Identification

Nom: ____________________ Prénom: ____________________

Numéro d'identification (NI): ____________________

Section: ____________________

MAT-1910: Mathématiques de l'ingénieur II
Examen 1 (40%)
Lundi 8 mars 2021 de 18h30 à 21h00

Enseignants:
Hugo Chapdelaine (NRC 16327)
Rachid Kandri-Rody (NRC 16326)

Sol^n version 3

Directives

- Identifiez immédiatement votre cahier d'examen.
- Assurez-vous que cet examen comporte 7 questions réparties sur 12 pages.
- Assurez-vous que les sonneries de vos appareils électroniques sont désactivées et rangez-les hors de portée.
- Vous avez droit à une feuille aide-mémoire *manuscrite* et recto-verso $8\frac{1}{2}$" par 11".
- Sauf indication contraire, vous devez rédiger des solutions complètes et justifiées.
- Vous avez droit à une calculatrice autorisée par la faculté des sciences et génie.
- Dans tous les cas où c'est possible, vous devez écrire la valeur exacte et non une valeur numérique approchée (p.ex. si $x^2 = 2$ et $x > 0$ vous devriez écrire $x = \sqrt{2}$ plutôt que $x \approx 1,414$).

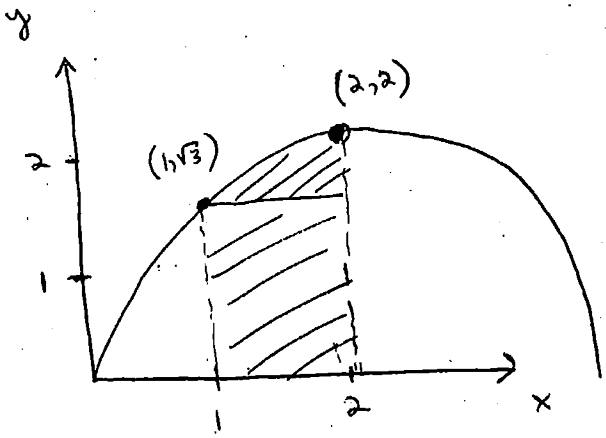
Résultats

Questions	1	2	3	4	5	6	7	Total
Points	14	20	16	10	20	15	20	115
Note/115:								

Question 1 (14 pts) Réécrivez l'intégrale double suivante

$$I = \int_1^2 \left(\int_0^{\sqrt{4x-x^2}} f(x,y)dy \right) dx$$

en changeant l'ordre d'intégration.



$y = \sqrt{4x-x^2} \Rightarrow y^2 + x^2 - 4x = 0 \Rightarrow (x-2)^2 + (y-0)^2 = 2^2$

$$I = \int_0^{\sqrt{3}} \int_1^2 f(x,y)\; dx\; dy + \int_{\sqrt{3}}^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}+2}^2 f(x,y)\; dx\, dy$$

$(x-2)^2 = 4 - y^2 \Rightarrow \pm\sqrt{4-y^2} + 2 = x$ l'arc de cercle joignant le point $(1,\sqrt{3})$ au point $(2,2)$ revient à choisir $-\sqrt{4-y^2} + 2 = x$

Question 2 (20 pts) Calculez l'intégrale double

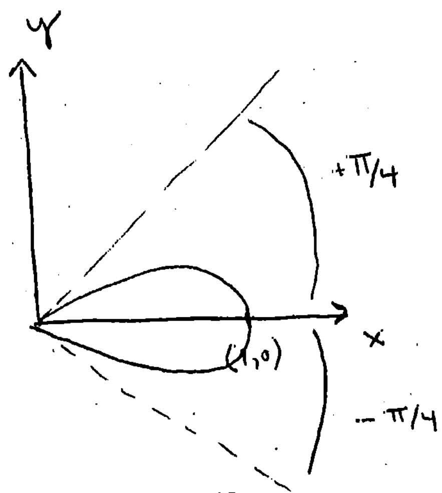
$$I = \int\int_D x^2y^2dxdy$$

où D est l'intérieur de la boucle de lemniscate $r = \sqrt{\cos(2\theta)}$ obtenue pour $\theta \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$.

