UNIVERSITÉ LAVAL

MAT-1900: Mathématiques de l'ingénieur 1
Examen 1 (33 1/3 %)
Vendredi le 4 octobre 2013 de 18h30 à 20h20

Enseignants

Section A: Hugo Chapdelaine
Section B: Adama Kamara
Section C: Malik Younsi
Section S: Jérôme Soucy

Identification

NOM: Barème corrigé

NUMÉRO DE DOSSIER: corrigé!

SECTION:

Directives

- Identifiez immédiatement votre cahier d'examen.
- Assurez-vous que cet examen comporte 5 questions réparties sur 5 pages.
- Assurez-vous que les sonneries de vos appareils électroniques sont désactivées et rangez-les hors de portée.
- Vous avez droit à une feuille-résumé recto-verso 8½" par 11".
- Sauf avis contraire, vous devez rédiger des solutions complètes et justifiées.
- Vous avez droit à une calculatrice autorisée par la faculté des sciences et génie.

Résultats

Questions	1	2	3	4	5	Total
Points	20	20	20	20	20	100
Note:						

Question 1 (20 pts)

a) (7 pts) Mettre sous forme exponentielle le nombre complexe $\frac{2+2i}{i-1}$.

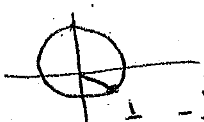
b) (7 pts) Déterminer le module r et l'argument $\theta \in [0, 2\pi)$ du nombre complexe $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^{413}$.

c) (6 pts) Calculer le module du nombre complexe $\frac{(3+4i)(2+2i)}{(1-i)(3-4i)}$.

a) $\frac{2+2i}{i-1} = \frac{2(1+i)(-1-i)}{(i-1)(-1-i)} = -1 - i - i + 1$

$= -2i$ (4)

$= 2e^{i\,3\pi/2}$ (3)

b) 

$\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$

$\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i = e^{i\,7\pi/4}$

$7 \cdot 413 = 2800 + 91 = 2891$

$2891 \div 4$: $2891 - 2800 = 91$, $91 - 88 = 3$; $700 + 22$

$2891 = 4 \cdot 722 + 3$

(2)

$\left(e^{i\,7\pi/4}\right)^{413} = e^{i\left(\frac{722 \cdot 4 + 3}{4}\right)\pi} = e^{i\pi\,3/4}$

Donc $r = 1$ et $\theta = 3\pi/4$

(2) (3)

c)

$$z = \frac{(3+4i)(2+2i)}{(1-i)\ (3-4i)}$$

$$|z| = \frac{|3+4i|\cdot|2+2i|}{|1-i|\ |3-4i|} = \frac{\sqrt{2^2+2^2}}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{\sqrt{2}\cdot 2}{\sqrt{2}}$$

$$= 2.$$

6

Questions 2 (20 pts)

Déterminer le lieu géométrique représenté par $2\,\mathrm{Im}(z^3) = 3z\,\mathrm{Im}(z^2)$ pour $z \in \mathbf{C}$ et le représenter graphiquement. **Indice :** Poser $z = x + iy$ où $x, y \in \mathbb{R}$.

$$Z = x + yi \implies z^3 = x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3$$

$$\mathrm{Im}(z^3) = 3x^2y - y^3$$

$$z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi \implies \mathrm{Im}(z^2) = 2xy$$

Donc $$z\,\mathrm{Im}(z^2) = 2x^2y + 2ixy^2$$

$$\cancel{2}\,\underbrace{\mathrm{Im}(z^3)}_{=\,3x^2y - y^3} = 3z\,\mathrm{Im}(z^2) = 6x^2y + 6ixy^2$$

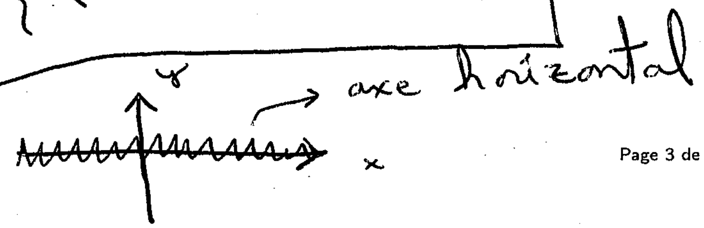
$$\implies 3x^2y - y^3 \overset{(1)}{=} 6x^2y \quad \text{et} \quad 6xy^2 \overset{(2)}{=} 0$$

De (1) on tire que $x = 0$ ou $y = 0$

si $x = 0 \implies y = 0$ on trouve $(0,0)$

si $y = 0 \implies x$ quelconque

Au final, on a $$\boxed{\{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}}$$



Question 3 (20 pts)

On considère le polynôme

$$p(z) = z^5 - 2z^4 + 2z^3 + 2z^2 - 4z + 4.$$

On peut montrer par un calcul direct que $p(1-i) = 0$. Vous pouvez prendre pour acquis ce résultat.

