à utiliser les trois premiers termes de l'expansion en série. On peut donc faire l'approximation suivante:

$$E(t) \approx \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[1 + \frac{\cos(\omega_m t)}{2} - \frac{\cos^2(\omega_m t)}{8} + \dots \right] (e^{j\omega_o t} + e^{-j\omega_o t}). \quad (39)$$

Avec ce résultat, on peut estimer le spectre sachant que:

$$\cos(\omega_m t) \leftrightarrow \pi [\delta(\omega - \omega_m) + \delta(\omega + \omega_m)], \quad (40)$$

et

$$\cos^2(\omega_m t) \leftrightarrow \frac{\pi}{2} [\delta(\omega + 2\omega_m) + \delta(\omega - 2\omega_m) + \delta(\omega)]. \quad (41)$$

Il ne reste plus qu'à appliquer la propriété de décalage en fréquence pour trouver l'expression du spectre:

$$\begin{aligned} E(\omega) \approx & \frac{\pi}{\sqrt{2}} \delta(\omega - \omega_o) + \frac{\pi}{\sqrt{2}} \delta(\omega + \omega_o) \\ & + \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \frac{1}{2} [\delta(\omega - \omega_o - \omega_m) + \delta(\omega - \omega_o + \omega_m)] \\ & + \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \frac{1}{2} [\delta(\omega + \omega_o - \omega_m) + \delta(\omega + \omega_o + \omega_m)] \\ & - \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \frac{1}{8} [\delta(\omega - \omega_o + 2\omega_m) + \delta(\omega - \omega_o - 2\omega_m) + \delta(\omega - \omega_o)] \\ & - \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \frac{1}{8} [\delta(\omega - \omega_o + 2\omega_m) + \delta(\omega - \omega_o - 2\omega_m) + \delta(\omega - \omega_o)] \end{aligned} \quad (42)$$

f)

On demande ce qu'on peut conclure sur la capacité de multiplexer des signaux en fréquence en utilisant ce type de modulation dans une fibre optique.

On remarque l'effet de moduler avec la racine carrée du signal, on se retrouve avec une somme infinie d'impulsions (bien qu'on a utilisé que les trois premiers termes de l'expansion en série, la série est bel et bien infinie). Pour cette raison, il n'y a pas de gain notable sur la capacité de multiplexer en fréquence.