GEL19962 : Analyse des signaux

Mini-test 2 A2004 : Solutions

Département de génie électrique et de génie informatique

Problème 1 (1 pts)

a)

On demande à calculer la fonction de transfert $H(\omega)$. Pour ce, nous utilisons l'approche des impédances complexes.
Nous avons un diviseur de tension, donc :

$$\begin{aligned}\frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = H(\omega) &= \frac{{}^{1}\!/_{j\omega C}}{R + j\omega L + {}^{1}\!/_{j\omega C}} \\ &= \frac{1}{1 + j\omega C(R + j\omega L)} = \frac{1}{1 - \omega^2 LC + j\omega RC}\end{aligned}$$

b)

On demande de calculer le module et la phase de la fonction de transfert.
Le module est donnée par :

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2}}$$

L'argument ou la phase de la fonction de transfert quant à elle est donnée par :

$$Arg(H(\omega)) = 0 - \arctan\left(\frac{\omega RC}{1 - \omega^2 LC}\right) = -\arctan\left(\frac{\omega RC}{1 - \omega^2 LC}\right).$$

Problème 2 (1 pt)

a)

La transformée de Fourier d'un produit de deux fonctions étant le produit de convolution des deux transformées de Fourier, donc l'énoncé est **VRAI**.

b)

La fonction $Rect(t)$ étant non nulle pour les t négatifs, le filtre $h(t) = rect(t)$ ne peut être causal.
Donc l'énoncé est **FAUX**.

c)

D'après la propriété de déplacement dans le temps du produit de convolution, on a :

$$f(t) * \delta(t-a) = f(t-a) * \delta(t)$$

or $\delta(t)$ est l'élément neutre du produit de convolution, donc

$$f(t-a) * \delta(t) = f(t-a)$$

L'énoncé est donc **VRAI**.

d)

Pour un système linéaire invariant dans le temps (LIT), la sortie est reliée à l'entrée par relation suivante :

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$$

où $H(\omega)$ est la fonction de transfert.
Si pour un certain ω_0, $X(\omega_0) = 0$ alors $Y(\omega_0) = H(\omega_0)X(\omega_0) = 0$.
L'énoncé est donc **VRAI**.

Problème 3 (3 pts)

a)

Le graphique de $f(t)$ est le suivant :

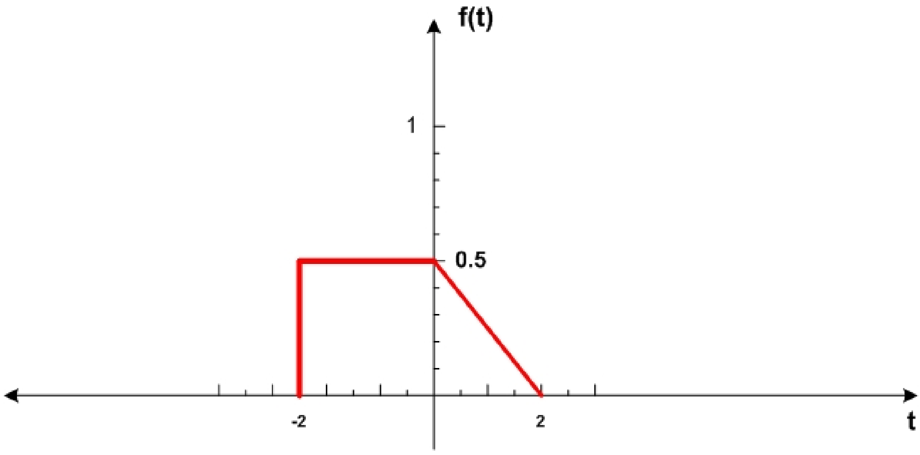

Fig. 1 – Fonction f(t).

