

Examen Partiel 2002 - *Solutionnaire*  
**GEL10280 Communications Numériques**

**Problème 1**

A. L'espace du signal pour un récepteur optimal pour BPSK est

$$\begin{array}{c} | \quad | \quad | \\ \hline -\sqrt{E_b} \quad 0 \quad \sqrt{E_b} \end{array}$$

soit avec une signalisation de NRZ, où la forme exponentielle. La probabilité d'erreur exacte pour le BPSK est

$$Q\left(\frac{D_{min}}{\sqrt{2N_0}}\right) = Q\left(\frac{2\sqrt{E_b}}{\sqrt{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

B. Pour commencer, nous allons vérifier que l'énergie d'un bit est bien  $E_b$ .

$$\begin{aligned} \text{énergie par bit} &= \int_0^T s^2(t) dt = A^2 \int_0^T \left(e^{-t/T}\right)^2 dt \\ &= A^2 \int_0^T e^{-2t/T} dt = A^2 \cdot \left(-\frac{T}{2}\right) e^{-2t/T} \Big|_0^T \\ &= A^2 \frac{T}{2} \cdot [e^0 - e^{-2}] = A^2 \frac{T}{2} (1 - e^{-2}) \\ &= \frac{2E_b}{T(1 - e^{-2})} \cdot \frac{T}{2} (1 - e^{-2}) = E_b \end{aligned}$$

La statistique de test est :

$$\begin{aligned} z(T) &= \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T (\pm 1) s(t) dt = \frac{(\pm 1)}{\sqrt{T}} \int_0^T A e^{-t/T} dt \\ &= \frac{\pm A}{\sqrt{T}} (-T) e^{-t/T} \Big|_0^T - \frac{\pm AT}{\sqrt{T}} (1 - e^{-1}) \\ &= \pm \sqrt{\frac{2E_b}{T(1 - e^{-2})}} \cdot \frac{T}{\sqrt{T}} (1 - e^{-1}) = \pm \sqrt{E_b} \cdot \sqrt{\frac{2}{1 - e^{-2}}} \cdot 1 - e^{-1} \\ &= \pm 0.961 \sqrt{E_b} \end{aligned}$$

Les coefficients de ce système BPSK sont donc :

$$\begin{array}{c} | \quad | \quad | \\ \hline -0.961\sqrt{E_b} \quad 0 \quad 0.961\sqrt{E_b} \end{array}$$

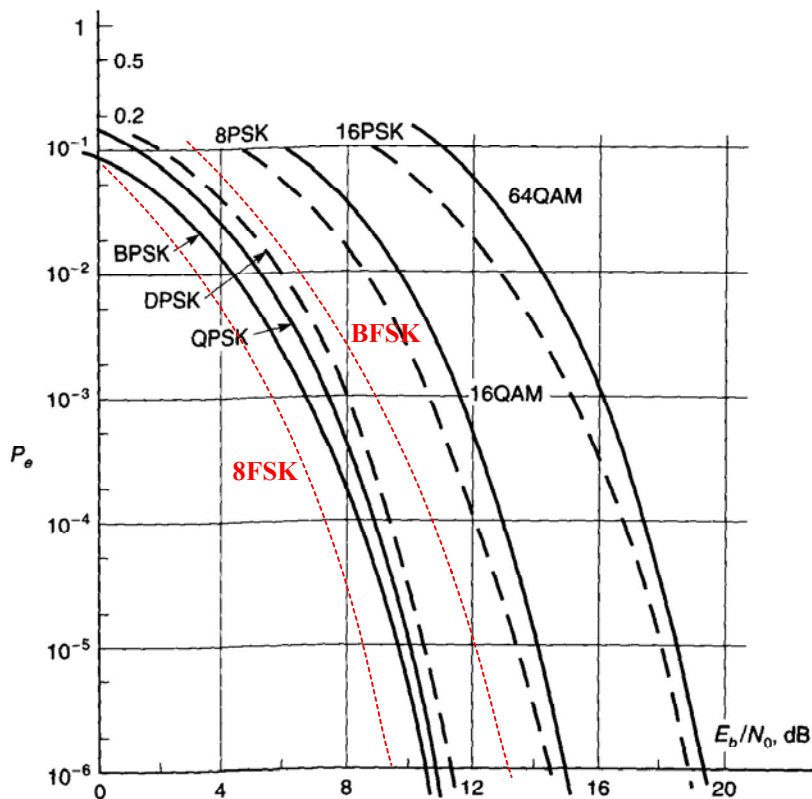
La distance minimale est  $1.92\sqrt{E_b}$  au lieu de  $2\sqrt{E_b}$  pour le récepteur optimal. La probabilité d'erreur est:

