MAT-1910 – Mathématiques de l'ingénieur II

Examen type III, Hiver 2019

Question 1

a) Trouver une représentation paramétrique de la section du cône

$$z = 16 - \sqrt{x^2 + y^2},$$

délimitée par les plans $z = 15, z = 0, x - y = 0, x = 0$ et située dans $y \geq 0$.

b) Trouver une représentation paramétrique de la normale à cette surface au point $(3, 4, 11)$.

Question 2

On considère la surface S d'équations paramétriques $\vec{r}(t, \theta) = (x(t, \theta), y(t, \theta), z(t, \theta))$ avec

$$\begin{cases} x(t, \theta) = \cos\theta - t\sin\theta & 0 \leq \theta \leq 2\pi, \\ y(t, \theta) = \sin\theta + t\cos\theta & -\infty < t < \infty, \\ z(t, \theta) = t. & \end{cases}$$

a) Représenter la surface S sous la forme $F(x, y, z) = 0$.
Suggestion: calculer $x^2 + y^2$.

b) Décrire en termes géométriques les deux familles de courbes paramétriques

$$\vec{r}(t_0, \theta) \quad \text{et} \quad \vec{r}(t, \theta_0)$$

obtenues en fixant les paramètres θ ou t à une constante.

c) Calculer l'équation cartésienne du plan tangent à la surface S au point $P = (1, 1, 1)$.

Question 3

Calculer le moment d'inertie du quart de cylindre

$$x^2 + z^2 = 1, \quad x \geq 0, \quad z \geq 0, \quad y \in [0,1],$$

par rapport à l'axe des z, si la masse surfacique σ est constante $\sigma = 5$.

Question 4

Soit S la portion du paraboloïde

$$z = x^2 + y^2, \quad z \leq 1.$$

Si r désigne la longueur du vecteur position $\vec{r} = (x, y, z)$ et si $\phi = r^2$, calculer le flux du champ

$$\vec{v} = \nabla \phi,$$

à travers S dans la direction de la normale dont la troisième composante est négative.

Question 5

Soit $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et $h > 0$. On considère la surface d'équation

$$\vec{r}(u,v) = (u \cos v, u \sin v, h - u \operatorname{cotan} \alpha), \;\; u \in [0, h \tan \alpha], \;\; v \in [0, 2\pi].$$

Soit $\vec{a} = (0,0,h)$ et $\vec{w} = \nabla \times (\vec{a} \times \vec{r})$.

Calculer le flux de $\vec{w}$ à travers la surface dans la direction de la normale dont la troisième composante est positive.

Question 6

On considère le solide K délimité par

- la portion P du paraboloïde $z = x^2 + y^2 - 4$ correspondant à $z \in [-4, 0]$;
- le disque D $z = 0, x^2 + y^2 \leq 4$.

Soit $\vec{W} = \nabla \times ((y\vec{i} + x\vec{j} + z\vec{k}) \times (z\vec{i} + y\vec{j} + x\vec{k}))$.
Sans faire aucune paramétrisation de surface, calculer les flux de $\vec{W}$

a) à travers P dans la direction intérieure à K;

b) à travers D dans la direction extérieure à K;

c) à travers la paroi de K, dans la direction extérieure.

Question 7

On désigne par Σ la portion de cône

$$z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}, \quad 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,$$

et par $\vec{n}$ la normale à Σ dont la troisième composante est négative. Calculer le flux de $\vec{v} = (0, x^2, yz)$ à travers Σ dans la direction de $\vec{n}$.

Question 8

On désigne par Σ la portion du paraboloïde

$$z = 1 - (x^2 + y^2),$$

pour laquelle $z \in [0, 1]$. Si $\vec{n}$ désigne la normale à Σ dont la troisième composante est positive, calculer le flux du rotationnel de

$$\vec{a} = (x, y + x, zx),$$

à travers Σ dans la direction $\vec{n}$.

Question 9

On désigne par $\vec{F}$ le champ de vecteurs

$$\vec{F}(x, y, z) = (2xy^2, \alpha x^2 y, 0)$$

dépendant du paramètre réel α.

a) Quelle doit être la valeur de α pour que ce champ soit potentiel? Pour cette valeur de α, déterminer un potentiel associé $f(x, y, z)$.

b) On désigne par C la courbe d'équation paramétrique

$$\vec{r}(t) = (1 + \cos t, \sin t, t), \quad 0 \leq t \leq \pi/2.$$

En choisissant la valeur de α selon (a), calculer le travail de $\vec{F}$ le long de la courbe C.

Question 10

Soit $\vec{v}$ le champ de vecteurs défini par

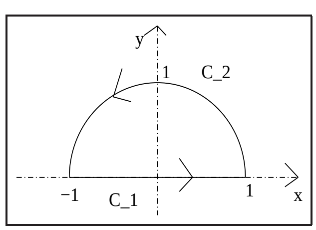
$$\vec{v} = (2x \sin z + ye^x,\ e^x,\ x^2 \cos z).$$

(a) Le champ $\vec{v}$ est-il conservatif? Si oui, déterminer un potentiel.

(b) Déterminer le travail de $\vec{v}$ le long de la courbe d'intersection du paraboloïde $y = x^2 + z^2$ avec le plan $y = 3$ joignant le point $A = (-\sqrt{3}, 3, 0)$ au point $B = (\sqrt{3}, 3, 0)$ et qui est située dans la région où $z \geq 0$.

Question 11

On considère le parcours fermé C composé du segment de droite C_1 allant du point $(-1, 0)$ au point $(1, 0)$, puis du demi-cercle C_2 orienté positivement (sens anti-horaire) d'équation $x^2 + y^2 = 1, \quad y \geq 0$.



Soit $\vec{F}$ le champ vectoriel

$$\vec{F}(x, y) = (2xy + x^2, 3x + \cos y).$$

a) Utiliser le théorème de Green pour évaluer le travail de $\vec{F}$ le long du chemin fermé C.

b) Calculer le travail de $\vec{F}$ uniquement sur le demi-cercle C_2 orienté positivement.

Question 12

a) Si C est un segment de droite qui relie le point $P_1 = (x_1, y_1)$ au point $P_2 = (x_2, y_2)$, montrer que

$$\int_C x\ dy - y\ dx = x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

b) Utiliser la formule précédente et le théorème de Green pour évaluer l'aire du quadrilatère de sommets $(1, -2)$, $(4, 1)$, $(-1, 2)$ et $(-2, -1)$.