Analyse des signaux

GEL-2001

Corrigé de l'examen 1

Assistant:
Philippe Guay

Professeur:
Jérôme Genest

14 octobre 2020

Problème 1

(a) La fonction restreinte $f_r(t)$ peut s'écrire

$$f_r(t) = V\text{Rect}\left(\frac{t - \frac{T_o}{4}}{\tau_c}\right) - V\text{Rect}\left(\frac{t + \frac{T_o}{4}}{\tau_c}\right).$$

(b) La transformée de Fourier $F_r(\omega)$ s'écrit

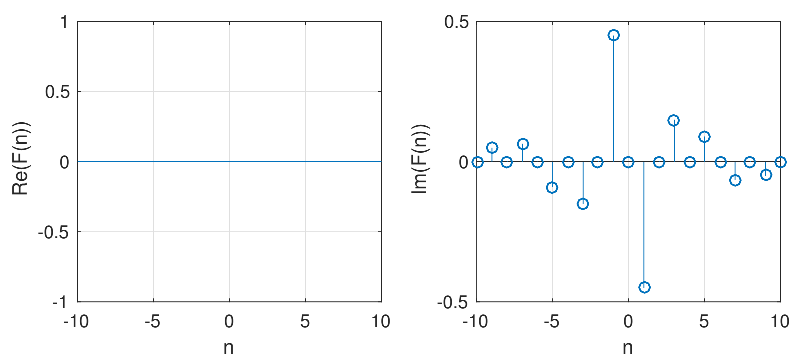
$$F_r(\omega) = \tau_c V \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau_c}{2}\right) e^{-j\omega\frac{T_o}{4}} - \tau_c V \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau_c}{2}\right) e^{j\omega\frac{T_o}{4}}.$$

(c) Le signal $f_p(t)$ est périodique et de carré intégrable. Il est donc un signal de puissance. Le signal $F_r(\omega)$ est non-périodique et de carré intégrable. Il est donc un signal d'énergie.

(d) La série de Fourier de $f_p(t)$

$$\begin{aligned}
F_{\text{série}}(n) &= \frac{1}{T_o} F_r(\omega)\Big|_{\omega = n\omega_0} \\
&= \frac{\tau_c V}{T_o}\text{Sa}\left(\frac{n\omega_0\tau_c}{2}\right) e^{-jn\omega_0\frac{T_o}{4}} - \frac{\tau_c V}{T_o}\text{Sa}\left(\frac{n\omega_0\tau_c}{2}\right) e^{jn\omega_0\frac{T_o}{4}} \\
&= -\frac{\tau_c V}{T_o}\text{Sa}\left(\frac{n\omega_0\tau_c}{2}\right)\left[e^{jn\frac{2\pi}{4}} - e^{-jn\frac{2\pi}{4}}\right] \\
&= -\frac{2j\tau_c V}{T_o}\text{Sa}\left(\frac{n\omega_0\tau_c}{2}\right)\sin\left(n\pi/2\right) \\
&= -\frac{2j\tau_c V}{T_o}\text{Sa}\left(\frac{n\omega_0\tau_c}{2}\right)\sin\left(n\pi/2\right)
\end{aligned}$$

Avec $\tau_c = 1$, $V = 1$ et $T_o = 4$ arbitrairement,



(e) La puissance totale est donnée comme

$$\begin{aligned}
P &= \frac{1}{T_o}\int_{-T_o/2}^{T_o/2} |f(t)|^2 dt \\
&= \frac{1}{T_o}\int_{-T_o/4-\tau_c/2}^{-T_o/4+\tau_c/2} |-V|^2 dt + \frac{1}{T_o}\int_{T_o/4-\tau_c/2}^{T_o/4+\tau_c/2} |V|^2 dt \\
&= \frac{2\tau_c V^2}{T_o}.
\end{aligned}$$

La puissance à la fréquence $\omega = \omega_0$ est calculée à partir de $P(1) = |F(-1)|^2 + |F(1)|^2$.

$$\begin{aligned}
P(1) &= |F(-1)|^2 + |F(1)|^2 \\
P(1) &= \left|\frac{2j\tau_c V}{T_o}\mathrm{Sa}\left(\frac{-\omega_0\tau_c}{2}\right)\right|^2 + \left|-\frac{2j\tau_c V}{T_o}\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega_0\tau_c}{2}\right)\right|^2 \\
P(1) &= \left(\frac{2\tau_c V}{T_o}\right)^2 \mathrm{Sa}\left(\frac{-\omega_0\tau_c}{2}\right)^2 + \left(\frac{2\tau_c V}{T_o}\right)^2 \mathrm{Sa}\left(\frac{\omega_0\tau_c}{2}\right)^2 \\
P(1) &= 2\left(\frac{2\tau_c V}{T_o}\right)^2 \mathrm{Sa}\left(\frac{\omega_0\tau_c}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

Le rapport est donc

$$R = 2\left(\frac{2\tau_c}{T_o}\right)\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega_0\tau_c}{2}\right)^2.$$

