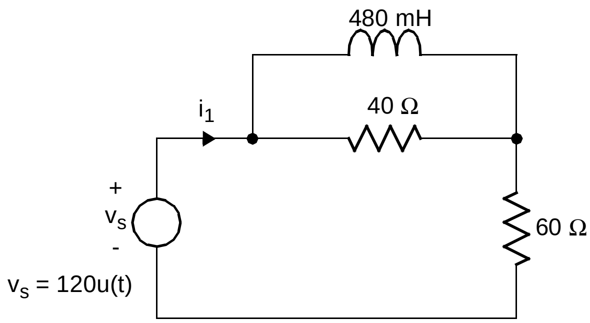
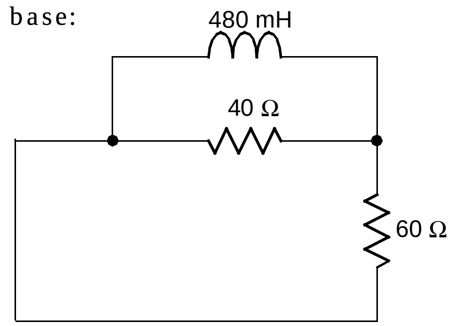
GEL-21945 Circuits
Session Hiver 2002

Corrigé du test no. 3

<u>Question no.1</u> (10 points)



Circuit de base:



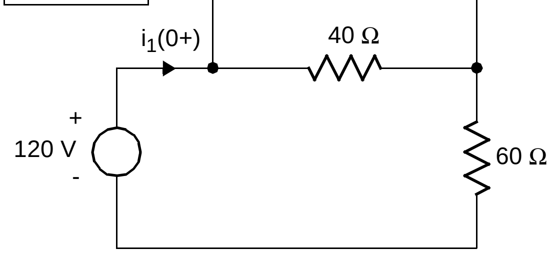
La constante de temps du circuit est:

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{0.48}{(40 \| 60)} = 0.02\,s$$

Le courant i_1 est de la forme suivante: $$i_1 = \left[A + Be^{-\frac{t}{\tau}}\right]u(t)$$

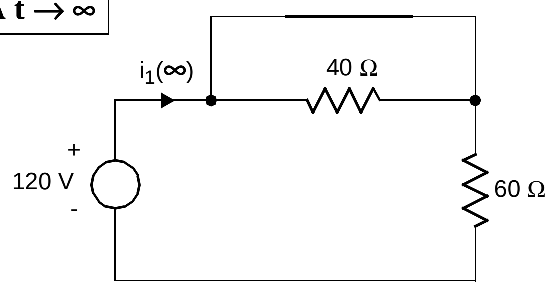
où A et B sont des constantes déterminées par les conditions initiale et finale de i_1.

