

## Solutionnaire 2015 Examen final

### Problème 1

La multiplication avec un train de Dirac est une opération d'échantillonnage. Le résultat d'un échantillonnage n'est pas une fonction périodique si la fonction échantillonnée n'est pas périodique. Dans cet exemple le produit donne un seul échantillon à  $t=0$ , certainement pas périodique.

$f(t) \times g(t)$ est périodique	OUI	<b>NON</b>
-----------------------------------	-----	------------

La convolution d'une fonction avec une durée finie en temps et un train de Dirac est une somme de fonctions décalées. Ces fonctions sont décalées régulièrement avec la même pondération, donc le résultat est périodique.

$f(t) * g(t)$ est périodique	<b>OUI</b>	NON
------------------------------	------------	-----

Le fait d'échantillonner une fonction rend son spectre périodique. Ici nous avons plutôt une périodisation temporelle. Le spectre est discret, mais pas périodique.

$f(t) * g(t)$ a un spectre périodique	OUI	<b>NON</b>
---------------------------------------	-----	------------

### Problème 2

Un filtre est causal si nous avons la propriété  $h(t) = h(t)U(t)$ . Nous remarquons que le deuxième cas  $h_2(t) = e^{-\beta t} U(t)$  est déjà causal – on a rien à faire.

Il est possible de forcer la causalité en multipliant par  $U(t)$ , mais cette approche introduit des distorsions importantes.

Dans le cas  $h_1(t) = \text{Rect}(t)$  nous pouvons introduire un simple décalage temporel pour le rendre causal sans introduire de distorsion.  $\tilde{h}_1(t) = \text{Rect}(t - 1/2)$

Dans le cas  $h_3(t) = e^{-\beta|t|}$  nous ne pouvons introduire un simple décalage temporel parce que la réponse impulsionnelle a un support temporel infini. Il faut commencer par tronquer la réponse impulsionnelle à un point où la distorsion est acceptable. Pour le rendre causal, nous ajoutons le délai temporel nécessaire  $\tilde{h}_3(t) = e^{-\beta|t-\tau|} U(t)$ .

### Problème 3

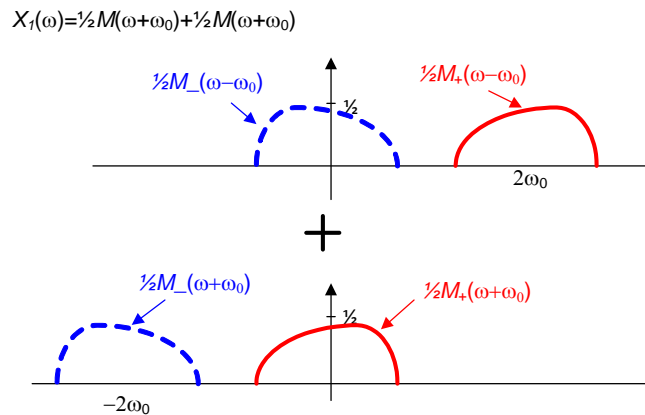
A) Nous commençons avec  $x_1(t)$  qui est modulée par un cosinus:

$$x_1(t) = m(t) \cos \omega_0 t$$

La modulation (multiplication) en temps correspond à une convolution en fréquence, donc

$$\begin{aligned}
 X_1(\omega) &= \frac{1}{2\pi} M(\omega) * \text{TF}[\cos \omega_0 t] = \frac{1}{2\pi} M(\omega) * \pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \\
 &= \frac{1}{2} M(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} M(\omega + \omega_0) \\
 &= \frac{1}{2} M_+(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} M_+(\omega + \omega_0) + \frac{1}{2} M_-(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} M_-(\omega + \omega_0)
 \end{aligned}$$

Le graphique est un peu difficile à voir, avec recouvrement au tour de fréquence zéro.



