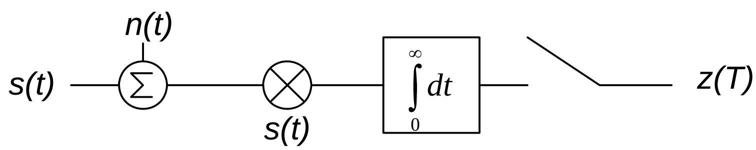
Examen Partiel 2003 - *Solutionnaire*

GEL10280 Communications Numériques

Problème 1

A. Le récepteur optimal est un filtre adapté ou le corrélateur équivalent, soit



Notons que la duré de l'intégration est infinie!

B. Pour commencer, nous allons trouver l'énergie d'un bit

$$\text{énergie par bit} = \int_0^1 s^2(t)\,dt = \int_0^1 \left(e^{-t}\right)^2 dt$$

$$= \int_0^1 e^{-2t} dt = \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-2t}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-2}\right) =$$

$$= .432 = E_b$$

Les coefficients de ce système BPSK sont donc :

$$-.656 = -\sqrt{E_b} \qquad 0 \qquad .656 = \sqrt{E_b}$$

La distance minimale est 1.31. La probabilité d'erreur est:

$$Q\left(\frac{D_{\min}}{\sqrt{2N_0}}\right) = Q\left(\frac{1.31}{\sqrt{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{0.86}{N_0}}\right)$$

C. Le récepteur optimal a

$$\text{énergie par bit} = \int_0^\infty s^2(t)\,dt = \int_0^\infty \left(e^{-t}\right)^2 dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-2t} dt = \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-2t}\Big|_0^\infty = \frac{1}{2} = E_b$$

$$-.71 = -\sqrt{E_b} \qquad 0 \qquad .71 = \sqrt{E_b}$$

La distance minimale est 1.42. La probabilité d'erreur est:

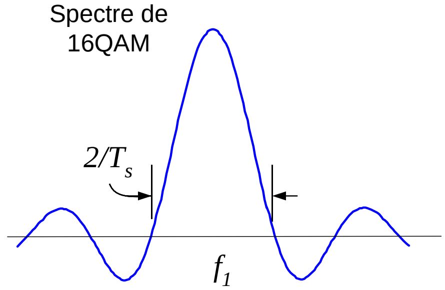
$$Q\left(\frac{D_{\min}}{\sqrt{2N_0}}\right) = Q\left(\frac{1.42}{\sqrt{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{1}{N_0}}\right)$$

La perte par rapport à un récepteur optimal est:

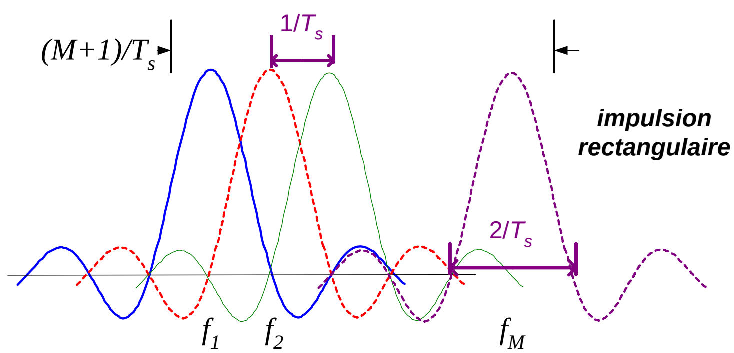
$$10\log_{10}\frac{0.86}{1} = -.66\,\mathrm{dB}$$

Problème 2

A. Le spectre de 16QAM est déterminé par le taux de transmission de symbole. Pour une impulsion rectangulaire, le spectre a la forme d'une sinus cardinale. Le lobe primaire du sinc est de largeur $2/T_s$, donc la largeur de bande pour 16QAM est $2/T_s$.



