Examen Partiel 2004 - *Solutionnaire*
GEL10280 Communications Numériques

Problème 1

A. Une impulsion Nyquist passe par zéro pour toutes les moments d'échantillonnage sauf temps zéro. Pour T le temps d'un symbole

$$v\left(nT\right) = 0 \quad \forall n \neq 0$$

B. L'impulsion Nyquist avec la bande de fréquence la plus étroite est $v(t)$=Sinc(t/T) avec une bande de fréquence $1/2T$.

C. Un signal réalisable est toujours de duré finie en temps, donc avec un spectre de duré infinie. Les canaux de transmission ont toujours une largeur de bande finie. L'effet du canal sur une impulsion avec une largeur de bande plus large que la largeur de bande du canal est d'étaler l'impulsion – qui engendre le recouvrement des symboles.

   Les impulsions Nyquist sont plus longues que le temps d'un symbole, donc un spectre moins large. Etant donné que les impulsions sont plus long que le temps d'un symbole il y a nécessairement des recouvrements. Les impulsions Nyquist assurent que au moment d'échantillonnage les recouvrements sont zéro, donc elles ne contribuent pas à l'interférence inter symbole.

D. Considérons le cas r=0, la fonction est le sinus cardinal qui est le plus efficace en largeur de bande. Nous observons que le taux de décroissance en temps est comme $1/t$, donc l'impulsion décroît très lentement, et elle a des lobes secondaires importants. Les erreurs de timing vont engendrer de l'interférence inter symbole, étant donné que le sinus cardinale n'aurait pas diminué assez.

   1. r=0 : avantage – efficace en largeur de bande
      désavantage – sensibles aux erreurs de timing

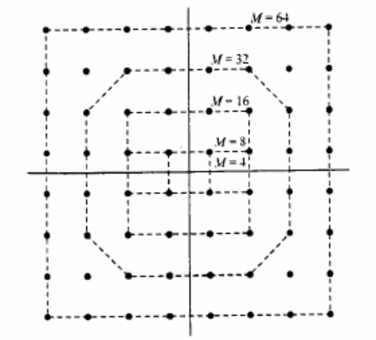
   Considérons le cas r=1, la fonction la moins efficace en largeur de bande et prendre deux fois la largeur de bande du sinus cardinale. Nous observons que le taux de décroissance en temps est comme $1/t^3$, donc l'impulsion décroît très vite, et elle a des lobes secondaires peu importants. Les erreurs de timing ne vont pas engendrer de l'interférence inter symbole, étant donné que l'impulsion aurait diminué beaucoup.

   2. r=1 : avantage – peu efficace en largeur de bande
      désavantage – pas sensibles aux erreurs de timing

   Considérons le cas r=.3, un cas compromis avec largeur de bande 30% plus grande que la valeur minimale. Le taux de décroissance en temps est assez pour combattre les erreurs de timing pas trop sévère.

   3. r=1 : avantage – efficacité spectrale moyenne
      désavantage –sensibilité moyenne aux erreurs de timing

Problème 2



A. Les coordonnées dans l'espace I/Q sont $\left(a_n^I, a_n^Q\right) \in \{\pm1, \pm3, \pm5, \pm7\}$. Pour chercher les coordonnées dans l'espace de signal nous utilisons la formule suivante

$$\left(\tilde{a}_n^I, \tilde{a}_n^Q\right) = \sqrt{\frac{ME_s}{\sum_{i=1}^{M}\left[\left(a_n^I\right)^2 + \left(a_n^Q\right)^2\right]}}\left(a_n^I, a_n^Q\right)$$

$\left(a_n^I, a_n^Q\right)$	# de points	*distance*^{2} de l'origine	Sous total
(±1, ±1)	4	2	8
(±1, ±3) (±3, ±1)	8	10	80
(±3, ±3)	4	18	72
(±1, ±5) (±5, ±1)	8	26	208
(±5, ±5)	4	50	200
(±1, ±7) (±7, ±1)	8	50	400
(±7, ±7)	4	98	392
(±3, ±5) (±5, ±3)	8	34	272
(±3, ±7) (±7, ±3)	8	58	464
(±5, ±7) (±7, ±5)	8	74	592
$\sum_{i=1}^{M}\left[\left(a_n^I\right)^2 + \left(a_n^Q\right)^2\right]$			2688

Pour calculer la somme dans le dénominateur, nous utilisons les observations dans la table à côté. Donc les coordonnées dans l'espace de signal sont :

$$\left(\tilde{a}_n^I, \tilde{a}_n^Q\right) = \sqrt{\frac{64E_s}{2688}}\left(a_n^I, a_n^Q\right) = \sqrt{\frac{E_s}{42}}\left(a_n^I, a_n^Q\right)$$

et la distance minimale est $D_{\min} = 2\sqrt{E_s/42}$.

