2017 Mini-test 2

jeudi le 23 novembre 2017; durée: 08h30 à 09h20; aucune documentation permise; 7.5% de note finale

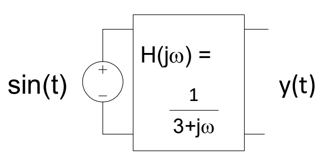
---

Problème 1 (24 points sur 100)

A. Est-ce que ces systèmes sont linéaires et invariants en temps?

$y(t)=\dfrac{dx(t)}{dt}$	OUI	
$y(t)=\int_{t-5}^{t+5} x(z)\,dz$	OUI	
$y(t)=x(t-1)\cdot x(t+1)$		NON

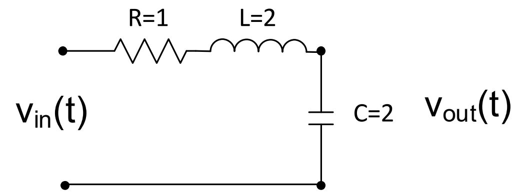
B. Indiquez si les réponses sont vraies ou fausses.

$\mathrm{Rect}(t-3)*\mathrm{Rect}(t-6)=\mathrm{Rect}(t)*\mathrm{Rect}(t-9)$	VRAI	
$f(t)\cdot g(t)\Leftrightarrow \dfrac{1}{2\pi}F(\omega)*G(\omega)$	VRAI	
 $\Rightarrow\ y(t)=\dfrac{1}{10}\sin\left(t-\tan^{-1}\dfrac{1}{3}\right)$		FAUX

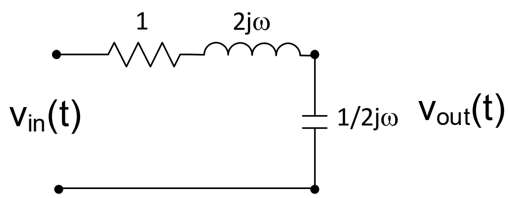
2017 Mini-test 2

Problème 2 (10 points sur 100)

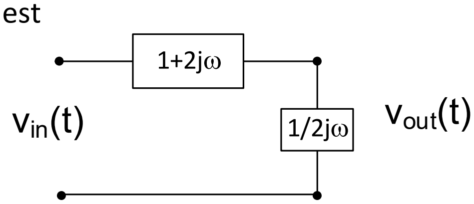
Trouvez la réponse en fréquence pour le circuit suivant



On utilise les impedances complexes pour ecrire le circuit comme



Le diviseur de tension équivalent est



La réponse en fréquence est

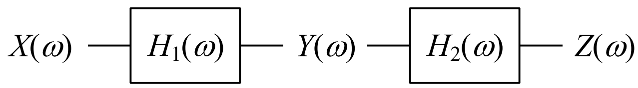
$$H(\omega) = \frac{Z_2(\omega)}{Z_1(\omega)+Z_2(\omega)} = \frac{1/2j\omega}{2j\omega+1+1/2j\omega} = \frac{1}{4(j\omega)^2+2j\omega+1}$$

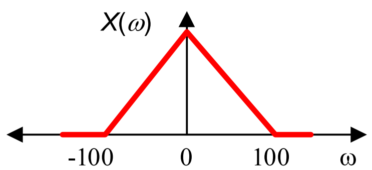
$$= \frac{1}{4}\frac{1}{(j\omega)^2+\frac{1}{2}j\omega+\frac{1}{4}}$$

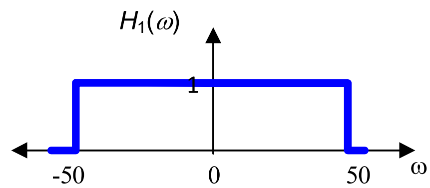
2017 Mini-test 2

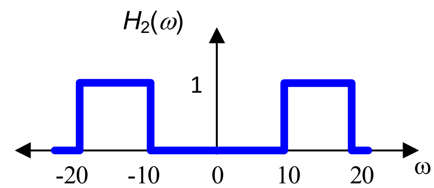
Problème 3 (16 points sur 100)

Trouvez les spectres $Y(\omega)$ et $Z(\omega)$ pour le système suivant quand l'entrée a un spectre de $X(\omega) = \mathrm{Tri}(\omega/100)$ et les réponses des filtres sont comme indiqué.



