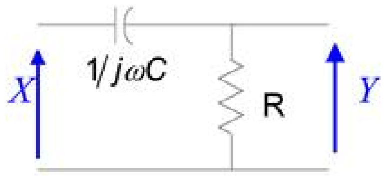
Examen final 2013, Problème 1

Wednesday, December 11, 2013 3:17 PM



$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$$

a) $H(\omega) = \dfrac{Z_2(\omega)}{Z_1(\omega) + Z_2(\omega)} = \dfrac{R}{\frac{1}{j\omega C} + R} = \dfrac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$

b) $h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(\omega)\}$

Dans le table de transformées,

$$e^{-\beta t} U(t) \qquad \frac{1}{\beta + j\omega}$$

donc

$$\frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{RC} \cdot \frac{1}{\frac{1}{RC} + j\omega} \Leftrightarrow \frac{1}{RC} e^{-t/RC} U(t)$$

Nous trouvons aussi

$$\frac{d^n}{dt^n} f(t) \qquad (j\omega)^n F(\omega)$$

prenons $n = 1$

$$\frac{d}{dt} f(t) \Leftrightarrow j\omega F(\omega)$$

Donc $\dfrac{j\omega}{1 + j\omega RC} \Leftrightarrow \dfrac{d}{dt} \cdot \dfrac{1}{RC} e^{-t/RC} U(t)$

$$= \frac{1}{RC} e^{-t/RC} \frac{d}{dt} U(t) + \frac{U(t)}{RC} \frac{d}{dt} e^{-t/RC}$$

$$= \frac{1}{RC} e^{-t/RC} \delta(t) + \frac{U(t)}{RC} \cdot \frac{-1}{RC} \cdot e^{-t/RC}$$

$$= \frac{1}{RC} e^{-0/RC} \delta(t) - \frac{1}{(RC)^2} e^{-t/RC} U(t)$$

$$= \frac{\delta(t)}{RC} - \frac{1}{R^2C^2} e^{-t/RC} U(t)$$

Donc $\frac{j\omega RC}{1+j\omega RC} = \delta(t) - \frac{1}{RC} e^{-t/RC} U(t)$ ✓

C. $H(\omega) = \frac{j\omega RC}{1+j\omega CR}$ $\quad |H(\omega)| = \frac{|j\omega RC|}{|1+j\omega RC|} = \frac{\omega RC}{\sqrt{1+\omega^2R^2C^2}}$

$\lim_{\omega\to 0} H(\omega) = \frac{0}{\sqrt{1+0}} = 0$ $\quad \lim_{\omega\to\infty} = \frac{RC}{\sqrt{1/\omega^2 + R^2C^2}} = \frac{RC}{\sqrt{0+R^2C^2}} = \frac{RC}{RC} = 1$

Donc $H(\omega)$ coupe les basses fréquences ($\lim_{\omega\to 0} |H(\omega)| = 0$), mais laisse passer les hautes fréquences ($\lim_{\omega\to\infty} |H(\omega)| = 1$).

$H(\omega)$ est un filtre passe-haut

D. $y(t) = x(t) * h(t)$

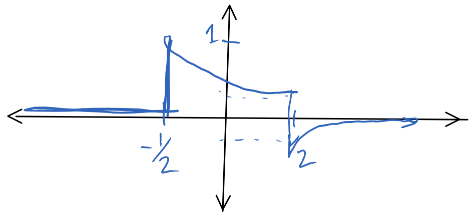
$$= \text{Rect}(t) * \left[\delta(t) - \frac{1}{RC} e^{-t/RC} U(t)\right]$$

$$= \text{Rect}\, t - \frac{1}{RC} \text{Rect}(t) * e^{-t/RC} U(t)$$

$$= \text{Rect}\, t - \frac{1}{RC} \cdot \begin{cases} 0 & t < -\frac{1}{2} \\ RC \cdot (1 - e^{-(t+1/2)/RC}) & -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} \\ 2RC\, sh\frac{1}{2RC}\, e^{-(t+\frac{1}{2})/RC} & t > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & t < -\frac{1}{2} \\ 1 - \frac{RC}{RC}(1 - e^{-(t+\frac{1}{2})/RC}) & -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} \\ -2\, RC/RC\; sh\, \frac{1}{2RC}\, e^{-(t+\frac{1}{2})/RC} & t > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & t < -\frac{1}{2} \\ e^{-(t+\frac{1}{2})/RC} & -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} \\ -2\, sh\frac{1}{2RC}\, e^{-(t+\frac{1}{2})/RC} & t > \frac{1}{2} \end{cases}$$

