GEL-3003 – Signaux et systèmes discrets :

Examen 3

(correction sur 100 points, pondération de 27.5%)

Mardi 10 Décembre 2019

Durée : 15h30 à 17h30 - 2h00

Le présent examen est un examen de cours. Il vise à vous évaluer sur la compréhension du cours. Les consignes sont les suivantes :

- Répondez aux questions sur le formulaire.
- Aucune documentation ou note de cours n'est permise.
- L'examen compte 5 questions pour un total de 100 points.
- Laissez des traces de vos raisonnements et justifiez vos résultats. **TOUTE réponse NON JUSTIFIÉE n'aura aucun point.**
- Calculatrice autorisée.

L'examen comporte 14 pages dont une page de formulaire. Vérifiez qu'aucune page n'est manquante. La justesse, la méthodologie et l'analyse rapporteront la majorité des points. Les autres points quantifieront les résultats. Enfin, si vous êtes bloqués à une question, passez à la suivante et revenez à la fin si le temps vous le permet. Une question bonus valant 5% de la note est proposée à la fin.

Bon courage à toutes et à tous ! ! !

Nom, Prénom et matricule : ______________________________

Série géométrique : $\sum_{k=0}^{N} a^k = \frac{1-a^{N+1}}{1-a}$ $\qquad \sum_{k=1}^{N} a^k = \frac{a(1-a^N)}{1-a}$

Relations d'Euler : $\cos(\theta) = \frac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2}$ $\qquad \sin(\theta) = \frac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{2j}$

Convolution : $y(n) = x(n) * h(n) = \sum_m x(m)h(n-m) = \sum_m h(m)x(n-m)$

Corrélation : $r_{ab}(n) = a(n) ** b(n) = a(n) * b(-n)$ on cherche $b(n)$ dans $a(n)$

Transformée en Z : $X(z) = \sum_n x(n)z^{-n}$, $\qquad a^n u(n) \leftrightarrow \frac{1}{1-az^{-1}}, |z| > |a|,$

$-a^n u(-n-1) \leftrightarrow \frac{1}{1-az^{-1}}, |z| < |a|$

Propriétés de la TZ :

Linéarité $a_1x_1(n) + a_2x_2(n) \to a_1X_1(z) + a_2X_2(z)$

Retard $x(n-D) \to z^{-D}X(z)$

Convolution $y(n) = x(n) * h(n) \to Y(z) = X(z)H(z)$

TFTD :

$X(\omega) = \sum_n x(n)e^{-j\omega n}$ $\qquad X(\omega) = X(\omega + 2\pi m)$

$x(n) * y(n) \leftrightarrow X(\omega)Y(\omega)$ $\qquad x(n)y(n) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}[X(\omega) \circledast Y(\omega)]$

$u(n) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{1-e^{-j\omega}} + copies$ $\qquad e^{j\omega_0 n} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_0) + copies$

Régime transitoire RII : $\rho^{n_{eff}} = \epsilon$ où $\rho = \max_i |p_i|$

Dél. de phase et de groupe : $d(\omega) = -\frac{\angle H(\omega)}{\omega}$ $\qquad d_g(\omega) = -\frac{d}{d\omega}[\angle H(\omega)]$

Sinus cardinal : $\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$

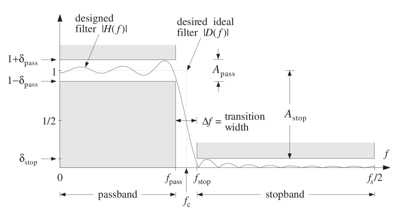


Fig. 10.2.1 Magnitude response specifications for a lowpass filter.

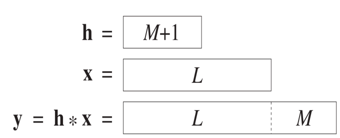


Fig. 4.1.1 Relative lengths of filter, input, and output blocks.

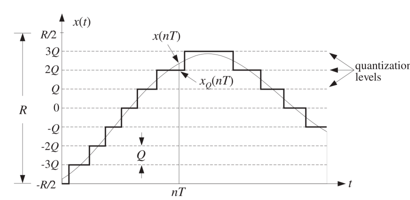


Fig. 2.1.2 Signal quantization.

