Circuits GEL - 21945 **5 avril 2003**

CORRECTION - EXAMEN 2 (35% de la note finale)

27 mars 2003

Problème 1 (30 points)

Le circuit de base révèle la présence de 4 noeuds et 3 mailles donc avec la méthode des noeuds on aura à résoudre 3 équations à 3 inconnues et avec la méthode des mailles on aura aussi à résoudre 3 équations à 3 inconnues.

a) (14 points)

Par la méthode des noeuds on obtient les équations d'états suivantes :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_5}+\frac{1}{L}\int dt & -\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_5} \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_3} \\ -\frac{1}{R_5} & -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_b \\ V_c \\ V_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{V_{s1}}{R_1}-\frac{V_{s2}}{R_5} \\ i_s \\ -i_s+\frac{V_{s2}}{R_5} \end{bmatrix}$$

b) (14 points)

Par la méthode des mailles on obtient :

$$\begin{bmatrix} R_1+L\frac{d}{dt} & -L\frac{d}{dt} & 0 \\ -L\frac{d}{dt} & L\frac{d}{dt}+R_2+R_3+R_4 & -R_2-R_3 \\ 0 & -R_2-R_3 & R_2+R_3+R_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{s1}+L\frac{di_s}{dt} \\ -R_2 i_s+L\frac{di_s}{dt}+R_4 i_s \\ R_2 i_s+V_{s2} \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{bmatrix} R_1+L\frac{d}{dt} & -L\frac{d}{dt} & 0 \\ -L\frac{d}{dt} & L\frac{d}{dt}+R_2+R_3+R_4 & -R_2-R_3 \\ 0 & -R_2-R_3 & R_2+R_3+R_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{s1} \\ -R_3 i_s \\ i_s R_3+V_{s2} \end{bmatrix}$$

c) (2 points)

Les critères de choix :

- le nombre d'équations à résoudre, s'il est inférieur d'une méthode à une autre
- le type de sources dans le circuit
- selon la nature de la variable qu'on aurait à analyser (tension ou courant)

Les deux méthodes sont équivalentes et dans ce cas on a le choix de la méthode.

Problème 2 (15 points)

Si aucun point de masse n'a été choisi : -5 points
Le circuit de base révèle 3 noeuds donc deux équations à 2 inconnues à résoudre.
Plusieurs cas sont possibles :

a) Prendre la masse au point **a**

L'équation d'état est :

$$\begin{bmatrix} 0.1+0.1 & -0.1 \\ -0.1 & 0.1+0.05 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_b \\ V_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\times 10^{-3} \\ -2\times I_x - 410^{-3} \end{bmatrix} \quad \text{(10 points)}$$

avec

$$I_x = \frac{V_c}{20} \tag{1}$$

D'où l'équation finale :

$$\begin{bmatrix} 0.1+0.1 & -0.1 \\ -0.1 & 0.05 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_b \\ V_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\times 10^{-3} \\ -4\times 10^{-3} \end{bmatrix} \quad \text{(5 points)}$$

b) Prendre la masse au point **b**

L'équation d'état est :

$$\begin{bmatrix} 0.1+0.05 & -0.05 \\ -0.05 & 0.1+0.05 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_a \\ V_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2I_x \\ -2\times I_x - 410^{-3} \end{bmatrix} \quad \text{(10 points)}$$

avec

$$I_x = -\frac{V_a - V_c}{20} \tag{2}$$

D'où l'équation finale :

$$\begin{bmatrix} 0.05 & -0.05+0.1 \\ -0.05+0.1 & -0.05 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_a \\ V_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4\times 10^{-3} \end{bmatrix} \quad \text{(5 points)}$$

c) Prendre la masse au point **c**

L'équation d'état est :

$$\begin{bmatrix} 0.1+0.05 & -0.1 \\ -0.1 & 0.1+0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2I_x - 4\times 10^{-3} \\ 410^{-3} \end{bmatrix} \quad \text{(10 points)}$$

avec

$$I_x = \frac{V_a}{20} \tag{3}$$

D'où l'équation finale :

$$\begin{bmatrix} 0.1+0.05-0.1 & -0.1 \\ -0.1 & 0.1+0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4\times 10^{-3} \end{bmatrix} \quad \text{(5 points)}$$

d) Prendre la masse au point **d**

L'équation d'état est :

$$\begin{bmatrix} 0.1 & -0.1 \\ -0.1 & 0.1+0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x \\ 1210^{-3} + 4I_x \end{bmatrix} \quad \text{(10 points)}$$

avec

$$I_x = \frac{V_a}{60} - \frac{4}{3}\times 10^{-3} \tag{4}$$

D'où l'équation finale :

$$\begin{bmatrix} 0.1 - \frac{1}{60} - 0.1 & -0.1 \\ -0.1 - \frac{4}{60} & 0.1 + 0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} \times 10^{-3} \\ 12 \times 10^{-3} - \frac{4}{3} \times 10^{-3} \end{bmatrix} \quad \text{(5 points)}$$

