Vision numérique A 2018 GIF-4100 / GIF-7001

Solution Examen partiel 1

Question 1) Coordonnées homogènes / Homogeneous coordinates

A) En coordonnées homogènes, on a :
In homogeneous coordinates, we can write:

$$\underline{p} = [\, wx \quad wy \quad wz \quad w \,]^t \quad \text{avec } w \neq 0 \;/\; \text{with } w \neq 0$$

B) On a que
we have

$$\underline{\tilde{p}} = [\, x \quad y \quad z \quad 1 \,]^t \longrightarrow \underline{\tilde{p}} = [\, 2x \quad 2y \quad 2z \quad 2 \,]$$

donne en coordonnées cartésiennes
is, in Cartesian coordinates

$$\underline{p} = \left[\, \frac{2x}{2} \quad \frac{2y}{2} \quad \frac{2z}{2} \,\right]^t = [\, x \quad y \quad z \,]$$

C'est le même point
It is the same point

c) La matrice $\underline{\underline{\tilde{M}}}$ s'apparente à une matrice de rotation autour de l'axe des z
Matrix $\underline{\underline{\tilde{M}}}$ is similar to a rotation matrix around axis z

Une rotation est une transformation rigide qui préserve les angles et les longueurs.
A rotation is a rigid transformation that preserves angles and lengths.

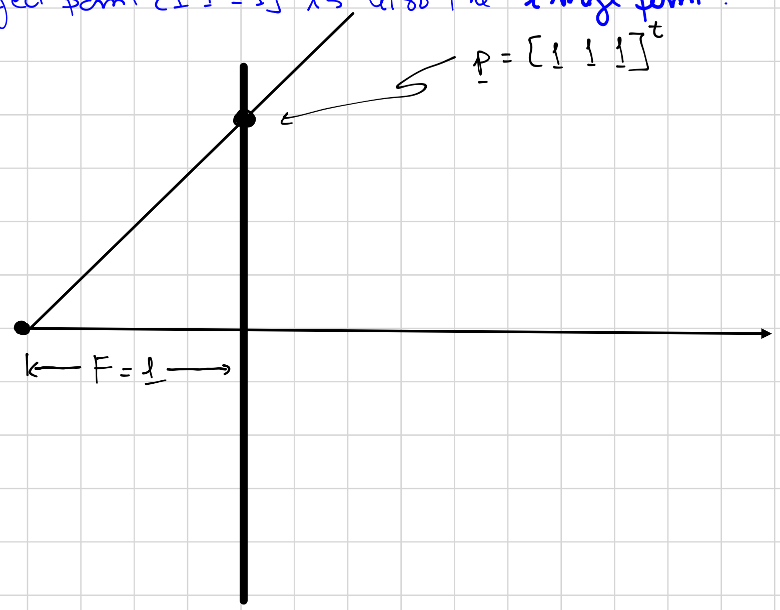
D) Si on applique la matrice $\underline{\underline{\tilde{M}}}$ au vecteur $\underline{\tilde{p}}_2$, on obtient:
Applying matrix $\underline{\underline{\tilde{M}}}$ to vector $\underline{\tilde{p}}_2$ gives:

$$\underline{\tilde{p}}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Les coordonnées réelles de $\underline{\tilde{p}}_2$ sont / The non-homogeneous coordinates of $\underline{\tilde{p}}_2$ are

$$\underline{p}_2 = [\, 1 \quad 1 \quad 1 \,]^t$$

E) Cela s'explique par le fait que le point objet [1 1 1 1]^t est le point image !
This is because object point [1 1 1 1]^t is also the image point !