- 10.2.5 $\quad \delta_{pass} = \frac{10^{A_{pass}/20}-1}{10^{A_{pass}/20}+1} \qquad \delta_{stop} = 10^{-A_{stop}/20}$
- 10.2.6-7 $\quad \delta = \min(\delta_{pass}, \delta_{stop})$
- Table 10.2.1

Window	δ	A_{stop}	A_{pass}	D
Rectangular	8.9%	21 dB	1.55 dB	0.92
Hamming	0.2%	54 dB	0.03 dB	3.21
Kaiser	variable δ	$-20\log_{10}\delta$	17.372δ	$(A-7.95)/14.36$

$$\rightarrow D = \begin{cases} \frac{A-7.95}{14.36}, & A > 21 \\ 0.922, & A \le 21 \end{cases}$$

  - Si Kaiser (10.2.10) $\quad \alpha = \begin{cases} 0.1102(A-8.7), & A \ge 50 \\ 0.5842(A-21)^{0.4} + 0.07886(A-21), & 21 < A < 50 \\ 0, & A \le 21 \end{cases} \qquad A = -20\log_{10}\delta$

- 10.2.1 $\quad \Delta f = f_{stop} - f_{pass} \qquad f_c = \frac{1}{2}(f_{pass} + f_{stop}) \qquad \omega_c = 2\pi f_c / f_s$
- 10.2.11 $\quad N = 1 + \frac{Df_s}{\Delta f}$ (arrondir à entier impair supérieur) $\rightarrow M = \frac{N-1}{2}$
- 10.2.14 $\quad h(n) = w_i(n-M, N) \cdot \frac{\omega_c}{\pi}\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega_c}{\pi}[n-M]\right) \qquad 0 \le n \le N-1$

18

Fenêtre rectangulaire : $w_R(n) = u(n) - u(n-L) \leftrightarrow \frac{\sin(\omega L/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega(L-1)/2}$

TFD : $X(\omega_k) = \sum_n x(n)\, e^{-j\omega_k n}$ $\qquad \omega_k = \frac{2\pi k}{N}$, $k = 0, 1, \dots, N-1$

TFTD inverse : $x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{\omega_0}^{\omega_0+2\pi} X(\omega)\, e^{j\omega n} d\omega$

TFD inverse : $\tilde{x}(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(\omega_k) e^{j\omega_k n}$

Extension périodique : $\tilde{x}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n+mN)$

Convolution circulaire : $\tilde{Y}(\omega_k) = X(\omega_k)H(\omega_k) \leftrightarrow \tilde{y}(n) = x(n) \circledast h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} y(n+mN)$

Sur-échantillonnage : $x'_{up}(n') = \begin{cases} x(n), & n' = nL \\ 0, & ailleurs \end{cases} \leftrightarrow X'_{up}(\omega') = X(\omega' L)$

Sous-échantillonnage : $x_{down}(n) = x'(n'L) \leftrightarrow \frac{1}{L}\sum_{m=0}^{L-1} X'\left(\frac{\omega - 2\pi m}{L}\right)$

Reconstruction : $y_a(t) = \sum_n y(n) h(t-nT)$ $\qquad |H_B(f)|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{f}{f_c}\right)^{2N}}$ (Butterworth)

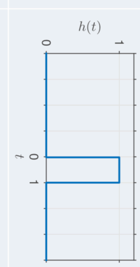
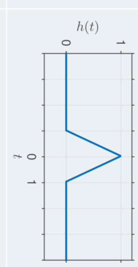
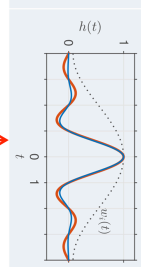
$h_{id}(t) = \mathrm{sinc}(t/T)$ $\qquad H_{id}(f) = \begin{cases} T, & |f| \le 0.5/T \\ 0, & ailleurs \end{cases}$

$h_0(t) = u(t) - u(t-T)$ $\qquad H_0(f) = T\,\mathrm{sinc}(fT)\, e^{-j\pi f T}$

$h_1(t) = \left(1 - \frac{|t|}{T}\right)[u(t+T) - u(t-T)]$ $\qquad H_1(f) = T\,\mathrm{sinc}^2(fT)$

Quantification : $Q = \frac{R}{2^B}$ $\qquad e_{rms} = \frac{Q}{\sqrt{12}}$ $\qquad S_{ee}(f) = \frac{e_{rms}^2}{f_s}$ $\qquad S_{ee}(\omega) = \frac{e_{rms}^2}{2\pi}$

