GEL19962 : Analyse des signaux

Minitest 2 A2006 : Solutions

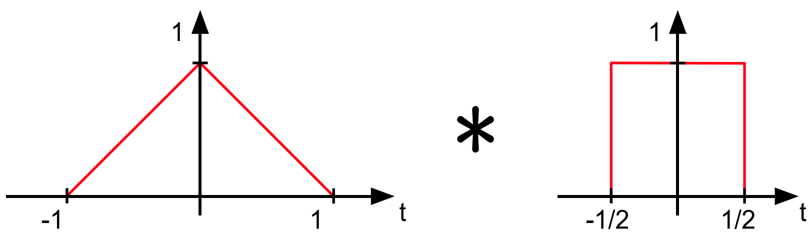
Département de génie électrique et de génie informatique

Question 1 (2 pts)

On demande de calculer la convolution suivante :

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\mathrm{Rect}(t) * \mathrm{Tri}(t)\right) \; .$$

Ceci peut être représenté graphiquement par la figure suivante :



Par la propriété de la dérivation d'une convolution (voir §6.3.2 des notes de cours), on peut faire la dérivé seconde d'un des deux termes de la convolution ou encore faire la dérivé première de chacun de ces termes. Faire la dérivé seconde de la fonction triangle est définitivement l'approche la plus facile, bien que faire la dérivé de chacun des termes donne lieu à une solution guère plus compliquée. Faire la dérivé seconde du rectangle donne par contre lieu à quelques subtilités ; Cette approche sera donc à éviter si possible.

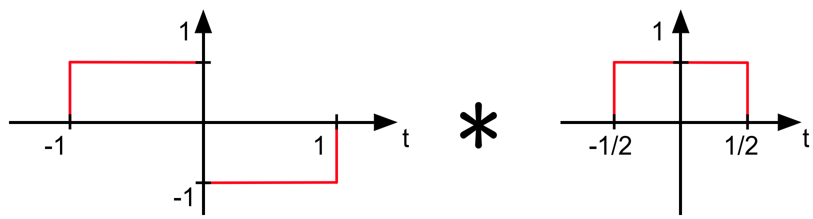
Faisant la dérivé seconde du triangle, on a :

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\mathrm{Rect}(t) * \mathrm{Tri}(t)\right) \; , \\
&= \mathrm{Rect}(t) * \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\mathrm{Tri}(t) \, , \\
&= \mathrm{Rect}(t) * \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathrm{Rect}(t+1/2) - \mathrm{Rect}(t-1/2)\right] \; , \\
&= \mathrm{Rect}(t) * \left[\delta(t+1) + \delta(t-1) - 2\delta(t)\right] \; , \\
&= \mathrm{Rect}(t) * \delta(t+1) + \mathrm{Rect}(t) * \delta(t-1) - \mathrm{Rect}(t) * 2\delta(t) \, .
\end{aligned}$$

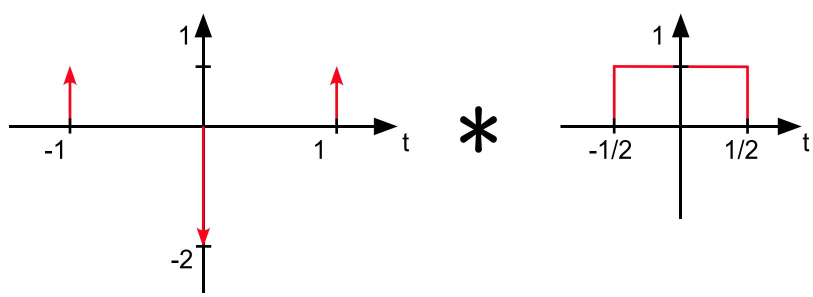
Puisque le dirac est l'élément neutre de la convolution et que la convolution avec un dirac décalé à la propriété de décaler la fonction, on a alors :

$$= \mathrm{Rect}(t+1) + \mathrm{Rect}(t-1) - 2\mathrm{Rect}(t) \, .$$

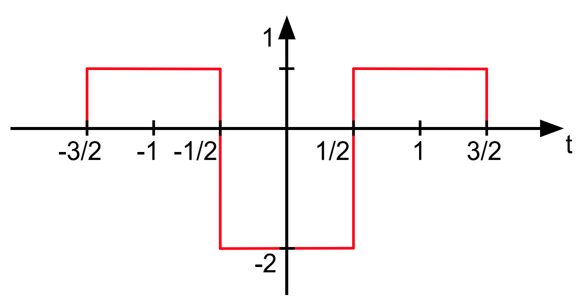
Graphiquement, la dérivée première donne :



La dérivé seconde donne :



Finalement, la solution recherchée est la suivante :



Question 2 (1 pts)

On demande de vérifier la véracité de quatre énoncés.

