

# GEL-2005

## Systèmes et commande linéaires

Examen #2

Lundi 14 décembre 2015, 8h30-10h20

Document permis: une feuille manuscrite recto-verso

Professeur: André Desbiens, Département de génie électrique et de génie informatique

### Remarques :

- Accompagnez vos réponses d'unités lorsque c'est pertinent.
- Sauf pour la question 5 et la question bonus, les détails de vos calculs sont requis.

### Nomenclature :

$$G(s) = G_c(s)G_p(s)$$

$$H(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

$$|G(j\omega_0)| = 1$$

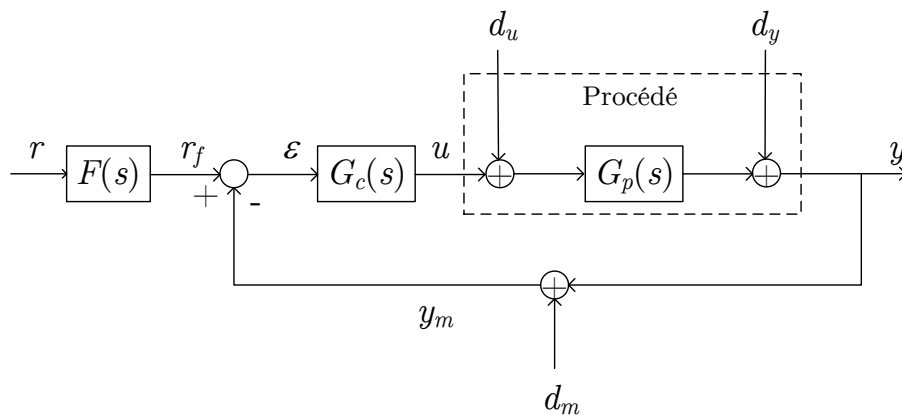


Figure 1

### Question 1 (20%)

La figure 2 montre la réponse en fréquences de  $G(s)$ . Si on ajoutait à  $G_c(s)$  un filtre dont la fonction de transfert est  $\frac{1}{1 + \tau s}$  (pour former un nouveau régulateur  $G_c(s) \cdot \frac{1}{1 + \tau s}$ ), quelle valeur de  $\tau$  rendrait  $H(s)$  à la limite de la stabilité?

Supposez que  $G(s)$  est connu puisqu'on a pu tracer sa réponse en fréquences. Donnez les équations qui permettraient de calculer  $\tau$  mais il n'est pas nécessaire de les résoudre. Par exemple :

$$\arctan(6\tau) + \angle G(j2) + |G(j6)| = \frac{\pi}{3}$$

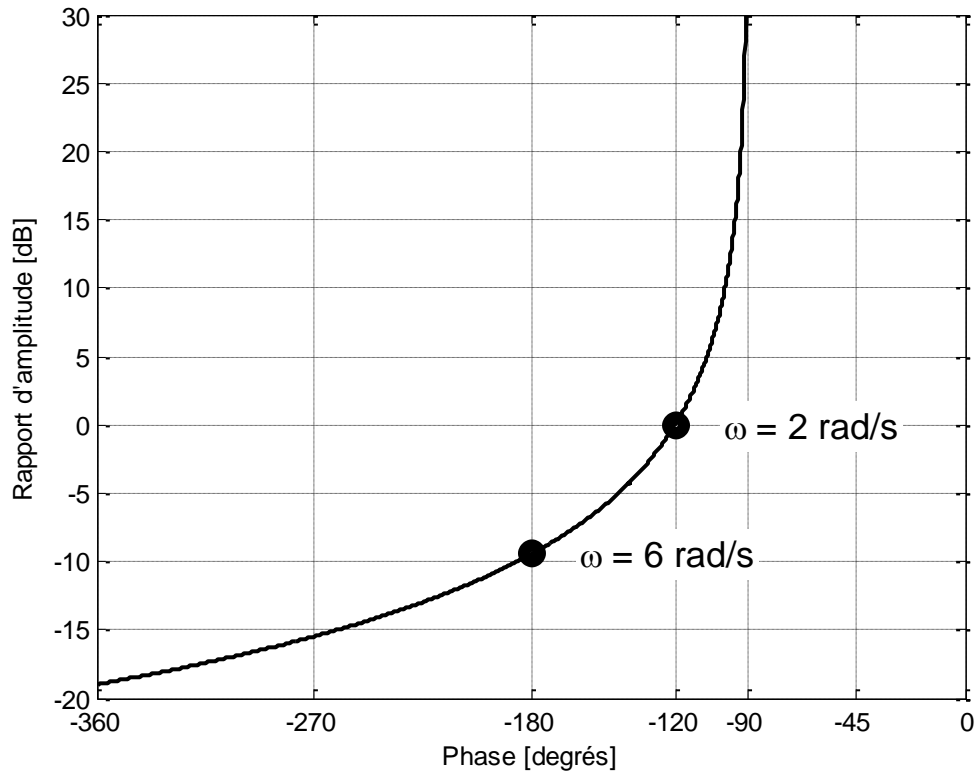


Figure 2

## Question 2 (20%)

Le système étudié est illustré à la figure 1 avec  $r = d_y = d_m = 0$ . Outre le fait que  $H(s)$  doit être stable, quelle caractéristique de  $G_c(s)$  ou de  $G(s)$  est requise pour obtenir une erreur statique nulle suite à une perturbation d'entrée ( $d_u$ ) en échelon? **Démontrez**. Comme c'est pratiquement toujours le cas, supposez que  $\lim_{\omega \rightarrow 0} |G_p(j\omega)|$  ne tend pas vers zéro.

### Question 3 (20%)

Le système étudié est illustré à la figure 1 avec  $r = d_u = d_m = 0$ ,  $G_c(s) = 2$  et  $G_p(s) = \frac{0.5}{s}$ . Si la perturbation est  $d_y(t) = 2 \cos[3(t-2) + 0.4]u_e(t-2)$  où  $u_e(t)$  est l'échelon unitaire, quelle est l'amplitude de  $u$  en régime permanent?

### Question 4 (13% + 7% = 20%)

Le système de commande cascade est illustré à la figure 3 où  $G_{po}(s) = \frac{5}{1+20s}$  et  $G_{pi}(s) = \frac{10e^{-2s}}{s}$ .

a) Concevez le régulateur interne  $G_{ci}(s)$  qui respecte les spécifications suivantes :

- régulateur proportionnel,
- marge de gain de 7 dB.

Quelle est la fonction de transfert du régulateur?

b) Dans le cas précis des données précédentes, c'est-à-dire :

- $G_{po}(s)$  est un système du premier ordre stable,
- $G_{pi}(s)$  est un système intégrateur avec un retard,
- $G_{ci}(s)$  est un régulateur proportionnel qui conduit à une boucle stable,

est-il vraiment nécessaire que le régulateur externe  $G_{co}(s)$  ait un intégrateur pour obtenir une erreur statique nulle suite à un échelon de consigne  $r$ ? Justifiez très clairement.

