UNIVERSITÉ LAVAL

MAT-1900 : Mathématiques de l'ingénieur 1
Examen 1 (33 1/3 %)
Vendredi le 3 février 2012 de 18h30 à 20h20

Enseignants

Section A : Saïd El Morchid
Section B : Hugo Chapdelaine
Section S : Jérôme Soucy

Identification

PRÉNOM : Corrigé

NOM :

NUMÉRO DE DOSSIER :

SECTION :

Directives

- Identifiez immédiatement votre cahier d'examen.
- Assurez-vous que cet examen comporte 5 questions réparties sur 6 pages.
- Assurez-vous que les sonneries de vos appareils électroniques sont désactivées et rangez-les hors de portée.
- Vous avez droit à une feuille-résumé recto-verso 8½" par 11".
- Sauf avis contraire, vous devez rédiger des solutions complètes et justifiées.
- Vous avez droit à une calculatrice autorisée par la faculté des sciences et génie.

Résultats

Question:	1	2	3	4	5	Total
Points:	20	20	20	15	25	100
Note :						

Questions

$\boxed{20}$ 1. Trouvez toutes les racines quatrièmes du nombre complexe

$$a = \frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{5\,i}{\sqrt{2}},$$

et représentez-les dans le plan complexe. **Veuillez exprimer vos racines sous la forme exponentielle.**

$$a = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta} = 5e^{i\pi/4}.$$

$$r = \sqrt{\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{25\cdot 2}{4} + \frac{25}{2}} = \sqrt{25} = 5$$

$$\tan\theta = \frac{5/\sqrt{2}}{5\sqrt{2}/2} = \frac{5\cdot 2}{5\sqrt{2}\sqrt{2}} = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

On cherche z t.q. $z^4 = 5e^{i\pi/4}$

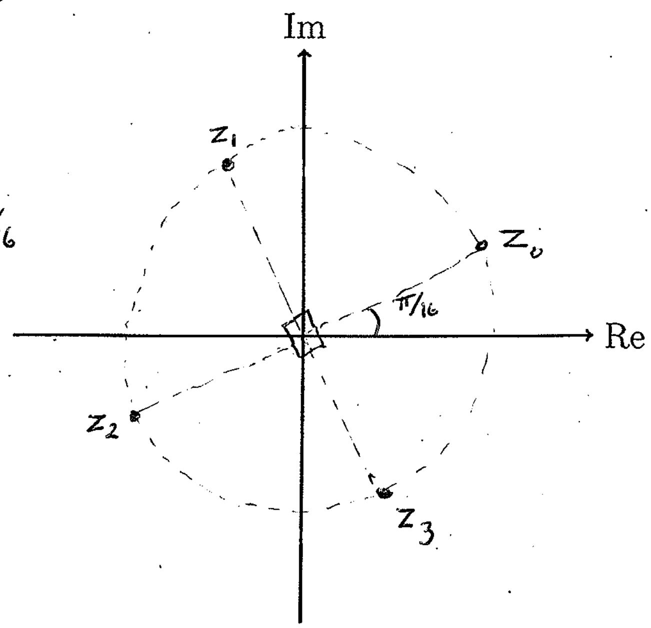
D'après un résultat vu au cours:

$$z_0 = \sqrt[4]{5}\, e^{i\frac{\pi}{16}}$$

$$z_1 = \sqrt[4]{5}\, e^{i(\frac{\pi}{4}+2\pi)/4} = \sqrt[4]{5}\, e^{i\frac{9\pi}{16}}$$

$$z_2 = \sqrt[4]{5}\, e^{i(\frac{\pi}{4}+4\pi)/4} = \sqrt[4]{5}\, e^{i\,17\pi/16}$$

$$z_3 = \sqrt[4]{5}\, e^{i(\pi/4+6\pi)/4} = \sqrt[4]{5}\, e^{i\,25\pi/16}$$



$\boxed{20}$ 2. Trouvez toutes les racines du polynôme $p(z) = z^4 - z^3 - 3z^2 + 17z - 30$ sachant que $p(1-2i) = 0$.