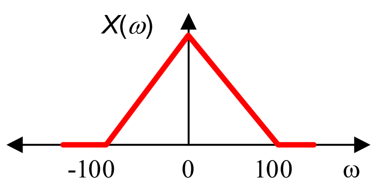


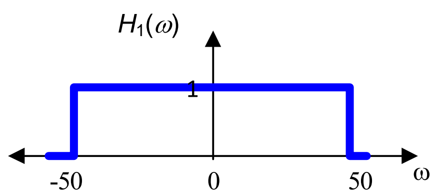


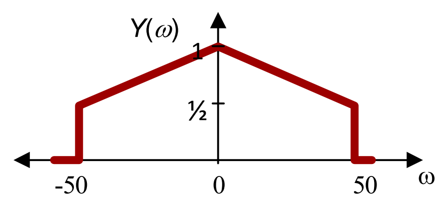


$$X(\omega) = \mathrm{Tri}\left(\frac{\omega}{100}\right) \qquad H_1(\omega) = \mathrm{Rect}\left(\frac{\omega}{100}\right) \qquad H_2(\omega) = \mathrm{Rect}\left(\frac{\omega-15}{10}\right) + \mathrm{Rect}\left(\frac{\omega+15}{10}\right)$$

Un filtrage est une multiplication des spectres, $Y(\omega) = X(\omega) \cdot H_1(\omega)$. Graphiquement nous avons



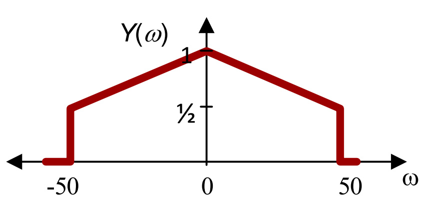


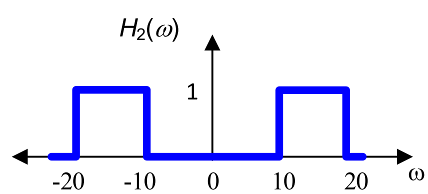


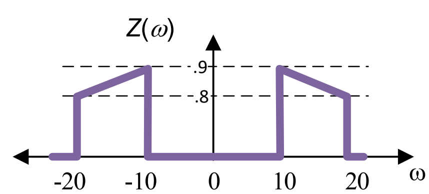
En équation, on dirait

$$Y(\omega) = \begin{cases} 1+\omega/100 & -50 < \omega < 0 \\ 1-\omega/100 & 0 < \omega < 50 \\ 0 & \mathit{ailleurs} \end{cases}$$

Un filtrage est une multiplication des spectres, $Z(\omega) = Y(\omega) \cdot H_2(\omega) = X(\omega) \cdot H_1(\omega) \cdot H_2(\omega)$







En équation, on dirait

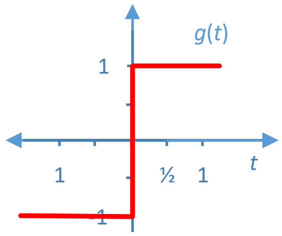
$$z(\omega) = \begin{cases} 1+\omega/100 & -20 < \omega < -10 \\ 1-\omega/100 & 10 < \omega < 20 \\ 0 & \mathit{ailleurs} \end{cases}$$

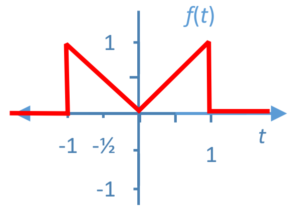
2017 Mini-test 2

Problème 4 (50 points sur 100)

Trouvez la convolution de $f * g$ avec la méthodologie indiquée.

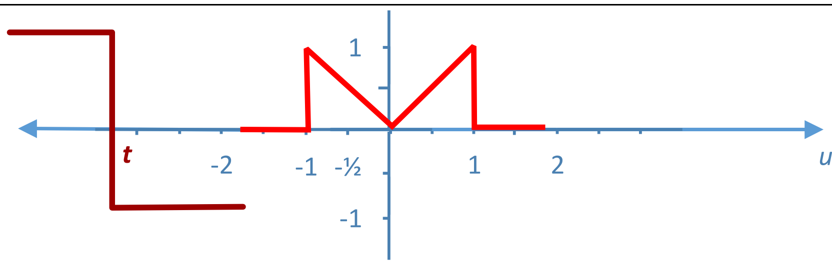
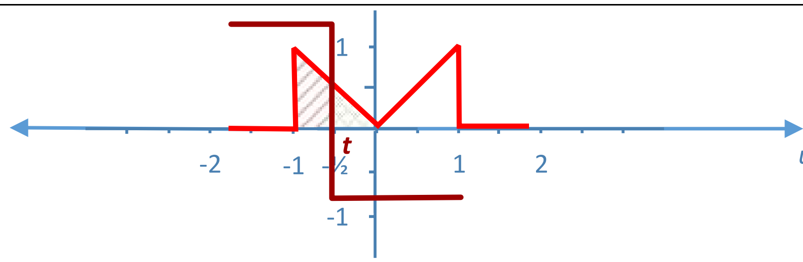
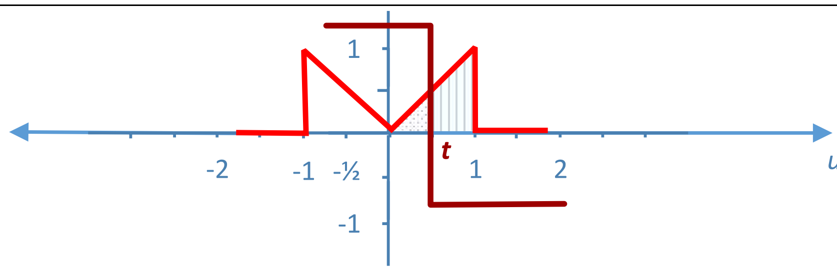
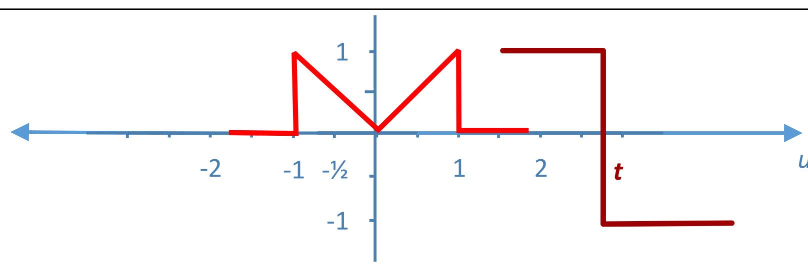
$$g(t) = \text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$$





