Exercice 1 : [0 points]

Soit

$$f(x) = \cos(x) + \sin(x)$$

1) Déterminer le polynôme de Taylor de degré 2 en $x_0 = 0$.

Solution:

On cherche le polynôme de Taylor de degré 2 en 0. On doit donc dériver deux fois la fonction f :

$$f'(x) = -\sin(x) + \cos(x)$$

$$f^{(2)}(x) = -\cos(x) - \sin(x).$$

On a $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$ et $f^{(2)}(0) = -1$. D'où le polynôme de Taylor :

$$P_2(h) = 1 + h - \frac{h^2}{2}$$

2) Majorer le terme d'erreur en fonction de $h = x - x_0$, pour $-\pi \leq h \leq \pi$.

Solution:

Pour majorer le terme d'erreur il faut tout d'abord le calculer. Pour cela on a besoin de la dérivée troisième (voir l'aide mémoire pour la formule) :

$$f^{(3)}(x) = \sin(x) - \cos(x).$$

On sait qu'il existe ξ compris entre 0 et h tel que :

$$R_2(h) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!} h^3.$$

On veut majorer pour h compris entre $-\pi$ et π ce qui signifie que ξ peut être compris entre $-\pi$ et π.

On sait que $|\cos(x)| \leq 1$ et $|\sin(x)| \leq 1$. En appliquant l'inégalité triangulaire on obtient :

$$|-\cos(x) + \sin(x)| \leq |\cos(x)| + |\sin(x)| \leq 2$$

et :

$$|R_2(h)| \leq \frac{h^3}{3}. \tag{1}$$

On notera qu'on aurait pu être plus précis puisque $\sin(x) - \cos(x) = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. Ce qui nous donne :

$$|-\cos(x) + \sin(x)| \leq \sqrt{2}.$$

et donc une majoration plus précise du terme d'erreur :

$$|R_2(h)| \leq \sqrt{2}\frac{h^3}{6}.$$

Notez cependant que cette majoration utilise la valeur $\sqrt{2}$ que l'on demande d'approcher dans la question suivante. Il n'est pas très logique de s'en servir.

3) Utiliser le polynôme de Taylor pour obtenir une approximation de $\sqrt{2}$ et déterminer le nombre de ses chiffres significatifs.

Solution:
On veut une approximation de $\sqrt{2}$. Il faut donc trouver tout d'abord le point x tel que $f(x) = \sqrt{2}$. Pour $x = \frac{\pi}{4}$ on a bien :

$$\cos(\frac{\pi}{4}) + \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

On a fait un développement en 0 de f. Pour approcher $\sqrt{2}$ il faut donc prendre $h = \frac{\pi}{4}$ dans notre polynôme. On trouve :

$$P_2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.476973.$$

Puis on utilise (1) :

$$|R_2(h)| \leq 0.16149102 \leq 0.5 \times 10^0.$$

On a donc un chiffre significatif qui est 1.

Exercice 2 : [0 points]

1) Si vous deviez calculer la somme suivante avec un petit programme (une boucle) sur ordinateur, par quelle bout commenceriez vous la somme ? Le début ou la fin ? Expliquer brièvement pourquoi (il n'y a rien à calculer).

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{3^{99}} + \frac{1}{3^{100}}$$

Solution:
Deux étapes sont à considérer dans le calcul. La première serait de calculer les puissances de $\frac{1}{3}$ à part, en partant de $\frac{1}{3}$ jusqu'à $\frac{1}{3^{100}}$ (dans ce sens). On a 100 opérations à faire. Pour éviter les erreurs numériques on somme en partant du plus petit $\frac{1}{3^{100}}$. On évite ainsi les additions entre des nombres trop éloignés qui sont des opérations dangereuses (perte de précision).

2) Donner une autre forme du polynôme suivant permettant de minimiser le nombre d'opérations élémentaires à effectuer pour son évaluation :

$$1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5$$

Solution:
Il faut utiliser la factorisation de Hörner :

$$1 + x(1 + x(2 + x(3 + x(4 + 5x)))).$$

3) Soit
$$Q(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$
pour $h > 0$. On sait que plus h est proche de 0, plus $Q(h)$ est proche de $f'(x_0)$. $Q(h)$ donne donc une approximation de $f'(x_0)$. Pourtant, sur ordinateur, on évite de calculer $Q(h)$ pour des valeurs trop petites de h. Expliquer brièvement pourquoi.

