Solutionnaire EXAMEN 1 2011

Exercice I : *Questions de cours*

1) Un signal quelconque correspond à la somme de deux composantes $v(t) = V_{moy} + v_{CA}(t)$
V_{moy} est la valeur continue (ou moyenne) et $v_{CA}(t)$ correspond à la composante alternative.

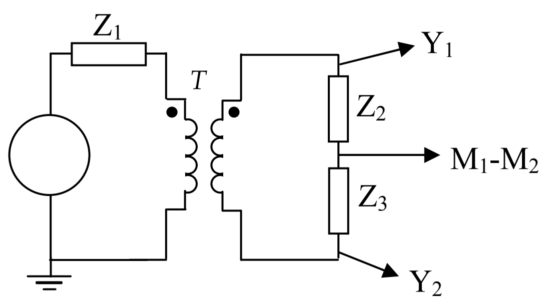
La valeur efficace d'un signal se déduit de la relation suivante :

$$V_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T}\cdot\int_0^T v(t)^2\cdot dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\cdot\int_0^T \left(V_{moy} + v_{CA}(t)\right)^2\cdot dt}$$

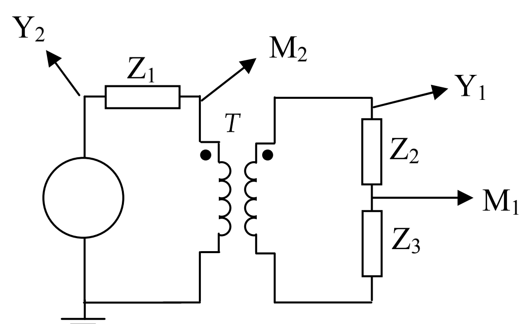
$$V_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T}\cdot\int_0^T \left(V_{moy}{}^2 + v_{CA}(t)^2 + 2\cdot V_{moy}\cdot v_{CA}(t)\right)\cdot dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\cdot\int_0^T V_{moy}{}^2\cdot dt + \frac{1}{T}\int_0^T v_{CA}(t)^2\cdot dt + \frac{2V_{moy}}{T}\underbrace{\int_0^T v_{CA}(t)\cdot dt}_{=0}}$$

Comme par définition, la valeur moyenne de la composante alternative du signal $v_{CA}(t)$ est nulle, on obtient la relation suivante : $V_{RMS} = \sqrt{V_{moy}{}^2 + V_{CA-RMS}{}^2}$

2) Dans le schéma A, les masses M1 et M2 sont reliées au même point. Le transformateur assure une isolation galvanique entre le circuit primaire et le circuit secondaire. Dans ce cas, il n'y a pas de court-circuit avec la terre du générateur. Le branchement de l'oscilloscope est correct et permet de mesurer la tension aux bornes de Z2 pour le canal1 et la tension aux bornes de Z3 pour le canal 2.

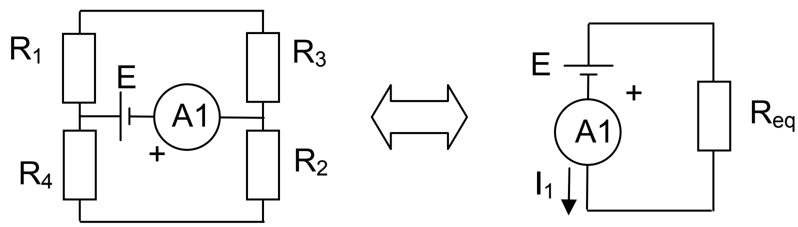


Dans le schéma B, Le branchement de l'oscilloscope n'est pas correct. Au primaire, le générateur est mis à la terre, la masse M2 doit obligatoirement être placée sur cette mise à la terre sinon on provoque un court-circuit avec la masse de l'oscilloscope. Au secondaire, il n'y a pas de problème avec M1 car le transformateur fait une isolation galvanique avec la mise à la terre du générateur.