$$Q\left(\frac{1.92\sqrt{E_b}}{\sqrt{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{1.84 \frac{E_b}{N_0}}\right)$$

C. La perte par rapport à un récepteur optimal est:

$$10\log_{10} \frac{1.84}{2} = -3.6 \text{ dB}$$

## Problème 2



A. Les probabilités d'erreur pour les modulations sont :

$$BPSK \quad Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

$$QPSK \quad 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

$$DPSK \quad \frac{1}{2}e^{-E_b/N_0}$$

$$MPSK \quad 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0} \log_2 M \sin \frac{\pi}{M}}\right)$$

$$MQAM \quad \frac{2K}{M}Q\left(\sqrt{\frac{3 \log_2 M}{M-1} \frac{E_b}{N_0}}\right)$$

Pour le 8PSK et 16PSK, la probabilité d'erreur est :

$$P_e(8PSK) = 2Q\left(\sin \frac{\pi}{8} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 3E_b}{N_0}}\right) = 2Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0} \cdot 88}\right)$$

$$P_e(16PSK) = 2Q\left(\sin \frac{\pi}{16} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 4E_b}{N_0}}\right) = 2Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0} \cdot 30}\right)$$

Pour 16QAM et 64QAM, la probabilité d'erreur est :

$$P_e(16QAM) \approx \frac{2K}{8}Q\left(\sqrt{\frac{3 \log_2 16}{16-1} \frac{E_b}{N_0}}\right) = \frac{K}{4}Q\left(\sqrt{\frac{12}{15} \frac{E_b}{N_0}}\right)$$

$$P_e(64QAM) \approx \frac{2K}{16}Q\left(\sqrt{\frac{3 \log_2 64}{64-1} \frac{E_b}{N_0}}\right) = \frac{K}{8}Q\left(\sqrt{\frac{18}{63} \frac{E_b}{N_0}}\right)$$

Nous sommes capables de calculer la perte en dB des modulations par rapport à BPSK.

$$\text{Perte}(8\text{PSK}) = 10 \log_{10} \frac{.88}{2} = -3.5 \text{ dB}$$

$$\text{Perte}(16\text{PSK}) = 10 \log_{10} \frac{.3}{2} = -8.2 \text{ dB}$$

$$\text{Perte}(16\text{QAM}) = 10 \log_{10} \frac{12}{30} = -3.9 \text{ dB}$$

$$\text{Perte}(64\text{QAM}) = 10 \log_{10} \frac{18}{126} = -8.4 \text{ dB}$$

Donc, la pire performance (courbe la plus à droite) est 64QAM (avec  $-8.4$  dB de perte), suivi par 16PSK (avec  $-8.2$  dB de perte). Le 16QAM est 5 dB mieux que 16PSK, donc 5 dB à gauche de la courbe pour 16PSK. Le 8PSK est un peu mieux (à gauche) que le 16QAM. Il reste à classer BPSK, QPSK et DPSK. Nous savons que BPSK et QPSK sont très similaires mais que QPSK est un peu pire (facteur 2). Le DPSK a une performance  $\approx 1$  dB pire que BPSK (et donc aussi QPSK).

