Problème 1 (24 point sur 100)

Pour $f(t)=3+2\cos(3\pi t)-4\sin(\pi t)$ avec coefficients de la série de Fourier $F(n)=A(n)+jB(n)$

$\omega_0=\pi \Rightarrow \begin{array}{l}\pi t = 1\cdot\omega_0 t \checkmark \\ 3\pi t = 3\cdot\omega_0 t \checkmark\end{array}$

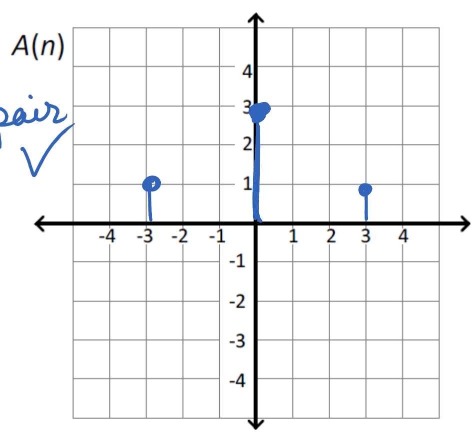
$$f(t)=3+2\cdot\frac{1}{2}\left[e^{j3\pi t}+e^{-j3\pi t}\right]-4\cdot\frac{1}{2j}\left[e^{j\pi t}-e^{-j\pi t}\right]$$

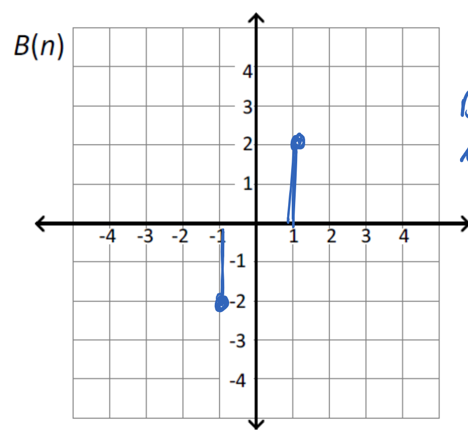
$$= \underset{\uparrow\ F(0)\ \uparrow\ A(0)}{3} + \underbrace{2j}_{\uparrow\ F(1)\ \uparrow\ B(1)}e^{j\pi t} - \underbrace{2j}_{\uparrow\ F(-1)\ B(-1)}e^{-j\pi t} + \underset{\uparrow\ F(3)\ A(3)}{e^{j3\pi t}} + \underset{\uparrow\ F(-3)\ A(-3)}{e^{-j3\pi t}}$$

$$A(n)=\begin{cases}A(0)=3\\ A(3)=A(-3)=-1\\ A(n)=0 \quad \forall n\neq 0, |n|\neq 3\end{cases} \qquad B(n)=\begin{cases}B(1)=2\\ B(-1)=-2\\ B(n)=0 \ \forall |n|\neq 1\end{cases}$$

a) Donnez les graphiques de la partie réelle du spectre, $A(n)$, et la partie imaginaire du spectre, $B(n)$

pair ✓





B(n) impair ✓

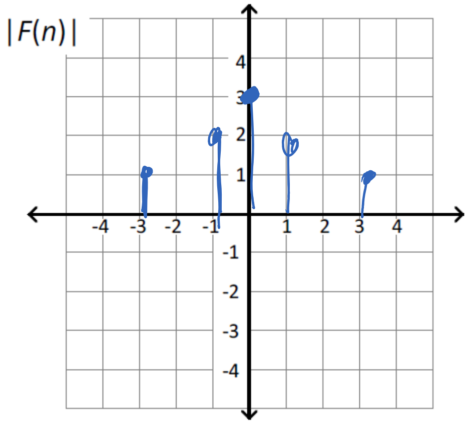
$$|F(n)|=\sqrt{A(n)^2+B(n)^2}$$

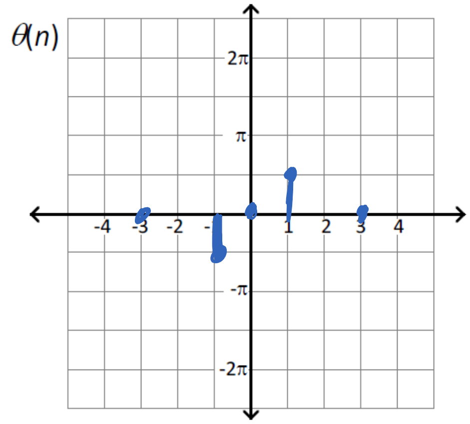
$|F(0)|=3 \qquad |F(1)|=|F(-1)|=2 \qquad |F(3)|=|F(-3)|=1$