> **Solution:**
> Si h est trop petit, $f(x_0 + h)$ et $f(x_0)$ seront très proches. Or soustraire deux nombres très proches est une opération dangereuse qui amène une perte de précision (le nombre de chiffres signicatifs diminue). On évite donc de faire cette opération pour des h trop petit.

Exercice 3 : [0 points]

Soit $\lambda > 0$ et $0 < \theta < 1$. Soit p_n une suite de nombres définie par la relation de récurrence :
$$p_{n+1} = p_n + \lambda p_n(p_n - \theta)(1 - p_n).$$

1) Déterminer la fonction g telle que $p_{n+1} = g(p_n)$.

> **Solution:**
> La fonction g est définie par $g(x) = x + \lambda x(x - \theta)(1 - x)$

2) Déterminer les points fixes de g.

> **Solution:**
> Il faut résoudre l'équation $g(x) = x$:
> $$g(x) - x = \lambda(x - \theta)(1 - x)x$$
> Donc les points fixes sont 0, 1 et θ.

3) Caractériser l'attractivité de chacun des points fixes en fonction de λ et θ.

> **Solution:**
> On dérive g. On a $g'(x) = 1 + \lambda(x - \theta)(1 - x) + \lambda x(1 - x) - \lambda x(x - \theta)$.
> En 0 :
> $$g'(0) = 1 - \lambda\theta$$
> Le point fixe 0 est attractif pour $-1 < 1 - \lambda\theta < 1$, c'est-à-dire $0 < \lambda\theta < 2$.
> En 1 :
> $$g'(1) = 1 - \lambda(1 - \theta)$$
> Le point fixe 1 est attractif pour $-1 < 1 - \lambda(1 - \theta) < 1$ ou de façon équivalente $2 > \lambda(1 - \theta) > 0$.
> En θ :
> $$g'(\theta) = 1 + \lambda\theta(1 - \theta)$$

Le point fixe θ est attractif pour $-2 < \lambda\theta(1-\theta) < 0$.

4) Parmis les points fixes de g, il en existe un qui est toujours répulsif lequel ?

Solution:
Comme $\lambda > 0$ et $0 < \theta < 1$, la condition $-2 < \lambda\theta(1-\theta) < 0$ n'est jamais vérifiée : θ est un point fixe répulsif.

5) Donner λ et θ tel que les deux autres points fixes sont attractifs.

Solution:
Il faut que :

$$2 > \lambda\theta > 0$$

et

$$2 > \lambda(1-\theta) > 0$$

On prend par exemple $\lambda = 2$ et $\theta = 0.5$.

6) Caractériser les points fixes pour $\lambda = 3$ et $\theta = \frac{1}{3}$ (attractif, répulsif, indéterminé) et donner l'ordre de convergence quand il y a lieu.

Solution:
$g'(0) = 0$, donc le point fixe est attractif et l'ordre de convergence est au moins quadratique. Pour être sûr d'avoir un ordre quadratique on dérive g' :

$$g^{(2)}(x) = 2\lambda\left(1 - 3x + \theta\right)$$

et $g^{(2)}(0) = 2\lambda\left(1+\theta\right) \neq 0$. Donc l'ordre est bien égal à 2
$g'(1) = -1$, donc le point fixe est indéterminé.
$g'(\theta) = \frac{5}{3}$, donc le point fixe est divergent.

7) L'algorithme du point fixe génère les tableaux suivants pour des coefficients λ et θ particuliers :

p_n	$\lvert e_n\rvert$	$\lvert e_{n+1}/e_n\rvert$	$\lvert e_{n+1}/(e_n)^2\rvert$
3.0000E-01	2.1000E-02	1.5614E+00	7.4351E+01
2.7900E-01	3.2789E-02	1.4794E+00	4.5118E+01
2.4621E-01	4.8507E-02	1.3305E+00	2.7429E+01
1.9770E-01	6.4539E-02	1.0740E+00	1.6641E+01
1.3316E-01	6.9317E-02	6.9711E-01	1.0057E+01
6.3847E-02	4.8322E-02	3.0156E-01	6.2407E+00
1.5525E-02	1.4572E-02	6.5141E-02	4.4703E+00
9.5286E-04	9.4923E-04	3.8232E-03	4.0277E+00
3.6292E-06	3.6291E-06	1.4517E-05	4.0001E+00
5.2683E-11	5.2683E-11	2.1073E-10	4.0000E+00

Vers quel point fixe l'algorithme converge-t-il ? Quelle est sa vitesse de convergence ?

