Mathématiques de l'ingénieur I (MAT-1900)
Examen du 18 mars 2019 – solutions

Question 1
(15 points)

Résoudre l'équation différentielle $x^2y' + (y-2x)^2 = 2y^2$.
Suggestion : utilisez une formule de l'aide-mémoire pour calculer l'intégrale obtenue.

On a

$$x^2y' + y^2 - 4xy + 4x^2 = 2y^2 \quad \iff \quad y' - 4\frac{y}{x} + 4 = \left(\frac{y}{x}\right)^2.$$

On pose $u(x) = \frac{y(x)}{x}$.
Alors $y' = (xu)' = u + xu'$ et l'ÉD devient

$$\begin{aligned} u + xu' - 4u + 4 &= u^2 \\ xu' &= u^2 + 3u - 4 = (u-1)(u+4) \\ \frac{1}{(u-1)(u+4)}u' &= \frac{1}{x} \quad (u \neq 1, -4). \end{aligned}$$

Selon l'aide-mémoire, $\displaystyle\int \frac{du}{(u+a)(u+b)} = \frac{1}{b-a}\ln\left|\frac{u+a}{u+b}\right|$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{1}{4-(-1)}\ln\left|\frac{u-1}{u+4}\right| &= \ln|x| + C \\ \frac{u-1}{u+4} &= Ax^5 \\ u - 1 &= Ax^5u + 4Ax^5 \\ (1-Ax^5)u &= 1 + 4Ax^5 \\ u &= \frac{1+4Ax^5}{1-Ax^5} \\ y &= \frac{1+4Ax^5}{1-Ax^5}x. \end{aligned}$$

Les cas $u = 1$ et $u = 4$ correspondent à $y = x$ et $y = -4x$ respectivement. Chacune de ces fonctions est une solution particulière (singulière) de l'ÉD :

$$x^2(x)' + (x-2x)^2 = 2x^2 \quad \text{et} \quad x^2(-4x)' + (-4x-2x)^2 = 2(-4x)^2.$$

Question 2
(15 points)

Trouver la fonction $y(x)$ qui satisfait $2y'' = y' + 3y$ et les conditions initiales $y(0) = 5$ et $y'(0) = 0$.

Il s'agit d'une équation linéaire homogène à coefficients constants :

$$y'' - \frac{1}{2}y' - \frac{3}{2}y = 0.$$

Son équation caractéristique est

$$0 = \lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{3}{2} = (\lambda - \tfrac{3}{2})(\lambda + 1).$$

Par conséquent, la solution générale est

$$y = c_1 e^{\frac{3}{2}x} + c_2 e^{-x}.$$

Les conditions initales donnent

$$5 = y(0) = c_1 + c_2 \quad \text{et} \quad 0 = y'(0) = \frac{3}{2}c_1 e^{\frac{3}{2}x} - c_2 e^{-x}\Big|_{x=0} = \frac{3}{2}c_1 - c_2.$$

Donc $\frac{5}{2}c_1 = 5 \Leftrightarrow c_1 = 2$ et $c_2 = 5 - c_1 = 3$.
Rép. : $y = 2e^{\frac{3}{2}x} + 3e^{-x}$.

Question 3
(20 points)

Utiliser la méthode des coefficients indéterminés pour résoudre l'équation différentielle $y''+y = 5xe^{2x}$.

Il s'agit d'une équation linéaire inhomogène à coefficients constants. Son équation caractéristique est

$$0 = \lambda^2 + 1 = (\lambda - i)(\lambda + i).$$

Par conséquent, la solution générale de l'ÉD homogène associée est

$$y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

La méthode des coefficients indéterminés suggère de chercher une solution particulière de la forme

$$y_p = (Ax + B)e^{2x}.$$

On a

$$\begin{aligned} y_p' &= Ae^{2x} + 2(Ax + B)e^{2x} = (2Ax + A + 2B)e^{2x}, \\ y_p'' &= 2Ae^{2x} + 2(2Ax + A + 2B)e^{2x} = (4Ax + 4A + 4B)e^{2x}. \end{aligned}$$

Ainsi, on doit avoir

$$5xe^{2x} = (4Ax + 4A + 4B)e^{2x} + (Ax + B)e^{2x} = 5Axe^{2x} + (4A + 5B)e^{2x}$$

et donc $5A = 5$ et $4A + 5B = 0$, ce qui donne $A = 1$ et $B = -\frac{4}{5}$.
On obtient donc

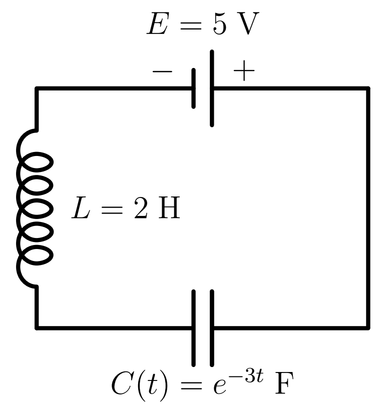
$$y_p = xe^{2x} - \frac{4}{5}e^{2x}$$

et la solution générale est

$$y_g = y_h + y_p = c_1 \cos x + c_2 \sin x + xe^{2x} - \frac{4}{5}e^{2x}.$$

Question 4
(15 points)