$A(n)\neq 0, B(n)=0 \Rightarrow \theta(n)=0$

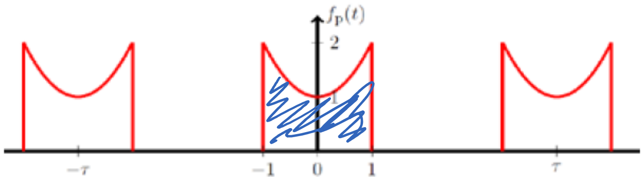
$B(n)\neq 0, A(n)=0 \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$ $\leftarrow \begin{cases} e^{j\pi/2}=\cos\frac{\pi}{2}+j\sin\frac{\pi}{2}=j\\ e^{-j\pi/2}=\cos(-\frac{\pi}{2})-j\sin\frac{\pi}{2}=-j\end{cases}$

b) Donnez les graphiques du module du spectre, $|F(n)|$, et la phase du spectre, $\theta(n)$





a)



F(*n*) :

décroissance : 1/n $1/n^2$

réel imaginaire pur complexe

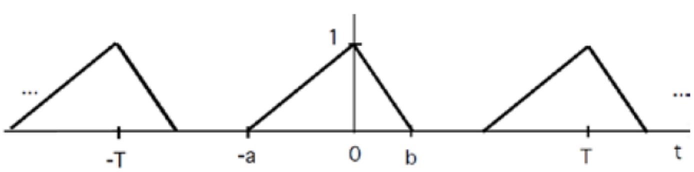
F(0) = 0 $F(0) \neq 0$

f(t) paire ⇒ F(n) réel

f(t) a discontinuités ⇒ décroissance 1/n

F(0) = valeur moyenne > 0 .

b)



F(*n*) :

décroissance : 1/n $1/n^2$

réel imaginaire pur complexe

F(0) = 0 $F(0) \neq 0$

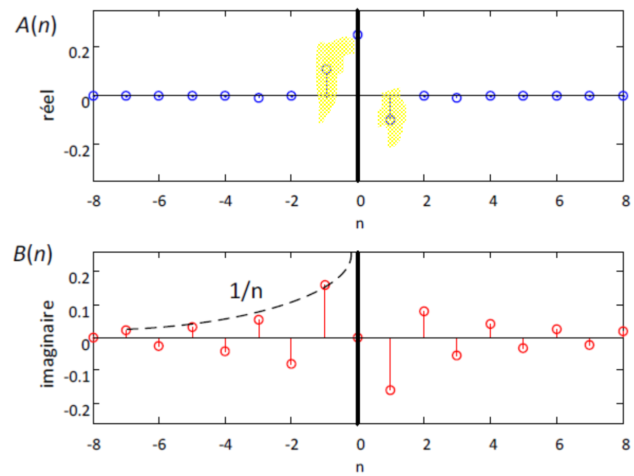
pas de symmetrie par rapport à t = 0 ⇒
f(t) ni paire, ni impaire ⇒ F(n) complexe

f(t) n'a pas de discontinuité, mais la pente a des discontinuités ⇒ decroissance $1/n^2$

l'aire sous la courbe est > 0

$\Rightarrow F(0) \neq 0$

c)



$f(t)$:

PAIR IMPAIR ni pair, ni impair

continue pas continue

réel complexe

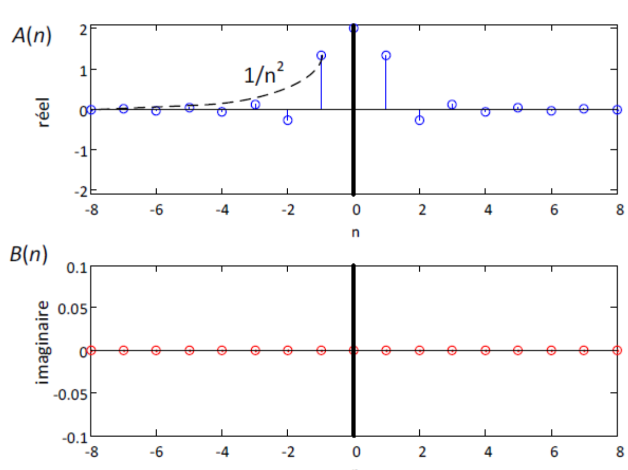
Note que $A(n)$ n'est pas pair!

$\Rightarrow f(t)$ n'est pas réel $\Rightarrow f(t)$ complexe

ni $A(n)=0$, ni $B(n)=0$ $\Rightarrow f(t)$ ni paire ni impaire

décroissance $1/n \Rightarrow f(t)$ discontinue

d)



$f(t)$:

