GEL19962 : Analyse des signaux

Examen 1 A2005 : Solutions

Département de génie électrique et de génie informatique

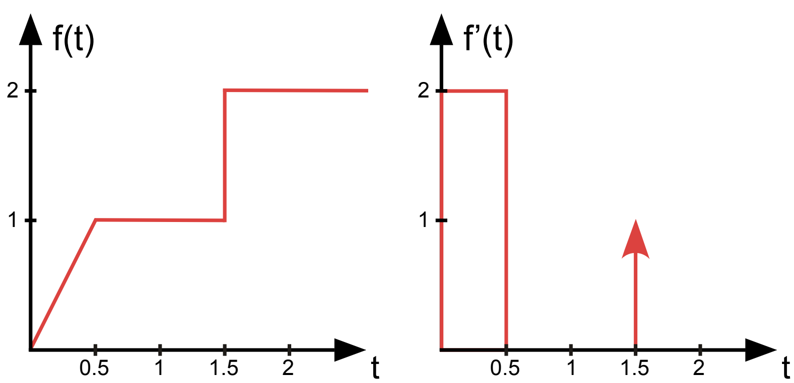
Question 1 (11 pts)

Partie A (7 pts)

Méthode 1

Dans un premier temps, on demande de calculer le transformation de Fourier de la fonction présentée à la figure 1-a. Il est d'abord important de remarque que cette fonction n'est pas bornée et est constante de $t = 1.5$ à $t = \inf$. Tout de suite on doit voir que cette fonction possède une valeur moyenne (un DC). Cette observation sera importante à plusieurs reprises plus loin dans le problème.

La méthode la plus simple pour résoudre ce problème est d'utiliser la méthode de la dérivation. On peut d'abord dériver une première fois (figure 1-b), puis une seconde fois (figure 2). Il est important de noter, dans la première dérivée, que la fonction $f(t)$ a une discontinuité de hauteur 1 à $t = 1.5$. En dérivant, on se retrouve avec une impulsion ayant un poids de 1 et non de 2.



(a) (b)

Fig. 1 – (a) Fonction $f(t)$ et (b) Dérivée première de $f(t)$.

Après avoir dérivé deux fois graphiquement on trouve l'expression correspondante :

$$f''(t) = 2\delta(t) - 2\delta(t - 0.5) + \delta'(t - 1.5)\,, \tag{1}$$

et sa transformée de Fourier :

$$\ddot{F}(\omega) = 2 - 2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega/2} + \mathrm{j}\omega\mathrm{e}^{-\mathrm{j}3\omega/2}\,. \tag{2}$$

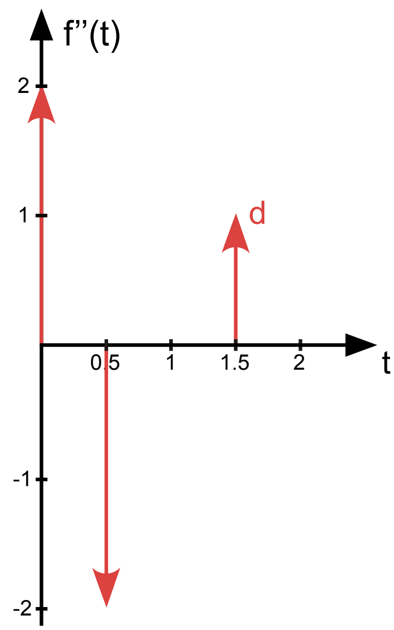


FIG. 2 – Dérivée seconde de $f(t)$.

