GEL19962 : Analyse des signaux

Mini-test 2 A2008 : Solutions

Département de génie électrique et de génie informatique

Problème 1 (1 pt)

On demande si les énoncés sont vrai où faux...

a)

On demande si $G(\omega) \times H(\omega)$ correspond à la transformée de Fourier de $h(t) * g(t)$. Cet énoncé est bien sûr **vrai** (voir notes §6.3.2).

b)

On demande si la fonction $\mathrm{Rect}(t-a)$ est la réponse impulsionnelle d'un filtre causal pour tout $a > 1/2$. Le réponse impulsionelle du filtre sera non nulle pour les t négatifs seulement avec les a plus petit que $1/2$. Donc l'énoncé est **vrai**.

c)

Soit un système linéaire invariant ayant une fonction de transfert réelle et paire. Ce système peut-il être causal ? Si la fonction de transfert est paire et réelle, la réponse impulsionnelle doit être paire (§3.3.2)... donc, *a priori* non causale. Toutefois, si la fonction de transfert est constante, la réponse impulsionnelle est un delta dirac. Dans ce cas précis, le système est alors causal ! L'énoncé est donc **vrai** : le système peut, dans certains cas précis, être causal.

d)

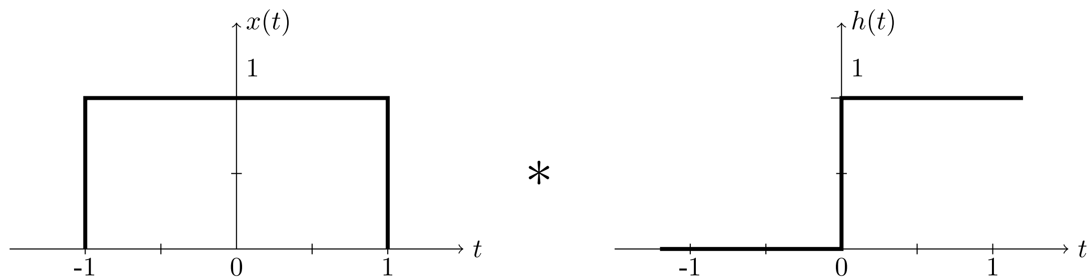
Soit un système défini par $h(t) = \delta(t)$. Si l'entrée de ce système est $u(t)$, la sortie sera alors aussi $u(t)$. Ce énoncé est bien sûr **vrai**.

Problème 2 (2 pt)

On demande d'abord de calculer la convolution $y(t) = x(t) * h(t)$ avec $x(t) = \mathrm{Rect}(t/2)$ et $h(t) = u(t)$:

$$\{x * h\}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)x(t-u)\mathrm{d}u\,. \tag{1}$$

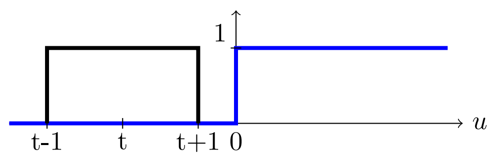
Graphiquement, on a :



Les zones d'intégration suivantes peuvent être identifiés : pour $t \in \,]-\infty,-1]$, pour $t \in \,[-1,1[$, pour $t \in \,[1,+\infty[$.

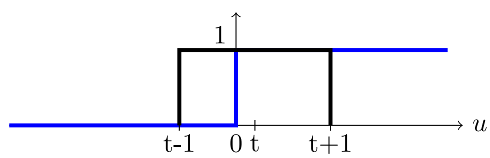
Pour t inférieur à -1, $y(t) = 0$ puisque à la fois $x(t)$ et $h(t)$ sont nuls.

$$y(t) = 0$$



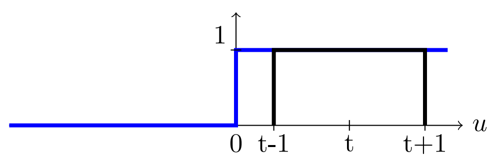
Pour t entre -1 et 1, on a :

$$y(t) = \int_{0}^{t+1} 1 \, \mathrm{d}u = t+1\,.$$



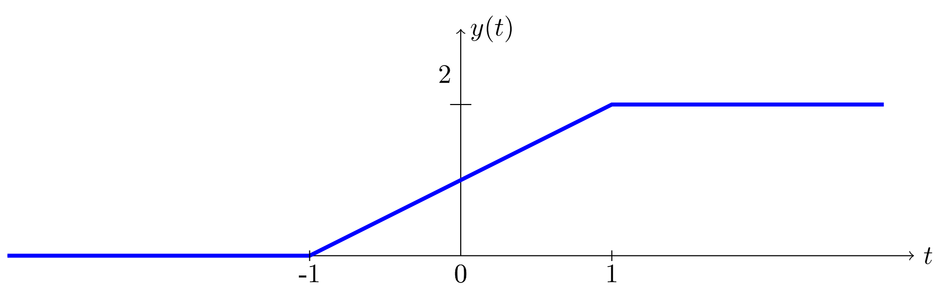
Pour t plus grand que 1, on a :

$$y(t) = \int_{t-1}^{t+1} 1 \, \mathrm{d}u = t+1-(t-1) = 2\,.$$



Finalement, on a :

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad t < -1 \\ t+1 & \text{pour} \quad -1 \leq t \leq 1 \\ 2 & \text{pour} \quad t > 1 \end{cases} \tag{2}$$



On demande d'interpréter le résultat de $y(t)$ lorsque t tend vers l'infini. Il s'agit de l'aire sous la courbe du signal à l'entrée... c'est un intégrateur !

Problème 3 (2 pt)

On demande de calculer la convolution de $x(t) = A\cos(t + \phi_A)$ avec un filtre de premier ordre $h(t) = \mathrm{e}^{-t}u(t)$. On fait remarquer que $H(\omega) = 1/(1 + \mathrm{j}\omega)$.

Puisqu'il s'agit de trouve la réponse du filtre à une excitation harmonique, on a simplement à trouver (voir §6.2.3) :

$$y(t) = A \cdot |H(\omega_0)| \cos\left[\omega_0 t + \phi_A + \mathrm{Arg}(H(\omega_0))\right] , \tag{3}$$

où $\omega_0 = 1$.

On trouve que :

$$|H(1)| = \left|\frac{1}{1+\mathrm{j}}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}} , \tag{4}$$

et que

$$\mathrm{Arg}(H(1)) = 0 - \mathrm{atan}(1) = -\frac{\pi}{4} . \tag{5}$$

On peut finalement écrire :

$$y(t) = A \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left[t + \phi_A - \frac{\pi}{4}\right] , \tag{6}$$