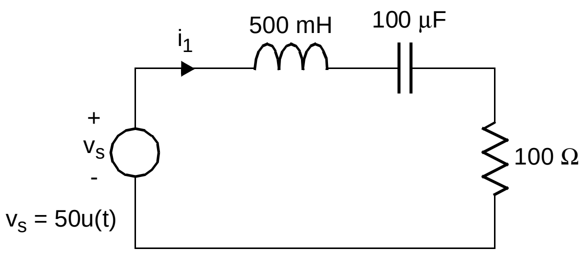
GEl-21945 Circuits
Session Hiver 2002

Corrigé du test no. 4

Question no.1 (10 points)



a) Équation d'équilibre du circuit (par la méthode des mailles):

$$\left[Ls + R + \frac{1}{Cs}\right]i_1 = v_s$$

Ou bien:

$$\left[Ls^2 + Rs + \frac{1}{C}\right]i_1 = sv_s$$

L'équation différentielle reliant i_1 à v_s: $$L\frac{d^2i_1}{dt^2} + R\frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C}i_1 = \frac{d}{dt}[v_s]$$

Avec les valeurs numériques: $$0.5\frac{d^2i_1}{dt^2} + 100\frac{di_1}{dt} + 10000i_1 = \frac{d}{dt}[v_s] = \frac{d}{dt}[50u(t)]$$

On résout en premier lieu l'équation différentielle suivante:

$$0.5\frac{d^2i_x}{dt^2} + 100\frac{di_x}{dt} + 10000i_x = 50u(t)$$

La solution i_x est de la forme suivante: $i_x = \left[A_1e^{s_1t} + A_2e^{s_2t} + B\right]u(t)$

On a: $B = \frac{50}{10000} = 5\times10^{-3}$

s_1 et s_2 sont les solutions de l'équation caractéristique: $0.5s^2 + 100s + 10000 = 0$

On a: $s_1 = -100 + j100$ $s_2 = -100 - j100$

Conditions à t = 0:

$i_x(0+) = i_x(0-) = 0 = A_1 + A_2 + 0.005$

$$\frac{di_x}{dt}(0+\ ) = \frac{di_x}{dt}(0-\ ) = 0 = s_1A_1 + s_2A_2$$

Solution pour A_1: $$A_1 = \frac{-0.005s_2}{s_2 - s_1} = \frac{-0.005(-100 - j100)}{-j200} = 0.0025(-1 + j) = 0.0035e^{j3(\pi/4)}$$

Le courant i_1 est égal à la dérivée de i_x:

$$i_1 = \frac{di_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left\{\left[A_1e^{s_1t} + A_2e^{s_2t} + B\right]u(t)\right\} = \left[s_1A_1e^{s_1t} + s_2A_2e^{s_2t}\right]u(t)$$

$$i_1 = \left[(-100 + j100)0.0035e^{j3(\pi/4)}e^{s_1t} + (-100 - j100)0.0035e^{-j3(\pi/4)}e^{s_2t}\right]u(t)$$

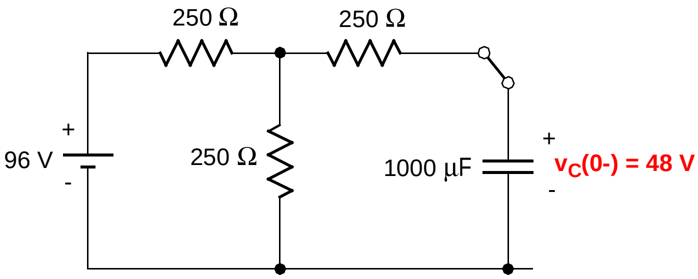
$$i_1 = \left[141.4e^{j3(\pi/4)}0.0035e^{j3(\pi/4)}e^{s_1t} + 141.4e^{-j3(\pi/4)}0.0035e^{-j3(\pi/4)}e^{s_2t}\right]u(t)$$

$$i_1 = e^{-100t}\cos\left(100t - \frac{\pi}{2}\right)u(t) = e^{-100t}\sin(100t)u(t)$$

b) La durée du régime transitoire est $d_{TR} = 5\times\frac{1}{100} = \frac{5}{100} = 50\text{ ms}$

Question no.2 (10 points)

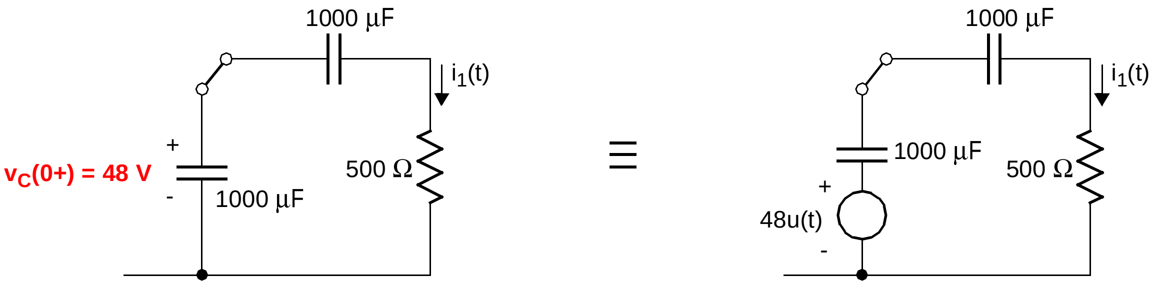
Pour t < 0, on a le circuit suivant:



Le circuit est en régime permanent depuis longtemps. La tension aux bornes du condensateur est égale à la tension aux bornes de la 2e résistance de 250 Ω qui est donnée par la loi du diviseur de tension:

$$v_C(0-) = \frac{250}{250+250} \times 96 = 48\text{ V}$$

Pour t > 0, on a le circuit suivant:



On remplace le condensateur chargé à 48 V par un condensateur non chargé en série avec une source de tension 48u(t).

