STT-2920 *Rachid Kandri-Rody*

Examen 1

26 Octobre 2016
15h30-17h20

Répondez dans l'espace, réservé à cet effet, qui suit chaque question sur ce questionnaire. Cet examen compte pour 40% de la note finale.
L'examen compte 6 exercices répartis dans un questionnaire de **10 pages**, dont la dernière qui est une page d'espace supplémentaire au besoin.
Vous avez **110 minutes** pour faire cet examen.
Donnez tous les développements et calculs.
Toutes les réponses doivent être convenablement justifiées.
Un aide-mémoire est distribué avec cet examen.
Utilisez le verso des feuilles pour le brouillon.
Éteignez et rangez tout appareil électronique.

À remplir par l'étudiant(e)(en lettres **MAJUSCULES**)

Nom :	Corrigé
Prénom :	
Matricule :	

À remplir par le correcteur

Exercice 1	14 / 14
Exercice 2	16 / 16
Exercice 3	20 / 20
Exercice 4	14 / 14
Exercice 5	16 / 16
Exercice 6	20 / 20
Total	100 /100

Exercice 1 : **(14 pts)**
Aux États-Unis d'Amérique qui comptent 50 états, le Sénat compte cent sénateurs et comprend deux sénateurs par état. On choisit 8 sénateurs au hasard pour former un comité.

(a) Quelle est la probabilité que ce comité comprendra au moins un sénateur provenant de la Floride (un État sur la côte Sud-Est du golfe des États-Unis) ? (7 pts)

A = « Le comité comprend au moins un sénateur de la Floride »

$$P(A) = 1 - P(A^c)$$

$$= 1 - \frac{\binom{2}{0}\binom{98}{8}}{\binom{100}{8}}$$

$$= \frac{382}{2475} \simeq 0.15434$$

(b) Calculez la probabilité que les 8 membres du comité proviendront de 8 États différents. (7 pts)

B = « le comité (de 8 membres) de 8 états différents »

$$P(B) = \binom{50}{8} \frac{2^8}{\binom{100}{8}}$$

$$\simeq 0.7386$$

Exercice 2 : (16 pts)
On sait que 20% des chaudières sont sous garantie. Parmi les chaudières sous garantie, la probabilité qu'une chaudière soit défectueuse est de 1/100. Parmi les chaudières qui ne sont pas sous garantie, la probabilité qu'une chaudière soit défectueuse est de 1/10. Soit A et B les événements définis par A : «la chaudière est sous garantie» et B : «la chaudière est défectueuse».

(a) Calculez $P(B)$. (6 pts)

On a $P(A) = 0{,}20$; $P(B/A) = 0{,}01$; $P(B/A^c) = 0{,}1$

$$P(B) = P(B/A)\,P(A) + P(B/A^c)\,P(A^c)$$
$$= 0.01 \times 0{,}20 + 0.1 \times 0{,}80$$
$$= 8.2\%$$

(b) Calculez $P(A \cap B)$. (5 pts)

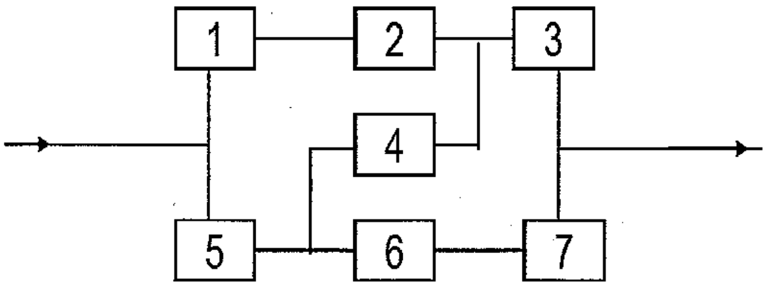
$$P(A \cap B) = P(B/A)\,P(A)$$
$$= 0.01 \times 0{,}20$$
$$= 0.002$$

(c) Dans un logement, la chaudière est défectueuse. Quelle est la probabilité qu'elle soit sous garantie. (5 pts)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.002}{0.082} = \frac{1}{41} \simeq 0.0244$$

Exercice 3 :(20 pts)

Calculez la fiabilité du réseau R suivant. On suppose que toutes les composantes ont la même fiabilité de 95% sauf la quatrième composante dont la fiabilité est de 90% et que les composantes fonctionnent indépendamment les unes des autres.