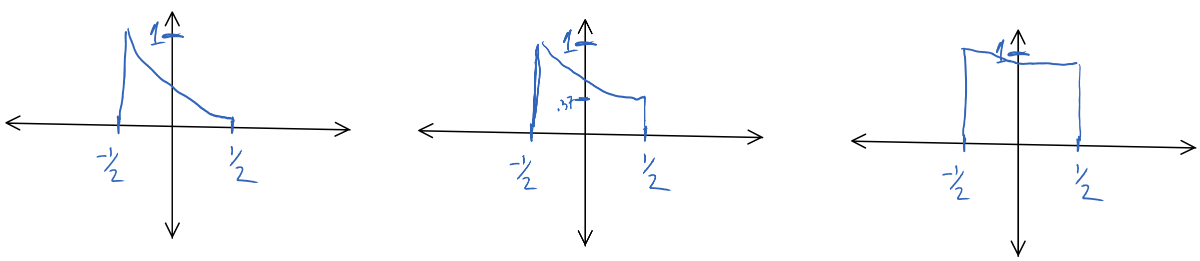


E. $\frac{1}{RC}$ détermine le taux de décroissance

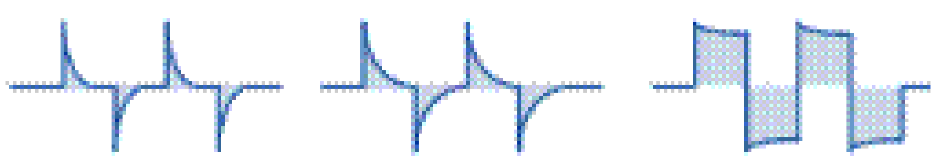
$\frac{1}{RC} >> 1 \Rightarrow$ décroissance rapide $\quad e^{-t/RC}\Big|_{t=1} = e^{-1/RC} \sim 0$

$\frac{1}{RC} \approx 1 \Rightarrow \quad e^{-t/RC}\Big|_{t=1} = e^{-1} = .37$

$\frac{1}{RC} << 1 \Rightarrow$ décroissance lente $\quad e^{-t/RC}\Big|_{t=1} = e^{-1/RC} \approx 1$



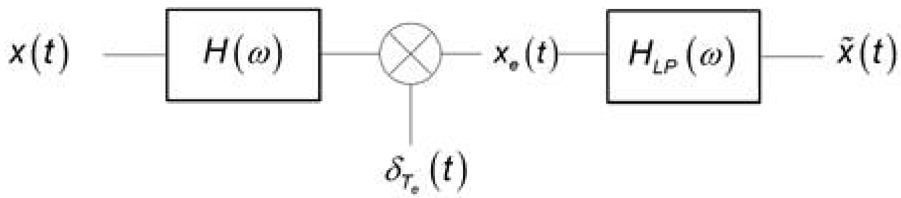
$\frac{1}{RC} >> 1 \qquad \frac{1}{RC} \approx 1 \qquad \frac{1}{RC} << 1$