Puisque $1-2i$ est une racine de p, $\overline{1-2i}$ en est aussi une ($p(z)$ est un polynôme réel).

Donc $(z-(1-2i))(z-(1+2i)) = z^2 - 2z + 5$ est un facteur de p.

$$
\begin{array}{r|l}
z^4 - z^3 - 3z^2 + 17z - 30 & z^2 - 2z + 5 \\
\hline
-(z^4 - 2z^3 + 5z^2) \quad\quad\quad & z^2 + z - 6 \\
z^3 - 8z^2 + 17z - 30 & \\
-(z^3 - 2z^2 + 5z) \quad\; & \\
-6z^2 + 12z - 30 & \\
-(-6z^2 + 12z - 30) & \\
0 &
\end{array}
$$

Donc $z^2 + z - 6$ est un facteur de p.

$$z^2 + z - 6 = 0 \iff z = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 6}}{2} = 2 \text{ ou } -3.$$

Donc les racines de p sont $1-2i$, $1+2i$, 2 et -3.

$\boxed{20}$ 3. (a) Trouvez une fonction $y(x)$ vérifiant

$$\begin{aligned} x\,y' + (x^2+1)\,y &= 0, \\ y(1) &= e^{3/2}. \end{aligned}$$

$$xy' + (x^2+1)y = 0$$

$$\Rightarrow \quad xy' = -(x^2+1)y$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{-(x^2+1)}{x}dx$$

$$\Rightarrow \quad \ln|y| = \int\left(-x - \frac{1}{x}\right)dx$$

$$= -\frac{x^2}{2} - \ln|x| + C$$

$$\Rightarrow \quad |y| = e^{-\frac{x^2}{2} - \ln|x| + C}$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = Ke^{-\frac{x^2}{2} - \ln|x|}$$

$$= Ke^{-x^2/2} \cdot \underbrace{e^{\ln|x|^{-1}}}_{=|x|^{-1}}$$

$$= \frac{Ke^{-x^2/2}}{|x|}$$

$$y(1) = e^{3/2}$$

$$\Rightarrow \quad e^{3/2} = \frac{Ke^{-1/2}}{|1|}$$

$$\Rightarrow \quad e^{3/2} \cdot e^{1/2} = Ke^{-1/2} \cdot e^{1/2}$$

$$\Rightarrow \quad e^2 = Ke^0 = K$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = \frac{e^2 \cdot e^{-x^2/2}}{|x|}$$

$$= \frac{e^{-x^2/2 + 2}}{|x|}.$$

(b) Montrez que $y(x) = -2x^2$ est une solution particulière de l'équation différentielle

$$x^3\,y' + x^2\,y + 6x^4 = 0.$$

$$y(x) = -2x^2 \Rightarrow y'(x) = -4x$$

$$x^3 \cdot y' + x^2y + 6x^4 = x^3(-4x) + x^2(-2x^2) + 6x^4$$

$$= -4x^4 - 2x^4 + 6x^4$$

$$= 0.$$

Donc $y(x)$ satisfait l'ED.

$\boxed{15}$ 4. Trouvez les trajectoires orthogonales à la famille de courbes

$$y(x) = cx + c,$$

où $c \in \mathbb{R}$.

$$y'(x) = c$$

$$\Rightarrow y = y'x + y'$$

$$\Rightarrow y = y'(x+1)$$

$$\Rightarrow y' = \frac{y}{x+1}.$$

Pour trouver les trajectoires orthogonales, il faut résoudre

$$y' = \frac{-1}{y/_{x+1}} = -\frac{x+1}{y}.$$

Donc $\int y \, dy = \int -(x+1)dx$

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} - x + C$$

$$\Rightarrow y^2 = -x^2 - 2x + D$$

$$y^2 + x^2 + 2x = D$$

$$y^2 + (x+1)^2 - 1 = D$$

$$\Rightarrow y^2 + (x+1)^2 = E$$

Ce sont des cercles centrés au point $(-1, 0)$.

