Mathématiques de l'ingénieur I (MAT-10363)
Examen partiel du 3 octobre 2003
SOLUTIONS

Question 1

(5 + 5 + 5 = 15 points)

Soient les nombres complexes $z = i - 1$ et $w = 1 + i\sqrt{2}$.

(a) Déterminer la partie imaginaire de z.

$$\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(i-1) = \mathrm{Im}(-1+1i) = 1.$$

(b) Écrire $\overline{z}/w$ sous forme cartésienne.

$$\frac{\overline{z}}{w} = \frac{\overline{i-1}}{1+i\sqrt{2}} = \frac{-i-1}{1+i\sqrt{2}} \cdot \frac{1-i\sqrt{2}}{1-i\sqrt{2}} = \frac{-1-\sqrt{2}+i(-1+\sqrt{2})}{3} = \left(\frac{-1-\sqrt{2}}{3}\right) + i\left(\frac{-1+\sqrt{2}}{3}\right).$$

(c) Existe-t-il un entier $n \geq 1$ pour lequel $w^n = 1$?

Si $w^n = 1$ pour un certain $n \geq 1$, alors $|w^n| = |w|^n = 1$, ce qui force $|w| = 1$. Or, $|w| = \sqrt{1+2} = \sqrt{3} \neq 1$. Donc, il n'existe pas un tel entier n.

Question 2

(8 + 7 + 10 = 25 points)

(a) Soit z un nombre complexe dont l'argument est entre $\pi/6$ et $\pi/3$. Dans quel quadrant se situe z^3 ?

On sait que $\arg(z^3) = 3\arg(z)$ (multiplication sous forme polaire).

Donc, puisque $\pi/6 \leq \arg(z) \leq \pi/3$, on doit avoir

$$3 \times \pi/6 \leq \arg(z^3) \leq 3 \times \pi/3,$$

ce qui est équivalent à

$$\pi/2 \leq \arg(z^3) \leq \pi.$$

Ainsi, z^3 se trouve dans le 2^{e} quadrant.

(b) Évaluer $\left|\dfrac{(2+i)^{13}}{(1-2i)^{10}}\right|$.

$$\begin{aligned}\left|\frac{(2+i)^{13}}{(1-2i)^{10}}\right| &= \frac{|(2+i)^{13}|}{|(1-2i)^{10}|} \qquad (\text{car } |z/w| = |z|/|w|)\\ &= \frac{|2+i|^{13}}{|1-2i|^{10}} \qquad (\text{car } |z^n| = |z|^n)\\ &= \frac{(\sqrt{4+1})^{13}}{(\sqrt{1+4})^{10}}\\ &= (\sqrt{5})^3 \;=\; 5\sqrt{5}.\end{aligned}$$

(c) Soit $a = \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{i}{\sqrt{2}}$. Trouver les racines 4$^{\text{e}}$ de a.

On écrit a sous forme exponentielle (ou polaire) :

$$a = 1e^{i\pi/4}.$$

Soit $z = re^{i\theta}$ un nombre complexe quelconque sous forme exponentielle. Les racines 4$^{\text{e}}$ de a sont les solutions de l'équation :

$$z^4 = a.$$

On a donc

$$r^4 e^{4i\theta} = 1e^{i\pi/4},$$

ce qui donne le système

$$\begin{aligned} r^4 &= 1,\\ 4\theta &= \pi/4 + 2\pi k \qquad (k \in \mathbb{Z}).\end{aligned}$$

La première équation force $r = 1$ (car r doit être positif). La seconde donne

$$\theta = \pi/16 + \pi k/2 \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

Il n'y a que 4 valeurs de θ qui soient différentes :

$$\theta_0 = \pi/16, \quad \theta_1 = 9\pi/16, \quad \theta_2 = 17\pi/16, \quad \theta_3 = 25\pi/16.$$