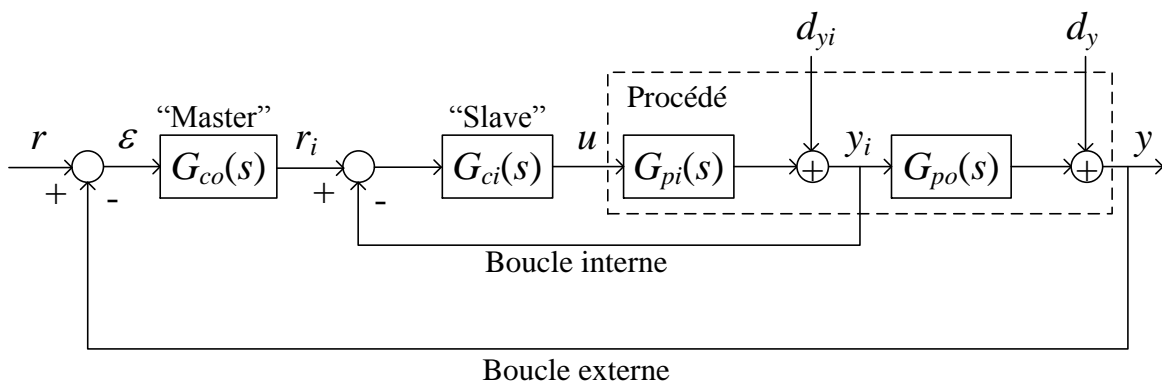


Figure 3

**Question 5 ( $4 \times 5\% = 20\%$ )**

Les questions de ce numéro sont indépendantes. Écrivez vos réponses dans votre cahier ET à la page 6. Seules les réponses finales seront corrigées. La correction est binaire : 0% ou 5%. Une réponse sera jugée bonne si elle est à  $\pm 5\%$  de la bonne valeur.

- a) Le système étudié est illustré à la figure 1 avec  $F(s) = 1$  et la réponse en fréquences de  $G(s)$  est tracée à la figure 4. Si  $r(t) = 3\cos(2t + 0.4)u_e(t)$ , quelle est l'amplitude de  $y$  en régime permanent?
- b) Quel est le facteur de surtension (facteur de résonnance) de  $H(s)$ ?
- c) Le système étudié est illustré à la figure 1 avec  $F(s) = 1$  et la réponse en fréquences de  $G(s)$  est tracée à la figure 4. Par quel facteur doit-on multiplier  $G(s)$  pour que  $H(s)$  devienne à la limite de la stabilité?
- d) Le système étudié est stable et est celui illustré à la figure 3 avec  $G_{pi}(s) = \frac{10e^{-2s}}{s}$ ,  $G_{po}(s) = \frac{5}{1+20s}$ ,  $G_{ci}(s)$  et  $G_{co}(s)$  sont des régulateurs PI. Si  $r = d_y = 0$  et que  $d_{yi}$  est un échelon unitaire, que vaut  $u(\infty)$ ?

**Bonus (+5%)**

Le système étudié est illustré à la figure 1 avec  $F(s) = 1$  et la réponse en fréquences de  $G(s)$  est tracée à la figure 4. Si  $r(t)$  est un échelon unitaire, quelle est l'erreur en régime permanent?

*Bon succès!*

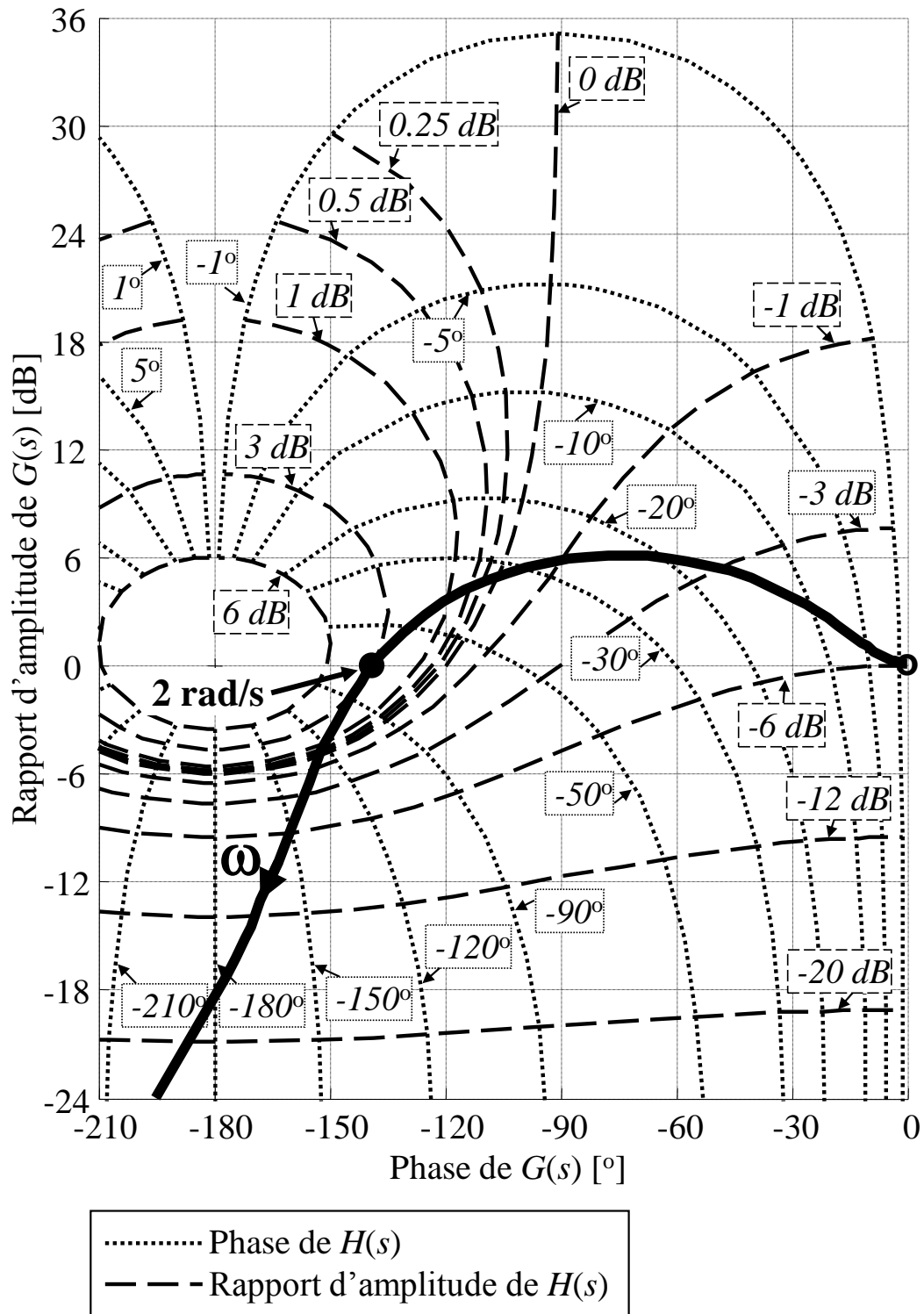


Figure 4

**N'OUBLIEZ PAS D'ÉCRIRE VOS RÉPONSES DANS VOTRE CAHIER  
ET  
D'INSÉRER CETTE FEUILLE REMPLIE DANS VOTRE CAHIER**

Nom : \_\_\_\_\_

Matricule : \_\_\_\_\_

**Question 5**

	Réponse
a)	
b)	
c)	
d)	