$\boxed{25}$ 5. **Seulement pour cette question**, vous devez donner uniquement la réponse.

(a) Donnez la forme polaire du nombre complexe

$$z = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\,i}{\sqrt{2}}\right)^{2012}.$$

Réponse : $3^{2012}(\cos\pi + i\sin\pi)$

(b) Donnez la forme cartésienne du nombre complexe

$$e^{i\frac{\pi}{6}}e^{\ln 2 + i\frac{5\pi}{6}}.$$

Réponse : -2

(c) Trouvez les nombres complexes z vérifiant simultanément les équations

$$|z - i| = 1,$$
$$\operatorname{Re}(z) = 0.$$

Réponse : 0 et $2i$

(d) Encerclez la bonne réponse. Le lieu géométrique des points z du plan complexe vérifiant l'équation

$$\left|\frac{z + 3\,i}{z - 3\,i}\right| = 2$$

est :

A. Un cercle

B. Une ellipse

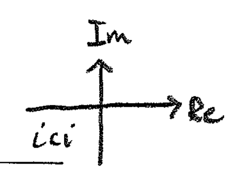
C. Une droite

D. L'ensemble vide (aucun point ne vérifie l'équation)

E. Aucune des réponses A à D

(e) Dans quel quadrant est situé le nombre z^3 si $\frac{\pi}{3} < \operatorname{Arg}(z) < \frac{\pi}{2}$?

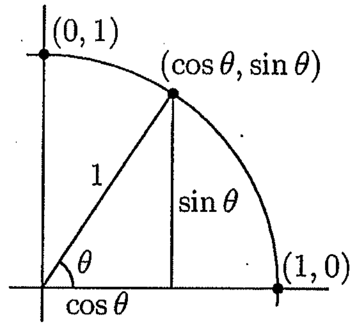
Réponse : 3^e quadrant



Aide-mémoire

Trigonométrie

θ	$\cos\theta$	$\sin\theta$
0	1	0
$\pi/6$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
$\pi/3$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$
$\pi/2$	0	1



$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

Coniques canoniques

Paraboles : $y = ax^2$, $x = ay^2$. Ellipses : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Hyperboles : $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1$.

Dérivées

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1} \qquad \frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a \qquad \frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x \qquad \frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x} \qquad \frac{d}{dx}\sin x = \cos x \qquad \frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x \qquad \frac{d}{dx}\arccos x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x} \qquad \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x \qquad \frac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x \qquad \frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x \qquad \frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$$

Intégrales (Toutes les primitives sont à une constante près)

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad \int x \ln x \, dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} \qquad \int \cos(ax)\, dx = \frac{1}{a}\sin(ax)$$

$$\int e^{ax}\, dx = \frac{1}{a}e^{ax} \qquad \int \frac{dx}{x \ln x} = \ln|\ln x| \qquad \int \sin^2 x \, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x$$

$$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} \qquad \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} \qquad \int \cos^2 x\, dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x$$

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} \qquad \int \tan(ax)\, dx = -\frac{1}{a}\ln|\cos(ax)|$$

$$\int \ln x\, dx = x\ln x - x \qquad \int \sin(ax)\, dx = -\frac{1}{a}\cos(ax) \qquad \int \sec^2(ax)\, dx = \frac{1}{a}\tan(ax)$$

$$\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{b-a}\ln\left|\frac{x+a}{x+b}\right| \qquad \int \sec(ax)\, dx = \frac{1}{a}\ln|\sec(ax) + \tan(ax)|$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right) \qquad \int e^{ax}\sin bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx)$$

$$\int e^{ax}\cos bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx)$$