En utilisant la propriété de la dérivation

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} f(t) \Leftrightarrow (\mathrm{j}\omega)^n F(\omega)\,, \tag{3}$$

on peut retrouver la transformation de Fourier de $f(t)$ en divisant une première fois par $\mathrm{j}\omega$

$$\dot{F}(\omega) = \frac{1}{\mathrm{j}\omega}\left[2 - 2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega/2} + \mathrm{j}\omega\mathrm{e}^{-\mathrm{j}3\omega/2}\right]\,, \tag{4}$$

puis une seconde fois par $\mathrm{j}\omega$

$$F(\omega) = \frac{1}{(\mathrm{j}\omega)^2}\left[2 - 2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega/2} + \mathrm{j}\omega\mathrm{e}^{-\mathrm{j}3\omega/2}\right]\,. \tag{5}$$

Ceci n'est toutefois pas encore la réponse recherchée puisqu'elle ne tient pas compte de la valeur moyenne, perdue lors de la dérivation. La valeur moyenne étant de 1, il ne reste plus qu'à ajouter la transformation de Fourier correspondante au terme que nous avons déjà obtenus pour avoir la transformation de Fourier de $f(t)$:

$$F(\omega) = \frac{1}{(\mathrm{j}\omega)^2}\left[2 - 2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega/2} + \mathrm{j}\omega\mathrm{e}^{-\mathrm{j}3\omega/2}\right] + 2\pi\delta(\omega)\,. \tag{6}$$

Méthode 2

Une autre méthode intéressante pour résoudre ce problème serait de dériver une seule fois (figure 1-b), puis calculer la transformation de Fourier avec le rectangle et l'impulsion.

Partant de l'expression de $f'(t)$:

$$f'(t) = 2\,\mathrm{Rect}\left(\frac{t-0.25}{0.5}\right) + \delta(t-1.5)\,, \tag{7}$$

on trouve, directement, avec les définitions de la T.F. d'un rectangle et d'une impulsion avec décalage, la transformation de Fourier de cette expression :

$$\dot{F}(\omega) = (0.5)2\mathrm{Sa}\left(\frac{0.5\omega}{2}\right)\mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}0.25\omega} + \mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}1.5\omega}\,. \tag{8}$$

Il ne reste plus qu'à diviser par $\mathrm{j}\omega$ et qu'à rajouter la composante provenant de la valeur moyenne, tel que présenté dans la première méthode :

$$F(\omega) = \frac{\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega}{4}\right)\mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}0.25\omega} + \mathrm{e}^{-1.5\omega}}{\mathrm{j}\omega} + 2\pi\delta(\omega)\,. \tag{9}$$

Partie B (1 pts)

On demande de calculer l'énergie du signal. Or, ce signal possède une valeur moyenne (DC). Ce signal aura donc une énergie infinie.

Partie C (2 pts)

On demande de calculer la puissance. Normalement un signal non périodique possède une puissance nulle. Or, comme dans le cas présent il y a une valeur moyenne, ce ne sera pas le cas. Selon le théorème de Parseval, la puissance est donnée par la somme des coefficients de Fourier au carré. Ici, le seul coefficient sera $F(0)$, correspondant au DC.

$$P = \sum |F(n)|^2 = |F(0)|^2 = |1|^2 = 1\,. \tag{10}$$

Partie D (1 pts)

La fonction $f(t)$ étant discontinue, la le taux de décroissance des lobes de la transformée $F(\omega)$ sera en $1/\omega$.

Question 2 (12 pts)

Dans la question 2 utilise la une fonction gaussienne et sa transformation de Fourier. La figure 3 présente le tracé de cette fonction gaussienne et sa transformation de Fourier.

NOTE : Observation intéressante, la TF d'une gaussienne est aussi une gaussienne. Cette forme est une forme que l'on retrouve très souvent en génie dans tous les domaines se rattachant de près ou de loin à l'analyse des signaux.