**Bonus**

Réponse

# Transformation de Laplace

$$F(s) \text{ sans pôles}$$

$f(t)$ pour $t \geq 0^-$	$F(s)$	Pôles de $F(s)$
$\delta(t)$	1	Aucun

$$F(s) \text{ avec des pôles simples (réels ou conjugués)}$$

$f(t)$ pour $t > 0$	$F(s)$	Pôles de $F(s)$
1 ou $u_e(t)$	$\frac{1}{s}$	0
$e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$	$-a$
$\sin(\omega t + \phi)$	$\frac{[\sin \phi]s + \omega \cos \phi}{s^2 + \omega^2}$	$\pm j\omega$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\pm j\omega$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\pm j\omega$
$e^{-at} \cos(\omega t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$-a \pm j\omega$
$e^{-at} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$-a \pm j\omega$

$$F(s) \text{ avec des pôles multiples}$$

$f(t)$ pour $t > 0$	$F(s)$	Pôles de $F(s)$
t	$\frac{1}{s^2}$	0 (double)
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}, n = 1, 2, 3, \dots$	$\frac{1}{s^n}$	0 (ordre $n$ )
$te^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$-a$ (double)
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}, n = 1, 2, 3, \dots$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$-a$ (ordre $n$ )
$t \cos(\omega t)$	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$	$\pm j\omega$ (double)
$\frac{t}{2\omega} \sin(\omega t)$	$\frac{s}{(s^2 + \omega^2)^2}$	$\pm j\omega$ (double)
$\frac{t^2}{2\omega} \sin(\omega t)$	$\frac{3s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^3}$	$\pm j\omega$ (triple)

Table 1: Transformées de Laplace

$$\mathcal{L}f'(t) \text{ (pour } t > 0) = s\mathcal{L}f(t) - f(0^+) \quad (1)$$

$$\mathcal{L} \left[ \int_0^t f(\tau) d\tau \right] = \frac{1}{s} \mathcal{L}f(t) \quad (2)$$

$$f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s\mathcal{L}f(t) \quad (3)$$

$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s\mathcal{L}f(t) \quad (4)$$

$$\mathcal{L}f(t - \theta)u_e(t - \theta) = e^{-\theta s} \mathcal{L}f(t)u_e(t) \quad (5)$$

$$\mathcal{L} \left[ \int_0^t f_1(\tau)f_2(t - \tau) d\tau \right] = F_1(s)F_2(s) \quad (6)$$

## Systèmes du second ordre

$$G(s) = \frac{K}{\frac{1}{\omega_n^2} s^2 + \frac{2z}{\omega_n} s + 1} \quad (7)$$

$$\omega_p = \omega_n \sqrt{1 - z^2} \quad (8)$$

$$\omega_R = \omega_n \sqrt{1 - 2z^2} \quad (9)$$

$$Q = \frac{|G(j\omega_R)|}{|G(j0)|} = \frac{1}{2z\sqrt{1 - z^2}} \quad (10)$$

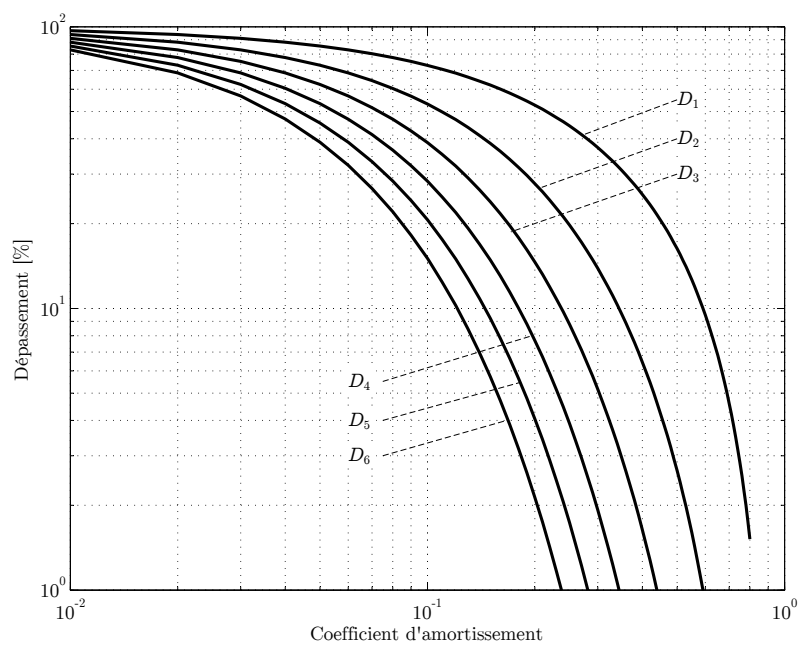


Figure 1: Les dépassements de la réponse à l'échelon versus le coefficient d'amortissement



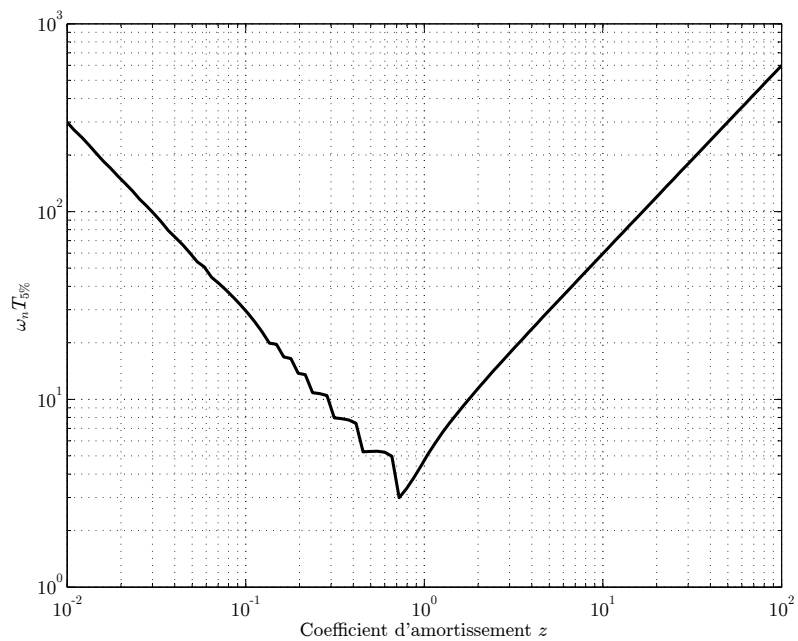


Figure 2: Le temps de réponse à  $\pm 5\%$ .