$\frac{1}{RC} >> 1 \qquad \frac{1}{RC} \approx 1 \qquad \frac{1}{RC} << 1$

Examen final 2013, Problème 2

Wednesday, December 11, 2013 4:13 PM

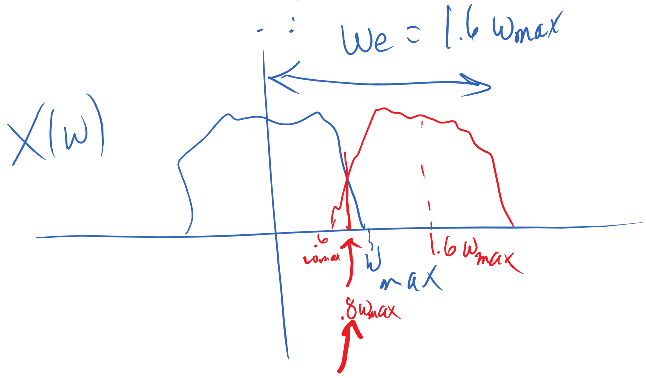


A. $x(t)$ a fréquence maximale ω_{max}

$\Rightarrow \quad \omega_{Nyq} = 2 \cdot \omega_{max} \qquad T_{Nyq} = \frac{2\pi}{\omega_{Nyq}} = \frac{2\pi}{2\,\omega_{max}} = \pi / \omega_{max}$

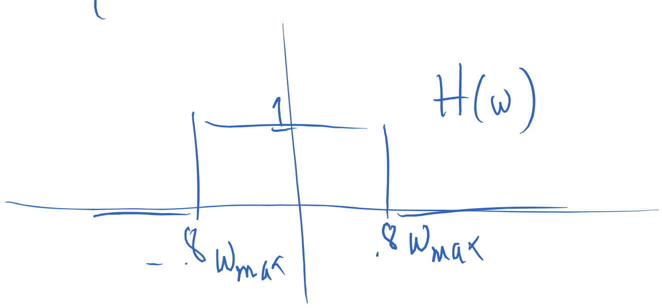
B. $T_e = 1.25\, T_{Nyq} \Rightarrow \omega_e = \frac{2\pi}{T_e} = \frac{2\pi}{1.25\, \pi/\omega_{max}} = 2 \cdot \frac{4}{5}\, \omega_{max}$

$= 1.6\, \omega_{max}$



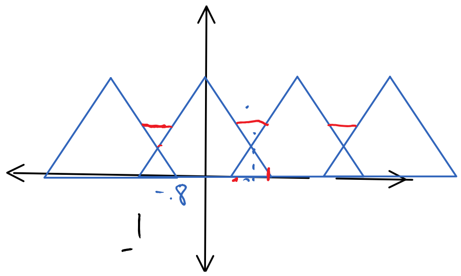
il faut couper AVANT le recouvrement, donc à $.8\, \omega_{max}$

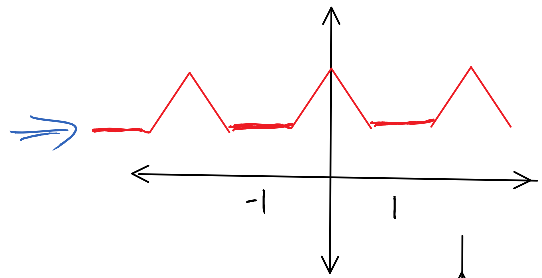
$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < .8\, \omega_{max} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



il faut tenir compte du gain 1/Te dans la réponse à cette question,
ce que le solutionnaire escamote un peu !

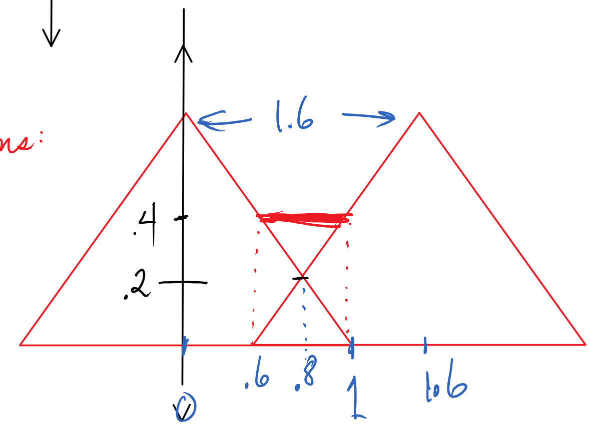
C.



