Mathématiques de l'ingénieur I (MAT-1900)
Examen du 8 février 2019 – solutions

Question 1

(10 + 10 = 20 points)

a) Exprimer, sous forme cartésienne, le nombre $z = \dfrac{3+2i}{(2-3i)^2}$.

$$
\begin{aligned}
z &= \frac{3+2i}{4-12i+9i^2} = \frac{3+2i}{-5-12i} = \frac{(3+2i)(-5+12i)}{|-5-12i|^2} = \frac{-15+36i-10i+24i^2}{(-5)^2+(-12)^2} \\
&= \frac{-39+26i}{25+144} = \frac{-39+26i}{169} = -\frac{3}{13} + \frac{2}{13}i.
\end{aligned}
$$

b) Exprimer, sous forme exponentielle, le nombre $w = \sqrt{3} + 3e^{\frac{5\pi}{6}i}$.

$$w = \sqrt{3} + 3(\cos\tfrac{5\pi}{6} + i\sin\tfrac{5\pi}{6}) = \sqrt{3} + 3(-\tfrac{\sqrt{3}}{2} + i\tfrac{1}{2}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i.$$

On écrit ce nombre sous forme exponentielle.
On a $r = |-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i| = \sqrt{(-\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (\frac{3}{2})^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{3}$
et $\cos\theta = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{2}$ et $\sin\theta = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et donc $\theta = \frac{2\pi}{3}$.
Ainsi $w = \sqrt{3}\,e^{\frac{2\pi}{3}i}$.

Question 2

(15 points)

Donner, sous forme exponentielle, toutes les solutions de l'équation $z^2 + 3(\overline{z})^3 = 0$.

On pose $z = re^{i\theta}$.
Alors,

$$
\begin{aligned}
z^2 + 3(\overline{z})^3 = 0 \quad &\iff \quad z^2 = -3(\overline{z})^3 \quad \iff \quad (re^{i\theta})^2 = 3e^{i\pi}(re^{i(-\theta)})^3 \\
&\overset{\text{De Moivre}}{\iff} \quad r^2e^{i(2\theta)} = 3e^{i\pi}r^3e^{i(-3\theta)} = 3r^3e^{i(\pi-3\theta)}.
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\begin{aligned}
& r^2 = 3r^3 \\
\text{et} \quad & 2\theta = \pi - 3\theta + 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}
$$

La première équation donne $r = 0$ ou $1 = 3r$, c.-à-d. $r = \frac{1}{3}$.
La deuxième équation donne $5\theta = \pi + 2\pi k$, c.-à-d. $\theta = \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{5}k$ ($k \in \mathbb{Z}$).
L'équation possède donc les 6 solutions distinctes

$$z = 0 \quad \text{et} \quad z_k = \frac{1}{3}e^{i(\frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{5}k)} \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4).$$

En effet, $z_k = z_l$ si $k - l$ est un multiple de 5.

Question 3

(15 points)

Soit $p(z) = z^4 - 4z^3 + 5z^2 - 16z + 4$. Sachant que $2i$ est une racine de $p(z)$, exprimer $p(z)$ comme un produit de facteurs réels irréductibles.

$p(z)$ est à coefficients réels.
Donc, comme $w = 2i$ est une racine de $p(z)$, on a que $\overline{w} = -2i$ est aussi une racine de $p(z)$.
Ainsi, $p(z)$ est divisible par

$$(z-2i)(z+2i) = z^2 + 2iz - 2iz - 4i^2 = z^2 + 4.$$

Le facteur $z^2 + 4$ est irréductible puisque ses racines sont complexes.
On divise $p(z)$ par $z^2 + 4$:

$$p(z) = (z^2+4)z^2 - 4z^3 + z^2 - 16z + 4 = (z^2+4)(z^2-4z) + z^2 + 4 = (z^2+4)(z^2-4z+1).$$

Le discriminant de $z^2 - 4z + 1$ est $(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 12$.
Comme il est positif, ce facteur est réductible.
La formule quadratique donne

$$\frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}.$$

Ainsi

$$p(z) = (z^2+4)(z-2-\sqrt{3})(z-2+\sqrt{3}).$$

Les deux derniers facteurs sont irréductibles car ils sont de degré 1.

