Mathématiques de l'ingénieur I (MAT-10363)
Examen partiel du 16 décembre
RÉPONSES

Les questions et réponses ne sont pas nécessairement dans l'ordre de votre questionnaire.

Question 1
(10 points)

On veut approcher la valeur de $\sqrt{360} = \sqrt{15 \times 24}$ sans l'aide d'une calculatrice. Pour cela on utilise le polynôme de Taylor d'ordre deux $P_2(x, y)$ associé à la fonction $f(x, y) := \sqrt{xy}$ au point (16,25).

Lequel des énoncés suivants est **VRAI**.

(a) $P_2(x, y) = 20 + \frac{5}{8}(x - 16) + \frac{2}{5}(y - 25)$.

(b) $P_2(x, y) = 20 + \frac{5}{8}(x - 16)^2 + \frac{2}{5}(y - 25)^2$.

(c) $P_2(x, y) = 20 + \frac{5}{8}(x - 16) + \frac{2}{5}(y - 25) - \frac{5}{512}(x - 16)^2 - \frac{1}{250}(y - 25)^2$.

(d) $P_2(x, y) = 20 + \frac{5}{8}(x - 16) + \frac{2}{5}(y - 25) + \frac{1}{80}(x - 16)(y - 25)$.

(e) Les énoncés (a), (b), (c) et (d) sont tous faux.

Question 2
(10 points)

Soit $f(x, y) = \dfrac{x^3}{3} - 3xy + \dfrac{3}{2}y^2 + 2x$.

Lequel des énoncés suivants est **VRAI**.

(a) f possède exactement deux points critiques et ce sont des points de selle.

(b) f possède exactement deux points critiques et ce sont des minima locaux.

(c) f possède exactement un point critique et c'est un minimum local.

(d) f possède exactement un point critique et c'est un point de selle.

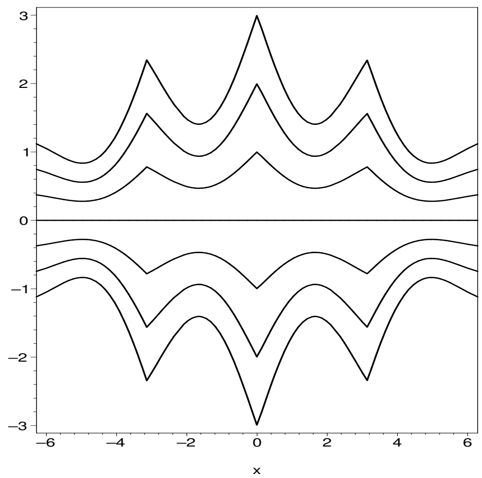
(e) Les énoncés (a), (b), (c) et (d) sont tous faux.

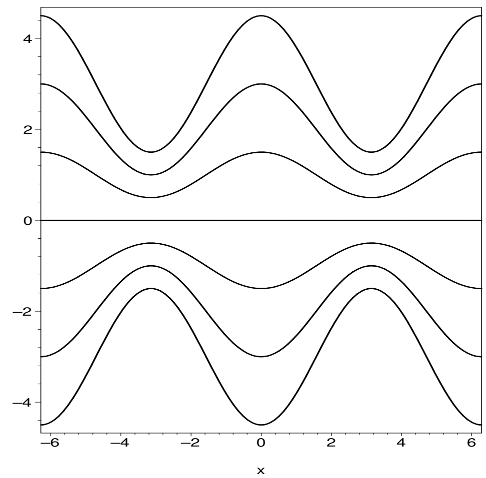
Question 3

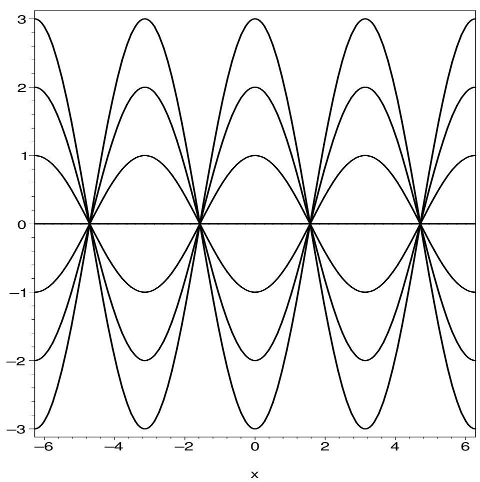
(10 points)