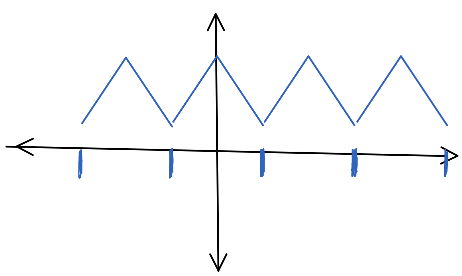


Sans filtre H(ω)

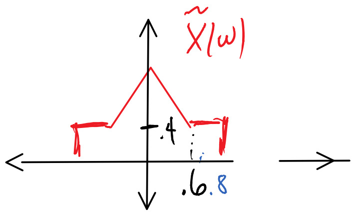
notons:



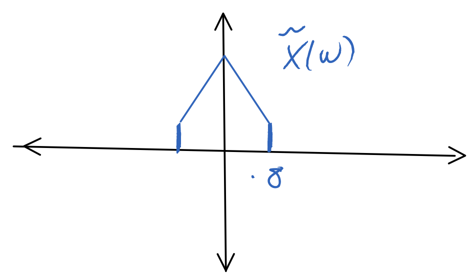
avec filtre H(ω)



D



sans fitre H(ω)



avec fitre H(ω)

E. $$e = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega) - \tilde{X}(\omega)|^2 \, d\omega$$

avec filtre H(ω) : $X(\omega) = \text{Tri}\ \omega$

$$\tilde{X}(\omega) = \begin{cases} \text{Tri}(\omega) & |\omega| < .8 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$X(\omega) = \begin{cases} Tri(\omega) & |\omega| < .8 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\Rightarrow X(\omega) - \tilde{X}(\omega) = \begin{cases} 0 & |\omega| < .8 \\ Tri\,\omega & .8 < |\omega| < 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$e = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega) - \tilde{X}(\omega)|^2 = \frac{2}{2\pi} \int_{.8}^{1} |Tri(\omega)|^2 d\omega$$

$$Tri(\omega) = \begin{cases} 1-\omega & 0 < \omega \leq 1 \\ 1+\omega & -1 < \omega < 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad e = \frac{1}{\pi} \int_{.8}^{1} (1-\omega)^2 d\omega$$

$$e = \frac{-1}{\pi} \frac{(1-\omega)^3}{3} \Big|_{.8}^{1} = \frac{-1}{\pi} \left[\frac{0}{3} - \frac{(.2)^3}{3} \right] = \frac{(.2)^3}{3\pi}$$

Sans filtre $H(\omega)$:

$$\tilde{X}(\omega) = \begin{cases} Tri(\omega) & |\omega| < .6 \\ .4 & .6 < |\omega| < .8 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$X(\omega) - \tilde{X}(\omega) = \begin{cases} 0 & |\omega| < .6 \\ 1-\omega-.4 & .6 < \omega < .8 \\ 1+\omega-.4 & -.8 < \omega < -.6 \\ Tri\,\omega & .8 < |\omega| < 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$e = e_{\dots} + \frac{1}{\pi} \int^{.8} (1-\omega-.4)^2 d\omega$$

$$e = e_{\text{avec filtre}} + \frac{1}{\pi}\int_{.6}^{.8} (1-\omega-.4)^2 \, d\omega$$

$$= e_{\text{avec filtre}} + \frac{1}{\pi}\int_{.6}^{.8} (.6-\omega)^2 \, d\omega$$

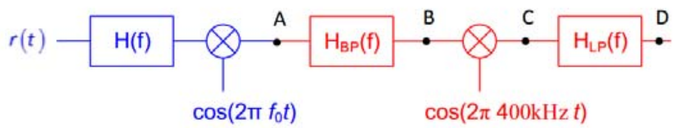
$$= e_{\text{avec filtre}} + \frac{1}{\pi} \left. \frac{-(.6-\omega)^3}{3} \right|_{.6}^{.8} = e_{\text{avec filtre}} + \frac{(.2)^3}{3\pi}$$

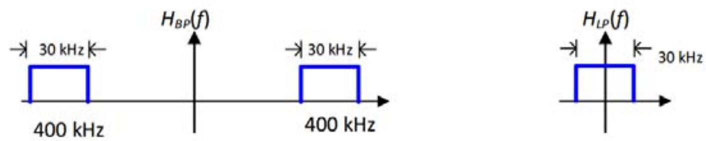
$$= 2 \cdot \frac{(.2)^3}{3\pi} = 2\, e_{\text{avec filtre}}$$