Question 2)

A) La matrice de translation est / The translation matrix is:

$$\underline{\underline{\tilde{T}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

B) La matrice de rotation est / The translation matrix is:

$$\underline{\underline{\tilde{R}}} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & +1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

C) Pour transformer les coordonnées de REF 2 vers REF 1, on a, selon la donnée du problème :
For the transformation of points in REF2 to REF1, we have, according to the question:

$$\underline{\tilde{N}}_{REF1} = \underline{\underline{\tilde{T}}}\,\underline{\underline{\tilde{R}}}\,\underline{\tilde{N}}_{REF2}$$

Donc, pour aller de $1 \to 2$, on a / Thus, to go from $1 \to 2$ we have

$$\underline{\tilde{N}}_{REF2} = \underline{\underline{\tilde{R}}}^{-1}\,\underline{\underline{\tilde{T}}}^{-1}\,\underline{\tilde{N}}_{REF1}$$

Avec A) et B), on a / with A) and B) we have

$$\underline{\underline{\tilde{R}}}^{-1} = \underline{\underline{\tilde{R}}}^{T} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et/and} \quad \underline{\underline{\tilde{T}}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En multipliant les matrices on obtient / Multiplying the matrices we get:

$$\underline{\underline{\tilde{M}}} = \underline{\underline{R}}^{-1}\,\underline{\underline{T}}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Par conséquent, pour $\underline{\tilde{v}}_{REF1} = [1\ 1\ 1]^t$ on a
Thus, for $\underline{\tilde{v}}_{REF1} = [1\ 1\ 1]^t$, we get

$$\underline{\tilde{v}}_{REF2} = \underline{\underline{\tilde{M}}}\,\underline{\tilde{v}}_{REF1} = [1\ -2\ 1]^t$$

Question 3)

A) Selon les équations de projection de perspective on a:
According to the equations for perspective projection, we can write:

$$x = \frac{FX}{Z} \qquad y = \frac{FY}{Z} \qquad z = F$$

pour $[0\ \ 1\ \ 10]^t$ (unités = mètres) on a donc
for $[0\ \ 1\ \ 10]^t$ (units = meters) we have $\quad x = 0 \quad y = 0{,}001\,m$

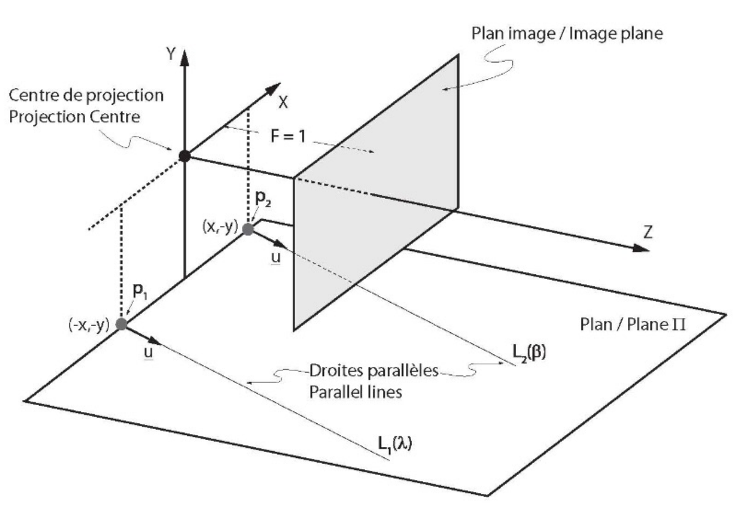
B) L'équation du projecteur est
The equation of the projector is $\quad \underline{X} = \lambda\,\underline{p}$

Donc / Thus

$$\underline{X} = \lambda\,[0\ \ 0.001\ \ 0.01]^t$$

Question 4)

A) On a que les équations des droites sont:
the equations of the straight lines are:



$$L_1(\lambda) = \underline{P_1} + \lambda\,\underline{u}$$

$$L_2(\beta) = \underline{P_2} + \beta\,\underline{u}$$

On a aussi que / We also have

$$\underline{P_1} = \begin{bmatrix} x \\ -y \\ 0 \end{bmatrix},\quad \underline{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ 0 \\ u_z \end{bmatrix},\quad \underline{P_2} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \\ 0 \end{bmatrix}$$