B. La probabilité d'erreur de MFSK est :

$$P_e = (M-1)Q\left(\sqrt{\frac{\log_2 M E_b}{N_0}}\right)$$

Nous considérons  $M=2$  et  $M=8$ .

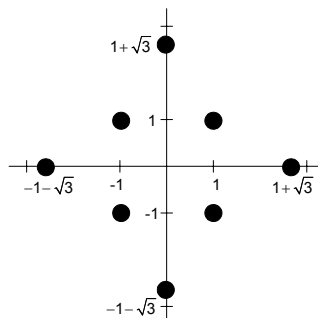
$$P_e(\text{BFSK}) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

$$P_e(8\text{FSK}) = 7Q\left(\sqrt{3 \frac{E_b}{N_0}}\right)$$

Le BFSK a une perte de 3dB par rapport à BPSK, donc une courbe 3dB à droite de la courbe pour BPSK. Le 8FSK a un **avantage** de  $10 \log_{10} 3/2 = 1.8$  dB par rapport à BPSK, donc il sera plus à gauche parmi toutes les courbes du graphique.

### Problème 3

A. Une configuration 8 QAM non-rectangulaire a la forme suivante dans l'espace I/Q.



Pour chercher les coordonnées dans l'espace de signal, nous utilisons la suivante :

$$(\tilde{a}_n^I, \tilde{a}_n^Q) = \sqrt{\frac{ME_s}{\sum_{i=1}^M [(a_n^I)^2 + (a_n^Q)^2]}} (a_n^I, a_n^Q)$$

Pour calculer la somme, nous utilisons les observations suivantes :

$(a_n^I, a_n^Q)$	# de points	distance <sup>2</sup> de l'origine	Sous-total
$(\pm 1, \pm 1)$	4	2	8
$(0, \pm 1 \pm 3)$ $(\pm 1 \pm 3, 0)$	4	$4 + 2\sqrt{3}$	$16 + 8\sqrt{3}$
$\sum_{i=1}^M [(a_n^I)^2 + (a_n^Q)^2]$			$24 + 8\sqrt{3} = 37.86$

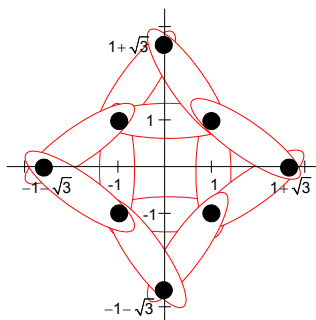
Donc les coordonnées sont :

$$(\tilde{a}_n^I, \tilde{a}_n^Q) = \sqrt{\frac{8E_s}{24 + 8\sqrt{3}}} (a_n^I, a_n^Q) = \sqrt{\frac{E_s}{3 + \sqrt{3}}} (a_n^I, a_n^Q) = \sqrt{\frac{E_s}{4.73}} (a_n^I, a_n^Q)$$

B. La distance minimale est  $D_{\min} = 2\sqrt{\frac{E_s}{3 + \sqrt{3}}}$  ou

$$d_{\min} = \frac{D_{\min}}{\sqrt{2E_b}} = 2\sqrt{\frac{\log_2 8 \cdot E_b}{3 + \sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2E_b}} = \sqrt{\frac{6}{3 + \sqrt{3}}} = \sqrt{1.27}$$

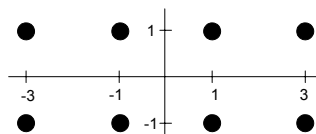
Pour trouver le nombre de paires de voisins à la distance minimale il faut réaliser que les points  $(0, 1+\sqrt{3})$  et  $(1, 1)$  sont à la même distance que entre  $(1, 1)$  et  $(1, -1)$ . Donc les  $K=12$  paires sont :



La probabilité d'erreur est donc approximée par :

$$8\text{QAM: } P_e \approx \frac{2 \cdot 12}{8} Q\left(\sqrt{\frac{6}{3+\sqrt{3}}} \frac{E_b}{N_0}\right) = 3Q\left(\sqrt{1.27} \frac{E_b}{N_0}\right)$$

