Vision numérique GIF-4100 / GIF-7001

Examen partiel 1 - Solution

Question 1 Coordonnées homogènes / Homogeneous coordinates

A. Si / If $\quad \underline{p}^T = [x\ y\ z]^T \longrightarrow \tilde{\underline{p}} = [bx\ by\ bz\ b]^T$

B. Oui / Yes

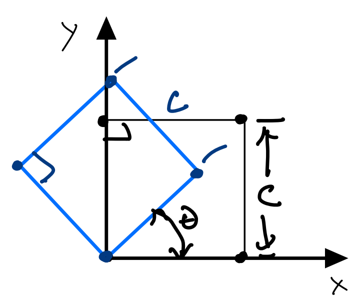
$$\tilde{\underline{p}} = [5x\ 5y\ 5z\ 5] \longrightarrow \underline{p}^T = \left[\frac{5x}{5}\ \frac{5y}{5}\ \frac{5z}{5}\right]^T = [x\ y\ z]^T$$

C. Oui, la matrice préserve les angles et les longueurs

Yes, the matrix preserves angles and lengths

Explication : $\tilde{M}$ est une matrice de rotation qui est une transformation rigide qui n'affecte pas les angles et les longueurs

Justification : $\tilde{M}$ is a rotation matrix which is a rigid transformation. A rigid transformation does not have an impact on angles and lengths



Lors d'une rotation, un carré demeure un carré

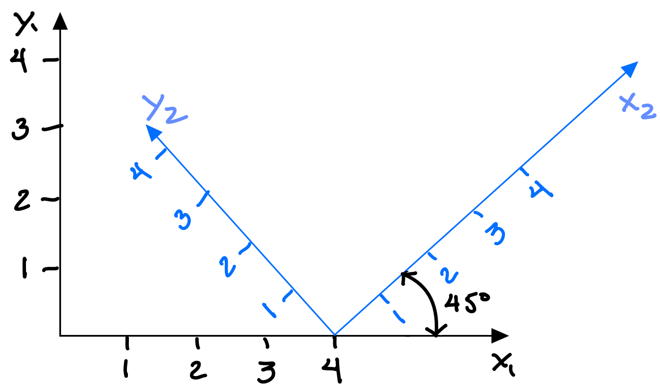
During a rotation, a square remains a square

Question 2 Transformations rigides / Rigid transformations

Les calculs préliminaires permettant de résoudre les sous-questions sont les suivants

Preliminary calculations allowing the solution of sub-questions are as follows:

En utilisant les post-multiplications, on peut écrire / Using post-multiplications, one can write



$$\underset{\sim}{\underline{P}}_1 = \underset{\sim}{\underline{\underline{T}}}\,\underset{\sim}{\underline{\underline{R}}}\,\underset{\sim}{\underline{P}}_2 \qquad (1)$$

avec / with

$$\underset{\sim}{\underline{\underline{T}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

$$\underset{\sim}{\underline{\underline{R}}} = \begin{bmatrix} \cos 45^\circ & -\cos 45^\circ & 0 & 0 \\ \cos 45^\circ & \cos 45^\circ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

par conséquent, on a avec (1), (2) et (3) que / Hence, using (1), (2) and (3), one has

$$\tilde{\underline{P}}_2 = \tilde{\underline{\underline{R}}}^{-1} \, \tilde{\underline{\underline{T}}}^{-1} \, \tilde{\underline{P}}_1 \qquad (4)$$

avec / with

$$\tilde{\underline{\underline{T}}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (5)$$

$$\tilde{\underline{\underline{R}}}^{-1} = \tilde{\underline{\underline{R}}}^{T} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (6)$$

A) $\underline{P}_2^T = [\sqrt{2} \; \sqrt{2} \; 0 \; 1]^T$ dans / in $x_2 y_2 z_2$

On peut utiliser (1), (2) et (3) / We can use (1), (2) and (3)

$$\tilde{\underline{P}}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\underline{P}}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\underline{P}}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \underline{P}_1^T = [4 \; 2 \; 0]^T$$

