Mathématiques de l'ingénieur I (MAT-10363)
Examen partiel du 13 février 2004 – Solutions

Question 1
($5 + 5 + 5 = 15$ points)

Soit $z = 4i + 3$.

a) Calculer $\mathrm{Re}(z) - \mathrm{Im}(\,\overline{z}\,)$.

$$\mathrm{Re}(z) - \mathrm{Im}(\,\overline{z}\,) = \mathrm{Re}(4i+3) - \mathrm{Im}(\,\overline{4i+3}\,) = 3 - \mathrm{Im}(\,-4i+3\,) = 3 - (-4) = 7.$$

b) Exprimer $\dfrac{2-i}{z}$ sous forme cartésienne.

$$\frac{2-i}{z} = \frac{2-i}{4i+3} \cdot \frac{-4i+3}{-4i+3} = \frac{6-4-8i-3i}{16+9} = \frac{2}{25} - \frac{11}{25}i$$

c) Exprimer $e^{-i\pi z/6}$ sous forme cartésienne.

$$e^{-i\pi z/6} = e^{-i\pi(4i+3)/6} = e^{2\pi/3 - i\pi/2} = e^{2\pi/3}e^{-i\pi/2} = e^{2\pi/3}(-i) = -e^{2\pi/3}i.$$

Question 2
(15 points)

Décrire le lieu géométrique dans le plan complexe défini par l'équation $\left|\dfrac{2z-1}{2i-z}\right| = 2.$

En utilisant les propriétés des modules, on a

$$2 = \left|\frac{2z-1}{2i-z}\right| = \frac{|2z-1|}{|2i-z|} \quad \Leftrightarrow \quad |2z-1| = 2|2i-z| \quad \Leftrightarrow \quad |2z-1|^2 = 4|2i-z|^2,$$

cette dernière équivalence étant vraie parce que $|w| \geq 0$ pour tout $w \in \mathbb{C}$. Posons $z := x + iy$. Alors on a

$$\begin{aligned}
|2z-1|^2 &= 4|2i-z|^2 \\
|2x+2iy-1|^2 &= 4|2i-x-iy|^2 \\
(2x-1)^2 + (2y)^2 &= 4(2-y)^2 + 4(-x)^2 \\
4x^2 - 4x + 1 + 4y^2 &= 4y^2 - 16y + 16 + 4x^2 \\
-4x + 1 &= -16y + 16 \\
16y - 4x &= 15
\end{aligned}$$

Il s'agit d'une droite.

Question 3
(15 points)

Trouver les racines 4$^{\text{e}}$ de $w = 8 + 8\sqrt{3}i$ et exprimer la réponse sous forme polaire ou exponentielle.

On cherche $z := re^{i\theta}$ tel que $z^4 = w$. D'une part $z^4 = r^4 e^{4i\theta}$ et d'autre part

$$w = 8 + 8\sqrt{3}i = 16\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 16e^{i\pi/3}.$$

Donc, on doit avoir

$$r^4 = 16 \quad \text{et} \quad 4\theta = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Cela donne $r = 2$ et $\theta = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$. Il y a 4 solutions distinctes :

$$z_0 = 2e^{i\pi/12}, \quad z_1 = 2e^{7i\pi/12}, \quad z_2 = 2e^{13i\pi/12} \quad \text{et} \quad z_3 = 2e^{19i\pi/12}.$$

Question 4
(15 points)

Trouver toutes les racines du polynôme $p(z) = z^5 - 3z^4 + 8z^3 - 14z^2 + 16z - 8$ sachant que $1 - i$ est l'une de ces racines.

Puisque le polynôme est à **coefficients réels**, $\overline{1-i} = 1 + i$ est aussi une racine de p. Il possède donc le facteur

$$(z - 1 + i)(z - 1 - i) = z^2 - 2z + 2.$$

En divisant $p(z)$ par celui-ci, on trouve

$$p(z) = (z^2 - 2z + 2)(z^3 - z^2 + 4z - 4).$$

Or, $z^3 - z^2 + 4z - 4 = z^2(z-1) + 4(z-1) = (z^2+4)(z-1)$. Les racines de ce polynômes sont donc $\pm 2i$ et 1. Ainsi, les 5 racines de p sont

$$1 \pm i, \quad \pm 2i \quad \text{et} \quad 1.$$

Question 5
(5 + 10 = 15 points)

Considérer l'équation différentielle $(1-y)y' = 2x$ (E) et la famille de courbes $2x^2 + (y-1)^2 = c$ $(c \in \mathbb{R})$ (F).

a) Montrer que (E) est l'équation différentielle associée à (F).

Il suffit de dériver chaque membre de (F) par rapport à x.

$$\begin{aligned}
\frac{d\left[2x^2+(y-1)^2\right]}{dx} &= \frac{dc}{dx} \\
4x+2(y-1)y' &= 0 \\
(y-1)y' &= -2x \\
(1-y)y' &= 2x.
\end{aligned}$$

b) Déterminer les trajectoires orthogonales à (F).

L'équation différentielle associée aux trajectoires orthogonales de (F) est :

$$y' = \frac{y-1}{2x}.$$

C'est une équation séparable :

$$\begin{aligned}
\frac{y'}{y-1} &= \frac{1}{2x} \\
\ln|y-1| &= \frac{1}{2}\ln|x| + c_1 \quad (c_1 \in \mathbb{R}) \\
\ln|y-1| &= \ln\sqrt{|x|} + c_1 \quad (c_1 \in \mathbb{R}) \\
|y-1| &= c_2\sqrt{|x|} \quad (c_2 > 0) \\
y-1 &= c_2\sqrt{|x|} \quad (c_2 \in \mathbb{R}) \qquad [\text{car } y=1 \text{ est aussi une solution}] \\
y &= 1 + c\sqrt{|x|} \quad (c \in \mathbb{R})
\end{aligned}$$

Les trajectoires orthogonales à (F) sont les courbes

$$y = 1 + c\sqrt{|x|} \quad (c \in \mathbb{R})$$

plus la droite $x = 0$.

Question 6
(20 points)

Trouver la fonction $y = y(x)$ $(x > 0)$ satisfaisant les conditions $x^y = e^{y'-y}$ et $y(2) = 12$.

C'est une équation séparable. En effet,

$$\begin{aligned}
e^{y'-y} &= x^y \\
y' - y &= y\ln x \\
y' &= y(1+\ln x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{y'}{y} &= 1+\ln x \\
\ln|y| &= x + x\ln x - x + c_1 \quad (c_1 \in \mathbb{R}) \\
\ln|y| &= \ln x^x + c_1 \quad (c_1 \in \mathbb{R}) \\
|y| &= c_2 x^x \quad (c_2 > 0) \\
y &= c_3 x^x \quad (c_3 \neq 0) \\
y &= c x^x \quad (c \in \mathbb{R}) \qquad [\text{car } y(x) = 0 \text{ est aussi une solution}]
\end{aligned}$$

Puisque $y(2) = c2^2 = 4c$ doit être égal à 12, on a $c = 3$. La solution particulière cherchée est

$$y = 3x^x.$$

Question 7
(5 points)

On veut demander à Maple d'écrire sous forme cartésienne $e^{4e^{i\pi/3}}$. Pour ce faire, compléter la commande suivante :

```
>  evalc ( exp ( 4 * exp ( I * Pi / 3 ) ) );
```

$$e^2 \cos\left(2\sqrt{3}\right) + ie^2 \sin\left(2\sqrt{3}\right)$$