B. La distance normalisé minimale est donc

$$d_{\min} = \frac{D_{\min}}{\sqrt{2E_b}} = 2\sqrt{\frac{\log_2 64 \cdot E_b}{42}\cdot\frac{1}{2E_b}} = \sqrt{\frac{12}{42}} = \sqrt{.286} = .534$$

Nous avons vu en classe pour $k^2 = M$ QAM :

$$d_{min} = \sqrt{\frac{6\,log_2\,k}{k^2 - 1}}$$

Ici $k^2 = 64, k = 8$, donc

$$d_{\min} = \sqrt{\frac{6\cdot\log_2 8}{64-1}} - \sqrt{\frac{6\cdot 3}{63}} = \sqrt{\frac{18}{63}} = \sqrt{.286} = .534,$$

donnant le même résultat que nous venons de calculé.

C. Nous pouvons utiliser l'approximation :

$$P_e \le \frac{2K}{M^2} Q\left(\sqrt{\frac{d_{\min}^2 E_b}{N_0}}\right)$$

où *K*= # de voisins à la distance minimale. Pour trouver *K*, nous observons

chaque rangée : 7 voisins X 8 rangées = 56
chaque colonne : 7 voisins X 8 rangées = 56

donc K=112. La probabilité d'erreur est

$$P_e \leq \frac{2 \cdot 112}{64} Q\left(\sqrt{.286\frac{E_b}{N_0}}\right) \leq 3.5\, Q\left(\sqrt{.286\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

Problème 3

A. La définition de l'efficacité en largeur de bande est

$$\eta = \frac{R}{W} = \frac{1}{T_b}\frac{1}{W}$$

Pour QPSK la largeur de bande pour les impulsions de Nyquist idéales est

$$W = \frac{1}{T_s} = \frac{1}{2T_b}$$

qui est la largeur de bande totale. L'efficacité spectrale est donc 2 b/s/Hz.

Pour 4FSK la largeur de bande par porteuse pour les les impulsions de Nyquist idéales est

$$W = \frac{1}{T_s} = \frac{1}{2T_b}$$

La séparation minimale pour la détection cohérente est $1/2T_s$, donc la première porteuse couvre de $-1/2T_s$ à $1/2T_s$, la deuxième porteuse de 0 à $1/T_s$, la troisième porteuse de $1/2T_s$ à $3/2T_s$, la quatrième porteuse de $1/T_s$ à $2/T_s$. La bande totale est de $-1/2T_s$ à $2/T_s$, soit une largeur de bande totale de

$$W = \frac{2.5}{T_s} = \frac{2.5}{2T_b} = \frac{5}{4T_b}$$

et l'efficacité spectrale est 4/5=.8 b/s/Hz.[1]

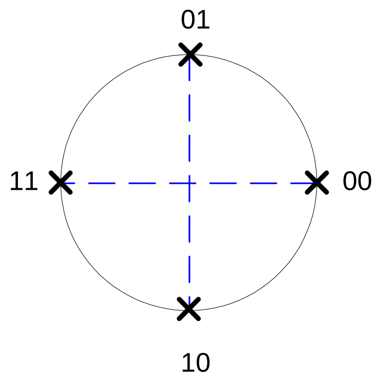
Finalement pour 4PAM, la largeur de bande pour les impulsions de Nyquist idéales est

$$W = \frac{1}{T_s} = \frac{1}{2T_b}$$

qui est la largeur de bande totale. L'efficacité spectrale est donc 2 b/s/Hz. Notons que la partie en quadrature n'est pas utilisée.

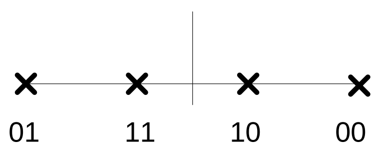
[1] Notez que pour la détection non cohérente la séparation minimale est $1/T_s$, donc la première porteuse couvre de $-1/2T_s$ à $1/2T_s$, la deuxième porteuse de $1/2T_s$ à $3/2T_s$, la troisième porteuse de $3/2T_s$ à $5/2T_s$, la quatrième porteuse de $5/2T_s$ à $7/2T_s$. La bande totale pour la détection non cohérente est de $-1/2T_s$ à $7/2T_s$, soit une largeur de bande totale de $4/T_s$ et une efficacité spectrale de .5 b/s/Hz.

B. La constellation QPSK n'est pas orthogonale, donc nous devrons utiliser un code de Gray, par exemple



La constellation 4FSK est orthogonale, donc pas besoin d'un code de Gray.

La constellation 4PAM n'est pas orthogonale, donc nous devrons utiliser un code de Gray, par exemple



C. Le 4PAM est aussi efficace spectralement que QPSK, mais la distance minimale est pire :

$$D_{\min}\Big|_{QPSK} = \sqrt{2E_s}$$

$$D_{\min}\Big|_{4PAM} = 2\sqrt{\frac{E_s}{5}} = \sqrt{\frac{4E_s}{5}}$$

Par rapport à QPSK, 4PAM a une perte de

$$10\log_{10} \frac{4E_s}{5}\Big/2E_s = 10\log_{10}\frac{2}{5} = 4\,\mathrm{dB}.$$