Une solution avec 3 noeuds a aussi été considérée.
L'équation d'état est :

$$\begin{bmatrix} 0.1 & -0.1 & 0 \\ -0.1 & 0.1 + 0.1 & -0.1 \\ 0 & -0.1 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x \\ 410^{-3} \\ -I_x - 4 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \quad \text{(10 points)}$$

avec

$$I_x = \frac{V_a - V_c}{20} \tag{5}$$

D'où l'équation finale :

$$\begin{bmatrix} 0.1 - 0.05 & -0.1 & 0.05 \\ -0.1 & 0.1 + 0.1 & -0.1 \\ 0.05 & -0.1 & 0.1 - 0.05 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \times 10^{-3} \\ -4 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \quad \text{(5 points)}$$

D'autres combinaisons linéaires de ces équations ont aussi été considérés.

<u>Problème 3</u> (25 points)

a) (15 points)

- Allure : cosinus amorti (5 points)
- Point de départ : $g(0) = 10cos(1.256) = 9.99$ (2 points)
- Retard du cosinus : $r = \frac{\theta}{\omega} = 5ms$ (2 points)
- Période des oscillations : $T = 25ms$ (2 points)
- Durée des oscillations : $5\tau = 100ms$ (2 points)
- 4 oscillations avant l'amortissement (2 points)

b) (10 points)

$$\begin{aligned} F_1(t) =& 1.67 \times 10^3 r(t) - 3.33 \times 10^3 r(t - 9 \times 10^{-3}) + \\ &+ 1.67 \times 10^3 r(t - 12 \times 10^{-3}) - 1.67 \times 10^3 r(t - 18 \times 10^{-3}) + 1.67 \times 10^3 r(t - 24 \times 10^{-3}) \quad \text{(5 points)} \end{aligned}$$

-1 point si les coefficients sont 1.67 au lieu de 1.67×10^3
-1 point si les constants de temps sont pas données en ms

$$F_2(t) = 300r(t) - 300r(t - 30 \times 10^{-3}) - 300r(t - 50 \times 10^{-3}) + 300r(t - 80 \times 10^{-3}) \quad \text{(5 points)}$$

-1 point si les coefficients sont 0.3 au lieu de 300
-1 point si les constants de temps sont pas données en ms

<u>Problème 4</u> (30 points)

a) (8 points)

On réduit le circuit à un circuit équivalent et on trouve l'équation différentielle :

$$0.25\frac{di_L}{dt} + 34.3i_L = 68.6u(t)$$

b) (14 points)

$$i_L(t) = \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad t < 0 \\ A + Be^{st} \quad \text{si} \quad t \geq 0 \end{cases} \qquad \text{(2 points)}$$

$$s = -\frac{1}{\tau} = -\frac{R}{L} = -137.2s^{-1} \quad \text{(2 points)}$$

à $t = 0^+$ le courant dans L est nul et donc $A + B = 0$ (2 points)

à $t = +\infty$ le courant dans la résistance de 80Ω est nul, et le courant dans L est donné par $i_L = 2u(t) = A + Be^{-infty/\tau} = A$ (2 points)

Donc :

$$i_L = 2(1 - e^{-137.2t})u(t) \quad \text{(2 points)}$$

Le tracé de i_L (4 points)
Sur le graphique devait apparaître aussi les valeurs suivantes
$\tau = 7.2$ ms
$5\tau = 36.4$ ms (amortissement)
$i_L(\tau) = 1.26$ A
$i_L(5\tau) = 2$ A

c) (8 points)

- durée $5\tau = 41.6$ ms (3 points)
- $y_1(\infty) = 50$ (3 points)
- oui, le système est initialement au repos ($y_1(0) = 0$) (2 points)