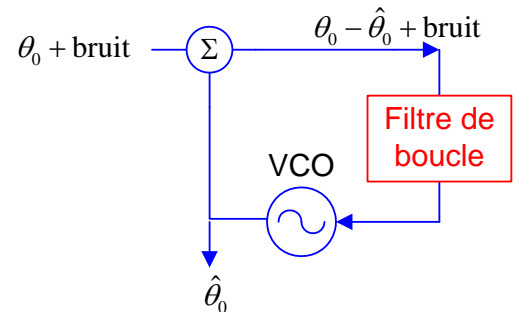


GEL10280/64486: Communications numériques 2009 Examen final

*Mercredi le 29 avril 2009; Durée: 13h30 à 15h20
Documentation fournie; une calculatrice permise*

Problème 1 (25 points sur 100)

Voici un graphique d'un PLL exploitant l'approximation de linéarité. Le VCO a un gain K . Le filtre de boucle est d'ordre zéro, soit un filtre passe-tout. La phase à l'entrée θ_0 est nulle, mais au temps zéro, la phase saute de zéro radian à deux radians. Le temps d'un symbole est $T=1$ milliseconde.



- A. (10 points) Trouvez le gain K nécessaire pour que la réponse $\hat{\theta}_0$ atteigne, avant 8 intervalles de symbole,
- i. 95% de la vraie valeur de la phase
 - ii. 80% de la vraie valeur de la phase
- B. (5 points) Pour chacune des deux réponses de la partie A, quelle est la fréquence 3-dB de la fonction de transfert en boucle fermée (soit la fréquence où le module a diminué de la moitié de sa valeur maximale)?
- C. (10 points) Discutez le compromis entre la réponse dynamique et la réponse stochastique du PLL implicite dans le choix i) et ii) de la partie A.

$f(t)$	$F(j\omega)$
$\frac{1}{\omega_0} u(t) [1 - e^{-\omega_0 t}]$	$\frac{1}{j\omega} \frac{1}{j\omega + \omega_0}$
$\frac{1}{\omega_0} u(t) \left[t - \frac{1 - e^{-\omega_0 t}}{\omega_0} \right]$	$\frac{1}{(j\omega)^2} \frac{1}{j\omega + \omega_0}$
$1 - \frac{e^{-\zeta \omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \left(\omega_n t \sqrt{1 - \zeta^2} + \cos^{-1} \zeta \right)$	$\frac{1}{j\omega} \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + j\omega 2\zeta \omega_n + \omega_n^2}$

Problème 2 (20 points sur 100)

Voici la matrice de contrôle pour un code en bloc:

$$H^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

C. (10 points) Donnez la table des syndromes.

D. (10 points) Complétez la table suivante.

Données reçues	syndrome	erreur	Mot de code après décodage (6 bits)	Messages après décodage (3 bits)
0 1 0 1 1 0				
1 1 0 0 1 0				

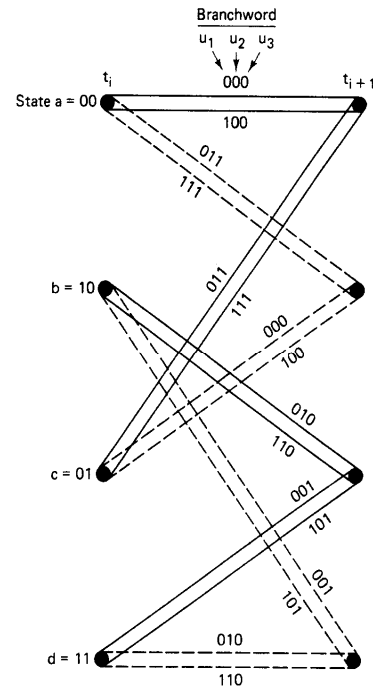
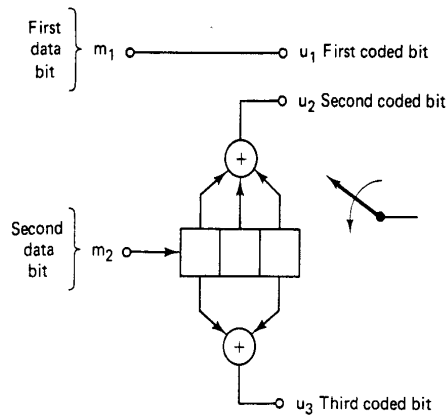
Mettez cette feuille dans votre cahier bleu.

NOM :

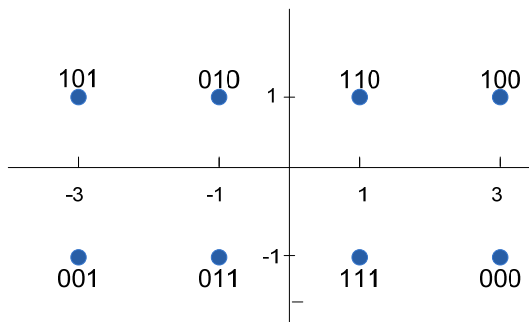
Matricule :

Problème 3 (10 points sur 100)

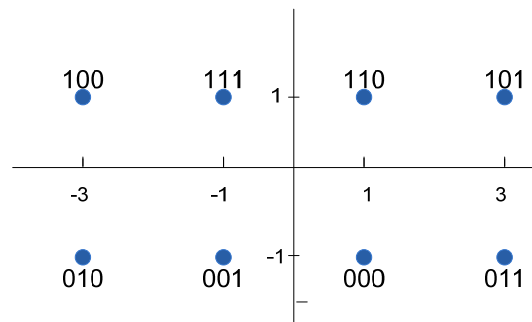
Voici un encodeur TCM.



Considérez pour le 8 QAM les deux correspondances suivantes entre les symboles logiques et les coordonnées I/Q. Laquelle des deux correspondances sera la plus performante pour le TCM, et pourquoi?



Option A



Option B

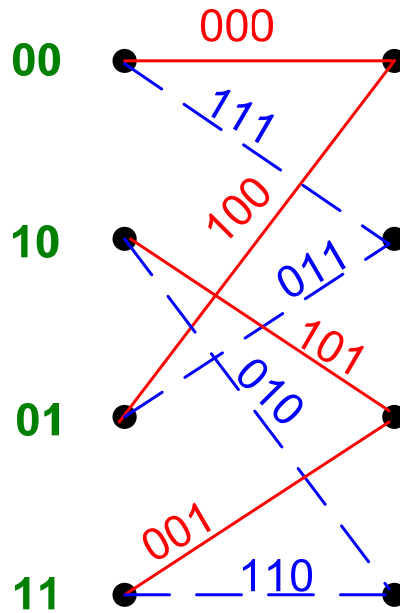
Problème 4 (15 points sur 100)

L'utilisateur désiré dans un système DS-CDMA est situé à l'extrémité d'une cellule. Le contrôle de puissance ne peut donc pas assurer que les signaux des interférents arrivent avec la même énergie que le signal de l'utilisateur désiré. En effet, chaque interférent est reçu avec une énergie qui est 3 fois l'énergie de l'utilisateur désiré.