$\Delta B = (p+0.5)\log_2(L) - 0.5\log_2\left(\frac{\pi^{2p}}{2p+1}\right)$ $\qquad H_{NS}(\omega') = (1 - e^{-j\omega'})^p$

Ordre 0 (échelon)		$H(\omega') = \frac{\sin(\omega' L/2)}{\sin(\omega'/2)} e^{-j\omega'(L-1)/2}$
Ordre 1 (linéaire)		$H(\omega') = \frac{1}{L}\left[\frac{\sin(\omega' L/2)}{\sin(\omega'/2)}\right]^2$
Idéal fenêtré		$H(\omega') = L\,[W_i(\omega') \circledast D(\omega')]$

On doit échantillonner ces fonctions continues en mettant L points par unité.

Réponse en fréquence du filtre PB idéal (boîte).

- Table 10.2.2

$R = 20\log_{10}\left(\frac{A_{max}}{A_{min}}\right)$

Window	R	c
Rectangular	13 dB	1
Hamming	40 dB	2
Kaiser	variable R	$6(R+12)/155$

(arrondir à entier sup.) $L = 1 + \frac{f_s c}{\Delta f_w} = 1 + \frac{2\pi c}{\Delta\omega_w}$

- Si Kaiser

10.2.26 $\quad \alpha = \begin{cases} 0.12438(R+6.3), & 60 \le R < 120 \\ 0.76609(R-13.26)^{0.4} + 0.09834(R-13.26), & 13.26 < R < 60 \\ 0, & R \le 13.26 \end{cases}$

- 9.1.18 $\quad L = \frac{f_s c}{\Delta f_w} = \frac{2\pi c}{\Delta \omega_w}$ (rectangulaire et Hamming, arrondir à entier sup.)
- 10.2.28 $\quad x_i(n) = w_i(n, L)x(n) \qquad 0 \le n \le L-1 \qquad i = \{R, H, K\}$

Pour la partie 1 : cf cours.

1. (20 points) Question de cours

(a) (2 points) Comment se caractérise la région de convergence d'une séquence à droite ?

(b) (2 points) Donnez la définition du rapport signal à bruit (SNR) liant B, Xrms et R.

(c) (2 points) A un facteur multiplicatif près, quel est le coût de calcul lors de la réalisation d'une FFT sur N points ?

(d) (2 points) Définir le repliement spectral.

(e) (2 points) Soit un système discret linéaire et invariant. Comment peut-on déterminer si ce système est causal uniquement par la connaissance de sa réponse à l'impulsion $h(n)$?

(f) (2 points) Soit $y(n)$ la convolution d'une séquence $x(n)$ quelconque pour $0 \leq n \leq 5$ et d'une réponse impulsionnelle $h(n)$ quelconque $0 \leq n \leq 4$. Déterminez les indices du régime permanent et transitoire de la séquence de sortie $y(n)$.

(g) (2 points) Définir un système causal à partir des pôles et des zéros de sa transformée en z.

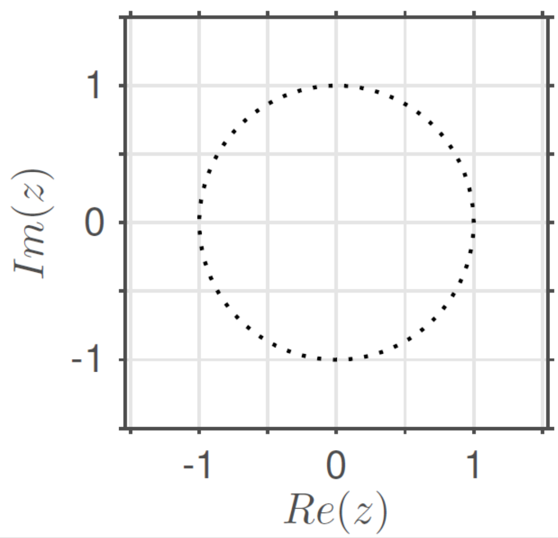
(h) (2 points) Donnez les deux conditions sur les pôles et les zéros pour qu'un filtre soit causal **et** stable.

(i) (2 points) Si un système a un délai de groupe constant, que pouvez-vous dire sur la phase de ce système ? Justifiez.

