GEL2001: Analyse des signaux — Professeur: Leslie A. Rusch

Solutionnaire 2016 Mini-test 2

jeudi le 24 novembre 2016; durée: 08h30 à 09h20; aucune documentation permise; 7.5% de note finale

Problème 1 (20 points sur 100)

A. Est-ce que ces systèmes sont linéaires et invariant en temps?

$y(t) = \cos\left(x(t)\right)$		NON
$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(z)\,dz$	OUI	
$y(t) = x(t-1) + x(t+1)$	OUI	

B. En supposant que ces systèmes sont linéaire et invariants en temps avec une réponse en fréquence de $H(\omega)$,

$\frac{d}{dt}(f * g) = \frac{df}{dt} * \frac{dg}{dt}$		FAUX
Ce système linéaire et invariant en temps (SLIT) est CAUSAL x(t) — SLIT $H(\omega)$ = Tri($\omega - 1$) — y(t)		FAUX
$f(t) \Leftrightarrow F(\omega)$ $f(t) = 0 \text{ pour } \lvert t\rvert > \frac{2\pi}{\omega_0} \quad \text{ET} \quad F(\omega) = 0 \text{ pour } \lvert\omega\rvert > \omega_0$		FAUX

Solutionnaire 2016 Mini-test 2

Problème 2 (30 points sur 100)

A. (12 points) Trouvez la réponse en fréquence pour le système linéaire et invariant en temps décrit par l'équation différentielle suivante

$$\frac{d^2y}{dt^2}+5\frac{dy}{dt}+6y=\frac{dx}{dt}+2x$$

$$P_1(D)x(t)=(D+2)x(t) \quad P_2(D)y(t)=\left(D^2+5D+6\right)y(t)$$

$$H(\omega)=\frac{P_1(j\omega)}{P_2(j\omega)}=\frac{(j\omega)+2}{(j\omega)^2+5(j\omega)+6}=\frac{2+j\omega}{(j\omega+3)(j\omega+2)}=\frac{1}{j\omega+3}$$

B. (15 points) Trouvez la réponse impulsionnelle pour le système avec réponse en fréquence

$$H(\omega)=\frac{1}{1+2j\omega}$$

Dans le table de transformées fourni

$e^{-\beta t}\,\mathrm{U}(t)$	$\dfrac{1}{\beta+j\omega}$

En identifiant β = ½, nous avons

$$h(t)=\tfrac{1}{2}e^{-t/2}$$

C. (10 points) Trouvez la sortie du système de la partie B pour l'entrée $x(t)=\cos(.5t)$.

La sortie d'un filtre pour un cosinus est encore un cosinus avec un gain et déphasage :

$$|H(.5)|\cos\left(.5t+\arg\left[H(.5)\right]\right) \qquad H(.5)=\frac{1}{1+2\cdot j\cdot 0.5}=\frac{1}{1+j}$$

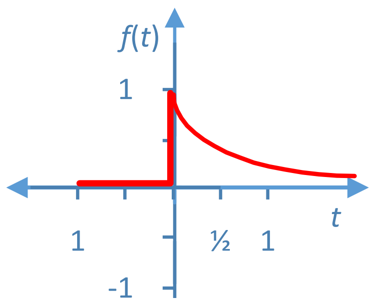
La sortie est donc

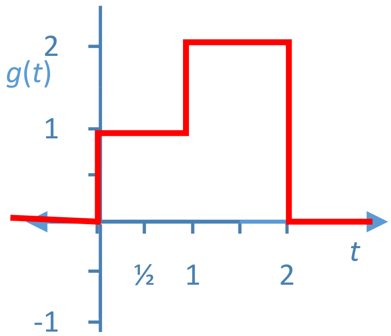
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(.5t+\arctan\left[\frac{-1}{1}\right]\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(.5t-\frac{\pi}{4}\right)$$

