MAT-10363 Mathématiques de l'ingénieur I

Examen partiel du 6 Octobre 2006, 18h30-20h30

Question 1 (20 points)

a) **(5 pts)** Montrer que tout nombre complexe z qui vérifie $z + \overline{z} = 0$ est un nombre complexe imaginaire pur.

b) **(5 pts)** En déduire que pour tout nombre complexe z, différent de -1 et de module égal à 1, on a

$$\mathcal{R}\mathrm{e}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = 0$$

c) **(5 pts)** Exprimer sous forme algébrique le nombre complexe $\dfrac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}$, pour $\theta \in]-\pi, \pi[$

d) **(5 pts)** Quel est l'argument du nombre complexe $\dfrac{e^{i\frac{\pi}{2}}-1}{e^{i\frac{\pi}{2}}+1}$. (Suggestion : utiliser la question c))

Question 2 (20 points)

a) **(10 pts)** Déterminer l'ensemble des points M du plan complexe, d'affixe z tel que :

$$\mid \overline{z}(z-1) \mid = \mid z(\overline{z}-1) \mid$$

b) **(5 pts)** Écrire le nombre complexe $a = \left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$ sous forme polaire.

c) **(5 pts)** En déduire les racines cubiques de a.

Question 3 (20 points)

Considérons le polynôme $p(z)$ suivant :

$$p(z) = z^5 - 5z^4 + 10z^3 - 10z^2 + 4z$$

a) **(5 pts)**Vérifier que $1 + i$ est une racine de $p(z)$.

b) **(10 pts)** Trouver alors les autres racines de $p(z)$.

c) **(5 pts)** Représenter les racines de $p(z)$ dans le plan complexe.

Question 4 (15 points)

On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y' - xy(1-y) = 0$$

a) **(5 pts)** Montrer que (E) est une équation différentielle à variables séparées.

b) **(10 pts)** Déterminer l'ensemble des solutions de cette équation qui pour $x = 0$ prennent la valeur $\frac{1}{2}$. (Suggestion : écrire $\frac{1}{y(1-y)} = \frac{1}{y} + \frac{1}{1-y}$).

Question 5 (20 points)

a) **(10 pts)** Trouver la famille (C) des courbes dont l'équation différentielle est $y' - e^{x-y} = 0$

b) **(10 pts)** Déterminer les trajectoires orthogonales (C') à (C).

Question 6 (5 points)

Répondre dans un tableau de la forme ci-dessous par vrai ou faux aux questions suivantes pour calculer le module de $(1+i)^2$:

a) $> abs(1+i) * abs(1+i)$;

b) $> abs((1+I) * (1+I))$;

c) $> module((1+I) * (1+I))$;

d) $> (1+I) * conjugate(1+I)$;

e) $> abs(2 * I)$;

Question 6	Réponse
a	
b	
c	
d	
e	