GEL-2001 83320 : Analyse des signaux

Mini-test 1 A2010 : Solutions

Département de génie électrique et de génie informatique

Problème 1 (1 pt)

a)

On demande d'identifier les coefficients de la série de Fourier pour la fonction suivante :

$$f(t) = 3 + 4\sin(8t) + 2\cos(2t) + 3\sin(18t).$$

Par inspection, on trouve d'abord que $\omega_0 = 2$, ce qui nous donne :

$$f(t) = 3 + 4\sin(4\omega_0 t) + 2\cos(\omega_0 t) + 3\sin(9\omega_0 t).$$

En utilisant les relations d'Euler, on trouve la fonction sous sa forme exponentielle :

$$f(t) = 3 + \frac{2}{\mathrm{j}}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}4\omega_0 t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}4\omega_0 t}\right] + \left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}\right] + \frac{3}{2\,\mathrm{j}}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}9\omega_0 t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}9\omega_0 t}\right].$$

À partir de cette dernière expression, il est possible de retrouver les termes associés aux coefficients de Fourier...

$$f(t) = \underset{\substack{\uparrow \\ F(0)}}{3} + \underset{\substack{\uparrow \\ F(4)}}{\tfrac{2}{\mathrm{j}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}4\omega_0 t}} - \underset{\substack{\uparrow \\ F(-4)}}{\tfrac{2}{\mathrm{j}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}4\omega_0 t}} + \underset{\substack{\uparrow \\ F(1)}}{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}} + \underset{\substack{\uparrow \\ F(-1)}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}} + \underset{\substack{\uparrow \\ F(9)}}{\tfrac{3}{2\,\mathrm{j}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}9\omega_0 t}} - \underset{\substack{\uparrow \\ F(-9)}}{\tfrac{3}{2\,\mathrm{j}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}9\omega_0 t}}.$$

Finalement, on trouve les différents coefficients nous permettant ainsi de déduire que la réponse est :

$$F(0) = 3, \quad F(4) = -2\,\mathrm{j}, \quad F(-4) = 2\,\mathrm{j}, \quad F(1) = 1, \quad F(-1) = 1, \quad F(9) = -\tfrac{3\,\mathrm{j}}{2} \quad \text{et} \quad F(-9) = \tfrac{3\,\mathrm{j}}{2}.$$

b)

On demande ensuite la puissance dans la seconde, la troisième et la quatrième harmonique, séparément.

Pour trouver la puissance d'une harmonique n, il suffit de faire :

$$P(n) = |F(-n)|^2 + |F(n)|^2.$$

La réponse est donc :

$$P(2) = 0, \quad P(3) = 0 \quad \text{et} \quad P(4) = |F(-4)|^2 + |F(4)|^2 = |2\,\mathrm{j}|^2 + |-2\,\mathrm{j}|^2 = 4 + 4 = 8.$$

Problème 2 (1 pt)

Soit la fonction :

$$f(t) = (t^2 - 3)\cos(t).$$

définie sur une période $[-2\pi, 2\pi]$.

Premièrement, on peut voir que la fonction $f(t)$ est réelle, car elle ne possède pas de partie imaginaire. Deuxièmement, $f(t)$ est composée de la multiplication de deux fonctions paires : $\cos(t)$ et une parabole positive centrée à (0, -3). Donc, $f(t)$ est réelle est paire.

a)

On demande si $F^*(n) = F(n)$. Lorsque $f(t)$ est réelle, $F^*(n) = F(-n)$. Toutefois, si $f(t)$ est paire, $F(n)$ est réel et pair. Dans ce cas préci $F^*(n) = F(n)$ et $F^*(n) = F(-n)$. Donc l'énoncé est **VRAI**.

b)

On demande si la série de Fourier de $f(t)$ est impaire. Puisque $f(t)$ est paire, $F(n)$ est réel et pair. Donc, cet énoncé est **FAUX**.

c)

On demande si $B(n) = 0\ \forall\ n$. Dans les notes de cours, on définit $F(n) = A(n) + \mathrm{j}B(n)$. Puisque $f(t)$ est paire, $F(n)$ est réel et pair. Donc $B(n) = 0\ \forall\ n$ et l'énoncé est **VRAI**.

d)

Dans les notes de cours, on définit $F(n) = A(n) + \mathrm{j}B(n)$. Après l'énoncé c), on sait que $B(n) = 0$. Ensuite, on voit bien que pour avoir une phase nulle à un instant n, il faut que $A(n)$ soit positif (il suffit de s'imaginer le vecteur $F(n)$ sur le cercle unitaire pour bien comprendre).