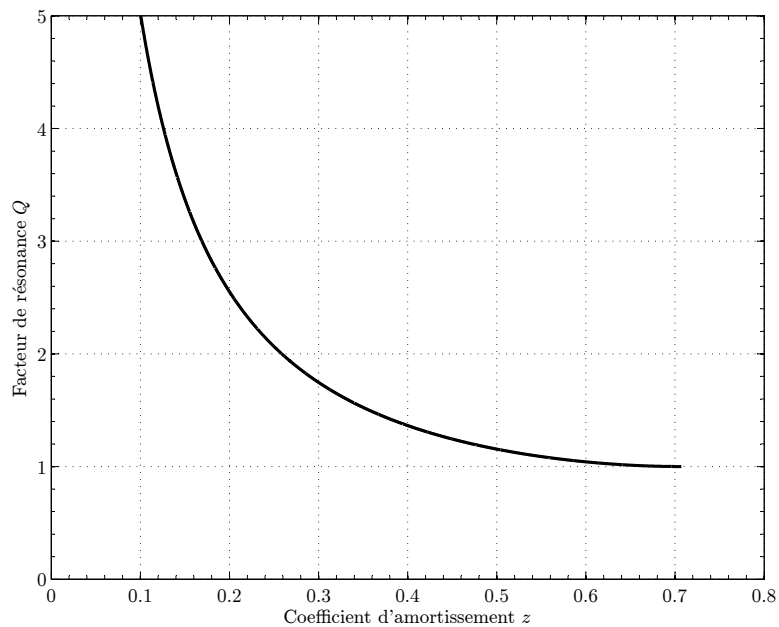
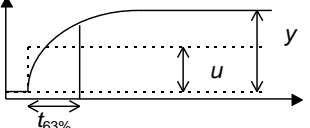
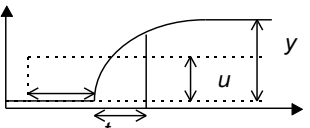
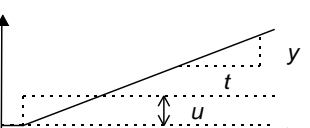
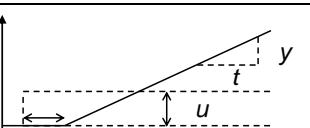
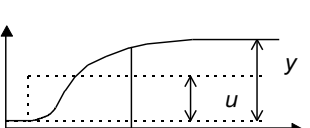
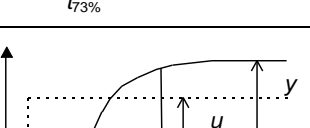
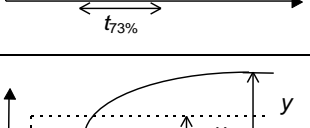
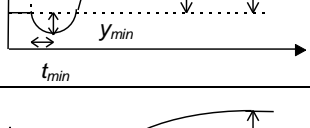
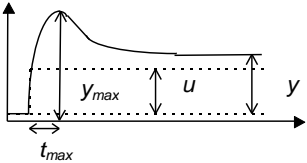
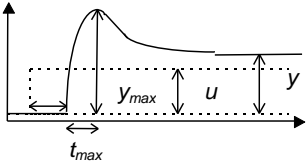
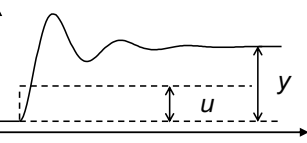
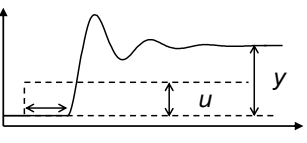
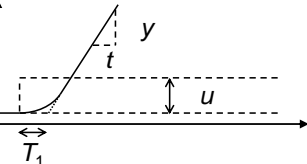
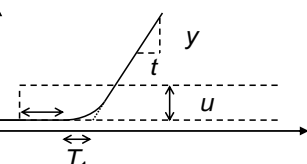


Figure 3: Le facteur de résonance versus le coefficient d'amortissement

## Identification des systèmes

Type	Modèle Fonction de transfert	Réponse à l'échelon	Paramètres
I	$\frac{K_p}{1+T_1 s}, T_1 > 0$		$K_p = \frac{y}{u}$ $T_1 = t_{63\%}$
II	$\frac{K_p e^{-s}}{1+T_1 s}, T_1 > 0$		$K_p = \frac{y}{u}$ $T_1 = t_{63\%}$
III	$\frac{K_p}{s}$		$K_p = \frac{y}{t u}$
IV	$\frac{K_p e^{-s}}{s}$		$K_p = \frac{y}{t u}$
V	$\frac{K_p}{(1+T_1 s)^2}, T_1 > 0$		$K_p = \frac{y}{u}$ $T_1 = \frac{t_{73\%}}{2.6}$
VI	$\frac{K_p e^{-s}}{(1+T_1 s)^2}, T_1 > 0$		$K_p = \frac{y}{u}$ $T_1 = \frac{t_{73\%}}{2.6}$
VII	$\frac{K_p(1-T_{0i}s)}{(1+T_1 s)^2}, T_1 > 0, T_{0i} > 0$		$K_p = \frac{y}{u}$ Table 2
VIII	$\frac{K_p(1-T_{0i}s)e^{-s}}{(1+T_1 s)^2}, T_1 > 0, T_{0i} > 0$		$K_p = \frac{y}{u}$ Table 2

Type	Modèle Fonction de transfert	Réponse à l'échelon	Paramètres
IX	$\frac{K_p(1+T_{0s}s)}{(1+T_1s)^2}, T_1 > 0, T_{0s} > T_1$		$K_p = \frac{y}{u}$ Table 2
X	$\frac{K_p(1+T_{0s}s)e^{-s}}{(1+T_1s)^2}, T_1 > 0, T_{0s} > T_1$		$K_p = \frac{y}{u}$ Table 2
XI	$\frac{K_p}{\frac{1}{\omega_n^2}s^2 + \frac{2z}{\omega_n}s + 1}, 0 < z < 1, \omega_n > 0$		$K_p = \frac{y}{u}$ $z$ : dépassements (fig. 1) $\omega_n$ : $\omega_p$ ou $T_{5\%}$ (fig. 2)
XII	$\frac{K_p e^{-s}}{\frac{1}{\omega_n^2}s^2 + \frac{2z}{\omega_n}s + 1}, 0 < z < 1, \omega_n > 0$		$K_p = \frac{y}{u}$ $z$ : dépassements (fig. 1) $\omega_n$ : $\omega_p$ ou $T_{5\%}$ (fig. 2)
XIII	$\frac{K_p}{(1+T_1s)s}, T_1 > 0$		$K_p = \frac{y}{t u}$
XIV	$\frac{K_p e^{-s}}{(1+T_1s)s}, T_1 > 0$		$K_p = \frac{y}{t u}$