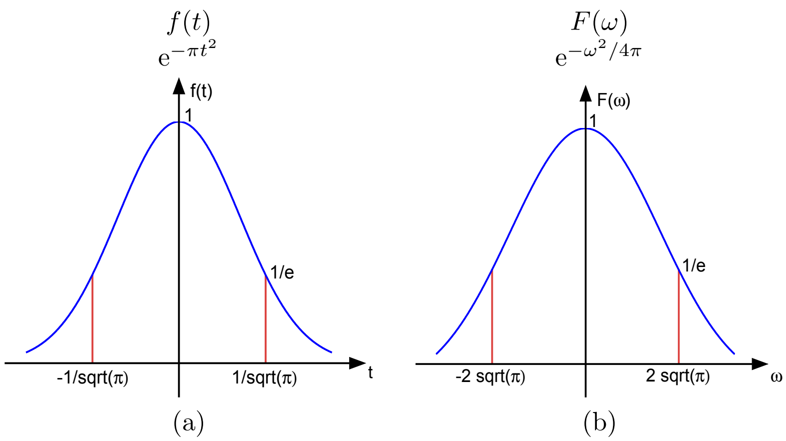


FIG. 3 – (a) Fonction $f(t)$ et (b) sa transformation de Fourier $F(\omega)$.

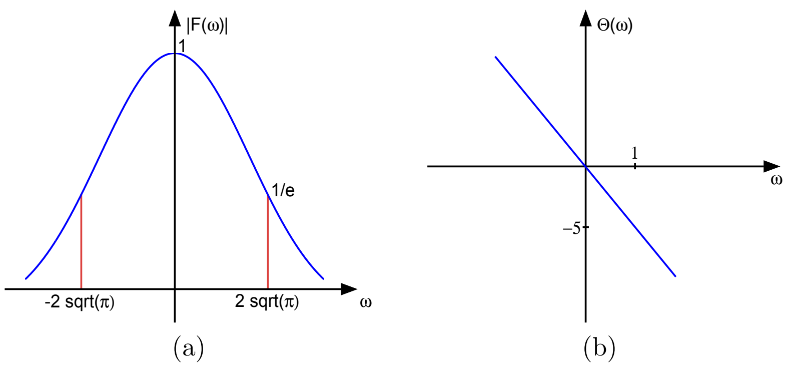


FIG. 4 – (a) Module et (b) Phase de $\mathscr{F}\{f(t-5)\}$.

Partie A (4 pts)

On demande de calculer et tracer le module et la phase de $f(t-5)$, la gaussienne retardée dans le temps. On sait que le retard dans le temps se soldera par une phase dans le domaine fréquentiel. Ainsi, la TF de $f(t-5)$ sera :

$$f(t-5) \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-\omega^2/4\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}5\omega}\,. \tag{11}$$

On remarque que le module n'est pas affecté par ce retard, mais il y aura une phase avec une pente de -5. Ceci est représenté graphiquement à la figure 4.

Partie B (4 pts)

On cherche la transformation de Fourier de $4f(3t)\cos(5t)$. La multiplication avec le cosinus dans le temps correspond à une modulation, ce qui va séparer la fonction de départ en deux à +/- la fréquence du cosinus. Ceci se retrouve facilement en séparant le cosinus en exponentielles…

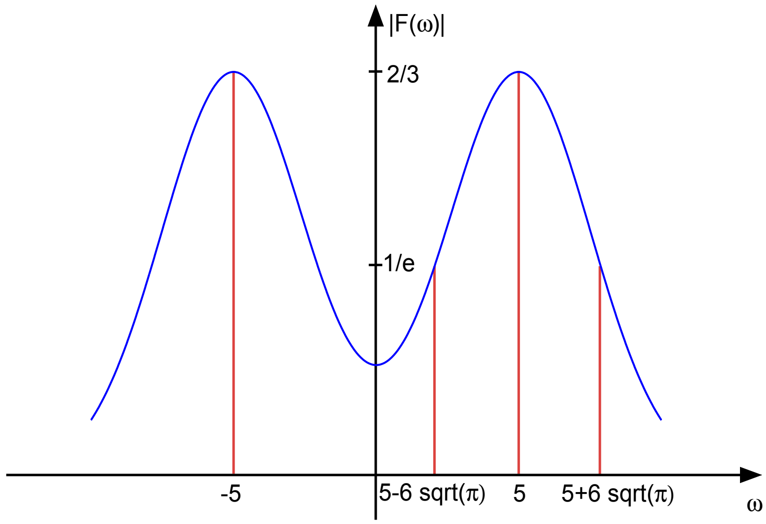


FIG. 5 – Module de $G(\omega) \Leftrightarrow 4f(3t)\cos(5t)$.