Pour un rapport E_b/N_0 de 20 dB et un gain d'étalement de 250, combien d'utilisateurs au plus peuvent être supportés et garantir un taux d'erreur de 10^{-4} pour l'utilisateur désiré en supposant une modulation QPSK?

Problème 5 (30 points sur 100)

Considérons le treillis d'encodage suivant pour un code convolutif.



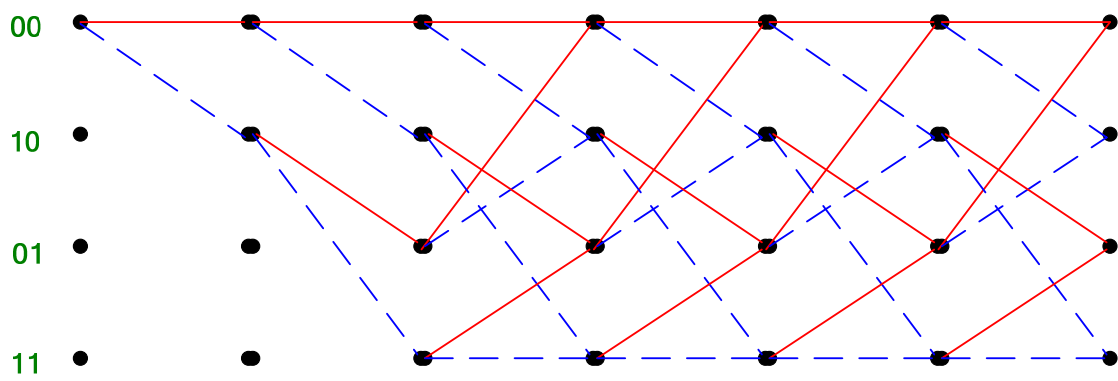
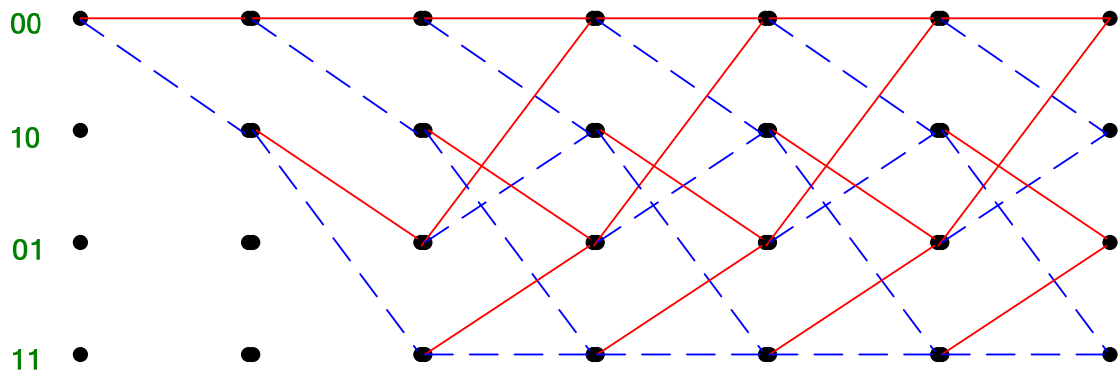
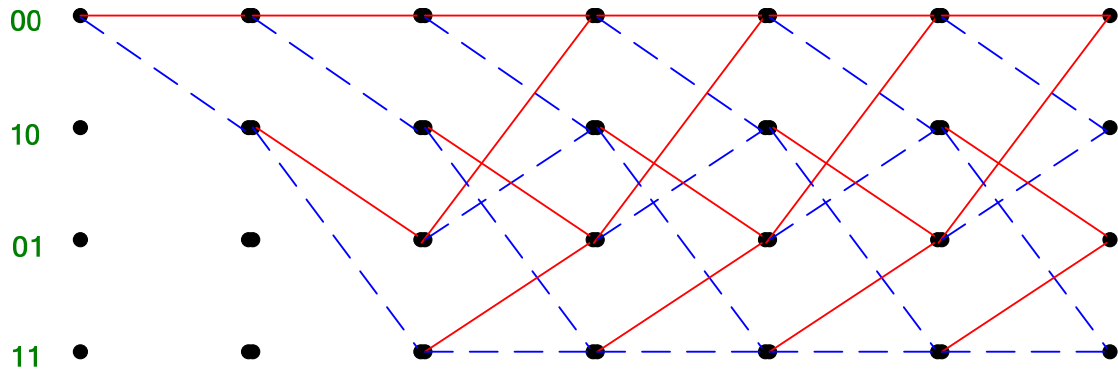
A. (10 points) Quel est le taux de codage? Quel est la longueur de contrainte?

B. (20 points) Trouvez la distance libre d_f du code convolutif en supposant que les décisions sont fermes. Combien de chemins y a-t-il à cette distance minimale?

SVP utilisez les feuilles de treillis de décodage fournies. Mettez ces feuilles dans votre cahier bleu.

