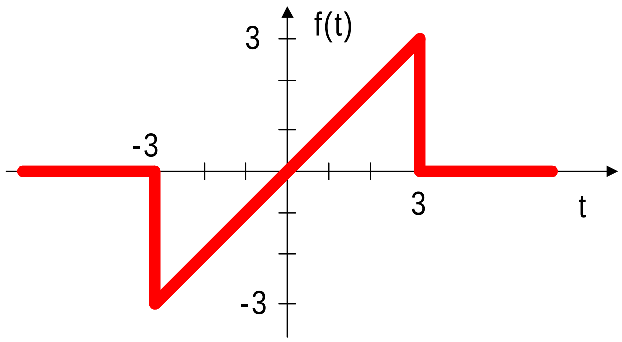
Examen Partiel - *Solutions*

Problème 1 (8 points sur 35)

Trouvez la transformée de Fourier de la fonction *f(t)*.



Solution:

La fonction est $f(t) = \begin{cases} t & -3 < t < 3 \\ 0 & \textit{autrement} \end{cases}$

Méthode 1:

On peut l'écrire comme $f(t) = t\,\mathrm{Rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)$ où $\frac{\tau}{2} = 3 \Rightarrow \tau = 6$

$$f(t) = t\,\mathrm{Rect}\left(\frac{t}{6}\right)$$

Ayant la propriété : $f(t) \Leftrightarrow F(\omega)$ implique $tf(t) \Leftrightarrow j\frac{dF(\omega)}{d\omega}$

A l'aide de la table offerte on peut écrire:

$$\mathrm{Rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \Leftrightarrow \tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) = \tau\frac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\frac{\omega\tau}{2}} = \frac{2}{\omega}\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

Donc

$$t\,\mathrm{Rect}\left(\frac{t}{6}\right) \Leftrightarrow j\frac{d}{d\omega}\frac{2}{\omega}\sin 3\omega$$

$$= j\left[-\frac{2}{\omega^2}\sin 3\omega + \frac{6}{\omega}\cos 3\omega\right]$$

$$= \frac{j}{\omega^2}[6\omega\cos 3\omega - 2\sin 3\omega]$$

Méthode 2:

Il et toujours possible de calculer la transformée en utilisant l'équation d'analyse

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-3}^{3} te^{-j\omega t}dt$$

$$= \frac{te^{-j\omega t}}{-j\omega}\Bigg|_{-3}^{3} + \frac{1}{j\omega}\int_{-3}^{3} e^{-j\omega t}dt$$

$$= j\frac{te^{-j\omega t}}{\omega}\Bigg|_{-3}^{3} + \frac{e^{-j\omega t}}{\omega^2}\Bigg|_{-3}^{3}$$

$$= j\frac{3}{\omega}e^{-3j\omega} + j\frac{3}{\omega}e^{3j\omega} + \frac{e^{-j3\omega}}{\omega^2} - \frac{e^{j3\omega}}{\omega^2}$$

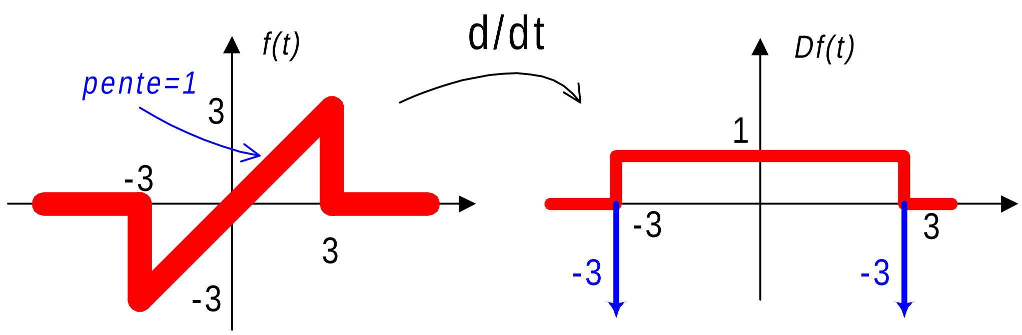
$$= \frac{3j}{\omega}\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\left(e^{3j\omega}+e^{-3j\omega}\right) - \frac{1}{\omega^2}\cdot 2j\cdot\frac{1}{2j}\left(e^{3j\omega}-e^{-3j\omega}\right)$$

