STT-2920 **Examen 1** 14 octobre 2020

**Probabilités pour ingénieurs** **15 h 30 – 17 h 20**

**Directives :**

- Vous avez **110 minutes** pour faire cet examen, qui compte pour **50%** de la note finale.
- L'examen compte **7 questions** réparties sur **8 pages** (en comptant celle-ci).
- Vous pouvez utiliser une calculatrice scientifique **munie de l'autocollant de la faculté des sciences et de génie** et une feuille aide-mémoire manuscrite recto-verso de format lettre (8.5"×11").
- Donnez tous les développements et calculs. Sauf dans les questions à choix multiples, **toute** réponse doit être convenablement **justifiée** pour mériter des points.
- Éteignez et rangez tout appareil électronique (téléphone cellulaire, téléavertisseur, lecteur de musique, etc.). Toute communication est interdite, et ce tant que tous les examens n'ont pas été ramassés à la fin de la période allouée.
- Il est interdit de regarder les questions avant d'en avoir reçu la permission explicite du surveillant et il est interdit d'écrire à partir de l'instant où le surveillant donne l'instruction de déposer les crayons à la fin de l'examen. Le refus d'obtempérer à cette directive résultera en une **pénalité automatique de 25 points**.
- Veuillez téléverser vos réponses moyennant un seul fichier PDF (Nom-Prénom-Numéroétudiant.pdf) dans votre boîte de dépôt, à la fin de l'examen.
- **Seulement s'il y a une déficience technique avec le portail de cours, veuillez m'envoyer par courriel (khader.khadraoui@mat.ulaval.ca) vos réponses, à la fin de l'examen**.
- Veuillez lire et ensuite signer la déclaration d'intégrité suivante : « Je comprends que le présent examen contribue à évaluer mes apprentissages dans le cadre d'un cours visé par le Programme d'agrément universitaire du Bureau canadien d'agrément des programmes de génie. Je certifie sur l'honneur à avoir complété l'examen seul.e et en conformité avec les consignes de l'évaluation. Je m'engage à ne pas utiliser d'informations rendues disponibles par une autre personne (inscrite au cours ou non) pendant l'examen. Je m'engage à ne pas fournir pas aucune information à une autre personne inscrite au cours ou non pendant mon ou pendant son examen. Je suis conscient.e qu'une fausse déclaration m'expose à des sanctions disciplinaires en vertu du Règlement disciplinaire à l'intention des étudiants et étudiantes de l'Université Laval. »

| **Je suis bien l'étudiant dont le nom et le numéro de dossier sont écrits ci-dessous. J'ai lu et compris les directives et je m'engage à les respecter.** | |
|---|---|
| **Nom :** | |
| **Prénom :** | |
| **Matricule :** | |
| **Signature :** | |

**À remplir par les correcteurs**

| Q1 (/18) | Q2 (/15) | Q3 (/16) | Q4 (/15) | Q5 (/12) | Q6 (/14) | Q7 (/ 10) | **Total (/100)** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | |

**Question 1** (18 points)

Une entreprise électronique fabrique des composants selon un procédé novateur. La durée de vie de ces composants correspond au temps de fonctionnement (en années) jusqu'à ce que la première panne se produise. Elle peut être modélisée par une variable aléatoire continue $X$ (en années) pouvant prendre toute valeur dans l'intervalle $[0, \infty)$ dont la densité est

$$\text{pour tout } \lambda > 0, \qquad f(x) = \begin{cases} \lambda x^3 \mathrm{e}^{-x^2}, & x \geq 0, \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

**(a)** Calculez la constante $\lambda$ en justifiant bien la réponse. (10 points)

**(b)** Calculez la probabilité que ces composants vont fonctionner au moins 2 ans et au plus 3 ans (8 points)

**Question 2** (15 points)

Dans une très grande ville, 20% des édifices municipaux ont des fissures dans leurs fondations. Pour 75% des édifices ayant des fissures dans leurs fondations, les coûts de chauffage excèdent les prévisions, alors que c'est le cas pour seulement 10% des édifices qui n'ont pas de fissures dans leurs fondations.

Le vérificateur de la municipalité choisit un édifice au hasard parmi ceux pour lesquels les coûts de chauffage excèdent les prévisions. Quelle est la probabilité qu'il ait des fissures dans ses fondations ?

**Question 3** (16 points)

Dans le cours STT-2920 Probabilités pour ingénieurs il y a 165 étudiants provenant de 5 spécialités et aucun parmi ces étudiants n'est né un 29 février. On suppose que ces 5 spécialités ont la même probabilité (équiprobables) d'être choisie par un étudiant dans ce cours.