Prenons le cas de 16FSK non-cohérent avec une impulsion rectangulaire, chaque symbole aura une largeur de bande de $2/T_s$. L'espacement minimal pour FSK non-cohérent est $1/T_s$, donc la largeur de bande totale de 16FSK est $(M+1)/T_s$



Pour le cas de 16FSK cohérent avec une impulsion rectangulaire, chaque symbole aura une largeur de bande de $2/T_s$. L'espacement minimal pour FSK cohérent est $1/2T_s$, donc la largeur de bande totale de 16FSK est $(M+3)/2T_s$

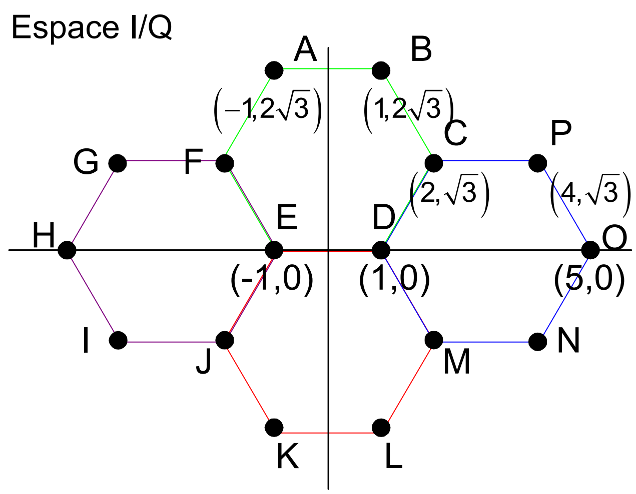
Problème 3

Symbole	Coordonnées en espace I/Q	Distance à l'origine
A	$\left(-1,2\sqrt{3}\right)$	$\sqrt{13}$
B	$\left(1,2\sqrt{3}\right)$	$\sqrt{13}$
C	$\left(2,\sqrt{3}\right)$	$\sqrt{7}$
D	$(1,0)$	1
E	$(-1,0)$	1
F	$\left(-2,\sqrt{3}\right)$	$\sqrt{7}$
G	$\left(-4,\sqrt{3}\right)$	$\sqrt{19}$
H	$(-5,0)$	5
I	$\left(-4,-\sqrt{3}\right)$	$\sqrt{19}$
J	$\left(-2,-\sqrt{3}\right)$	$\sqrt{7}$
K	$\left(-1,-2\sqrt{3}\right)$	$\sqrt{13}$
L	$\left(1,-2\sqrt{3}\right)$	$\sqrt{13}$
M	$\left(2,-\sqrt{3}\right)$	$\sqrt{7}$
N	$\left(4,\sqrt{3}\right)$	$\sqrt{19}$
O	$(5,0)$	5
P	$\left(4,\sqrt{3}\right)$	$\sqrt{19}$

A. Les coordonnées sont données dans le table.

B.

C. La configuration 16 QAM non-rectangulaire a la forme suivante dans l'espace I/Q.



Pour chercher les coordonnées dans l'espace de signal, nous utilisons la suivante :

$$\left(\tilde{a}_n^I,\tilde{a}_n^Q\right)=\sqrt{\frac{ME_s}{\sum_{i=1}^{M}\left[\left(a_n^I\right)^2+\left(a_n^Q\right)^2\right]}}\left(a_n^I,a_n^Q\right)$$

Pour calculer la somme, nous utilisons les observations suivantes :

points	# de points	*distance*^{2} de l'origine	Sous-total
D,E	2	1	2
H,O	2	25	50
A,B,K,L	4	13	52
C,F,J,M	4	7	28
G,I,N,P	4	19	76
$\sum_{i=1}^{M}\left[\left(a_n^I\right)^2+\left(a_n^Q\right)^2\right]$			208