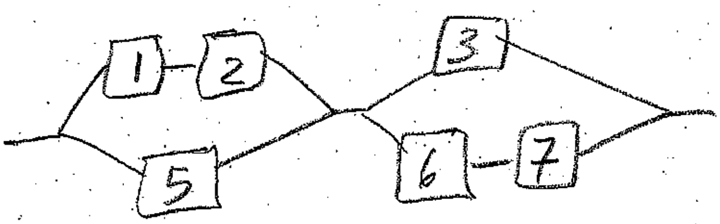
Réponse :

On notera par E_i l'événement : «la composante i fonctionne correctement», $i = 1, \ldots, 7$.

$P(E_i)_{i \neq 4} = 0.95$ et $P(E_4) = 0.90$

on a $P(R) = P(R/E_4)\,P(E_4) + P(R/\bar{E}_4)\,P(\bar{E}_4)$

$R/\bar{E}_4$:



$P(E_1 \cap E_2) = P(E_6 \cap E_7) = 0.95^2 = 0.9025$

Posons $E_1 \cap E_2 = E_8$ et $E_6 \cap E_7 = E_9$.

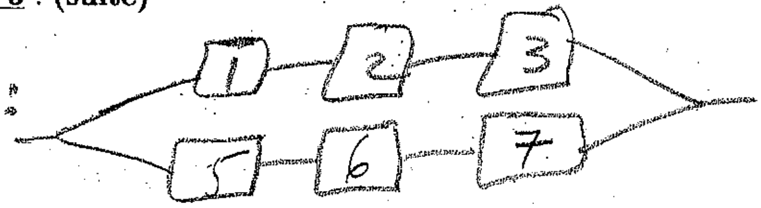
$P(R/\bar{E}_4) = P(E_8 \cup E_5) \cdot P(E_3 \cup E_9)$

$= \left[1 - P(\bar{E}_8)P(\bar{E}_5)\right]\left[1 - P(\bar{E}_3)P(\bar{E}_9)\right]$

$= (1 - 0.0975 \times 0.05)^2 = 0.99027$

Exercice 3 : (suite)

$R/\overline{E_4}$:



Posons $E_{10} = E_1 \cap E_2 \cap E_3$

$E_{11} = E_5 \cap E_6 \cap E_7$

on a $P(E_{10}) = P(E_{11}) = 0{,}95^3 = 0{,}8574$

$$P(R/\overline{E_4}) = P(E_{10} \cup E_{11})$$
$$= 1 - (1 - 0{,}8574)^2 = 0{,}9797$$

d'où
$$P(R) = 0{,}9903 \times 0{,}90 + 0{,}9797 \times (1 - 0{,}90)$$
$$= 0{,}9892$$

Exercice 4 : **(14 pts)**
La longueur X d'une pièce fabriquée en série est une variable aléatoire X qui possède la fonction de densité suivante :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad 0 \le x \le 1 \\ 1 & \text{si} \quad 1 \le x \le k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

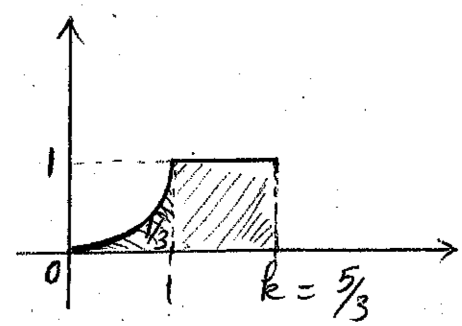
où k étant une constante plus grande que 1.