**(a)** Quelle est la probabilité pour qu'au moins deux étudiants de même spécialité aient leur anniversaire le même jour ? (8 points)

**(b)** On choisit 7 étudiants au hasard pour faire un test de COVID-19. Quelle est la probabilité que les 7 étudiants choisis proviendront de 4 spécialités différentes ? (8 points)

**Question 4** (15 points)

Un ingénieur doit assurer le bon fonctionnement d'une centrale électrique lorsque la demande en électricité dépasse un seuil critique. La centrale alimente en électricité, au moyen d'un réseau électrique, principalement deux villes (Cosmos et Moscos). Les besoins en électricité (en MW) de ces deux villes sont très variables et peuvent être vues comme des variables aléatoires $(X, Y)$ de densité conjointe :

$$f(x,y) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-y}, & \text{si } 0 \leq x \leq y, \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

**(a)** Calculez la densité marginale de $X$ pour tout réel $x$. (7 points)

**(b)** Si la demande en électricité de la ville Cosmos est $X = 1050$ MW, quelle est la probabilité que la demande en électricité de la ville Moscos soit supérieure à 1055 MW ? (8 points)

**Question 5** (12 points)

Les variables $X$ et $Y$ ont une distribution jointe donnée par :

| X/Y | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1/3 | a | 1/6 |
| 2 | b | 1/4 | c |

Montrez que $X$ et $Y$ sont des variables dépendantes, quelles que soient les valeurs de $a$, $b$ et $c$.

**Question 6** (14 points)

Un système électronique ayant une entrée $E$ et une sortie $S$ est formé de deux composants électroniques $C_1$ et $C_2$ montés en parallèle. Le système cesse de fonctionner dès qu'il n'y a plus de chemin entre $E$ et $S$. Soient $T_1$ et $T_2$ les durées de vie respectives des composants $C_1$ et $C_2$. On suppose, de plus, que ce sont des variables aléatoires indépendantes, et de même loi de paramètre $\lambda > 0$ telles que sa densité est donnée par :

$$f_{T_i}(t) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}, \qquad \text{pour tout } t \geq 0 \text{ et pour } \; i \in \{1, 2\},$$

et le couple $(T_1, T_2)$ a pour densité :

$$f(x, y) = \lambda^2 \exp\left[-\lambda(x + y)\right],$$

pour tout $x, y \geq 0$. Quelle est la densité de la durée de vie du système complet ?

**Question 7** (10 points)

Toutes les sous-questions sont indépendantes. Aucune justification n'est requise.

*Une bonne réponse vaut 2 points.*
*Une absence de réponse vaut 0 point.*
*Une mauvaise réponse vaut -1 point.*

Le pointage minimal à cette question est 0.

---

**(a)** Dans un hotel on cherche à affecter 2 chambres double et une chambre triple aux 7 étudiants venant participer à une conférence de physique.

☐ Le nombre total des partitions des étudiants est 210.

☐ Le nombre total des partitions des étudiants est 105

☐ Le nombre total des partitions des étudiants est ni 210 ni 105.

---

**(b)** Un électricien cherche à comparer la consommation d'énergie de 5 Games Boy à partir d'une collection de 10 jeux de stratégie et 5 jeux de sport.

☐ Le nombre de choix possibles permettant de choisir 3 jeux de stratégie parmi 10 est $10/(3!(10-3)!) = 120$.

☐ Le nombre de choix possibles permettant de choisir 3 jeux de stratégie parmi 10 et 2 jeux de sport parmis 5 est 1200

☐ Le nombre de choix possibles permettant de choisir 3 jeux de stratégie parmi 10 et 2 jeux de sport parmi 5 est $15!/3!7!2!3!$.

---

**(c)** Soit $(\Omega; \mathbb{P})$ un espace probabilisé discret, et $A, B, C$ et $D$ quatre événements. Alors :

☐ Si $A \cup B = A \cap B$, alors $A = B$.

☐ $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap C$.

☐ Si $A \cap B = \emptyset$, alors $B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$ et $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A^c \cap B)$.

☐ $((A \cap B)^c \cup (C \cap D)^c)^c = A^c \cup B^c \cap C^c \cup D^c$.

---

**(d)** Soit $(\Omega; \mathbb{P})$ un espace probabilisé discret et $A_1, \ldots A_n$ sont des événements. Alors :

☐ Si $A_1 \subset A_2$, $A_3 \subset A_4$ et $A_2 \cap A_4 = \emptyset$, alors $A_1 \cap A_3 = \emptyset$.

☐ Si $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2) = 1$, alors $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = 1$.

☐ Si $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_{n-1}$, alors $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1} \cup A_n)$ est la probabilité qu'au moins $A_1$ ou $A_n$ se réalise.

☐ Deux femmes et 14 hommes sont assis au hasard sur 16 chaises formant un cercle. La probabilité que les deux femmes occupent deux chaises diamétralement opposées est 8/120.

---

**(e)** Soit le tableau suivant qui décrit la situation des adultes dans une petite ville :

| | Employé(e)s | Non employé(e)s | Total |
|---|---|---|---|
| Hommes | 460 | 40 | 500 |
| Femmes | 140 | 260 | 400 |
| Total | 600 | 300 | 900 |

Une personne est choisie au hasard pour aller à la grande ville faire de la publicité pour les avantages de construire une nouvelle entreprise dans sa petite ville. Soit $H$ = un homme est choisi et $E$ = la personne choisie est employée.

☐ La probabilité de choisir un homme employé est 23/30.

☐ La probablilité qu'une nouvelle entreprise s'installe dans la petite ville est 16/30.

☐ La probabilité qu'une femme est choisie est $\mathbb{P}(F|E)\mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F|E^c)\mathbb{P}(E^c) = 100/225$.