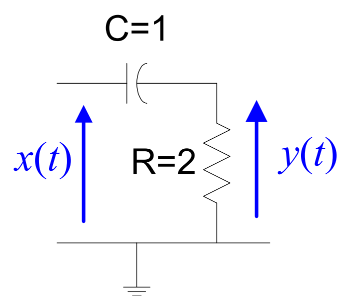
GEL19962: Analyse des signaux
2002 Examen Final

Lundi le 16 décembre 2002; Durée: 10h30 à 12h20
Une feuille documentation permise; aucune calculatrice permise

---

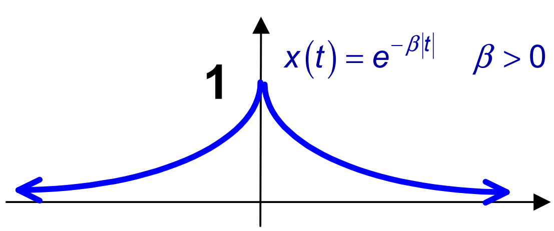
Problème 1 (10 points sur 45)

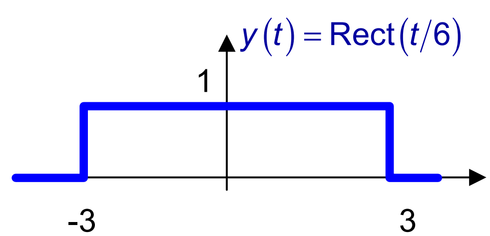
(4 pts) a) Trouvez la réponse impulsionnelle du circuit suivant.



(6 pts) b) Trouvez la sortie quand l'entrée est $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi/2} e^{jn\pi t/2}$.

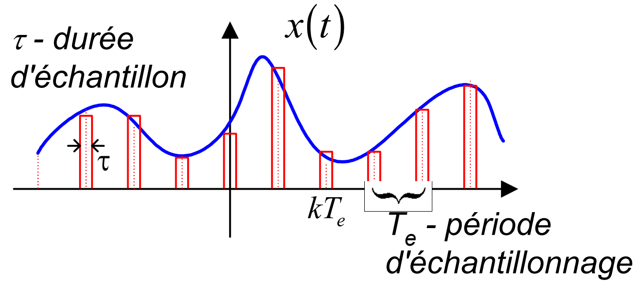
Problème 2 (9 points sur 45)





Calculez la convolution $x(t)*y(t)$.

Problème 3 (14 points sur 45)

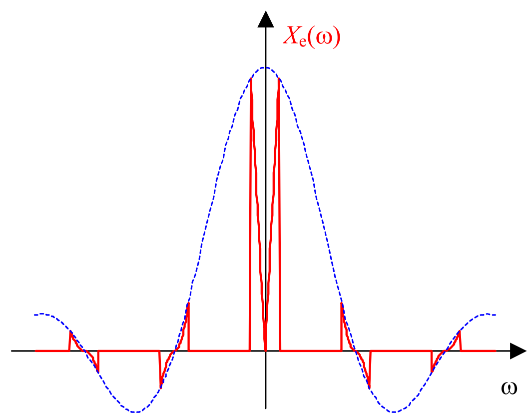


Voici, à droite, un graphique d'un signal avec échantillonnage non-idéal. Pour le cas $\tau = T_e$ le système est un bloqueur d'ordre zéro, comme nous avons vu en classe. L'échantillonnage non-idéal est modélisé comme

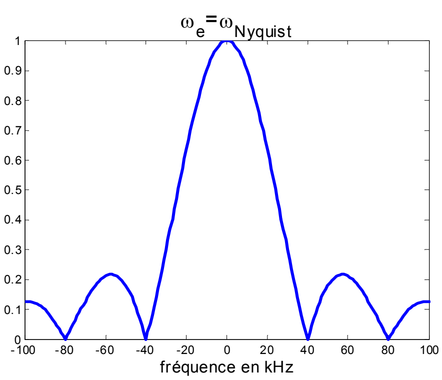
$$x_e(t) = x(t) * h(t)$$

$$H(\omega) = \mathrm{Sa}\left(\frac{\omega T_e}{2}\right) = \mathrm{Sa}\left(\frac{\omega}{\omega_e}\pi\right)$$