Exercice II ***: Calcul sur un circuit résistif***

1) Il suffit de faire un schéma du circuit avec R_5 infinie (= circuit ouvert). Le sens de branchement de l'ampèremètre impose le sens conventionnel du courant I_1.



$$R_{eq} = (R_1 + R_3) // (R_2 + R_4) = \frac{(R_1 + R_3)\cdot(R_2 + R_4)}{(R_1 + R_3) + (R_2 + R_4)}$$

$$I_1 = -\frac{E}{R_{eq}} = -\frac{(R_1 + R_3) + (R_2 + R_4)}{(R_1 + R_3)\cdot(R_2 + R_4)}\cdot E$$

On trouve : $R_{eq} = 130.66\,\Omega \quad et \quad I_1 = -0.0765\,A = -76.5\,mA$

À priori, on peut utiliser la méthode différentielle ou la méthode des extrêmes pour le calcul des incertitudes.

Méthode des extrêmes :

$$\left|I_1\right|_{\min} = \left|\frac{E_{\min}}{R_{eq\max}}\right| = \frac{(R_{1\min} + R_{3\min}) + (R_{2\min} + R_{4\min})}{(R_{1\max} + R_{3\max})\cdot(R_{2\max} + R_{4\max})}\cdot E_{\min} = 0.0623\,A = 62.3\,mA$$

$$\left|I_1\right|_{\max} = \left|\frac{E_{\max}}{R_{eq\min}}\right| = \frac{(R_{1\max} + R_{3\max}) + (R_{2\max} + R_{4\max})}{(R_{1\min} + R_{3\min})\cdot(R_{2\min} + R_{4\min})}\cdot E_{\max} = 0.0944\,A = 94.4\,mA$$

$$\Delta I = \frac{\left|I_1\right|_{\max} - \left|I_1\right|_{\min}}{2} = 0.0160\,A = 16\,mA \quad \text{et} \quad \left|I_{1-moy}\right| = \frac{\left|I_1\right|_{\max} + \left|I_1\right|_{\min}}{2} = 0.0783\,A = 78.3\,mA$$

En pourcent : $\Delta I_{\%} = \left|\frac{\Delta I}{I_{1-moy}}\right|\cdot 100 = 20\%$

Écriture du résultat : on doit conserver 2 chiffres significatifs pour l'incertitude : $I_1 = -79 \pm 16\ mA$

Méthode différentielle :

Dans un premier, il est plus simple de calculer des valeurs intermédiaires pour aboutir à l'incertitude sur R_{eq} et pour en déduire celle de I_1.

On pose $\mathrm{R}_a = R_1 + R_3 = 370\,\Omega \qquad \Delta R_a = \Delta R_1 + \Delta R_3 = 11 + 7.5 = 18.5\,\Omega$ soit 5%

$\mathrm{R}_b = R_2 + R_4 = 202\,\Omega \qquad \Delta R_b = \Delta R_2 + \Delta R_4 = 6 + 8.2 = 14.2\,\Omega$ soit 7.03%

$$\mathrm{R}_{eq} = \frac{\mathrm{R}_a \cdot \mathrm{R}_b}{\mathrm{R}_a + \mathrm{R}_b} = 130.7\,\Omega \quad et \quad \Delta\,\mathrm{R}_{eq} = \left|\frac{\partial f}{\partial\,\mathrm{R}_a}\right| \cdot \Delta\,\mathrm{R}_a + \left|\frac{\partial f}{\partial\,\mathrm{R}_b}\right| \cdot \Delta\,\mathrm{R}_b$$

$$\Delta\,\mathrm{R}_{eq} = \left|\frac{(\mathrm{R}_a + \mathrm{R}_b) \cdot R_b - \mathrm{R}_a \cdot \mathrm{R}_b}{(\mathrm{R}_a + \mathrm{R}_b)^2}\right| \cdot \Delta\,\mathrm{R}_a + \left|\frac{(\mathrm{R}_a + \mathrm{R}_b) \cdot R_a - \mathrm{R}_a \cdot \mathrm{R}_b}{(\mathrm{R}_a + \mathrm{R}_b)^2}\right| \cdot \Delta\,\mathrm{R}_b$$

$$\Delta\,\mathrm{R}_{eq} = \left|\frac{R_b^{\,2}}{(\mathrm{R}_a + \mathrm{R}_b)^2}\right| \cdot \Delta\,\mathrm{R}_a + \left|\frac{R_a^{\,2}}{(\mathrm{R}_a + \mathrm{R}_b)^2}\right| \cdot \Delta\,\mathrm{R}_b$$

