EXAMEN PARTIEL 3

Mathématiques de l'ingénieur II — Automne 98
MAT-10364
Date: 14 décembre.

Remarques:

- Durée de l'examen: deux heures
- Documentation permise: deux feuilles-résumé.
- Vous êtes priés de vous identifier (nom et numéro de matricule) sur le cahier et de placer votre carte d'identité sur la table à côté de vous.
- **Chaque réponse devra être accompagnée des calculs détaillés. Dans le cas contraire, elle sera considérée comme nulle.**

Question 1. (20 points)

On considère le quart du cône d'équation

$$y^2 = x^2 + z^2, \quad x \geq 0, \;\; z \geq 0,$$

compris entre les plans $y = 0$ et $y = 1$.

Calculer le moment d'inertie de cette surface par rapport à l'axe des y en supposant que la surface est homogène et de densité surfacique égale à 1.

Question 2. (20 points)

On considère une plaque homogène D située dans le plan et délimitée par la courbe fermée C.

(a) (15 pts) Evaluer l'intégrale curviligne suivante

$$I = \int_C (3y^2 + e^{\cos x})\, dx + (6x^2 - \sqrt{y^2 + 1}\,)\, dy$$

en fonction de la position du centre de masse $(\bar{x}, \bar{y})$ et de l'aire A de la plaque.

(b) (5 pts) Si D représente le carré unité $[0,1] \times [0,1]$, déduire de (a) la valeur de I.

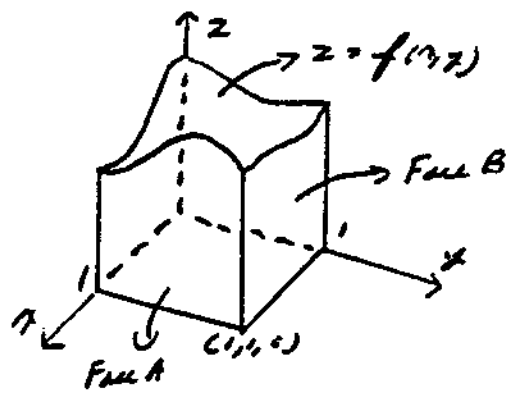
Question 3. (20 points)

Soit un domaine D de forme cubique dont cinq (5) faces sont décrites par les plans

$$x = 0, \quad x = 1, \quad y = 0, \quad y = 1, \quad z = 0$$

et la face supérieure est donnée par une équation de la forme

$$z = f(x, y).$$



On considère un champ vectoriel

$$\vec{v}(x, y, z) = (x, -2y, z + 3).$$

Si le flux dirigé vers l'extérieur à travers la face A ($x = 1$) est égal à 1 tandis que le flux extérieur à travers la face B ($y = 1$) est égal à -3, calculer le flux dans la direction extérieure à travers la face supérieure.

Question 4. (20 points)

Soit K le triangle reliant les points $A = (0, -1)$, $B = (1, 0)$ et $C = (0, 1)$ du plan. **Utiliser le théorème de Green** pour évaluer le flux dans la direction extérieure à K du champ de vecteurs

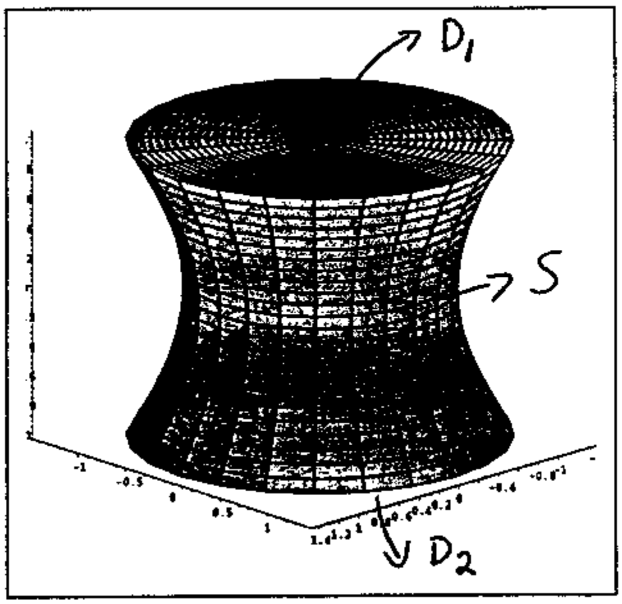
$$\vec{v}(x, y) = (x + y^2, e^x + y^2)$$

à travers les deux côtés AB et BC.

Question 5. (20 points)

On considère le solide K délimité par

- la portion S de l'hyperboloïde d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 1$,
- le disque D_1: $z = 1$ et $x^2 + y^2 \leq 2$,
- le disque D_2: $z = -1$ et $x^2 + y^2 \leq 2$.



On note par $\vec{v}$ le champ de vecteurs

$$\vec{v} = (-yz, x^2, \sin z)$$

et par $\vec{W}$ son rotationnel

$$\vec{W} = \vec{\text{rot}}(\vec{v}).$$

Sans faire aucune paramétrisation de surface, calculer les flux de $\vec{W}$

(a) (6 pts) à travers D_1 dans la direction extérieure à K,

(b) (6 pts) à travers les parois de K dans la direction extérieure à K,

(c) (8 pts) à travers S dans la direction extérieure à K.