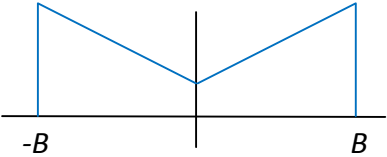
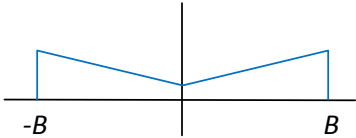
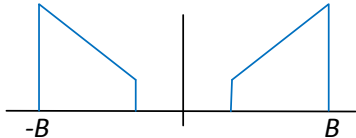
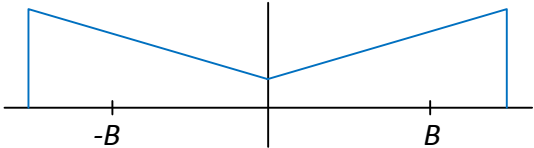


Jeudi le 11 décembre 2014; Durée: 8h30 à 10h20

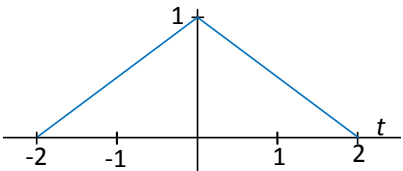
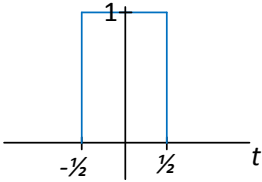
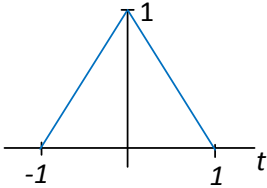
Aucune documentation permise; aucune calculatrice permise

Problème 1 (10 points sur 100)

Lequel(s) de trois systèmes suivants peut/peuvent être un système linéaire et invariant dans le temps? Justifiez votre réponse.

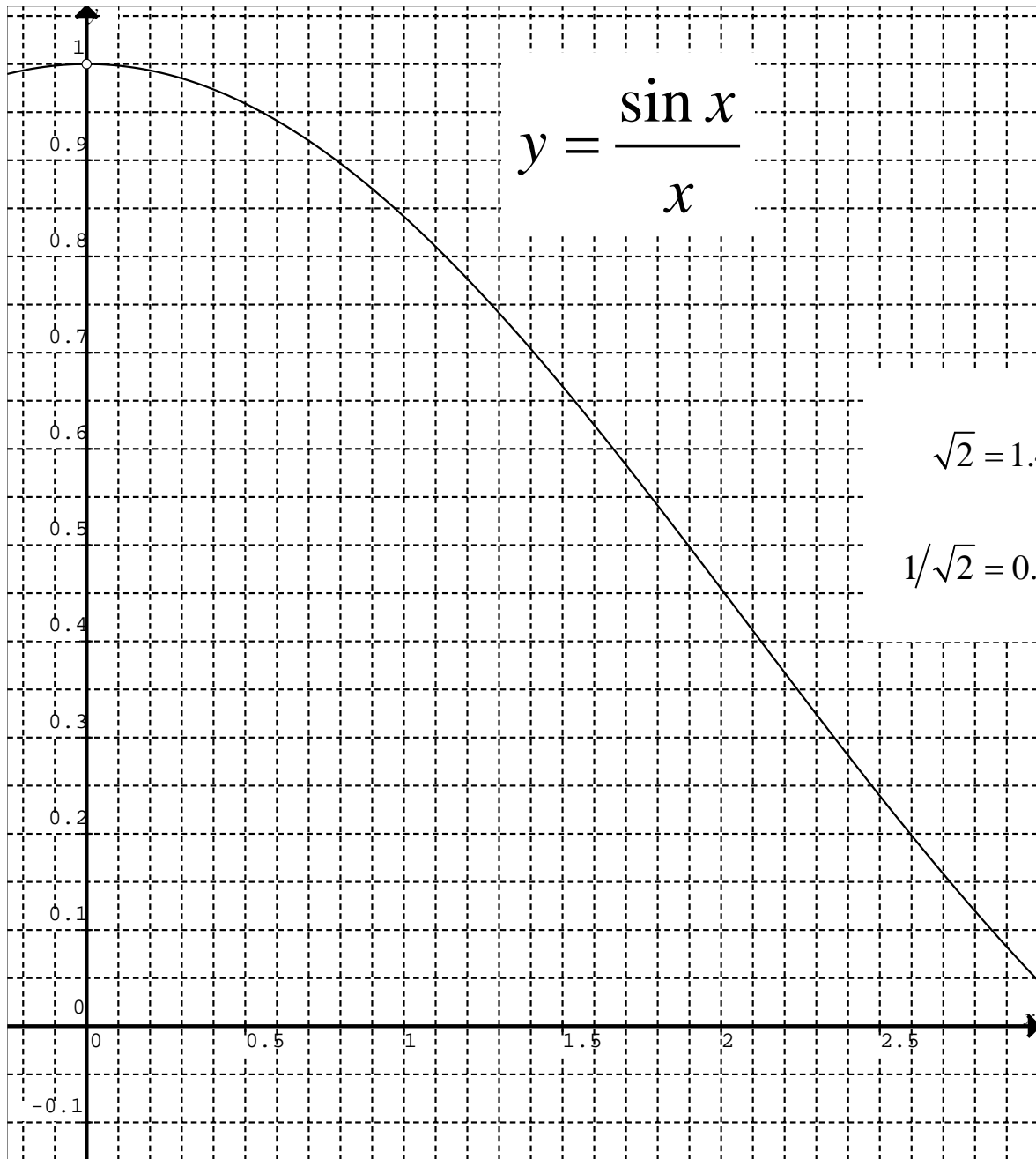
Spectre de l'entrée		Spectre de la sortie
	i)	
	ii)	
	iii)	

