GEL19962 : Analyse des signaux

Mini-test 1 A2005 : Solutions

Département de génie électrique et de génie informatique

Problème 1 (1 pt)

On demande d'indentifier les coefficients complexes de Fourier pour la fonction suivante :

$$f(t) = 8 + 4\cos(3t) + \sin(9t)\,.$$

Par inspection, on trouve d'abord que $\omega_0 = 3$, ce qui nous donne :

$$f(t) = 8 + 4\cos(\omega_0 t) + \sin(3\omega_0 t)\,.$$

En utilisant les relations d'Euler, on trouve la fonction sous sa forme exponentielle :

$$f(t) = 8 + \frac{4}{2}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}\right] + \frac{1}{2\mathrm{j}}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}3\omega_0 t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}3\omega_0 t}\right]\,.$$

À partir de cette dernière expression, il est possible de retrouver les termes associés aux coefficients de Fourier...

$$f(t) = \underset{F(0)}{\underset{\uparrow}{8}} + \underset{F(-1)}{\underset{\uparrow}{2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}}} + \underset{F(1)}{\underset{\uparrow}{2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}}} + \underset{F(-3)}{\underset{\uparrow}{\tfrac{\mathrm{j}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}3\omega_0 t}}} - \underset{F(3)}{\underset{\uparrow}{\tfrac{\mathrm{j}}{2}\mathrm{e}^{+\mathrm{j}3\omega_0 t}}}\,.$$

Finalement on trouve les différents coefficients, nous permettant ainsi de déduire que la réponse est **A** :

$$F(0) = 8, \quad F(-1) = 2, \quad F(1) = 2, \quad F(-3) = \tfrac{\mathrm{j}}{2} \quad \text{et} \quad F(3) = \tfrac{-\mathrm{j}}{2}\,.$$

Problème 2 (1 pt)

Soit la fonction :

$$f(t) = t\sin t \quad \text{pour} \quad -2 \le t < 2\,,$$
$$f(t+4k) = f(t) \quad \text{pour} \quad k \in \mathcal{Z}\,.$$

De plus, la fonction $f(t)$ admet un développement en série de Fourier donné par :

$$F(n) = A(n) + \mathrm{j}B(n) = |F(n)|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\angle F(n)}\,.$$

a)

On demande si $F^*(-n) = F(n)$. On sait que pour une fonction réelle $F^*(n) = F(-n)$ (voir §2.2.2, p.11). Donc l'énoncé est **VRAI**, puisqu'on peut substituer n par $-n$ sans perte de généralité.

b)

Dans le cas présent, comme $F(n)$ est purement réel, $B(n) = 0$. Il n'est donc pas possible, avec cette fonction, de déterminer si $B(n)$ est réel ou non. Par contre, tel que défini ci-haut, $\mathrm{j}B(n)$ est toujours imaginaire, mais $B(n)$ est toujours réel quel que soit la situation. L'énoncé est donc **VRAI**.

c)

Une concéquence de la propriété énoncée en **a)** est que le spectre d'amplitude d'une fonction périodique réelle est pair et que son spectre de phase est impair. Donc $F(n)$, la fonction f(t) étant réelle, est pair ; l'énoncé est **FAUX**.

d)

La fonction $f(t)$ étant une fonction paire, le spectre de celle-ci sera purement réel. Donc, clairement, le terme $A(n)$, la partie réelle du spectre, ne peut pas être nul ; l'énoncé est **FAUX**.