Avec ce qui précède, on peut écrire / Based on the above we can write:

$$L_1(\lambda) = \begin{bmatrix} x \\ -y \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} u_x \\ 0 \\ u_z \end{bmatrix} \qquad L_2(\beta) = \begin{bmatrix} -x \\ -y \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} u_x \\ 0 \\ u_z \end{bmatrix}$$

et / and

$$\begin{bmatrix} L_{1x}(\lambda) \\ L_{1y}(\lambda) \\ L_{1z}(\lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + \lambda u_x \\ -y \\ \lambda u_z \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} L_{2x}(\beta) \\ L_{2y}(\beta) \\ L_{2z}(\beta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x + \beta u_x \\ -y \\ \beta u_z \end{bmatrix}$$

La projection de perspective de $L_1(\lambda)$ et $L_2(\beta)$ donne :
The perspective projection of $L_1(\lambda)$ and $L_2(\beta)$ can be written as:

$$l_{1x}(\lambda) = \frac{x + \lambda u_x}{\lambda u_z} \qquad l_{2x}(\beta) = \frac{-x + \beta u_x}{\beta u_z}$$

$$l_{1y}(\lambda) = \frac{-y}{\lambda u_z} \qquad l_{2y}(\beta) = \frac{-y}{\beta u_z}$$

B) Dans les équations de A), mettons λ en évidence / In the equations found in A), let us factor λ

$$l_{1x}(\lambda) = \frac{u_x + x/\lambda}{u_z} \qquad l_{2x}(\beta) = \frac{u_x - x/\beta}{u_z}$$

$$l_{1y}(\lambda) = \frac{-y}{\lambda u_z} \qquad l_{2y}(\beta) = \frac{-y}{\beta z}$$

Quand $\lambda, \beta \to \infty$ on a / When $\lambda, \beta \to \infty$, we get:

$$l_{1x}(\lambda \to \infty) = \frac{u_x}{u_z} \qquad l_{2x}(\beta \to \infty) = \frac{u_x}{u_z}$$

$$l_{1y}(\lambda \to \infty) = 0 \qquad l_{2y}(\beta \to \infty) = 0$$

C) Revenons aux équations trouvées en B) pour $\lambda \neq \infty$ / Returning to the equations found in B) for $\lambda \neq \infty$

$$l_{1x}(\lambda) = \frac{x + \lambda u_x}{\lambda u_z} \qquad l_{2x}(\beta) = \frac{-x + \beta u_x}{\beta u_z} \qquad (C.1)$$

$$l_{1y}(\lambda) = \frac{-y}{\lambda u_z} \qquad l_{2y}(\beta) = \frac{-y}{\beta u_z} \qquad (C.2)$$

On peut écrire (C.1) comme suit : / We can write (C.1) as follows:

$$\lambda(u_z l_{1x} - u_x) = x \qquad \beta(u_z l_{2x} - u_x) = -x \qquad (C.3)$$

et (C.2) / and (C.2):

$$\lambda l_{1y} u_z = -y \qquad \beta l_{2y} u_z = -y \qquad (C.4)$$

Isolons λ et β dans (c.4) / Factoring λ and β in (c.4) gives:

$$\lambda = \frac{-Y}{l_{1y} M_z} \qquad \beta = \frac{-Y}{l_{2y} M_z} \tag{c.5}$$

Remplaçons (c.5) dans (c.3) / Replacing λ and β of (c.5) in (c.3) gives:

$$Y M_z l_{1x} + M_z X l_{1y} = Y M_x \qquad Y M_z l_{2x} - M_z X l_{2y} = Y M_x \tag{c.6}$$

Dans (c.6) nous avons 2 équations de droites en l_x et l_y (si on laisse tomber les indices 1 et 2
In (c.6) we have the equations of straight lines in l_x and l_y (dropping indices 1 and 2).

Ce résultat est attendu car les **images** des droites $L_1(\lambda)$ et $L_2(\beta)$ sont des **droites**.

Pour trouver les coordonnées de l'intersection des droites de ((C.6), il suffit de solutionner le systèmes d'équations

In order to find the coordinates of the intersection of the straight lines in (c.6), all there is to do is to solve the linear system.