Solution:
On converge vers 0 (la première colonne donne la valeur vers laquelle on converge, la seconde montre que l'on converge effectivement) quadratiquement. En effet, le rapport $|e_{n+1}/e_n|$ converge vers 0 (troisième colonne), l'ordre est donc supérieur à 1. Le rapport $|e_{n+1}/e_n^2|$ converge vers $4 \neq 0$, l'ordre est donc 2 (quadratique).

8) Pour des valeurs de θ et λ fixées on applique l'algorithme du point fixe pour plusieurs valeurs initiales p_0. On compile les résultats dans le tableau suivant :

p_n	e_{n+1}/e_n	p_n	e_{n+1}/e_n	p_n	e_{n+1}/e_n	p_n	e_{n+1}/e_n
5.001E-01	-1.750E+00	8.000E-01	-5.082E-01	4.999E-01	-1.750E+00	2.000E-01	-5.082E-01
5.002E-01	-1.750E+00	9.440E-01	-4.955E-01	4.998E-01	-1.750E+00	1.954E-03	-4.955E-01
5.003E-01	-1.750E+00	1.001E+00	-5.021E-01	4.997E-01	-1.750E+00	-9.596E-04	-5.021E-01
5.005E-01	-1.750E+00	9.995E-01	-4.989E-01	4.995E-01	-1.750E+00	4.840E-04	-4.989E-01
5.009E-01	-1.750E+00	1.000E+00	-5.005E-01	4.991E-01	-1.750E+00	-2.409E-04	-5.005E-01
5.015E-01	-1.750E+00	9.999E-01	-4.997E-01	4.985E-01	-1.750E+00	1.207E-04	-4.997E-01
5.027E-01	-1.750E+00	1.000E+00	-5.001E-01	4.973E-01	-1.750E+00	-6.030E-05	-5.001E-01
6.334E-01	-1.452E+00	1.000E+00	-5.000E-01	3.666E-01	-1.452E+00	4.712E-07	-5.000E-01
7.263E-01	-9.597E-01	1.000E+00	-5.000E-01	2.737E-01	-9.597E-01	-2.356E-07	-5.000E-01
8.612E-01	-1.042E-01	1.000E+00	-5.000E-01	1.388E-01	-1.042E-01	1.178E-07	-5.000E-01
9.907E-01	-4.776E-01	1.000E+00	...	9.256E-03	-4.776E-01	-5.891E-08	-5.000E-01
1.004E+00	-5.092E-01	1.000E+00	...	-4.245E-03	-5.092E-01	2.945E-08	-5.000E-01

Quels sont les points fixes attractifs ? Déterminer l'ordre de convergence pour chacun d'eux. Déterminer les valeurs des λ et θ utilisés. Enfin dans la présentation du modèle il est écrit que θ est un paramètre de seuil. Au vue des résultats du tableau, dans quelle mesure pouvez vous justifier l'appellation *paramètre de seuil* pour θ ?

Solution:
Les points fixes attractifs sont 1 et 0. La convergence est linéaire puisque le rapport $\frac{e_{n+1}}{e_n}$ converge vers une valeur non nulle. On sait que sa limite correspond à la dérivée de la fonction en son point fixe. Donc :

$$1 - \lambda\theta = -0.5$$

Donc $\lambda\theta = 1.5$. D'autre part

$$1 + \lambda(\theta - 1) = -0.5$$

Donc $\lambda(\theta - 1) = -1.5$. D'où $\lambda = 3$ et $\theta = \frac{1}{2}$.
On remarque que, θ étant égal à 0.5, si on prend p_0 entre θ et 1, p_n converge vers 1 et si on prend p_0 entre 0 et θ, p_n converge vers 0. Le paramètre θ semble donc être un seuil pour le comportement de la convergence des itérations du point fixe.

Remarque : Notez (c'était inutile pour faire les questions) que la suite p_n définie par la relation de récurrence de l'énoncé est un modèle de population comportant un nombre maximal possible d'individus (c'est à dire qu'on considère que la population ne peut dépasser une valeur $P_{\max}$). p_n représente alors le nombre d'individus divisé par $P_{\max}$ à la n-ième génération (p_n est donc compris entre 0 et 1). Si la population de départ est plus petite que le paramètre θ, alors $p_n \to 0$, il y a extinction. Si au contraire la population de départ est plus grande que θ, p_n converge vers la taille maximale.