Il y a donc 4 racines 4$^{\text{e}}$ de a et elles sont :

$$z_0 = e^{i\pi/16}, \quad z_1 = e^{9i\pi/16}, \quad z_2 = e^{17i\pi/16}, \quad z_3 = e^{25i\pi/16}.$$

Question 3
(10 points)

Trouver tous les z dans $\mathbb{C}$ tels que $e^z = e^{iz}$. (*Suggestion : utilisez la forme cartésienne.*)

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe quelconque sous forme cartésienne. On a

$$\begin{aligned} e^z &= e^{iz} \\ e^{x+iy} &= e^{i(x+iy)} \\ e^{x+iy} &= e^{-y+ix} \\ e^x e^{iy} &= e^{-y} e^{ix} \qquad \text{(forme exponentielle !)} \end{aligned}$$

Donc,

$$e^x = e^{-y} \quad \text{et} \quad y = x + 2\pi k \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

Le première équation donne $x = -y$ et en substituant dans la deuxième, on a

$$2y = 2\pi k \quad \Longrightarrow \quad y = \pi k \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

Les solutions (il y en a une infinité) sont

$$z_k = -\pi k + i\pi k = \pi k(i-1) \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

Question 4
(10 points)

Factoriser complètement le polynôme $p(z) = 2z^4 - 4z^3 + 24z^2 - 8z + 40$ sachant que $w = 1 - 3i$ est une racine de celui-ci.

Il s'agit d'un polynôme à coefficients réels.
Puisque $w = 1 - 3i$ est une racine, $\overline{w} = 1 + 3i$ est aussi une racine.
Donc,

$$(z - w)(z - \overline{w}) = z^2 - 2z\mathrm{Re}(w) + |w|^2 = z^2 - 2z + 10$$

est un facteur de $p(z)$. En divisant, on trouve

$$p(z) = (z^2 - 2z + 10)(2z^2 + 4).$$

Les racines du second facteur sont :

$$2z^2 + 4 = 0 \quad \Longrightarrow \quad z^2 = -2 \quad \Longrightarrow \quad z = \pm i\sqrt{2}.$$

En conséquence, la factorisation complète de $p(z)$ est

$$p(z) = 2(z - 1 + 3i)(z - 1 - 3i)(z - i\sqrt{2})(z + i\sqrt{2}).$$

Question 5

($4 + 8 + 3 = 15$ points)

Considérer l'équation différentielle $y' = \dfrac{3y}{x}$ (A) et la famille de courbes $y = cx^3$ ($c \in \mathbb{R}$) (B).

(a) Vérifier que (B) est la solution générale de (A).

Il faut vérifier que $y' = \frac{3y}{x}$ lorsque $y = cx^3$.

Le membre de gauche : $y' = (cx^3)' = 3cx^2$.

Le membre de droite : $\frac{3y}{x} = \frac{3cx^3}{x} = 3cx^2$.

Les deux étant égaux, l'équation est vérifiée et par conséquent, la famille $y = cx^3$ est la solution générale de (A).

(b) Déterminer les trajectoires orthogonales à (B).

L'équation différentielle associée à (B) est

$$y' = \frac{3y}{x} =: f(x, y).$$

L'équation différentielle associée à aux trajectoires orthogonales de (B) est

$$y' = -\frac{1}{f(x,y)} = -\frac{x}{3y}.$$

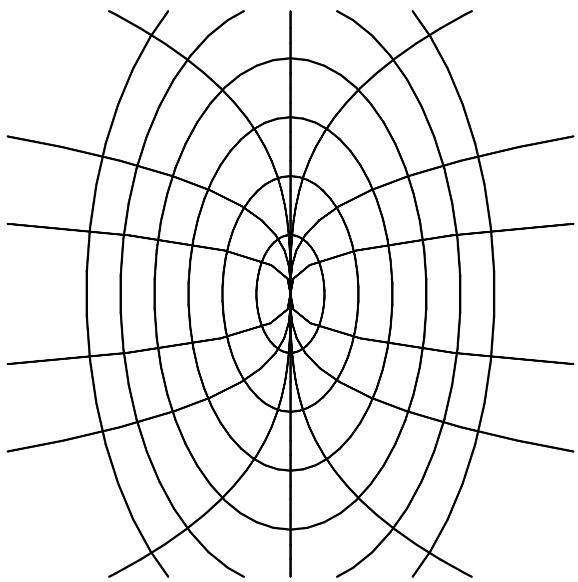
Cette équation est séparable.