C. Pour la constellation rectangulaire 8PSK, nous avons



Pour chercher les coordonnées dans l'espace de signal, nous calculons :

$(a_n^I, a_n^Q)$	# de points	distance <sup>2</sup> de l'origine	Sous-total
$(\pm 1, \pm 1)$	4	2	8
$(\pm 1, \pm 3)$	4	10	40
$\sum_{i=1}^M [(a_n^I)^2 + (a_n^Q)^2]$			48

Donc les coordonnées sont :

$$(\tilde{a}_n^I, \tilde{a}_n^Q) = \sqrt{\frac{8E_s}{48}} (a_n^I, a_n^Q) = \sqrt{\frac{E_s}{6}} (a_n^I, a_n^Q)$$

et la distance minimale est :

$$D_{\min} = 2\sqrt{E_s/6} \text{ ou } d_{\min} = \frac{D_{\min}}{\sqrt{2E_b}} = 2\sqrt{\frac{\log_2 8 \cdot E_b}{6} \cdot \frac{1}{2E_b}} = \sqrt{\frac{12}{12}} = 1$$

Asymptotiquement, il y a une perte de :

$$10\log_{10} \frac{1}{1.27} = -1 \text{ dB}$$

Donc la première constellation a une meilleure performance.

## Problème 4

- A. Quels sont les trois aspects les plus importants de l'évaluation d'un système de communication?
  - B. Quel est l'avantage de « offset QPSK »?
  - C. Pourquoi utiliserons-nous une impulsion RC?
  - D. En quoi le DPSK est-il supérieur au BPSK?
  - E. Quelle est l'origine de l'interférence intersymbole?
- A. Les trois aspects les plus importants sont :
    - i) largeur de bande
    - ii) probabilité d'erreur/efficacité en puissance
    - iii) complexité du récepteur
  - B. Les amplificateurs RF ont une réponse linéaire seulement quand l'amplitude à l'entrée ne varie pas beaucoup. Quand l'amplitude est proche de zéro, il y a de la distorsion importante à la sortie. Offset QPSK est utilisé pour s'assurer que l'entrée ne sera jamais proche de zéro.
  - C. L'impulsion RC fait un compromis entre la largeur de bande d'un signal et sa durée en temps. Avec une largeur de bande augmente par 30% dans le sens de la largeur minimale, le signal est très atténué après 4-6 intervalles du symbole. L'impulsion RC est une impulsion Nyquist donc pour un temps d'échantillonnage parfait, il n'y a pas d'interférence intersymbole.
  - D. DPSK est supérieur au BPSK dans l'item iii) soit la complexité du récepteur. Le BPSK avec détection cohérente prend une connaissance exacte de la phase du signal reçu. Le DPSK peut éviter le PLL pour suivre la phase, donc le récepteur est moins complexe.
  - E. L'interférence intersymbole arrive quand il y a des impulsions avec une durée plus longue qu'un symbole. Les symboles précédents vont contribuer aux signaux reçus pour un symbole plus tard. Des impulsions NRZ évitent l'ISI mais ils ont une largeur de bande inefficace. En utilisant une impulsion Nyquist, nous pouvons éviter l'ISI, au tant que le temps d'échantillonnage est parfait. L'ISI peut aussi arriver dans un canal sans fil avec plusieurs réflexions.

