GEl-16132 Circuits

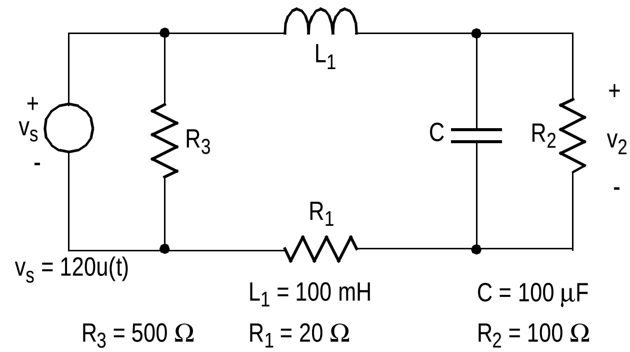
Corrigé du test no. 4 Hiver 2000

Question no.1

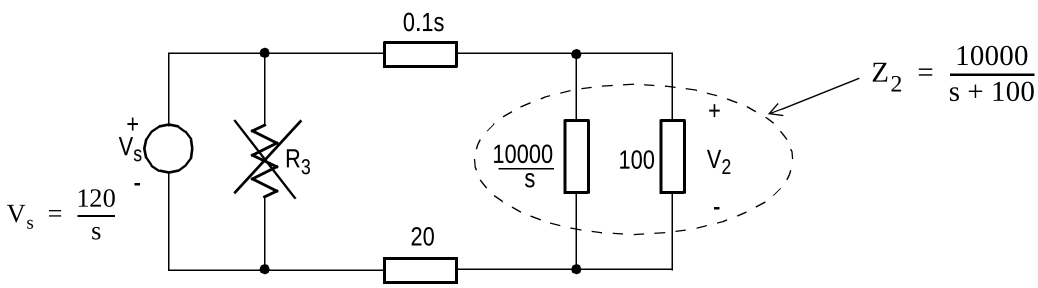
Le circuit suivant est initialement au repos.
La source v_s représente une source continue de 120 V que l'on applique brusquement à t = 0:

$$v_s = 120u(t)$$

a) **En utilisant la transformation de Laplace**, déterminer (sans tracer) la tension $v_2(t)$.
b) Quelle est la durée du régime transitoire?



a) Circuit transformé (domaine de Laplace):



La tension V_2 est calculée à l'aide de la loi du diviseur de tension:

$$V_2 = \frac{Z_2}{Z_2 + 0.1s + 20} \times V_s = \frac{\frac{10000}{s + 100}}{\frac{10000}{s+100} + 0.1s + 20} \times \frac{120}{s} = \frac{1.2\times10^6}{s(0.1s^2 + 30s + 12000)} = \frac{1.2\times10^7}{s(s^2 + 300s + 1.2\times10^5)}$$

Les pôles de V_2: $p_1 = 0$ $p_2 = -150 + j312.25$ $p_3 = -150 - j312.25$

On décompose V_2 en fractions partielles:

$$V_2 = \frac{1.2\times10^7}{s(s^2 + 300s + 1.2\times10^5)} = \frac{1.2\times10^7}{s(s + 150 - j312.25)(s + 150 + j312.25)}$$

$$V_2 = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s + 150 - j312.25)} + \frac{B^*}{(s + 150 + j312.25)}$$

On calcule les constantes A et B:

$$A = \left.\frac{1.2\times10^7}{(s^2 + 300s + 1.2\times10^5)}\right|_{s = 0} = 100$$

$$B = \left.\frac{1.2\times10^7}{s(s + 150 + j312.25)}\right|_{s = -150 + j312.25} = 55.47e^{j2.694}$$

La tension $v_2(t)$ est égale à la transformée inverse de Laplace de V_2:

$$\boxed{v_2(t) = [100 + 110.94e^{-150t}\cos(312.25t + 2.694)]u(t)}$$

b) La durée du régime transitoire est égale à 5 fois la constante de temps: $d = \frac{5}{150} = 33.3\,\text{ms}$.

Question no.2

Le circuit suivant est initialement au repos.