$$\begin{aligned} 3yy' &= -x \\ \int 3y\,dy &= -\int x\,dx + c_0 \qquad (c_0 \in \mathbb{R}) \\ \frac{3}{2}y^2 &= -\frac{1}{2}x^2 + c_0 \qquad (c_0 \in \mathbb{R}) \\ x^2 + 3y^2 &= c_1 \qquad (c_1 \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

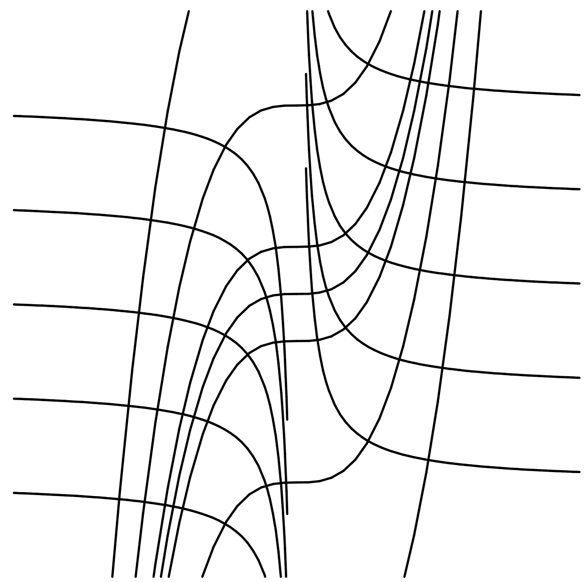
Seules les constantes $c_1 > 0$ donnent des courbes dans le plan. Il s'agit d'ellipses centrées à l'origine.

(c) Lequel des graphiques suivants représente le mieux la famille (B) et ses trajectoires orthogonales ? Encercler la bonne réponse.