Solutionnaire 2016 Mini-test 2

Problème 3 (50 points sur 100) Trouvez la convolution de

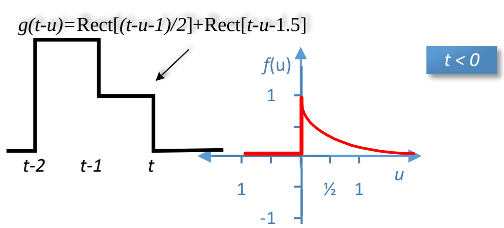
Trouvez la convolution de $f(t)=\begin{cases} e^{-t} & t>0 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$ et $g(t)=\mathrm{Rect}\left(\frac{t-1}{2}\right)+\mathrm{Rect}(t-1.5)$



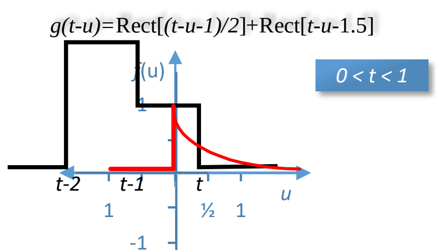


a. **<u>régions</u>** de définition de la convolution

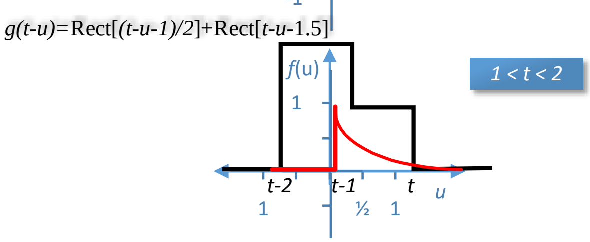
b. **<u>intégrales et bornes d'intégration</u>**



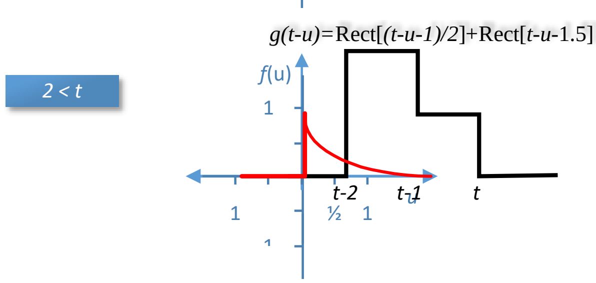
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(t-u)\,du=0$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(t-u)\,du=\int_{0}^{t} e^{-u}\cdot 1\,du$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(t-u)\,du=\int_{0}^{t-1} e^{-u}\cdot 2\,du+\int_{t-1}^{t} e^{-u}\cdot 1\,du$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(t-u)\,du=\int_{t-2}^{t-1} e^{-u}\cdot 2\,du+\int_{t-1}^{t} e^{-u}\cdot 1\,du$$

Solutionnaire 2016 Mini-test 2

a. (15 points) Donnez les intégrales à évaluer pour **chaque région** de définition de la convolution; **spécifiez clairement les bornes d'intégration pour chaque région.**

	Partie b	Partie c
$t < 0$	zéro	0
$0 < t < 1$	$\int_0^t e^{-u} \cdot 1\,du$	$\left[-e^{-u}\right]_0^t = 1 - e^{-t}$
$1 < t < 2$	$\int_0^{t-1} e^{-u} \cdot 2\,du + \int_{t-1}^{t} e^{-u} \cdot 1\,du$	$\left[-2e^{-u}\right]_0^{t-1} + \left[-e^{-u}\right]_{t-1}^{t} = 2 - 2e^{-t+1} - e^{-t} + e^{-t+1}$ $= 2 - e^{-t+1} - e^{-t}$
$2 < t$	$\int_{t-2}^{t-1} e^{-u} \cdot 2\,du + \int_{t-1}^{t} e^{-u} \cdot 1\,du$	$\left[-2e^{-u}\right]_{t-2}^{t-1} + \left[-e^{-u}\right]_{t-1}^{t} = 2e^{-t+2} - 2e^{-t+1} + e^{-t+1} - e^{-t}$ $= e^{-t}\left(2e^2 - e - 1\right)$

```
t1=linspace(-1,0,100);
t2=linspace(0,1,100);
t3=linspace(1,2,100);
t4=linspace(2,6,200);
O=ones(1,100);
A=1-exp(-t2);
B=2*O-exp(-t3+1)-exp(-t3);
C=exp(-t4)*(2*exp(2)-exp(1)-1) ;
plot(t1,0*O,t2,A,t3,B,t4,C)
```