$$g(t) = 4f(3t)\cos(5t) = \frac{4}{2}f(3t)\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}5t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}5t}\right] = \frac{4}{2}f(3t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}5t} + \frac{4}{2}f(3t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}5t}\,. \tag{12}$$

De cette dernière expression on peut facilement calculer la TF de $g(t)$ en employant les propriété décalage spectral et de dilation :

$$G(\omega) = \frac{2}{3}F\left(\frac{\omega-5}{3}\right) + \frac{2}{3}F\left(\frac{\omega+5}{3}\right) = \frac{2}{3}\mathrm{e}^{-(\omega-5)^2/36\pi} + \frac{2}{3}\mathrm{e}^{-(\omega+5)^2/36\pi}\,. \tag{13}$$

On retrouve bien la TF de $4f(3t)$ décalée à $w = \pm 5$. On remarque aussi que la phase est nulle. Ce résultat est présenté graphiquement à la figure 5. Ce résultat aurait pu être retrouvé sans aucun calcul, en utilisant de façon intuitive les propriétés de la TF, dont le décalage fréquentiel (modulation) et la dilatation.

Partie C (2 pts)

Ici on demande de calculer la TF de e^{-kt^2}. On pourrait être porté à remplacer simplement π par k dans l'expression de $f(t)$ et de $F(\omega)$. Attention ! Ceci est faux... Il faut plutôt approcher le problème avec la notion de dilation (comme en 2B).

$$f(t) \Leftrightarrow F(\omega) \tag{14}$$

$$\mathrm{e}^{-\pi t^2} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-\omega^2/4\pi} \tag{15}$$

on cherche :

$$\mathrm{e}^{-kt^2} \Leftrightarrow \textbf{?}\,. \tag{16}$$

Posons :

$$f(at) \Leftrightarrow \frac{1}{a} F\left(\frac{1}{a}\right), \tag{17}$$

$$\mathrm{e}^{-\pi(at)^2} \Leftrightarrow \frac{1}{a}\mathrm{e}^{-\omega^2/4\pi a^2}. \tag{18}$$

On note que :

$$k = \pi a^2 \quad \text{et} \quad a = \sqrt{\frac{|k|}{\pi}}, \tag{19}$$

d'où on trouve que :

$$\mathrm{e}^{-kt^2} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{\pi}{|k|}}\mathrm{e}^{-\omega^2/4k}. \tag{20}$$

Partie D (1 pts)

La puissance de ce signal sera nulle puisqu'il est de carré intégrable. On sait que $f(t)$ est intégrable (sa TF est donnée). Or comme le signal est strictement positif, la valeur absolue de $f(t)$ sera aussi intégrable. Enfin, puisque la fonction est plus petite ou égale à 1 partout, l'intégrale de la valeur absolue de la fonction au carré sera toujours plus petite que l'intégrale de la valeur absolue. Bref, la fonction est de carré intégrable. Par conséquent, la puissance sera nulle.

Partie E (1 pts)

Pour la même raison qu'en 2-D, l'énergie sera finie.

Question 3 (10 pts)

Partie A (4 pts)

On demande de trouver les coefficients de Fourier d'un signal périodique constitué d'une série de triangles de largeur 2τ et d'amplitude de 1 qui se répètent à tous les nT, pour tous les n entiers.

On peut d'abord identifier la fonction restreinte ainsi que son spectre...

$$f_r(t) = \mathrm{Tri}(t/\tau) \Leftrightarrow F_r(\omega) = \tau \mathrm{Sa}^2(\omega\tau/2) = \tau\frac{\sin^2(\omega\tau/2)}{(\omega\tau/2)^2}. \tag{21}$$

En sachant que $F(n) = F_r(n\omega_0)/T_0$, on trouve que :

$$F(n) = \frac{F_r(n\omega_0)}{T_0} = \frac{\tau}{T_0}\ \frac{\sin^2(n\omega_0\tau/2)}{(n\omega_0\tau/2)^2}. \tag{22}$$