B) On peut utiliser (4) (5) et (6) / We can use (4), (5) and (6)

$$\underline{\tilde{P}}_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

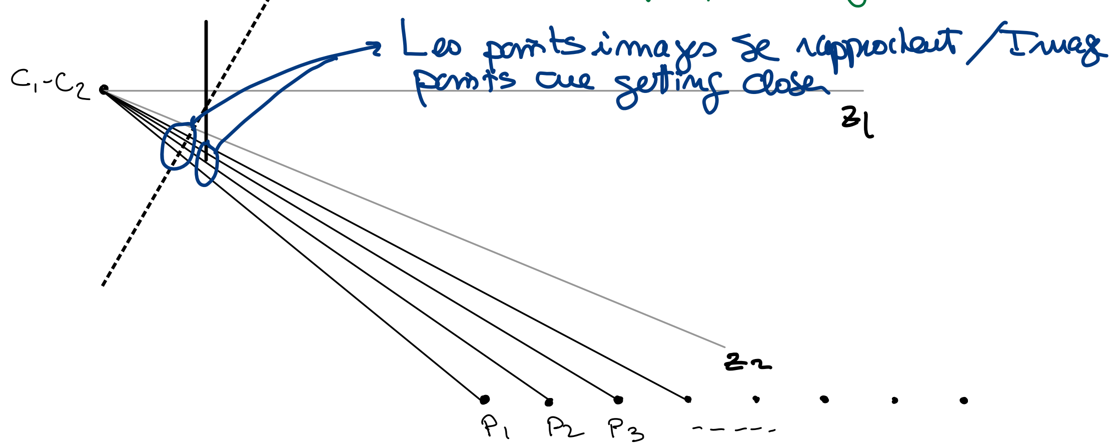
$$\underline{\tilde{P}}_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\tilde{P}}_2 = \begin{bmatrix} -3/\sqrt{2} + 1/\sqrt{2} \\ +3/\sqrt{2} + 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/\sqrt{2} \\ +4/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cancel{2}\sqrt{2}/\cancel{2} \\ \cancel{4}\sqrt{2}/\cancel{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\tilde{P}}_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \underline{P}_2 = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}^T$$

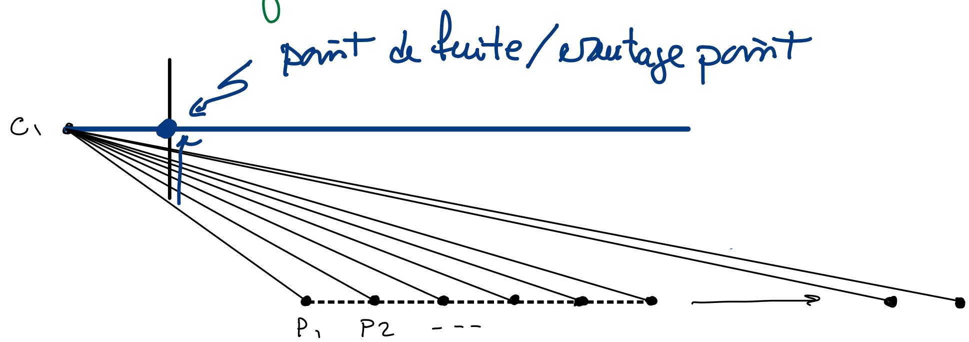
Question 3 Projection de perspective et point de fuite / Perspective projection and vantage point

A) Non, les points se rapprochent les-uns des autres à cause de la projection de perspective / No, the points are becoming closer to each other due to the perspective projection



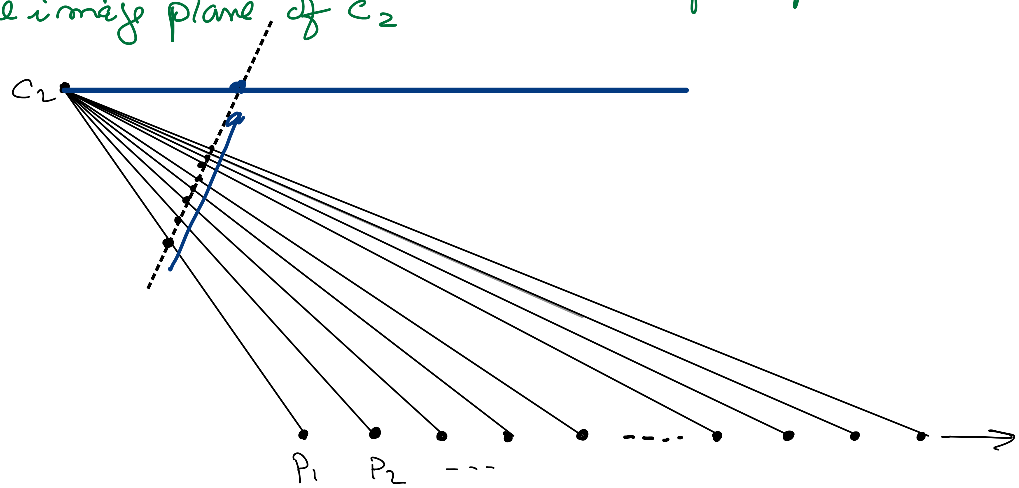
B) Le point de fuite se situe à l'intersection entre une droite passant par C_1 et parallèle à la droite du repère monde et le plan image. On peut le voir sur le dessin suivant/

