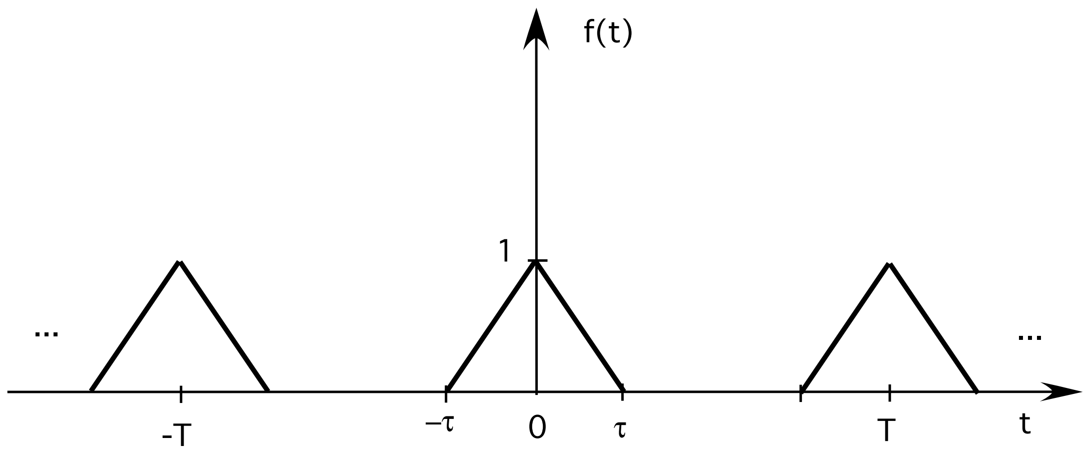
GEL-2001 83320: Analyse des signaux

Examen partiel A2010 : Solutions

Département de génie électrique et de génie informatique

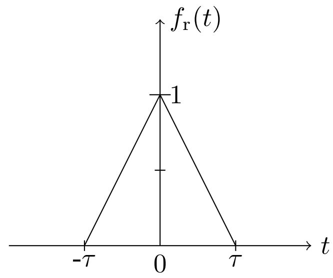
Problème 1 (10 points)

On donne la fonction périodique suivante:



a)

On demande d'abord de calculer la transformation de Fourier de la fonction $f(t)$. On doit d'abord identifier la fonction $f_{\mathrm{r}}(t)$ qui est périodisée. En isolant une période de $f(t)$, on a:



La fonction $f_{\mathrm{r}}(t)$ est un triangle de largeur 2τ:

$$f_{\mathrm{r}}(t) = \mathrm{Tri}\left(\frac{t}{\tau}\right) . \tag{1}$$

La transformation de Fourier de la fonction triangle $f_{\mathrm{r}}(t)$, $F_{\mathrm{r}}(\omega)$ est une transformation bien connue:

$$F_{\mathrm{r}}(\omega) = \tau \mathrm{Sa}^2\left(\frac{\tau\omega}{2}\right) . \tag{2}$$

On sait que la période du signal est T et la fréquence angulaire est $\omega_0 = 2\pi/T$. Ensuite, on trouve les coefficients de Fourier.

$$F_{\mathrm{n}}(n) = \frac{1}{T_0} F_{\mathrm{r}}(n\omega_0) = \frac{\tau}{T} \mathrm{Sa}^2 \Big(\frac{\tau\omega_0 n}{2} \Big) \ . \tag{3}$$

Enfin, à partir des coefficients de Fourier $F_{\mathrm{n}}(n)$, il est possible de trouver la transformation de Fourier demandée:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_{\mathrm{n}}(n) \delta(\omega - n\omega_0) \,, &(4)\\ &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\tau}{T} \mathrm{Sa}^2 \left(\frac{\tau\omega_0 n}{2} \right) \delta(\omega - n\omega_0) \,, &(5)\\ &= \frac{2\pi\tau}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{Sa}^2 \left(\frac{n\tau\pi}{T} \right) \delta(\omega - \frac{2n\pi}{T}) \,. &(6) \end{aligned}$$

b)

On demande de calculer la puissance à la fréquence fondamentale (première harmonique).

