

Mardi le 2 octobre 2018

Durée : 15h30-16h45

GEL-3003 – Signaux et systèmes discrets :

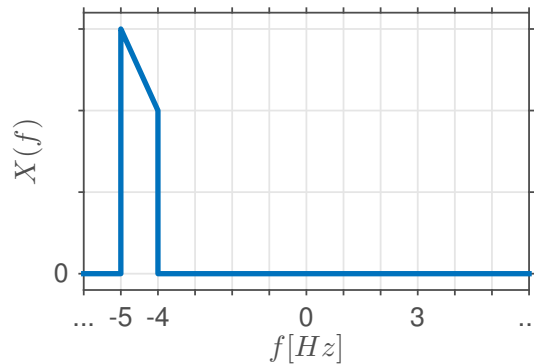
Examen 1 (correction sur 40, 10% de la note finale)

Signature : _____

Répondez sur le questionnaire.
Aucune documentation permise.
L'examen compte 4 questions de 10 points.
Laissez des traces de vos démarches.

Question 1

- a) (6 pts) Un signal sinusoïdal de fréquence $f_0 = 100$ Hz est échantillonné de façon successive à $f_s = 240$ Hz, 140 Hz et puis 30 Hz.
- Pour quel(s) taux d'échantillonnage f_s y a-t-il recouvrement spectral, s'il y a lieu?
 - Pour **chacun** des signaux discrets issus de l'échantillonnage, quelle est la fréquence du signal analogique reconstruit par un convertisseur numérique-analogique idéal (en Hz)?
- b) (4 pts) Le spectre $X(f)$ d'un signal analogique est illustré ci-bas. Ce signal est échantillonné à $f_s = 3$ Hz. Esquissez le spectre du signal échantillonné en unités de fréquence numérique pour $-2\pi \leq \omega \leq 2\pi$ rad/échantillon et identifiez l'intervalle de Nyquist.



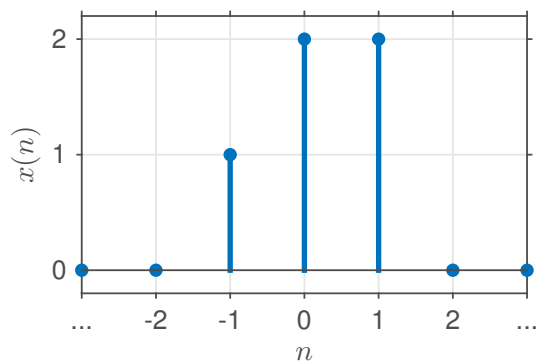
Question 2

Soit le système discret représenté par l'équation entrée-sortie suivante (la sortie est $y(n)$) :

$$y(n) = 3x(-n + 2).$$

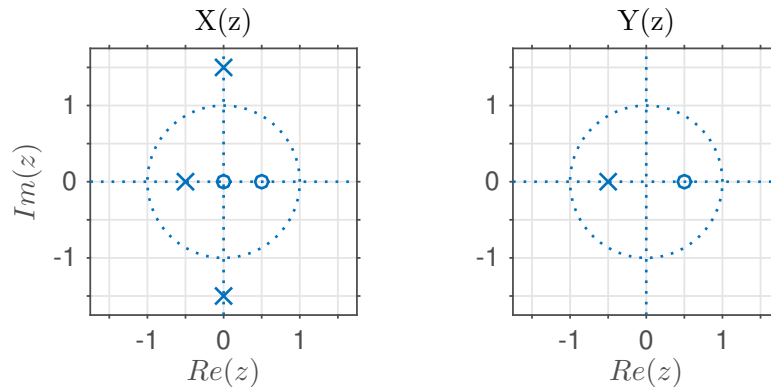
Répondez aux questions suivantes en justifiant :

- a) (4 pts) Est-ce que ce système est invariant en temps?
- b) (3 pts) Est-ce que ce système est causal?
- c) (3 pts) Tracez la sortie du système pour l'entrée affichée ci-bas.



Question 3

Le signal $y(n)$ représente la sortie d'un système LIT stable lorsque l'entrée est le signal $x(n)$. Les signaux $x(n)$ et $y(n)$ sont **stables** et sont associés aux diagrammes pôle-zéro ci-bas. Le cercle pointillé représente $|z| = 1$, les croix sont des pôles et les anneaux des zéros (pas de pôle ou zéro multiple). Vous pouvez assumer que le gain (prémultiplicateur de $X(z)$ et $Y(z)$) est $k = 1$ dans les deux cas.



Répondez aux questions suivantes :

- (2 pts) Quelle est la RDC (région de convergence) de $X(z)$?
- (2 pts) Est-ce que $x(n)$ est une séquence à droite, séquence à gauche, ou une séquence mixte?
- (2 pts) Quelle est la fonction de transfert $H(z) = Y(z)/X(z)$ du système LIT?
- (2 pts) Quelle est l'équation entrée-sortie du système LIT?
- (2 pts) Est-ce que le système LIT est causal? Réel? RIF ou RII? Justifiez brièvement.

Question 4

On peut interpréter la fonction de masse d'une variable aléatoire discrète comme étant un signal discret. Par exemple, la fonction de masse associée à la variable aléatoire « résultat d'un lancer de dé à 6 faces » est :

$$x_{1d\acute{e}}(n) = \left[\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6} \right] = \frac{1}{6} [1, 1, 1, 1, 1, 1]$$

pour $1 \leq n \leq 6$. Ici, l'indice représente un **résultat possible** ($n = 2$ signifie qu'on lance le dé et qu'on obtient 2 comme résultat) alors que la valeur $x_{1d\acute{e}}(2)$ représente la probabilité d'obtenir ce résultat possible (ici $x_{1d\acute{e}}(2) = 1/6$). Évidemment, les résultats impossibles ont probabilité 0 et ne sont donc pas considérés dans le signal discret.

La fonction de masse associée à la variable aléatoire « somme des résultats de **deux** dés à 6 faces » est donnée par la convolution $x_{2d\acute{e}s}(n) = x_{1d\acute{e}}(n) * x_{1d\acute{e}}(n)$. La fonction de masse associée à l'expérience « somme des résultats de **trois** dés à 6 faces » est, par raisonnement récursif, $x_{3d\acute{e}s}(n) = x_{1d\acute{e}}(n) * x_{1d\acute{e}}(n) * x_{1d\acute{e}}(n)$.

On s'intéresse ici à la variable aléatoire « somme des résultats de **quatre** dés à 6 faces ».

- a) (4 pts) Combien y a-t-il de résultats possibles dans $x_{4d\acute{e}s}(n)$?
- b) (6 pts) À la main, écrivez un « script » Matlab permettant de calculer et tracer tous les points de $x_{4d\acute{e}s}(n)$ en partant de rien (utilisez la fonction `conv()` de Matlab). On devrait pouvoir copier votre code dans Matlab, exécuter, puis obtenir la fonction de masse avec **le bon axe en abscisse**.
- c) (BONUS 4 pts) Dans $x_{4d\acute{e}s}(n)$, quel est le résultat le plus probable et quelle est sa probabilité?