(j) (2 points) En vos mots, décrivez l'effet de l'interpolation sur le signal ainsi que l'effet de l'interpolation sur le spectre du signal.

2. **(15 points) Filtrage d'un signal biomédical**
On enregistre un signal $sEMG$ (un signal d'activité électrique musculaire) échantillonné à $fs = 2400$Hz. Ce signal est corrompu par un signal parasite à 60Hz et ses harmoniques (i.e 120, 180, ... Hz). On désire éliminer ce signal parasite. Dimensionnez un filtre capable de répondre aux contraintes suivantes :

1. Éliminer du signal échantillonné le signal parasite à 60Hz ainsi que toutes ses harmoniques
2. L'amplitude des autres composantes du signal ne doit pas être modifiée (ou très peu).
3. Limiter les composantes transitoires à la sortie du filtre à au plus 1% de la valeur intiale après 0.5s.



$\omega_{60Hz} = \frac{\pi}{20}$ → donc $m = 40$.

On veut supprimer les harmoniques → filtre en peigne

$$H(z) = \frac{z^m + 1}{z^m + R^m} = \frac{z^{40} + 1}{z^{40} + R^{40}}.$$

On calcule R avec 1% de la valeur initiale après 0.5 s

$$n\_ech = 2400 \times 0,5 = 1200.$$

$\varepsilon = 1\% = 0.01$ ⇒ $R = \varepsilon^{1/n\_ech} = 0.9962$

3. **(45 points) Conversion analogique-numérique et numérique analogique : décimation, interpolation**
On considère le système suivant dans un premier temps :

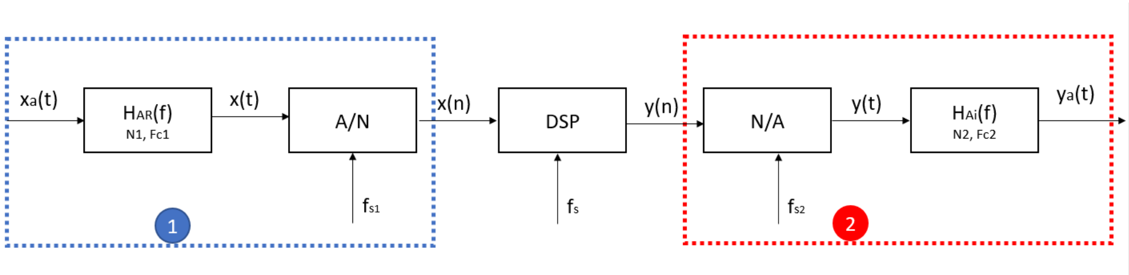


FIGURE 1 – Schéma bloc du système initialement proposé. Le sous-système (1) en bleu correspond à la partie conversion analogique/numérique alors que le sous-système (2) en rouge à la conversion numérique/analogique.

On considère un signal $x_a(t)$ qui n'est pas limité en fréquence et sa bande d'intérêt spectrale est [-20 kHz, 20 kHz]. On souhaite que le bloc de traitement de signal (DSP) opère à la fréquence d'échantillonnage de $fs = 60$ kHz.

(a) (10 points) Le filtre $H_{AR}(f)$ est un filtre de Butterworth d'ordre N_1 avec une fréquence de coupure f_{c1}. Déterminez les paramètres (N_1,f_{c1}) du filtre AR assurant une atténuation > 50dB du recouvrement spectral dans la bande d'intérêt et une atténuation < 0.1dB dans la bande passante.

fc et N.

On pose fc = 28 kHz.

$$A = 10 \log_{10}\left(1 + \left(\frac{40}{28}\right)^{2N}\right) = 50$$

$\Rightarrow N = 20.$

On vérifie Att < 0.1 dB bande passante.

$$A = 10 \log_{10}\left(1 + \left(\frac{20}{28}\right)^{40}\right) = 6.10^{-6} < 0.1 dB$$

Donc $\begin{cases} fc = 28 \text{ kHz} \\ N = 20 \end{cases}$

(b) (15 points) On s'intéresse toujours à la conversion analogique/numérique (contour en bleu (FIGURE 1)). On impose $N_1 = 1$ et on souhaite conserver une fréquence de coupure $f_{c1} = 22\text{kHz}$.

