## Problème 1 (      / 25)

Dans ce problème on considère l'espace de travail comme étant l'espace $\mathbf{R}^2$.

1. (5 points) Donner la matrice $A$ qui réalise une rotation d'un angle $\theta$ autour de l'origine de $0y$ vers $0x$.
2. (5 points) On considère une **transformation linéaire** qui réalise une translation de $+4$ sur l'axe $0x$ et de $-2$ sur l'axe $0y$. Donner la matrice $B$ de cette transformation linéaire.
3. (10 points) On considère une transformation linéaire qui réalise une rotation d'un angle $\theta$ dans le sens négatif, autour du point de coordonnées $(-4, 2)$ (**et non pas autour de l'origine**). Exprimer la matrice $C$ de cette transformation linéaire par rapport aux matrices retrouvées précédemment.
4. (5 points) Calculer la matrice $C$.

## Solution :

1. (5 points) Donner la matrice $A$ qui réalise une rotation d'un angle $\theta$ autour de l'origine de $0y$ vers $0x$.

   Sens négatif de rotation car la rotation se réalise de $0y$ vers $0x$.

$$A = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

   La matrice de cette transformation exprimée en coordonnées homogènes est :

$$A^* = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. (5 points) On considère une **transformation linéaire** qui réalise une translation de $+4$ sur l'axe $0x$ et de $-2$ sur l'axe $0y$. Donner la matrice $B$ de cette transformation linéaire.

   La matrice $B$ doit être exprimée en coordonnées homogènes pour que la transformation soit linéaire :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. (10 points) On considère une transformation linéaire qui réalise une rotation d'un angle $\theta$ dans le sens négatif, autour du point de coordonnées $(-4, 2)$ (**et non pas autour de l'origine**). Exprimer la matrice $C$ de cette transformation linéaire par rapport aux matrices retrouvées précédemment.

   Une telle transformation est réalisée en cascade :

   (a) On fait une translation pour que le point par rapport auquel se réalise la rotation se retrouve à l'origine des axes - matrice $B$

(b) On réalise une rotation autour de l'origine dans le sens négatif - matrice $A$ en coordonnées homogènes

(c) On fait une translation inverse pour ramener le point par rapport auquel se réalise la rotation à sa place - translation inverse réalisée par la matrice $B^{-1}$

$$C = B^{-1}A^*B$$

4. (5 points) Calculer la matrice $C$.

$$\begin{aligned}
C = B^{-1}A^*B &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & -4 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 4\cos\theta - 2\sin\theta - 4 \\ -\sin\theta & \cos\theta & -4\sin\theta + 2\cos\theta + 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

## Problème 2 (   / 20)

Soit le système d'équations linéaires $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On cherche à résoudre ce système à l'aide de la méthode de décomposition $LU$.

1. (10 points) Trouver la décomposition $LU$ de la matrice $A$ (si possible).
2. (10 points) Trouver la (les) solutions du système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en utilisant la décomposition $LU$.

## Solution :

1. (10 points) Trouver la décomposition $LU$ de la matrice $A$ (si possible).

On cherche la forme échelon de la matrice $A$ qui soit obtenue par la seule opération élémentaire sur les lignes $L_j - L_i \to L_j$ pour $i, j$ tels que $j > i$ et $i$ étant la ligne de la position pivot en dessous de laquelle on veut annuler les éléments.

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & 0 & 1 \\ \boxed{-2} & 2 & -2 & 1 \\ \boxed{-1} & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \overset{L_2+2L_1\to L_2}{=\!=\!=\!=\!=\!=} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \overset{L_3+L_1\to L_3}{=\!=\!=\!=\!=\!=}$$

$$\approx \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{-2} & -2 & 3 \\ 0 & \boxed{-2} & -2 & 0 \end{pmatrix} \overset{L_3-L_2\to L_3}{=\!=\!=\!=\!=\!=} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-3} \end{pmatrix} = U$$

On trouve la matrice $L$ en choisissant seulement les colonnes pivot de la matrice $A$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xlongequal{C_2/(-2)\to C_2 \quad , \quad C_3/(-3)\to C_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = L$$

2. (10 points) Trouver la (les) solutions du système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en utilisant la décomposition $LU$.

En utilisant la décomposition $LU$ de la matrice $A$, le système d'équations $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ est remplacé par deux systèmes triangulaires plus simples à résoudre :

$$\begin{cases} L\mathbf{y} = \mathbf{b} \\ U\mathbf{x} = \mathbf{y} \end{cases}$$

On commence par le système $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ :

$$\begin{aligned} y_1 &= -1 & \Longleftrightarrow \quad & y_1 = -1 \\ -2y_1 + y_2 &= 1 & \Longleftrightarrow \quad & y_2 = 1 + 2y_1 = -1 \\ -y_1 + y_2 + y_3 &= -1 & \Longleftrightarrow \quad & y_3 = -1 + y_1 - y_2 = -1 \end{aligned}$$