On demande à convoluer cette fonction avec la fonction $Rect(t/2)$ illustrée ci-dessous

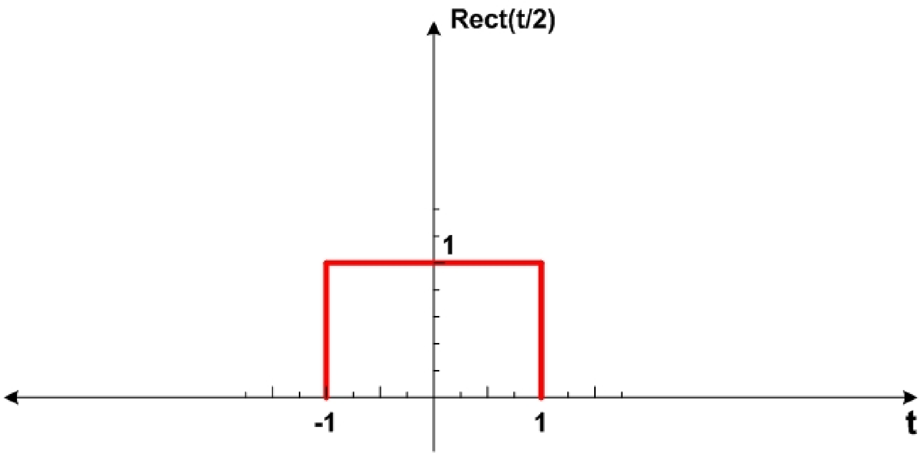

Fig. 2 – Fonction Rect(t/2).

On peut voir graphiquement que, pour le produit $f(u)g(t-u)$, 5 zones se dessinent en fonction de t.

Zone1 : t<-3

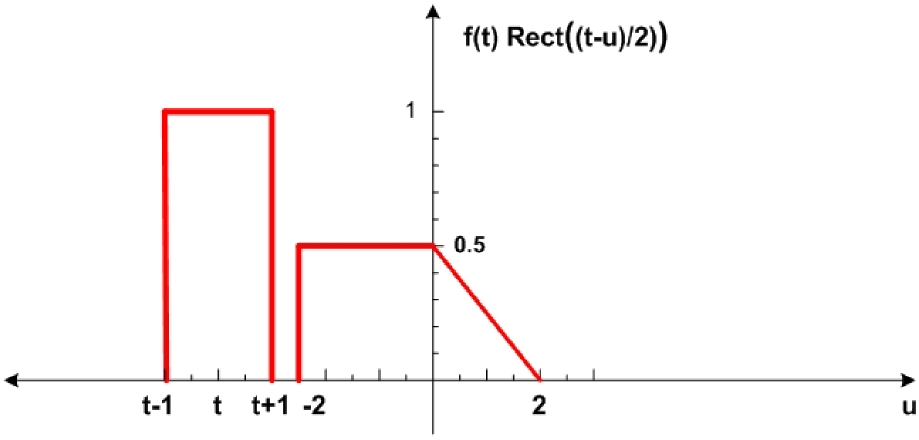

FIG. 3 – f(u)g(t-u)

Tant que l'amont du rectangle ne touche pas la fonction $f(t)$, c'est à dire tant que $t+1 < -2$, le produit $f(u)Rect(\frac{t-u}{2}) = 0$ et l'intégrale est nulle.

$f(t) * rect(t/2) = 0$

Zone2 : $-3 \leq t < -1$

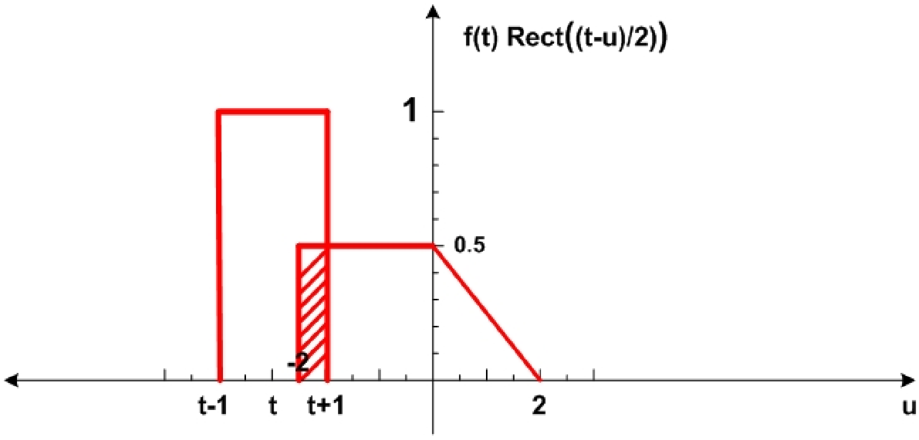

FIG. 4 – f(u)g(t-u)

Il y a seulement une partie du rectangle qui touche la fonction $f(t)$. La valeur de l'intégrale est donnée par la l'aire du rectangle hachuré.