Énoncé 1

$$f(t) \times g(t) \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi} G(\omega) \times H(\omega)\,. \tag{1}$$

Cette expression est bien sûr fausse puisque qu'une multiplication dans le temps donne lieu à une convolution dans le domaine spectrale. Réciproquement, une convolution dans le domaine temporel donnera lieu à une multiplication dans le domaine spectral.

C'est donc **FAUX**.

Énoncé 2

$$x(t) * \delta(t) = x(t)\,. \tag{2}$$

Le dirac $\delta(t)$ est l'élément neutre de la convolution. Si il est décalé, il a la propriété de décaler la fonction avec laquelle il est convolué, mais ce n'est pas le cas ici.

L'énoncé est donc **VRAI**.

Énoncé 3

On dit que le filtre $\frac{1}{1-\mathrm{j}\omega RC}\mathrm{e}^{\mathrm{j}3\omega}$ est causal.

Or, le terme $\mathrm{e}^{\mathrm{j}3\omega}$ dans la réponse du filtre indique une avance ! Par conséquent, ce filtre ne peut pas être causal. L'énoncé doit donc être **FAUX**.

Énoncé 4

On stipule que $H(\omega) * [\mathscr{F}\{\mathrm{U}(t)\}]$ est un filtre causal.

Dans le domaine temporel, on doit avoir $h(t) \times \mathrm{U}(t)$. L'échelon unitaire $\mathrm{U}(t)$ est bien entendu nul pour tous les t inférieurs à zéro. Le filtre est donc causal.

Bref, l'énoncé est **VRAI**.

Question 3 (2 pts)

On donne un circuit de type «LC» avec une valeur d'inductance et de capacité unitaire.

Partie 1

On demande d'abord de calculer **et de tracer** la fonction de transfert en module et en phase du circuit LC donné.

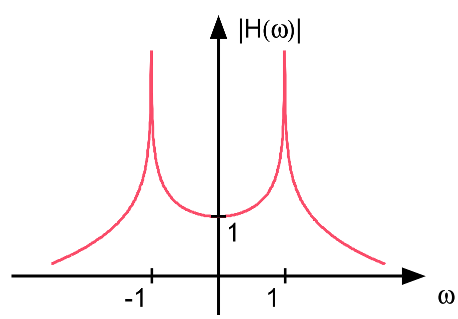
$$\begin{aligned} H(\omega) &= \frac{\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}}{\mathrm{j}\omega L + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}} = \frac{1}{\frac{\mathrm{j}\omega L}{\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}} + 1}, \\ &= \frac{1}{1 + (\mathrm{j}\omega)^2 LC} = \frac{1}{1 - \omega^2 LC}. \end{aligned}$$

Le module de $H(\omega)$ est donné par :

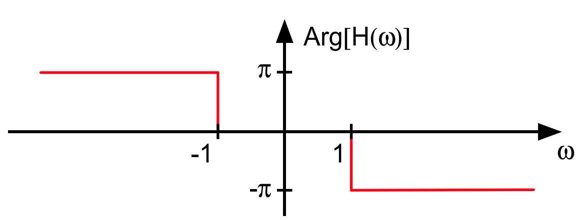
$$|H(\omega)| = \left|\frac{1}{1 - \omega^2 LC}\right|.$$

La valeur absolue ici est importante puisque, par définition, un module ne peut pas être négatif. Le fait que le signal soit négatif pour les ω plus grands que 1 et plus petits que -1 donnera lieu à une saut de phase de 180 deg.

Graphiquement, le module est représenté comme suit :



La phase sera représenté par :



Partie 2

On demande ensuite de calculer la sortie si l'entrée est $x(t) = 3\cos(\sqrt{5}t + 2)$.
On sait que pour $x(t) = \cos(\omega_0 t)$, la sortie sera donnée par $y(t) = |H(\omega_0)|\cos(\omega_0 t + \mathrm{Arg}(H(\omega_0)))$.
Dans notre cas, $\omega_0 = \sqrt{5}$.
On a donc :

$$\begin{aligned} y(t) &= 3|H(\sqrt{5})|\cos(\sqrt{5}t + 2 + \mathrm{Arg}(H(\sqrt{5}))\,, \\ &= 3|\frac{1}{1-5}|\cos(\sqrt{5}t + 2 \pm \pi)\,, \\ &= \frac{3}{4}\cos(\sqrt{5}t + 2 \pm \pi)\,, \\ &= -\frac{3}{4}\cos(\sqrt{5}t + 2)\,, \end{aligned}$$