STT-2920 : Probabilités pour ingénieurs

SOLUTION DE L'EXAMEN NUMÉRO 1

Mercredi le 21 octobre 2015

Numéro 1.

(a) On tire 7 cartes au hasard à partir d'un jeu ordinaire de 52 cartes. Calculez la probabilité d'obtenir au moins un as.

Réponse :

$$\mathbb{P}[\text{ au moins un as }] = 1 - \mathbb{P}[\text{ aucun as }] = 1 - \frac{\binom{48}{7}}{\binom{52}{7}} = \frac{3478}{7735} = 0.4496.$$

(b) Évaluez l'expression suivante :

$$\sum_{k=1}^{2920} (-2)^k \binom{2920}{k}.$$

Réponse :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2920} (-2)^k \binom{2920}{k} &= \sum_{k=0}^{2920} (-2)^k \binom{2920}{k} - 1 \\
&= \sum_{k=0}^{2920} \binom{2920}{k} (-2)^k 1^{2920-k} - 1 \\
&= (-2+1)^{2920} - 1 = (-1)^{2920} - 1 = 1 - 1 = 0.
\end{aligned}$$

Numéro 2. La densité de probabilité suivante est un bon modèle pour décrire la distribution de la hauteur des vagues (mesurée en mètres) à 14h00 à Long Beach sur la côte ouest de l'Île de Vancouver durant la saison estivale.

$$f(x) = \begin{cases} x\, e^{-x^2/2} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{1}$$

Plus précisément, si on écrit $X_1, X_2, ..., X_{100}$ pour dénoter la hauteur des vagues (en mètres) à 14h00 pour chacun de 100 jours couvrant la période du 1 juin 2016 au 8 septembre 2016, alors ces 100 variables aléatoires sont indépendantes et identiquement distribuées avec densité donnée par l'équation (1).

(a) Calculez le 90-ième centile de la distribution donnée par l'équation (1) c'est-à-dire la hauteur x_* qui est telle que $\mathbb{P}[X \leq x_*] = 0.90$.

Réponse : On chercche le x_* qui satisfait l'équation

$$\int_0^{x_*} x\, e^{-x^2/2}\, dx = 0.9$$

c'est-à-dire $1 - e^{-x_*^2/2} = 0.9$, c'est-à-dire $e^{-x_*^2/2} = 1/10$, c'est-à-dire $x_*^2/2 = \log(10)$. La solution est donc $x_* = \sqrt{2\log(10)} \approx 2.1460$.

(b) Calculez l'espérance et l'écart-type du nombre de jours (durant la saison estivale 2016) pour lesquels la hauteur des vagues sera supérieure à la hauteur x_* de la partie (a).

Réponse : Si on pose $N =$ *le nombre de jours où la hauteur des vagues excède* x_*, alors on a $N \sim \text{binomiale}(100, 1/10)$. On obtient donc

$$\mu_{\text{N}} = np = 10 \qquad \text{et} \qquad \sigma_{\text{N}} = \sqrt{np(1-p)} = 3.$$

Numéro 3. On suppose que le nombre de messages texte que vous recevrez sur votre cellulaire durant le présent examen est une variable aléatoire dont la distribution est la loi de Poisson avec moyenne 4.

(a) Calculez la probabilité que vous recevrez au moins 3 messages durant le présent examen.

Réponse : On veut $\mathbb{P}[X \geq 3]$ où X dénote le nombre de messages texte reçus durant l'examen. On obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[X \geq 3] &= 1 - \mathbb{P}[X \leq 2] \\
&= 1 - (\mathbb{P}[X=0] + \mathbb{P}[X=1] + \mathbb{P}[X=2]) \\
&= 1 - \left(\frac{e^{-4}4^0}{0!} + \frac{e^{-4}4^1}{1!} + \frac{e^{-4}4^2}{2!}\right) \\
&= 1 - (0.01832 + 0.07326 + 0.14653) \;=\; 1 - 0.2381 \;=\; 0.7619.
\end{aligned}$$

(b) Vingt-cinq pour cent des messages texte que vous recevez proviennent de votre amie Noémie. Autrement dit, chaque fois que vous recevez un message texte, il y a une chance sur 4 que ce soit un message provenant de Noémie, indépendamment de tous les messages reçus antérieurement. Calculez la probabilité que durant le présent examen vous recevrez au moins un message de Noémie.

