Intra

MAT-2910 : Analyse Numérique pour ingénieur

- Donner tous les développements et calculs. **Pour recevoir des points, toute réponse doit être convenablement** <u>JUSTIFIÉE</u>**.**
- Seules les calculatrices avec l'auto-collant de la Faculté sont autorisées.
- Répondre aux questions sur le questionnaire. **Utiliser le verso des feuilles si nécessaire**.
- Un aide mémoire se retrouve à la fin du questionnaire, vous pouvez le détacher.
- N'oubliez pas d'identifier chaque page.

Je suis bien l'étudiant dont le nom et le numéro de dossier sont écrits ci-dessous. J'ai lu et compris les directives et je m'engage à les respecter.	
Nom :	
Prénom :	
Matricule :	
Signature :	

À remplir par le(s) correcteur(s)

Q1 (/15)	Q2 (/20)	Q3 (/35)	Q4 (/20)	Q5 (/10)	Total

Question 1 (15 pts) **Nom, Prénom :**________________________________

(a) [10 pts] Soient $\tilde{x} = 0.059$, $\tilde{y} = 0.1$ et $\tilde{z} = 0.25$ des approximations de x, y et z, respectivement. On suppose qu'elles ont toutes un chiffre significatif. Donner une approximation de $x \times (z - y)$ et déterminer combien elle a de chiffres significatifs.

(b) [5 pts] Calculer $\tilde{x} \times (\tilde{z} - \tilde{y})$ en arithmétique flottante avec 1 chiffre dans la mantisse et en utilisant l'arrondi.

Réponses :

(a) On a $\Delta x = 0.5 \times 10^{-2}$, $\Delta y = 0.5 \times 10^{-1}$ et $\Delta z = 0.5 \times 10^{-1}$. On pose $f(x, y, z) = x \times (z - y)$ et on utilise la formule de propagation de l'erreur (voir aide-mémoire) pour trouver : $\Delta f = 0.00665 \leq 0.5 \times 10^{-1}$. Comme $f(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = 0.00885$, cette approximation possède 0 chiffres significatifs.

(b) [5 pts] On calcule $fl(\, fl(\tilde{x}) \times fl(fl(\tilde{z}) - fl(\tilde{y}))\,)$ et on obtient 0.1×10^{-1}.

Question 2 (20 pts) **Nom, Prénom :**________________________________

Soit $f(x) = 1 - \cos x$

(a) [5 pts] Déterminer le polynôme de Taylor $p_2(x)$ de degré 2 en $x_0 = 0$.

(b) [5 pts] Pourquoi peut-on dire qu'il donne une approximation d'ordre 4 de $f(x)$?

(c) [5 pts] Si x est divisé par 3, par combien environ est divisée l'erreur $|f(x) - p_2(x)|$? (justifier !)

(d) [5 pts] Déterminer une majoration de l'erreur pour $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Réponses :

(a) $p_2(x) = x^2/2$

(b) $f'''(x_0) = 0$ et $f''''(x_0) \neq 0$

(c) Ici $h = x$. $E_2(x) = E_3(x) \simeq C|x|^4$. Donc $E_2(x/3) \simeq C|x|^4/3^4$. L'erreur est donc divisée par $3^4 = 81$.

(d) $E_2(x) = E_3(x) = |\frac{f''''(\xi)}{4!}||x|^4$. Or $f''''(x) = -\cos(x)$ et $|\cos(x)| \leq 1$, donc $E_2(x) \leq \frac{1}{4!}|x|^4$

Question 3 (35 pts) **Nom, Prénom :**________________________________

Soit $f(x) = 1 - \cos(x)$. On considère l'équation $f(x) = 0$.

(a) [5 pts] Montrer que $r = 0$ est l'unique racine dans l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

(b) [5 pts] Si on applique la méthode des points fixes avec $g(x) = f(x) + x$, la méthode converge-t'elle ? Si oui, à quel ordre ?

Réponse :

(a) On a $f'(x) = \sin(x)$, est négatif sur $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ et positif sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. f est donc (strictement) décroissante sur $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ et (strictement) croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. $r = 0$ est donc l'unique racine dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

(b) On a $g'(x) = f'(x) + 1 = \sin(x) + 1$,
donc $g'(0) = 1$,
c'est donc indéterminé (on ne peut conclure sur la convergence/divergence).

suite de la question 3, page suivante...

(c) [5 pts] Peut-on appliquer le méthode de la bissection sur l'intervalle $[-1, \frac{\pi}{2}]$? Si oui, combien faut-il d'itérations de la méthode pour que l'erreur absolue soit plus petite que 0.01 ?

(d) [10 pts] Sans faire d'itérations, déterminer l'ordre de convergence de la méthode de Newton pour la racine $r = 0$ de $f(x) = 0$? Le cas échéant, déterminer le taux de convergence.

Réponse :

(c) On a $f(-1) \times f(\frac{\pi}{2}) > 0$
La méthode de la bissection ne peut donc être appliquée sur l'intervalle $[-1, \frac{\pi}{2}]$.

(d) On a $f'(0) = 0$, et $f''(x) = \cos(x)$, donc $f''(0) = 1 \neq 0$.
La racine est d'ordre de multiplicité $m = 2$ (racine double), donc la méthode de Newton est d'ordre 1.
Le taux de convergence est $1 - 1/m = 1/2$.

suite de la question 3, page suivante...

