UNIVERSITÉ
LAVAL

Faculté des Sciences et de génie
Département de génie électrique et de génie informatique

GEL-2001 Analyse de signaux
Jérôme Genest

Examen final

Date: Mardi le 11 décembre 2018

Durée: de 13h30 à 15h30

Salle: PLT-2704, CMT-4106

Cet examen vaut 45% de la note finale.

Remarques:

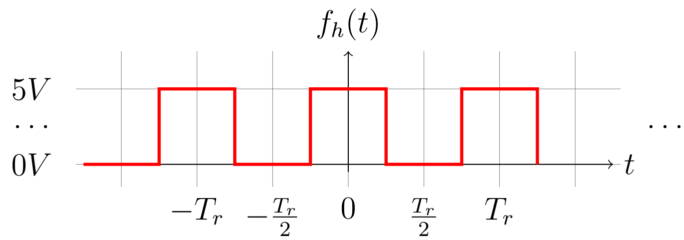
i) *L'utilisation d'une calculatrice est permise.*

ii) *Aucun document n'est permis durant l'examen.*

iii) *Seule la liste des formules fournie à la fin du questionnaire est permise.*

iv) *Votre carte d'identité doit être placée sur votre bureau en conformité avec le règlement de la Faculté.*

Problème 1 (11 points)



Sur les ordinateurs, certains bus PCI fonctionnent avec un signal d'horloge $f_h(t)$ ayant une fréquence $f_r = 1/T_r = 66$ MHz. Les niveaux logiques sont à 0 et 5 Volts respectivement, tel qu'illustré à la figure ci-haut ($\omega_r = 2\pi f_r$). Ce signal est mesuré avec un oscilloscope ayant une fréquence d'échantillonnage pouvant être choisie par l'usager.

a) Calculez et tracez la transformation de Fourier $F_h(\omega)$ du signal $f_h(t)$

b) Est-ce que c'est un signal de puissance finie ou d'énergie finie ?

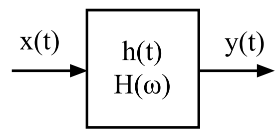
c) On choisit une fréquence d'échantillonnage $f_c = 150$ MHz. En considérant que le signal d'horloge est filtré tel que $Y(\omega) = F_h(\omega)\text{Rect}(\frac{\omega}{8\omega_r})$, tracez le spectre du signal $y(t) \Longleftrightarrow Y(\omega)$ après échantillonnage par l'oscilloscope. L'idée est de montrer que vous comprenez le repliement spectral en plaçant les fréquences repliées aux bons endroits.

d) Tracez les échantillons pris sur le signal temporel si on choisit une fréquence d'échantillonnage $f_c = 132$ MHz.

e) Pour le cas d), quelle forme aurait le signal reconstruit de manière idéale ?

f) Comment expliquer cela dans le domaine spectral ?

Problème 2 (9 points)



Un générateur d'impulsions un peu spécial est utilisé pour caractériser un système linéaire invariant dans le temps. Le signal du générateur peut être décrit par:

$$x(t) = \left[\frac{10}{2\pi}\sum_n \mathrm{Sa}\left(\frac{10\pi(t-nTr)}{T_r}\right)\right]\cos(\omega_o t)$$

Tandis que le filtre à caractériser est un passe-bande tel que:

$$H(\omega) = \mathrm{Rect}(10(\omega-\omega_h)/\omega_r) + \mathrm{Rect}(10(\omega+\omega_h)/\omega_r)$$

a) Exprimez le signal x(t) comme un produit de convolution entre un peigne de Dirac et un Sa.

b) Calculez la transformation de Fourier de $\frac{10}{2\pi}\mathrm{Sa}\left(\frac{10\pi t}{T_r}\right)$.

c) Calculez la $X(\omega)$ transformation de Fourier de $x(t)$.

d) Tracez $X(\omega)$.

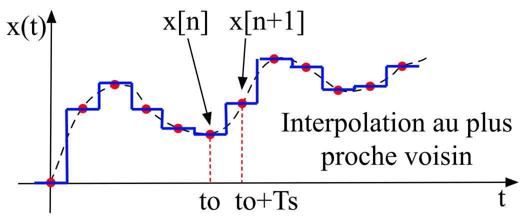
e) Tracez $Y(\omega)$ la sortie du filtre dans le cas où $\omega_h = \omega_o + 3\omega_r$

f) Tracez $Y(\omega)$ la sortie du filtre dans le cas où $\omega_h = \omega_o + 3.5\omega_r$

g) Expliquez la différence entre les deux cas à l'aide de vos connaissances en analyse des signaux. Que faut-il faire avec les impulsions de notre générateur pour mieux caractériser notre filtre?

Problème 3 (13 points)

On a échantillonné un signal et celui-ci est représenté par une séquence discrète de nombres $x[n]$, avec n entier. On désire interpoler cette séquence afin de calculer des valeurs entre les échantillons. On suppose que la période d'échantillonnage est T_s.



