Intra

MAT-2910 : Analyse Numérique pour ingénieur Hiver 2012

Remarques :

1) Toutes les réponses doivent être justifiées. Dans le cas contraire, une réponse sera considérée comme nulle.
2) Seules les calculatrices avec l'auto-collant de la Faculté sont autorisées.
3) L'examen est noté sur 100 points et compte pour 25.0% de la note finale.

Aide Mémoire

Analyse d'erreurs

– Développement de Taylor : $f(x_0 + h) = P_n(h) + R_n(h)$ où :

$$P_n(h) = f(x_0) + f'(x_0)\,h + \frac{f''(x_0)\,h^2}{2!} + \frac{f'''(x_0)\,h^3}{3!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)\,h^n}{n!} \quad \text{et}$$
$$R_n(h) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(h))\,h^{(n+1)}}{(n+1)!} \qquad \text{où } \xi(h) \text{ est compris entre } x_0 \text{ et } x_0 + h$$

– Une fonction $f(h)$ est un *grand ordre* de h^n au voisinage de 0 (noté $f(h) = O(h^n)$) s'il existe une constante positive C telle qu'au voisinage de 0 on a :

$$\left| \frac{f(h)}{h^n} \right| \leq C$$

– propagation d'erreurs en une variable :

$$\Delta f \simeq |f'(x^*)|\,\Delta x$$

– propagation d'erreurs en plusieurs variables :

$$\Delta f \simeq \left| \frac{\partial f(x^*, y^*, z^*)}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial f(x^*, y^*, z^*)}{\partial y} \right| \Delta y + \left| \frac{\partial f(x^*, y^*, z^*)}{\partial z} \right| \Delta z$$

Équations non linéaires

- Algorithme des points fixes : $x_{n+1} = g(x_n)$
- Convergence des méthodes de points fixes : si $e_n = x_n - r$ alors :

$$e_{n+1} = g'(r)e_n + \frac{g''(r)e_n^2}{2} + \frac{g'''(r)e_n^3}{3!} + \cdots$$

- Méthode de Steffenson : $x_1 = g(x_0)$ et $x_2 = g(x_1)$

$$x_e = x_0 - \frac{(x_1 - x_0)^2}{x_2 - 2x_1 + x_0}$$

- Méthode de Newton : $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
- Une racine r de la fonction $f(x)$ est *de multiplicité* m si $f(x) = (x - r)^m h(x)$ pour une fonction $h(x)$ qui vérifie $h(r) \neq 0$ ou encore si :

$$f(r) = f'(r) = f''(r) = \cdots = f^{(m-1)}(r) = 0, \quad f^{(m)}(r) \neq 0$$

- Taux de convergence de la méthode de Newton dans le cas d'une racine multiple : $1 - 1/m$
- Méthode de la sécante : $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$

Question 1. (20 points)

Soient

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 6 & -5 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

a) [7 pts] Est-ce que L et U forment une décomposition de Crout de A (justifier) ?

b) [3 pts] Calculer le déterminant de A. En déduire l'existence d'une solution de $Ax = b$

c) [10 pts] Résoudre le système $Ax = b$ en utilisant la décomposition.

Question 2. (15 points)

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 25 & 5 & 10 \\ 5 & 10 & 2 \\ 10 & 2 & 13 \end{pmatrix}$$

a) [10 pts] Vérifer que A possède une factorisation de Cholesky (justifier, sans calculer la factorisation) ?

b) [5 pts] Déterminer $a > 0$, b et c pour que $A = LL^t$ avec

$$L = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 3 & 0 \\ c & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Question 3. (15 points)

Sachant que pour une fonction f donnée, on peut écrire

$$f(1+h) = P_n(h) + R_n(h)$$

où

$$R_n(h) = \frac{h^5}{5!}\frac{1}{(\xi+1)}(\cos\xi + \sin\xi), \quad 1 < \xi < 1+h$$

a) [6 pts] Donner une majoration (en fonction de h) du terme d'erreur $R_n(h)$ pour $1 < \xi < 1+h$.

b) [3 pts] Donner l'ordre de l'approximation.

c) [6 pts] On approxime $f(1.1)$ par $P_n(0.1) = 0.1415926535$. Quel est le nombre de chiffres significatifs de cette approximation ? (utiliser la majoration obtenue en a))

Question 4. (25 points)

Soit

$$f(x) = x^2(\sin x)^2.$$

En utilisant la méthode de Newton pour résoudre l'équation $f(x) = 0$, on a obtenu les résultats suivant ($E_n = |x_{n+1} - x_n|$) :

n	x_n	$f(x_n)$	E_n	$\frac{E_{n+1}}{E_n}$	$\frac{E_{n+1}}{E_n^2}$
0	5.000000E-3	6.249948E-10	1.250005E-3	7.499976E-1	5.999956E+2
1	3.749994E-3	1.977519E-10	9.375009E-4	7.499986E-1	7.999978E+2
2	2.812493E-3	6.256986E-11	7.031244E-4	7.499992E-1	1.066666E+3
3	2.109369E-3	1.979748E-11	5.273428E-4	7.499996E-1	1.422224E+3
4	1.582026E-3	6.264046E-12	3.955068E-4	7.499998E-1	1.896300E+3
5	a	b	c	d	e
6	f				

a) [10 pts] Compléter le tableau en remplissant les entrées a, b, c, d, e et f.

b) [2 pts] En se basant sur le tableau, est-ce que la méthode converge ?

c) [4 pts] Si la méthode converge, quel en est l'ordre ? Donner le taux de convergence le cas échéant.

d) [4 pts] Que peut-on dire de la multiplicité de la racine ?

e) [5 pts] Proposer une méthode pour obtenir une convergence d'ordre supérieure (brièvement).

Question 5. (25 points)

On se propose d'étudier des méthodes de point fixe pour trouver une racine de

$$f(x) = x^3 - 21$$

.

a) [5 pts] Soient

$$g_1(x) = \sqrt{\frac{21}{x}}, \quad g_2(x) = \frac{2}{3}x + \frac{7}{x^2}$$

Vérifier que $r = (21)^{1/3}$, racine de f, est un point fixe de g_1 et g_2.

b) [10 pts] Vérifier la convergence de la méthode du point fixe appliquée à g_1 et g_2. Donner l'ordre de convergence dans chacun des cas.

c) [5 pts] Calculer les 2 premières itérations de la méthode du point fixe appliquée à g_1 si $x_0 = 1$.

d) [5 pts] Existe-t'il une condition sur les valeurs de x_0 lors de l'application de la méthode de point fixe à g_1 (justifier) ?