$$= \frac{6j}{\omega}\cos 3\omega - \frac{2j}{\omega^2}\sin 3\omega$$

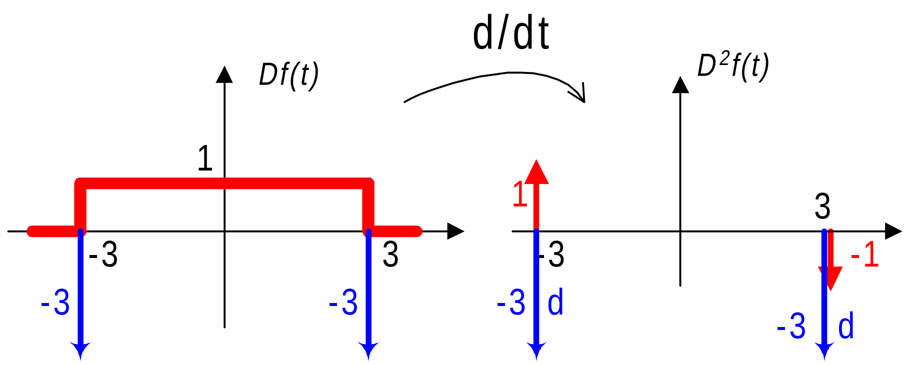
$$= \frac{j}{\omega^2}[6\omega\cos 3\omega - 2\sin 3\omega]$$

Méthode 3:

En utilisant l'approche du chapitre 5, on va examiner la dérivé de la fonction.



La fonction est constante jusqu'à *t=-3*, donc la dérivé est zéro jusqu'à *t=-3*. À *t=-3* il y a un échelon de hauteur moins trois, donc la dérivé est une fonction delta avec un poids de moins trois. De *t=-3* jusqu'à *t=3*, la pente est constante, égale à un, donc la dérivé est constante et égale à un. À *t=3* il y a un échelon de hauteur moins trois, donc la dérivé est une fonction delta avec un poids de moins trois. Après ce point la dérivé est zéro.



Il faut trouver la deuxième dérivé, donc on continue. La première dérivé est constante jusqu'à *t=-3*, donc la dérivé est zéro jusqu'à *t=-3*. À *t=-3* il y a un échelon de hauteur un et une fonction delta de poids moins trois. La deuxième dérivé au point *t=-3* donc est une fonction delta avec un poids d'un plus une dérivé de la fonction delta avec un poids de moins trois. La première dérivé est constante entre moins trois et trois, donc la dérivé est zéro dans cette intervalle. Il y a un échelon de hauteur moins un au point *t=3*, et une fonction delta de poids moins trois. La deuxième dérivé au point *t=-3* donc est une fonction delta avec un poids de moins trois plus une dérivé de la fonction delta avec un poids de moins un.

La deuxième dérivé est donné par

$$D^2 f(t) = \delta(t+3) - 3D\delta(t+3) - \delta(t-3) - 3D\delta(t-3)$$

La transformée de Fourier de cette équation est

$$\mathscr{F}\left[D^2 f(t)\right] = \mathscr{F}\left[\delta(t+3) - 3D\delta(t+3) - \delta(t-3) - 3D\delta(t-3)\right]$$