(f) Si on calcule l'amplitude du signal pour $|F(1)|$ et on isole V

$$\begin{aligned}
|F(1)| &= \frac{2\tau_c V}{T_o}\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega_0\tau_c}{2}\right) \\
V &= |F(1)|\frac{T_o}{2\tau_c}\frac{1}{\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega_0\tau_c}{2}\right)}
\end{aligned}$$

En posant $|F(1)| = 60$ pour avoir un signal crête à crête de 120 V,

$$V = 60\frac{T_o}{2\tau_c}\frac{1}{\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega_0\tau_c}{2}\right)}$$

et en posant $\tau_c = T_o/2$,

$$V = 60\frac{\pi}{2} \approx 94.2.$$

Problème 2

(a) On procède par la méthode de la dérivée pour obtenir

$$f'(t) = \text{Rect}(t - 0.5)$$

dont la transformée de Fourier est directement

$$F(\omega) = \frac{1}{j\omega}\text{Sa}\left(\frac{\omega}{2}\right)e^{-j\frac{\omega}{2}}.$$

À cette transformée doit s'ajouter le terme DC égal à 1/2. Donc, la transformée s'écrit

$$F(\omega) = \frac{1}{j\omega}\text{Sa}\left(\frac{\omega}{2}\right)e^{-j\frac{\omega}{2}} + \pi\delta(\omega).$$

(b) Le taux de décroissance asymptotique est donnée par la première dérivée discontinue de $f(t)$. Puissance que celle-ci est la dérivée d'ordre 1, le spectre converge en $\frac{1}{w^2}$.

(c) Comme le signal n'est pas de carré intégrable, son énergie est infinie.

(d) Pour un signal $f(t)$ dont $\lim_{t\to\infty} = f(\infty)$ et $\lim_{t\to-\infty} = f(-\infty)$ existent, la puissance est donnée par $[\frac{1}{2}(f(\infty) + f(-\infty))]^2$. La réponse est donc $P = \frac{1}{4}$. Celle valeur aurait aussi pu être obtenue en calculant directement la valeur moyenne de la fonction $F(0) = \frac{1}{2}$ et en appliquant $P = F(0)^2 = \frac{1}{4}$.

Problème 3

(a) Le signal $g(t)$ s'écrit

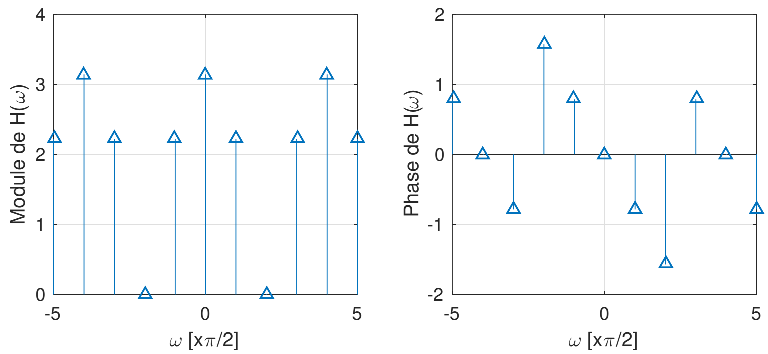
$$g(t) = \delta_4(t) + \delta_4(t - a).$$

(b) La transformation de Fourier de $g(t)$ s'écrit

$$\begin{aligned} G(\omega) &= \delta_{\omega_0}(\omega) + \delta_{\omega_0}(\omega)e^{-j\omega a} \\ &= \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) + \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0)e^{-j\omega a} \\ &= 2\omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0)\cos\left(\frac{\omega a}{2}\right)e^{-\frac{j\omega a}{2}} \end{aligned}$$

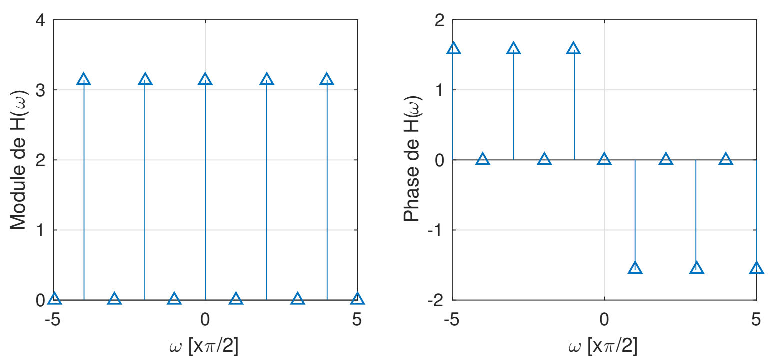
(c) Avec $a = 1$ et en remplaçant $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$, l'expression devient

$$G(\omega) = \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{n\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)e^{-\frac{j\omega}{2}}$$



(d) Lorsque $a = 2$, l'expression devient

$$G(\omega) = \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{n\pi}{2}\right) \cos(\omega) e^{-j\omega}$$