Types VII et VIII			Types IX et X		
- $y_{min} / y$	$t_{min} / T_1$	$T_{0i} / T_1$	$y_{max} / y$	$t_{max} / T_1$	$T_{0s} / T_1$
0.01	0.14	0.16	1.02	3.13	1.47
0.02	0.19	0.23	1.04	2.69	1.59
0.03	0.22	0.29	1.06	2.45	1.69
0.04	0.25	0.34	1.08	2.28	1.78
0.05	0.28	0.39	1.10	2.16	1.86
0.06	0.31	0.44	1.15	1.95	2.05
0.07	0.32	0.48	1.20	1.81	2.23
0.08	0.34	0.52	1.25	1.72	2.39
0.09	0.36	0.56	1.30	1.65	2.55
0.10	0.38	0.60	1.35	1.58	2.71
0.20	0.49	0.96	1.40	1.54	2.86
0.30	0.56	1.28	1.45	1.50	3.01
0.40	0.61	1.58	1.50	1.46	3.16
0.50	0.65	1.88	1.55	1.43	3.31
0.60	0.68	2.17	1.60	1.41	3.45
0.70	0.71	2.46	1.65	1.38	3.60
0.80	0.73	2.75	1.70	1.36	3.74
0.90	0.75	3.03	1.75	1.35	3.88
1.00	0.77	3.32	1.80	1.33	4.03
1.10	0.78	3.60	1.85	1.32	4.17
1.20	0.79	3.87	1.90	1.30	4.31
1.30	0.81	4.15	1.95	1.29	4.45
1.40	0.82	4.43	2.00	1.28	4.60
1.50	0.82	4.70	2.10	1.26	4.87
1.60	0.83	4.98	2.20	1.24	5.16
1.70	0.84	5.26	2.30	1.23	5.43
1.80	0.85	5.53	2.40	1.21	5.71
1.90	0.85	5.81	2.50	1.20	5.98
2.00	0.86	6.09	2.60	1.19	6.26
2.20	0.87	6.63	2.70	1.18	6.54
2.40	0.88	7.18	2.80	1.17	6.81
2.60	0.89	7.72	2.90	1.16	7.09
2.80	0.89	8.27	3.00	1.16	7.36
3.00	0.90	8.82	3.50	1.13	8.73
3.20	0.90	9.37	4.00	1.11	10.10
3.40	0.91	9.91	4.50	1.10	11.47
3.60	0.91	10.46	5.00	1.08	12.84
3.80	0.92	11.28	6.00	1.07	15.56
4.00	0.92	11.56	7.00	1.06	18.28
4.50	0.93	12.91	8.00	1.05	21.00
5.00	0.93	14.28	9.00	1.04	23.72

Table 2 : Paramètres des modèles VII à X

## Réglage des régulateurs avec action intégrale

Modèle		Réglage				
Type	Fonction de transfert	$K_c$	$T_i$	$T_d$	$T_f$	$T_c$
I	$\frac{K_p}{1+T_1s}, T_1 > 0$	$\frac{T_1}{K_p T_H}$	$T_1$	-	-	-
II	$\frac{K_p e^{-\theta s}}{1+T_1s}, T_1 > 0$	$\frac{T_1}{K_p(T_1+\theta)}$ équ. 13	$T_1$ équ. 11	-	-	-
III	$\frac{K_p}{s}$	$\frac{4.2}{K_p T_r}$	$0.47T_r$	-	-	$T_i$
V ( $\theta = 0$ )	$\frac{K_p e^{-\theta s}}{(1+T_1s)^2}, T_1 > 0$	$\frac{T_1}{K_p(T_1+\theta)}$	$1.5T_1$	-	-	-
VI ( $\theta > 0$ )		équ. 13	équ. 11	-	-	-
VII ( $\theta = 0$ )	$\frac{K_p(1-T_{0i}s)e^{-\theta s}}{(1+T_1s)^2}, T_1 > 0, T_{0i} > 0$	$\frac{T_1}{K_p(T_1+T_{0i}+\theta)}$	$1.5T_1$	-	-	-
VIII ( $\theta > 0$ )		équ. 13	équ. 11	-	-	-
IX	$\frac{K_p(1+T_{0s}s)}{(1+T_1s)^2}, T_1 > 0, T_{0s} > 0$	$\frac{T_1}{K_p T_H}$	$T_1$	$T_1$	$T_{0s}$	
X	$\frac{K_p(1+T_{0s}s)e^{-\theta s}}{(1+T_1s)^2}, T_1 > 0, T_{0s} > 0$	$\frac{T_1}{K_p(T_1+T_{0s}+\theta)}$	$1.5T_1$	-	$T_{0s}$	
		équ. 13	équ. 11	-	$T_{0s}$	-
XIII ( $\theta = 0$ )	$\frac{K_p e^{-\theta s}}{(1+T_1s)s}, T_1 > 0$	équ. 18	équ. 16	-	-	$T_i$
XIV ( $\theta > 0$ )						
Le régulateur est $G_c(s) = \frac{K_c(1+T_i s)(1+T_d s)}{T_i s(1+T_f s)}$ .						
Le filtre sur la consigne est $F(s) = \frac{1}{1+T_c s}$ .						
$T_H$ est la constante de temps désirée de $H(s) = \frac{1}{1+T_H s}$ .						
$T_r$ est le temps de réponse désiré de $\frac{Y(s)}{R(s)}$ .						

Table 2: Réglages des régulateurs à action intégrale

Méthode des contours - procédés stables asymptotiquement:

$$T_i = \begin{cases} \left(1 + 0.175 \frac{\theta}{T_1} + 0.3 \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 + 0.2 \frac{T_2}{T_1}\right) T_1 & \frac{\theta}{T_1} \leq 2 \\ \left(0.65 + 0.35 \frac{\theta}{T_1} + 0.3 \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 + 0.2 \frac{T_2}{T_1}\right) T_1 & \frac{\theta}{T_1} > 2 \end{cases} \quad (11)$$

$$1.015 = \frac{-\pi}{2} + \arctan \omega_0 T_i - \arctan \omega_0 T_0 - \arctan \omega_0 T_1 - \arctan \omega_0 T_2 - \omega_0 \theta + \pi \quad (12)$$

$$K_c = \frac{T_i}{K} \sqrt{\frac{(T_1 T_2)^2 \omega_0^6 + (T_1^2 + T_2^2) \omega_0^4 + \omega_0^2}{(T_i T_0)^2 \omega_0^4 + (T_i^2 + T_0^2) \omega_0^2 + 1}} \quad (13)$$

Méthode des contours - procédés avec une intégration:

$$A_{max} = \frac{10^{0.05 M_r}}{\sqrt{10^{0.1 M_r} - 1}} \quad (14)$$

$$\phi_{max} = -\pi + \arccos A_{max}^{-1} \quad (15)$$

$$T_i = \frac{16(T + \theta)}{(2\phi_{max} + \pi)^2} \quad (16)$$

$$\omega_{max} = \frac{1}{\sqrt{T_i(T + \theta)}} \quad (17)$$

$$K_c = \frac{T_i A_{max}}{K} \sqrt{\frac{T^2 \omega_{max}^6 + \omega_{max}^4}{T_i^2 \omega_{max}^2 + 1}} \quad (18)$$