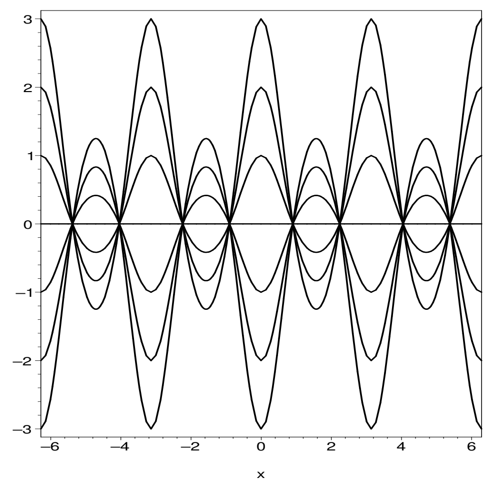
Parmi les graphes ci-dessous, lequel est une esquisse des courbes de niveau de la fonction

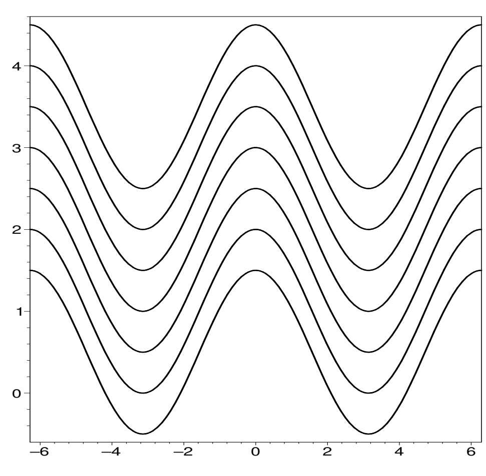
$$f(x, y) := \frac{y}{2 + \cos(x)}?$$

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

Question 4
(10 points)

Considérer l'équation différentielle

$$y^{(4)} - 4y''' + 5y'' - 4y' + 4y = e^{2x} + x. \qquad (\star)$$

Le polynôme caractéristique de l'équation différentielle homogène associée à $(\star)$ est

$$p(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda^2 + 1).$$

Parmi les formes suivantes, laquelle est appropriée lorsqu'on cherche une solution particulière de $(\star)$?

(a) $y_p(x) := Ae^{2x} + Bx + C.$

(b) $y_p(x) := Axe^{2x} + Bx + C.$

(c) $\boldsymbol{y_p(x) := Ax^2e^{2x} + Bx + C.}$

(d) $y_p(x) := Ae^{2x} + x(Bx + C).$

(e) $y_p(x) := Axe^{2x} + x^2(Bx + C).$

Question 5
(10 points)

Soit $f(x, y)$ une fonction dérivable dans le plan et qui vérifie les propriétés suivantes

- $f(0, \frac{\pi}{2}) = 1$;
- $\frac{\partial f}{\partial x}(0, \frac{\pi}{2}) = -1$;
- $D_{\vec{u}}f(0, \frac{\pi}{2}) = -1, \quad$ où $\quad \vec{u} = (-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}).$

L'équation du plan tangent à la fonction f au point $(0, \frac{\pi}{2})$ est

(a) $z = 1 + 2\pi - 3x - 4y.$

(b) $z = 1 - x + y.$

(c) $z = 1 - \frac{\pi}{2} - x + y.$

(d) $\boldsymbol{z = 1 - \pi - x + 2y.}$

(e) $z = 1 - x.$

Question 6
(10 points)

Considérer les énoncés suivants.

- Pour $f(x,y) := e^{x-y}$, on a $f_x + f_y = 0$.
- Pour $f(x,y) := \sqrt{x+2y-1} + x^2y + y$, on a $f_y(2,0) = 6$.
- Pour $f(x,y) := 2 - xy + x^3 + \cos(y)$, on a $f_{xy} = -1$.
- Il existe une fonction $f = f(x,y)$ pour laquelle $f_x = 2xy$ et $f_y = x^2 + y$.

Combien des énoncés précédents sont **VRAIS**.

(a) 0.

(b) 1.

(c) 2.

(d) 3.

(e) 4.

Question 7
(10 points)

Soit $f(x,y) := e^x(\sin x + \cos y)$, et $x(r,s) := r + 2s$, $y(r,s) := 2r + s$. Posons

$$h(r,s) := f(x(r,s), y(r,s)).$$

Lequel des énoncés suivants est **VRAI**.

