Corrigé Mini 2 H2012

Question 1.

a)

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2x-4 & 2y-4 \end{pmatrix}$$

$J(x,y)$ est inversible si et seulement si $\det J(x,y) \neq 0$,

$$\det J(x,y) = 2x(2y-4) - 2y(2x-4)$$

Cherchons les points annulant le déterminant :

$$2x(2y-4) - 2y(2x-4) = 0$$

$$x(y-2) - y(x-2) = 0$$

$$xy - 2x - xy + 2y = 0$$

$$x - y = 0$$

Donc les seuls points ou le déterminant s'annule seront les points où $x = y$ et la matrice sera inversible si et seulement si $x \neq y$.

b) Partant de $x^0 = (2,0)$, on fait un pas de Newton

$$J(2,0) = \begin{pmatrix} 2(2) & 2(0) \\ 2(2)-4 & 2(0)-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$F(2,0) = \begin{pmatrix} (2)^2 + (0)^2 - 4 \\ (2)^2 - 4(2) + (0)^2 - 4(0) + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La correction δ est la solution de

$$J(2,0)\delta = -F(2,0) \qquad \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta_0 \\ \delta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\delta_0 = 0, \delta_1 = 0.25$$

Et

$$x^1 = x^0 + \delta = (2,0) + (0,0.25) = (2,0.25)$$

c)

$$J(2,0.25) = \begin{pmatrix} 2(2) & 2(0.25) \\ 2(2)-4 & 2(0.25)-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0.5 \\ 0 & -3.5 \end{pmatrix}$$

$$F(2,0.25) = \begin{pmatrix} (2)^2 + (0.25)^2 - 4 \\ (2)^2 - 4(2) + (0.25)^2 - 4(0.25) + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0625 \\ 0.0625 \end{pmatrix}$$

Et on a le système

$$\begin{pmatrix} 4 & 0.5 \\ 0 & -3.5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta_0 \\ \delta_1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0.0625 \\ 0.0625 \end{pmatrix}$$

d) On aura convergence linéaire si la matrice jacobienne n'est pas inversible au point recherché. Il s'agit d'un résultat analogue à la dimension 1 où on perd un ordre de convergence si la dérivée s'annule à la racine.

Question 2.

$$y'(t) = ty(t)$$
$$y(0) = 2$$

a) Si $y(t) = 2e^{\frac{t^2}{2}}$ alors en dérivant on a

$$y'(t) = 2e^{\frac{t^2}{2}}t = ty(t)$$

Et $y(t)$ satisfait l'équation, mais il faut aussi satisfaire la condition initiale, or

$$y(0) = 2e^0 = 2$$

Et on a bien la solution du problème.

b) Euler avec $h = 0.1$

$$y(0.1) \approx y_1 = y_0 + hf(t_0, y_0) = y_0 + ht_0y_0 = 2 + 0.1(0)(2) = 2$$

c) Point milieu avec $h = 0.1$

$$k_1 = hf(t_0, y_0) = 0.1(0)(2) = 0$$

$$y(0.1) \approx y_1 = y_0 + hf\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right) = y_0 + h\left(t_0 + \frac{h}{2}\right)\left(y_0 + \frac{k_1}{2}\right) = 2 + 0.1(0.05)(2) = 2.01$$

d) Pour $t = 0.1$, utilisant la calculatrice on sait que $y(0.1) \; = \; 2.010025042$

Alors le résultat en c) admet une erreur $e_{0.1} = |y_1 - y(0.1)| \approx 2.50417 \times 10^{-5}$

On sait que la méthode est d'ordre 2 alors pour h on aura le rapport d'erreur

$$\frac{e_{0.1}}{e_h} \approx \left(\frac{0.1}{h}\right)^2 \Leftrightarrow e_h \approx \left(\frac{h}{0,1}\right)^2 e_{0.1}$$

En prenant h satisfaisant

$$e_h \approx \left(\frac{h}{0,1}\right)^2 e_{0.1} \leq 5 \times 10^{-8} \Leftrightarrow h^2 \leq \frac{5 \times 10^{-8}(0.1)^2}{e_{0.1}} \Leftrightarrow h \leq 0.01413 \ldots$$

on peut supposer que l'on a un pas de temps garantissant la précision voulue.