Question 4

(15 points)

Trouver la solution générale de l'équation différentielle $xy' + y^2 = x - 1 + xy^2$.

Il s'agit d'une équation différentielle séparable.

$$\begin{aligned}
xy' &= x - 1 + xy^2 - y^2 = (x-1)(1+y^2) \\
\frac{1}{1+y^2}y' &= 1 - \frac{1}{x} \\
\int \frac{1}{1+y^2}\, dy &= \int \left(1 - \frac{1}{x}\right) dx + C \qquad (C \in \mathbb{R}) \\
\arctan y &= x - \log|x| + C \\
y &= \tan\big(x - \log|x| + C\big).
\end{aligned}$$

Question 5

(10 points)

Soit F la famille de courbes $x^3 + cy^2 + c = 0$ ($c \in \mathbb{R}$). Trouver l'équation différentielle associée aux trajectoires orthogonales de F.
Il n'est pas demandé de résoudre l'équation différentielle trouvée.

Équation différentielle associée à F.
On a
$$x^3 + cy^2 + c = 0 \iff c = -\frac{x^3}{y^2+1}.$$
On dérivant par rapport à x, on trouve
$$0 = -\frac{3x^2(y^2+1) - x^3(2yy')}{(y^2+1)^2} \iff 2x^3yy' = 3x^2(y^2+1).$$
On a donc
$$y' = \frac{3(y^2+1)}{2xy}.$$
Équation différentielle associée aux trajectoires orthogonales.
$$y' = -\frac{1}{\frac{3(y^2+1)}{2xy}} = -\frac{2xy}{3(y^2+1)}.$$

Question 6
(25 points)

Compléter la grille suivante en inscrivant un et un seul $\times$ par colonne.

Une bonne réponse vaut 5 *points, une mauvaise réponse ou une absence de réponse vaut* 0 *point.*

Aucune justification requise.

	a)	b)	c)	d)	e)
VRAI			$\times$		$\times$
FAUX	$\times$	$\times$		$\times$	

Pour chacun des énoncés suivants, dire s'il est vrai ou faux.

a) Si $z = \sqrt{2}(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $\frac{8\pi}{7} < \theta < \frac{9\pi}{7}$, alors $\mathrm{Im}(z^3) > 0$.
FAUX. D'après De Moivre $z^3 = 2^{3/2}e^{i(3\theta)}$, or $3\pi < \frac{24\pi}{7} < 3\theta < \frac{27\pi}{7} < 4\pi$ et donc $\mathrm{Im}(z^3) < 0$.

b) Pour tout $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, on a $\tan\theta = \frac{e^{2i\theta}-1}{e^{2i\theta}+1}$.
FAUX. D'après les formules d'Euler, $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}}{\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}} = \frac{1}{i}\cdot\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{e^{i\theta}+e^{-i\theta}} = \frac{1}{i}\cdot\frac{e^{2i\theta}-1}{e^{2i\theta}+1}$.

c) Le lieu géométrique dans $\mathbb{C}$ décrit par l'équation $\left|1+\dfrac{i}{z}\right| = 1$ est une droite.

VRAI. $|1+\frac{i}{z}| = 1 \Leftrightarrow |\frac{z+i}{z}| = 1 \Leftrightarrow |z+i| = |z| \Leftrightarrow \operatorname{dist}(z,-i) = \operatorname{dist}(z,0) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}$.

d) Si $z \in \mathbb{C}$ et $e^{z(z-1)} = 1$, alors, nécessairement, $z = 0$ ou $z = 1$.

FAUX. Il suffit que $z(z-1) = 2\pi i k$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$ (ce qu'on peut résoudre par la formule quadratique).

e) L'équation différentielle $(y')^3 + y^4 = 2xy''$ est d'ordre 2.

VRAI. Elle est d'ordre 2 puisque y'' est présente, mais aucune dérivée d'ordre supérieur ne l'est.