STT-2920 Automne 2015 Minitest 2

Prénom : ALBERT

Nom de famille : EINSTEIN

Matricule : 314 159 265

Numéro 1. On sait que 25% des lave-vaisselle Kenmore vendu chez Sears proviennent de l'usine de Sacramento (Californie) alors que tous les autres proviennent de l'usine de Guanajuato (Mexique). Parmi les lave-vaisselle provenant de Sacramento, 4% auront besoin d'une réparation durant la première année de service alors que pour ceux provenant de Guanajuato ce pourcentage est de 8%. M. Sauter a acheté un lave-vaisselle Kenmore chez Sears. Son lave-vaisselle a nécessité une réparation durant la première année. Calculez la probabilité que le lave-vaisselle de M. Sauter provient de l'usine de Guanajuato.

Solution : Il s'agit d'une simple application du théorème de Bayes :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[\text{ Guana } | \text{ Réparé }] &= \frac{\mathbb{P}[\text{ Réparé } | \text{ Guana }]\,\mathbb{P}[\text{ Guana }]}{\mathbb{P}[\text{ Réparé } | \text{ Guana }]\,\mathbb{P}[\text{ Guana }] + \mathbb{P}[\text{ Réparé } | \text{ Sacra }]\,\mathbb{P}[\text{ Sacra }]} \\
&= \frac{0.08 \times 0.75}{(0.08 \times 0.75) + (0.04 \times 0.25)} \\
&= \frac{0.06}{0.07} \\
&= \frac{6}{7} \\
&= 0.8571
\end{aligned}$$

Numéro 2. On suppose que la densité de probabilité suivante est un bon modèle pour décrire la distribution des résistances, exprimées en $k\Omega$ (kilo-ohms), pour un certain type de composants électroniques vendus chez DigiTeck.ca :

$$f(x) = \begin{cases} 4/x^5 & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1. \end{cases} \tag{1}$$

Autrement dit, si on achète un tel composant alors la résistance de ce composant, exprimée en $k\Omega$, est une variable aléatoire, disons X, avec densité de probabilité donnée par (1).

Partie (a) Calculez la résistance médiane de cette population de composants. Autrement dit, calculez la valeur x_* qui est telle que 50% des composants ont une résistance inférieure à x_* $k\Omega$ et 50% ont une résistance supérieure à x_* $k\Omega$.

Solution : Il suffit de résoudre l'équation $\displaystyle\int_1^{x_*} \frac{4}{x^5}\, dx \;=\; \frac{1}{2}.$

Il suffit donc de résoudre l'équation $\displaystyle 1 - \frac{1}{x_*^4} \;=\; \frac{1}{2}.$

On résout pour x_* et on obtient $x_* = 2^{1/4} = \sqrt{\sqrt{2}} = 1.1892$.
La médiane des résistances est donc 1.1892 $k\Omega$.

Partie (b) Si la résistance d'un composant est égale à X $k\Omega$, alors sa conductance est donnée par $Y = 1/X$ mS (millisiemens). Obtenez la densité de probabilité de la variable aléatoire Y. Présentez votre réponse aussi clairement que possible.

Solution : L'ensemble des valeurs possibles de X est l'intervalle $[1, \infty)$.
L'ensemble des valeurs possibles de Y est donc l'intervalle $(0, 1]$.
Pour $0 < y \leq 1$, on obtient $\mathbb{P}[Y \leq y] = \mathbb{P}[1/X \leq y] = \mathbb{P}[X \geq 1/y] = \int_{1/y}^{\infty} 4/x^5\, dx = y^4$.
Voici donc la fonction de répartition de la variable Y :

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0 \\ y^4 & \text{si } 0 < y \leq 1 \\ 1 & \text{si } y > 1. \end{cases}$$

La densité de probabilité de la variable aléatoire Y est simplement la dérivé de la fonction de répartition : $f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y)$. Ici on obtient

$$f_Y(y) = \begin{cases} 4y^3 & \text{si } 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Claude Bélisle
7 octobre 2015