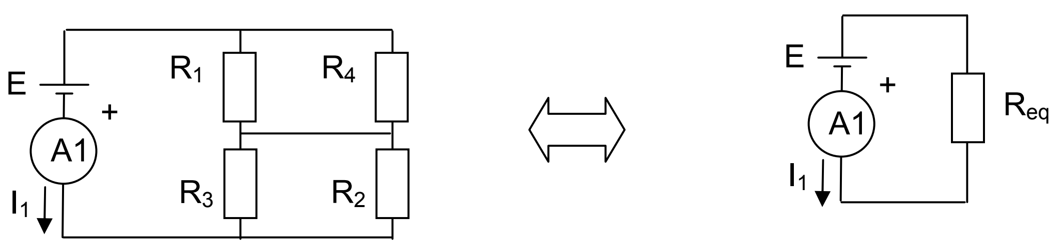
$$\Delta\,\mathrm{R}_{eq} = 2.31 + 5.94 = 8.25\,\Omega \qquad \text{soit } 6.3\ \%$$

On en déduit :

$$I_1 = \frac{E}{\mathrm{R}_{eq}} \quad et \quad \frac{\Delta I_1}{I_1} = \frac{\Delta E}{E} + \frac{\Delta\,\mathrm{R}_{eq}}{\mathrm{R}_{eq}} = 9.3\% \quad ou \quad \Delta I_1 = 7.11\,mA$$

Écriture du résultat : on doit conserver 2 chiffres significatifs pour l'incertitude : $I_1 = -77 \pm 7\ mA$

2) La méthode est la même que dans le cas de la question 1. Il suffit de faire un schéma du circuit avec R_5 nulle (= court-circuit). Le sens de branchement de l'ampèremètre impose le sens conventionnel du courant I_1.



$$\mathrm{R}_{eq} = (R_1 // R_4) + (R_2 // R_3) = \frac{R_1 \cdot R_4}{R_1 + R_4} + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} = \frac{R_1 \cdot R_4 \cdot (R_2 + R_3) + R_2 \cdot R_3 \cdot (R_1 + R_4)}{(R_1 + R_4) \cdot (R_2 + R_3)}$$

$$I_1 = -\frac{E}{R_{eq}} = -\frac{(R_1 + R_4) \cdot (R_2 + R_3)}{R_1 \cdot R_4 \cdot (R_2 + R_3) + R_2 \cdot R_3 \cdot (R_1 + R_4)} \cdot E$$

On trouve : $\mathrm{R}_{eq} = 126.40\,\Omega \quad et \quad I_1 = -0.0791\,A = -79.1\,mA$

À priori, on peut utiliser la méthode différentielle ou la méthode des extrêmes pour le calcul des incertitudes.

Méthode des extrêmes :

$$\left|I_1\right|_{\min} = \left|\frac{E_{\min}}{R_{eq\max}}\right| = \frac{(R_{1\min}+R_{4\min})\cdot(R_{2\min}+R_{3\min})}{R_{1\max}\cdot R_{4\max}(R_{2\max}+R_{3\max})+R_{2\max}\cdot R_{3\max}(R_{1\max}+R_{4\max})}\cdot E_{\min} = 0.0573\,A = 57.3\,mA$$

$$\left|I_1\right|_{\max} = \left|\frac{E_{\max}}{R_{eq\min}}\right| = \frac{(R_{1\max}+R_{3\max})\cdot(R_{2\max}+R_{4\max})}{R_{1\min}\cdot R_{4\min}\cdot(R_{2\min}+R_{3\min})+R_{2\min}\cdot R_{3\min}\cdot(R_{1\min}+R_{4\min})}\cdot E_{\max} = 0.1097\,A = 109.7\,mA$$

$$\Delta I = \frac{\left|I_1\right|_{\max}-\left|I_1\right|_{\min}}{2} = 0.0262\,A = 26\,mA \quad \text{et} \quad \left|I_{1-moy}\right| = \frac{\left|I_1\right|_{\max}+\left|I_1\right|_{\min}}{2} = 0.0835\,A = 83.5\,mA$$

En pourcent : $\Delta I_{\%} = \left|\dfrac{\Delta I}{I_{1-moy}}\right|\cdot 100 = 31.4\%$