Indice: Afin de trouver une primitive à l'expression $(\sin^2 x)(\cos^3 x)$ utiliser l'identité évidente

$$(\sin^2 x)(\cos^3 x) = (\sin^2 x)(1 - \sin^2 x)\cos x = (\sin^2 x)(\cos x) - (\sin^4 x)(\cos x).$$

Par la suite, faites un changement de variable approprié pour obtenir une intégrale par substitution.



$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

$$I = \int_{-\pi/4}^{+\pi/4}\int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} (r\cos\theta)^2(r\sin\theta)^2\, r\, dr\, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\pi/4}\int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} r^5 \cos^2\theta \sin^2\theta\, dr\, d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\pi/4} \cos^2\theta \sin^2\theta \cdot \left.\frac{r^6}{6}\right|_{r=0}^{\sqrt{\cos 2\theta}} d\theta = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2\theta\sin^2\theta\ \frac{\cos^3 2\theta}{6}\, d\theta$$

on sait $2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$

$$= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\sin^2 2\theta}{4} \cdot \frac{\cos^3 2\theta}{6}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{48} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \sin^2 x \cos^3 x \, dx$$

on a posé
$2\theta = x$
$d\theta = \frac{dx}{2}$

$$= \frac{2}{48} \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos^3 x \, dx \qquad \text{par symétrie}$$

$$= \frac{1}{24} \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x - \sin^4 x \cos x \, dx$$

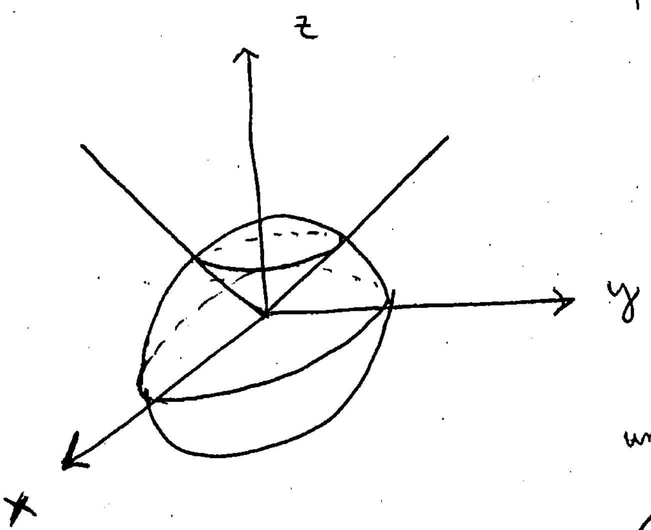
$$= \frac{1}{24} \left[\frac{\sin^3 x}{3} \Bigg|_0^{\pi/2} - \frac{\sin^5 x}{5} \Bigg|_0^{\pi/2} \right]$$

$$= \frac{1}{24} \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right] = \frac{1}{24} \cdot \frac{2}{15} = \frac{1}{12 \cdot 15} = \frac{1}{180}$$

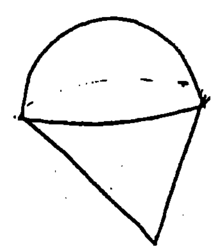
Question 3 (16 pts) En utilisant les coordonnées sphériques, calculez le volume du solide E délimité par les deux surfaces suivantes:

$$S_1 : 3z^2 = x^2 + y^2 \text{ où } z \geq 0 \qquad \text{et} \qquad S_2 : z = \sqrt{8 - x^2 - y^2}.$$

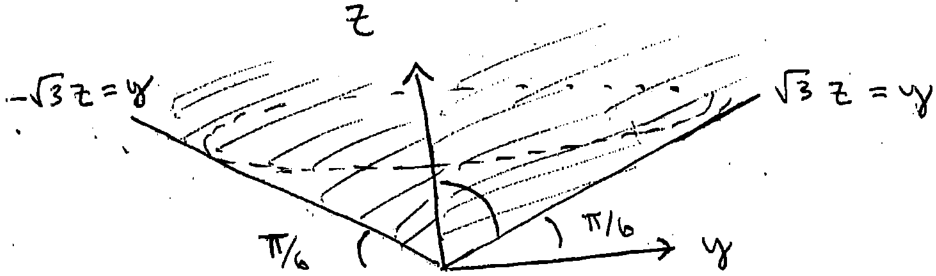
cône   sphère



un cornet



E = solide découpé par S_1 et S_2 :