$f(t) * rect(t/2) = \frac{1}{2}(t + 1 + 2) = \frac{t}{2} + \frac{3}{2}$.

Zone3 : $-1 \le t < 1$

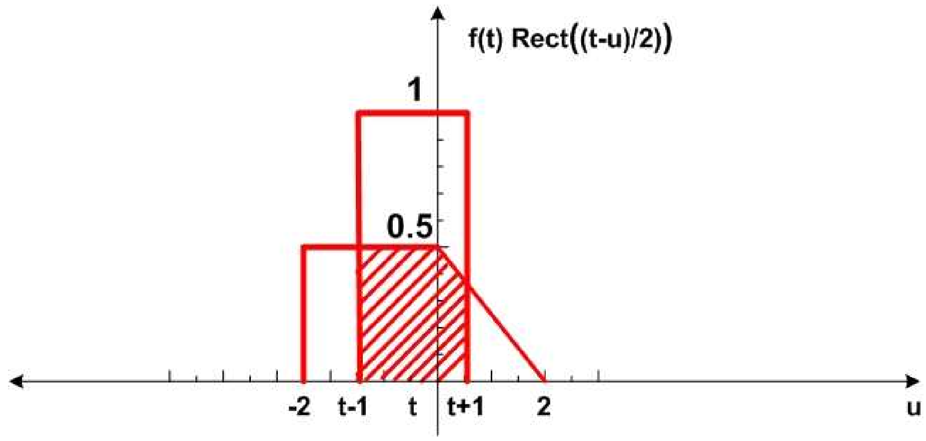

FIG. 5 – f(u)g(t-u)

La fonction *Rect* se situe d'une part et de l'autre par rapport au 0. La valeur de l'intégrale est la somme de l'intersection de *Rect* avec la partie rectangulaire de $f(u)$ et l'intercsection de la fonction *Rect* avec la partie triangulaire de $f(u)$
La valeur de la pente dans la partie triangulaire de $f(u)$ est égale à : $\frac{1}{2} - \frac{u}{4}$

$$\begin{aligned}
f(t) * rect\left(\frac{t}{2}\right) &= \frac{1}{2}(1-t) + \int_{0}^{t+1} \left(\frac{1}{2} - \frac{u}{4}\right) du \\
&= \frac{1}{2} - \frac{t}{2} + \left[\frac{u}{2} - \frac{u^2}{8}\right]_0^{t+1} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{t}{2} + \frac{t}{2} + \frac{1}{2} - \frac{(t+1)^2}{8} \\
&= 1 - \frac{t^2}{8} - \frac{2t}{8} - \frac{1}{8} \\
&= -\frac{t^2}{8} - \frac{t}{4} + \frac{7}{8}
\end{aligned}$$

$f(t) * rect(t/2) = -\frac{t^2}{8} - \frac{t}{4} + \frac{7}{8}$.

Zone4 : $1 \leq t < 3$

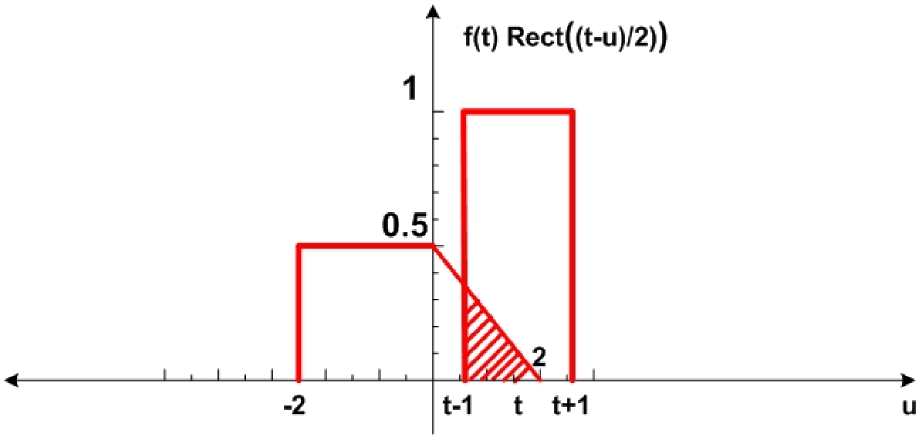

FIG. 6 – f(u)g(t-u)

La totalité du rectangle est passée à droite du zéro. La fonction *Rect* touche une fraction de la partie triangulaire de f(t). La valeur de l'integrale est donnée par l'aire du petit triangle résultant.

$$\begin{aligned}
f(t) * rect\left(\frac{t}{2}\right) &= \int_{t-1}^{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{u}{4}\right) du = \left[\frac{u}{2} - \frac{u^2}{8}\right]_{t-1}^{2} \\
&= 1 - \frac{1}{2} - \frac{t-1}{2} + \frac{(t-1)^2}{8} \\
&= \frac{t^2}{8} - \frac{6t}{8} + \frac{9}{8}
\end{aligned}$$

$f(t) * rect(t/2) = \frac{t^2}{8} - \frac{6t}{8} + \frac{9}{8}$.

