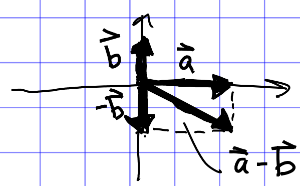
Examen 1 - Reprise : Solutionnaire

Q1 (a) Vrai, la matrice de permutation P permet de faire du pivot partiel, ce qui réduit l'erreur d'arrondis sur des coef. d'un ordre de grandeur différent.

(b) Faux, $\vec{c} = [c_1, -c_2]$ comme dessiné ci-contre



(c) Vrai, cette situation arrive quand il y au moins 2 équations redondantes dans le système d'équation

(d) Faux, les 3 vecteurs sont dans le même plan, ils sont donc nécessairement linéairement dépendants.

Q2 (a)

U:

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 5 & 2 \\ -2 & -10 & 3 \\ 4 & 13 & 1 \end{bmatrix} \overset{L_2+2L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \\ 4 & 13 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overset{L_3-4L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & -7 & -7 \end{bmatrix} \overset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\sim} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 5 & 2 \\ 0 & \boxed{-7} & -7 \\ 0 & 0 & \boxed{7} \end{bmatrix} = U$$

P:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = P$$

L:

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & & \\ -2 & & \\ 4 & & \end{bmatrix} \overset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\sim} \begin{bmatrix} \boxed{1} & & \\ 4 & \boxed{-7} & \\ -2 & 0 & \end{bmatrix} \overset{\frac{C_2}{-7}}{\sim} \begin{bmatrix} \boxed{1} & & \\ 4 & \boxed{1} & \\ -2 & 0 & \boxed{7} \end{bmatrix} \overset{\frac{C_3}{7}}{\sim} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 4 & \boxed{1} & 0 \\ -2 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix} = L$$

(b) Non, la factorisation LU sans permutation n'existe pas car il faut effectuer au moins 1 permutation pour réduire A en échelon, comme montré ci-dessus.

(c) ① $L\vec{y} = P\vec{b}$ ② $U\vec{x} = \vec{y}$

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad P\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

① $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = b_1 \\ y_2 = 4 - 4b_1 \\ y_3 = -1 + 2b_1 \end{cases}$

② $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ 4-4b_1 \\ -1+2b_1 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$x_3 = -1/7 + 2/7 b_1$$
$$x_2 = \left(4-4b_1 - \frac{7}{7} + \frac{14}{7}b_1\right)\left(\frac{-1}{7}\right)$$
$$= \left(\frac{-1}{7}\right)(4-1-4b_1+2b_1)$$
$$= -3/7 + 2/7 b_1$$
$$x_1 = b_1 - 2\left(\frac{-1}{7} + \frac{2}{7}b_1\right) - 5\left(-\frac{3}{7} + \frac{2}{7}b_1\right)$$
$$= b_1 + \frac{2}{7} - \frac{4}{7}b_1 + \frac{15}{7} - \frac{10}{7}b_1$$
$$= 17/7 - b_1$$

$$\vec{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 17/7 \\ -3/7 \\ -1/7 \end{bmatrix}}_{\vec{u}} + b_1 \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 2/7 \\ 2/7 \end{bmatrix}}_{\vec{v}}$$

(d) La solution précédante est définie pour toutes valeurs de b_1 dans $\mathbb{R}$, donc le système est consistant dans ce domaine.

```matlab
% ========================================================
% ======== Examen 1 - reprise, question 3  ==============
% ======== Solutionnaire                   ==============
% ======== Francis Gagnon, 2020-10-22      ==============
% ========================================================
%#ok<*NOPTS>

% ------------------------- (a) ------------------------
A = [-2 2 1 -3 -5;7 3 -1 6 -5;2 2 2 2 2];
b = [-1;1;3];
A_b_rref = rref([A b])

% ------------------------- (b) ------------------------
disp(['En introduisant les paramÃ¨tres r = x4 et s = x5, ',newline,...
      'la solution sous la forme vectorielle est:',newline,...
      'x = v0 + r*v1 + s*v2, oÃ¹:'])
v0 = [A_b_rref(:,end)  ; 0 ; 0]
v1 = [-1*A_b_rref(:,4) ; 1 ; 0]
v2 = [-1*A_b_rref(:,5) ; 0 ; 1]

% ------------------------- (c) ------------------------
C = orth(A)

% ------------------------- (d) ------------------------
N = null(A)

% ------------------------- (e) ------------------------
u = [-1;3;-3;0;1];
N_u_rref = rref([N u])
disp(['Le systÃ¨me Ny=u est consistant puisque la derniÃ¨re ',newline,...
      'colonne ne contient pas de pivot. Le vecteur u est ',newline,...
      'donc une combinaison linÃ©aire des colonnes de N, ',newline,...
      'contenant la base de Nul A. Il appatient donc au ',newline,...
      'sous-espace Nul A.'])
```

```
% ========================================================
% ======== Examen 1 - reprise, question 4  ==============
% ======== Solutionnaire                   ==============
% ======== Francis Gagnon, 2020-10-22      ==============
% ========================================================
%#ok<*NOPTS>

% -------------------------- (a) ------------------------
L = [0 2 1;0.17 0 0;0 0.94 0]

% -------------------------- (b) ------------------------
x0 = [5/9;3/9;1/9]*450;
n = 8;
x_data = zeros(3,n);
x = x0;
for i=1:n
    x = L*x;
    x_data(:,i) = x;
end
x_data = [x0,x_data];
t=10*(0:n)+2020;
figure();
plot(t,x_data);
xlabel('annÃ©e');
ylabel('individus');
legend('non mature (0 Ã  10 ans)',...
       'mature juvÃ©nile (11 Ã  20 ans)',...
       'mature adulte (21 Ã  30 ans)');
title('Ã‰volution de la population de bÃ©lugas femelles');

% -------------------------- (c) ------------------------
x_data_tot = sum(x_data);
figure();
plot(t,x_data_tot);
xlabel('annÃ©e');
ylabel('individus');
title('Ã‰volution de la population de bÃ©lugas femelles');

% -------------------------- (d) ------------------------
Aaug = [eye(3)-L,zeros(3,1)];
AaugR = rref(Aaug);
pop_longTerme = sum(AaugR(:,end))

% -------------------------- (e) ------------------------
disp('Non. Bien qu''il ya une lÃ©gÃ¨re croissance en 2030, la population')
disp('tend vers 0 Ã  trÃ¨s long terme. Le haut taux de mortalitÃ© des ');
disp('nouveaux-nÃ©es semble Ãªtre en cause.');
```