Considérer le circuit électrique ci-contre où sont branchés en série une source de courant continu de $E = 5$ volts, une inductance de $L = 2$ henrys et un condensateur variable dont la capacité en fonction du temps est $C(t) = e^{-3t}$ farads. Donner l'équation différentielle qui modélise le courant $I(t)$ au temps t dans ce circuit. *Il n'est pas demandé de résoudre cette équation différentielle.*



D'après la loi des voltages de Kirchhoff, $E(t) = E_L(t) + E_C(t)$.
D'après la loi d'inductance, $E_L(t) = LI' = 2I'$.
D'après la loi de Coulomb, $E_C(t) = \frac{1}{C}Q = \frac{1}{e^{-3t}}Q = e^{3t}Q$.
On a donc l'ÉD

$$2I' + e^{3t}Q = 5.$$

Puisque $Q' = I$, en dérivant par rapport à t, on obtient

$$\begin{aligned} 2I'' + 3e^{3t}Q + e^{3t}I &= 0 \\ 2I'' + 3(5 - 2I') + e^{3t}I &= 0 \\ 2I'' - 6I' + e^{3t}I &= -15. \end{aligned}$$

Question 5
(15 points)

Considérer l'équation différentielle linéaire à coefficients constants

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = r(x). \qquad (\star)$$

On note par $p(\lambda)$ le polynôme caractéristique de l'équation homogène (H) associée à $(\star)$. Pour chacun des cas ci-dessous, donner la solution générale y_h de (H) et la forme de la solution particulière y_p de $(\star)$ suggérée par la méthode des coefficients indéterminés. *Il n'est pas demandé de calculer ces coefficients indéterminés.*

Aucune justification requise. Utilisez le papier brouillon pour vos calculs.

a) $p(\lambda) = \lambda^2 + 3, \qquad r(x) = x\sin(3x)$.

$y_h = c_1\cos(\sqrt{3}x) + c_2\sin(\sqrt{3}x)$

$y_p = (Ax + B)\cos(3x) + (Cx + D)\sin(3x)$

b) $p(\lambda) = \lambda(\lambda^2 - 2\lambda + 5), \qquad r(x) = 1 - \cos x.$

$$y_h = c_1 + e^x(c_2\cos(2x) + c_3\sin(2x))$$
$$y_p = Ax + B\cos x + C\sin x$$

c) $p(\lambda) = (\lambda - 5)(\lambda + 2)^2, \qquad r(x) = x^3 e^{-5x}.$

$$y_h = c_1 e^{5x} + e^{-2x}(c_2 + c_3 x)$$
$$y_p = e^{-5x}(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)$$

Question 6

(20 points)

Compléter la grille suivante en inscrivant un et un seul × par colonne.

Une bonne réponse vaut 5 points, une mauvaise réponse ou une absence de réponse vaut 0 point.

Aucune justification requise. Utilisez le papier brouillon pour vos calculs.

	a)	b)	c)	d)
VRAI	×		×	
FAUX		×		×

Pour chacun des énoncés suivants, dire s'il est vrai ou faux.

a) L'un des changements de variable vu en classe permet de convertir l'équation différentielle $y^2y'' + (y')^3 = 0$ en un système de deux équations différentielles d'ordre 1.

VRAI. Il suffit de poser $z(y) := y'(x)$.

b) Les fonctions $f(x) = \ln(x^2 + 4x + 4)$ et $g(x) = \ln(\frac{1}{x+2})$ sont linéairement indépendantes sur $[0, \infty)$.

FAUX. $f(x) = 2\ln(x + 2) = -2g(x)$.

c) Selon la méthode de Lagrange, pour trouver une solution particulière de l'équation différentielle $xy' - (x + 3)y = 4xe^x$, il suffit de chercher une fonction de la forme $u(x)x^3e^x$.

VRAI. En effet, x^3e^x est une solution particulière de $xy' - (x + 3)y = 0$.

d) Soient $p(x)$ et $q(x)$ des fonctions et soit $(\star)$ l'équation différentielle $y' + p(x)y = q(x)$. Si $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont des solutions particulières linéairement indépendantes de $(\star)$, alors $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$ est la solution générale de $(\star)$.

FAUX. L'équation différentielle étant d'ordre 1, sa solution générale dépend de 1 paramètre. Si le résultat était vrai, alors $y_1 - y_2$ serait une solution particulière de $(\star)$ et aussi une solution particulière de l'équation homogène associée (H) et donc $q(x) = 0$. Mais alors c_1y_1 serait la solution générale de (H) et de même pour c_2y_2. On déduirait que y_1 et y_2 sont linéairement dépendantes, ce qui est une contradiction.