# Transformation de Laplace

$$F(s) \text{ sans pôles}$$

$f(t)$ pour $t \geq 0^-$	$F(s)$	Pôles de $F(s)$
$\delta(t)$	1	Aucun

$$F(s) \text{ avec des pôles simples (réels ou conjugués)}$$

$f(t)$ pour $t > 0$	$F(s)$	Pôles de $F(s)$
1 ou $u_e(t)$	$\frac{1}{s}$	0
$e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$	$-a$
$\sin(\omega t + \phi)$	$\frac{[\sin \phi]s + \omega \cos \phi}{s^2 + \omega^2}$	$\pm j\omega$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\pm j\omega$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\pm j\omega$
$e^{-at} \cos(\omega t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$-a \pm j\omega$
$e^{-at} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$-a \pm j\omega$

$$F(s) \text{ avec des pôles multiples}$$

$f(t)$ pour $t > 0$	$F(s)$	Pôles de $F(s)$
t	$\frac{1}{s^2}$	0 (double)
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}, n = 1, 2, 3, \dots$	$\frac{1}{s^n}$	0 (ordre $n$ )
$te^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$-a$ (double)
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}, n = 1, 2, 3, \dots$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$-a$ (ordre $n$ )
$t \cos(\omega t)$	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$	$\pm j\omega$ (double)
$\frac{t}{2\omega} \sin(\omega t)$	$\frac{s}{(s^2 + \omega^2)^2}$	$\pm j\omega$ (double)
$\frac{t^2}{2\omega} \sin(\omega t)$	$\frac{3s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^3}$	$\pm j\omega$ (triple)

Table 1: Transformées de Laplace

$$\mathcal{L}f'(t) \text{ (pour } t > 0) = s\mathcal{L}f(t) - f(0^+) \quad (1)$$

$$\mathcal{L} \left[ \int_0^t f(\tau) d\tau \right] = \frac{1}{s} \mathcal{L}f(t) \quad (2)$$

$$f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s\mathcal{L}f(t) \quad (3)$$

$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s\mathcal{L}f(t) \quad (4)$$

$$\mathcal{L}f(t - \theta)u_e(t - \theta) = e^{-\theta s} \mathcal{L}f(t)u_e(t) \quad (5)$$

$$\mathcal{L} \left[ \int_0^t f_1(\tau)f_2(t - \tau) d\tau \right] = F_1(s)F_2(s) \quad (6)$$

## Systèmes du second ordre

$$G(s) = \frac{K}{\frac{1}{\omega_n^2} s^2 + \frac{2z}{\omega_n} s + 1} \quad (7)$$

$$\omega_p = \omega_n \sqrt{1 - z^2} \quad (8)$$

$$\omega_R = \omega_n \sqrt{1 - 2z^2} \quad (9)$$

$$Q = \frac{|G(j\omega_R)|}{|G(j0)|} = \frac{1}{2z\sqrt{1 - z^2}} \quad (10)$$

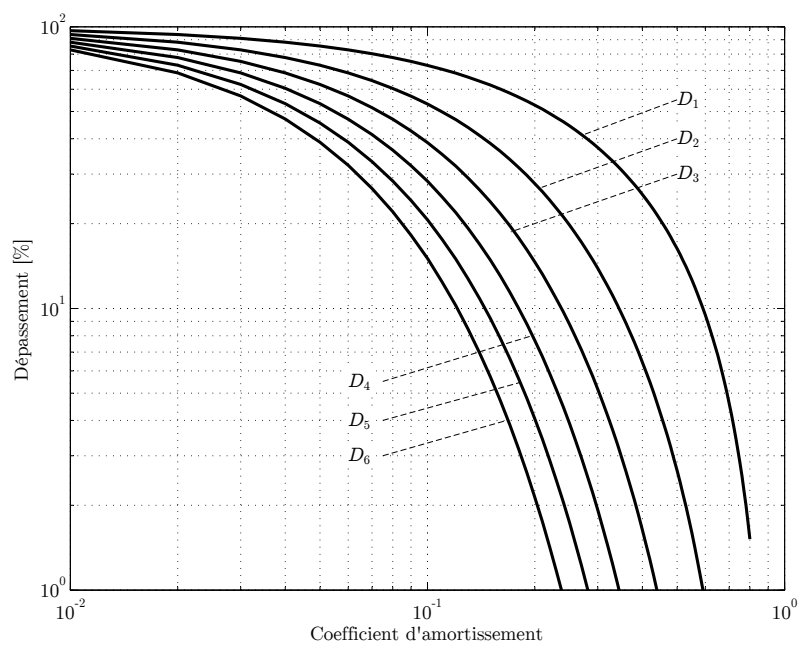


Figure 1: Les dépassements de la réponse à l'échelon versus le coefficient d'amortissement

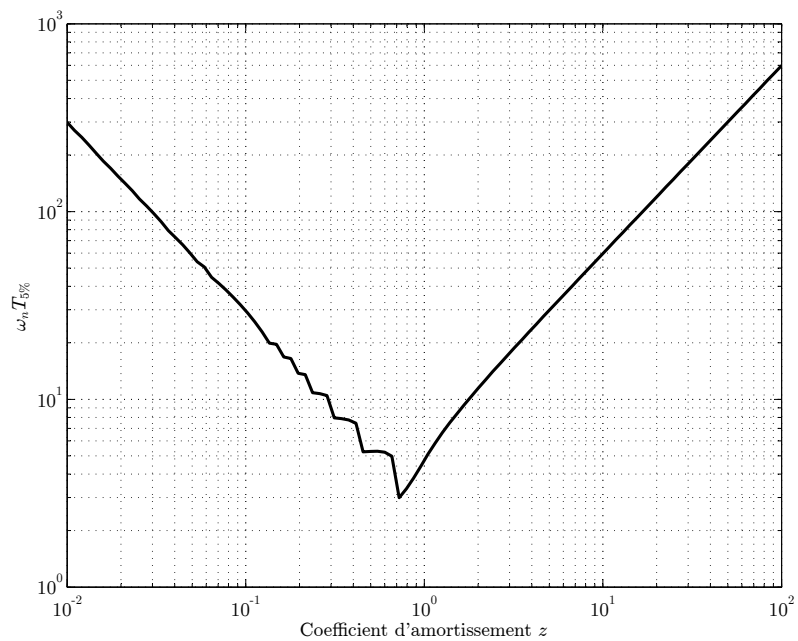


Figure 2: Le temps de réponse à  $\pm 5\%$ .

