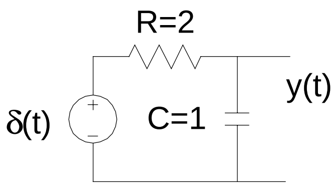
1998 Mini-Test 2 : Solutions

Problème 1 (1 point sur 5)



$$\Rightarrow \quad y(t)=\frac{1}{2}e^{-t/2}U(t)$$

a)

Pour trouver la réponse en fréquence, on remplace le condensateur par une impédance complexe $1/j\omega C$. Le rapport des tensions dans ce circuit est donné par un simple diviseur de tension, donc

$$H(j\omega)=\frac{1/j\omega C}{R+1/j\omega C}=\frac{1}{1+j\omega RC}=\frac{1}{1+j\omega 2}$$

Comme $v_{in}(t)=\delta(t)$, on sait que la transformée de Fourier de l'entrée est

$$V_{in}(\omega)=1$$

Donc la sortie sera

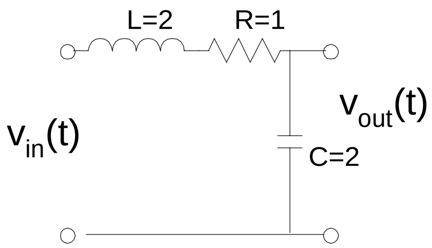
$$V_{out}(\omega)=V_{in}(\omega)H(j\omega)=1\cdot\frac{1}{1+j\omega 2}=\frac{1/2}{1/2+j\omega}$$

Pour déterminer $y(t)$ il faut trouver la transformée inverse de cette expression. En utilisant le table de transformées avec β=1/2, nous avons

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathrm{TF}^{-1}\{Y(\omega)\}=\mathrm{TF}^{-1}\left\{\frac{1/2}{1/2+j\omega}\right\}=\frac{1}{2}\mathrm{TF}^{-1}\left\{\frac{1}{1/2+j\omega}\right\} \\ &= \frac{1}{2}e^{-t/2}U(t) \end{aligned}$$

Donc a) est **Vrai**.

b)



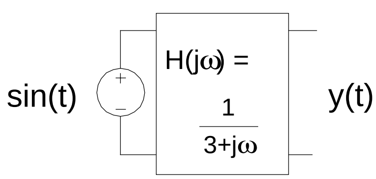
$$\Rightarrow \quad H(j\omega) = \frac{1}{1 + 4j\omega - 2\omega^2}$$

Pour trouver la réponse en fréquence, on remplace l'inductance par une impédance complexe $j\omega L$, le condensateur par une impédance complexe $1/j\omega C$. Le rapport des tensions dans ce circuit est donné par un simple diviseur de tension, donc

$$H(j\omega) = \frac{V_{out}(\omega)}{V_{in}(\omega)} = \frac{1/j\omega C}{R + j\omega L + 1/j\omega C} = \frac{1}{j\omega RC - \omega^2 LC + 1}$$
$$= \frac{1}{1 + 2j\omega - 4\omega^2}$$

Donc b) est **Faux**.

c)



$$\Rightarrow \quad y(t) = \frac{1}{10}\sin\left(t - \tan^{-1}\frac{1}{3}\right)$$

La réponse à un sinus est la partie imaginaire de la réponse à un phaseur. La réponse à un phaseur est la réponse fréquencielle évaluée à la fréquence du phaseur, multiplié par le phaseur.

$$\text{réponse à } e^{jt} = H(j)e^{jt} = \frac{1}{3+j}e^{jt} = \left|\frac{1}{3+j}\right| e^{jArg\frac{1}{3+j}} e^{jt}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3^2+1^2}} e^{jArg\frac{3-j}{3^2+1^2}} e^{jt}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{10}} e^{-j\tan^{-1}\frac{1}{3}} e^{jt} = \frac{1}{\sqrt{10}} e^{-j\tan^{-1}\frac{1}{3}} e^{jt}$$

La partie imaginaire est

réponse à $\sin(t) = \text{Im}\frac{1}{\sqrt{10}}e^{-j\tan^{-1}\frac{1}{3}}e^{jt}$

$$= \frac{1}{\sqrt{10}}\sin\left(t - \tan^{-1}\frac{1}{3}\right)$$

Donc c) est **Faux**.

Problème 2 (1 point sur 5)

a) $f(t)\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)$ a un spectre périodique

Le produit d'une fonction f(t) avec un train d'impulsion exprime une opération d'échantillonnage de la fonction f(t). Comme le montre les Figures 2 et 3 du chapitre 7 des notes de cours, le spectre d'un signal échantillonné est périodique.

Donc a) est **Vrai**

b) $f(t)\cdot g(t) \Leftrightarrow F(\omega)\cdot G(\omega)$

La transformée d'un produit de deux fonctions dans le temps correspond à une convolution dans le domaine de fréquence.

$$f(t)\cdot g(t) \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi}\{F(\omega) * G(\omega)\} \quad \text{et} \quad \{f(t) * g(t)\} \Leftrightarrow F(\omega)\cdot G(\omega)$$

Donc b) est **Faux**

c) $f(t)*\delta(t-t_0) = f(t-t_0)$

La convolution d'une fonction delta centrée sur t_0 avec n'importe quelle fonction, est la fonction centrée ***sur*** t_0.

