Mathématiques de l'ingénieur I (MAT-10363)
Examen partiel du 5 novembre 2004 – solutions

Question 1
(15 points)

Trouver la solution générale de l'équation différentielle $(4y - 2x)y' + x - 2y = 3$.

On pose $u(x) = x - 2y(x)$. Alors $u' = 1 - 2y'$ et l'équation différentielle devient

$$-2u\frac{1-u'}{2} + u = 3 \quad \Longleftrightarrow \quad uu' = 3.$$

Cette équation est séparée

$$\int u\,du = \int 3\,dx + C_0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{u^2}{2} = 3x + C_0 \quad \Longleftrightarrow \quad u = \pm\sqrt{6x + C_1}.$$

La solution générale est donc

$$y = \frac{x \pm \sqrt{6x + C_1}}{2}.$$

Question 2
(15 points)

Sachant que $y_p(x) = x^3/4$ est une solution particulière de l'équation différentielle

$$y' + q(x)y = x^2,$$

trouver la solution générale de cette équation.

Puisque y_p est une solution particulière de l'équation, on a

$$y_p' + q(x)y_p = x^2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{3x^2}{4} + q(x)\frac{x^3}{4} = x^2 \quad \Longrightarrow \quad q(x) = \frac{1}{x}.$$

La solution générale de $y' + \frac{1}{x}y = 0$ est

$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x} \quad \Longrightarrow \quad \ln|y| = -\ln|x| + C_0 \quad \Longrightarrow \quad y_h = \frac{C_1}{x}.$$

Par le principe de superposition,

$$y_g = y_h + y_p = \frac{C_1}{x} + \frac{x^3}{4}.$$

Question 3
(15 points)

Trouver la solution générale de l'équation différentielle $y'' + 3y' + 2y = 2x$.

Son polynôme caractéristique est $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$. Il possède les zéros $\lambda_0 = -1$ et $\lambda_1 = -2$. Donc l'équation homogène possède la solution générale

$$y_h = c_0 e^{-x} + c_1 e^{-2x}.$$

La méthode des coefficients indéterminés suggère de chercher une solution particulière de la forme $Ax + B$ car le membre de droite est un polnôme de degré 1 et 0 n'est pas une racine du polynôme caractéristique.

$$2x = (Ax + B)'' + 3(Ax + B)' + 2(Ax + B) = 3A + 2Ax + 2B = (3A + 2B) + (2A)x.$$

En identifiant les coefficients de x on trouve $3A+2B = 0$ et $2A = 2$, ce qui donne $A = 1$ et $B = -3/2$. Donc, par le principe de superposition,

$$y_g = y_h + y_p = c_0 e^{-x} + c_1 e^{-2x} + x - \frac{3}{2}.$$

Question 4
(15 points)

Trouver la solution $y(x)$ de l'équation différentielle $x^2 y'' + xy' = 0$ qui passe par le point $(1, 3)$ et qui a une pente égale à 2 en ce point.

Il s'agit d'une équation d'ordre 2 où y' est absent. On pose $p(x) = y'(x)$.

$$x^2 p' + xp = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{p'}{p} = -\frac{1}{x} \quad \Longrightarrow \quad p = y' = \frac{C}{x}.$$

Puisque $y'(1) = 2$, on a $C = 2$. Donc, $y = 2\ln|x| + D$. Puisque $y(1) = 3$, on a $D = 3$ et ainsi, $y(x) = 2\ln|x| + 3$.

Question 5
(15 points)

Sachant que l'équation différentielle $4x^2y'' - 8xy' + 9y = 0$ admet une solution particulière de la forme x^λ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$, trouver sa solution générale.