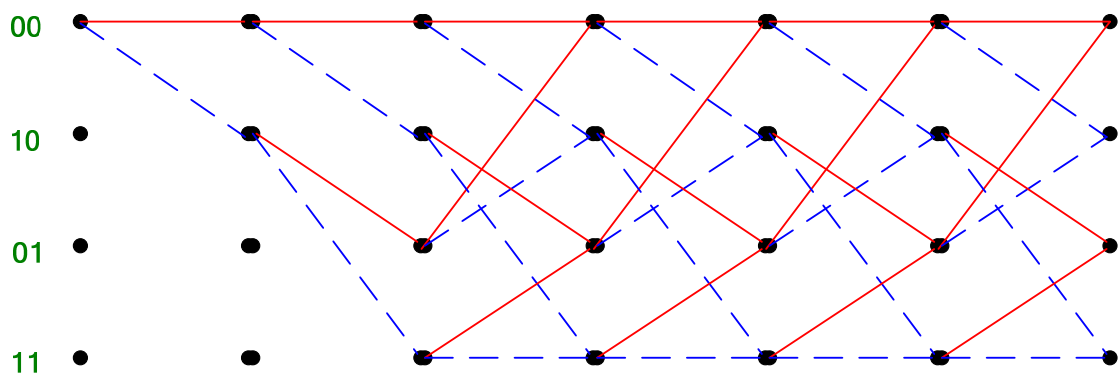
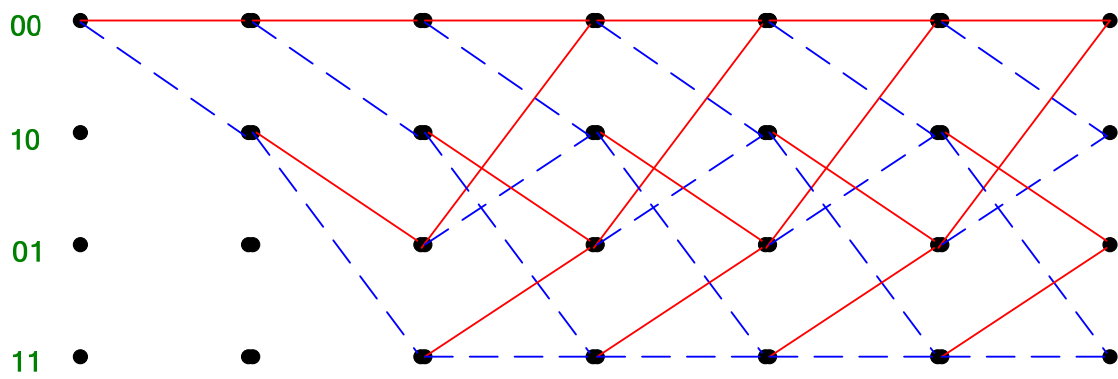
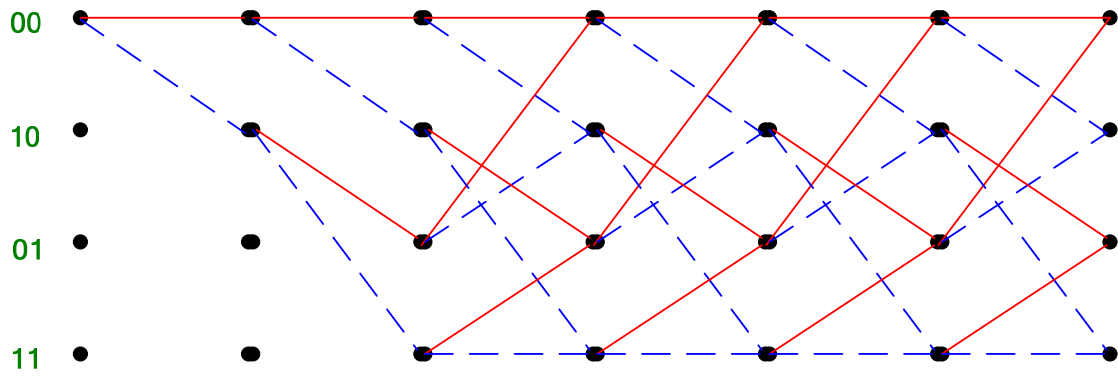
NOM :

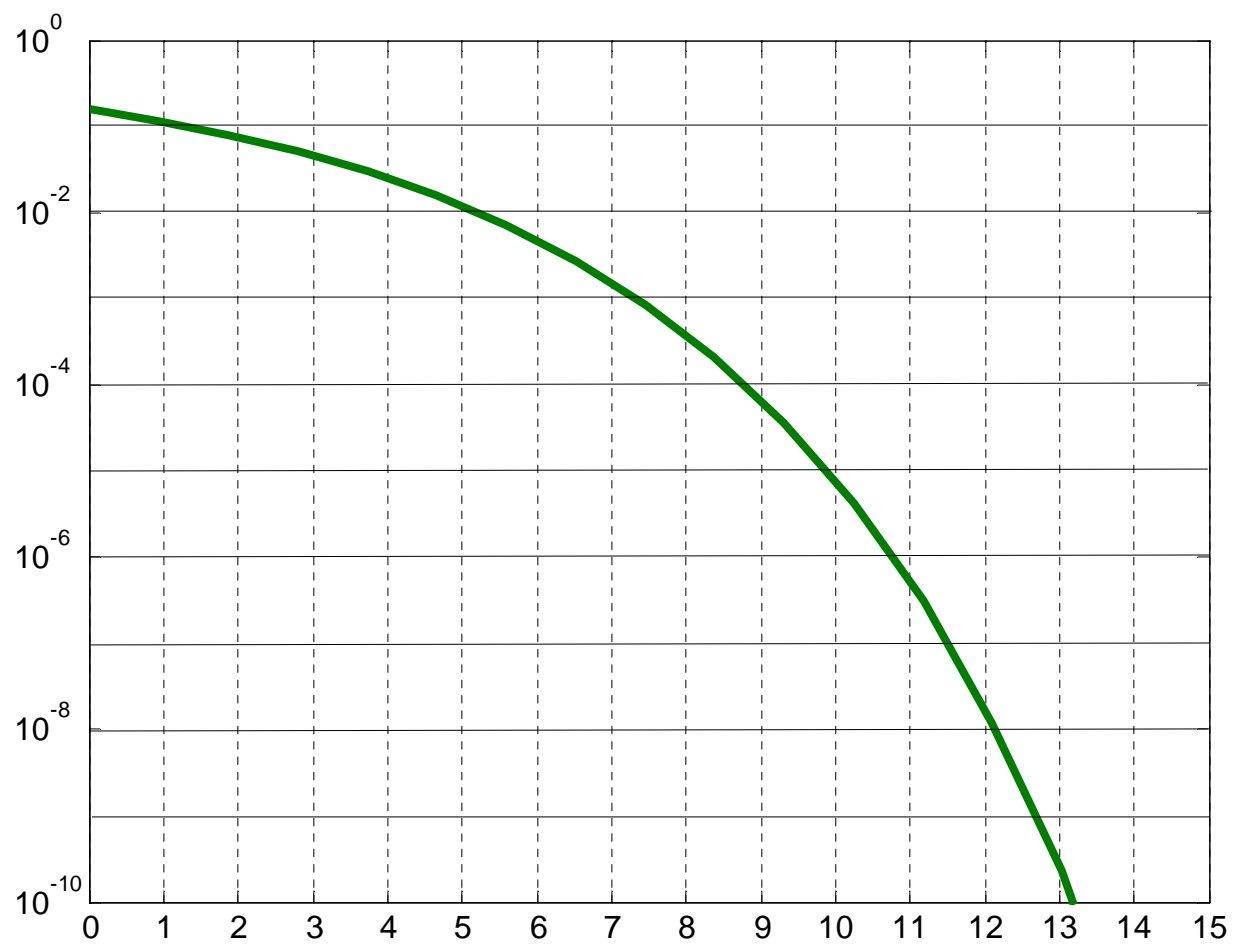
Matricule :