F. Le filtre qui minimise l'erreur quad. moy. coupe les fréquences en haut de ω_e ... Donc, non, on ne peut pas trouver un meilleur filtre

Examen final 2013, Problème 3

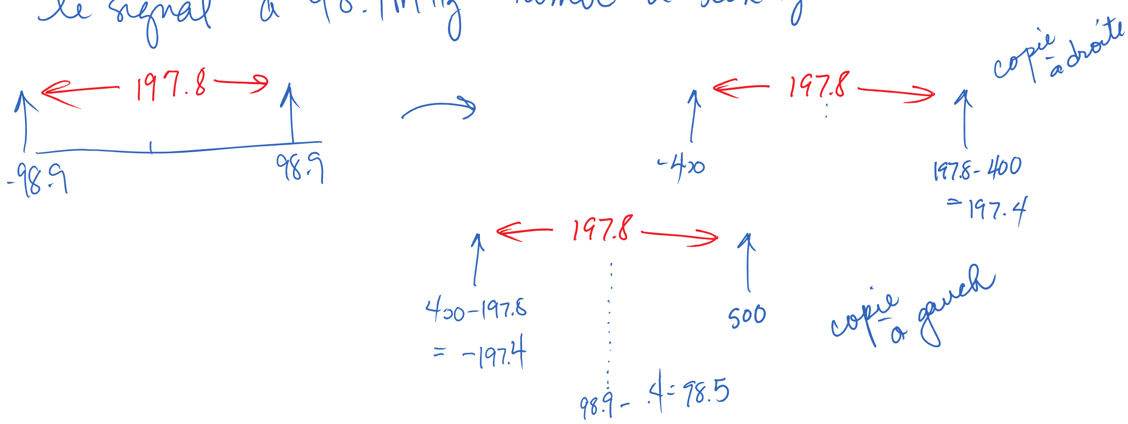
Wednesday, December 11, 2013 4:55 PM





$f_{NRJ} = 98.9$ MHz

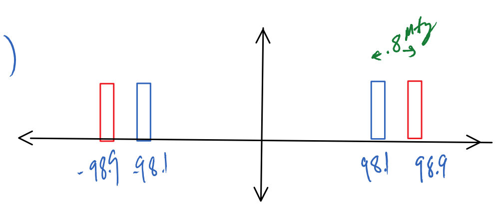
Notre fréq intermed est 400kHz. Il faut que le signal à 98.9MHz tombe à 500kHz



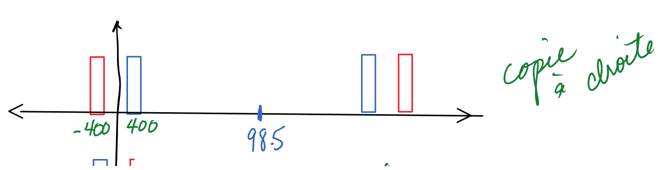
la fréquence centrale de chaque copie est à

