Université Laval
Professeur: Christophe Deutsch

Département de Génie Électrique
et de Génie Informatique

GEL19962: Analyse des signaux

Solutions : Mini-test 3

Problème 1 (1 point sur 5)

Pour chacun des 4 énoncés suivants encadrez la bonne réponse (vrai ou faux). *Aucun crédit partiel.*

1- Si la réponse d'un filtre pour l'entrée $x_1(t)=U(t)$ est $y_1(t)=e^{-t}U(t)$ alors la réponse de ce filtre pour l'entrée $x_2(t)=\delta(t)$ sera $y_2(t)=-e^{-t}U(t)$

Réponse : FAUX

En effet, nous avons : $x_2(t)=\frac{d}{dt}x_1(t)$,

donc il faut que : $y_2(t)=\frac{d}{dt}y_1(t)=\frac{d}{dt}\left\{e^{-t}U(t)\right\}=\left[e^{-t}\delta(t)-e^{-t}U(t)\right]=\delta(t)-e^{-t}U(t)$

2- On considère un filtre dont la fonction de transfert est $H(\omega)=\frac{j\omega}{1+j\omega}$.

Si l'entrée du filtre est $x(t)=5\cos(t)$ alors la sortie sera $y(t)=\frac{5}{\sqrt{2}}\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$

Réponse : VRAI

En effet, la réponse d'un filtre à $x(t)=a\cos(\omega_0 t)$ est :

$$y(t)=a\left|H(\omega_0)\right|\cos\left(\omega_0 t+Arg\left(H(\omega_0)\right)\right)$$

Ici nous avons :

$$\omega_0=1,\quad \left|H(\omega_0)\right|=\frac{|j|}{|1+j|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\quad \text{et}\quad Arg\left(H(\omega_0)\right)=Arg(j)-Arg(1+j)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$$

Donc : $y(t)=\frac{5}{\sqrt{2}}\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$

3- $\left\{f(u)*\delta(u-\tau)\right\}(t)=f(t+\tau)$

Réponse : FAUX $\left\{f(u)*\delta(u-\tau)\right\}(t)=f(t-\tau)$

4- Le filtre dont la réponse impulsionnelle $h(t)$ vérifie $\int_{-\infty}^{+\infty}\left|h(t)\right|dt<\infty$ est causal.

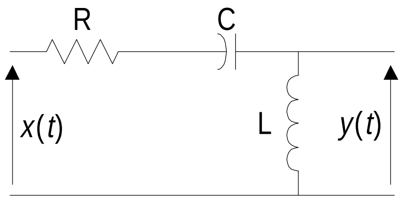
Réponse : FAUX

Un filtre est causal si et seulement si $h(t)=0$ pour $t<0$.

GEL19962: Analyse des signaux
Solutions : Mini-test 3

Problème 2 (2 point sur 5)

1- Trouver la fonction de transfert $H(\omega)$ du circuit suivant :



Réponse :

Nous avons $X = \left(R + \frac{1}{jC\omega} + jL\omega \right) I$ et $Y = jL\omega I$

Par conséquent :

$$H(\omega) = \frac{Y}{X} = \frac{jL\omega}{R + \frac{1}{jC\omega} + jL\omega} = \frac{-LC\omega^2}{\left(1 - LC\omega^2\right) + jRC\omega}$$

2- Donner le gain $\left|H(\omega)\right|$ et la phase $Arg\left\{H(\omega)\right\}$ du filtre.

Réponse :

Le gain du filtre est :

$$\left|H(\omega)\right| = \frac{\sqrt{L^2C^2\omega^4}}{\sqrt{\left(1 - LC\omega^2\right)^2 + R^2C^2\omega^2}} = \frac{LC\omega^2}{\sqrt{\left(1 - LC\omega^2\right)^2 + R^2C^2\omega^2}}$$

La phase du filtre est :

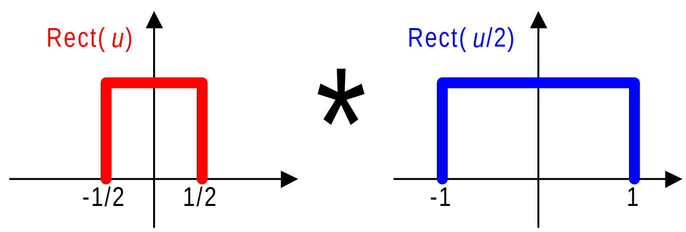
$$Arg\left[H(\omega)\right] = \tan^{-1}\left(\frac{-RC\omega}{1 - LC\omega^2} \right)$$

GEL19962: Analyse des signaux

Solutions : Mini-test 3

Problème 3 (2 point sur 5)

Calculer le produit de convolution suivant : $x(t)=\left\{\mathrm{Rect}(u)*\mathrm{Rect}(u/2)\right\}(t)$

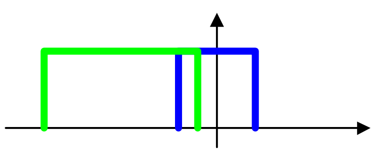


Réponse :

- Première zone : $t\leq -\dfrac{3}{2}$

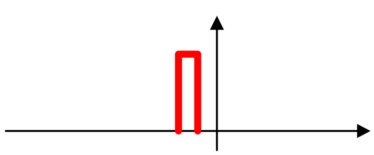
$f(u)g(t-u)=0$ donc $x(t)=0$

- Deuxième zone : $-\dfrac{3}{2}\leq t\leq -\dfrac{1}{2}$



Nous aurons :

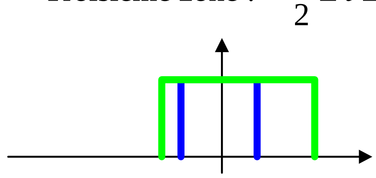
$$f(u)g(t-u)=\begin{cases}1 \text{ pour } -1/2\leq u\leq t+1\\ 0 \text{ ailleurs}\end{cases}$$



Donc :

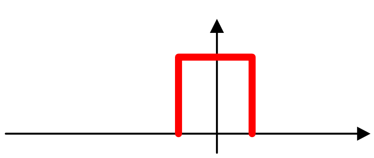
$$x(t)=\int_{-1/2}^{t+1} du = t+3/2$$

- Troisième zone : $-\dfrac{1}{2}\leq t\leq \dfrac{1}{2}$



Nous aurons :

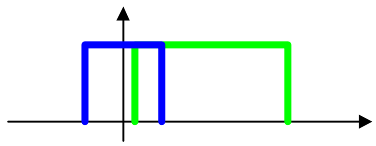
$$f(u)g(t-u)=\begin{cases}1 \text{ pour } -1/2\leq u\leq 1/2\\ 0 \text{ ailleurs}\end{cases}$$



Donc :

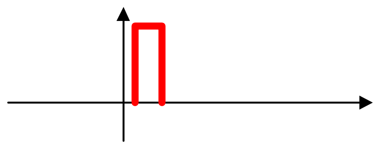
$$x(t)=\int_{-1/2}^{1/2} du = 1$$

- Quatrième zone : $\frac{1}{2} \le t \le \frac{3}{2}$



Nous aurons :

$$f(u)g(t-u) = \begin{cases} 1 \text{ pour } t-1 \le u \le 1/2 \\ 0 \text{ ailleurs} \end{cases}$$



Donc :

$$x(t) = \int_{t-1}^{1/2} du = -t + 3/2$$

- Cinquième zone : $t \ge \frac{3}{2}$

$f(u)g(t-u) = 0$ donc $x(t) = 0$

Le résultat final est alors :