The vanishing point is located at the intersection between a line passing through C_1 and parallel to the line in the world reference frame and the image plane. this is shown in the diagram below

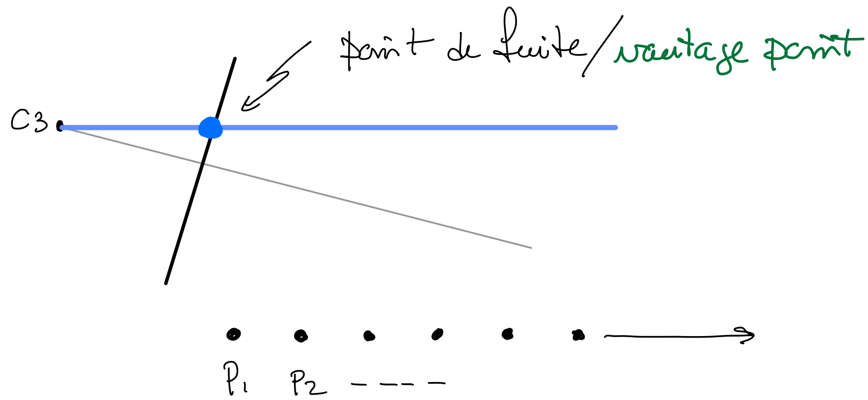


C) Ici aussi, le point de fuite, tel que montré sur la figure, se situe à l'intersection d'une droite passant par C_2 et parallèle à la droite dans le repère monde avec le plan image de C_2

Here again, the vanishing point, as shown in the diagram, is located at the intersection between a line passing through C_2 and parallel to the line in the world reference frame and the image plane of C_2

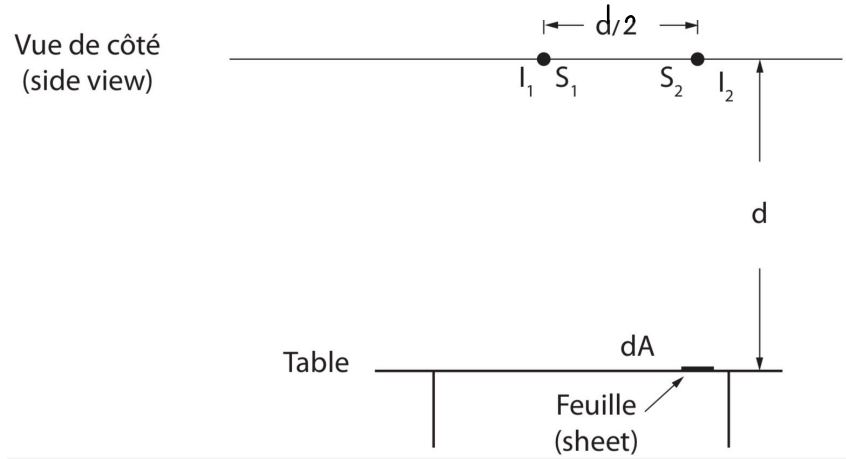


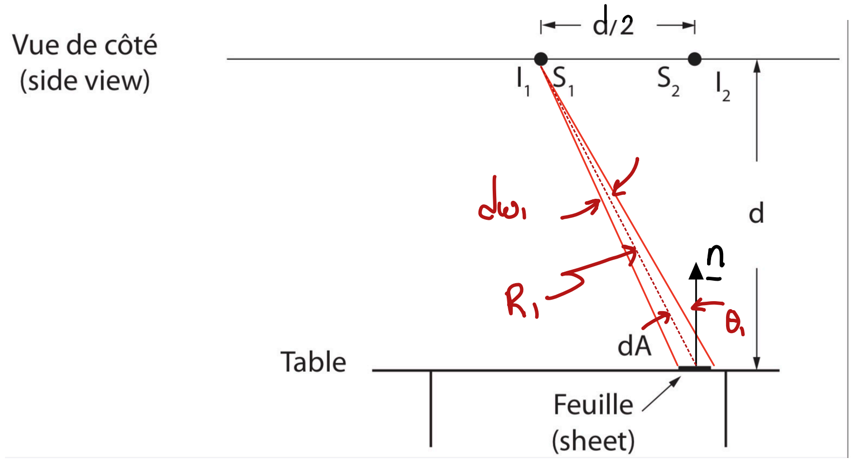
D) Il suffit de chercher l'intersection entre la droite parallèle à la droite du repère monde qui passe par C_3 / we simply have to find the intersection between a line which is parallel to the line in the world reference frame and passing through C_3 and the image plane