Réponse : Écrivons A pour dénoter l'événement *"au moins un des messages reçus pendant l'examen provient de Noémie"*. On veut $\mathbb{P}[A]$. On procède par complémentation et on utilise la loi des probabilités totales :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}[A] &= 1-\mathbb{P}[A^c] \\
&= 1-\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}[A^c|N=n]\mathbb{P}[N=n] \\
&= 1-\sum_{n=0}^{\infty}(3/4)^n\ \frac{e^{-4}4^n}{n!} \\
&= 1-e^{-4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!}\ =\ 1-e^{-4}e^{3}\ =\ 1-\frac{1}{e}\ \approx\ 0.63212
\end{aligned}
$$

Numéro 4. Voici la densité de probabilité conjointe des variables aléatoires X et Y :

$$
f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3\ e^{-x(1+y)}}{2} & \text{si } x>0 \text{ et } y>0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}
$$

(a) Complétez la phrase suivante :

La densité marginale de Y est donnée par $f_Y(y)=\begin{cases} \frac{3}{(1+y)^4} & \text{si } y>0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$

et la densité marginale de X est donnée par $f_X(x)=\begin{cases} ????? & \text{si } x>0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Réponse : Pour $x>0$, on obtient

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy\ =\ \int_0^{\infty}\frac{x^3\ e^{-x(1+y)}}{2}\ dy \\
&= \frac{x^2\ e^{-x}}{2}\ \int_0^{\infty} xe^{-xy}\ dy\ =\ \frac{x^2\ e^{-x}}{2}
\end{aligned}
$$

(b) Obtenez l'espérance de X sachant que $Y=3$.

Réponse : D'abord on obtient, pour $x>0$,

$$
f_{X\,|\,Y\,=\,3}(x)=\frac{f(x,3)}{f_Y(3)}=\frac{\frac{x^3\ e^{-x(1+3)}}{2}}{\frac{3}{(1+3)^4}}=\frac{128}{3}x^3\,e^{-4x}.
$$

Puis on obtient

$$
\mathbb{E}[X\,|\,Y=3]=\int_0^{\infty} x\,f_{X\,|\,Y\,=\,3}(x)\,dx=\int_0^{\infty}\frac{128}{3}x^4\,e^{-4x}\,dx=1.
$$

Numéro 5.

(a) On suppose que X est une variable aléatoire avec densité

$$f(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculez l'espérance de la variable aléatoire $\frac{X^4(1+3X)}{1-X}$.

Réponse :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\frac{X^4(1+3X)}{1-X}\right] &= \int_0^1 \frac{x^4(1+3x)}{1-x}\; f(x)\; dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^4(1+3x)}{1-x}\; 6x(1-x)\; dx \\ &= 6\int_0^1 x^5(1+3x)\; dx \\ &= 6\int_0^1 x^5\; dx + 18\int_0^1 x^6\; dx \\ &= 1 + \frac{18}{7} \;=\; \frac{25}{7} \;=\; 3.5714. \end{aligned}$$

(b) On suppose que X est une variable aléatoire avec espérance 10 et écart-type 2. On suppose que Y est une variable aléatoire avec espérance 30 et écart-type 5. On suppose que le coefficient de corrélation entre X et Y est égal à 0.40. Calculez l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire $T = X + Y$.