(a) Montrez que la valeur de la constante k est égale à $\frac{5}{3}$ (4 pts)

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^k dx$$

$$1 = \frac{1}{3} + (k-1)$$

$$\Longrightarrow \quad k = \frac{5}{3}$$



(b) Calculez la probabilité $P(X < 1.5)$. (5 pts)

$$P(X < 1.5) = \int_0^1 x^2\,dx + \int_1^{1.5} dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[x\right]_1^{1.5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

(c) Calculez la probabilité $P(X \le 1.5 | X > 1)$. (5 pts)

$$P(X \le 1.5 / X > 1) = \frac{P(X \le 1.5 \text{ et } X > 1)}{P(X > 1)}$$

$$= \frac{P(1 \le X \le 1.5)}{P(X > 1)}$$

$$= \frac{1/2}{2/3} = 3/4$$

Exercice 5 : **(16 pts)**
Soit X une variable aléatoire représentant le nombre d'heures d'entraînement quotidien d'un athlète. Supposons que la fonction de masse de cette variable soit de la forme :

$$f(x) = \begin{cases} 0.1 & \text{si} \quad x = 0 \\ ax & \text{si} \quad x = 1 \text{ ou } x = 2 \\ a(5-x) & \text{si} \quad x = 3 \text{ ou } x = 4 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où a étant une constante réelle.

(a) Montrez que la valeur de la constante a est égale à 0.15 (4 pts)

$$1 = 0.1 + a + 2a + a(5-3) + a(5-4)$$

$$1 = 0.1 + 6a$$

$$\longrightarrow a = 0.15$$

(b) Quelle est la probabilité que l'athlète s'entraîne au moins deux heures au cours d'une journée ? (5 pts)

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1)$$

$$= 1 - 0.1 - 0.15$$

$$= 0.75$$

(c) Quelle est la probabilité que l'athlète s'entraîne au moins deux heures au cours d'une journée sachant qu'il s'entraîne cette journée-là ? (7 pts)

$$P(X \geq 2 / X \geq 1) = \frac{P(X \geq 2 ,\ X \geq 1)}{P(X \geq 1)}$$

$$= \frac{P(X \geq 2)}{P(X \geq 1)} = \frac{0.75}{0.9} = 0.83\overline{3}$$

Exercice 6 : **(20 pts)**

Une boîte contient cinq transistors, dont deux de marque A et trois de marque B. On fait un tirage dans cette boîte.

- Si on pige le transistor A, alors on lance une pièce de monnaie équilibrée **deux fois.**
- Si on pige le transistor B, alors on lance une pièce de monnaie équilibrée **une fois.**

On considère les deux variables aléatoires suivantes :

X : le nombre de transistors de marque A obtenus,
Y : le nombre de faces obtenues.

(a) Complétez la fonction de masse conjointe de X et Y dans le tableau ci-dessous. Justifiez vos réponses. (6 points)

$p(x,y)$		y		
		0	1	2
x	0	$6/20$	$6/20$	0
	1	$\frac{2}{20}$	$\frac{4}{20}$	$2/20$

$$P(X=0, Y=0) = P(X=0) \cdot P(Y=0 / X=0)$$
$$= \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{10} = \frac{6}{20}$$

$$P(X=0, Y=1) = P(X=0) \cdot P(Y=1 / X=0)$$
$$= \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{10} = \frac{6}{20}$$

$$P(X=1, Y=2) = P(X=1) \cdot P(Y=2 / X=1)$$
$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{20}$$

(b) Déterminez la probabilité que $Y \leq 1$ sachant que $X = 1$. (5 points)

$$P(Y \leq 1 / X=1) = \frac{P(Y\leq 1, X=1)}{P(X=1)}$$
$$= \frac{P(Y=0,X=1) + P(Y=1,X=1)}{P(X=1)}$$
$$= \frac{2/20 + 4/20}{\frac{2}{20}+\frac{4}{20}+\frac{2}{20}} = \frac{6}{8} = 3/4$$

(c) Déterminez la loi marginale de X et celle de Y. (5 points)

$\mathcal{L}(X) \to$

x_i	0	1
p_i	$3/5$	$2/5$

$\mathcal{L}(Y) \to$

y_i	0	1	2
p_i	$2/5$	$1/2$	$1/10$

(d) Les variables X et Y sont-elles indépendantes? (4 points)

X et Y ne sont pas indépendants

Car $\underbrace{P(X=0, Y=2)}_{0} \neq \underbrace{P(X=0)}_{3/5} \cdot \underbrace{P(Y=2)}_{1/10}$

(ou bien : il y a un zéro dans le tableau).