(1) Expliquer pourquoi $1+i$ est aussi une racine de $p(z)$.

(2) Trouver les 3 autres racines du polynôme $p(z)$ et exprimer celles-ci sous la forme exponentielle.

① $p(z)$ est à coefficients réels et donc $1+i$ est aussi une racine

5

② $(z-(1+i))(z-(1-i)) = z^2 - 2z + 2$

2

$$\begin{array}{r|l} z^5 - 2z^4 + 2z^3 + 2z^2 - 4z + 4 & z^2 - 2z + 2 \\ \hline -\ (z^5 - 2z^4 + 2z^3) & z^3 + 2 \\ 2z^2 - 4z + 4 & \\ -\ (2z^2 - 4z + 4) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

5

$z^3 = -2$ et $-2 = 2e^{i\pi}$

Donc $z_k = \sqrt[3]{2}\, e^{i\pi/3 + \frac{2\pi i k}{3}}$ $k = 0, 1, 2$

8

Question 4 (20 pts)

On considère la famille de courbes $\mathcal{F}$

$$y = cx^2 - 2cx + c,$$

où $c \in \mathbb{R}$ est un paramètre.

(1) (8 pts) Trouvez l'équation différentielle qui caractérise les courbes de $\mathcal{F}$.

(2) (5 pts) Trouvez l'équation différentielle qui caractérise la famille de courbes orthogonales à $\mathcal{F}$. On notera cette famille par $\mathcal{F}^{\perp}$

(3) (7) Trouvez la courbe de la famille $\mathcal{F}^{\perp}$ qui est orthogonale à la courbe $y = x^2 - 2x + 1$ au point $(2, 1)$

(1) $y = c(x^2 - 2x + 1) = c(x-1)^2$

$\Rightarrow y' = 2c(x-1)$ 3 . Comme $c = \frac{y}{(x-1)^2}$ 2

$\Rightarrow y' = \frac{2y}{x-1}$ 3

(2) $y' = \frac{-(x-1)}{2y}$ 5

(3) $\int 2y\, dy = \int -(x-1)\, dx \Rightarrow y^2 = \frac{-(x-1)^2}{2} + C$

3

$1^2 = \frac{-(2-1)^2}{2} + C \Rightarrow C = 3/2$

$y^2 + \frac{(x-1)^2}{2} = \frac{3}{2}$

ellipse centrée $(1,0)$

Question 5 (20 pts)

Seulement pour cette question, vous devez donner uniquement la réponse (la justification n'est pas nécessaire).

(1) (5 pts) Faire la liste de tous les points du plan complexe qui satisfont simultanément aux deux conditions suivantes:

$$|z-2| = |z| \qquad \text{et} \qquad |z| \leq 1.$$

Réponse: $\{1\}$

(2) (5 pts) L'évolution d'une colonie d'insectes est modélisée par l'équation différentielle suivante:

$$\frac{dP}{dt} = kP(t)(10^6 - P(t)),$$

où t représente le temps, calculé en mois, $P(t)$ est le nombre d'insectes de la colonie au temps t, et k est une certaine constante positive. Supposons qu'au t_0-ième mois $P(t_0) = 10^5$. Parmi les réponses suivantes encerclez celle qui est vraie

(a) $P(t_0) > P(t_0+1)$

(b) $P(t_0) < P(t_0+1)$

(c) $P(t_0) = P(t_0+1)$

(d) On ne peut conclure.

Réponse: b

(3) (5 pts) Parmi la liste de fonctions suivantes:

$$\{\cos(2x)\,,\, \sin(2x)\,,\, \sin(2x)+\cos(2x)\,,\, \sin(2x)-\cos(2x)\,,\, 2\sin(x)+\cos(2x)\},$$

laquelle **ne** satisfait **pas** à l'équation différentielle $y'' = -4y$.

Réponse: $2\sin(x) + \cos(2x)$

(4) (5 pts) Encerclez la bonne réponse: Le lieu géométrique des points z du plan complexe vérifiant l'équation

$$|z-i| + |z+i| = \frac{3}{2}$$

est

A. Un cercle

B. Une ellipse

C. Une droite

D. L'ensemble vide, i.e., aucun point ne vérifie cette identité.

E. Aucune de ces réponses.