Question 4) Radiométrie / Radiometry

La géométrie du problème est la suivante
the geometry of the problem is





L'illuminance dE_1 reçue par dA de S_1 est / The illuminance dE_1 received by dA from S_1 is

$$dE_1 = \frac{I_1 \, d\omega_1}{dA} \qquad (1)$$

L'angle solide sous-tendu par dA à la source S_1 est / The solid angle subtended by dA at source S_1 is

$$d\omega_1 = \frac{dA \cos\theta_1}{R_1^2} \qquad (2)$$

avec / with

$$\cos\theta_1 = \frac{d}{\sqrt{d^2+(d/2)^2}} = \frac{d}{\sqrt{d^2+d^2/4}} = \frac{d}{\sqrt{\frac{4d^2+d^2}{4}}} = \frac{2\cancel{d}}{\sqrt{5}\cancel{d}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \simeq 0.9 \qquad (3)$$

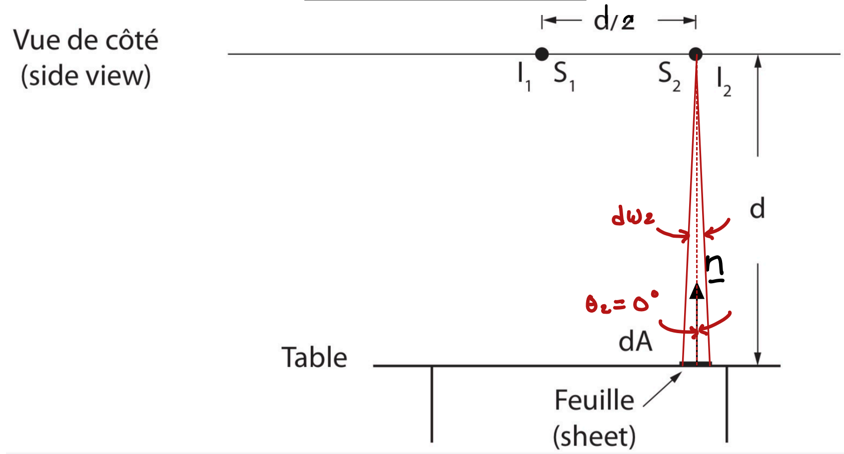
et / and

$$R_1^2 = d^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2 = d^2+\frac{d^2}{4} = \frac{5}{4}d^2 \qquad (4)$$

Avec (2), (3) et (4) on a pour dE_1 / with (2), (3) and (4) we have for dE_1

$$dE_1 = \frac{I_1}{\cancel{dA}} \frac{\cancel{dA}\cos\theta_1}{R_1^2} = \frac{I_1 \times 0.9}{5/4\, d^2} = \frac{4\times 0.9}{5}\frac{I_1}{d^2} = \frac{0.72 I_1}{d^2} \qquad (5)$$

$$\boxed{dE_1 = \frac{0.72\, I_1}{d^2}} \qquad (5)$$



L'illuminance dE_2 reçue de S_2 par dA est / the illuminance dE_2 received by dA from S_2 is

$$dE_2 = \frac{I_2\, d\omega_2}{dA} \qquad (6)$$

Dans ce cas, / In this case,

$$d\omega_2 = \frac{dA \cos\theta_2}{d^2} \qquad (7)$$

avec / with

$$\cos\theta_2 = \cos 0° = 1 \qquad (8)$$

En utilisant (7) et (8) dans (6) on a / With (7) and (8) in (6) we get

$$dE_2 = I_2 \frac{\cancel{dA} \cdot 1}{d^2\, \cancel{dA}}$$

$$\boxed{dE_2 = \frac{I_2}{d^2}} \qquad (9)$$

On veut $dE_1 = dE_2$ / We want $dE_1 = dE_2$.