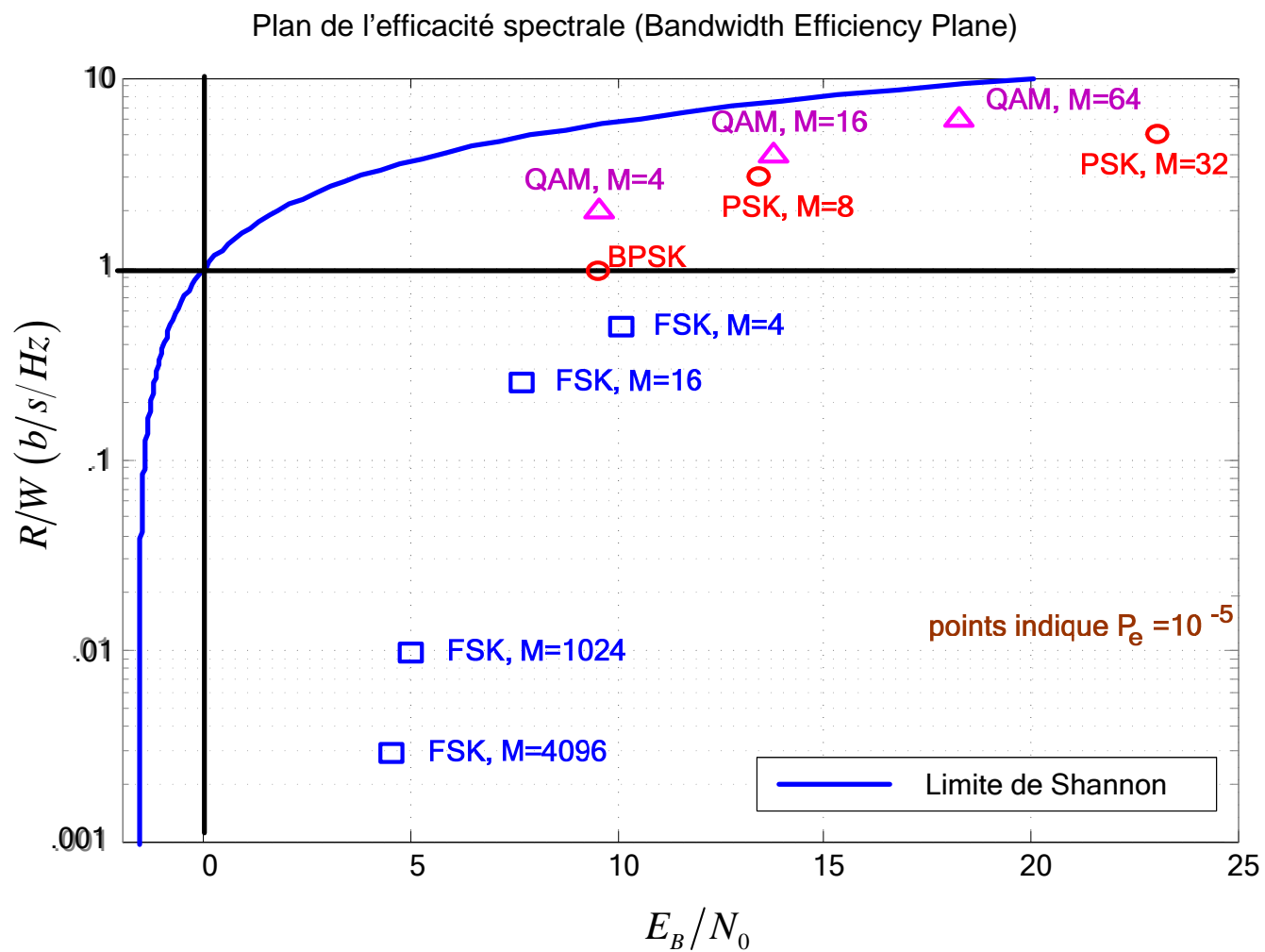


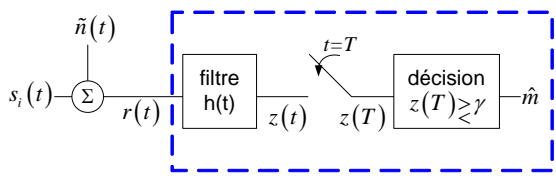
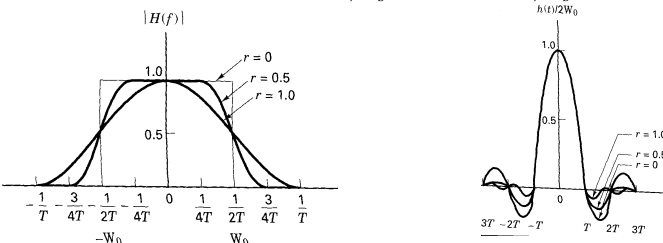
NOM :

Matricule :



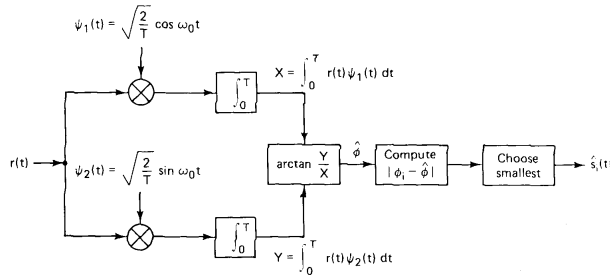




<p>Récepteur d'échantillonnage</p> 	<p>MAP: i qui maximise $p(z s_i) p(s_i)$ i qui minimise $\ \mathbf{r} - \mathbf{s}_i\ ^2 - N_0 \ln P(\mathbf{s}_i)$ $P(\mathbf{s}_i)$ = probabilité a priori de symbole \mathbf{s}_i</p> <p>ML: i qui maximise $p(z s_i)$ i qui minimise $\ \mathbf{r} - \mathbf{s}_i\ ^2$</p>
<p>Raised cosine $v(t) = \frac{\sin(\pi t/T_s) \cos(r\pi t/T_s)}{\pi t/T_s \sqrt{1 - 4r^2 t^2/T_s^2}}$</p> 	<p>Énergie moyenne</p> $E_{\text{moy}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \ \mathbf{s}_i\ ^2$ $= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M [\text{énergie du signal } i]$ <p>Énergie par bit v. énergie par symbole</p> $E_b \log_2 M = E_s$
<p>QAM $\eta = \log_2 M$ †</p> <p>Conversion de l'espace I/Q vers espace du signal</p> $\begin{pmatrix} \tilde{a}_n^I, \tilde{a}_n^Q \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{M \cdot E_s}{\sum_{i=1}^M \left[(a_n^I)^2 + (a_n^Q)^2 \right]}} \begin{pmatrix} a_n^I, a_n^Q \end{pmatrix}$ <p>coordonnées, espace du signal (blue arrow pointing to $\tilde{a}_n^I, \tilde{a}_n^Q$)</p> <p>coordonnées, espace I/Q (red arrow pointing to a_n^I, a_n^Q)</p> <p>cas rectangulaire (carrée) $M=L^2$</p> $P_e = 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}} \right) Q \left(\sqrt{\frac{3 \log_2 M}{(M-1)} \frac{E_b}{N_0}} \right) \quad d_{\min} = \sqrt{\frac{6 \log_2 L}{L^2 - 1}}$	<p>Borne d'union</p> $P_e \approx \frac{2K}{M} Q \left(\frac{D_{\min}}{\sqrt{2N_0}} \right) = \frac{2K}{M} Q \left(d_{\min} \sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right)$ <p>K est le nombre des paires des signaux séparés par la distance minimale D_{\min}</p> <p>Distance minimale dans l'espace du signal</p> $D_{\min} = \min_{i \neq k} \ \mathbf{s}_i - \mathbf{s}_k\ \quad \text{et} \quad d_{\min} = \frac{D_{\min}}{\sqrt{2E_b}}$
$P_e(\text{BPSK}) = Q \left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}} \right)$ $P_e(\text{OOK}) = Q \left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right)$ $P_e(\text{QPSK}) \approx 2Q \left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}} \right)$ <p>Perte par rapport à QPSK</p> $d_{\min} = \sqrt{x} \sqrt{2} \quad \text{perte} = -10 \log_{10} x$	<p>Pour une modulation orthogonale</p> $P_e(\text{bit}) = P_b = P_e(\text{symbol}) \frac{M/2}{M-1}$ <p>Pour une modulation non-orthogonale avec codage de gray</p> $P_e(\text{bit}) = P_b = \frac{P_e(\text{symbol})}{\log_2 M}$ <hr/> <p>Efficacité spectrale</p> $\eta = \frac{R_b}{W} = \frac{1}{T_b} \frac{1}{W} \text{ bits/s}$