Le théorème de différentiation en temps nous donne

$$\begin{aligned}
(j\omega)^2 \mathscr{F}\left[f(t)\right] &= \mathscr{F}\left[\delta(t+3)\right] - 3\mathscr{F}\left[D\delta(t+3)\right] - \mathscr{F}\left[\delta(t-3)\right] - 3\mathscr{F}\left[D\delta(t-3)\right] \\
&= e^{j3\omega}\mathscr{F}\left[\delta(t)\right] - 3e^{j3\omega}\mathscr{F}\left[D\delta(t)\right] - e^{-j3\omega}\mathscr{F}\left[\delta(t)\right] - 3e^{-j3\omega}\mathscr{F}\left[D\delta(t)\right] + 2e^{-j\omega} - e^{-j2\omega} \\
&= e^{j3\omega} - 3e^{j3\omega} j\omega - e^{-j3\omega} - 3e^{-j3\omega} j\omega \\
&= e^{j3\omega} - e^{-j3\omega} - 3j\omega\left[e^{j3\omega} + e^{-j3\omega}\right] \\
&= 2j\sin 3\omega - 6j\omega\cos 3\omega
\end{aligned}$$

Donc la transformée de la fonction *f(t)* est

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}\left[f(t)\right] &= \frac{2j\sin 3\omega - 6j\omega\cos 3\omega}{-\omega^2} \\
&= \frac{6j\omega\cos 3\omega - 2j\sin 3\omega}{\omega^2}
\end{aligned}$$

Problème 2 (12 points sur 35)

Trouvez la transformée de Fourier de la fonction

$$f(t) = \left|\sin t\right|$$

Quelle est la puissance dans la bande de fréquence $-3 \leq \omega \leq 3$?

Quelle est la puissance totale?

Solution:

La fonction $\left|\sin t\right|$ est périodique avec une période π, donc pour trouver la transformée de Fourrier, il faut nécessairement calculer la série de Fourrier:

$$F(n) = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} f_p(t) e^{j\omega_0 t} dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left|\sin t\right| e^{-j2nt} dt$$

Dans cette intervalle, le sinus est positif, donc

$$F(n) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin t\, e^{-j2nt} dt \quad \text{et} \quad F(0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin t\, dt = \left.\frac{-\cos t}{\pi}\right|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}$$

L'intégrale ici est donnée dans le tableau pour $a = -j2n$ et $b = 1$

$$F(n) = \frac{1}{\pi} \frac{e^{-j2nt}}{(-j2n)^2 + 1} \left[-j2n \sin t - \cos t \right]_0^\pi$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{e^{-j2n\pi}}{1-4n^2} \left[-j2n \sin \pi - \cos \pi \right] - \frac{1}{\pi} \frac{1}{1-4n^2} \left[-j2n \sin 0 - \cos 0 \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{1}{1-4n^2} \left[-(-1) \right] - \frac{1}{\pi} \frac{1}{1-4n^2} \left[0 - 1 \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{1}{1-4n^2} \left[e^{-j2\pi n} + 1 \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{1}{1-4n^2} \left[\cos 2n\pi - j \sin 2n\pi + 1 \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{1}{1-4n^2} \left[1 - j \cdot 0 + 1 \right] = \frac{2}{\pi} \frac{1}{1-4n^2}$$

L'équation de synthèse pour la série de Fourier donne

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{1}{1-4n^2} \cdot e^{jn2t}$$

Pour trouver la transformée il faut trouver la transformée de chaque terme dans la somme infinie.

$$F(\omega) = \mathscr{F}\left[f(t) \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{1}{1-4n^2} \cdot \mathscr{F}\left(e^{j2nt} \right)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{1}{1-4n^2} \cdot 2\pi\delta(\omega - 2n)$$

La puissance totale $-3 \le \omega \le 3$ est déterminée de la façon suivante:

$\delta(\omega - 2n) \ne 0$ seulement pour $\omega - 2n = 0 \Rightarrow \omega = 2n$. La puissance a une fréquence particulier est le module carré de le coefficient de Fourier pour cette fréquence. Donc il faut calculer les coefficients pour les fréquences dans l'intervalle donnée.