Nous utilisons la notation indiquée dans le problème,

$$\begin{aligned}
 M(\omega) &= M_+(\omega) + M_-(\omega) \\
 M_+(\omega) &= \begin{cases} M(\omega), & \omega > 0 \\ 0, & \omega < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad M_-(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega > 0 \\ M(\omega), & \omega < 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

B) Le signal passe par un filtre passe-bas dont la réponse en fréquence est donnée par:

$$H_{LP}(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < B/2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} = \text{Rect}\left(\frac{\omega}{B}\right)$$

La sortie du filtre est le produit de la transformée de l'entrée et de la réponse en fréquence du filtre. Le produit du spectre de l'entrée avec la réponse en fréquence du filtre a l'effet de laisser passer juste les deux contributions du spectre en basse fréquence. En regardant le graphique, on peut écrire

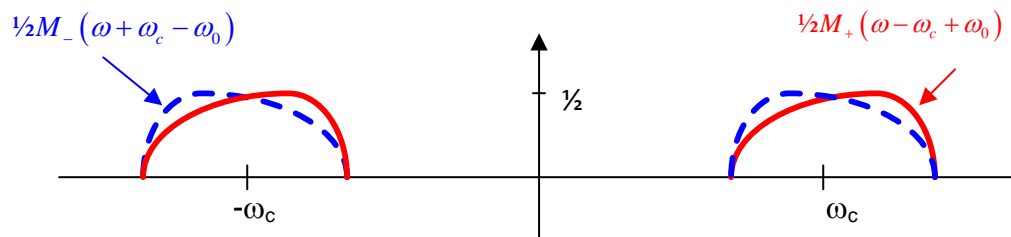
$$Y_1(\omega) = X_1(\omega) H_{LP}(\omega) = \frac{1}{2} M_+(\omega + \omega_0) + \frac{1}{2} M_-(\omega - \omega_0)$$

C) La sortie de filtre est modulée à une haute fréquence. Dans la première branche,

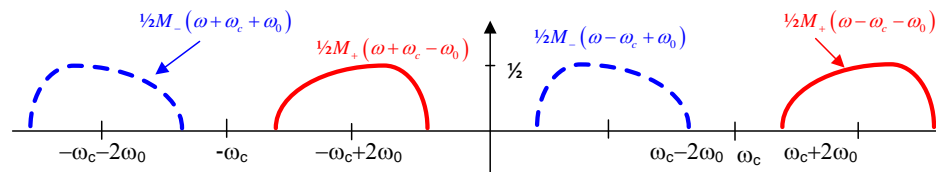
$$z_1(t) = y_1(t) \cos \omega_c t \quad \omega_c \gg B$$

Dans le domaine fréquentiel,

$$\begin{aligned}
 Z_1(\omega) &= \frac{1}{2\pi} Y_1(\omega) * \text{TF}[\cos \omega_c t] \\
 &= \frac{1}{2\pi} Y_1(\omega) * \pi [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)] \\
 &= \frac{1}{2} Y_1(\omega - \omega_c) + \frac{1}{2} Y_1(\omega + \omega_c) \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} M_+(\omega - \omega_c + \omega_0) + \frac{1}{2} M_-(\omega - \omega_c - \omega_0) \right] + \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} M_+(\omega + \omega_c + \omega_0) + M_-(\omega + \omega_c - \omega_0) \right] \\
 &= \frac{1}{4} M_+(\omega - \omega_c + \omega_0) + \frac{1}{4} M_-(\omega - \omega_c - \omega_0) + \frac{1}{4} M_+(\omega + \omega_c + \omega_0) + \frac{1}{4} M_-(\omega + \omega_c - \omega_0)
 \end{aligned}$$

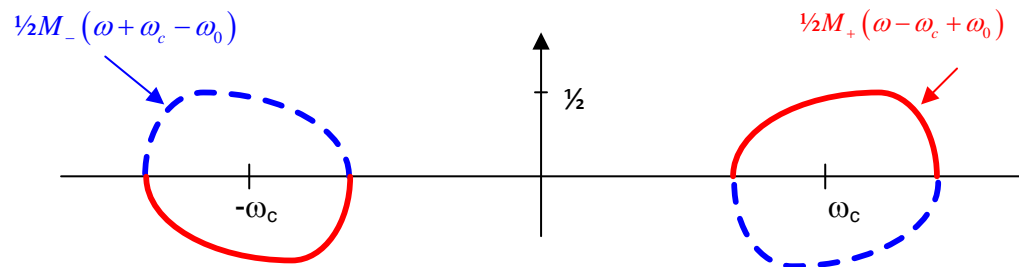


Erreur commun.  $Z_1(\omega) = \frac{1}{4} M_+(\omega - \omega_c - \omega_0) + \frac{1}{4} M_-(\omega - \omega_c + \omega_0) + \frac{1}{4} M_+(\omega + \omega_c - \omega_0) + \frac{1}{4} M_-(\omega + \omega_c + \omega_0)$   
qui aura le graphique