MPSK cohérent

$$\eta = \log_2 M^\dagger$$

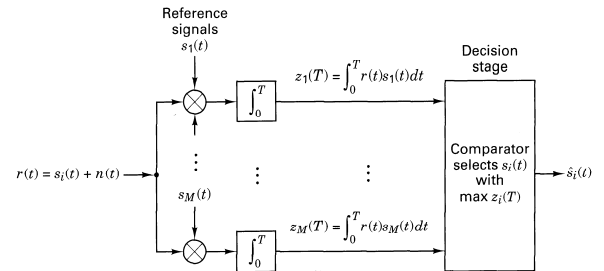


$$P_e(M) \approx 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}} \sin \frac{\pi}{M}\right)$$

$$= 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_b \log_2 M}{N_0}} \sin \frac{\pi}{M}\right)$$

MFSK cohérent

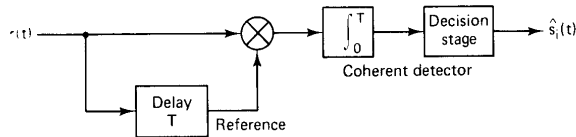
$$\eta = \frac{2 \log_2 M}{M+1}^\dagger$$



$$P_e = (M-1)Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) = (M-1)Q\left(\sqrt{\frac{E_b \log_2 M}{N_0}}\right)$$

Séparation minimale $1/2T_s$ **DPSK incohérent**

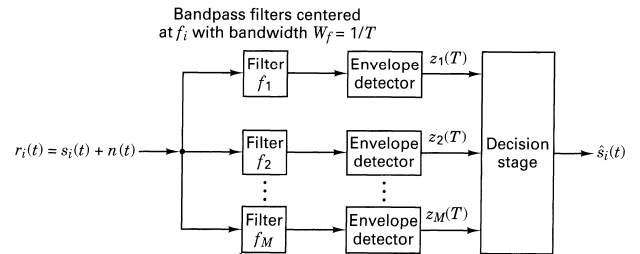
$$P_e = \frac{1}{2} e^{-E_b/N_0}$$



~1 dB de perte entre DPSK et BPSK

MFSK incohérent

$$\eta = \frac{\log_2 M}{M}^\dagger$$



$$P_e(BFSK) = \frac{1}{2} e^{-E_b/2N_0}$$

~1 dB de perte entre BFSK cohérente et incohérente

Séparation minimale $1/T_s$ **Loi de Shannon**

$$C = W \log_2(1 + SNR)$$

$$SNR = \frac{E_b}{N_0} \eta$$

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{W}{C} (2^{C/W} - 1) \quad \frac{C}{W} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{E_b}{N_0} \rightarrow -1.6 \text{ dB}$$

Relations trigonométriques

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - \sin^2 \theta$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

Processus Gram Schmidt

$$\psi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{E_1}} s_1(t) \text{ où } E_1 \triangleq \int_0^T s_1^2(t) dt$$

$$\theta_2(t) \triangleq s_2(t) - \langle s_2(t), \psi_1(t) \rangle \psi_1(t)$$

$$E_2 \triangleq \int_0^T \theta_2^2(t) dt \quad \psi_2(t) = \frac{\theta_2(t)}{\sqrt{E_2}}$$

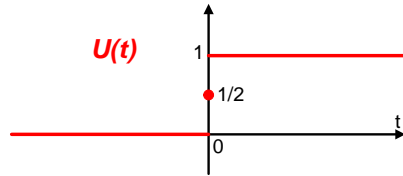
$$i. \quad \theta_i(t) = s_i(t) - \sum_{k=1}^{i-1} \langle s_i(t), \psi_k(t) \rangle \psi_k(t)$$

$$E_i \triangleq \int_0^T \theta_i^2(t) dt \quad \psi_i(t) = \frac{\theta_i(t)}{\sqrt{E_i}}$$

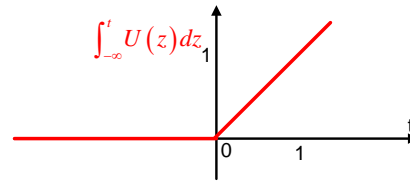
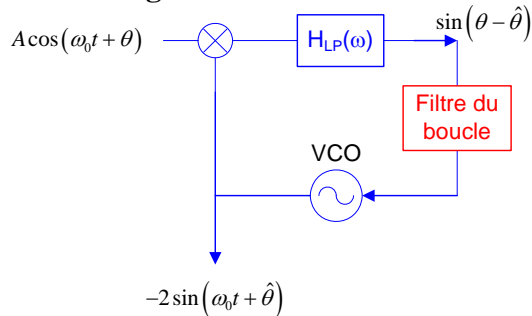
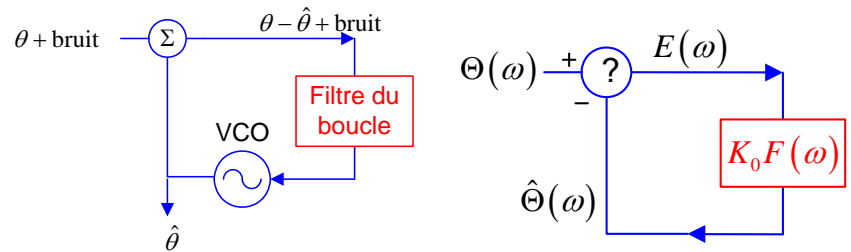
† en supposant une impulsion Nyquist idéale

Fonction échelon

$$U(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t > 0 \end{cases} = \int_{-\infty}^t \delta(z) dz \Leftrightarrow \frac{1}{j\omega}$$

**La Rampe:**

$$\int_{-\infty}^t U(z) dz = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{(j\omega)^2}$$