On trouve d'abord pour quel(s) λ, la fonction x^λ est une solution particulière de l'ÉD.

$$0 = 4x^2(x^\lambda)'' - 8x(x^\lambda)' + 9(x^\lambda) = 4x^2\lambda(\lambda - 1)x^{\lambda-2} - 8x\lambda x^{\lambda-1} + 9x^\lambda = x^\lambda(4\lambda^2 - 12\lambda + 9).$$

Il faut et il suffit que $0 = 4\lambda^2 - 12\lambda + 9 = (2\lambda - 3)^2$, i.e. que $\lambda = 3/2$. On a donc la solution particulière $y_1 := x^{3/2}$.

On cherche une 2^e solution particulière de la forme $y(x) = u(x)x^{3/2}$. On a

$$y' = u'x^{3/2} + \frac{3}{2}ux^{1/2} \quad \text{et} \quad y'' = u''x^{3/2} + 3u'x^{1/2} + \frac{3}{4}ux^{-1/2}.$$

On substitue dans l'équation différentielle et on simplifie :

$$0 = 4x^2\left(u''x^{3/2} + 3u'x^{1/2} + \frac{3}{4}ux^{-1/2}\right) - 8x\left(u'x^{3/2} + \frac{3}{2}ux^{1/2}\right) + 9ux^{3/2} = 4x^{7/2}u'' + 4x^{5/2}u'.$$

On pose $p = u'$ et on trouve

$$\frac{p'}{p} = -\frac{1}{x} \quad \Longrightarrow \quad p = \frac{C}{x} \quad \Longrightarrow \quad u = C\ln x + D.$$

Il suffit donc de prendre $u = \ln x$. Puisque $y_1 = x^{3/2}$ et $y_2 := x^{3/2}\ln x$ sont linéairement indépendante ($y_2/y_1 = \ln x \not\equiv$ const.), la solution générale est

$$y_g := c_1y_1 + c_2y_2 = c_1x^{3/2} + c_2x^{3/2}\ln x = x\sqrt{x}(c_1 + c_2\ln x).$$

Question 6
(20 points)

Une équation différentielle d'ordre n à coefficients constants de la forme

$$y^n(x) + p_{n-1}y^{n-1}(x) + p_{n-2}y^{n-2}(x) + \cdots + p_0y(x) = r(x)$$

a comme équation caractéristique

$$\lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + p_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + p_1\lambda + p_0 = 0.$$

On note par $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ les racines du polynôme caractéristique. La solution générale d'une telle équation est de la forme :

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x),$$

où $y_h(x)$ est la solution générale de l'équation homogène et $y_p(x)$ une solution particulière de l'équation non homogène. Dans le tableau qui suit, on vous demande de donner $y_h(x)$ et de proposer une forme pour $y_p(x)$ en tenant compte des valeurs des racines du polynôme caractéristique et de la forme de $r(x)$.

n $\lambda_1 \cdots \lambda_n$ $r(x)$	$y_h(x)$	Forme suggérée pour $y_p(x)$
$n=2$ $\lambda_1=-1, \lambda_2=1$ $r(x)=e^{2x}$	$c_1e^{-x}+c_2e^{x}$	Ae^{2x}
$n=2$ $\lambda_1=2, \lambda_2=2$ $r(x)=e^{2x}$	$e^{2x}(c_1+c_2x)$	Ax^2e^{2x}
$n=3$ $\lambda_1=-1, \lambda_2=2, \lambda_3=2$ $r(x)=e^{2x}-\sin x$	$c_1e^{-x}+e^{2x}(c_2+c_3x)$	$Ax^2e^{2x}+B\sin x+C\cos x$
$n=3$ $\lambda_1=0, \lambda_2=2i, \lambda_3=-2i$ $r(x)=x\sin 2x$	$c_1+c_2\sin 2x+c_3\cos 2x$	$x(Ax+B)(C\sin 2x+D\cos 2x)$

Question 7
(5 points)

On veut résoudre l'équation différentielle $5y''-y'+2y=e^x$. Compléter la commande Maple suivante permettant de réaliser cet objectif.

```
> dsolve( 5*diff(y(x),x,x) - diff(y(x),x) + 2*y(x) = exp(x) , y(x) );
```