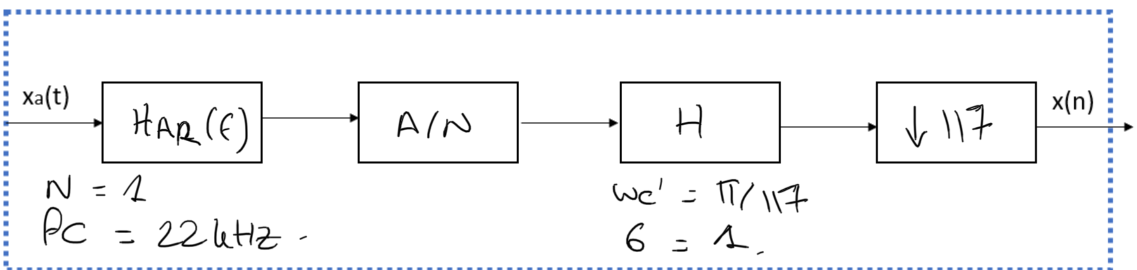
i. (10 points) Vous devez faire la conception de ce système modifié, c'est-à-dire spécifier la fréquence d'échantillonnage f_{s1} du convertisseur A/N, ainsi que la nature des blocs ajoutés (avec leurs paramètres pertinents). Votre système doit respecter les contraintes suivantes :

— Les images spectrales du signal $x_a(t)$ doivent être atténuées d'au moins 50dB.

— La fréquence d'échantillonnage du convertisseur A/N f_{s1} doit être minimisée, tout en respectant les autres contraintes.

ii. (5 points) Incorporez vos résultats dans la FIGURE 2.

Si vous utilisez des filtres discrets, vous devez spécifier les fréquences limites de la bande passante et la bande d'arrêt, le gain, la fenêtre considérée et ses paramètres.



$\omega_{pass} = \frac{2\pi \cdot 20}{7020}$ $\omega_{stop} = \frac{2\pi \cdot 40}{7020}$

FIGURE 2 – Sous-système 1 à compléter

$$A = 10 \log_{10}\left(1 + \left(\frac{L.f_s - 20}{22}\right)^2\right)$$

$$\Rightarrow 5 = \log_{10}\left(1 + \left(\frac{L.f_s - 20}{22}\right)^2\right)$$

$$\Rightarrow 10^5 - 1 = \left(\frac{L.f_s - 20}{22}\right)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{10^5 - 1} \times 22 + 20 = L.f_s$$

$$\Rightarrow L = \frac{\sqrt{10^5 - 1} \times 22 + 20}{f_s} = \frac{\sqrt{10^5-1} \times 22 + 20}{60}$$

$$= 116.28.$$

donc $L \geq 117$

(c) (20 points) On s'intéresse désormais à la chaîne de conversion numérique/analogique. Le filtre $H_{AI}(f)$ est un filtre de Butterworth d'ordre $N = 2$ avec une fréquence de coupure $f_{c2} = 24$kHz. Le reconstructeur est d'ordre 1.

i. (15 points) Vous devez faire la conception de ce système modifié, c'est-à-dire spécifier la fréquence d'échantillonnage f_{s2} du convertisseur N/A, ainsi que la nature des blocs ajoutés (avec leurs paramètres pertinents). Votre système doit respecter les contraintes suivantes :

— Les images spectrales du signal $y_a(t)$ doivent être atténuées d'au moins 60dB par le filtre $H_{AI}(f)$, donc en **excluant l'atténuation du reconstructeur d'ordre 0**.

— La fréquence d'échantillonnage du convertisseur N/A doit être minimisée, tout en respectant les autres contraintes.

ii. (5 points) Incorporez vos résultats dans la FIGURE 3. **Ne pas faire figurer le reconstructeur d'ordre 0.**

Si vous utilisez des filtres discrets, vous devez spécifier les fréquences limites de la bande passante et la bande d'arrêt, le gain, la fenêtre considérée et ses paramètres