**PLL forme générale****PLL forme linéaire****fonction de transfert en boucle fermée**

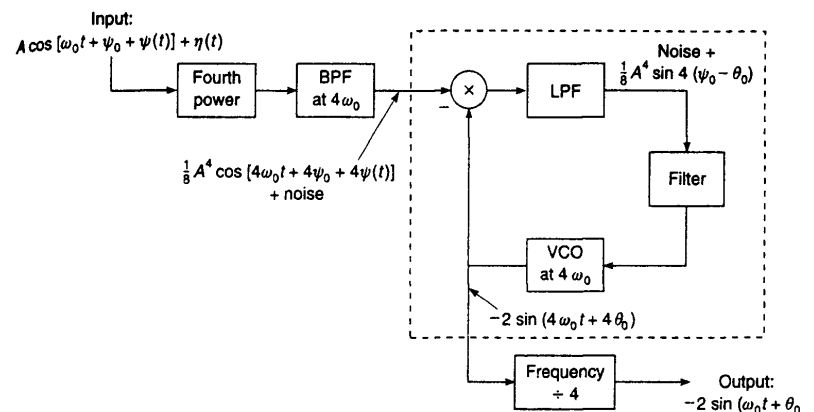
$$H(\omega) = \frac{\hat{\Theta}(\omega)}{\Theta(\omega)} = \frac{K_0 F(\omega)}{j\omega + K_0 F(\omega)}$$

erreur

$$E(\omega) = \frac{j\omega \Theta(\omega)}{j\omega + K_0 F(\omega)}$$

Théorème de la valeur finale

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{j\omega \rightarrow 0} j\omega E(\omega)$$

**boucle passe-tout : $F(\omega) = 1$**

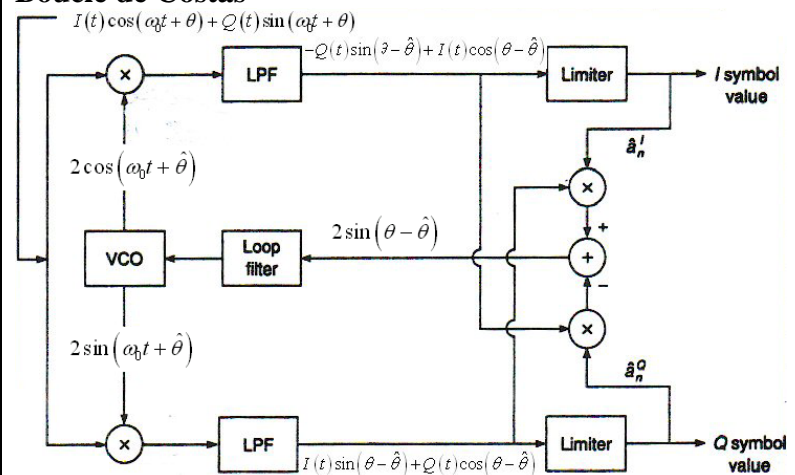
$$\text{boucle passe-bas : } F(\omega) = \frac{\omega_1}{j\omega + \omega_1}$$

largeur équivalent du bruit:

$$B_N \triangleq \frac{1}{|H(0)|^2} \int_0^\infty |H(2\pi f)|^2 df$$

$$B_N = \frac{\omega_n}{8\zeta} \text{ pour}$$

$$H(\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n \cdot j\omega + \omega_n^2}$$

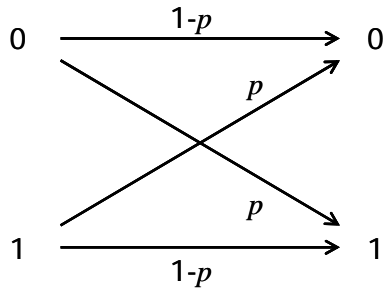
Boucle de Costas

Corrélation croisée

$$z_{ij} \triangleq \int_0^T s_j(t) s_i(t) dt$$

Matrices de Hadamard

$$H_{n+1} = \begin{bmatrix} H_n & H_n \\ H_n & \bar{H}_n \end{bmatrix}$$

Le canal binaire symétrique (BSC)

BPSK avec AWGN: $p = Q\left(\sqrt{2E_b/N_0}\right)$

Codes en bloc

\mathbf{m} = message à encoder, \mathbf{u} = mot de code généré

$$\mathbf{G} = [\mathbf{P} \mid \mathbf{I}_k] \quad \mathbf{U} = \mathbf{mG}$$

$$\mathbf{H} = [\mathbf{I}_{n-k} \mid \mathbf{P}^T] \quad \mathbf{S} = \mathbf{rH}^T$$

t = # d'erreurs qui peuvent être corrigés

$$t = \left\lfloor \frac{d_{\min} - 1}{2} \right\rfloor$$

Code Hamming $(n,k)=(2^m-1, 2^m-1-m)$

Distance de Hamming

$d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ = # de positions de bits avec des valeurs différents dans les deux vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v}

Distance minimale

$$\min_{i,j} d(\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_j) = \min_{j \geq 2} w(\mathbf{u}_j)$$

Probabilité d'erreur de bit p

Probabilité d'avoir plus que t erreurs de bits parmi un block de N bits

$$\sum_{k=t+1}^N \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} \approx \binom{N}{t+1} p^{t+1} (1-p)^{N-t-1}$$

$$\binom{N}{k} \equiv \frac{N!}{k!(N-k)!}$$

Tableau Standard

- Première rangée – mots de codes valides
- Première colonne – erreurs corrigibles
- Tous les 2^n mots de codes possibles sont inclus dans la table
- Il n'y a pas de répétition des mots de code

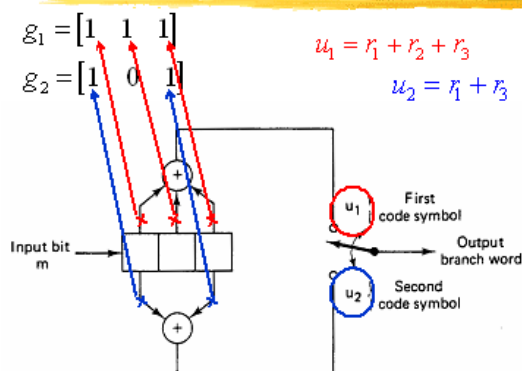
Corriger une erreur

1. Détecter l'erreur $\mathbf{S} = \mathbf{rH}^T \neq 0 \Rightarrow$ erreur \mathbf{v}
2. Identifier la rangée avec $\mathbf{e}_j \mathbf{H}^T = \mathbf{rH}^T$
i.e. le syndrome identifie le coset
3. Corriger l'erreur en calculant $\mathbf{U} = \mathbf{r} + \mathbf{e}_j$

(le mot de code dans la colonne de tableau standard où on trouve)