Enfin, comme $T_0 = T$

$$F(n) = \frac{\tau}{T}\ \frac{\sin^2(n\pi\tau/T)}{(n\pi\tau/T)^2}. \tag{23}$$

Partie B (2 pts)

Si on remplace τ par $T/2$ et $T/4$ dans l'expression trouvée en A, on retrouve :

$$F(n) = \frac{1}{2}\,\frac{\sin^2(n\pi/2)}{(n\pi/2)^2}\,, \tag{24}$$

et, pour $T/4$:

$$F(n) = \frac{1}{4}\,\frac{\sin^2(n\pi/4)}{(n\pi/4)^2}\,. \tag{25}$$

Partie C (2 pts)

En a), F(n) avait déjà été calculé. Ce résultat peut être utilisé pour retrouver la puissance dans la première harmonique, d'abord en cherchant $F(1)$.

$$F(1) = \frac{\tau}{T}\,\frac{\sin^2(\pi\tau/T)}{(\pi\tau/T)^2}\,. \tag{26}$$

On sait déjà que $P(1) = 2\,|F(1)|^2$. Utilisant l'expression précédente, on trouve :

$$P(1) = 2\left(\frac{\tau}{T}\right)^2\,\frac{\sin^4(\pi\tau/T)}{(\pi\tau/T)^4}\,. \tag{27}$$

Partie D (2 pts)

NOTE : Cette question (Question 3, partie D) a été annulée lors de la correction de l'examen.

On demande la progression de la puissance dans la première harmonique si on éloigne les triangles. Plus ces triangles seront éloignés les uns des autres, plus le rapport τ/T sera petit.

Partant de $F(1)$, de la question 3-C, on peut réécrire l'expression comme :

$$F(1) = (\tau/T)\frac{\sin^2(\pi(\tau/T))}{\pi(\tau/T}\,. \tag{28}$$

Si on trace cette expression en fonction de τ/T on obtient la figure 6. On remarque que cette progression est ascendante sur une partie puis descendante sur une autre à mesure que la distance entre les triangles augmente (τ/T diminu).

Question 4 (7 pts)

On veut calculer $f(t)$ si $F(\omega) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\sin^2(\omega)$. On peut d'abord commencer par dériver l'expression de $F(\omega)$ pour après la simplifier.

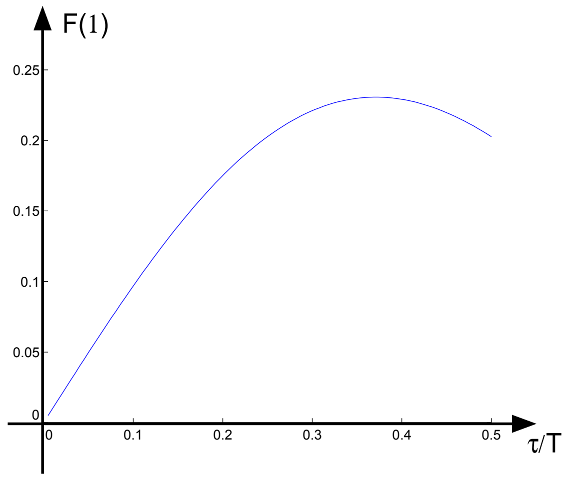


Fig. 6 – Progression de F(1) en fonction de τ/T

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\sin^2(\omega) = 2\cos(\omega)\sin(\omega)\,, \tag{29}$$

$$= 2\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}}{2}\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}}{2\,\mathrm{j}}\,, \tag{30}$$

$$= \frac{1}{2\,\mathrm{j}}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\omega}-1+1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega}\right] = \frac{1}{2\,\mathrm{j}}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\omega}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega}\right]\,, \tag{31}$$

Sachant que :

$$\delta(t) \Leftrightarrow 1 \qquad\qquad g(t+a) \Leftrightarrow G(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}a\omega}\,, \tag{32}$$

on trouve directement la transformée inverse recherchée :

$$f(t) = \frac{1}{2\,\mathrm{j}}\left[\delta(t+2)-\delta(t-2)\right]\,. \tag{33}$$