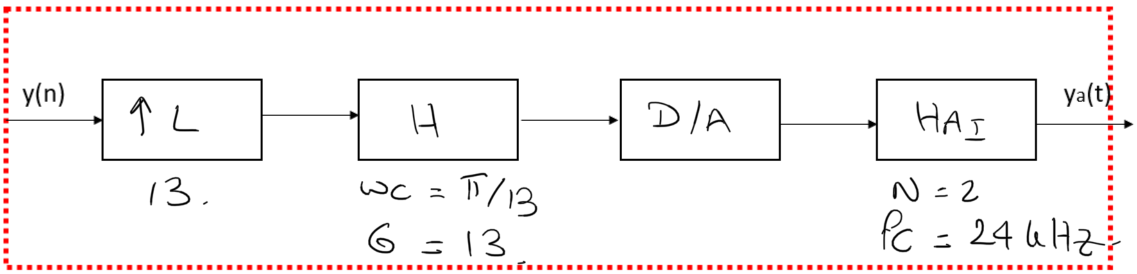


FIGURE 3 – Sous-système 2 à compléter

$$A = 10\log_{10}\left(1 + \left(\frac{L \cdot f_s - 20}{24}\right)^4\right) = 60.$$

$$\Rightarrow L \geq 13.$$

$$L = \frac{\sqrt[4]{10^6 - 1} \times 24 + 20}{60}.$$

4. **(20 points) Quantification (Justifiez chacune de vos réponses. Le cas échéant, une réponse erronée n'apportera aucun point).** On dispose d'un signal pseudo-périodique gaussien à valeur moyenne nulle avec une densité spectrale de puissance de niveau 0.0025 V^2/Hz pour $|f| \leq 5000$Hz. Le niveau de DSP est nul ailleurs. On choisit la plage d'opération du quantificateur à 10 bits de façon à éviter la saturation pour 99.7% des échantillons (soit **3 fois l'écart-type**), statistiquement parlant.

(a) (5 points) Quelle devrait-être la plage d'opération ? Quel est le taux d'échantillonnage minimal pour éviter le recouvrement spectral ?

$$X_{rms} = \sqrt{0.0025 \times 10000}$$
$$= 5$$
$$R = 5 \times 2 \times 3 = 30$$
$$f_s \geq 2 \times 5000 \Rightarrow f_s \geq 10\text{kHz}.$$

(b) (5 points) Quel est le Noise to Ratio (SNR) du signal dans ces conditions (N.B : le SNR est défini comme étant la puissance (variance) du signal divisé par la puissance (variance du bruit de quantification.) ?

$$SNR = 6.02 \times 10 + 10.79 - 20\log_{10}\left(\frac{30}{5}\right).$$
$$= 55,42$$

(c) (5 points) Quel facteur d'oversampling (L) est nécessaire pour atteindre désormais un SNR de 100dB.

$$\Delta SNR = 10.\log_{10}(L).$$
$$\Rightarrow 100 - 55,42 = 10\log_{10}(L)$$
$$\Rightarrow 44.58 = 10\log_{10}(L)$$
$$\Rightarrow L \geq 2.8,10^4.$$

(d) (5 points) Si on utilise plutôt le quantificateur à rétroaction $p = 3$, quel serait désormais le taux d'échantillonnage à auquel devrait opérer l'ADC ?

$$\Delta SNR = 6.02\,\Delta B + 10.79 - 20\log_{10}\left(\frac{30}{5}\right)$$

$$\Delta B = (p + 0.5)\log_2 L - 0.5\log_2\left(\frac{\pi^{2p}}{2p+1}\right).$$

$\rightarrow$ résoudre. <u>N.B</u> $\log_2 L = x.$

$\Rightarrow L = 2^x.$

5. **(5 points) Question bonus.** On dispose d'un signal audio échantillonné à $f_s = 192$kHz pour réduire l'ordre de notre filtre de Butterworth anti-repliement. Néanmoins, pour obtenir une latence acceptable lors de traitement de ce signal, on souhaite, après conversion analogique-numérique, réduire la présente fréquence d'échantillonnage à $f_s = 44.1$kHz. Donnez le système qui permet de réduire la fréquence d'échantillonnage et indiquez bien la bande de fréquence de Nyquist du signal après chacun des blocs de votre système. **Justifiez l'ordre dans lequel vous faites les différentes opérations nécessaires ainsi que toutes vos démarches.**

$$\frac{192}{44.1} = \frac{1920}{441}.$$

$$\boxed{\uparrow 147} \longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow \boxed{\downarrow 640}$$

$$G = 147$$

$$\omega_c' = \pi/640$$

$$= \min(\pi/147, \pi/640).$$