Comme les deux équations de (C.6) ont le même membre droite, il suffit d'utiliser cette égalité pour obtenir:
Since both equations in (c.6) have the same rightand member, we can write:

$$Y M_x l_x + M_z X l_y = Y M_z l_x - M_z X l_y$$

qu'on peut simplifier / which can simplify as

$$\cancel{Y M_x l_x} + M_z X l_y = \cancel{Y M_z l_x} - M_z X l_y$$

$$\Rightarrow \quad 2 M_z X l_y = 0 \quad \rightarrow \quad l_y = 0$$

En remplaçant $l_y = 0$ dans l'une des équations de droite, on obtient l_x
Replacing $l_y = 0$ in one of the straight line equation, we get l_x

$$l_x = \frac{M_x}{M_z}$$

L'intersection des droites a donc pour coordonnées dans le plan image:
In the image plane, the coordinates of the intersection point between the straight lines is thus

$$\left(\frac{M_x}{M_z}, 0\right)$$

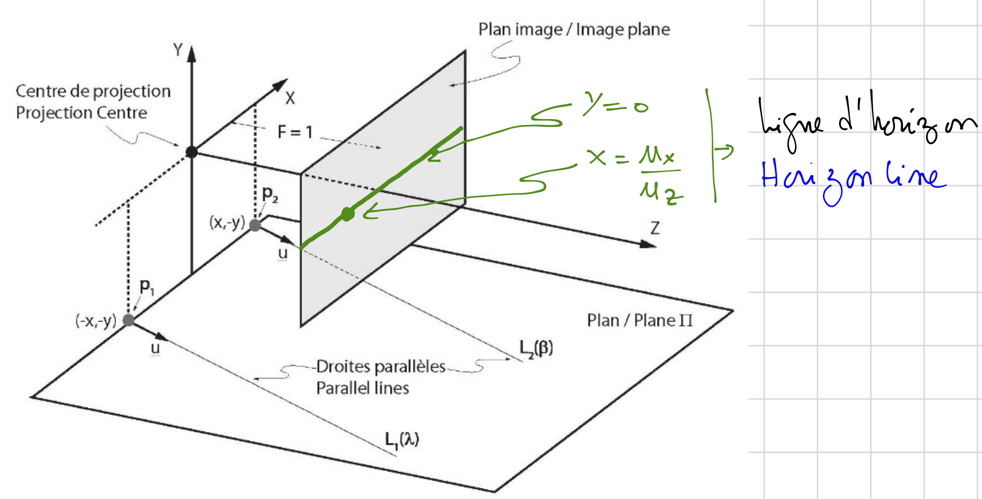
qui sont bien les coordonnées du **point de fuite** trouvé en B) pour $\lambda = \beta = \infty$
which are the coordinates of the **vantage point** found in B for $\lambda = \beta = \infty$

D) Les coordonnées du point de fuite pour un ensemble de droites parallèles selon $[u_x \ 0 \ u_z]^T$ sont selon c)
The coordinates of the vantage point for parallel lines along $[u_x \ 0 \ u_z]^T$ are according to c)

$$\left(\frac{u_x}{u_z}, 0\right)$$

Quand u_x et u_z changent tout en s'assurant que $\underline{u}$ est toujours unitaire, les points de fuite se trouvent sur une droite horizontale à $y=0$ dans le plan image. C'est la **ligne d'horizon**.

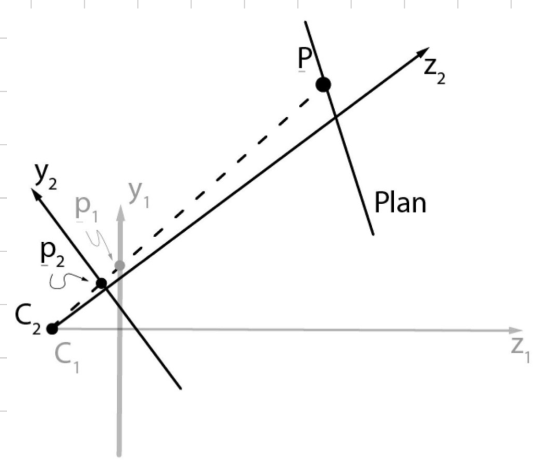
When u_x or u_z change while $\underline{u}$ is kept as a unit vector, the vantage points are located on a straight line at $y=0$ on the image plane. This is the **horizon line**.