(e) [10 pts] Faire 2 itérations de la méthode de Steffenson appliquée à la fonction g en partant de $x_0 = 0.1$. Quel semble être l'ordre de convergence ?

Réponse :
On trouve
$x_1 = 0.05...$
$x_2 = 0.025...$
On pose
$E_0 = |x_0 - r| = |x_0|$
$E_1 = |x_1 - r| = |x_1|$
$E_2 = |x_2 - r| = |x_2|$
Or $E_1/E_0 \simeq E_2/E_1 \simeq 1/2$, la convergence semble donc linéaire (d'ordre 1)

Question 4 (20 pts) **Nom, Prénom :**________________________________

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(a) [15 pts] Faire une factorisation LU la plus économique possible, en détaillant et justifiant la démarche.

Réponse :

La matrice a une structure bande qui sera conservée dans la factorisation
Elle est symétrique
Elle est définie positive car :

les termes diagonaux sont positifs et la matrice est à diagonale strictement dominante
ou

les déterminants des sous-matrices principales sont strictement positifs

La matrice A admet donc une factorisation de Choleski.
La factorisation de Choleski donne

$$L = \begin{pmatrix} \sqrt(5) & 0 & 0 \\ 2/\sqrt{5} & \sqrt{21/5} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

suite de la question 4, page suivante...

(b) [5 pts] Sachant que la factorisation LU d'une matrice de taille $n \times n$ nécessite environ $\frac{2}{3}n^3$ opérations élémentaires, et que la résolution d'un système triangulaire nécessite environ n^2 opération élémentaires, combien d'opérations élémentaires sont nécessaires pour le calcul de l'inverse d'une matrice admettant une factorisation LU (justifier clairement la réponse) ?

Réponse :
L'inversion de la matrice A revient à résoudre n fois un système linéaire de la forme $Ax = b$ avec n choix différents du second membre b (les n vecteurs de la base euclidienne). En ne faisant qu'une seule fois (et en conservant) la factorisation de A et sachant que la résolution de $Ax = b$, c'est-à-dire $LUx = b$, nécessite la résolution de 2 systèmes triangulaires, il faut donc $\frac{2}{3}n^3 + n \times 2 \times n^2 = \frac{8}{3}n^3$ opérations élémentaires.

Question 5 (10 pts) **Nom, Prénom :**________________________________

On considère le système non-linéaire

$$x_1 - x_2^2 + 1 = 0$$
$$x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$$

(a) [1 pt] Vérifier que $r = (0,\ 1)$ est une racine.

(b) [4 pts] La convergence de Newton pour cette racine est-elle linéaire ou d'ordre au moins 2 ?

(c) [5 pts] Faire une itération à partir de (1, 1).

Réponse :

(a) Avec $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$, les 2 équations du système sont bien vérifiées.

(b) On a

$$J(x) = J(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 & -2x_2 \\ 2x_1 & 2x_2 \end{pmatrix}$$

Donc

$$J(r) = J(0,1) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On a $det(J(r)) = 2$. Puisque $det(J(r)) \neq 0$, $J(r)$ est inversible et la convergence est d'ordre au moins 2.

(c) On calcule $x^{(1)} = x^{(0)} + \delta x$ où δx est solution de $J(1,\ 1)\delta x = -F(1,\ 1)$ où

$$F(x) = F(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2^2 + 1 \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 \end{pmatrix}$$

Or

$$J(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

et

$$F(1,1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On obtient

$$\delta x = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/6 \end{pmatrix}$$

et donc

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 7/6 \end{pmatrix}$$

Aide-mémoire MAT-2910

Analyse d'erreurs

— Erreur du développement de Taylor :

$$R_n(h) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_h)}{(n+1)!} h^{n+1} \qquad \text{où } \xi_h \text{ est compris entre } x_0 \text{ et } x_0 + h$$

— Propagation d'erreurs :

$$\Delta f \simeq \left|\frac{\partial f(x^*, y^*, z^*)}{\partial x}\right| \Delta x + \left|\frac{\partial f(x^*, y^*, z^*)}{\partial y}\right| \Delta y + \left|\frac{\partial f(x^*, y^*, z^*)}{\partial z}\right| \Delta z$$

Équations non linéaires

— Convergence des méthodes de points fixes : si $e_n = x_n - r$ alors :

$$e_{n+1} = g'(r)e_n + \frac{g''(r)e_n^2}{2} + \frac{g'''(r)e_n^3}{3!} + \cdots$$

— Méthode de Steffenson : x_0 donné

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(g(x_n) - x_n)^2}{g(g(x_n)) - 2g(x_n) + x_n}$$

Systèmes d'équations algébriques

— Normes vectorielles :

$$||\vec{x}||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad ||\vec{x}||_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

— Normes matricielles :

$$||A||_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|, \quad ||A||_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|,$$

— Borne pour l'erreur :

$$\frac{1}{\mathrm{cond} A} \frac{||\vec{r}||}{||\vec{b}||} \leq \frac{||\vec{e}||}{||\vec{x}||} \leq \mathrm{cond} A \, \frac{||\vec{r}||}{||\vec{b}||}$$