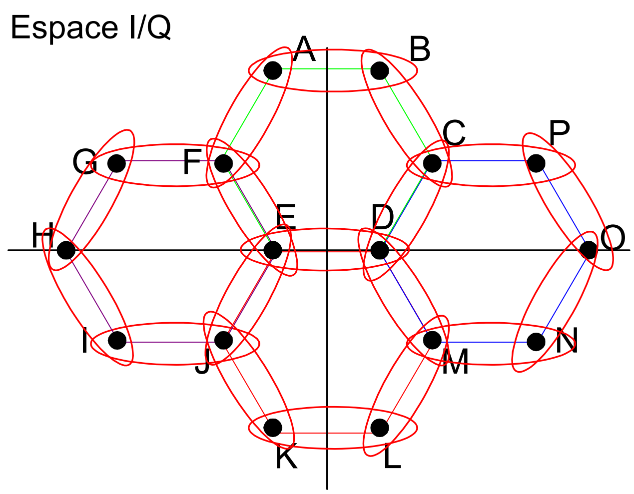
Donc les coordonnées des points D et E sont

$$\sqrt{\frac{16E_s}{208}}(0,1) = \frac{\sqrt{E_s}}{\sqrt{13}}(0,1) \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{E_s}}{\sqrt{13}}(1,0)$$

La distance minimale correspond à la distance entre ces deux points, soit

$$D_{\min} = \frac{2\sqrt{E_s}}{\sqrt{13}}$$

A. Pour exploiter la borne d'union il faut savoir le nombre de voisin à la distance minimale.



Nous voyons que K=19 paires. La probabilité d'erreur approximative est donc:

$$16\text{QAM} \;\; P_e \approx \frac{2\cdot 19}{16} Q\left(\sqrt{\frac{4}{13}\frac{E_s}{2N_0}}\right) = 2.375Q\left(\sqrt{\frac{2}{13}\frac{4E_b}{N_0}}\right)$$
$$= 2.375Q\left(\sqrt{\frac{8}{13}\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

B. Étant donné que la distance minimale est plus petite pour la configuration hexagonale

$$D_{min,hexagonal} = \frac{2\sqrt{E_s}}{\sqrt{13}} < D_{min,rectangulaire} = \frac{2\sqrt{E_s}}{\sqrt{10}}$$

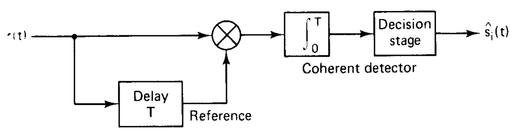
la configuration rectangulaire a une meilleur performance asymptotiquement.

Problème 4

A. (10 points) Décrire la motivation pour DPSK (au lieu de BPSK) et donnez un récepteur pour DPSK, en expliquent son fonctionnement.

Points importants :

- Détection non-cohérente, soit une détection sans connaissance de la phase relative du transmetteur et récepteur

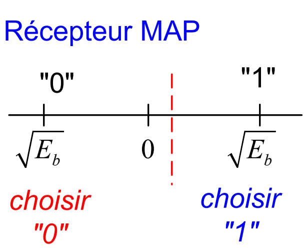


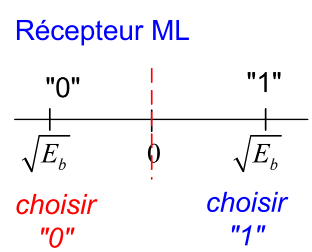
- la référence de phase est trouver à partir d'une version décalé du signal

B. (10 points) Quelle est la différence entre un récepteur MAP et un récepteur MLE?

Points importants :

- récepteur MAP exploite l'information *à priori* de la probabilité de chaque symbole; il va choisir le symbole le plus proche du signal reçu, modulo la pondération basé sur l'information *à priori*
- récepteur ML ne tient pas compte de la probabilité de chaque symbole; il va choisir le symbole le plus proche du signal reçu
- Exemple : BPSK, « 0 » deux fois plus probable que « 1 »





C. (5 points) Quel est l'avantage de l'utilisation des modulations orthogonales?

- Efficacité en rapport signal-à-bruit

D. (5 points) Quelle est l'impulsion Nyquist le plus efficace en largeur de bande?

- Sinus cardinale