$P_{yz}(S_1)$: projection de S_1 dans le plan-yz

Ainsi $\text{vol}(E) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_0^{\sqrt{8}} \rho^2 \sin\phi \; d\rho \, d\phi \, d\theta$

$$\mathrm{vol}(E) = 2\pi \int_0^{\pi/3} \sin\phi \, d\phi \int_0^{\sqrt{8}} \rho^2 \, d\rho$$

$$= 2\pi \left(-\cos\phi\right)\Big|_0^{\pi/3} \frac{\rho^3}{3}\Big|_0^{\sqrt{8}}$$

$$= 2\pi\left(-\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{(\sqrt{8})^3}{3} - 0\right)$$

$$= \boxed{\frac{\pi \cdot 8\sqrt{8}}{3}}$$

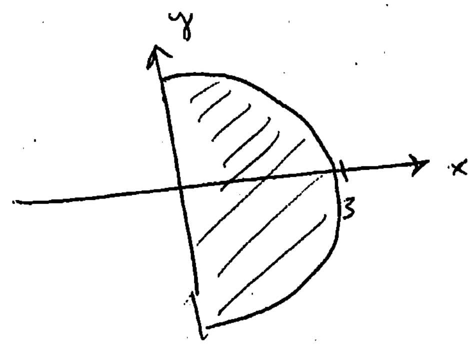
Question 4 (10 pts) On considère l'intégrale suivante:

$$I = \int_0^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^{4-x} dz\, dy\, dx.$$

Réécrivez l'intégrale I en coordonnées cylindriques selon l'ordre d'intégration $dz\, dr\, d\theta$.

$E = \{ (x,y,z) : 0 \leq x \leq 3 \quad -\sqrt{9-x^2} \leq y \leq +\sqrt{9-x^2} \quad , \quad 0 \leq z \leq 4-x \}$

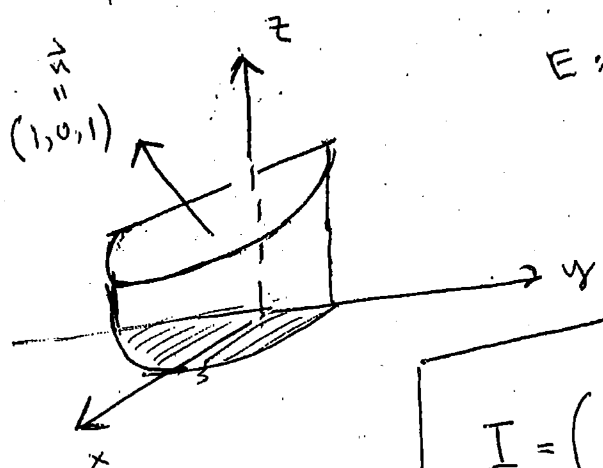
$P_{xy}(E)$:



$x^2+y^2 = 9$

La projection de E dans le plan-xy est un demi-disque

E : un genre de demi-cylindre tronqué



$z + x = 4$

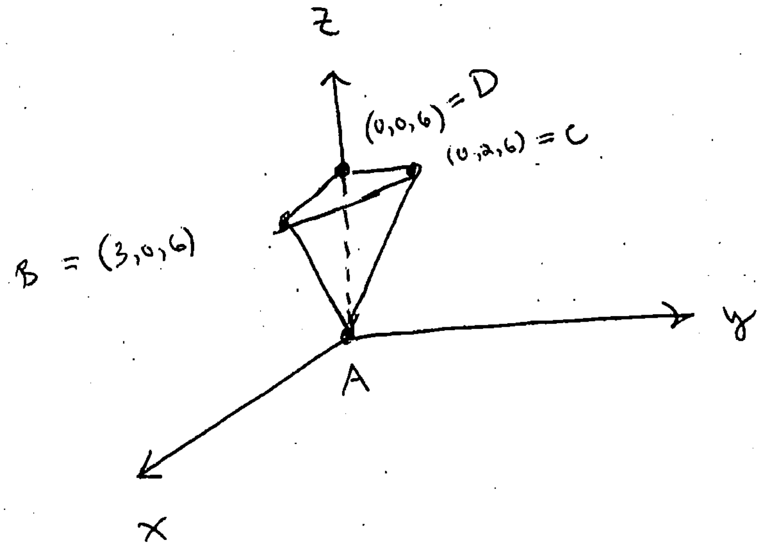
$$\boxed{I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \int_0^3 \int_0^{4 - r\cos\theta} r\, dz\, dr\, d\theta}$$