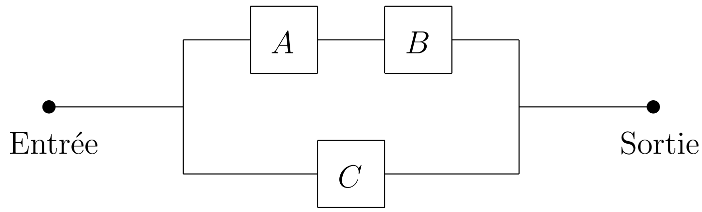
Réponse : Pour l'espérance on obtient

$$\mu_{X\,+\,Y} = \mu_X + \mu_Y = 10 + 30 = 40.$$

Pour l'écrt-type on obtient

$$\begin{aligned} \sigma_{X\,+\,Y} &= \sqrt{\sigma_X^2 + 2\mathbb{C}\text{ov}[X,Y] + \sigma_Y^2} \\ &= \sqrt{\sigma_X^2 + 2\rho_{X,\,Y}\sigma_X\sigma_Y + \sigma_Y^2} \\ &= \sqrt{2^2 + (2 \times 0.40 \times 2 \times 5) + 5^2} \\ &= \sqrt{37} \;=\; 6.0828. \end{aligned}$$

Numéro 6. Le shéma ci-dessous représente un système comprenant trois composantes.



On suppose que

- la durée de vie de la composante A est une variable aléatoire, disons U, avec loi exponentielle de moyenne égale à 2,
- la durée de vie de la composante B est une variable aléatoire, disons V, avec loi exponentielle de moyenne égale à 4,
- la durée de vie de la composante C est une variable aléatoire, disons W, avec loi exponentielle de moyenne égale à 1,
- toutes ces durées de vie sont mesurées en unités de 1000 heures,
- les variables aléatoires U, V et W sont indépendantes.

(a) Obtenez la densité de probabilité de la durée de vie de la branche supérieure du système.

Réponse : Écrivons S pour dénoter la durée de vie de la branche supérieure du système. On a alors $S = \min\{U, V\}$. On suppose que $U \sim$ exponentielle(1/2) et que $V \sim$ exponentielle(1/4). De plus, on suppose que les variables U et V sont indépendantes. Un résultat vu en classe nous permet de conclure que $S \sim$ exponentielle(3/4). La densité recherchée est donc la densité exponentielle(3/4). Autrement dit

$$f_S(s) = \begin{cases} (3/4)\, e^{-3s/4} & \text{si } s \geq 0 \\ 0 & \text{si } s < 0. \end{cases}$$

(b) Obtenez la densité de probabilité de la durée de vie du système.

Réponse : Écrivons T pour dénoter la durée de vie du système. On a alors $T = \max\{S, W\}$, où S dénote la durée de vie de la branche supérieure du système. On calcule d'abord la fonction de répartition de la variable T. Pour $t < 0$ on obtient bien sûr $F_T(t) = \mathbb{P}[T \leq t] = 0$. Pour $t \geq 0$ on obtient

$$\begin{aligned} F_T(t) &= \mathbb{P}[T \leq t] \\ &= \mathbb{P}[\max\{S, W\} \leq t] \\ &= \mathbb{P}[(S \leq t) \cap (W \leq t)] \\ &= \mathbb{P}[S \leq t]\; \mathbb{P}[W \leq t] \\ &= \left(1 - e^{-3t/4}\right)\left(1 - e^{-t}\right) \\ &= 1 - e^{-3t/4} - e^{-t} + e^{-7t/4}. \end{aligned}$$

La fonction de répartition de la variable T est donc donnée par

$$F_T(t) = \begin{cases} 1 - e^{-3t/4} - e^{-t} + e^{-7t/4} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

La densité de probabilité de T est simplement la dérivé de la fonction de répartition : $f_T(t) = \frac{d}{dt} F_T(t)$. Ici on obtient

$$f_T(t) = \begin{cases} (3/4)e^{-3t/4} + e^{-t} - (7/4)e^{-7t/4} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases}$$