Il est possible de calculer tous les coefficients de la série de Fourier de la fonction $f(t)$ pour voir qu'il y en a des négatifs, mais pour commencer, on regarde si la somme des coefficients est positive. Si cette somme est négative, il y a au moins un coefficient négatif dans la série. En effet si :

$$f(t) = \sum_{n=\infty}^{\infty} F(n)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_0 t}$$

on obtient la somme des coefficients de la série de Fourier en évaluant $f(t)$ à $t = 0$:

$$f(0) = \sum_{n=\infty}^{\infty} F(n).$$

$$f(0) = (0^2 - 3)\cos(0) = -3.$$

Donc l'énoncé est **FAUX**, car il y a au moins un $F(n)$ qui possède une phase non nulle.

e)

On demande si $|F(n)|$ est nul pour tout n. Étant donné que $f(t)$ n'est pas nulle, $F(n)$ ne peut pas être nul. Donc, cet énoncé est **FAUX**.

Problème 3 (3 pt)

On demande de calculer les coefficients $F(n)$ de la fonction périodique $f(t) = \cos(\pi t)$.

Par inspection du graphique ou de l'expression de $f(t)$, on trouve d'abord la période et la pulsation (fréquence angulaire) de la fonction périodique :

$$T_0 = 1, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi\,.$$

Les coefficients de la série de Fourier peuvent être trouvés directement en appliquant la définition de $F(n)$:

$$
\begin{aligned}
F(n) &= \frac{1}{T_0} \int\limits_{-T_0/2}^{T_0/2} f_p(t)\mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t \quad = \int_{-0.5}^{0.5} f_p(t)\mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t\,, \\
&= \int_{-0.5}^{0.5} \cos(\pi t)\mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t \quad = \int_{-0.5}^{0.5} \frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi t} + \mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}\pi t}\right]\mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t\,, \\
&= \frac{1}{2}\int_{-0.5}^{0.5} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi t}\cdot \mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_{-0.5}^{0.5} \mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}\pi t}\cdot \mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t\,, \\
&= \frac{1}{2}\int_{-0.5}^{0.5} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi t-\,\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_{-0.5}^{0.5} \mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}\pi t-\,\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t\,,
\end{aligned}
$$

ce qui devient, après intégration :

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{e}^{(\,\mathrm{j}\pi-\,\mathrm{j}n\omega_0)t}}{\mathrm{j}\pi-\mathrm{j}n\omega_0}\right]_{t=-0.5}^{0.5} + \frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{e}^{(-\,\mathrm{j}\pi-\,\mathrm{j}n\omega_0)t}}{-\,\mathrm{j}\pi-\mathrm{j}n\omega_0}\right]_{t=-0.5}^{0.5}\,, \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/2-\,\mathrm{j}n\omega_0/2}}{\mathrm{j}\pi-\mathrm{j}n\omega_0} - \frac{\mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}\pi/2+\,\mathrm{j}n\omega_0/2}}{\mathrm{j}\pi-\mathrm{j}n\omega_0}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}\pi/2-\,\mathrm{j}n\omega_0/2}}{-\,\mathrm{j}\pi-\mathrm{j}n\omega_0} - \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/2+\,\mathrm{j}n\omega_0/2}}{-\,\mathrm{j}\pi-\mathrm{j}n\omega_0}\right]\,, \\
&= \frac{1}{2\,\mathrm{j}}\frac{1}{(\pi-n\omega_0)}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\pi/2-n\omega_0/2)} - \mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}(\pi/2-n\omega_0/2)}\right) + \frac{1}{2\,\mathrm{j}}\frac{1}{(-\pi-n\omega_0)}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(-\pi/2-n\omega_0/2)} - \mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}(-\pi/2-n\omega_0/2)}\right)\,, \\
&= \frac{1}{(\pi-n\omega_0)}\sin(\pi/2-n\omega_0/2) + \frac{1}{(-\pi-n\omega_0)}\sin(-\pi/2-n\omega_0/2)\,, \\
&= \frac{1}{(\pi-n2\pi)}\sin(\pi/2-n\pi) + \frac{1}{(\pi+n2\pi)}\sin(\pi/2+n\pi)\,, \\
&= \frac{(-1)^n}{(\pi-n2\pi)} + \frac{(-1)^n}{(\pi+n2\pi)}\,. \\
&= \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^n}{(1-4n^2)}\,.
\end{aligned}
$$