STT-2920
Rachid Kandri-Rody

Examen 1

20 Octobre 2010
15h30-17h30

Répondre aux questions sur le questionnaire.
Cet examen compte pour 50% de la note finale.
L'examen compte 6 exercices répartis dans un questionnaire de **10 pages**, dont une page d'espace supplémentaire à la toute fin.
Vous avez **120 minutes** pour faire cet examen.
Donner tous les développements et calculs.
Toutes les réponses doivent être convenablement justifiées.
Une liste de formules est distribuée avec cet examen.
Utiliser le verso des feuilles pour le brouillon.
Éteindre et ranger tout appareil électronique.

À remplir par l'étudiant(e)

Nom :	Solutionnaire
Matricule :	
Section :	A

À remplir par le(s) correcteur(s)

Exercice 1	14 / 14
Exercice 2	16 / 16
Exercice 3	20 / 20
Exercice 4	16 / 16
Exercice 5	14 / 14
Exercice 6	20 / 20
Total	100 /100

Exercice 1 : **(14 pts)**

Aux États-Unis, le Sénat compte cent sénateurs et comprends deux sénateurs pas état. On choisit 8 sénateurs au hasard pour former un comité.

(a) Quelle est la probabilité que ce comité comprendra au moins un sénateur provenant de la Floride ? (7 pts)

(b) Quelle est la probabilité que les 8 membres du comité proviendront de 8 états différents ? (7 pts)

Réponses :

Définissez clairement les événements qui vont intervenir dans vos calculs.

a) Soit A = "le comité est composé d'au moins un sénateur de la Floride"

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{\binom{2}{0}\binom{98}{8}}{\binom{100}{8}} = \frac{382}{2475} = 0.15434$$

b) Soit B = "le comité est composé de 8 membres de 8 états différents"

$$P(B) = \frac{\binom{50}{8} \cdot 2^8}{\binom{100}{8}} \simeq 0,7386$$

Exercice 2 : (16 pts)
Tout accident aérien fait l'objet d'une enquête approfondie. S'il résulte d'une défaillance de structure, la probabilité qu'on le reconnaisse est de 0,8. Si sa cause est autre, la probabilité qu'on l'attribue à tort à une défaillance de structure est de 0,2. Sachant que 22 % de tous les accidents aériens résultent d'une défaillance de structure, déterminez la probabilité qu'il s'agisse bien de la cause d'un accident ayant été attribué à une telle défaillance.

Réponse :
Définissez clairement les événements qui vont intervenir dans vos calculs.

si A = "un accident aérien résulte d'une défaillance de structure"

B = "Une défaillance de structure est reconnue comme cause d'un accident aérien".

on a $P(A) = 0,22$, $P(B/A) = 0.8$ et $P(B/\overline{A}) = 0,2$

d'où d'après la formule de Bayes,

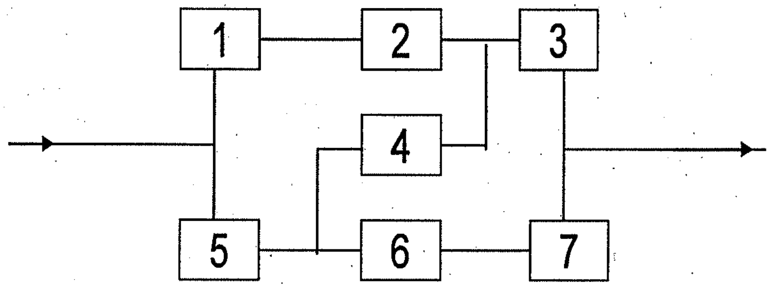
$$P(A/B) = \frac{P(A)\,P(B/A)}{P(A)\,P(B/A) + P(\overline{A})\,P(B/\overline{A})}$$

$$= \frac{0.22 \times 0.8}{(0,22)\times(0,8) + (1-0,22)\times(0,2)}$$

$$= \underline{0.53}$$

Exercice 3 :(20 pts)

Calculer la fiabilité du réseau R suivant. On suppose que toutes les composantes ont la même fiabilité de .95 sauf la quatrième composante dont la fiabilité est de 0.90.



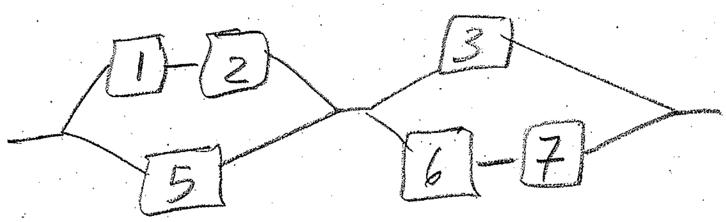
Réponse :
Définissez clairement les événements qui vont intervenir dans vos calculs.