Ensuite, le vecteur $\mathbf{y}$ est connu et on peut résoudre le système $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Cependant ce système est un système consistant à solutions multiples. Ainsi il faut trouver la forme paramétrique de la solution. On cherche d'abord la forme échelon réduite de la matrice augmentée de ce système :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} U & \mathbf{y} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \xlongequal{L_3/(-3)\to L_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 \end{pmatrix} \xlongequal{L_1-L_2\to L_2} \\ &\approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 \end{pmatrix} \xlongequal{L_2-3L_3\to L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 \end{pmatrix} \xlongequal{L_2/(-2)\to L_2} \\ &\approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 \end{pmatrix} \xlongequal{L_1+2L_3\to L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Le système équivalent devient :

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 &= 2/3 & \qquad x_1 &= 2/3 - 2x_3 \\ x_2 + x_3 &= 1 & \qquad x_2 &= 1 - x_3 \\ x_4 &= 1/3 & \qquad x_4 &= 1/3 \end{aligned}$$

La forme paramétrique de la solution du système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ est :

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & - & 2x_3 \\ 1 & - & x_3 \\ & & x_3 \\ 1/3 & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

 

## Problème 3 ( / 35)

Soit l'ensemble de vecteurs $V = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ de l'espace $\mathbf{R}^3$. Soit aussi le vecteur $\mathbf{x}$ de $\mathbf{R}^3$.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1. (4 points) Est-ce que les vecteurs de l'ensemble $V$ sont linéairement indépendants ? Expliquer pourquoi.
2. (3 points) Est-ce que les vecteurs $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ engendrent l'espace $\mathbf{R}^3$ ? Expliquer pourquoi.
3. (4 points) Est-ce que les vecteurs $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ engendrent l'espace $\mathbf{R}^2$ ? Expliquer pourquoi.
4. (8 points) Calculez la forme échelon réduit de la matrice formée par les colonnes $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ et $\mathbf{x}$.
5. (3 points) Est-ce que les vecteurs de l'ensemble $V$ engendrent l'espace $\mathbf{R}^3$ ? Expliquer pourquoi.
6. (4 points) Trouver parmi les vecteurs de l'ensemble $V$ deux bases de l'espace $\mathbf{R}^3$ (si possible).
7. (5 points) Est-ce que le vecteur $\mathbf{x}$ peut être écrit sous la forme d'une combinaison linéaire des vecteurs de l'ensemble $V$ ? Expliquer pourquoi. Si oui, donner son expression en fonction des vecteurs de l'ensemble $V$.
8. (4 points) Est-ce que la combinaison linéaire obtenue précédemment est unique ? Expliquer pourquoi.

## Solution :

1. (4 points) Est-ce que les vecteurs de l'ensemble $V$ sont linéairement indépendants ? Expliquer pourquoi.

   NON. Les vecteurs de l'ensemble $V$ ne sont pas linéairement indépendants car il s'agit de 4 vecteurs de l'espace $\mathbf{R}^3$. Dans l'espace $\mathbf{R}^3$ on ne peut pas trouver plus de 3 vecteurs linéairement indépendants.
2. (3 points) Est-ce que les vecteurs $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ engendrent l'espace $\mathbf{R}^3$ ? Expliquer pourquoi.

   NON. Il faut minimum 3 vecteurs de l'espace $\mathbf{R}^3$ pour engendrer cet espace. Il faut exactement 3 vecteurs linéairement indépendants pour engendrer $\mathbf{R}^3$.
3. (4 points) Est-ce que les vecteurs $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ engendrent l'espace $\mathbf{R}^2$ ? Expliquer pourquoi.

   Les vecteurs $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ ne peuvent pas engendrer l'espace $\mathbf{R}^2$ car ils sont des vecteurs de $\mathbf{R}^3$. Ils engendrent un sous-espace de dimension 2 dans $\mathbf{R}^3$.
4. (8 points) Calculez la forme échelon réduit de la matrice formée par les colonnes $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ et $\mathbf{x}$.

On écrit la matrice augmentée du système et on cherche sa forme échelon réduite :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 & \mathbf{v}_4 & \mathbf{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xlongequal{L_2+L_1\to L_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xlongequal{L_3+2L_1\to L_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xlongequal{-3L_3+5L_2\to L_3}$$

$$\approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -3 \end{pmatrix} \xlongequal{(L_2-2L_3)/3\to L_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xlongequal{L_1-2L_2-L_3\to L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

5. (3 points) Est-ce que les vecteurs de l'ensemble $V$ engendrent l'espace $\mathbf{R}^3$ ? Expliquer pourquoi.

   Pour que les vecteurs de l'ensemble $V$ engendrent l'espace $\mathbf{R}^3$ il faut qu'il y ait parmi eux a moins 3 vecteurs linéairement indépendants. À partir de la forme échelon réduit retrouvée précédemment, on peut conclure que parmi les vecteurs de l'ensemble $V$ il y a trois qui sont linéairement indépendants (car parmi les 4 premières colonnes de la matrice précédente il y en a 3 qui sont des colonnes pivot).