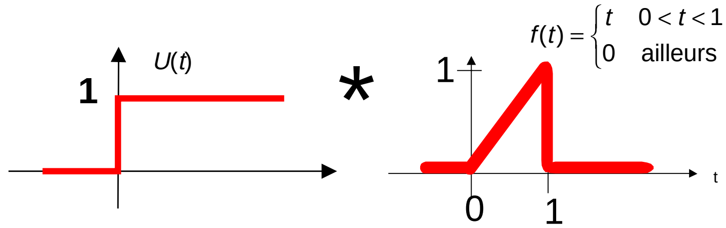
Donc c) est **Vrai**.

d) $F(\omega) = 0 \ \forall |\omega| > \omega_0$ et $f(t) = 0 \ \forall |t| > \frac{2\pi}{\omega_0}$

La première partie de la proposition exprime que le spectre de f(t) est limitée dans la bande [$-\omega_0$,$+\omega_0$]. La deuxième partie exprime que la fonction f(t) est limitée dans l'intervalle de temps [$-2\pi/\omega_0$,$2\pi/\omega_0$]. Un signal ne peut pas être limité en bande et à la fois limité en temps.

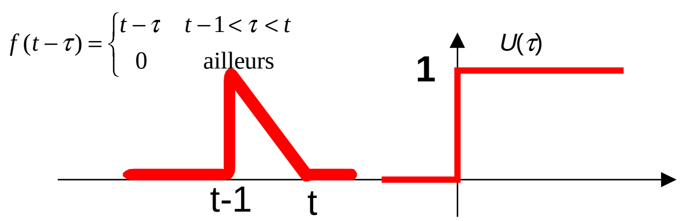
Donc d) est **Faux**

Problème 3 (2 points sur 5)

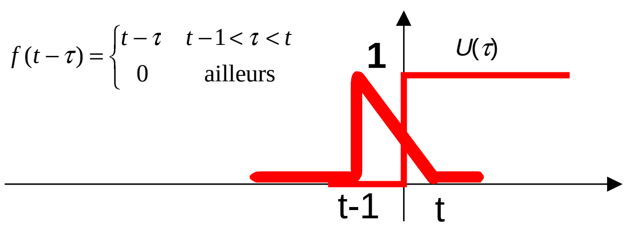


$$U(t)*f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau).U(\tau)d\tau$$

Nous commençons avec la région *t*<0, où $U(t)*f(t)=0$



Quand *t* dépasse zéro nous avons la région 0<*t*<1:

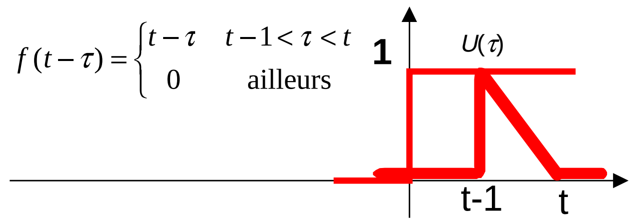


La convolution dans cette région est

$$\begin{aligned} U(t)*f(t) &= \int_{t-1}^{t} f(t-\tau).U(\tau)d\tau \\ &= \int_{t-1}^{t} (t-\tau).U(\tau)d\tau \\ &= \int_{0}^{t} (t-\tau)d\tau \\ &= t.[\tau]_0^t-\frac{1}{2}[\tau^2]_0^t = t^2/2 \end{aligned}$$

La dernière région est t>1 où nous avons

$$f(t-\tau)=\begin{cases} t-\tau & t-1<\tau<t \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



La convolution est

$$U(t)*f(t)=\int_{t-1}^{t} f(t-\tau)U(\tau)d\tau$$

$$=\text{l'aire sous le triangle}=\frac{1}{2}$$

Problème 4 (1 point sur 5)

On cherche la fréquence de Nyquist de

$$x(t)=\mathrm{Sa}(\mathrm{t})$$

Il faut savoir la fréquence maximum, *i.e.* la fréquence après laquelle la transformée de *x(t)* est toujours zéro. Donc il faut savoir la transformée de *x(t)*. On cherche dans le table, mais on a seulement le résultat

$$\mathrm{Rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)\Leftrightarrow \tau\,\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

Il faut utiliser la dualité pour arriver à

$$\tau\,\mathrm{Sa}\left(\frac{t\tau}{2}\right)\Leftrightarrow 2\pi\,\mathrm{Rect}\left(\frac{-\omega}{\tau}\right)$$

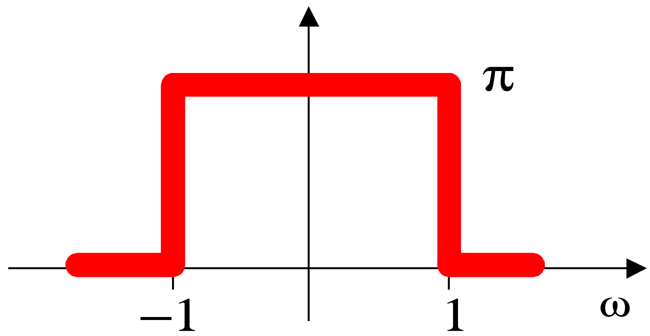
On veut avoir l'argument de *Sa* égale à *t*, donc on choisit tau égal à deux.

$$2\,\mathrm{Sa}(t)\Leftrightarrow 2\pi\,\mathrm{Rect}\left(\frac{-\omega}{2}\right)$$

On divise les deux côtés par deux

$$\mathrm{Sa}(t)\Leftrightarrow \pi\,\mathrm{Rect}\left(\frac{-\omega}{2}\right)$$

La graphique de cette transformée est



On peut lire directement de la fréquence maximum est un. Donc la fréquence de Nyquist est

$$\omega_N = 2\omega_{\max} = 2 \cdot 1 = 2$$