$$P(n) = |F_{\mathrm{n}}(-n)|^2 + |F_{\mathrm{n}}(n)|^2 \,. \tag{7}$$

La réponse est donc :

$$\begin{aligned} P(1) &= |F_{\mathrm{n}}(-1)|^2 + |F_{\mathrm{n}}(1)|^2 &(8)\\ &= \left| \frac{\tau}{T} \mathrm{Sa}^2 \left(\frac{\tau\omega_0(-1)}{2} \right) \right|^2 + \left| \frac{\tau}{T} \mathrm{Sa}^2 \left(\frac{\tau\omega_0(1)}{2} \right) \right|^2 &(9)\\ &= 2\frac{\tau^2}{T^2} \mathrm{Sa}^4 \left(\frac{\tau\pi}{T} \right) \,. &(10) \end{aligned}$$

Problème 2 (10 points)

a)

On demande de trouver **et tracer** en module et phase la transformation de Fourier de la fonction $f_a(t)$ suivante:

$$f_a(t) = \cos(100t)\mathrm{Rect}(3t)\,. \tag{11}$$

On peut transformer le cos(100t) avec la relation d'Euler:

$$f_a(t) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}100t}\mathrm{Rect}(3t) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}100t}\mathrm{Rect}(3t)\,.$$

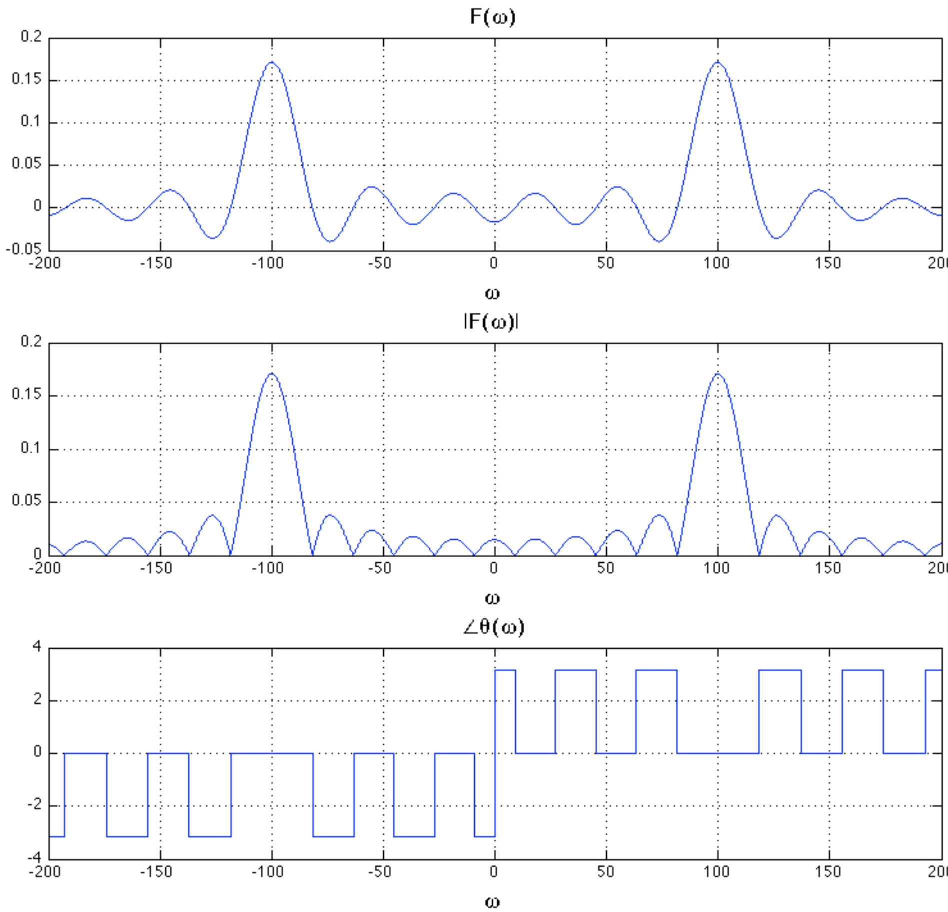
On pose $g(t) = \mathrm{Rect}(3t)$ et on utilise les deux propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \mathrm{Rect}(\frac{t}{\tau}) &\Longleftrightarrow \tau Sa\left(\frac{\tau\omega}{2}\right) \\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}bt}g(t) &\Longleftrightarrow G(\omega - b) \end{aligned}$$