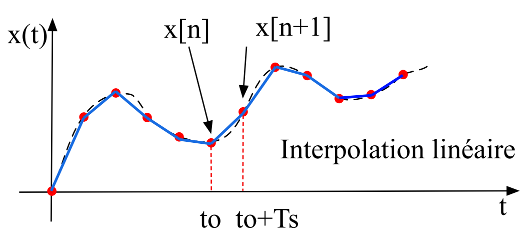
Interpolation au plus proche voisin: Il s'agit de considérer que la valeur à tout temps entre $x[n]$ et $x[n+1]$ est simplement égale à la valeur de l'échantillon le plus proche.

a) Tracez la réponse impulsionnelle de ce filtre.

b) Calculez la fonction de transfert de ce filtre.

c) Est-ce un filtre causal ? Si non, que faut-il faire pour rendre ce filtre causal ? Donnez la réponse impulsionnelle et la fonction de transfert du filtre causal.

d) Comment ce filtre se compare-t-il à un bloqueur d'ordre zéro?



Interpolation linéaire: On calcule la valeur à un point t entre deux points séparés de T_s comme une moyenne pondérée telle que $x(t) = \frac{(T_s - t)x[n] + t\,x[n+1]}{T_s}$.

e) Tracez la réponse impulsionnelle de ce filtre (attention, il faut aussi penser à ce qui arrive entre $x[n-1]$ et $x[n]$).

f) Calculez la fonction de transfert de ce filtre.

g) Est-ce un filtre causal? Si non, que faut-il faire pour rendre ce filtre causal ? Donnez la réponse impulsionnelle et la fonction de transfert du filtre causal.

Problème 4 (12 points)

On désire mesurer le spectre d'un laser que nous allons représenter par un cosinus à une fréquence ω_s. Cependant, cette fréquence ([THz]) est trop rapide pour être mesurée directement avec un oscilloscope. Pour contourner le problème, on mélange sur un photodétecteur le champ du laser à caractériser avec le champ d'un autre laser, nommé oscillateur local:

$$E_s(t) = A_s \cos(\omega_s t + \phi) \quad \text{et} \quad E_{lo} = A_{lo} \cos(\omega_{lo} t).$$

Le photodétecteur effectue une mise au carré du champ total $P = (E_s + E_{lo})^2 = E_s^2 + 2E_s E_{lo} + E_{lo}^2$.

Nous allons nous intéresser uniquement au terme $I(t) = E_s(t)E_{lo}(t)$.

De plus, le signal $I(t)$ produit par le photodétecteur est filtré passe-bas par un premier ordre (RC) ayant une fréquence de coupure $\omega_f = 100 \times 10^9$, que l'on peut approximer comme un filtre idéal pour les besoins du problème. On va appeler $I_f(t)$ la version filtrée de $I(t)$.

Pour le début du problème, on va aussi supposer que la phase $\phi = 0$.

a) Pour $\omega_{lo} = 100 \times 10^{12}$ et $\omega_s = 100.001 \times 10^{12}$, calculez le signal $I_f(t)$ et tracez son spectre.

b) Pour $\omega_{lo} = 100 \times 10^{12}$ et $\omega_s = 99.999 \times 10^{12}$, calculez le signal $I_f(t)$ et tracez son spectre.

c) Commentez votre résultat. En observant uniquement $I_f(t)$ peut-on déterminer si le laser est à la fréquence du cas a) ou du cas b)?

Afin de pallier à cette situation on s'organise pour mesurer aussi le battement du laser avec une version déphasée de l'oscillateur local:

$$D_{lo}(t) = A_{lo} \sin(\omega_{lo} t) \quad \text{et} \quad Q(t) = E_s(t)D_{lo}(t)$$

Évidemment, on a accès uniquement à $Q_f(t)$, la version filtrée passe-bas de $Q(t)$.

d) Pour $\omega_{lo} = 100 \times 10^{12}$ et $\omega_s = 100.001 \times 10^{12}$, calculez le signal $Q_f(t)$ et tracez son spectre.

e) Pour $\omega_{lo} = 100 \times 10^{12}$ et $\omega_s = 99.999 \times 10^{12}$, calculez le signal $Q_f(t)$ et tracez son spectre.

f) Pouvons-nous maintenant distinguer les deux cas ? Avons-nous un problème si $\phi = 180^O$?

g) Considérez le signal complexe $S(t) = I_f(t) + jQ_f(t)$ et tracez $S(\omega)$ pour les deux cas.

h) Tracez la courbe décrite par $S(t)$ dans le plan complexe pour les deux cas,, en prenant soin d'indiquer les différences entre les deux.

i) Supposons maintenant que $\omega_{lo} = \omega_s$ et qui ϕ est utilisé pour une modulation qui peut prendre 4 valeurs (0,90,180 et 270 degrés). Tracez les résultats possibles pour $S(t)$ dans le plan complexe. (On utilise en fait la phase ici pour transmettre 2 bits d'information à chaque fois qu'on change ϕ).