Dans la deuxième branche, nous sommes donné que

$$Z_2(\omega) = \frac{1}{4} M_+(\omega - \omega_c + \omega_0) - \frac{1}{4} M_-(\omega - \omega_c - \omega_0) - \frac{1}{4} M_+(\omega + \omega_c + \omega_0) + \frac{1}{4} M_-(\omega + \omega_c - \omega_0)$$



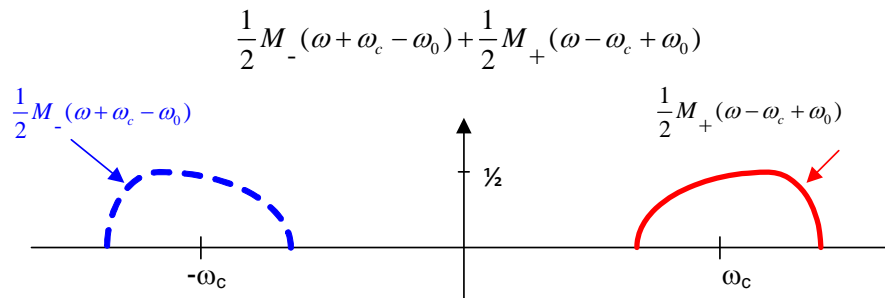
Le signal de sortie,  $s(t)$  est donc

$$s(t) = z_1(t) + z_2(t)$$

avec un spectre de

$$\begin{aligned}
 S(\omega) &= Z_1(\omega) + Z_2(\omega) \\
 &= \frac{1}{4} \left[ M_+(\omega - \omega_c + \omega_0) + M_-(\omega - \omega_c - \omega_0) + M_+(\omega + \omega_c + \omega_0) + M_-(\omega + \omega_c - \omega_0) \right] \\
 &\quad + \frac{1}{4} M_+(\omega - \omega_c + \omega_0) - \frac{1}{4} M_-(\omega - \omega_c - \omega_0) - \frac{1}{4} M_+(\omega + \omega_c + \omega_0) + \frac{1}{4} M_-(\omega + \omega_c - \omega_0) \\
 &= \frac{1}{2} M_-(\omega + \omega_c - \omega_0) + \frac{1}{2} M_+(\omega - \omega_c + \omega_0)
 \end{aligned}$$

Le graphique est



C'est un signal de *bande latérale unique supérieur*.

### Problème 4

A)

$$s(t) = m(t) \cos(10t) \Rightarrow S(\omega) = \frac{1}{2} M(\omega - 10) + \frac{1}{2} M(\omega + 10)$$

$$\left\{ \begin{aligned} m(t) \cos(10t) &\Leftrightarrow \frac{1}{2\pi} M(\omega) * \text{TF}\{\cos 10t\} \\ &\frac{1}{2\pi} M(\omega) * [\pi \delta(\omega - 10) + \pi \delta(\omega + 10)] \\ &\frac{1}{2} M(\omega) * \delta(\omega - 10) + \frac{1}{2} M(\omega) * \delta(\omega + 10) \\ &\frac{1}{2} M(\omega - 10) + \frac{1}{2} M(\omega + 10) \end{aligned} \right\}$$



B) La fréquence maximale pour  $m(t)$  est 1. Donc la fréquence de Nyquist,  $\omega_{Nyq}$ , est deux fois,

$$\omega_{Nyq} = 2\omega_{\max} = 2. \text{ Le temps d'échantillonnage Nyquist est } T_{Nyq} = 2\pi / \omega_{Nyq} = \pi.$$