$\omega = 0$	$n = 0$	$F(n=0) = \frac{2}{\pi}$
$\omega = 2$	$n = 1$	$F(n=1) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{1-4} = -\frac{2}{3\pi}$
$\omega = 4$	$n = 2$	hors de l'intervalle
ω = -2	n = -1	$F(n=-1) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{1-4} = -\frac{2}{3\pi}$
ω = -4	n = -2	hors de l'intervalle

$$P = \sum_{n=-1,0,1} P(n) = \sum_{n=-1,0,1} \left|F(n)\right|^2$$

$$= \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 + \frac{4}{9\pi^2} + \frac{4}{9\pi^2} = \frac{44}{9\pi^2}$$

La puissance totale est

$$\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \left|f(t)\right|^2 dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^2 t dt$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\int_0^{\pi} [1 - \cos 2t] dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\pi - \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\sin 2t}{2}\bigg|_0^{\pi} = \frac{1}{2}$$

Problème 3 (5 points sur 35)

Supposons que *f(t)* est réel et pair, avec une transformée de Fourier $F(\omega)$. En utilisant les propriétés de la transformée de Fourier, montrez que $e^{j\omega_0 t} f(t)$ a une transformée de Fourier qui est réelle.

Solution:

La propriété d'une fonction réelle et paire est que la transformée est aussi réelle.

$f(t)$ réel et pair $\Rightarrow F(\omega)$ réel

Le théorème de déplacement en fréquence est

$$e^{j\omega_0 t} f(t) \Rightarrow F(\omega - \omega_0)$$

Comme $F(\omega)$ est réel par la première propriété, et $F(\omega - \omega_0)$ est le résultat d'un déplacement en fréquence de la fonction $F(\omega)$, $F(\omega - \omega_0)$ est donc une fonction réelle.

Problème 4 (10 points sur 35)

Trouvez la transformée inverse de

$$F(\omega) = \frac{\alpha - j\omega}{\alpha + j\omega}$$

Quelle est l'énergie de cette fonction?

Solution:

$$F(\omega) = \frac{\alpha - j\omega}{\alpha + j\omega} = \frac{\alpha}{\alpha + j\omega} - \frac{j\omega}{\alpha + j\omega}$$

La transformée inverse du premier terme peut être déterminé directement de la table:

$$\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{\alpha}{\alpha + j\omega}\right] = \alpha e^{-\alpha t} U(t)$$

Pour le deuxième terme il faut utiliser le théorème:

$f(t) \Leftrightarrow F(\omega)$ implique $\dfrac{df}{dt} \Leftrightarrow j\omega F(\omega)$

par suite: $\dfrac{d}{dt} e^{-at} U(t) \Leftrightarrow \dfrac{j\omega}{a + j\omega}$

donc

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} e^{-at} U(t) &= e^{-at} \frac{d}{dt} U(t) + U(t) \frac{d}{dt} e^{-at} \\ &= e^{-at} \delta(t) + (-\alpha) e^{-at} U(t) \\ &= \delta(t) - \alpha e^{-at} U(t)\end{aligned}$$

La propriété d'échantillonnage de la fonction delta ($\phi(t)\delta(t) = \phi(0)\delta(t)$) était utilisé dans la dernier résultat. La théorème de différentiation en temps nous donne

$$\delta(t) - \alpha e^{-at} U(t) \Leftrightarrow \frac{j\omega}{\alpha + j\omega}$$

donc $\mathscr{F}^{-1}\left(\dfrac{j\omega}{\alpha + j\omega}\right) \Leftrightarrow \delta(t) - \alpha e^{-at} U(t)$

et

$$\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\alpha - j\omega}{\alpha + j\omega}\right) = \alpha e^{-at}U(t) - \delta(t) + \alpha e^{-at}U(t)$$
$$= 2\alpha e^{-at}U(t) - \delta(t)$$

Solution:

L'énergie est

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

Comme la fonction $f(t)$ contient une fonction delta, elle est à une énergie finie. On peut aussi la calculer dans le domaine fréquenciel

$$|F(\omega)| = \left|\frac{\alpha - j\omega}{\alpha + j\omega}\right| = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} = 1$$

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} (1)^2 d\omega = \infty$$

Cette page a été révisée le vendredi, septembre 13, 1996 par Leslie A. Rusch.