La transformation de Fourier de $f(t)$ est alors:

$$F_a(\omega) = \frac{1}{6}Sa\left(\frac{\omega - 100}{6}\right) + \frac{1}{6}Sa\left(\frac{\omega + 100}{6}\right)\,. \tag{12}$$

Il s'agit de deux Sa, un à $\omega = 100$ et l'autre à $\omega = -100$. Le module de la transformation de Fourier $|F_a(\omega)|$ est deux Sa redressés avec une amplitude de $\frac{1}{6}$. Les zéros des lobes principaux sont à $100 \pm 6\pi$ et à $-100 \pm 6\pi$. La phase est zéro lorsque $F_a(\omega)$ est positive et π ou $-\pi$ lorsque $F_a(\omega)$ est négative.



b)

En b), on demande maintenant de calculer et **de tracer** en module et phase la transformation de Fourier de la fonction $f_b(t)$:

$$f_b(t) = \cos(100[t-3])\mathrm{Rect}(3[t-3])\,. \tag{13}$$

En comparant $f_b(t)$ et $f_a(t)$, on observe que :

$$f_b(t) = f_a(t-3)\,. \tag{14}$$

En utilisant la propriété de décalage en temps,

$$\boxed{f(t+a) \Longleftrightarrow \mathrm{e}^{\mathrm{j}a\omega}F(\omega)}$$

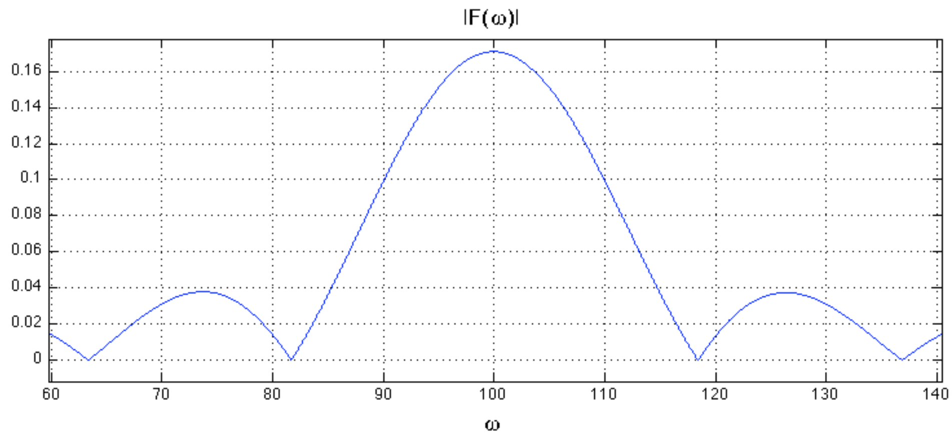
on trouve:

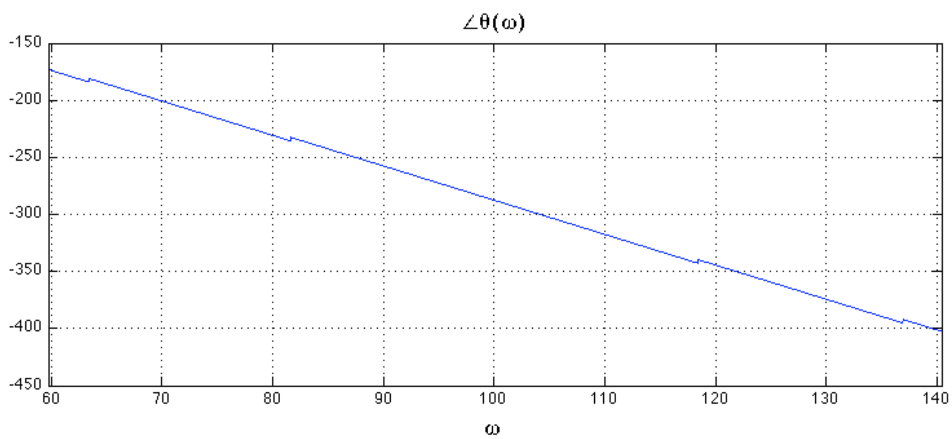
$$F_b(\omega) = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}3\omega}F_a(\omega)\,, \tag{15}$$

$$= \mathrm{e}^{-\mathrm{j}3\omega}\left[\frac{1}{6}Sa\left(\frac{\omega-100}{6}\right) + \frac{1}{6}Sa\left(\frac{\omega+100}{6}\right)\right]. \tag{16}$$

Par inspection : $|F_b(\omega)| = |F_a(\omega)|$. Ensuite, la phase est une droite de -3ω passant par l'origine. Lorsque $F_b(\omega)$ change de signe, la phase fait un saut de π ou $-\pi$ sur la droite. Une manière de voir ce qui se passe est d'interpréter la phase comme une rotation sur le cercle unitaire (la droite de -3ω). Lorsque le terme réel et imaginaire change de signe en même temps, il y a un saut de π ou $-\pi$ de phase sur le cercle unitaire.