Dans le deuxième cas, la fréquence maximale pour  $s(t)$  est 11. Donc la fréquence de Nyquist,

$$\omega_{Nyq}, \text{ est deux fois, } \omega_{Nyq} = 2\omega_{\max} = 22. \text{ Le temps d'échantillonnage Nyquist est}$$

$$T_{Nyq} = 2\pi / \omega_{Nyq} = \pi / 11.$$

C)

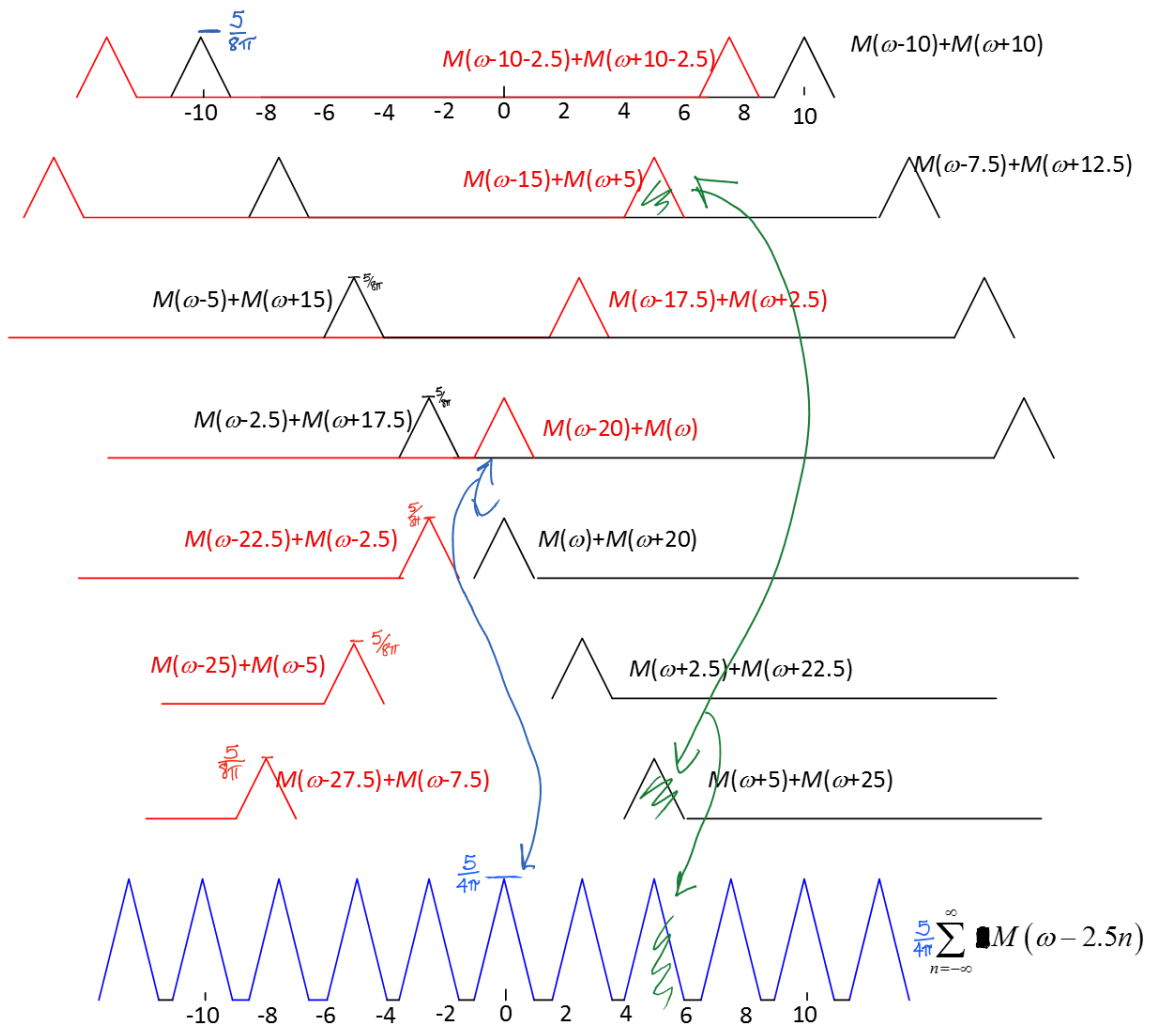
$$T_{ech} = \frac{4\pi}{5} \Rightarrow \omega_{ech} = \frac{2\pi}{4\pi/5} = 2.5$$