(a) $\frac{\partial h}{\partial r}(0,0) = 0$ et $\frac{\partial h}{\partial s}(0,0) = 0$.

(b) $\frac{\partial h}{\partial r}(0,0) = 0$ et $\frac{\partial h}{\partial s}(0,0) = 2$.

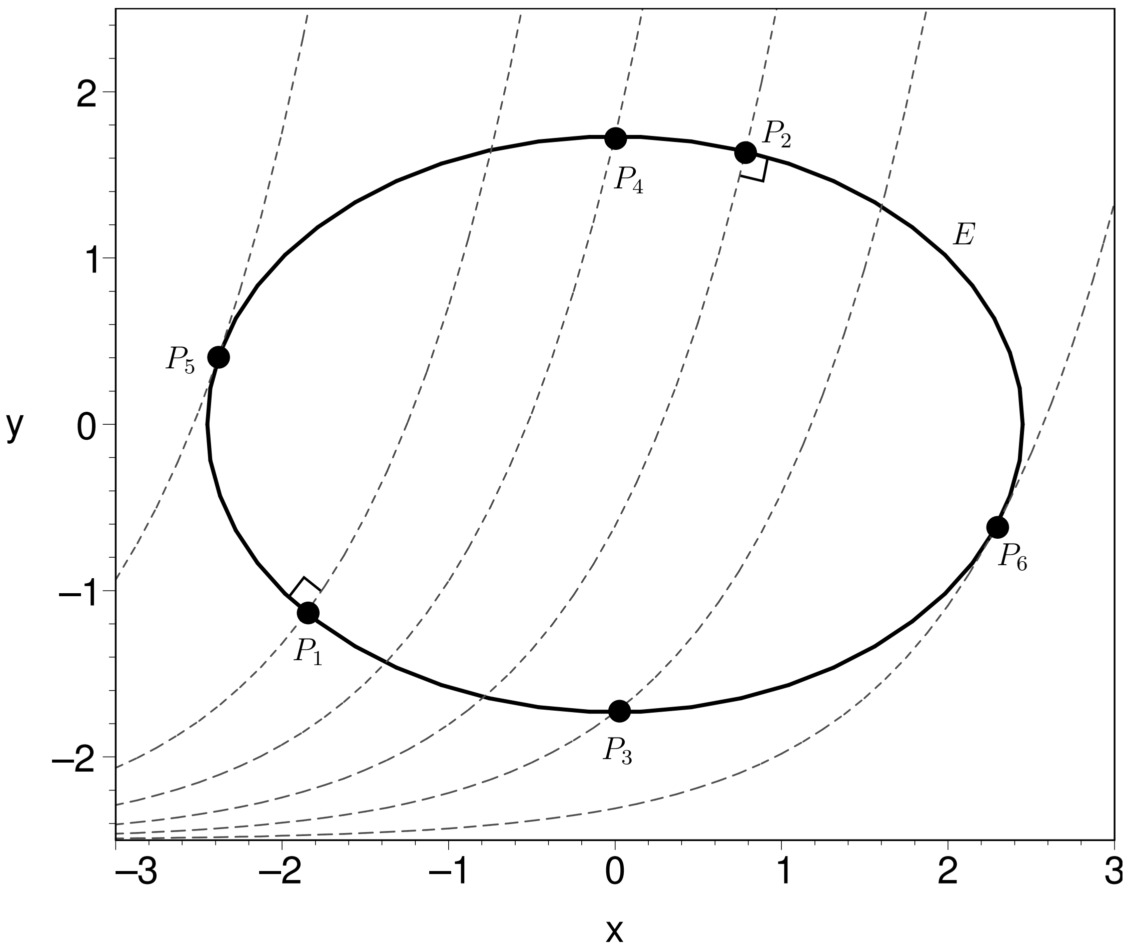
(c) $\frac{\partial h}{\partial r}(0,0) = 2$ et $\frac{\partial h}{\partial s}(0,0) = 0$.

(d) $\frac{\partial h}{\partial r}(0,0) = 2$ et $\frac{\partial h}{\partial s}(0,0) = 4$.

(e) $\frac{\partial h}{\partial r}(0,0) = 4$ et $\frac{\partial h}{\partial s}(0,0) = 2$.