Pour mieux observer les sauts de phases, le graphique de la phase est agrandi sur un des lobes principaux.





c)

En c), on demande maintenant de calculer et **de tracer** en module et phase la transformation de Fourier de la fonction $f_c(t)$:

$$f_c(t) = \cos(100t)\mathrm{Rect}(3[t-3])\,. \tag{17}$$

On peut transformer le cos(100t) avec la relation d'Euler:

$$f_c(t) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}100t}\mathrm{Rect}(3[t-3]) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}100t}\mathrm{Rect}(3[t-3])\,.$$

Ensuite, pour résoudre le problème on peut utiliser les trois propriétés suivantes :

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{Rect}(\frac{t}{\tau}) &\Longleftrightarrow \tau Sa\left(\frac{\tau\omega}{2}\right) \\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}bt}g(t) &\Longleftrightarrow G(\omega-b) \\ g(t+a) &\Longleftrightarrow \mathrm{e}^{\mathrm{j}a\omega}G(\omega) \end{aligned}}$$

Il faut trouver dans quel ordre les utiliser. Premièrement, on pose $g(t) = \mathrm{Rect}(3t)$. Deuxièmement, on observe que $\mathrm{Rect}(3t)$ est affectée par un décalage temporel. Finalement, la fonction $\mathrm{Rect}(3[t-3])$ est multipliée par une exponentielle complexe (décalage fréquentiel).

$$g(t) = \frac{1}{2}\mathrm{Rect}(3[t-3]) \Longleftrightarrow \mathrm{e}^{-\mathrm{j}3\omega}\frac{1}{6}Sa\left(\frac{\omega}{6}\right) = G(\omega)\,. \tag{18}$$

Après cette étape, il reste à utiliser la propriété de décalage en fréquence.

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}100\omega}g(t) \Longleftrightarrow G(\omega-100) = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}3(\omega-100)}\frac{1}{6}Sa\left(\frac{(\omega-100)}{6}\right)\,. \tag{19}$$

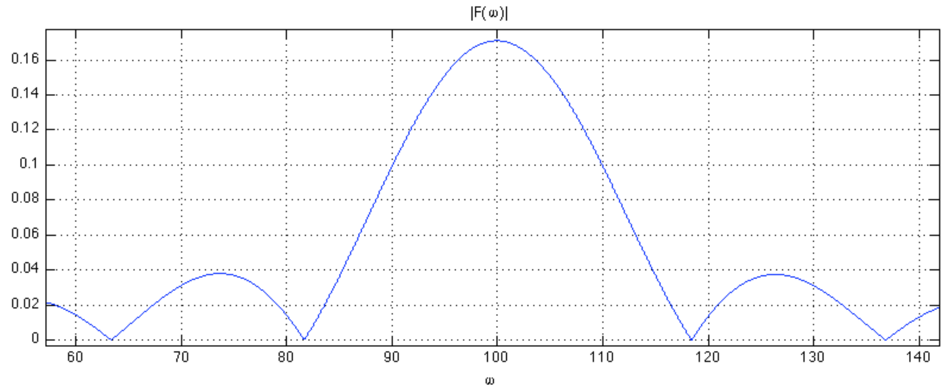
Donc, $F_c(\omega)$:

