Final

MAT-2910 : Analyse Numérique pour ingénieur — Hiver 2019

- L'examen est noté sur 100 points et compte pour 30.0% de la note finale.
- Donner tous les développements et calculs. **Pour recevoir des points, toute réponse doit être convenablement** JUSTIFIÉE**.**
- Seules les calculatrices avec l'auto-collant de la Faculté sont autorisées.
- Répondre aux questions sur le questionnaire. **Utiliser le verso des feuilles si nécessaire**.
- Un aide mémoire se retrouve à la fin du questionnaire, vous pouvez le détacher.
- N'oubliez pas d'identifier chaque page.

Je suis bien l'étudiant dont le nom et le numéro de dossier sont écrits ci-dessous. J'ai lu et compris les directives et je m'engage à les respecter.	
Nom :	
Prénom :	
Matricule :	
Signature :	

À remplir par le(s) correcteur(s)

Q1 (/20)	Q2 (/20)	Q3 (/15)	Q4 (/25)	Q5 (/10)	Q6 (/10)	Total

Question 1 (5+5+5+5=20 pts) **Nom, Prénom :**________________________________

Pour l'approximation de $\int_0^1 f(x)\,dx$, on considère la formule de quadrature suivante

$$Q(f) = w_1 f(0) + w_2 f(t_2) + w_3 f(1)$$

a) Déterminer le degré d'exactitude (aussi appelé degré de précision) de cette formule pour les valeurs suivantes des paramètres : $w_1 = w_3 = \dfrac{1}{4}$, $w_2 = \dfrac{1}{2}$ et $t_2 = \dfrac{1}{2}$.
b) À l'aide du changement de variable $x = -\frac{\pi}{2} + \pi\, t$, $t \in [0, 1]$, donner une approximation de

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,dx$$

avec les valeurs précédemment spécifiées des paramètres w_1, w_2, w_3 et t_2.

suite de la question 1, page suivante...

Question 1 (5+5+5+5=20 pts) **Nom, Prénom :**______________________________

On aimerait maintenant déterminer les meilleures valeurs possibles des paramètres w_1, w_2, w_3 et t_2, de façon à maximiser le degré d'exactitude de la formule de quadrature.

c) Sans faire de calculs, expliquer pourquoi le degré d'exactitude attendu est 3.

d) Écrire ensuite le système non linéaire permettant de déterminer w_1, w_2, w_3 et t_2 (ne pas résoudre). Par quelle méthode numérique pourrait-on résoudre ce système non linéaire ?

Question 2 (10+5+5=20 pts) **Nom, Prénom :**______________________________

a) Démontrer que la formule de différence finie centrée pour f'' est bien une approximation d'ordre 2 de la dérivée seconde.

suite de la question 2, page suivante...

Question 2 (10+5+5=20 pts) **Nom, Prénom :**________________________________

b) Appliquer cette formule à $f(x) = e^x$ pour obtenir une approximation de $f''(0)$ avec $h = 0.1$, puis avec $h = 0.2$. Déduire de ces 2 approximations que la formule est bien d'ordre 2.
c) Déduire de ces 2 approximations une nouvelle approximation censée être meilleure.

Question 3 (5+5+5 = 15 pts) **Nom, Prénom :**____________________________

a) Faire 2 pas de temps du schéma d'Euler (aussi appelé Euler explicite) avec $h = 0.1$ appliqué à l'équation d'ordre 1 suivante :

$$\begin{cases} y'(t) = 2y(t) + t \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

suite de la question 3, page suivante...

Question 3 (5+5+5 = 15 pts) **Nom, Prénom :**____________________________

On considère à présent le schéma numérique suivant (dit d'Adams-Moulton, d'ordre 2) :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(t_{n+1}, y_{n+1}) + f(t_n, y_n))$$

Comme la méthode d'*Euler implicite* vue dans le devoir 2, c'est une méthode implicite (il faut résoudre une équation d'inconnue y_{n+1} à chaque pas de temps).

b) Faire 2 pas de temps du schéma d'Adams-Moulton avec $h = 0.1$ appliqué à l'équation différentielle d'ordre 1 de la question a).

suite de la question 3, page suivante...

Question 3 (5+5+5 = 15 pts) **Nom, Prénom :**____________________________

c) Écrire le système (ne pas résoudre ce système) correspondant au premier pas de temps du schéma d'Adams-Moulton avec $h = 0.1$, appliqué à l'équation d'ordre 2 suivante

$$\begin{cases} y''(t) = 2y'(t) + t \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Question 4 (10+5+5+5=25 pts) **Nom, Prénom :**________________________________

Le tableau suivant donne la viscosité dynamique d'un fluide (μ) en fonction de la température

T ($°C$)	0	10	20	40
μ (Pa.s)	6.2	5.5	4.5	3.1

a) À l'aide d'un polynôme d'interpolation de degré 2 (si vous avez le choix parmi plusieurs, prenez le meilleur !), donner une approximation de la viscosité pour une température de 30°.
b) Donner une estimation de l'erreur d'interpolation commise (à 30°).

suite de la question 4, page suivante...