6. (4 points) Trouver parmi les vecteurs de l'ensemble $V$ deux bases de l'espace $\mathbf{R}^3$ (si possible).

   Une base pour l'espace $\mathbf{R}^3$ est l'ensemble de vecteurs $\mathcal{B}_1 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$. Une deuxième base est $\mathcal{B}_2 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4\}$.

7. (5 points) Est-ce que le vecteur $\mathbf{x}$ peut être écrit sous la forme d'une combinaison linéaire des vecteurs de l'ensemble $V$ ? Expliquer pourquoi. Si oui, donner son expression en fonction des vecteurs de l'ensemble $V$.

   Les vecteurs de l'ensemble $V$ engendrent l'espace $\mathbf{R}^3$, ce qui veut dire que tout vecteur de l'espace $\mathbf{R}^3$ peut être écrit sous la forme d'une combinaison linéaire des vecteurs de l'ensemble $V$.

   Pour écrire le vecteur $\mathbf{x}$ sous la forme d'une combinaison linéaire des vecteurs de l'ensemble $V$ il faut trouver les scalaires $c_1$, $c_2$, $c_3$ et $c_4$ tels que :

   $$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 + c_4\mathbf{v}_4 = \mathbf{x}$$

   À partir de cette forme échelon réduite on peut conclure que le vecteur $\mathbf{x}$ peut être exprimée par la formule :

   $$\mathbf{x} = 2\mathbf{v}_2 - 3\mathbf{v}_3$$

8. (4 points) Est-ce que la combinaison linéaire obtenue précédemment est unique ? Expliquer pourquoi.

   NON. La combinaison linéaire obtenue n'est pas unique. Il en existe une infinité. On peut remarquer que le système d'équations linéaire dont la matrice augmentée est

   $$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 & \mathbf{v}_4 & \mathbf{x} \end{pmatrix}$$

   est un système consistant à solution multiple.

 

## Problème 4 (      / 20)

Soit le système d'équations $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1-a & -1 & 1 \\ 2 & -a & -1 \\ 1 & 0 & -a \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. (10 points) Trouver les valeurs du paramètre $a$ pour que le système soit consistant et qu'il possède une solution unique.
2. (10 points) Trouver la solution du système à l'aide de la méthode de Cramer, en fonction du paramètre $a$, pour toutes les valeurs de $a$ qui ont été trouvées précédemment.

## Solution :

1. (10 points) Trouver les valeurs du paramètre $a$ pour que le système soit consistant et qu'il possède une solution unique.

   Pour que le système d'équations soit un système consistant et pour qu'il possède une solution unique il faut que son déterminant soit non nul.

$$\begin{aligned}
\det A &= \begin{vmatrix} 1-a & -1 & 1 \\ 2 & -a & -1 \\ 1 & 0 & -a \end{vmatrix} \xlongequal{C_1+C_2+C_3 \to C_1} \\
&= \begin{vmatrix} 1-a & -1 & 1 \\ 2 & -a & -1 \\ 1 & 0 & -a \end{vmatrix} \xlongequal{L_2-L_1 \to L_2 \quad , \quad L_3-L_1 \to L_3} \\
&= \begin{vmatrix} 1-a & -1 & 1 \\ 0 & -a+1 & -2 \\ 0 & 1 & -a-1 \end{vmatrix} \\
&= (1-a)\begin{vmatrix} -a+1 & -2 \\ 1 & -a-1 \end{vmatrix} \\
&= (1-a)\Big[(-a+1)(-a-1)+2\Big] = (1-a)(a^2-1+2) = (1-a)(a^2+1)
\end{aligned}$$

   Le déterminant de la matrice $A$ est non nul si et seulement si $a \neq 1$ (et si on considère les nombres complexes : $a \neq \pm i$).

2. (10 points) Trouver la solution du système à l'aide de la méthode de Cramer, en fonction du paramètre $a$, pour toutes les valeurs de $a$ qui ont été trouvées précédemment.

   La méthode de Cramer consiste à trouver les déterminants $\det A_1$, $\det A_2$ et $\det A_3$ qui sont obtenus en remplaçant la colonne 1, 2 et 3 respectivement, dans le déterminant de la matrice $A$. Ensuite, la solution du système est donnée par :

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} \qquad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} \qquad x_3 = \frac{\det A_3}{\det A}$$

 

Calculons maintenant les déterminants $\det A_1$, $\det A_2$ et $\det A_3$ :

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -a & -1 \\ 0 & 0 & -a \end{vmatrix} = 2a^2$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 1-a & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -a \end{vmatrix} = (-2)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -a \end{vmatrix} = 2(2a-1)$$

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 1-a & -1 & 2 \\ 2 & -a & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & -a \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2a$$

La solution du système est donc :

$$x_1 = \frac{2a^2}{(1-a)(a^2+1)} \qquad x_2 = \frac{2(2a-1)}{(1-a)(a^2+1)} \qquad x_3 = \frac{2a}{(1-a)(a^2+1)}$$