Question 8
(10 points)

Soit $f = f(x, y)$ une fonction dont toutes les dérivées partielles de tout ordre existent et sont continues sur $\mathbb{R}^2$ et soit E l'ellipse $x^2 + 2y^2 = 6$. Considérer le graphe suivant où l'ellipse E est représentée et où les courbes pointillées sont des courbes de niveau de f.



Lequel des énoncés suivants est **VRAI**.

(a) Le maximum de f sur E ne peut être atteint qu'en P_4.

(b) Le maximum de f sur E ne peut être atteint qu'en P_1 ou P_2.

(c) Le maximum de f sur E ne peut être atteint qu'en P_3 ou P_4.

(d) Le maximum de f sur E ne peut être atteint qu'en P_5 ou P_6.

(e) Le maximum de f sur E pourrait être atteint en l'un ou l'autre des six points considérés.

Question 9
(5 points)

Soit $f(x,y) := -\dfrac{9}{4}\ln\left(1+(x-1)^2+(y-1)^2\right)$.

Lequel des énoncés suivants est **VRAI**.

(a) $f_{xy}(0,0) = 0$ et $f_{yx}(0,0) = 1$.

(b) $f_{xy}(0,0) = 1$ et $f_{yx}(0,0) = 0$.

(c) $f_{xy}(0,0) = 1$ et $f_{yx}(0,0) = -1$.

(d) $f_{xy}(0,0) = -1$ et $f_{yx}(0,0) = 1$.

(e) Les énoncés (a), (b), (c) et (d) sont tous faux.

Question 10
(5 points)

Le polynôme caractéristique de l'équation différentielle

$$y^{(4)} - 16y = 0 \qquad (\star)$$

est $P(\lambda) = (\lambda^2 - 4)(\lambda^2 + 4)$.

Lequel des énoncés suivants est **VRAI**.

(a) $c_1e^{2x} + x(c_2\cos 2x + c_3\sin 2x) + c_4$ est la solution générale de $(\star)$.

(b) $c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + c_3\sin 2x + c_4\cos 2x$ est la solution générale de $(\star)$.

(c) $c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} + c_3\sin 2x + c_4\cos 2x$ est la solution générale de $(\star)$.

(d) $e^{-2x}(c_1 + c_2x) + e^{2x}(c_3\sin 2x + c_4\cos 2x)$ est la solution générale de $(\star)$.

(e) Les énoncés (a), (b), (c) et (d) sont tous faux.

Question 11
(5 points)

Soit $f(x, y, z)$ une fonction dérivable et définie dans l'espace à trois dimensions. Soient $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ deux vecteurs non nuls et distincts de l'espace et qui vérifent

$$\vec{u}_1 \cdot \nabla f = 1 \qquad \text{et} \qquad \vec{u}_2 \cdot \nabla f = 1$$

au point (x_0, y_0, z_0).

Lequel des énoncés suivants est **VRAI**.

(a) $D_{\vec{v}} f(x_0, y_0, z_0) = 1$ pour tout vecteur $\vec{v}$ tel que $|\vec{v}| = 1$.

(b) $\vec{u}_1 - \vec{u}_2$ est un vecteur parallèle au vecteur $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$.

(c) $\vec{u}_1 - \vec{u}_2$ est un vecteur parallèle au plan tangent à la fonction f au point (x_0, y_0, z_0).

(d) $\vec{u}_1 - \vec{u}_2$ est perpendiculaire au plan tangent à la fonction f au point (x_0, y_0, z_0).

(e) Les énoncés (a), (b), (c) et (d) sont tous faux.

Question 12
(5 points)

Dans Maple, on exécute d'abord la commande

```
> with(plots):
```

Laquelle des commandes Maple suivantes permet alors de tracer le graphe de

$$z = f(x, y) = \cos(x) + \sqrt{xy}$$

au-dessus de la région $(x, y) \in [0, 2] \times [0, 3]$?

(a) `> contourplot(z=cos(x)+sqrt(x*y),x=0..2,y=0..3);`

(b) `> plot(cos(x)+sqrt(x*y),x=0..2,y=0..3);`

(c) `> surfaceplot(cos(x)+sqrt(x*y),x=0..2,y=0..3);`

(d) `> implicitplot(z=cos(x)+sqrt(x*y),x=0..2,y=0..3);`

(e) `> plot3d(cos(x)+sqrt(x*y),x=0..2,y=0..3);`