Problème 2 (20 points sur 100)

$x_1(t) = \text{Tri}(t/2)$	$x_2(t) = \text{Rect}(t)$	$x_3(t) = \text{Tri}(t)$
		

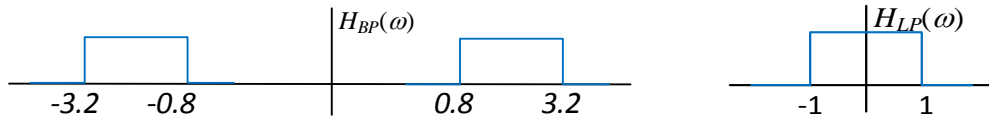
- A. (10 points) Trouver la largeur de bande 3dB de chaque signal, c.-à-d., la fréquence où la hauteur du spectre à $\omega = 0$ est réduite par un facteur de deux.
- B. (10 points) Discutez l'impact sur la largeur de bande 3 dB de
- i) la continuité du signal dans le domaine temporel, par exemple $x_2(t)$ vs. $x_3(t)$, et
 - ii) la durée du signal en temps, par exemple $x_1(t)$ vs. $x_3(t)$.

Note : le graphique de la fonction $\text{Sa}(x)$ est fourni à la page suivante pour vous aider à calculer la largeur de bande 3 dB.

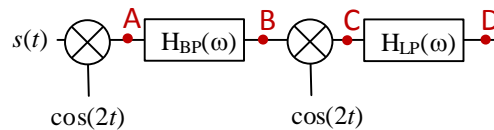


Problème 3 (30 points sur 100)

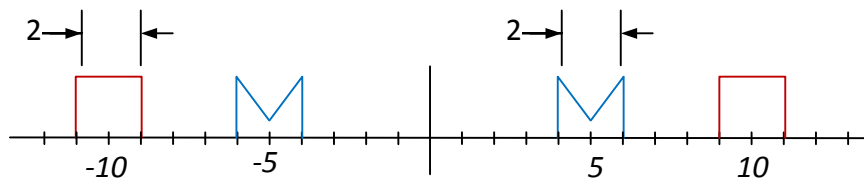
Considérez deux filtres : un filtre passe-bande $H_{BP}(\omega)$ et un filtre passe-bas $H_{LP}(\omega)$



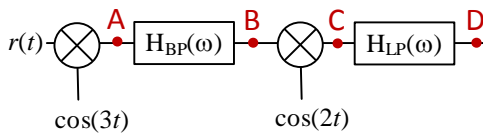
- A. (10 points) Le signal $s(t)$ avec spectre $S(\omega) = \text{Rect}(\omega)$ est l'entrée du système suivant. Donnez une esquisse du spectre aux points A, B, C et D de la figure suivante



- B. (20 points) Le signal $r(t)$ a le spectre suivant



Donnez une esquisse du spectre aux points A, B, C et D de la figure suivante



Problème 4 (40 points sur 100)

Le signal $s(t)$ a un spectre $S(\omega) = \text{Tri}(\omega)$.

A. (5points) Quels sont la fréquence de Nyquist et le taux d'échantillonnage de Nyquist?

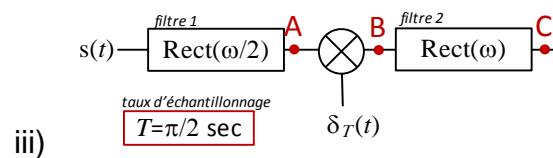
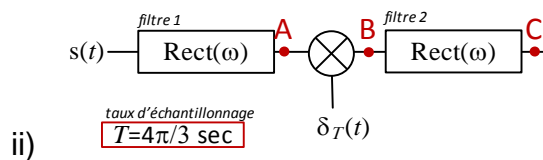
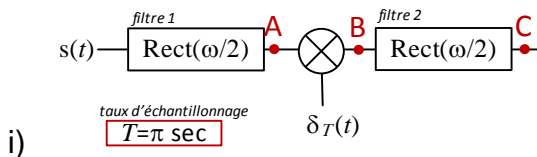
Dans les systèmes suivants, notre objectif est de numériser le signal et ensuite reconstruire le signal analogique, avec le moins de distorsion possible. Dans les trois systèmes **les filtres varient** et **le taux d'échantillonnage varie**, mais le signal est toujours le même.