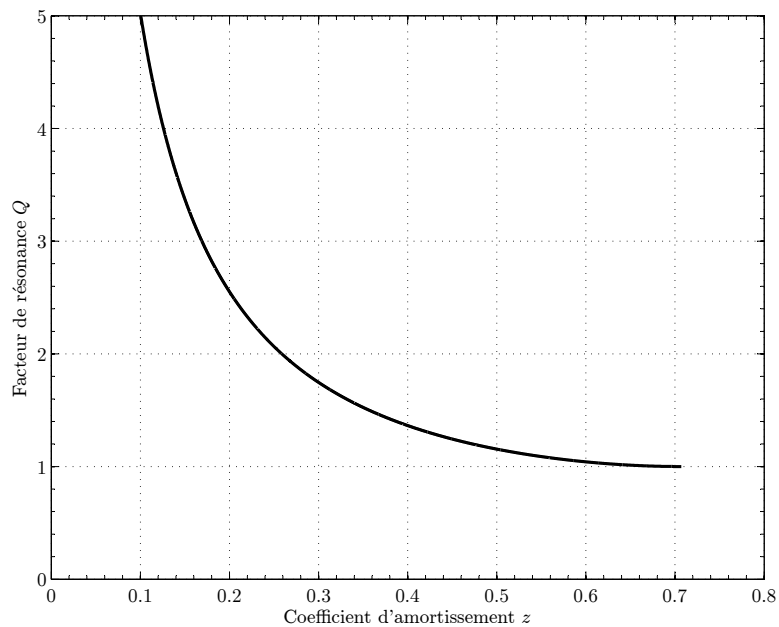
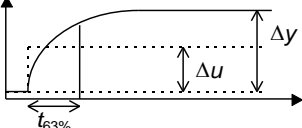
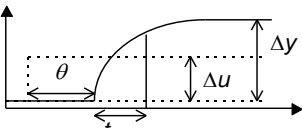
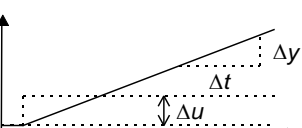
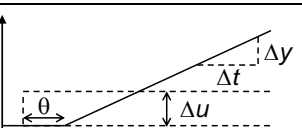
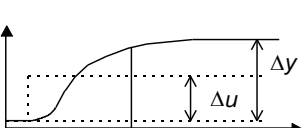
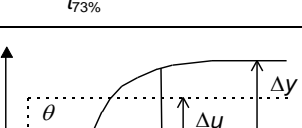
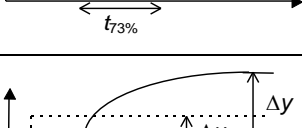
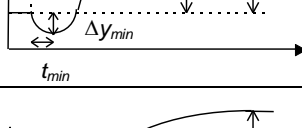
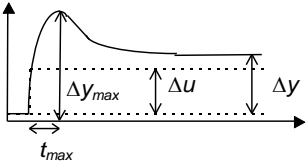
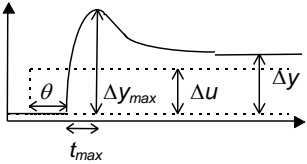
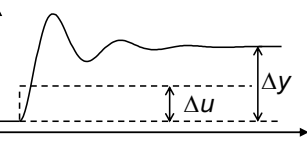
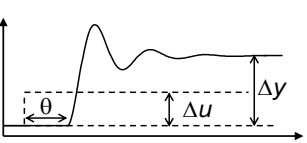
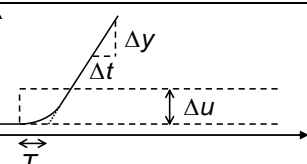
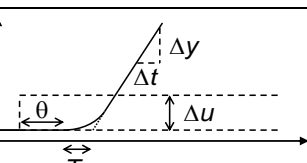


Figure 3: Le facteur de résonance versus le coefficient d'amortissement



## Identification des systèmes

Type	Modèle Fonction de transfert	Réponse à l'échelon	Paramètres
I	$\frac{K_p}{1+T_1 s}, T_1 > 0$		$K_p = \frac{\Delta y}{\Delta u}$ $T_1 = t_{63\%}$
II	$\frac{K_p e^{-\theta s}}{1+T_1 s}, T_1 > 0$		$K_p = \frac{\Delta y}{\Delta u}$ $T_1 = t_{63\%}$
III	$\frac{K_p}{s}$		$K_p = \frac{\Delta y}{\Delta t \Delta u}$
IV	$\frac{K_p e^{-\theta s}}{s}$		$K_p = \frac{\Delta y}{\Delta t \Delta u}$
V	$\frac{K_p}{(1+T_1 s)^2}, T_1 > 0$		$K_p = \frac{\Delta y}{\Delta u}$ $T_1 = \frac{t_{73\%}}{2.6}$
VI	$\frac{K_p e^{-\theta s}}{(1+T_1 s)^2}, T_1 > 0$		$K_p = \frac{\Delta y}{\Delta u}$ $T_1 = \frac{t_{73\%}}{2.6}$
VII	$\frac{K_p (1-T_{0i} s)}{(1+T_1 s)^2}, T_1 > 0, T_{0i} > 0$		$K_p = \frac{\Delta y}{\Delta u}$ Table 2
VIII	$\frac{K_p (1-T_{0i} s) e^{-\theta s}}{(1+T_1 s)^2}, T_1 > 0, T_{0i} > 0$		$K_p = \frac{\Delta y}{\Delta u}$ Table 2

Type	Modèle Fonction de transfert	Réponse à l'échelon	Paramètres
IX	$\frac{K_p(1+T_{0s}s)}{(1+T_1s)^2}, T_1 > 0, T_{0s} > T_1$		$K_p = \frac{\Delta y}{\Delta u}$ Table 2
X	$\frac{K_p(1+T_{0s}s)e^{-\theta s}}{(1+T_1s)^2}, T_1 > 0, T_{0s} > T_1$		$K_p = \frac{\Delta y}{\Delta u}$ Table 2
XI	$\frac{K_p}{\frac{1}{\omega_n^2}s^2 + \frac{2z}{\omega_n}s + 1}, 0 < z < 1, \omega_n > 0$		$K_p = \frac{\Delta y}{\Delta u}$ $z$ : dépassements (fig. 1) $\omega_n$ : $\omega_p$ ou $T_{5\%}$ (fig. 2)
XII	$\frac{K_p e^{-\theta s}}{\frac{1}{\omega_n^2}s^2 + \frac{2z}{\omega_n}s + 1}, 0 < z < 1, \omega_n > 0$		$K_p = \frac{\Delta y}{\Delta u}$ $z$ : dépassements (fig. 1) $\omega_n$ : $\omega_p$ ou $T_{5\%}$ (fig. 2)
XIII	$\frac{K_p}{(1+T_1s)s}, T_1 > 0$		$K_p = \frac{\Delta y}{\Delta t \Delta u}$
XIV	$\frac{K_p e^{-\theta s}}{(1+T_1s)s}, T_1 > 0$		$K_p = \frac{\Delta y}{\Delta t \Delta u}$