PAIR IMPAIR ni pair, ni impair

continue pas continue

réel complexe

$B(n)=0 \Rightarrow F(n)$ réel $\Rightarrow f(t)$ paire

decroissance $1/n^2 \Rightarrow f(t)$ continue

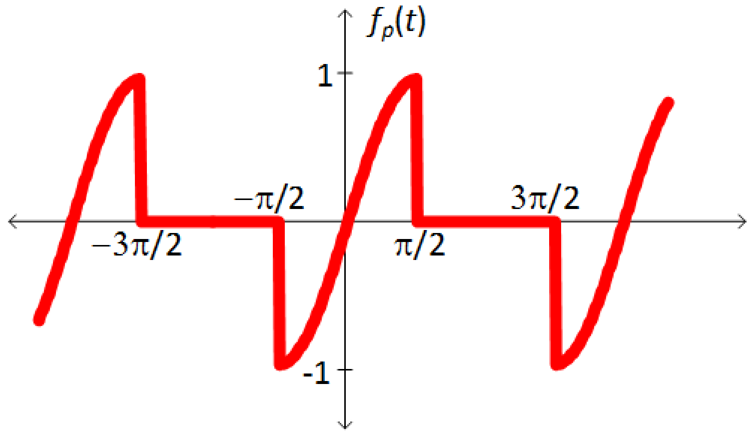
$A(n)$ pair $\Rightarrow f(t)$ réel

Problème 3 (52 points sur 100)

Calculez la série de Fourier de $f(t)$ suivante (période de 2π).

$$f_p(t)=\begin{cases}\sin t & -\pi/2<t<\pi/2\\ 0 & -\pi/2>t\ ,\ t>\pi/2\end{cases}$$

$$f_p(t)=f_p(t+2\pi) \qquad \omega_0=\frac{2\pi}{2\pi}=1$$



$$F(n) = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin t\ e^{-jnt}\, dt$$

utilisons:

$$\int e^{bx}\sin ax \quad dx = \frac{1}{a^2+b^2}\, e^{bx}\,(b\sin ax - a\cos ax)$$

$$a=1 \qquad b=-jn$$

$$F(n)=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{1^2+(-jn)^2}\left[e^{-jnt}(-jn\sin t-\cos t)\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$=\frac{1}{\ldots}\ \frac{1}{\ldots}\ \left[e^{-j\frac{\pi}{2}n}\left(-jn\sin\tfrac{\pi}{2}-\cancel{\cos\tfrac{\pi}{2}}^{\,0}\right)\right.$$

$|n| \neq 1$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1-n^2} \left[e^{-j\frac{\pi}{2}n} \left(-jn \sin\tfrac{\pi}{2} - \cancel{\cos\tfrac{\pi}{2}}^{\,0} \right) - e^{j\frac{\pi}{2}n} \left(-jn \sin(-\tfrac{\pi}{2}) - \cancel{\cos(-\tfrac{\pi}{2})}^{\,0} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1-n^2} \, -jn \left[\sin\tfrac{\pi}{2} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}n} + \sin\tfrac{\pi}{2} \, e^{j\frac{n\pi}{2}} \right]$$

$$= \frac{jn}{2\pi(1-n^2)} \left[e^{j\frac{n\pi}{2}} + e^{-j\frac{n\pi}{2}} \right] = \frac{jn}{\pi(1-n^2)} \cos\frac{n\pi}{2}$$

$$F(1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin t \; e^{-jt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j} \right] e^{-jt} dt$$

$$= \frac{1}{4\pi j} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[1 - e^{-2jt} \right] dt = \frac{1}{4\pi j} \left[\pi - \frac{e^{-2jt}}{-2j} \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \right]$$

$$= \frac{1}{4j} + \frac{1}{8\pi j^2} \left[e^{-2j\frac{\pi}{2}} - e^{2j\frac{\pi}{2}} \right] = \frac{1}{4j} + \frac{-1}{4\pi j} \; \frac{e^{j\pi} - e^{-j\pi}}{2j}$$

$$= \frac{1}{4j} - \frac{1}{4\pi j} \sin\pi = \frac{1}{4j} = -\frac{j}{4}$$

$$F(-1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin t \; e^{+jt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j} \right] e^{+jt} dt$$

$$= \frac{1}{4\pi j} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[-1 + e^{2jt} \right] dt = \frac{1}{4\pi j} \left[-\pi + \frac{e^{2jt}}{-2j} \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \right]$$

$$= \frac{-1}{4j} + \frac{1}{8\pi j^2} \left[-e^{-2j\frac{\pi}{2}} + e^{2j\frac{\pi}{2}} \right] = \frac{-1}{4j} + \frac{1}{4\pi j} \; \frac{e^{j\pi} - e^{-j\pi}}{2j}$$

$$= \frac{-1}{4j} + \frac{1}{4\pi j} \sin\pi = \frac{-1}{4j} = +\frac{j}{4}$$

$F(1) = \frac{-j}{4}$ $F(-1) = \frac{j}{4}$ $F(n) = \frac{jn/\pi}{1-n^2} \cos\frac{n\pi}{2}$ $|n| \neq 1$

Verification $F(0) = 0$ [$f_p(t)$ impaire!]

$F(0) = \frac{j \cdot 0}{\pi(1-0)} \cos 0 = \frac{1}{\pi} \cdot 0 = 0.$ ✓

✓ $f_p(t)$ impair $\Rightarrow$ imaginaire pur

$f_p(t)$ discontinue $\Rightarrow$ $1/n$ decroissance

✓ $F(n) \propto \frac{n}{1-n^2} \propto 1/n$