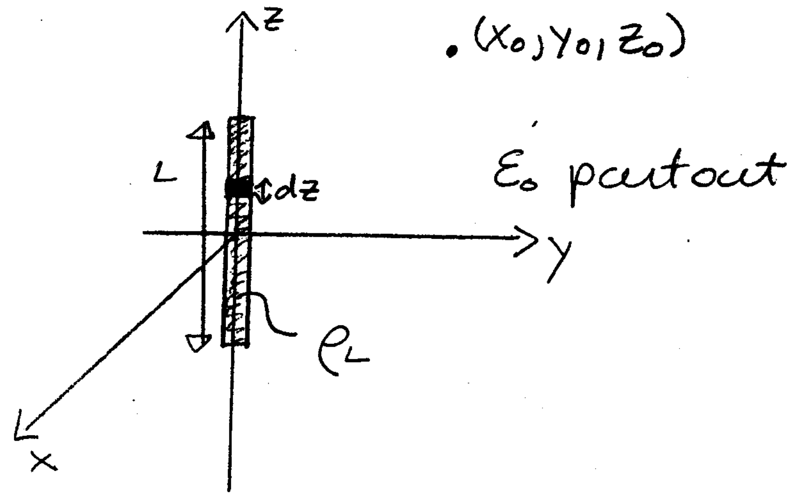
Résultat total (10 points) :

Question 1 (3 points) : On considère un fil <u>fini</u> de longueur L placé le long de l'axe z. Le fil est chargé avec une densité de charge linéaire uniforme ρ_l (C/m).

a) Quelle est la contribution au potentiel V d'un point de coordonnées (x_0,y_0,z_0) d'un petit élément infinitésimal, de longueur dz, situé sur l'axe à une position z?

b) Posez l'intégrale permettant de calculer le potentiel total au point (x_0,y_0,z_0). Il n'est pas nécessaire de résoudre l'intégrale.

c) Posez l'intégrale dans le cas où la densité de charge varie avec la position selon $\rho_l = \rho_0\,(z/L)^2$.



a) $$dV = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

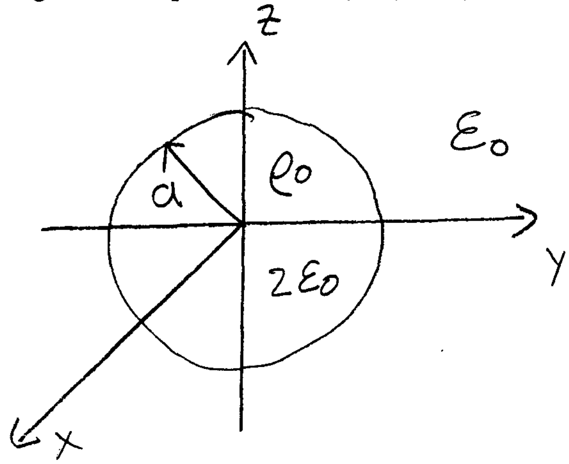
$$dV = \frac{\rho_L\, dz}{4\pi\varepsilon_0 \left(x_0^2+y_0^2+(z_0-z)^2\right)^{1/2}}$$

b) $$V_{tot} = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\rho_L\, dz}{4\pi\varepsilon_0 \left(x_0^2+y_0^2+(z_0-z)^2\right)^{1/2}}$$

c) $$V_{tot} = \frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0 L^2} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{z^2\, dz}{\left(x_0^2+y_0^2+(z_0-z)^2\right)^{1/2}}$$

z^2 dans l'intégrale

Question 2 (3 points) : On considère une sphère diélectrique de permittivité $2\varepsilon_0$ et de rayon a chargée uniformément avec une densité de charge volumique uniforme ρ_0 (C/m^3). Le champ électrique du système est donné par :



$$\vec{E}=\begin{cases}\dfrac{\rho_0 r}{6\varepsilon_0}\hat{i}_r & r<a\\[2ex] \dfrac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0 r^2}\hat{i}_r & r>a\end{cases}$$

Quelle est l'énergie du système?

$$W=\frac{1}{2}\iiint \varepsilon |E|^2 \, dv$$

$$W = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} \varepsilon \, |E|^2 \, r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