<b>Types VII et VIII</b>			<b>Types IX et X</b>		
$-\Delta y_{min} / \Delta y$	$t_{min} / T_1$	$T_{0i} / T_1$	$\Delta y_{max} / \Delta y$	$t_{max} / T_1$	$T_{0s} / T_1$
0.01	0.14	0.16	1.02	3.13	1.47
0.02	0.19	0.23	1.04	2.69	1.59
0.03	0.22	0.29	1.06	2.45	1.69
0.04	0.25	0.34	1.08	2.28	1.78
0.05	0.28	0.39	1.10	2.16	1.86
0.06	0.31	0.44	1.15	1.95	2.05
0.07	0.32	0.48	1.20	1.81	2.23
0.08	0.34	0.52	1.25	1.72	2.39
0.09	0.36	0.56	1.30	1.65	2.55
0.10	0.38	0.60	1.35	1.58	2.71
0.20	0.49	0.96	1.40	1.54	2.86
0.30	0.56	1.28	1.45	1.50	3.01
0.40	0.61	1.58	1.50	1.46	3.16
0.50	0.65	1.88	1.55	1.43	3.31
0.60	0.68	2.17	1.60	1.41	3.45
0.70	0.71	2.46	1.65	1.38	3.60
0.80	0.73	2.75	1.70	1.36	3.74
0.90	0.75	3.03	1.75	1.35	3.88
1.00	0.77	3.32	1.80	1.33	4.03
1.10	0.78	3.60	1.85	1.32	4.17
1.20	0.79	3.87	1.90	1.30	4.31
1.30	0.81	4.15	1.95	1.29	4.45
1.40	0.82	4.43	2.00	1.28	4.60
1.50	0.82	4.70	2.10	1.26	4.87
1.60	0.83	4.98	2.20	1.24	5.16
1.70	0.84	5.26	2.30	1.23	5.43
1.80	0.85	5.53	2.40	1.21	5.71
1.90	0.85	5.81	2.50	1.20	5.98
2.00	0.86	6.09	2.60	1.19	6.26
2.20	0.87	6.63	2.70	1.18	6.54
2.40	0.88	7.18	2.80	1.17	6.81
2.60	0.89	7.72	2.90	1.16	7.09
2.80	0.89	8.27	3.00	1.16	7.36
3.00	0.90	8.82	3.50	1.13	8.73
3.20	0.90	9.37	4.00	1.11	10.10
3.40	0.91	9.91	4.50	1.10	11.47
3.60	0.91	10.46	5.00	1.08	12.84
3.80	0.92	11.28	6.00	1.07	15.56
4.00	0.92	11.56	7.00	1.06	18.28
4.50	0.93	12.91	8.00	1.05	21.00
5.00	0.93	14.28	9.00	1.04	23.72

Table 2 : Paramètres des modèles VII à X

## Réglage des régulateurs avec action intégrale

Type	Modèle Fonction de transfert	Réglage				
		$K_c$	$T_i$	$T_d$	$T_f$	$T_c$
I	$\frac{K_p}{1+T_1s}, T_1 > 0$	$\frac{T_1}{K_p T_H}$	$T_1$	-	-	-
II	$\frac{K_p e^{-\theta s}}{1+T_1s}, T_1 > 0$	$\frac{T_1}{K_p(T_1+\theta)}$	$T_1$	-	-	-
		équ. 13	équ. 11	-	-	-
III	$\frac{K_p}{s}$	$\frac{4.2}{K_p T_r}$	$0.47T_r$	-	-	$T_i$
V ( $\theta = 0$ )	$\frac{K_p e^{-\theta s}}{(1+T_1s)^2}, T_1 > 0$	$\frac{T_1}{K_p(T_1+\theta)}$	$1.5T_1$	-	-	-
VI ( $\theta > 0$ )		équ. 13	équ. 11	-	-	-
VII ( $\theta = 0$ )	$\frac{K_p(1-T_{0i}s)e^{-\theta s}}{(1+T_1s)^2}, T_1 > 0, T_{0i} > 0$	$\frac{T_1}{K_p(T_1+T_{0i}+\theta)}$	$1.5T_1$	-	-	-
VIII ( $\theta > 0$ )		équ. 13	équ. 11	-	-	-
IX	$\frac{K_p(1+T_{0s}s)}{(1+T_1s)^2}, T_1 > 0, T_{0s} > 0$	$\frac{T_1}{K_p T_H}$	$T_1$	$T_1$	$T_{0s}$	
X	$\frac{K_p(1+T_{0s}s)e^{-\theta s}}{(1+T_1s)^2}, T_1 > 0, T_{0s} > 0$	$\frac{T_1}{K_p(T_1+T_{0s}+\theta)}$	$1.5T_1$	-	$T_{0s}$	
		équ. 13	équ. 11	-	$T_{0s}$	-
XIII ( $\theta = 0$ )	$\frac{K_p e^{-\theta s}}{(1+T_1s)s}, T_1 > 0$	équ. 18	équ. 16	-	-	$T_i$
XIV ( $\theta > 0$ )						
Le régulateur est $G_c(s) = \frac{K_c(1+T_i s)(1+T_d s)}{T_i s(1+T_f s)}$ . Le filtre sur la consigne est $F(s) = \frac{1}{1+T_c s}$ . $T_H$ est la constante de temps désirée de $H(s) = \frac{1}{1+T_H s}$ . $T_r$ est le temps de réponse désiré de $\frac{Y(s)}{R(s)}$ .						

Table 2: Réglages des régulateurs à action intégrale

Méthode des contours - procédés stables asymptotiquement:

$$T_i = \begin{cases} \left(1 + 0.175 \frac{\theta}{T_1} + 0.3 \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 + 0.2 \frac{T_2}{T_1}\right) T_1 & \frac{\theta}{T_1} \leq 2 \\ \left(0.65 + 0.35 \frac{\theta}{T_1} + 0.3 \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 + 0.2 \frac{T_2}{T_1}\right) T_1 & \frac{\theta}{T_1} > 2 \end{cases} \quad (11)$$

$$1.015 = \frac{-\pi}{2} + \arctan \omega_0 T_i - \arctan \omega_0 T_0 - \arctan \omega_0 T_1 - \arctan \omega_0 T_2 - \omega_0 \theta + \pi \quad (12)$$

$$K_c = \frac{T_i}{K} \sqrt{\frac{(T_1 T_2)^2 \omega_0^6 + (T_1^2 + T_2^2) \omega_0^4 + \omega_0^2}{(T_i T_0)^2 \omega_0^4 + (T_i^2 + T_0^2) \omega_0^2 + 1}} \quad (13)$$

Méthode des contours - procédés avec une intégration:

$$A_{max} = \frac{10^{0.05 M_r}}{\sqrt{10^{0.1 M_r} - 1}} \quad (14)$$

$$\phi_{max} = -\pi + \arccos A_{max}^{-1} \quad (15)$$

$$T_i = \frac{16(T + \theta)}{(2\phi_{max} + \pi)^2} \quad (16)$$

$$\omega_{max} = \frac{1}{\sqrt{T_i(T + \theta)}} \quad (17)$$

$$K_c = \frac{T_i A_{max}}{K} \sqrt{\frac{T^2 \omega_{max}^6 + \omega_{max}^4}{T_i^2 \omega_{max}^2 + 1}} \quad (18)$$

**Réponses :**

Q.1  $|G'(j\omega_0)| = \frac{|G(j\omega_0)|}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega_0^2}} = 1$  ,  $\angle G'(j\omega_0) = \angle G(j\omega_0) - \arctan(\tau\omega_0) = -\pi$

Q.2  $G_c(s)$  doit posséder au moins un intégrateur (voir notes de cours pour démonstration)

Q.3 3.8

Q.4 a)  $G_{ci}(s) = 0.035$

b) Oui, car le système que contrôle  $G_{co}(s)$  est  $Y(s)/R_i(s)$  qui ne contient pas d'intégrateur.

Pour une erreur statique nulle suite à un changement de consigne  $R(s)$ , il faut un intégrateur dans  $G(s)$ , donc il est nécessaire que  $G_{co}(s)$  en ait un.

Q.5 a) 4.23

b) 2.82

c) 7.9

d) 0

Q.B 0.5