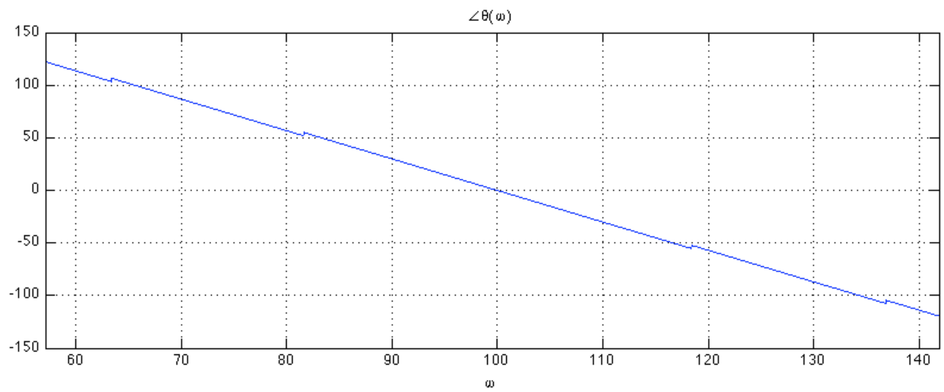
$$F_c(\omega) = \frac{1}{6}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}3(\omega-100)}Sa\left(\frac{(\omega-100)}{6}\right) + \frac{1}{6}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}3(\omega+100)}Sa\left(\frac{(\omega+100)}{6}\right)\,. \tag{20}$$

Par inspection : $|F_c(\omega)| = |F_b(\omega)|$. Ensuite, on peut faire comme approximation que la phase est constituée de deux droites de -3ω passant par (-100,0) et (100,0). Lorsque $F_b(\omega)$ change se signe, la phase fait un saut de π ou $-\pi$ sur la droite comme en b). Toutefois, ce modèle simpliste est une approximation, car la phase doit être construite de la contribution de chaque Sa et de leur exponentielle complexe respective. Plus l'amplitude du Sa est faible, plus ça contribution est petite. Lorsque les Sa sont assez éloigné l'un de l'autre, la contribution de l'autre peut être négligé.

Pour bien répondre à cette question, il faut mentionner les 2 droites de -3ω avec les sauts de $\pm\pi$ et parler du problème de la contribution de l'un sur l'autre.

Pour mieux observer les sauts de phases, le graphique de la phase est agrandi sur un des lobes principaux.





d)

Les modules en b) et c) sont les mêmes. La phase de b) est une droite de -3ω passant à l'origine avec des sauts de phase lorsque la transformation de Fourier change de signe. En c), il s'agit en première approximation de deux droites de -3ω, l'une passant par (-100,0) et l'autre par (100,0). Il est difficile de prédire exactement la phase, car chaque Sa contribue pour la phase de l'autre.

Problème 3 (10 points)

a)

Par inspection, on obtient l'expression suivante pour la dérivée de $f(t)$:

$$f^{-}(t) = \mathrm{rect}(t-0.5) \Longleftrightarrow \mathrm{Sa}\left(\tfrac{w}{2}\right) e^{-j\frac{w}{2}}$$

L'expression de $F(w)$ est donc:

$$F(w) = \frac{sa\left(\frac{w}{2}\right)}{jw} e^{-j\frac{w}{2}} + \mathrm{TF}\{\mathrm{DC}\}$$

La valeur DC étant de $\frac{1}{2}$, dont la transformée de Fourier est $\pi\delta(w)$, on a donc:

$$F(w) = \frac{\mathrm{Sa}\left(\frac{w}{2}\right) e^{-j\frac{w}{2}}}{jw} + \pi\delta(w)$$

b)

Le taux de décroissance asymptotique est donné par la première dérivée discontinue de $f(t)$. Puisque la première dérivée discontinue est la première, le spectre converge en $\frac{1}{w^2}$.

c)

Puisque le signal n'est pas de carré intégrable, son énergie est infinie.

d)

Pour un signal $f(t)$ dont $\lim_{t\to\infty} f(t) = f(\infty)$ et $\lim_{t\to-\infty} f(t) = f(-\infty)$ existent, la puissance est donnée par$\left(\frac{1}{2}f(\infty) + \frac{1}{2}f\ \ (-\infty)\right)^2$. La reponse est donc $P \ \ = \frac{1}{4}$.