E_i = "la composante i fonctionne correctement"

$\underset{i \neq 4}{P(E_i)} = 0.95$ et $P(E_4) = 0.90$

on a $P(R) = P(R/E_4)\,P(E_4) + P(R/\bar{E}_4)\,P(\bar{E}_4)$

$R/\bar{E}_4$:



$P(E_1 \cap E_2) = P(E_6 \cap E_7) = 0.95^2 = 0.9025$

Posons $E_1 \cap E_2 = E_8$ et $E_6 \cap E_7 = E_9$.

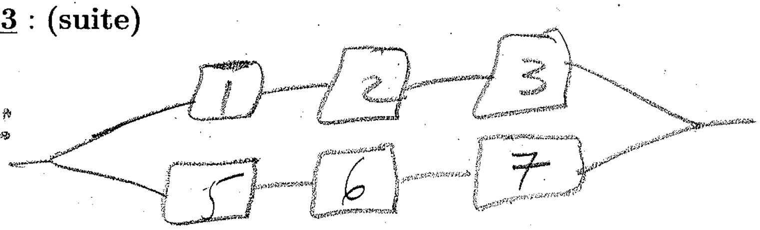
$P(R/\bar{E}_4) = P(E_8 \cup E_5) \cdot P(E_3 \cup E_9)$

$= [1 - P(\bar{E}_8)P(\bar{E}_5)]\,[1 - P(\bar{E}_3)P(\bar{E}_9)]$

$= (1 - 0.0975 \times 0.05)^2 = 0.99027$

Exercice 3 : (suite)

$R/\overline{E_4}$:



Posons $E_{10} = E_1 \cap E_2 \cap E_3$

$E_{11} = E_5 \cap E_6 \cap E_7$

on a $P(E_{10}) = P(E_{11}) = 0.95^3 = 0.8574$

$$P(R/\overline{E_4}) = P(E_{10} \cup E_{11})$$

$$= 1 - (1 - 0.8574)^2 = 0.9797$$

d'où $P(R) = 0.9903 \times 0.90 + 0.9797 \times (1 - 0.90)$

$$= 0.9892$$

Exercice 4 : **(16 pts)**

Une variable aléatoire X possède la fonction de densité suivante :

$$f(x) = \begin{cases} ax & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \frac{a}{4} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a étant une contante positive.

(a) Déterminer la valeur de la constante a. (4 pts)

(b) Calculer la moyenne et la variance de X. (4 pts)

(c) Trouver la fonction de répartition de la variable X. (4 pts)

(d) En déduire $P(X \leq 0.25/X > 0.15)$. (4 pts)

Réponses :

a) $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^{a/4} ax\,dx = a\left(\frac{x^2}{2}\right)_0^{a/4} = \frac{a^3}{32} \Rightarrow a = \sqrt[3]{32}$ $\boxed{a = 3{,}175}$

b) $E(X) = \int_0^{a/4} x.ax\,dx = a\left(\frac{x^3}{3}\right)_0^{a/4} = \frac{a^4}{3*4^3} = 0.529$

$E(X^2) = \int_0^{a/4} x^2 ax\,dx = a\left(\frac{x^4}{4}\right)_0^{a/4} = \left(\frac{a}{4}\right)^5 = 0.794^5 = 0.316$

$VX = E(X^2) - (EX)^2 = 0.316 - (0.529)^2$
$= 0.0362$

c) Si $x \in [0; 0{,}794] \longrightarrow F(x) = \int_0^x at\,dt = \frac{a}{2}x^2 = 1.5875.x^2$

si $x < 0 \longrightarrow F(x) = 0$, si $x \geq \frac{a}{4} = 0{,}794 \longrightarrow F(x) = 1$

d) $P(X \leq 0.25/X > 0.15) = \frac{P(X \leq 0.25 \text{ et } X > 0.15)}{P(X > 0.15)}$

$= \frac{F(0.25) - F(0.15)}{1 - \cancel{1.5875} \times 0.15^2}$ 0.066

$= \frac{1.5875(0.25^2 - 0.15^2)}{1 - 1.5875 \times 0.15^2} = \frac{0.0635}{0.964}$

Exercice 5 : **(14 pts)**

Soit X une variable aléatoire discrète, prenant les valeurs -1, 0 et 1, d'espérance nulle et de variance $1/2$.