Écriture du résultat : on doit conserver 2 chiffres significatifs pour l'incertitude : $I_1 = -84 \pm 26\ mA$

Méthode différentielle :

Dans un premier, il est plus simple de calculer des valeurs intermédiaires pour aboutir à l'incertitude sur R_{eq} et pour en déduire celle de I_1.

$$\mathrm{R}_{eq} = \left(R_1//R_4\right)+\left(R_2//R_3\right) = \frac{R_1\cdot R_4}{R_1+R_4}+\frac{R_2\cdot R_3}{R_2+R_3} = \frac{R_1\cdot R_4\cdot\left(R_2+R_3\right)+R_2\cdot R_3\cdot\left(R_1+R_4\right)}{\left(R_1+R_4\right)\cdot\left(R_2+R_3\right)}$$

On pose $\mathrm{R}_a = R_1//R_4 = 59.7\,\Omega$ $\qquad \Delta\mathrm{R}_a = \left|\dfrac{R_4^{\,2}}{\left(\mathrm{R}_1+\mathrm{R}_4\right)^2}\right|\cdot\Delta\mathrm{R}_1+\left|\dfrac{R_1^{\,2}}{\left(\mathrm{R}_1+\mathrm{R}_4\right)^2}\right|\cdot\Delta\mathrm{R}_4 = 1.62+8.7 = 10.3\,\Omega$

$\mathrm{R}_b = R_2//R_3 = 66.7\,\Omega$ $\qquad \Delta\mathrm{R}_b = \left|\dfrac{R_3^{\,2}}{\left(\mathrm{R}_2+\mathrm{R}_3\right)^2}\right|\cdot\Delta\mathrm{R}_2+\left|\dfrac{R_2^{\,2}}{\left(\mathrm{R}_2+\mathrm{R}_3\right)^2}\right|\cdot\Delta\mathrm{R}_3 = 3.70+2.96 = 6.67\,\Omega$

$$\mathrm{R}_{eq} = \mathrm{R}_a+\mathrm{R}_b \quad et \quad \Delta\mathrm{R}_{eq} = \Delta\mathrm{R}_a+\Delta\mathrm{R}_b = 16.97\,\Omega \quad ou \quad \frac{\Delta\mathrm{R}_{eq}}{\mathrm{R}_{eq}} = 13.4\%$$

On en déduit :

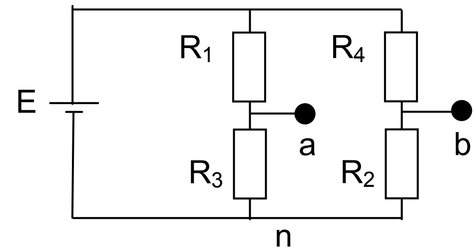
$$I_1 = \frac{E}{\mathrm{R}_{eq}} \quad et \quad \frac{\Delta I_1}{I_1} = \frac{\Delta E}{E}+\frac{\Delta\mathrm{R}_{eq}}{\mathrm{R}_{eq}} = 16.4\% \quad ou \quad \Delta I_1 = 12.97\,mA \quad \text{soit}$$

Écriture du résultat : on doit conserver 2 chiffres significatifs pour l'incertitude : $I_1 = -79 \pm 13\ mA$

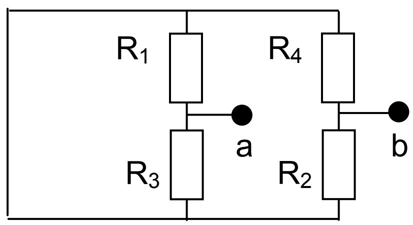
Remarque : Dans le cas précédent, la méthode différentielle n'est pas précise car on trouve que l'erreur relative dépasse 10%. Normalement, on devrait considérer que ce résultat n'est pas valable et il faudrait utiliser la méthode des extrêmes pour estimer l'erreur.