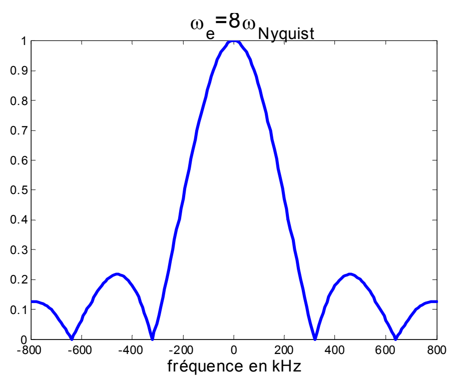
où *x(t)* ici est la version avec échantillonnage idéal. Le spectre du signal échantillonné est donné, a droite, pour τ et T_e arbitraire.



Les CD de musique contiennent des signaux limités à 20 kHz. Supposons que nous avons un système avec $\omega_e = \omega_{Nyquist}$ et un autre système avec $\omega_e = 8\omega_{Nyquist}$. Les deux réponses en fréquence $H(\omega)$ sont



et

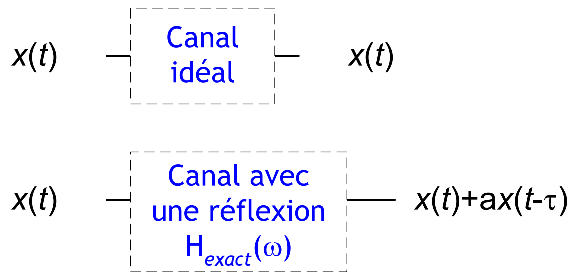


(2 pts) a) Quel est le taux de Nyquist $\omega_{Nyquist}$?

(10 pts) b) Quels sont les avantages de faire un échantillonnage huit fois plus vite que le taux de Nyquist?

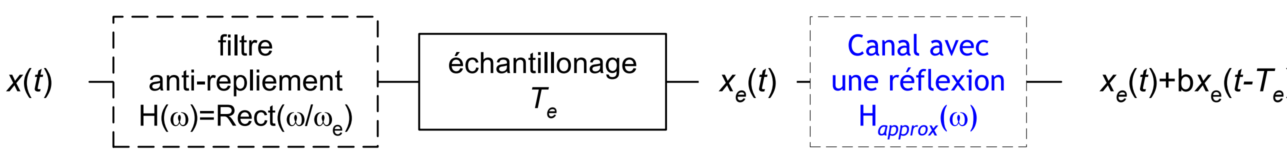
Problème 4 (14 points sur 45)

Pour un canal de communications sans fils avec une réflexion, le signal reçu au détecteur est le signal énvoyé plus une copie décalée par τ, soit



(2 pts) a) Quelle est la réponse en fréquence $H_{exact}(\omega)$ et la réponse impulsionnelle $h_{exact}(t)$ de ce modèle exacte d'un canal avec une réflexion?

Quand le signal envoyé est échantillonné à un intervalle de T_e secondes, nous utilisons souvent un modèle approximatif pour un canal avec une réflexion, soit une réflexion au temps d'échantillonnage.

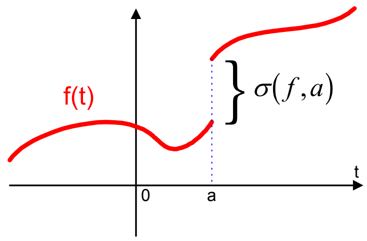


(2 pts) b) Quelle est la réponse en fréquence $H_{approx}(\omega)$ et la réponse impulsionnelle $h_{approx}(t)$ de ce modèle de canal avec une réflexion?

(10 pts) c) Quelle est l'erreur quadratique quand nous utilisons $H_{approx}(\omega)$ au lieu de $H_{exact}(\omega)$ dans le système échantillonné avec filtre anti-repliement? Votre réponse sera une fonction des paramètres a, b, τ et T_e.