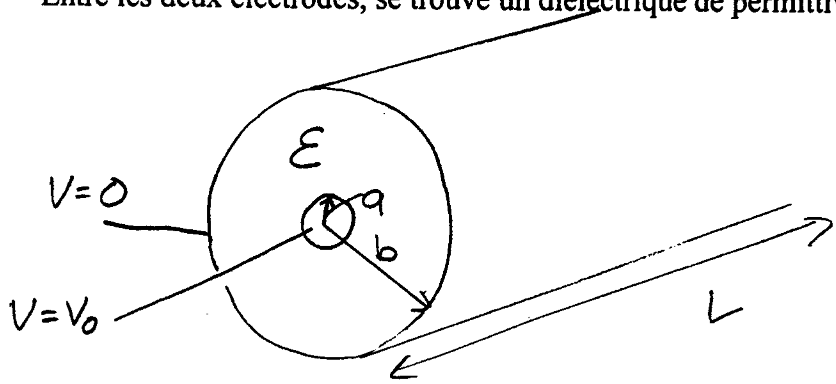
$$W = \frac{4\pi}{2}\left[\int_0^a 2\varepsilon_0 \left(\frac{\rho_0 r}{6\varepsilon_0}\right)^2 r^2 \, dr + \int_a^{\infty} \varepsilon_0 \left(\frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0 r^2}\right)^2 r^2 \, dr\right]$$

$$W = 2\pi\left[\frac{2\rho_0^2}{36\varepsilon_0}\int_0^a r^4 \, dr + \frac{\rho_0^2 a^6}{9\varepsilon_0}\int_a^{\infty}\frac{1}{r^2}\, dr\right]$$

$$W = \frac{2\pi\rho_0^2}{9\varepsilon_0}\left[\frac{1}{2}\,\frac{r^5}{5}\Big|_0^a + a^6\left(\frac{-1}{r}\right)\Big|_a^{\infty}\right]$$

$$W = \frac{2\pi\rho_0^2}{9\varepsilon_0}\left[\frac{a^5}{10} + a^5\right] = \frac{22}{90}\pi\,\frac{\rho_0^2 a^5}{\varepsilon_0}$$

Question 3 (4 points) : On considère un condensateur formé de deux électrodes cylindriques concentriques considérées infinies (L>>b). L'électrode interne a un rayon a et elle est maintenue à un potentiel $V=V_0$. L'électrode externe a un rayon b et elle est maintenue à un potentiel V=0. Entre les deux électrodes, se trouve un diélectrique de permittivité ε.



Démontrez que la capacité par unité de longueur de ce système est :

$$= \frac{C}{L} = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln(b/a)}$$

Il est suggéré de respecter les étapes suivantes :

- Trouver la fonction potentielle en fonction du rayon r.
- En déduire le champ électrique.
- Appliquer la condition aux limites appropriée à l'une des électrodes.
- Trouver la capacité par unité de longueur.

Si nécessaire vous pouvez utiliser : $\frac{d\ln(u)}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$ *et* $\ln(x^{-1}) = -\ln(x)$

1) Fnc V: $\nabla^2 V = 0$ entre les électrodes

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right)$$

$$r\frac{\partial V}{\partial r} = C_1$$

$$V(r) = C_1 \ln(r) + C_2$$

C.L $\begin{cases} r=a & V=V_0 \Rightarrow C_1 \ln(a) + C_2 = V_0 \\ r=b & V=0 \Rightarrow C_2 \ln(b) + C_2 = 0 \Rightarrow \boxed{C_2 = -C_1\ln(b)} \end{cases}$

et $C_1 = \frac{V_0}{\ln(a)-\ln(b)} = \frac{V_0}{\ln(a/b)}$

$$V(r) = C_1 \left(\ln(r) - \ln(b)\right)$$

$$V(r) = V_0 \frac{\ln(r/b)}{\ln(a/b)} = V_0 \frac{\ln(b/r)}{\ln(b/a)}$$

(0.5)

b) $$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{\partial V(r)}{\partial r} = -\frac{C_1}{r} = \frac{-V_0}{r\ln(a/b)} = \frac{V_0}{r\ln(b/a)}$$

c) $$\vec{D}_1 = \left[\varepsilon V_0 / a \ln(b/a)\right] \hat{a}_r$$

$\hat{a}_r$

$+ \; + \; + \; +$ $r=a$

$D_2 = 0$

$$\hat{a}_r \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \rho_s$$

$$\rho_s = \frac{\varepsilon V_0}{a \ln(b/a)}$$

$$Q_{tot} = \frac{2\pi \varepsilon V_0 L}{\ln(b/a)}$$

d) $$C = \frac{Q_{tot}}{\Delta V} = \frac{2\pi \varepsilon L}{\ln(b/a)}$$

$$\frac{C}{L} = \frac{2\pi \varepsilon}{\ln(b/a)}$$