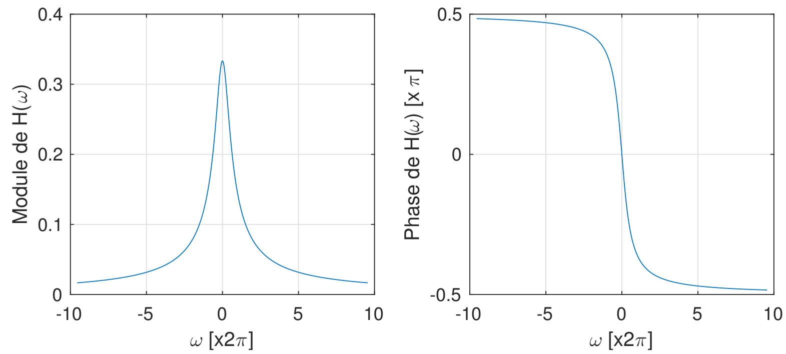


qui correspond à un peigne de fréquence de répétition $\omega = \pi/2$, mais dont une impulsion sur deux est annulée par le $\cos(\omega)$. À noter qu'il existe une phase non-nulle où le module est nul, ce qui devient équivalent à la transformée de Fourier d'un train d'impulsions avec $T_0 = 2$

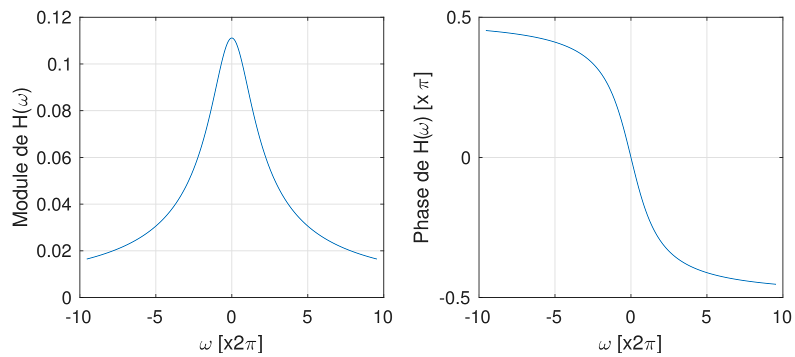
$$G(\omega) = \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\pi)$$

Problème 4

(a) La transformée de Fourier de $h(t)$ s'écrit directement $H(\omega) = \frac{1}{3+j\omega}$.

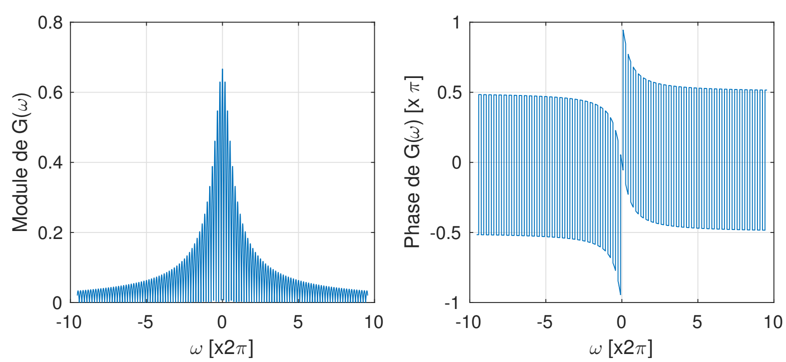


(b) La transformée de Fourier de $h(3t)$ s'écrit directement $H(\omega) = \frac{1}{9+j\omega}$.



(c) La transformée de Fourier de $g(t) = h(t-3) + h(t+3)$ s'écrit directement

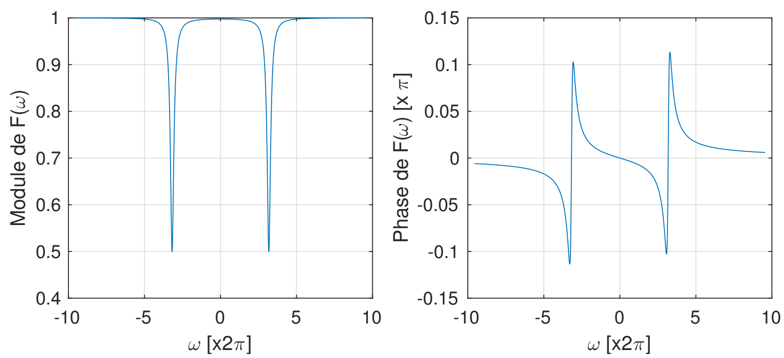
$$\begin{aligned} G(\omega) &= \frac{1}{3+j\omega} e^{-3j\omega} + \frac{1}{3+j\omega} e^{3j\omega} \\ &= \frac{2}{3+j\omega} \cos(3\omega) \end{aligned}$$



(d) La transformée de Fourier de $f(t) = \delta(t) - h(t/3)\cos(bt)$ s'écrit directement

$$F(\omega) = 1 - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+j(\omega-b)} + \frac{1}{1+j(\omega+b)}\right].$$

Avec $b = 20$ arbitrairement,



.