Tables de Transformées et Propriétés
2002 Examen Final

Dérivée d'une fonction discontinue



$$\left(D_f\right)' = D_{f'} + \sigma(f,a)\,\delta_a$$

Manipulation sur la fonction delta

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$$

et $f(t)\delta(t-a) = f(a)\delta(t-a)$

$$f(t) * \delta(t) = f(t)$$

et $f(t) * \delta(t-a) = f(t-a)$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-jn\tau\omega} = \frac{2\pi}{\tau}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi n}{\tau}\right)$$

Séries de Fourier

$F_{série}(n) = \dfrac{1}{T_0}\displaystyle\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f_p(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$ et $\quad f_p(t) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_{série}(n)e^{jn\omega_0 t}$

Théorème de Parseval : $\dfrac{1}{T_0}\displaystyle\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \left|f_p(t)\right|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|F_{série}(n)\right|^2$

Calcul des coefficients de Fourier d'une fonction périodique

Soit $f_r(t)$ la restriction de la fonction $f_p(t)$ sur $\left[-T_0/2, T_0/2\right]$ et

$f_r(t) \Leftrightarrow F_r(\omega)$. Nous aurons: $F_{Série}(n) = \dfrac{F_r(n\omega_0)}{T_0}$

Transformée de Fourier

$F(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$ et $\quad f(t) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$

Théorème de Parseval : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left|f(t)\right|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left|F(\omega)\right|^2 d\omega$

Produit de convolution

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(t-u)\,du = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)f(t-u)\,du$$

Tables de Transformées et Propriétés
2002 Examen Final

Fonction	Transformée de Fourier	Fonction	Transformée de Fourier
$f(t)$	$F(\omega)$	$\delta(t)$	1
$F(t)$	$2\pi f(-\omega)$	1	$2\pi\delta(\omega)$
$f(t+a)$	$e^{ja\omega}F(\omega)$	$\delta_{T_0}(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT_0)$	$\omega_0\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-n\omega_0)$
$f(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$	$\mathrm{U}(t)$	$\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$
$e^{jbt}f(t)$	$F(\omega-b)$	$\mathrm{Sgn}(t)$	$\frac{2}{j\omega}$
$t^n f(t)$	$(j)^n\frac{d^n}{d\omega^n}F(\omega)$	$\mathrm{Rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)$ †	$\tau\,\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$
$\frac{d^n}{dt^n}f(t)$	$(j\omega)^n F(\omega)$	$\mathrm{Tri}\left(\frac{t}{\tau}\right)$ ‡	$\tau^2\,\mathrm{Sa}^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$
$f(t)\times g(t)$	$\frac{1}{2\pi}F(\omega)*G(\omega)$	$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\,\delta(\omega-\omega_0)$
$f(t)*g(t)$	$F(\omega)\times G(\omega)$	$\cos(\omega_0 t)$	$\pi\left[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right]$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\omega_0 t}$	$2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\delta(\omega-n\omega_0)$	$\sin(\omega_0 t)$	$\frac{\pi}{j}\left[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)\right]$
$e^{-\beta t}\mathrm{U}(t)$	$\frac{1}{\beta+j\omega}$	$\mathrm{Sa}(tB)$	$\frac{\pi}{B}\mathrm{Rect}\left(\frac{\omega}{2B}\right)$
$e^{-\beta\lvert t\rvert}$	$\frac{2\beta}{\beta^2+\omega^2}$	$\mathrm{Sa}^2(tB)$	$\frac{\pi}{2B^2}\mathrm{Tri}\left(\frac{\omega}{2B}\right)$

† $\mathrm{Rect}\left(\frac{t-t_0}{\tau}\right)$ est un rectangle de hauteur un, centré sur $t=t_0$, et de longueur τ.

‡ $\mathrm{Tri}\left(\frac{t-t_0}{\tau}\right)$ est un triangle de hauteur τ centré sur $t=t_0$, avec un base de longueur 2τ.