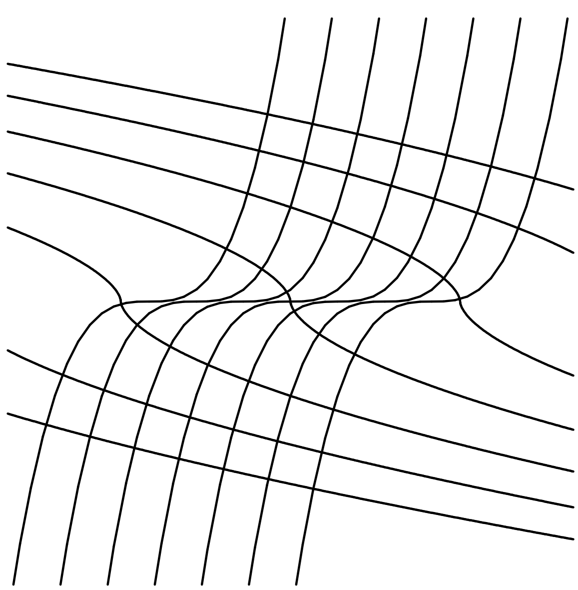
I



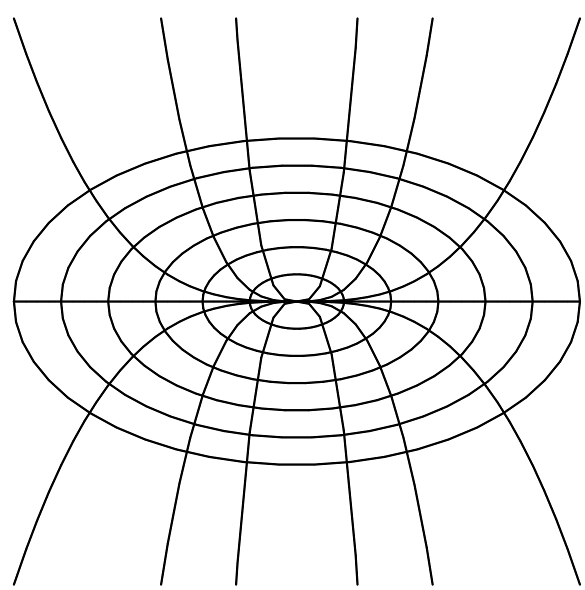
II



III



IV



Question 6

(10 + 10 = 20)

Un objet à une température T (mesurée en degrés Celsius) est plongé dans un milieu maintenu à une température constante A. Le milieu étant soumis à une forte convection, l'échange de chaleur entre l'objet et le milieu ambiant sera plus rapide que ce que prédit la loi de refroidissement de Newton. Un modèle simple pour décrire cette situation est donné par l'équation différentielle suivante

$$\frac{dT}{dt} = k(T-A)^2, \qquad (\star)$$

où t représente le temps en minutes et où k est une constante qui dépend de l'objet et du milieu dans lequel il est plongé.

(a) Résoudre l'équation différentielle $(\star)$ et montrer que sa solution générale peut s'écrire sous la forme

$$T = A - \frac{1}{kt+c}, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

L'équation $(\star)$ est séparable

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= k(T-A)^2 \\ \int \frac{dT}{(T-A)^2} &= \int k\,dt + c \qquad (c \in \mathbb{R}) \\ -\frac{1}{T-A} &= kt + c \\ -(T-A) &= \frac{1}{kt+c} \\ T &= A - \frac{1}{kt+c}. \end{aligned}$$

(b) Supposons que le milieu est maintenu à $A = 20$°C. Une première mesure prise à $t = 10$ minutes montre que l'objet est à 80°C. Une deuxième à $t = 28$ minutes donne 44°C. Calculer la température de l'objet au temps $t = 0$ minute.

Il faut déterminer les constantes k et c.

La première mesure se traduit par l'équation

$$80 = T(10) = 20 - \frac{1}{10k + c} \implies 10k + c = \frac{1}{20 - 80} = -\frac{1}{60}. \tag{1}$$

La deuxième donne

$$44 = T(28) = 20 - \frac{1}{28k + c} \implies 28k + c = \frac{1}{20 - 44} = -\frac{1}{24}. \tag{2}$$

La différence (2) − (1) donne

$$18k = -\frac{1}{24} + \frac{1}{60} = -\frac{1}{40} \implies k = -1/720.$$

En substituant dans (1) on trouve

$$c = -\frac{1}{60} - 10k = -\frac{1}{60} + \frac{1}{72} = -\frac{1}{360}.$$

Donc,

$$T(0) = 20 - \frac{1}{0 - \frac{1}{360}} = 380.$$

La température initiale était de 380°C.

Question 7

(1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5 points)

Pour chacun des énoncés suivants dire s'il est **V**rai ou **F**aux en inscrivant **V** ou **F** dans le tableau.

(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
F	V	F	V	F

(a) La commande Maple

```
> factor(z^2+1);
```

donne comme résultat

```
(z+I)(z-I)
```

(b) La commande Maple

```
> argument(abs(z));
```

donne comme résultat

```
0
```

(c) Les deux commandes suivantes donnent le même résultat dans Maple.

```
> Re(x+I);
> evalc(Re(x+I));
```

(d) La commande Maple

```
> type(I,complex);
```

donne comme résultat

```
true
```

(e) La commande Maple

```
> e^(I*Pi);
```

retourne la valeur

```
-1
```