Zone5 : $3 \leq t$

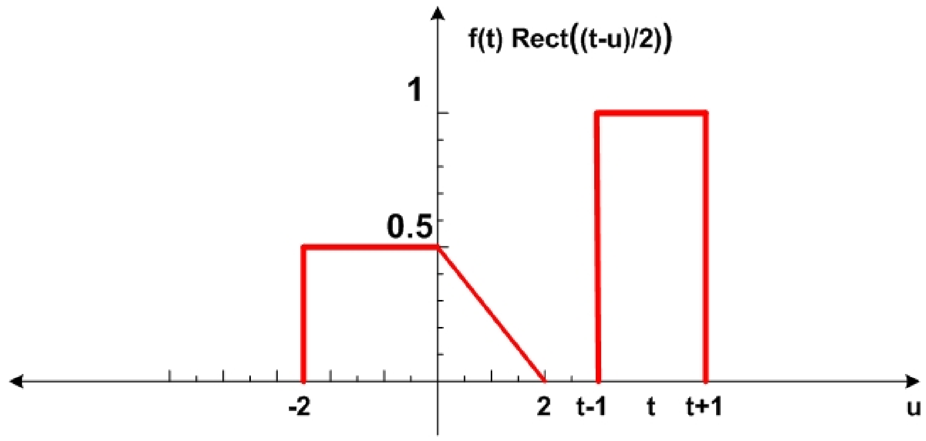

FIG. 7 – f(u)g(t-u)

Le rectangle dépasse f(t) et il n'y a plus d'intersection.

$f(t) * rect(t/2) = 0.$

L'expression finale du produit de convolution de $f(t)$ et de $Rect(t/2)$ est illustrée dans la figure suivante :

$$f(t) * Rect(t/2) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < -3 \\ \frac{t}{2} + \frac{3}{2} & \text{si } -3 \leq t < -1 \\ -\frac{t^2}{8} - \frac{t}{4} + \frac{7}{8} & \text{si } -1 \leq t < 1 \\ \frac{t^2}{8} - \frac{3t}{4} + \frac{9}{8} & \text{si } 1 \leq t < 3 \\ 0 & \text{si } 3 \leq t \end{cases}$$

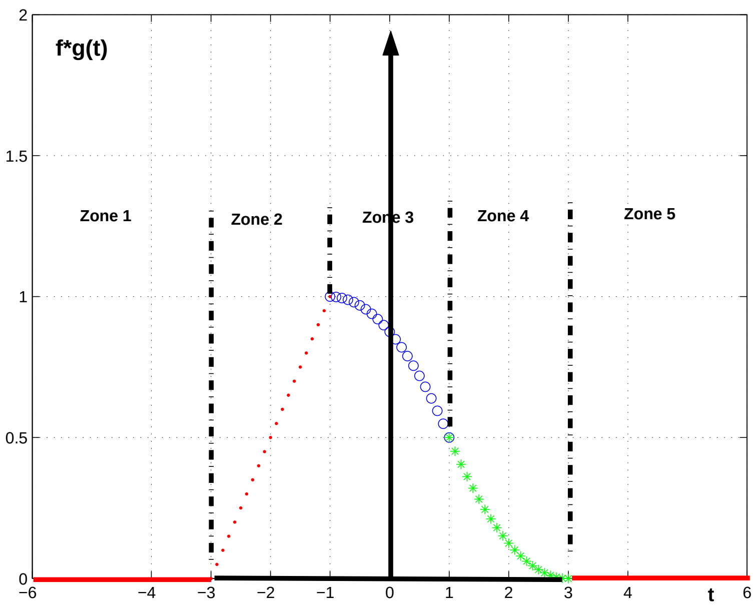

FIG. 8 – f(t)* g(t)