$$s(t) \cdot \delta_{T_{ech}}(t) \Leftrightarrow \frac{2.5}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(\omega - n \cdot 2.5)$$

$$\left\{ \begin{aligned} s(t) \delta_{T_{ech}}(t) &\Leftrightarrow \frac{1}{2\pi} S(\omega) * \omega_0 \delta_{\omega_{ech}}(\omega) \\ &\frac{1}{2\pi} S(\omega) * 2.5 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n \cdot 2.5) \\ &\frac{2.5}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(\omega) * \delta(\omega - n \cdot 2.5) \\ &\frac{5}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(\omega - n \cdot 2.5) \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{2.5}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(\omega - n \cdot 2.5) &= \frac{5}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} M(\omega - 10 - 2.5n) + \frac{1}{2} M(\omega + 10 - 2.5n) \\
 &= \frac{5}{8\pi} \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} M(\omega - 10 - 2.5n) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} M(\omega + 10 - 2.5n) \right] \\
 &= \frac{5}{8\pi} \cdot 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} M(\omega - 2.5n) = \frac{5}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} M(\omega - 2.5n)
 \end{aligned}$$

Graphiquement nous voyons ici les copies à gauche ( $n$  positive) en rouge et les copies à droite ( $n$  négative) en noir.



On peut isoler  $M(\omega)$  en faisant un filtrage passe-bas et un gain de  $4\pi/5$

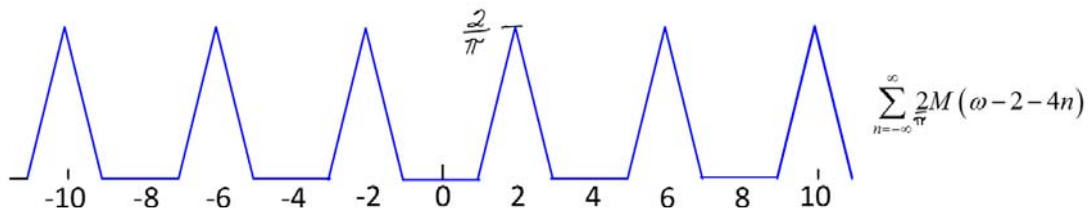
$$H_{LP}(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} = \text{Rect}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

D)

$$T_{\text{ech}} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \omega_{\text{ech}} = \frac{2\pi}{T_{\text{ech}}} = 4$$

$$\begin{aligned} s(t) \cdot \delta_{T_{\text{ech}}}(t) &\Leftrightarrow \frac{4}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(\omega - 4n) \\ &= \frac{4}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} M(\omega - 10 - 4n) + M(\omega + 10 + 4n) \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ M(\omega - 10) + M(\omega - 6) + M(\omega - 2) + M(\omega + 2) + \dots \right\} \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} M(\omega - 2 - 4n) \end{aligned}$$

Graphiquement



On ne peut pas isoler  $M(\omega)$  en faisant un filtrage passe-bas – le triangle n'est pas retourné en bande de base.

E) En respectant le critère de Nyquist nous sommes assurés de ne pas avoir de recouvrement spectral, et d'être capables de reconstruire le signal original avec un filtrage passe-bas. Nous parlons d'un critère suffisant pour la reconstruction idéale d'une fonction échantillonnée, mais pas un critère nécessaire, comme nous voyons dans la partie C.

Dans la partie C nous ne respectons pas le critère de Nyquist. Le recouvrement spectral est, par contre, un recouvrement constructif – nous avons le spectre multiplié par deux (somme de deux copies). Le signal  $m(t)$  est retourné en bande de base et nous pouvons récupérer le signal original. Il n'y a pas de distorsion introduit.

Dans la partie D nous ne respectons pas le critère de Nyquist. Le recouvrement spectral est, encore une fois, un recouvrement constructif – nous avons le spectre multiplié par deux (somme de deux copies). Le signal  $m(t)$ , par contre, n'est pas retourné en bande de base. Pour cette raison, nous ne pouvons pas récupérer le signal original.