Le courant $i_1(t)$ est de la forme suivante: $\quad i_1(t) = \left[A + Be^{-\frac{t}{RC}}\right]u(t)$

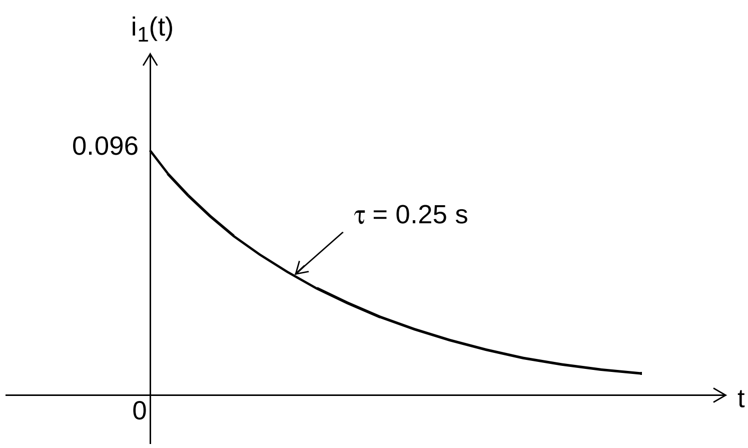
La constante de temps du circuit: $\quad \tau = RC = 500\Omega \times 500\mu\text{F} = 0.25\text{ s}$

Les constantes A et B sont déterminées à l'aide des conditions à t = 0 et t = ∞.

$$i_1(\infty) = 0 = A$$

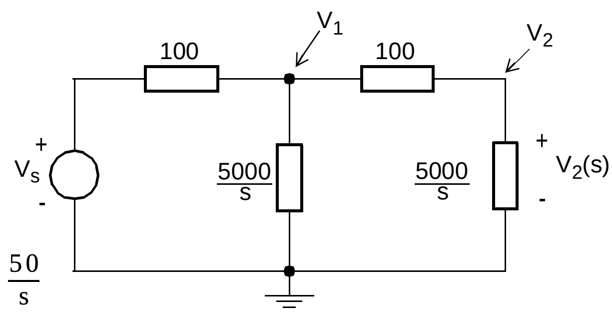
$$i_1(0) = \frac{48}{500} = 0.096 = A + B \qquad \text{on déduit:} \quad B = 0.096$$

Alors: $\quad i_1(t) = 0.096e^{-\frac{t}{0.25}}u(t)$



Question no. 3 (10 points)

Circuit transformé:



$V_s = \frac{50}{s}$

Équation d'équilibre (par la méthode des noeuds):

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{100} + \frac{s}{5000} + \frac{1}{100} & -\frac{1}{100} \\ -\frac{1}{100} & \frac{1}{100} + \frac{s}{5000} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{V_s}{100} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{50}{100s} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 + \frac{s}{50} & -1 \\ -1 & 1 + \frac{s}{50} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{50}{s} \\ 0 \end{bmatrix}$$

La solution pour V_2 est obtenue par la méthode de Cramer:

$$V_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 + \frac{s}{50} & \frac{50}{s} \\ -1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 + \frac{s}{50} & -1 \\ -1 & 1 + \frac{s}{50} \end{vmatrix}} = \frac{\left(\frac{50}{s}\right)}{\left(2 + \frac{s}{50}\right)\left(1 + \frac{s}{50}\right) - 1} = \frac{125000}{s(s^2 + 150s + 2500)}$$

La fonction $V_2(s)$ a trois pôles: $p_1 = 0$, $p_2 = -19.1$, $p_3 = -130.9$.

On décompose V_2 en fractions partielles:

$$V_2 = \frac{125000}{s(s^2 + 150s + 2500)} = \frac{125000}{s(s + 19.1)(s + 130.9)} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s + 19.1} + \frac{A_3}{s + 130.9}$$

Les constantes A_1, A_2, et A_3 sont calculées:

$$A_1 = \left.\frac{125000}{(s + 19.1)(s + 130.9)}\right|_{s = 0} = 50$$

$$A_2 = \left.\frac{125000}{s(s + 130.9)}\right|_{s = -19.1} = -58.54$$

$$A_3 = \left.\frac{125000}{s(s + 19.1)}\right|_{s = -130.9} = 8.54$$

Alors: $V_2 = \frac{50}{s} - \frac{58.54}{s + 19.1} + \frac{8.54}{s + 130.9}$

La tension $v_2(t)$ est la transformée inverse de $V_2(s)$:

$$v_2(t) = [50 - 58.54e^{-19.1t} + 8.54e^{-130.9t}]u(t)$$

b) La durée du régime transitoire est égale à 5 fois la constante de temps la plus longue:

$$d_{RT} = 5 \times \frac{1}{19.1} = 0.26\ \mathrm{s}$$