Problème 4 (10 points)

a)

Puisque $g(t)$ est une somme de sinus cardinaux, qui sont des fonctions à support non-borné, il va y avoir de l'interférence entre les différentes copies du sinc. Ceci peut poser problème lorsqu'on veut tracer $g(t)$ à la main. On ne vous demande évidemment pas de tracer parfaitement des sinus cardinaux superposés. On peut donc les tracer suffisamment espacés de sorte que l'interférence soit négligeable. Par exemple, puisque la largeur au premier zéro de $\mathrm{Sa}(t)$est de 2π, on peut tracer les sinus cardinaux espacés de 30π:

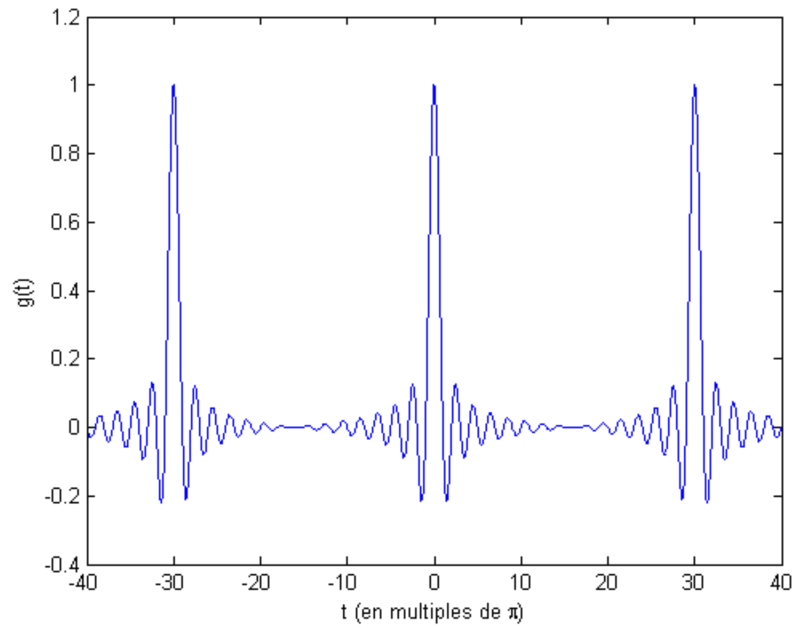


Figure 1: g(t)

b)

En utilisant la dualité et la table fournie à l'examen, on sait que la transformée de Fourier de $\mathrm{Sa}(t)$ est $\pi \mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2}\right)$. En utilisant la propriété de décalage temporel, la transformée de Fourier de $g(t)$ s'écrit

$$\begin{aligned} G(\omega) &= \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2}\right) e^{-jnT\omega} \\ &= \pi \mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-jnT\omega} \\ &= \omega_0 \pi \mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) \end{aligned}$$

où $w_0 = \frac{2\pi}{T}$. $G(w)$ est donc un peigne de diracs espacés de ω_0 multiplié par une boîte dont la largeur est spécifiée par la largeur du sinc qui est périodisé.

c)

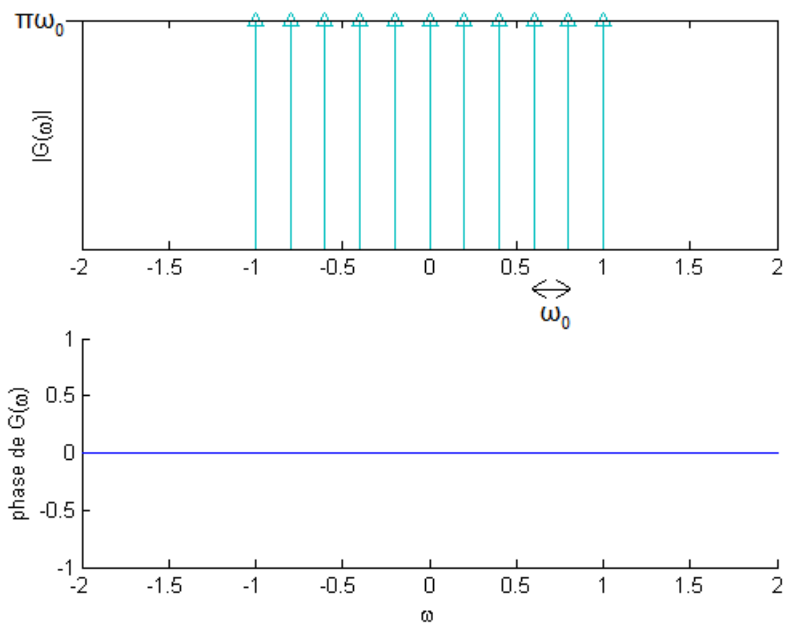


Figure 2: G(ω)