Problème 3 (3 pts)

a)

On demande d'abord de trouver les coefficients complexes de Fourier pour la fonction donnée graphiquement. Pour cela on doit d'abord identifier correctement la fonction $f(t)$:

$$f(t) = \begin{cases} 2 & \text{pour} \quad 0 \leq t < 1 \\ 1 & \text{pour} \quad 1 \leq t < 2 \\ 0 & \text{pour} \quad 2 \leq t < 3 \end{cases}$$

À partir du graphique, il est aussi possible d'identifier la période ainsi que la fréquence angulaire de la fonction :

$$T_0 = 3, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{3} \,.$$

Enfin, toujours par inspection, on peut aussi identifier $F(0)$, la composante continue de la fonction $f(t)$:

$$F(0) = 1 \,.$$

Pour trouver les autres coefficients de Fourier, on peut appliquer directement la définition de $F(n)$:

$$\begin{aligned}
\underset{n\neq 0}{F(n)} &= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)\mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}\omega_0 nt}\mathrm{d}t \quad = \frac{1}{T_0}\int_0^1 2\mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}\omega_0 nt}\mathrm{d}t + \frac{1}{T_0}\int_1^2 \mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}\omega_0 nt}\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{T_0}\int_0^1 \mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}\omega_0 nt}\mathrm{d}t + \frac{1}{T_0}\int_1^2 \mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}\omega_0 nt}\mathrm{d}t \quad = \frac{2}{T_0}\left[\frac{\mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}\omega_0 nt}}{-\,\mathrm{j}\omega_0 n}\right]_{t=0}^{1} + \frac{1}{T_0}\left[\frac{\mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}\omega_0 nt}}{-\,\mathrm{j}\omega_0 n}\right]_{t=1}^{2} \\
&= \frac{2\mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}\omega_0 n}}{-\,\mathrm{j}\omega_0 nT_0} - \frac{2}{-\,\mathrm{j}\omega_0 nT_0} + \frac{\mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}2\omega_0 n}}{-\,\mathrm{j}\omega_0 nT_0} - \frac{\mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}\omega_0 n}}{-\,\mathrm{j}\omega_0 nT_0} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}2\omega_0 n}}{-\,\mathrm{j}\omega_0 nT_0} + \frac{\mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}\omega_0 n}}{-\,\mathrm{j}\omega_0 nT_0} - \frac{2}{-\,\mathrm{j}\omega_0 nT_0} \\
&= \frac{2 - \mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}\omega_0 n} - \mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}2\omega_0 n}}{\mathrm{j}\omega_0 nT_0} \,,
\end{aligned}$$

et substituant ω_0 et T_0, on trouve :

$$\underset{n\neq 0}{F(n)} = \frac{2 - \mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}\frac{2\pi}{3}n} - \mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}\frac{4\pi}{3}n}}{\mathrm{j}2\pi n} \quad = \frac{2 - \mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}\frac{2\pi}{3}n} - \mathrm{e}^{+\,\mathrm{j}\frac{2\pi}{3}n}}{\mathrm{j}2\pi n} \quad = \frac{2 - 2\cos(\frac{2\pi}{3}n)}{\mathrm{j}2\pi n} \,.$$

b)

Le puissance contenue dans la Nième harmonique est donnée par (voir §2.3.3) :

$$P(N) = |F(N)|^2 + |F(-N)|^2 \ .$$

Ainsi, pour la second harmonique on a, utilisant le résultat obtenu en **a)** :

$$P(2) = |F(2)|^2 + |F(-2)|^2 \ .$$

On a :

$$|F(2)| = \frac{\left|2 - 2\cos(\frac{4\pi}{3})\right|}{|\,\mathrm{j}4\pi|} \quad = \frac{\left|2 - 2(\frac{-1}{2})\right|}{|\,\mathrm{j}4\pi|} \quad = \frac{|3|}{|\,\mathrm{j}4\pi|}$$

$$|F(2)| = \frac{3}{4\pi} \ ,$$

similairement, pour $N = -2$:

$$|F(-2)| = \frac{\left|2 - 2\cos(\frac{-4\pi}{3})\right|}{|\,\mathrm{j}4\pi|} \quad = \frac{\left|2 - 2\cos(\frac{4\pi}{3})\right|}{|\,\mathrm{j}4\pi|} \quad = |F(2)| \ .$$

Finalement, on trouve la puissance totale dans la seconde harmonique :

$$P(2) = |F(2)|^2 + |F(-2)|^2 = \left[\frac{3}{4\pi}\right]^2 + \left[\frac{3}{4\pi}\right]^2 = \frac{9}{8\pi^2}$$