Les suites p_n t_n et l_n sont définies par les relations de récurrence :

$$\begin{cases} p_{n+1} = \alpha l_n + 0.2 l_{n+1} - 0.1 t_{n+1} + \lambda p_n \\ l_{n+1} = \lambda l_n + 0.2 p_{n+1} \\ t_{n+1} = \lambda t_n - 0.1 p_{n+1} \end{cases} \tag{2}$$

Exercice 4 : [0 points] 1)

Déterminer la matrice A telle que le système (2) se mette sous la forme :

$$A \begin{bmatrix} p_{n+1} \\ l_{n+1} \\ t_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha l_n + \lambda p_n \\ \lambda l_n \\ \lambda t_n \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Solution:

Pour cette question on demande de mettre les système (2) sous forme matricielle. L'énoncé nous invite à passer toutes les variables d'indice $n+1$ à gauche et toutes celles d'indice n à droite puisqu'il faut trouver A telle que :

$$A \begin{bmatrix} p_{n+1} \\ l_{n+1} \\ t_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha l_n + \lambda p_n \\ \lambda l_n \\ \lambda t_n \end{bmatrix}.$$

en travaillant sur le système (2), on obtient

$$\begin{cases} p_{n+1} - 0.2 l_{n+1} + 0.1 t_{n+1} = \alpha l_n + \lambda p_n \\ l_{n+1} - 0.2 p_{n+1} = \lambda l_n \\ t_{n+1} + 0.1 p_{n+1} = \lambda t_n \end{cases}$$

Donc la matrice A à prendre :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -0.2 & 0.1 \\ -0.2 & 1 & 0 \\ 0.1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2) On souhaite en partant de (p_0, l_0, t_0) trouver (p_n, l_n, t_n) après un grand nombre d'itérations (donc résoudre un grand nombre de fois le système (3)). Proposez la méthode directe la plus efficace dans ce cadre pour résoudre (3).

> **Solution:**
> On remarque que la matrice est symétrique à diagonale strictement dominante avec des coefficients diagonaux positifs. A est définie positive. On peut donc faire une factorisation de Cholesky : $A = LL^T$.

3) Appliquer la méthode proposée à (3).

> **Solution:**
> On applique la méthode du cours :
>
> $$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.2 & \sqrt{1-0.2^2} & 0 \\ 0.1 & \frac{0.02}{\sqrt{1-0.2^2}} & \sqrt{\frac{1-0.2^2-0.1^2}{1-0.2^2}} \end{bmatrix}$$

Exercice 5 : [0 points]

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 \\ 7 & 5 & 6 \\ 8 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

1) Sachant que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -11 & 1 \\ -11 & 18 & -2 \\ 1 & -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

calculer le conditionnement de la matrice A pour la norme matricielle $\|\cdot\|_\infty$.

> **Solution:**
> Il suffit de se rappeler que le conditionnement est définie par $\mathrm{cond}_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty$:
>
> $$\mathrm{cond}_\infty(A) = 775$$

2) Soit $b = (32.1, 22.9, 33.1)^t$. Si $\|r\|_\infty = 10^{-6}$, donner une majoration de l'erreur relative (toujours pour la norme $\|\cdot\|_\infty$).

> **Solution:**
>
> $$\frac{\|e\|_v}{\|x\|_v} \leq \mathrm{cond}_M(A)\frac{\|r\|_v}{\|b\|_v} = 775 \times \frac{10^{-6}}{33.1} \approx 2.3414 \times 10^{-4}$$

3) On considère à présent la matrice triangulaire inférieure

$$M = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 0 \\ 8 & 6 & 10 \end{pmatrix} \text{ et son inverse, } M^{-1} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ -0.14 & 0.2 & 0 \\ 0.004 & -0.12 & 0.1 \end{pmatrix}$$

Calculer le conditionnement de la matrice $M^{-1}A$, toujours pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Solution:

$$\begin{aligned}\mathrm{cond}_\infty(M^{-1}A) &= \|M^{-1}A\|_\infty \|(M^{-1}A)^{-1}\|_\infty \\ &= \|M^{-1}A\|_\infty \|A^{-1}(M^{-1})^{-1}\|_\infty = \|M^{-1}A\|_\infty \|A^{-1}M\|_\infty \\ &= 245\end{aligned}$$

où il faut calculer les produits matriciels $M^{-1}A$ et $A^{-1}M$ pour pouvoir calculer les normes.

4) Étant donné les précédents résultats, est-il préférable de résoudre le système $Ax = b$ ou bien le système $M^{-1}Ax = M^{-1}b$? (justifier)

Solution:

Comme le conditionnement de la matrice $M^{-1}A$ est plus faible, il est préférable de résoudre le système $M^{-1}Ax = M^{-1}b$.