EXAMEN PARTIEL 1

Mathématiques de l'ingénieur II — Hiver 01
MAT-10364
Date: 16 février.

Remarques:

- Durée de l'examen: deux heures
- Documentation permise: deux feuilles-résumé.
- Vous êtes priés de vous identifier (nom et numéro de matricule) sur le cahier et de placer votre carte d'identité sur la table à côté de vous.
- **Chaque réponse devra être accompagnée des calculs détaillés. Dans le cas contraire, elle sera considérée comme nulle.**

Question 1. (20 points)

Soit D une plaque mince occupant le domaine défini par

$$D = \{(x, y) \in R^2 \mid x \leq y \text{ et } x^2 + y^2 \leq 2\}$$

et de densité

$$\rho(x, y) = 1 + y.$$

En utilisant les **coordonnés polaires**, calculer le moment d'inertie de la plaque D par rapport à l'axe des y:

$$J_y = \iint_D x^2 \rho(x, y)\, dx\, dy.$$

Question 2. (8 + 7 + 10 points)

Soit T le trapèze délimité par les droites $y = 0, y = x, x + y = 1, x + y = 2$.

(a) Si on fait le changement de variables $u = x - y$ et $v = x + y$, faire une représentation graphique du domaine $\tilde{T}$ dans le plan (u, v) lorsque (x, y) varie dans T.

(b) Evaluer le Jacobien de la transformation.

(c) Utiliser ce changement de variables pour calculer la coordonnée $\bar{x}$ du centre de masse. On prendra la densité égale à 1.

Question 3. (6 + 9 points)

On considère l'intégrale triple itérée en coordonnées cylindriques

$$\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1}\int_{z=r^2}^{1} f(r,\theta,z)\, r dz\, dr\, d\theta$$

(a) Trouver les équations des surfaces qui délimitent le domaine d'intégration et en faire une représentation graphique.

(b) Récrire l'intégrale triple en intégrant en premier par rapport à la variable r et ensuite par rapport à z et θ. Autrement dit, il faut déterminer les bornes de l'intégrale triple

$$\int\int\int f(r,\theta,z)\, r dr\, dz\, d\theta.$$

Question 4. (20 points)

On considère le domaine D situé au dessus du plan xy et délimité supérieurement par la sphère d'équation

$$x^2+y^2+z^2=a^2$$

et latéralement par le cylindre d'équation

$$x^2+(y-\frac{a}{2})^2=\frac{a^2}{4}$$

où $a>0$.

Sachant que le solide est homogène de densité constante ($\rho=1$) et que la masse $M=a^3(\frac{\pi}{3}-\frac{4}{9})$, calculer la coordonnée $\bar{z}$ du centre de masse.

Question 5. (20 points)

On considère un solide situé dans la région pour laquelle $y\geq 3$ et compris entre la sphère d'équation

$$x^2+(y-2)^2+z^2=4$$

et le plan

$$y=3.$$

Utiliser les **coordonnées sphériques** pour calculer le volume de ce solide.

Quelques angles remarquables

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
0	0	1	0
$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$
$\pi/2$	1	0	$-$
$2\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$-1/2$	$-\sqrt{3}$
$3\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	-1
$5\pi/6$	$1/2$	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/3$
π	0	-1	0
$3\pi/2$	-1	0	$-$
2π	0	1	0

Quelques intégrales utiles.

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int f'(x)(f(x))^n\,dx = \frac{1}{n+1}(f(x))^{n+1} + C, \quad \text{si } n \neq -1$$

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C$$

$$\int e^{f(x)} f'(x)\,dx = e^{f(x)} + C$$

$$\int x\ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

[illegible]

$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$

$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$

$\int \sin(ax)\, dx = -\frac{1}{a} \cos(ax) + C$

$\int \cos(ax)\, dx = \frac{1}{a} \sin(ax) + C$

$\int \tan(ax)\, dx = -\frac{1}{a} \ln|\cos(ax)| + C$

$\int \cot(ax)\, dx = \frac{1}{a} \ln|\sin(ax)| + C$

$\int \sec^2(ax)\, dx = \frac{1}{a} \tan(ax) + C$

$\int \csc^2(ax)\, dx = -\frac{1}{a} \cot(ax) + C$

$\int \sec(ax)\, dx = \frac{1}{a} \ln|\sec(ax) + \tan(ax)| + C$

$\int \csc(ax)\, dx = \frac{1}{a} \ln|\csc(ax) - \cot(ax)| + C$

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right) + C$

$\int \sin^2 x\, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$

$\int \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$

$\int e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a \cos bx + b \sin bx) + C$

$\int \sin^n x\, dx = \frac{-\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x\, dx$

$\int \cos^n x\, dx = \frac{\cos^{n-1} x \sin x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x\, dx$