À t = 0+



$$i_1(0+) = \frac{120}{40+60} = 1.2A$$

À t → ∞

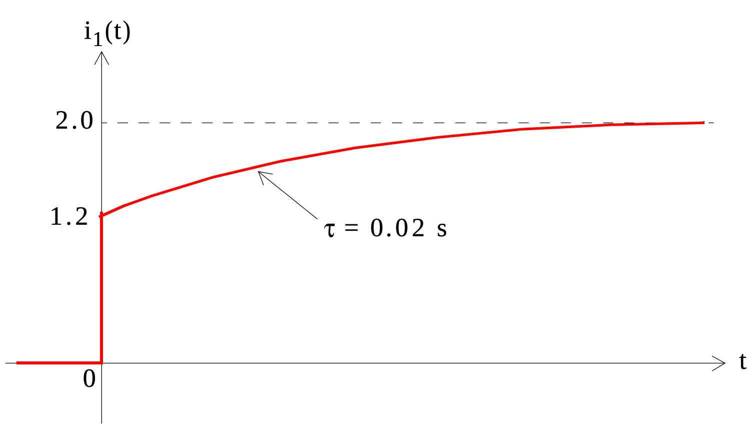


$$i_1(\infty) = \frac{120}{60} = 2A$$

On a: $i_1(\infty) = 2 = A$

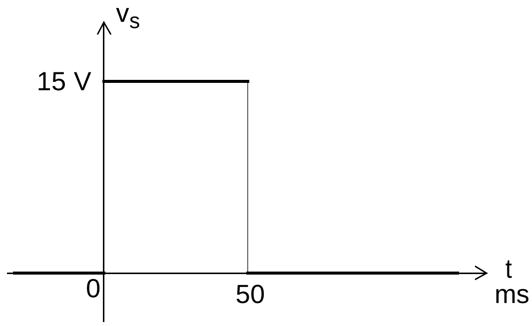
et: $i_1(0+) = 1.2 = A + B$ $\rightarrow$ $B = -0.8$

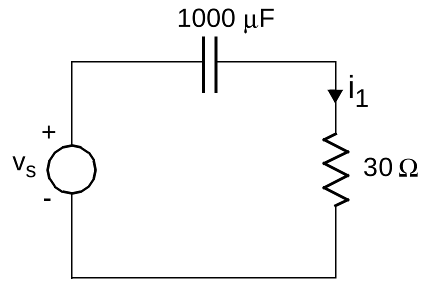
Alors: $$i_1 = \left[2 - 0.8e^{-\frac{t}{0.02}}\right]u(t)$$



b) La durée du régime transitoire est 5τ = 0.1 s

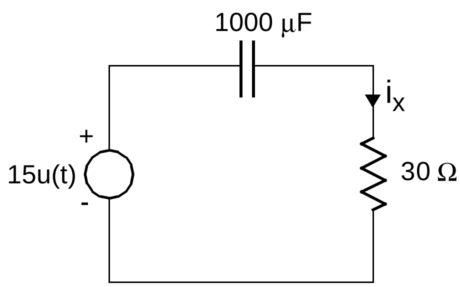
Question no.2 (10 points)





La constante de temps du circuit est: $\tau = RC = 30 \times 1000 \times 10^{-6} = 30\ ms$

On détermine en premier lieu la réponse du circuit à un échelon de 15 V.



Le courant $i_x(t)$ est de la forme $\left[A + Be^{-\frac{t}{\tau}}\right]u(t)$

Les constantes A et B sont déterminées par les conditions initiale et finale de i_x:

$i_x(\infty) = A = 0$

$i_x(0+) = A + B = 15/30 = 0.5 \rightarrow B = 0.5$

Alors: $i_x(t) = 0.5e^{-\frac{t}{0.03}}u(t)$

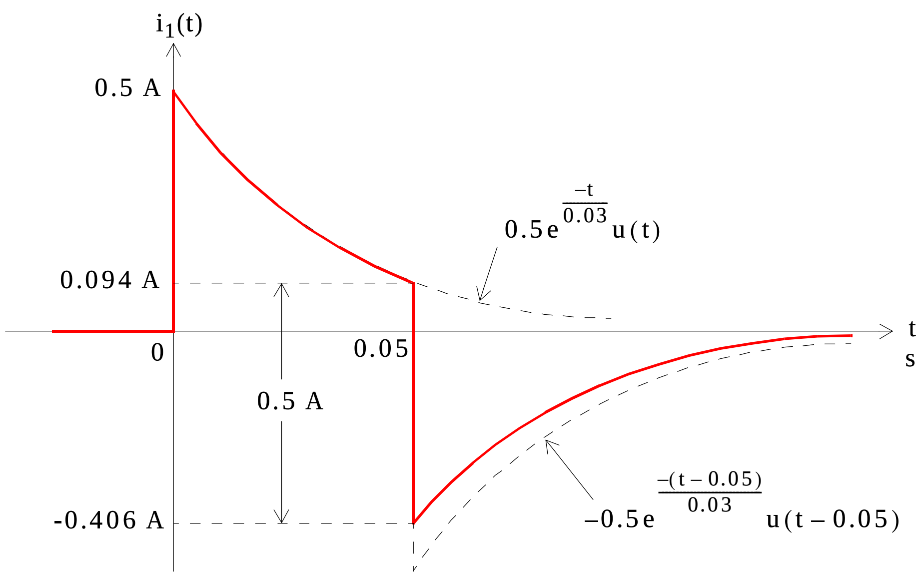
On peut décomposer la tension $v_s(t)$ en une somme de deux échelons:

$$v_s(t) = 15u(t) - 15u(t-0.05)$$

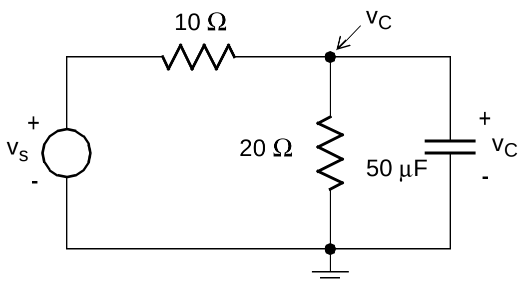
Le courant $i_1(t)$ peut être déduit à partir du courant $i_x(t)$ qui est la réponse à une excitation de 15u(t):

$$i_1(t) = i_x(t) - i_x(t-0.05)$$

$$i_1(t) = 0.5e^{\frac{-t}{0.03}}u(t) - 0.5e^{\frac{-(t-0.05)}{0.03}}u(t-0.05)$$



<u>Question no. 3</u> (10 points)



a) On établit l'équation d'équilibre du circuit en utilisant la méthode des noeuds:

$$\left[\frac{1}{10} + \frac{1}{20} + 50\times10^{-6}\frac{d}{dt}\right]v_C = \frac{v_s}{10} \qquad (1)$$

L'équation différentielle qui relie la tension v_C à la source v_s s'écrit:

$$5\times10^{-4}\frac{dv_C}{dt} + 1.5v_C = v_s \qquad (2)$$

b) La tension v_C est la solution de l'équation différentielle suivante:

$$5\times10^{-4}\frac{dv_C}{dt} + 1.5v_C = 100\cos(\omega_0 t)u(t) = 100\mathrm{Re}\left\{e^{j\omega_0 t}u(t)\right\} \qquad (3)$$

Dans un premier temps, on résout l'équation différentielle suivante:

$$5\times10^{-4}\frac{dv_x}{dt} + 1.5v_x = e^{j\omega_0 t}u(t) \qquad (4)$$

La solution de cette équation est de la forme $v_x = \left[Ae^{st} + Be^{j\omega_0 t}\right]u(t)$ où Ae^{st} est la solution homogène et $Be^{j\omega_0 t}$ est la solution particulière.

La fréquence naturelle s est la solution de l'équation caractéristique $5\times10^{-4}s + 1.5 = 0$.

Alors: $$s = \frac{-1.5}{5\times10^{-4}} = -3000$$

La constante B est obtenue en remplaçant $Be^{j\omega_0 t}$ dans l'équation 4:

$$[5\times10^{-4}(j\omega_0) + 1.5]Be^{j\omega_0 t} = e^{j\omega_0 t}$$

On déduit: $$B = \frac{1}{5\times10^{-4}(j\omega_0) + 1.5} = \frac{1}{5\times10^{-4}(j300\pi) + 1.5} = 0.636e^{-j0.3044}$$

La constante A est calculée à l'aide de la condition initale de v_x:

$$v_x(0+) = v_x(0-) = 0 = A + B$$

On déduit: $$A = -B = -0.636e^{-j0.3044}$$

Donc: $$v_x = \left[(-0.636e^{-j0.3044})e^{-3000t} + 0.636e^{-j0.3044}e^{j\omega_0 t}\right]u(t)$$

$$v_x = \left[(-0.636e^{-j0.3044})e^{-3000t} + 0.636e^{j(\omega_0 t - 0.3044)}\right]u(t)$$

La tension v_C est égale à $100\mathrm{Re}\{v_x\}$:

$$v_C = 100\mathrm{Re}\left\{\left[(-0.636e^{-j0.3044})e^{-3000t} + 0.636e^{j(\omega_0 t - 0.3044)}\right]u(t)\right\}$$

$$v_C = [\underbrace{-60.67e^{-3000t}}_{\text{Réponse transitoire}} + \underbrace{63.60\cos(\omega_0 t - 0.3044)}_{\text{Réponse permanente}}]u(t)$$