Question 5 (20 pts)

(1) Dessinez le tétraèdre dans l'espace dont les sommets sont $(0,0,0)$, $(3,0,6)$, $(0,2,6)$ et $(0,0,6)$.

(2) Écrivez l'intégrale itérée d'une fonction $f(x,y,z)$ sur l'intérieur du tétraèdre décrit à la sous-question précédente, selon l'ordre d'intégration $dx\,dy\,dz$. Vous n'avez pas à calculer l'intégrale, après tout la fonction $f(x,y,z)$ n'est pas spécifiée.

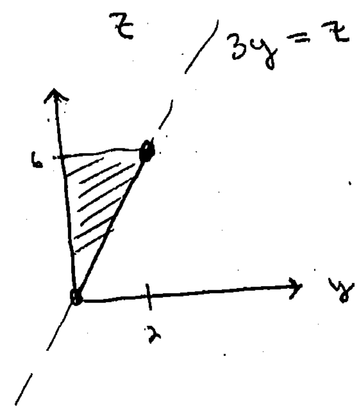
①



②

soit E = intérieur du tétraèdre.

$P_{yz}(E)$



Le plan Π généré par le triangle ABC est donné sous forme paramétrique par

$$\Pi : r(3,0,6) + s(0,2,6) = (\underbrace{3r}_{x}, \underbrace{2s}_{y}, \underbrace{6r+6s}_{2x+3y}) \qquad r,s \in \mathbb{R}$$

En cartésien II: $z = 2x + 3y$

Donc l'intégrale itérée est donnée par

$$\boxed{\int_0^6 \int_0^{\frac{z}{3}} \int_0^{\frac{z-3y}{2}} f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz}$$

Question 6 (15 pts) Soit P le paraboloïde d'équation $y = x^2 + z^2$ et soit K, le cône d'équation $y^2 = x^2 + z^2$.

(1) Montrez que la courbe C d'intersection du paraboloïde P avec le cône K a pour équation

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

(2) En déduire une paramétrisation de C.

(3) Donnez une paramétrisation de la tangente à la courbe C au point $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1, -\frac{1}{\sqrt{2}})$.

① $y = x^2 + z^2$ et $y^2 = x^2 + z^2 \Rightarrow y = y^2$

$\Rightarrow (y - y^2) = 0$

$\Rightarrow y(1-y) = 0 \Rightarrow y = 0$ ou $y = 1$

La courbe C correspond à la paire d'équations: $y = 1$, $x^2 + z^2 = 1$

Ainsi C est un cercle parallèle au plan-xz.

② C: $\vec{r}(\theta) = (\cos\theta, 1, \sin\theta)$ $\quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$

③ $\vec{r}(-\frac{\pi}{4}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) =: P$ $\quad \vec{r}'(\theta) = (-\sin\theta; 0, \cos\theta)$