Codes convolutifs

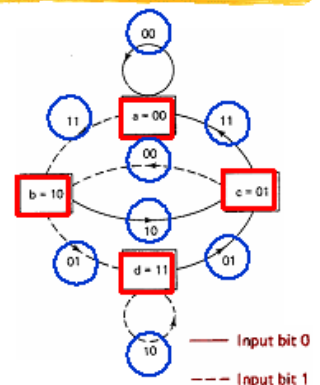
Exemple: $k=1, n=2, K=3$

**Diagramme de l'état**

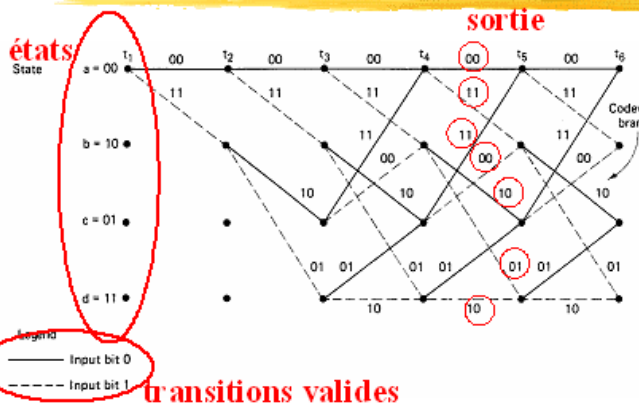
- Fixer les 2^{K-1} états
- Établir les transitions valides
- Générer les codes pour chaque transition

$$\mathbf{g}_1 = [1 \ 1 \ 1]$$

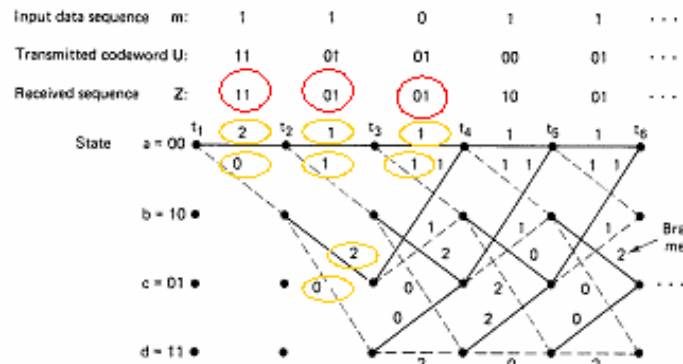
$$\mathbf{g}_2 = [1 \ 0 \ 1]$$



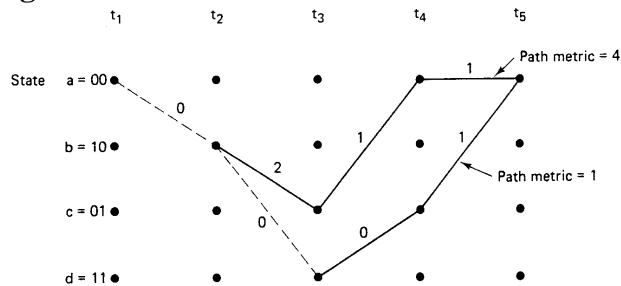
Treillis



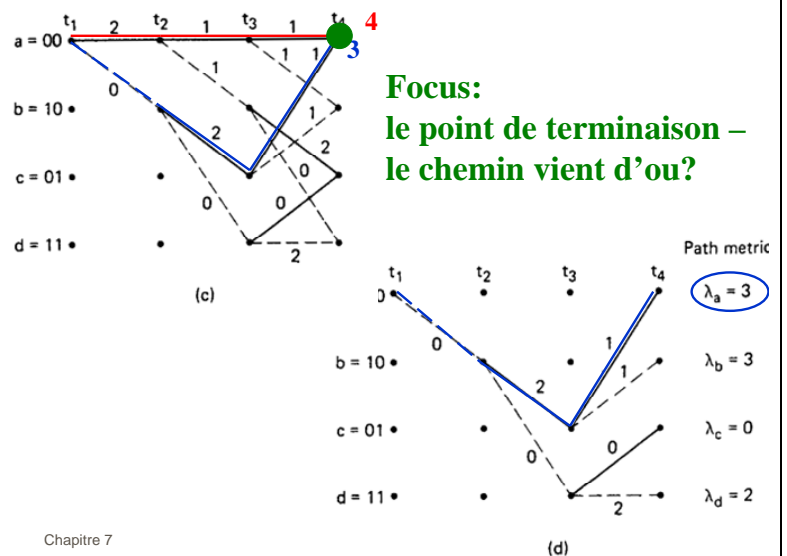
Algorithme de Viterbi



Algorithme de Viterbi



Algorithme de Viterbi



Deux métriques $dist(z_i, u_i)$

Distance de Hamming

- Pour les décisions fermes
- $dist(z_i, u_i) = \# \text{ de bits différents}$

Distance euclidienne

- Pour les décisions souples
- $dist(z_i, u_i) = \sqrt{(z_{i,1} - u_{i,1})^2 + \dots + (z_{i,n} - u_{i,n})^2}$

Gain de codage: $10 \log_{10} d_f^2 / d_{\min, \text{sans codage}}^2$

Borne supérieur de gain de codage (en dB)

$$10 \log_{10} r d_f \quad r = \text{taux de codage} = k/n$$

Valeurs typiques

- Décisions
 - Ferme
 - Souples avec 3 bits de quantification
- Longueur de contrainte : $3 \leq K \leq 9$
- Taux de code : $r \geq 1/3$
- Chemin maximale : $h \leq 5K$

Distance libre = distance minimale $= d_f$

- Codes linéaires
 - distance équivalent à la distance entre la séquence de zéros et n'importe quelle autre séquence
- Procédure
 1. Commence en état a
 2. Finir en état a
 3. Trajet le plus court \Rightarrow longueur = distance libre

$t = \# \text{ d'erreurs qui peuvent être corrigés}$

$$t = \left\lfloor \frac{d_f - 1}{2} \right\rfloor$$

TCM

Taux de codage = $1/n$

- distance locale

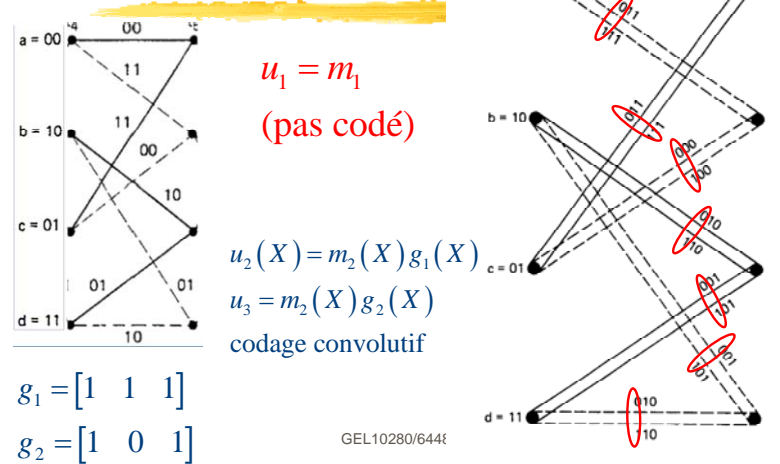
$$dist(\underline{u}_i, \underline{v}_j) = \sqrt{(u_{i,x} - v_{j,x})^2 + (u_{i,y} - v_{j,y})^2}$$