Avec (5) et (9) on a / with (5) and (9) we have

$$\frac{0.72\, I_1}{\cancel{dz}} = \frac{I_2}{\cancel{dz}} \qquad (10)$$

$$\boxed{\frac{I_2}{I_1} = 0.72}$$

Question 5) Projection de perspective et point de fuite / Perspective projection and vantage point

On a les équations (2), (3) et (4) / Given equations (2), (3) and (4):

$$\underline{X}(\lambda) = \underline{\tilde{P}} + \lambda \underline{\tilde{D}} \qquad (2)$$

$$\underline{\tilde{D}} = [\underline{d}^T \ 0]^T \qquad (3)$$

$$\underline{\underline{\tilde{M}}} = \underline{\underline{K}}[\underline{\underline{I}} \ \underline{0}] \qquad (4)$$

A) En utilisant l'équation de projection de perspective / Using the perspective projection equation

$$\underline{\tilde{x}}(\lambda) = \underline{\underline{\tilde{M}}}\ \underline{\tilde{X}}(\lambda)$$

$$\underline{\tilde{x}}(\lambda) = \underline{\underline{\tilde{M}}}(\underline{\tilde{P}} + \lambda \underline{\tilde{D}})$$

$$\underline{\tilde{x}}(\lambda) = \underline{\underline{\tilde{M}}}\,\underline{\tilde{P}} + \lambda \underline{\underline{\tilde{M}}}\,\underline{\tilde{D}}$$

$$\underline{\tilde{x}}(\lambda) = \underline{\tilde{p}} + \lambda\left(\underline{\underline{K}}[\underline{\underline{I}} \ \underline{0}]\right)\begin{bmatrix} \underline{d} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\underline{\tilde{x}}(\lambda) = \underline{\tilde{p}} + \lambda \underline{\underline{K}}\,\underline{d}} \qquad (5)$$

où / where $\underline{\tilde{p}}$ est l'image de $\underline{\tilde{P}}$ / is the image of $\underline{\tilde{P}}$

B) Si on prend (5) avec $\lambda \to \infty$ / taking (5) with $\lambda \to \infty$

$$\underline{\tilde{x}}(\lambda) = \left[\underline{\tilde{p}} + \lambda \underline{\underline{K}}\, \underline{d}\right]_{\lambda \to \infty} \qquad (6)$$

Quand $\lambda \to \infty$, $\underline{\tilde{p}}$ devient non significatif. De plus, comme $\lambda \underline{\underline{K}}\, \underline{d}$ est connu à l'échelle près, λ peut y être incorporé. On peut donc écrire / When $\lambda \to \infty$, $\underline{\tilde{p}}$ becomes negligible. In addition, since $\lambda K\, \underline{d}$ is only defined up to scale λ can be blended to this term. Hence

$$\underline{\tilde{x}}(\lambda) = \underline{\underline{K}}\, \underline{d} \qquad (7)$$

Le point de fuite se "backprojecte" donc dans une direction $\underline{d}$ et ne dépend pas de la position $\underline{P}$ de la ligne

The vantage point thus back projects along a direction $\underline{d}$ and does not depend of the position $\underline{P}$ of the line

---

Question 6) Homographie / Homography

On a / we have

$$\underline{\tilde{p}} = \underline{\underline{K}} \left[\underline{\underline{I}} \;\; \underline{0}\right] \underline{\tilde{P}} \qquad (5)$$

$$\underline{\tilde{p}}' = \underline{\underline{K}} \left[\underline{\underline{R}}^T \;\; \underline{0}\right] \underline{\tilde{P}} \qquad (6)$$

A) De (5) on peut écrire / From (5), one can write

$$\underline{\tilde{P}} = \underline{\underline{K}}^{-1} \underline{\tilde{p}} \qquad (7)$$

En remplaçant (7) dans (6) on a / Replacing (7) in (6) yield

$$\underline{\tilde{p}}' = \underline{\underline{K}}\, \underline{\underline{R}}^T \underline{\underline{K}}^{-1} \qquad (8)$$

B) L'expression générale de l'homographie est / The general expression for an homography is

$$\tilde{\underline{\underline{H}}} = \underline{\underline{K}}' \left[\underline{\underline{R}}^T - \frac{(-\underline{\underline{R}}^T \underline{t})\underline{n}^T}{d} \right] \underline{\underline{K}}^{-1}$$

L'expression obtenue en (B) ne dépend pas de $\underline{t}$, d et $\underline{n}^T$. Dans le cas d'une rotation autour du centre de projection, on peut conclure que les points dans le repère monde n'ont pas à résider sur un plan.

The expression in (B) does not depend on $\underline{t}$, d and $\underline{n}^T$. This means that, for the case of a pure rotation around the center of projection, the points in the world reference plane do not have to be on a plane

---