Question 5)

A) Selon la donnée du problème, la transformation permettant de passer du repère 2 à 1 est
According to the problem statement, the transform between frame 2 to 1 is

$$\underline{\tilde{p}}_1 = \underline{\underline{R}}\, \underline{\tilde{p}}_2 \quad (1)$$



Par conséquent, pour passer du repère 1 au repère 2 on a :
Consequently, the transform between frame 1 to frame 2 is:

$$\underline{\tilde{p}}_2 = \underline{\underline{R}}^{-1} \underline{\tilde{p}}_1 \quad \text{ou/or} \quad \underline{\tilde{p}}_2 = \underline{\underline{R}}^T \underline{\tilde{p}}_1 \quad (2)$$

B) L'image du point P sur le sténope C_1 est
The image of point P on pinhole C_1 is

$$\underline{\tilde{p}}_1 = \underline{\underline{K}}_1 [\underline{\underline{R}}^T \ -\underline{\underline{R}}^T \underline{t}]\, \underline{\tilde{P}}, \quad \underline{\underline{R}}^T = \underline{\underline{I}}, \ \underline{t} = 0$$

$$\underline{\tilde{p}}_1 = \underline{\underline{K}}_1 \underline{P} \quad (3)$$

La projection du point P sur C_2 donne
The projection of point P on pinhole C_2 is:

$$\underline{\tilde{p}}_2 = \underline{\underline{\tilde{K}}}_2 \, \underline{\underline{R}}^T \, \underline{P} \qquad (4)$$

De (3), on peut écrire / From (3), we can write

$$\underline{\tilde{P}} = \underline{\underline{\tilde{K}}}_1^{-1} \, \underline{\tilde{p}}_1 \qquad (5)$$

En remplaçant (5) dans (4) on a
Replacing (5) in (4) gives:

$$\underline{\tilde{p}}_2 = \underline{\underline{\tilde{K}}}_2 \, \underline{\underline{R}}^T \underline{\underline{\tilde{K}}}_1^{-1} \, \underline{\tilde{p}}_1 \qquad (6)$$

C) L'équation générale de l'homographie est
the general formulation for the homography is

$$\underline{\tilde{p}}_2 = \underline{\underline{\tilde{K}}}_2 \left[\underline{\underline{R}} - \frac{\underline{t}\,\underline{n}^t}{d} \right] \underline{\underline{\tilde{K}}}_1^{-1} \, \underline{\tilde{p}}_1 \qquad (7)$$

Comme $\underline{t} = \underline{0}$, (7) devient simplement / Since $\underline{t} = \underline{0}$ (7) reduces to

$$\underline{\tilde{p}}_2 = \underline{\underline{\tilde{K}}}_2 \, \underline{\underline{R}}^T \underline{\underline{\tilde{K}}}_1^{-1} \, \underline{\tilde{p}}_1$$

qui est le résultat trouvé en B). L'homographie se réduit simplement à une rotation sur les sténopés normalisés (i.e $\underline{\underline{\tilde{K}}}_1 = \underline{\underline{\tilde{K}}}_2 = \underline{\underline{I}}$)

which is the result obtained in B). This means that the homography reduces to a simple rotation on the normalize image plane (i.e. when $\underline{\underline{\tilde{K}}}_1 = \underline{\underline{\tilde{K}}}_2 = \underline{\underline{I}}$).

D) Non car exactement les mêmes points restent visible des deux points de vue.
No since both viewpoints observe exactly the same set of points in the scene