3) On calcule un équivalent Thevenin aux bornes de la résistance R_5 (bornes a et b). On débranche la résistance R5 et on calcule la tension à vide Eth entre les bornes a et b

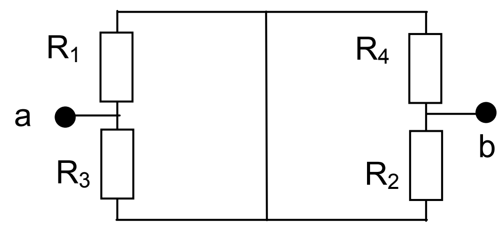
$$E_{th} = V_{an} - V_{bn} = \left[\frac{R_3}{R_1 + R_3} - \frac{R_2}{R_2 + R_4} \right] \cdot E = -1.89\, V$$



Pour la résistance équivalente Rth entre les bornes a et b, on doit annuler la source de tension E :



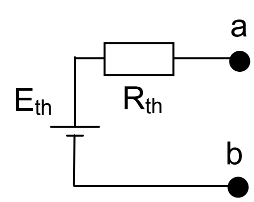
ou

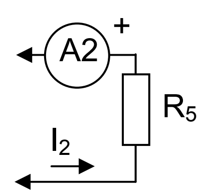


$$R_{th} = R_{ab} = R_1 // R_3 + R_2 // R_4 = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 \cdot R_4}{R_2 + R_4} = 137.9\ \Omega$$

4) On doit calculer le courant I_2 qui traverse la résistance R_5. La polarité de l'ampèremètre impose un sens conventionnel pour le courant I_2.

$$I_2 = -\frac{E_{th}}{R_{th} + R_5} = -\frac{-1.89}{137.9 + 100} = +7.93\, mA$$



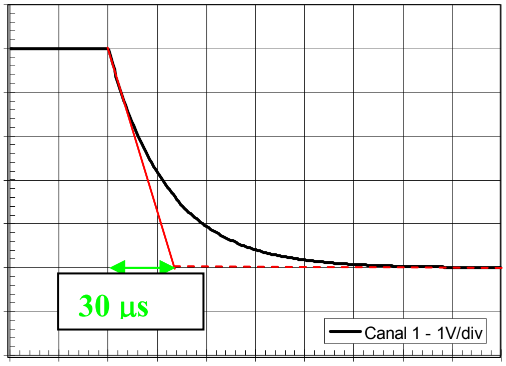


Exercice III ***: Mesure d'une constante de temps avec un oscilloscope***

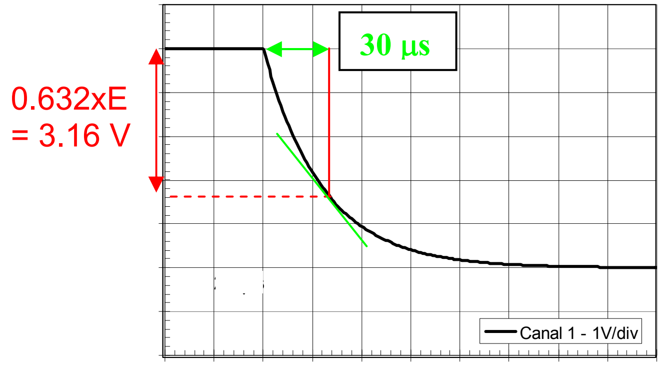
1) La décroissance du signal peut être caractérisée par l'expression suivante : $v(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = 5 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$

2) Il y a deux méthodes pour mesurer la constante de temps; la méthode de la tangente et la méthode basée sur à 63.2% de la valeur finale

Méthode 1 : Tangente



Méthode 1 : 63.2 %



On trouve : τ = 1.2 x 25 µs =30 µs dans les 2 cas

Incertitude pour la méthode 1 :

On doit d'abord calculer l'incertitude sur la valeur de tension à lire

$$A = 0\,V \quad et \quad \Delta A = 0.03 \cdot 0 + 0.2 \cdot 1 = 0.2\,V$$

Sensibilité pente : $m = \dfrac{5}{30\,10^{-6}} = -1.65\;10^{5}\,{}^{V}\!/_{s}$ et erreur correspondante sur les abscisses :

$$\Delta t = \left|\frac{\Delta A}{m}\right| = 1.2\;\mu s$$

On doit considérer aussi l'erreur sur la valeur lue :

$$\tau_{lue} = 1.2 \times 25\,10^{-6} = 30\;\mu s$$
$$\Delta\tau_{lue} = 0.03 \times 30\,10^{-6} + 0.2 \times 25\,10^{-6} = 5.9\;\mu s$$