(a) Déterminer la loi de X, c'est à dire calculer $P(X=-1)$, $P(X=0)$ et $P(X=1)$.(6 pts)

(b) Calculer $E(-2X+3)$ et $V(-2X+3)$. (4 pts)

(c) Trouver la loi de la variable aléatoire Y définie par $Y = X^2$. (4 pts)

a)

x	-1	0	1
$p(x)$	a	b	$1-a-b$

$0 = EX = -a + 1 - a - b \Rightarrow \boxed{2a+b=1}$

$\frac{1}{2} = VX = EX^2 = (-1)^2 a + 0^2 b + 1^2(1-a-b) = \cancel{a} + 1 - \cancel{a} - b = 1-b$

$1-b = 1/2 \to b = \frac{1}{2} \to 2a + \frac{1}{2} = 1 \to 2a = \frac{1}{2} \to a = 1/4$

b) $E(-2X+3) = -2EX + 3 = 3$

$V(-2X+3) = (-2)^2 V(X) = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$

c)

y_i	0	1
p_i	$1/2$	$1/2$

$P(Y=0) = P(X=0) = \frac{1}{2}$

$P(Y=1) = P(X=\pm 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1/2$

Exercice 6 : **(20 pts)**

Le vieux moteur d'une motoneige de course compte 3 cylindres. Soit X, le nombre de bougies qui fonctionnent bien pendant toute la durée d'une course et soit Y, le nombre de fois où le moteur cesse de fonctionner durant la course. La fonction de masse de probabilité conjointe de X et Y, $p(x,y) = P(X = x, Y = y)$, est donnée dans le tableau ci-dessous.

$p(x,y)$		$x=0$	$x=1$	$x=2$	$x=3$	
y	0	0	0.1	0.1	b	0,4
	1	0.1	0.2	0.1	0	0,4
	2	0.1	0.1	0	0	0,2
		0,2	0,4	0,2	0,2	

où b est une constante positive.

(a) Trouver la valeur que doit prendre b. (3 pts)

(b) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ? Justifiez votre réponse. (3 pts)

(c) Sachant qu'une seule bougie a bien fonctionné durant toute la durée de la course,

(c1) quelle est la probabilité que le moteur ait cessé de fonctionner exactement une fois durant la course ? (2 pts)

(c2) quelle est la probabilité que le moteur ait cessé de fonctionner au moins une fois durant la course ? (2 pts)

(c3) quelle est l'espérance du nombre de fois où le moteur a cessé de fonctionner durant la course ? (2 pts)

(d) Calculez le coefficient de corrélation entre X et Y. L'interpréter. (4 pts)

(e) Le profit, en milliers de \$, réalisé lors d'une course peut être calculé ainsi : $8X - 10Y$. Quel est le profit espéré ? Avec quel écart-type ? (4 pts)

Réponse :

a) $\sum_{x,y} p(x,y) = 1 \Rightarrow \boxed{b = 0,2}$

b) $p(0,0) = 0 \neq 0.08 = (0.2)(0.4) = P_X(0)\,P_Y(0)$.

donc X et Y ne sont pas indépendants.

c) c1) $P_{Y/X=1}(1) = \frac{p(1,1)}{P_X(1)} = \frac{0,2}{0,4} = 1/2$

c2) $P(Y \geq 1 / X=1) = \frac{p(1,1) + p(1,2)}{P_X(1)} = \frac{0,2+0,1}{0.4} = \frac{3}{4}$

c3) $E(Y/X=1) = 0 \times \frac{0,1}{0,4} + 1 \times \frac{0.2}{0.4} + 2 \times \frac{0,1}{0,4} = 1$

Exercice 6 : (suite)

d) $EX = 1\times 0.4 + 2\times 0.2 + 3\times 0.2 = 1.4$

$EX^2 = 1^2\times 0.4 + 2^2\times 0.2 + 3^2\times 0.2 = 3$

$VX = E(X^2) - (EX)^2 = 3 - 1.4^2 = 1.04$

$EY = 1\times 0.4 + 2\times 0.2 = 0.8$

$EY^2 = 1^2\times 0.4 + 2^2\times 0.2 = 1.2$

$VY = E(Y^2) - (EY)^2 = 1.2 - 0.8^2 = 0.56$

$EXY = 1\times 1\times 0.2 + 1\times 2\times 0.1 + 2\times 1\times 0.1 = 0.6$

$Cov(X,Y) = E(XY) - EXEY = 0.6 - 1.4\times 0.8 = -0.52$

$\rho_{X,Y}(X,Y) = \dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} = \dfrac{-0.52}{\sqrt{1.04\times 0.56}} = -0.681$

$\downarrow$

corrélation négative moyenne entre X et Y.

e) le profit espéré vaut :

$E(8X - 10Y) = 8EX - 10EY$

$= 8\times 1.4 - 10\times 0.8 = \underline{3.2}$

$= \underline{3200\,\$}$

$V(8X - 10Y) = 8^2 V(X) + (-10)^2 VY + 2(8)(-10)\,Cov(X,Y)$

$= 64\times 1.04 + 100\times 0.56 - 160(-0.52)$

$= 205.76 \longrightarrow \boxed{\sigma_{8X-10Y} = 14.3443}$