**Pour le cours GEL64486****Problème 5**

A.  $\theta_1(t) = s_1(t) = \cos \omega_0 t$

$$E_1 = \int_0^T \cos^2 \omega_0 t \, dt = \frac{1}{2} \int_0^T (\cos^2 \omega_0 t) \, dt$$

$$= \frac{T}{2} + \int_0^T \cos 2\omega_0 t \, dt = \frac{T}{2}$$

En négligeant le terme de double fréquence. La première étape du processus Gram-Schmidt donne

$$\phi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \omega_0 t$$

$$\phi_2(t) = s_2(t) - \langle s_2, \phi_1 \rangle \phi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \int_0^T \cos \omega_0 t \cos \left( \omega_0 t + \frac{\pi h t}{T} \right) dt$$

Nous allons utiliser :

$$2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$$

Pour continuer :

$$\begin{aligned} \langle s_2, \phi_1 \rangle &= \sqrt{\frac{2}{T}} \int_0^T \left[ \frac{1}{2} \cos \frac{\pi h t}{T} + \frac{1}{2} \cos \left( 2\omega_0 t + \frac{\pi h t}{T} \right) \right] dt \\ &= \sqrt{\frac{2}{T}} \frac{1}{2} \cdot \frac{T}{\pi h} \sin \frac{\pi h t}{T} \Big|_0^T \\ &= \sqrt{\frac{2}{T}} \frac{T}{2\pi h} (\sin \pi h - \sin 0) = \frac{\sin \pi h}{\pi h} \sqrt{\frac{T}{2}} \\ \phi_2(t) &= \cos \left( \omega_0 t + \frac{\pi h t}{T} \right) - \frac{\sin \pi h}{\pi h} \cos \omega_0 t \end{aligned}$$



Disons que  $s_0 = \sin \pi h / \pi h$ , Donc

$$\begin{aligned}
 E_2 &= \int_0^T \left[ \cos \left( \omega_0 t + \frac{\pi h t}{T} \right) - s_0 \cos \omega_0 t \right]^2 dt \\
 &= \int_0^T \left[ \cos \left( \omega_0 t + \frac{\pi h t}{T} \right) - 2s_0 \cos \omega_0 t \cos \left( \omega_0 t + \frac{\pi h t}{T} \right) + s_0^2 \cos^2 \omega_0 t \right] dt \\
 &= \int_0^T \frac{1}{2} \left[ 1 + \cos \left( 2\omega_0 t + \frac{\pi h t}{T} \right) \right] dt \\
 &\quad - s_0 \int_0^T \left[ \cos \left( 2\omega_0 t + \frac{\pi h t}{T} \right) + \cos \frac{\pi h t}{T} \right] dt + \frac{s_0^2}{2} \int_0^T \left[ 1 + \cos(2\omega_0 t) \right] dt
 \end{aligned}$$

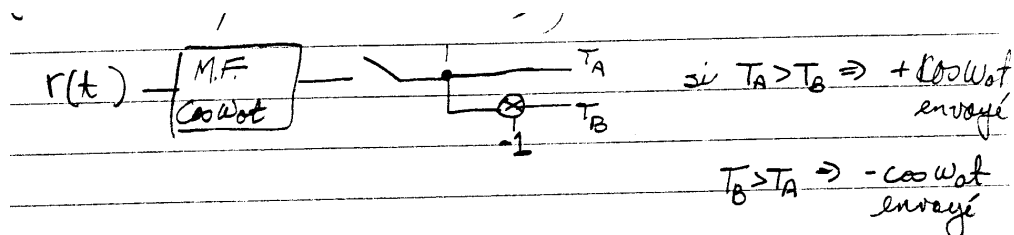
Après négligeant les termes de double fréquence, nous avons

$$\begin{aligned}
 E_2 &= \frac{1}{2} \int_0^T dt - s_0 \int_0^T \cos \frac{\pi h t}{T} dt + \frac{s_0^2}{2} \int_0^T dt \\
 &= \frac{T}{2} - s_0 \cdot \frac{T}{\pi h} \sin \frac{\pi h t}{T} \Big|_0^T + \frac{s_0^2 T}{2} \\
 &= \frac{T}{2} (1 + s_0^2) - s_0 t \sin \frac{\pi h t}{T} \Big|_0^T \\
 &= \frac{T}{2} + \frac{T}{2} s_0^2 - s_0^2 T = \frac{T}{2} - \frac{T}{2} s_0^2 = \frac{T}{2} (1 - s_0^2)
 \end{aligned}$$