On en déduit l'erreur totale : $\Delta\tau = \Delta t + \Delta\tau_{lue} = 1.2 + 5.9 = 7.1\mu s$

Affichage du résultat : $\tau = 30 \pm 7\;\mu s$

Incertitude pour la méthode 2 :

On doit d'abord calculer l'incertitude sur la valeur de tension à lire

$$A = 1.84\,V \quad et \quad \Delta A = 0.03 \cdot 1.84 + 0.2 \cdot 1 = 0.255\,V$$

Sensibilité : $m = \dfrac{0.5 - 3}{1.6} \cdot \dfrac{1}{25\,10^{-6}} = -62500\,{}^{V}\!/_{s}$ et erreur correspondante sur les abscisses :

$$\Delta t = \left|\frac{\Delta A}{m}\right| = 4.08\;\mu s$$

On doit considérer aussi l'erreur sur la valeur lue :

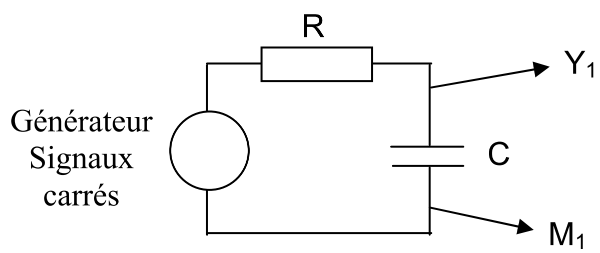
$$\tau_{lue} = 1.2 \times 25\,10^{-6} = 30\ \mu s$$
$$\Delta \tau_{lue} = 0.03 \times 30\,10^{-6} + 0.2 \times 25\,10^{-6} = 5.9\ \mu s$$

On en déduit l'erreur totale : $\Delta\tau = \Delta t + \Delta\tau_{lue} = 4.08 + 5.9 = 9.98 \mu s$

Affichage du résultat : $\tau = 30 \pm 10\ \mu s$

3) Il y a plusieurs solutions : on peut faire un circuit RL (cf cours) ou un circuit RC (lab 6). On montre ici l'exemple du laboratoire 6 :

Le générateur doit produire un signal carré à basse fréquence. L'amplitude du signal est de 5 V avec un offset (composante continue) de 2.5V. L'oscilloscope mesure la tension aux bornes de la capacité et on doit faire un déclenchement sur un front descendant du générateur pour observer le signal de la figure 4.



Il faut que $RC = \tau = 30\ \mu s$

Par exemple, on peut prendre : R = 1kΩ et C = 30 nF

Exercice IV *: Mesures à l'oscilloscope et calcul des grandeurs caractéristiques d'un signal*

1) Canal 1 : Valeur crête Vp = 120 V et Valeur crête-crête Vpp = 240 V

$\Delta V_p = 0.03 \cdot 120 + 0.2 \cdot 40 = 11.6\,V$ et $\Delta V_{pp} = 0.03 \cdot 240 + 0.2 \cdot 40 = 15.2\,V$

Affichage : $V_p = 120 \pm 12\,V$ $\quad V_{pp} = 240 \pm 15\,V$

Canal 2 : Valeur crête Vp = 120 V et Valeur crête-crête Vpp = 180 V

$\Delta V_p = 0.03 \cdot 120 + 0.2 \cdot 40 = 11.6\,V$ et $\Delta V_{pp} = 0.03 \cdot 180 + 0.2 \cdot 40 = 13.4\,V$

Affichage : $V_p = 120 \pm 12\,V$ $\quad V_{pp} = 180 \pm 13\,V$

2) Mesure de fréquence :

On doit mesurer d'abord la période et son incertitude :

Canal 1 : T_1 = 30 ms Canal 2 : T_2 = 15 ms

$\Delta T_1 = 0.03 \cdot 30 + 0.2 \cdot 5 = 1.9\,ms$ $\quad \Delta T_2 = 0.03 \cdot 15 + 0.2 \cdot 5 = 1.45\,ms$

$$f_1 = \frac{1}{T_1} = 33.3\ Hz \qquad f_2 = \frac{1}{T_2} = 66.7\ Hz$$

$$\Delta f_1 = \frac{\Delta T_1}{T_1^2} = 2.1\ Hz \qquad \Delta f_2 = \frac{\Delta T_2}{T_2^2} = 6.4\ Hz$$