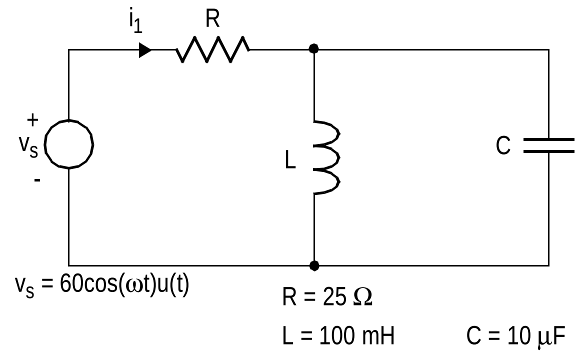
La source v_s représente une source sinusoïdale d'amplitude 60 V et de fréquence 50 Hz que l'on applique brusquement à t = 0:

$$v_s = 60\cos(\omega t)u(t)$$

avec $\omega = 100\pi$.

a) **En utilisant la transformation de Laplace**, déterminer (sans tracer) le courant $i_1(t)$.

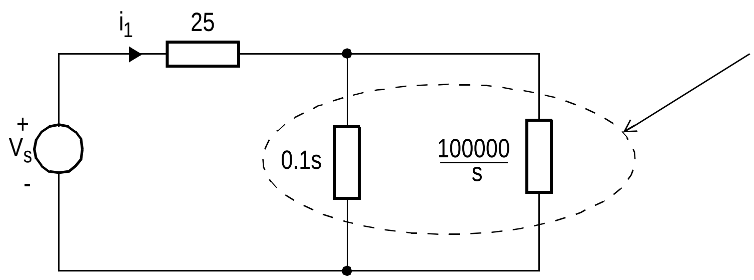
b) Quelle est la durée du régime transitoire?



a) Circuit transformé (domaine de Laplace):

$$V_s = \frac{60s}{s^2+\omega^2}$$

$\omega = 100\pi$ rad/s



$$Z_2 = \frac{10000s}{0.1s^2+100000}$$

Le courant I_1 est donné par:

$$I_1 = \frac{V_s}{25+Z_2} = \frac{60s}{s^2+\omega^2}\times\frac{1}{25+\dfrac{10000s}{0.1s^2+100000}} = \frac{60s}{s^2+\omega^2}\times\frac{0.1s^2+100000}{2.5s^2+10000s+2.5\times10^6}$$

$$I_1 = \frac{60s}{s^2+\omega^2}\times\frac{0.1s^2+100000}{2.5(s^2+4000s+1\times10^6)} = \frac{6s(s^2+1\times10^6)}{2.5(s^2+\omega^2)(s^2+4000s+1\times10^6)}$$

Les pôles de I_1 sont: $p_1 = j\omega$ $p_2 = -j\omega$ $p_3 = -3732.1$ $p_4 = -267.9$

On décompose I_1 en fractions partielles:

$$I_1 = \frac{6s(s^2+1\times10^6)}{2.5(s-j\omega)(s+j\omega)(s+3732.1)(s+267.9)} = \frac{A}{s-j\omega}+\frac{A^*}{s+j\omega}+\frac{B}{s+3732.1}+\frac{C}{s+267.9}$$

On calcule les constantes A, B et C:

$$A = \left.\frac{6s(s^2+1\times10^6)}{2.5(s+j\omega)(s+3732.1)(s+267.9)}\right|_{s=j\omega} = 0.7e^{-j0.949}$$

$$B = \left.\frac{6s(s^2+1\times10^6)}{2.5(s^2+\omega^2)(s+267.9)}\right|_{s=-3732.1} = 2.752$$

$$C = \left.\frac{6s(s^2+1\times10^6)}{2.5(s^2+\omega^2)(s+3732.1)}\right|_{s=-267.9} = -1.167$$

Le courant $i_1(t)$ est égale à la transformée inverse de Laplace de I_1:

$$\boxed{i_1(t) = [1.4\cos(100\pi t-0.949)+2.752e^{-3732.1t}-1.167e^{-267.9t}]u(t)}$$

b) La durée du régime transitoire est égale à 5 fois la constante de temps la plus longue: $d = \dfrac{5}{267.9} = 18.7\text{ms}$