$\vec{r}'(-\frac{\pi}{4}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

La droite tangente à C au point P est donnée par

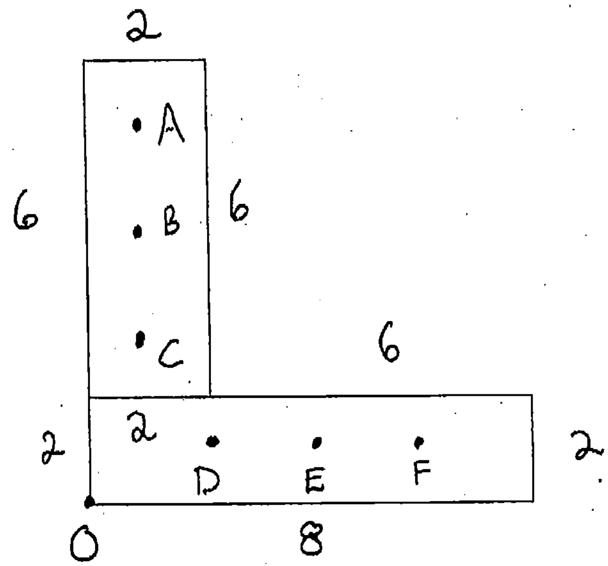
$$\Delta : \quad P + t \cdot \vec{r}\,'\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \vec{r}\left(-\frac{\pi}{4}\right) + t\,\vec{r}\,'\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right) + t\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1+t), 1, \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+t)\right) \qquad t \in \mathbb{R}$$

Question 7 (20 pts) Pour cette question, vous devez uniquement encercler la bonne réponse selon la question (la justification n'est pas nécessaire).

(1) (5 pts) On considère la plaque mince L, de densité homogène, représentée par l'image ci-bas:



Sur la figure, la longueur de chaque côté est donnée par un entier. Le point $O = (0,0)$ correspond à l'origine du plan cartésien et les autres points sont donnés par $A = (1,7), B = (1,5), C = (1,3), D = (2,1), E = (4,1), F = (6,1)$. On notera par c_m le centre de masse de L. Lequel des énoncés suivants est vrai:

(a) c_m est situé sur le segment $\overline{AF}$.

(b) c_m est situé sur le segment $\overline{BE}$.

(c) c_m est situé sur le segment $\overline{CD}$.

(d) c_m est situé sur le segment $\overline{AC}$.

(e) c_m est situé sur le segment $\overline{DF}$.

(f) Aucun des choix précédent n'est vrai.

$$\frac{Bm_1 + Em_2}{m_1 + m_2}$$

$m_1 = 2 \cdot 6 = 12$

$m_2 = 2 \cdot 8 = 16$

(2) (5 pts) On pose $I = \int_{-1}^{1} \int_{0}^{x} \sec^2(x) dy\, dx$. Encercler la bonne réponse:

(a) $I = 1$.

(b) $I = -1$.

(c) $I = 0$.

(d) $I = 2$.

(e) $I = -2$.

(f) Aucun des choix précédents n'est vrai.

$$\int_{-1}^{1} y \sec^2 x \Big|_{y=0}^{y=x} dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \underbrace{x \sec^2 x}_{\text{impaire}} dx$$

(3) (5 pts) Soit C la courbe de paramétrisation

$$\vec{r}(t) = \quad \begin{aligned} x(t) &= t^2 + t \\ y(t) &= t^2 - t \\ z(t) &= t^2 - 2t \end{aligned}$$

pour $-\infty < t < \infty$. La longueur de la portion de la courbe comprise entre les points $P = (0,2,3)$ et $Q = (2,0,-1)$ est donnée par une intégrale de la forme

$$\int_{-1}^{1} f(t) dt$$

pour une certaine fonction $f(t)$. L'intégrande $f(t)$ est donnée par:

(a) $f(t) = \sqrt{12t^2 - 4t + 3}$

(b) $f(t) = \sqrt{24t^2 + 2t + 6}$

(c) $f(t) = \sqrt{12t^2 - 8t + 6}$

(d) $f(t) = \sqrt{24t^2 + 3}$

(e) $f(t) = \sqrt{24t^2 + 12t + 6}$

(f) Aucun des choix précédents.

$\vec{r}(-1) = (0, 2, 3)$ $\quad \vec{r}(1) = (2, 0, -1)$

$$|r'(t)|^2 = (2t+1)^2 + (2t-1)^2 + (2t-2)^2$$

$$= 12t^2 - 8t + 6$$

(4) (5 pts) Soit (r, θ, z) les coordonnées cylindriques. Que représente la surface S d'équation

$$(r-3)^2 + z^2 = 7 \quad ?$$

(a) un paraboloïde

(b) une sphère

(c) un cône

(d) un cylindre

(e) La surface S ne correspond à aucun des choix précédents.