Question 4 (10+5+5+5=25 pts) **Nom, Prénom :**________________________________

c) Toujours en utilisant le polynôme d'interpolation de la question a), déterminer une approximation de la température donnant une viscosité de 4 Pa.s.
d) Déterminer le polynôme d'interpolation de degré 1 interpolant une fonction f en a et b et en déduire la formule du trapèze

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\,(f(a)+f(b))$$

Question 5 (1+9=10 pts) **Nom, Prénom :**________________________________

Soit le code MATLAB suivant

```
function  x = ma_fonction(f,J, x0, nmax, epsilon)
x0 = x0';
x(1,:) = x0';
for n=1:AAA
    jac=J(x0);
    b = (-f(x0));
    delta = jac BBB b;
    x0 = x0 + delta;
    x(n+1,:) = x0';
    test = norm(b);
    tol = CCC(delta);
    tolrel = tol/(CCC(x0)+eps);
    if (tolrel < epsilon && test <= epsilon),
        break;
    end
end
```

a) À quelle méthode vue en classe correspond cette fonction MATLAB ? (il n'est pas nécessaire de justifier ici).

b) Par quoi doit-on remplacer chacune des triples lettres ? Choisissez parmi les 3 options proposées en cochant votre choix.

— **AAA** :
  - ☐ nmax
  - ☐ length(x0)
  - ☐ epsilon

— **BBB** :
  - ☐ /
  - ☐ \
  - ☐ ~

— **CCC** :
  - ☐ abs
  - ☐ norm
  - ☐ sqrt

Question 6 (5+5=10 pts) **Nom, Prénom :**________________________________

On considère la fonction $S(x)$ définie par

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) & = a + \dfrac{175}{16}(x-1) + \dfrac{b}{16}(x-1)^3, \quad 1 \leq x \leq 2 \\ \\ S_1(x) & = 9 + \dfrac{17}{8}(x-2) - \dfrac{141}{16}(x-2)^2 + 3(x-2)^3, \quad 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

et on considère les trois points $(1,1)$, $(2,9)$ et $(4,2)$.
a) Existe-t'il des constantes a et b telles que cette fonction interpole les trois points (si oui, les déterminer) ?
b) Est-ce une spline cubique ? Si oui, est-elle naturelle ?

Aide-mémoire MAT-2910

Interpolation

— Différences divisées : $f[x_i] = f(x_i)$,

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}, \quad f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{(x_{i+2} - x_i)}, \quad \text{etc.}$$

— Erreur d'interpolation :

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n) \ \text{ pour } \quad \xi(x) \in]x_0, x_n[$$

Différentiation et intégration numériques

— Dérivées d'ordre 1 :

$f'(x) = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} + O(h)$ *Différence avant d'ordre 1*
$f'(x) = \dfrac{f(x) - f(x-h)}{h} + O(h)$ *Différence arrière d'ordre 1*
$f'(x) = \dfrac{-f(x+2h) + 4f(x+h) - 3f(x)}{2h} + O(h^2)$ *Différence avant d'ordre 2*
$f'(x) = \dfrac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2)$ *Différence centrée d'ordre 2*
$f'(x) = \dfrac{3f(x) - 4f(x-h) + f(x-2h)}{2h} + O(h^2)$ *Différence arrière d'ordre 2*

— Dérivées d'ordre supérieur :

$f''(x) = \dfrac{f(x-2h) - 2f(x-h) + f(x)}{h^2} + O(h)$ *Différence arrière d'ordre 1*
$f''(x) = \dfrac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2} + O(h)$ *Différence avant d'ordre 1*
$f''(x) = \dfrac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + O(h^2)$ *Différence centrée d'ordre 2*

Question 6 (5+5=10 pts) **Nom, Prénom :**______________________________

— Formule des trapèzes :

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left(f(x_0) + 2\left[f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})\right] + f(x_n)\right) - \frac{(b-a)}{12} f''(\xi)h^2$$

— Formule de Simpson 1/3 :

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \cdots$$
$$+ 4f(x_{2n-3}) + 2f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})) - \frac{(b-a)}{180} f''''(\xi)h^4$$

— Formule de Simpson 3/8 :

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{3h}{8}(f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + 2f(x_3) + 3f(x_4) + \cdots$$
$$+ 2f(x_{3n-3}) + 3f(x_{3n-2}) + 3f(x_{3n-1}) + f(x_{3n})) - \frac{(b-a)f''''(\xi)}{80} h^4$$

— Intégration de Gauss (les w_i et t_i seront fournis si nécessaire) :

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{(b-a)}{2}\int_{-1}^1 f\left(\frac{(b-a)t + (a+b)}{2}\right)dt = \frac{(b-a)}{2}\int_{-1}^1 g(t)dt \simeq \frac{(b-a)}{2}\sum_{i=1}^n w_i g(t_i)$$

Équations différentielles : $y'(t) = f(t,y)$, $y(t_0) = y_0$

— Taylor (ordre 2) : $y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) + \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial f(t_n, y_n)}{\partial t} + \frac{\partial f(t_n, y_n)}{\partial y} f(t_n, y_n)\right)$

— Euler modifiée (ordre 2) : $\hat{y} = y_n + hf(t_n, y_n)$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(f(t_n, y_n) + f(t_n + h, \hat{y})\right)$$

— Point milieu (ordre 2) : $k_1 = hf(t_n, y_n)$

$$y_{n+1} = y_n + h\left(f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2})\right)$$