B. (35 points) Pour chaque système (i, ii, iii) donnez l'information suivante

points	5	15	6	3	3	3
info	spectre au point A	spectre au point B	spectre au point C	Filtre 1 essentiel utile ou inutile	Filtre 2 essentiel utile ou inutile	Reconstruction idéale non-idéale

Justifiez votre réponse. Notons que :

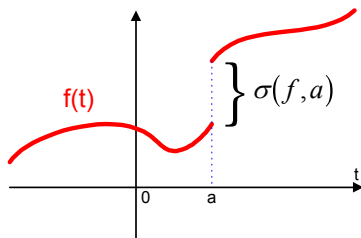
- **essentiel** veut dire qu'aucune reconstruction (idéale ou non) est possible sans le filtre,
- **utile** veut dire que la reconstruction a moins de distorsion avec ce filtre,
- **inutile** veut dire que le filtre peut être enlevé sans avoir aucun impact.



Tables de Transformées et Propriétés

Examen Final

Dérivée d'une fonction discontinue



$$(D_f)' = D_{f'} + \sigma(f, a) \delta_a$$

Manipulation sur la fonction delta

$$f(t) \delta(t) = f(0) \delta(t)$$

$$\text{et } f(t) \delta(t-a) = f(a) \delta(t-a)$$

$$f(t) * \delta(t) = f(t)$$

$$\text{et } f(t) * \delta(t-a) = f(t-a)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-jn\tau\omega} = \frac{2\pi}{\tau} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi n}{\tau}\right)$$

Séries de Fourier

$$F_{\text{série}}(n) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f_p(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad \text{et} \quad f_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_{\text{série}}(n) e^{jn\omega_0 t}$$

$$\text{Théorème de Parseval : } \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |f_p(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |F_{\text{série}}(n)|^2$$

Calcul des coefficients de Fourier d'une fonction périodique

Soit $f_r(t)$ la restriction de la fonction $f_p(t)$ sur $[-T_0/2, T_0/2]$ et

$$f_r(t) \Leftrightarrow F_r(\omega). \quad \text{Nous aurons : } F_{\text{série}}(n) = \frac{F_r(n\omega_0)}{T_0}$$

Transformée de Fourier

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad \text{et} \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$\text{Théorème de Parseval : } \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

Produit de convolution

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) g(t-u) du = \int_{-\infty}^{\infty} g(u) f(t-u) du$$

Tables de Transformées et Propriétés Examen Final

Fonction	Transformée de Fourier	Fonction	Transformée de Fourier
$f(t)$	$F(\omega)$	$\delta(t)$	1
$F(t)$	$2\pi f(-\omega)$	1	$2\pi\delta(\omega)$
$f(t+a)$	$e^{ja\omega}F(\omega)$	$\delta_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT_0)$	$\omega_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega-n\omega_0)$
$f(at)$	$\frac{1}{ a }F\left(\frac{\omega}{a}\right)$	$U(t)$	$\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$
$e^{jbt}f(t)$	$F(\omega-b)$	$\text{Sgn}(t)$	$\frac{2}{j\omega}$
$t^n f(t)$	$(j)^n \frac{d^n}{d\omega^n} F(\omega)$	$\text{Rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)^\dagger$	$\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$
$\frac{d^n}{dt^n} f(t)$	$(j\omega)^n F(\omega)$	$\text{Tri}\left(\frac{t}{\tau}\right)^\ddagger$	$\tau \text{Sa}^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$
$f(t) \times g(t)$	$\frac{1}{2\pi} F(\omega) * G(\omega)$	$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi \delta(\omega - \omega_0)$
$f(t) * g(t)$	$F(\omega) \times G(\omega)$	$\cos(\omega_0 t)$	$\pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}$	$2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(\omega - n\omega_0)$	$\sin(\omega_0 t)$	$\frac{\pi}{j} [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$
$e^{-\beta t} U(t)$	$\frac{1}{\beta + j\omega}$	$\text{Sa}(tB)$	$\frac{\pi}{B} \text{Rect}\left(\frac{\omega}{2B}\right)$
$e^{-\beta t }$	$\frac{2\beta}{\beta^2 + \omega^2}$	$\text{Sa}^2(tB)$	$\frac{\pi}{B} \text{Tri}\left(\frac{\omega}{2B}\right)$

$^\dagger \text{Rect}\left(\frac{t-t_0}{\tau}\right)$ est un rectangle de hauteur un, centré sur $t=t_0$, et de longueur τ .

$^\ddagger \text{Tri}\left(\frac{t-t_0}{\tau}\right)$ est un triangle de hauteur 1 centré sur $t=t_0$, avec une base de longueur 2τ .