Affichage des résultats : $f_1 = 33.3 \pm 2.1 Hz$ $\qquad f_2 = 67 \pm 6 Hz$

3) Calcul de valeur moyenne :

$$V_{moy} = \frac{1}{T}\cdot\int_0^T v(t)\cdot dt = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi} v(\alpha)\cdot d\alpha = \frac{1}{\pi}\cdot\left[\int_{\pi/6}^{\pi/3} 50\cdot d\alpha + \int_{\pi/3}^{7\pi/6} 120\cdot\sin(\alpha)\cdot d\alpha\right]$$

$$V_{moy} = \frac{1}{\pi}\cdot\left[50\cdot\alpha\right]_{\pi/6}^{\pi/3} + \frac{120}{\pi}\cdot\left[-\cos\alpha\right]_{\pi/3}^{7\pi/6} = \left[\frac{50}{6}\right] + \frac{120}{\pi}\cdot\left[\cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{7\pi}{6}\right] = \frac{50}{6} + \frac{120}{\pi}\cdot\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$V_{moy} = 60.51\, V$$

4) Calcul de valeur moyenne absolue:

$$\left|V_{moy}\right| = \frac{1}{T}\cdot\int_0^T \left|v(t)\right|\cdot dt = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi}\left|v(\alpha)\right|\cdot d\alpha = \frac{1}{\pi}\cdot\left[\int_{\pi/6}^{\pi/3} 50\cdot d\alpha + \int_{\pi/3}^{\pi} 120\cdot\sin(\alpha)\cdot d\alpha + \int_{\pi}^{7\pi/6} -120\cdot\sin(\alpha)\cdot d\alpha\right]$$

$$\left|V_{moy}\right| = \frac{1}{\pi}\cdot\left[50\cdot\alpha\right]_{\pi/6}^{\pi/3} + \frac{120}{\pi}\cdot\left[-\cos\alpha\right]_{\pi/3}^{\pi} + \frac{120}{\pi}\cdot\left[\cos\alpha\right]_{\pi}^{7\pi/6} = \left[\frac{50}{6}\right] + \frac{120}{\pi}\cdot\left[\cos\frac{\pi}{3} - \cos\pi\right] + \frac{120}{\pi}\cdot\left[\cos\frac{7\pi}{6} - \cos\pi\right]$$

$$\left|V_{moy}\right| = \left[\frac{50}{6}\right] + \frac{120}{\pi}\cdot\left[\frac{1}{2} + 1\right] + \frac{120}{\pi}\cdot\left[-\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right]$$

$$\left|V_{moy}\right| = 70.75\, V$$

5) Calcul de valeur efficace :

$$V_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T}\cdot\int_0^T v(t)^2\cdot dt} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi} v(\alpha)^2\cdot d\alpha} = \sqrt{\frac{1}{\pi}\cdot\left[\int_{\pi/6}^{\pi/3} 50^2\cdot d\alpha + \int_{\pi/3}^{7\pi/6} 120^2\cdot\sin^2(\alpha)\cdot d\alpha\right]}$$

$$V_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{\pi}\cdot\left[50^2\cdot\alpha\right]_{\pi/6}^{\pi/3} + \frac{120^2}{\pi}\cdot\int_{\pi/3}^{7\pi/6}\frac{1-\cos 2\alpha}{2}\cdot d\alpha} = \sqrt{\frac{1}{\pi}\cdot\left[50^2\cdot\alpha\right]_{\pi/6}^{\pi/3} + \frac{120^2}{\pi}\cdot\left[\frac{\alpha}{2} + \frac{\sin 2\alpha}{4}\right]_{\pi/3}^{7\pi/6}}$$

$$V_{RMS} = \sqrt{\left[\frac{50^2}{6}\right] + \frac{120^2}{2\pi}\cdot\left(\frac{7\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{120^2}{4\pi}\cdot\left(\sin\frac{7\pi}{3} - \sin\frac{2\pi}{3}\right)} = 80.1\, V$$