- Définition de la distance globale
(distance entre séquences,
ou *SED square Euclidean distance*)

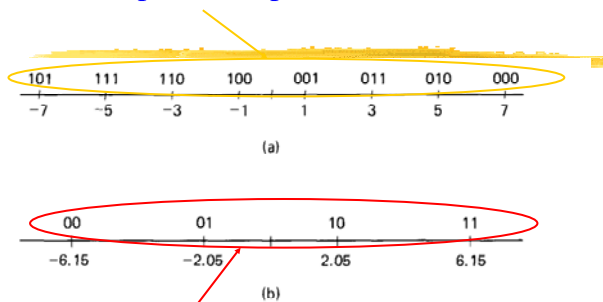
$$dist^2(U,V) = dist^2(\underline{u}_1, \underline{v}_1) + dist^2(\underline{u}_2, \underline{v}_2) + dist^2(\underline{u}_3, \underline{v}_3) + \dots$$

*pour le TCM et
les décisions souples*

Example



Correspondence pour TCM



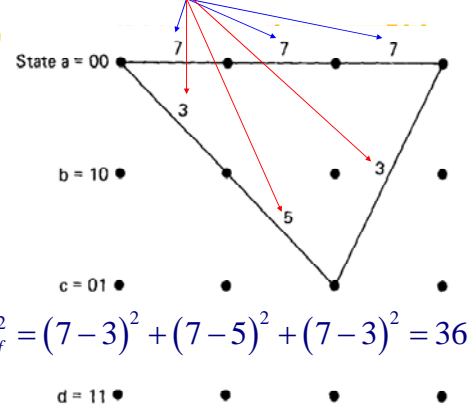
Correspondence de Gray

Chapitre 9

GEL10280/64486

10

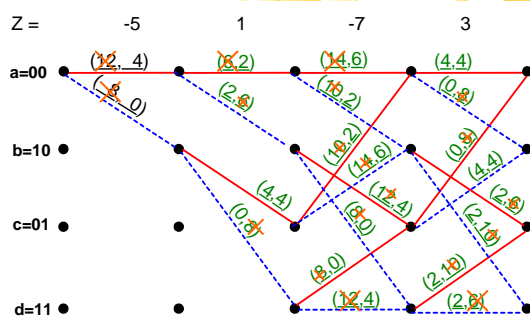
Coordonnées dans l'espace du signal



Chapitre

13

Calculer les distances locales

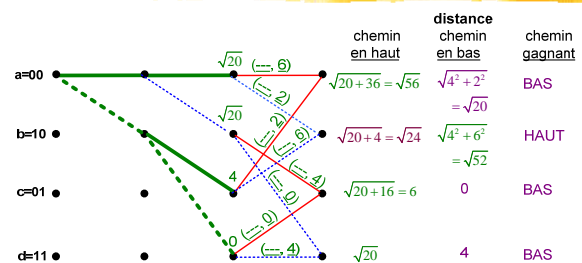


Chapitre 9

GEL10280/64486

22

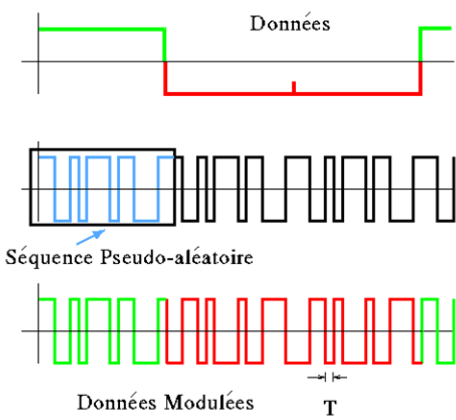
Calculer les distances globales
 $t=3$



Chapitre 9

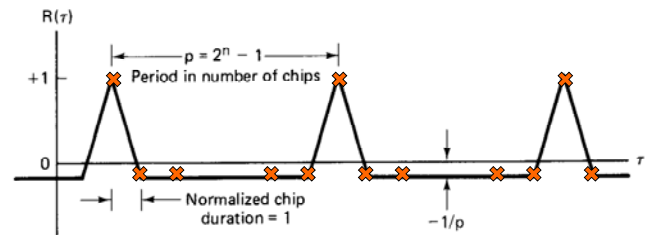
GEL10280/64486

25

DSSS – spectre étale, séquence directe

Chapitre 11 & 12

23

Fonction d'auto-corrélation

**pour une séquence maximale (séquence m)
de longueur p (n registres à décalage)**

Chapitres 11 & 12

GEL10280/64486

33

Fonction d'autocorrélation

$$R_x(\tau) = \frac{1}{K} \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) x(t+\tau) dt$$

$$K = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x^2(t) dt$$

Fonction d'autocorrélation (temps discrets)

$$R_x(\tau) = \frac{\text{nombre de chips pareils} - \text{nombre différents}}{\text{longueur de code}}$$

SNIR

K clients, avec énergie égale

G gain de traitement (gain d'étalement)

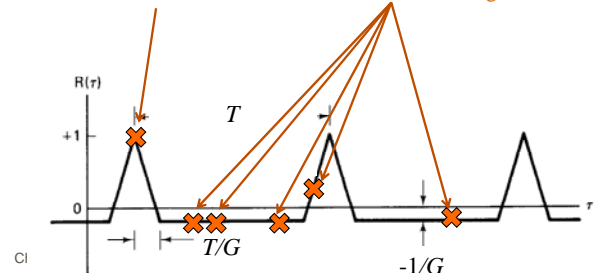
$$\begin{aligned} SNIR &= \frac{E_b}{I + N_0} = \frac{E_b}{\frac{(K-1)E_b}{G} + N_0} \\ &= \frac{1}{\frac{K-1}{G} + \frac{N_0}{E_b}} = \frac{1}{\frac{K-1}{G} + \frac{1}{E_b/N_0}} \end{aligned}$$

BER

$$\frac{E_b}{N_0} \rightarrow \frac{1}{\frac{(K-1)}{G} + \frac{1}{E_b/N_0}} = \left(\frac{E_b}{N_0} \right)_{\text{effectif}}$$

Trajets multiples**Sortie du filtre adapté**

$$z(T) = \underbrace{\frac{b_1}{T} \int_0^T s_1^2(t) dt}_{\text{pic de auto-corrélation}} + \sum_{k=1}^K \underbrace{\frac{\alpha_k e^{j\theta_k}}{T} \int_0^T s_1(t) s_1(t - \tau_k) dt}_{\text{auto-corrélation avec décalage}} + \underbrace{\frac{1}{T} \int_0^T n(t) dt}_{\text{AWGN}}$$



57

Multiplexage par code (CDMA)