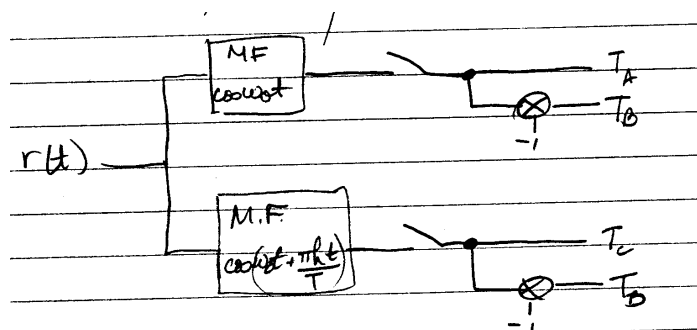
La base orthonormée est donc:

$$\begin{aligned}
 \phi_1(t) &= \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \omega_0 t \\
 \phi_2(t) &= \frac{\cos \left( \omega_0 t + \frac{\pi h t}{T} \right) - s_0 \cos \omega_0 t}{\sqrt{\frac{T}{2} (1 - s_0^2)}} \\
 &= \sqrt{\frac{2}{T (1 - s_0^2)}} \left[ \cos \left( \omega_0 t + \frac{\pi h t}{T} \right) - \cos \omega_0 t \right]
 \end{aligned}$$

- B. Quand nous avons un filtre adapté au signal  $\pm \cos \omega_0 t$ , nous allons chercher  $\pm 1$  quand le signal était  $\pm \cos \omega_0 t$  (et n'était pas  $\pm \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi h t}{T}\right)$ )



Donc, le récepteur total sera :



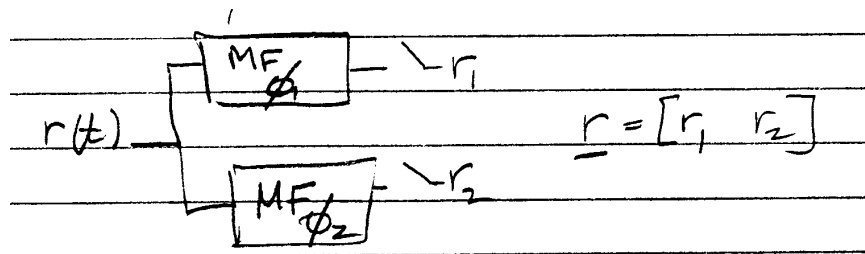
$T_A$  le plus grand  $\Rightarrow +\cos \omega_0 t$  envoyé

$T_B$  le plus grand  $\Rightarrow -\cos \omega_0 t$  envoyé

$T_C$  le plus grand  $\Rightarrow +\cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi h t}{T}\right)$  envoyé

$T_D$  le plus grand  $\Rightarrow -\cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi h t}{T}\right)$  envoyé

Les filtres adaptés aux signaux de base  $\phi_1$  et  $\phi_2$  vont chercher les coordonnées du signal reçu. Le récepteur va calculer les distances entre ce vecteur et ceux de  $\pm \underline{s}_1, \pm \underline{s}_2$



Décision : calculer  $\|\underline{r} - \underline{s}_1\|, \|\underline{r} - s_1\|, \|\underline{r} - \underline{s}_2\|, \|\underline{r} - s_2\|$  et choisir le signal le plus proche du signal reçu

$\|\underline{r} - \underline{s}_1\|$  le plus petit,  $+\cos \omega_0 t$  envoyé

$\|\underline{r} - s_1\|$  le plus petit,  $-\cos \omega_0 t$  envoyé

$\|\underline{r} - \underline{s}_2\|$  le plus petit,  $+\cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi h t}{T}\right)$  envoyé

$\|\underline{r} - s_2\|$  le plus petit,  $-\cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi h t}{T}\right)$  envoyé