$$f(t) = \begin{cases} t & 0 < t < 1 \\ -t & -1 < t < 0 \end{cases}$$

a. (20 points) Pour **<u>chaque région</u>** de définition de la convolution donnez une esquisse de $f(u)$ et $g(t-u)$ et l'intervalle de t, i.e. $a < t < b$

Region1		Intervalle t<-1
Region2		Intervalle -1<t<0
Region3 (s'il existe)		Intervalle 0<t<1
Region4 (s'il existe)		Intervalle 1<t
n5 (s'il existe)	n'existe pas	intervalle

2017 Mini-test 2

b. (16 points) Donnez **les intégrales** à évaluer pour **chaque région** de définition de la convolution; spécifiez clairement les **bornes d'intégration** pour chaque région.

c. (14 points) Évaluez les intégrales et donnez une équation du produit de convolution.

	intervalle	intégrale à évaluer	évaluation de l'intégrale
Region1	t<-1	$\int_{-1}^{0}[-1\cdot -u]du+\int_{0}^{1}[-1\cdot u]du$	-1
Region2	-1<t<0	$\int_{-1}^{t}[+1\cdot -u]du+\int_{t}^{0}[-1\cdot -u]du+\int_{0}^{1}[-1\cdot u]du$	t^2
Region3 (s'il existe)	0<t<1	$\int_{-1}^{0}[+1\cdot -u]du+\int_{0}^{t}[+1\cdot u]du+\int_{t}^{1}[-1\cdot u]du$	$-t^2$
Region4 (s'il existe)	1<t	$\int_{-1}^{0}[+1\cdot -u]du+\int_{0}^{1}[+1\cdot u]du$	1
Region5 (s'il existe)		n'existe pas	

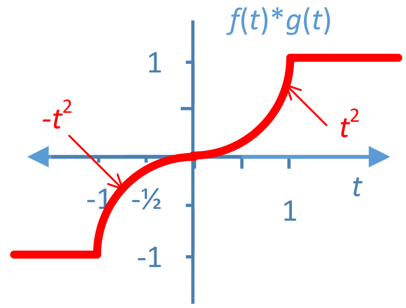
Espace pour calculer les intégrales.

intervalle	évaluation de l'intégrale
t<-1	$\int_{-1}^{0}[-1\cdot -u]du+\int_{0}^{1}[-1\cdot u]du=\left.\frac{u^2}{2}\right\vert_{-1}^{0}-\left.\frac{u^2}{2}\right\vert_{0}^{1}=0-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+0=-1$ Nous pouvons aussi simplement observer que l'aire sur la courbe de f(t) est un, qui est multiplié par moins un.
-1<t<0	$\int_{-1}^{t}[+1\cdot -u]du+\int_{t}^{0}[-1\cdot -u]du+\int_{0}^{1}[-1\cdot u]du=-\left.\frac{u^2}{2}\right\vert_{-1}^{t}+\left.\frac{u^2}{2}\right\vert_{t}^{0}-\left.\frac{u^2}{2}\right\vert_{0}^{1}$ $=-\frac{t^2}{2}+\frac{1}{2}+0-\frac{t^2}{2}-\frac{1}{2}=-t^2$

2017 Mini-test 2

Produit de convolution (résultat final):

$$f(t)*g(t)=\begin{cases}-1 & t<-1\\ -t^2 & -1<t<0\\ t^2 & 0<t<1\\ 1 & 1<t\end{cases}$$



Espace pour calculer les intégrales.

0<t<1	$\int_{-1}^{0}[+1\cdot -u]\,du+\int_{0}^{t}[+1\cdot u]\,du+\int_{t}^{1}[-1\cdot u]\,du=-\frac{u^2}{2}\Big\vert_{-1}^{0}+\frac{u^2}{2}\Big\vert_{0}^{t}-\frac{u^2}{2}\Big\vert_{t}^{1}$ $=-0+\frac{1}{2}+\frac{t^2}{2}-0-\frac{1}{2}+\frac{t^2}{2}=t^2$
1<t	$\int_{-1}^{0}[+1\cdot -u]\,du+\int_{0}^{1}[+1\cdot u]\,du=-\frac{u^2}{2}\Big\vert_{-1}^{0}+\frac{u^2}{2}\Big\vert_{0}^{1}=-0+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-0=1$