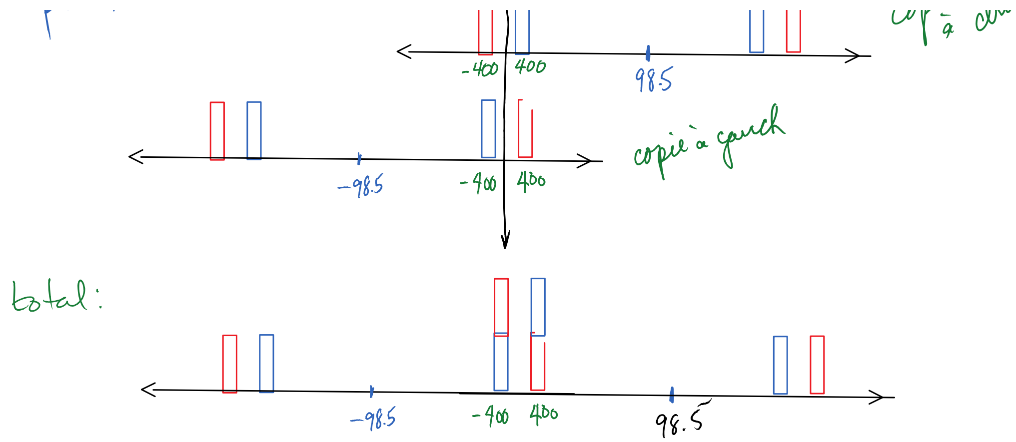
$W_0 = 98.5$

B. R(ω)

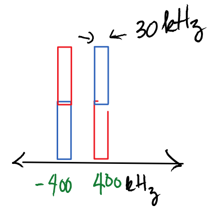


Spectre à pt A

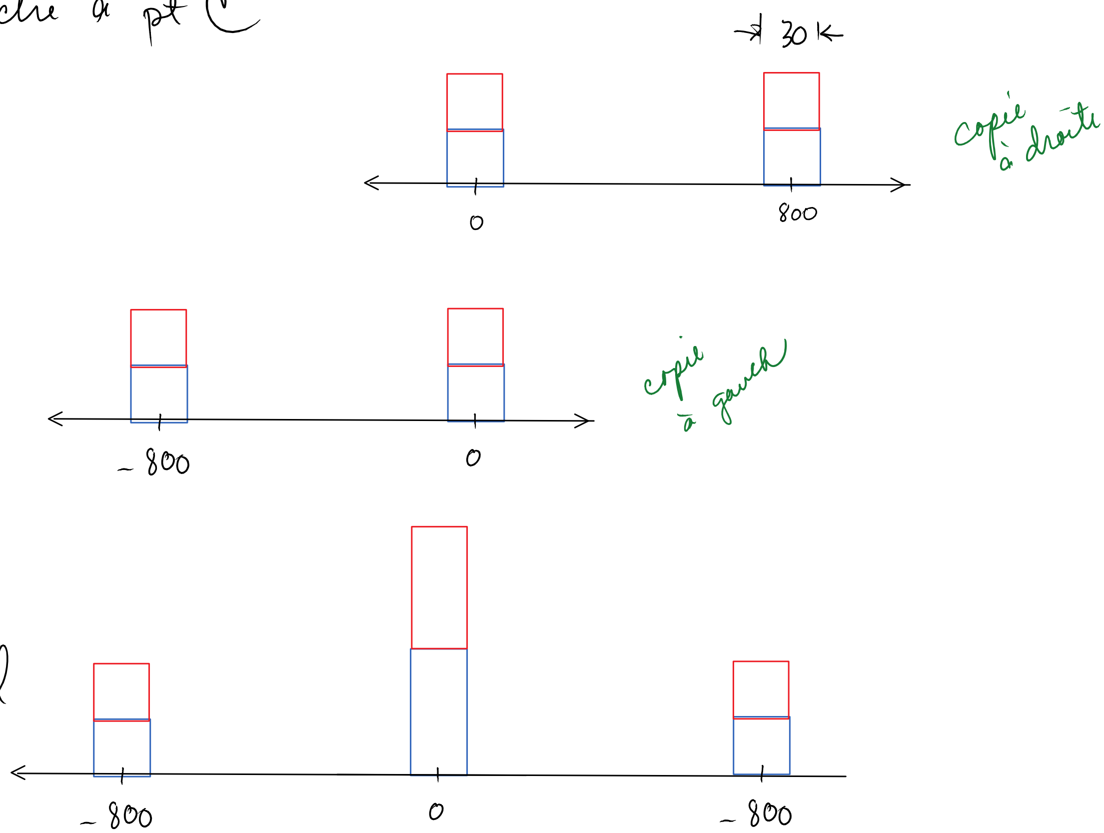




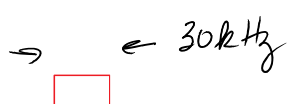
Spectre à pt B



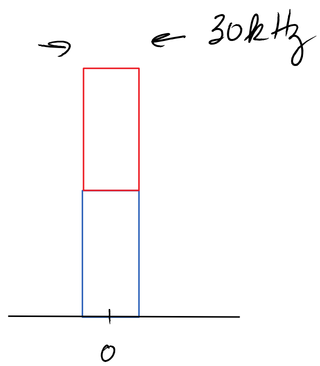
Spectre à pt C



Spectre à pt D

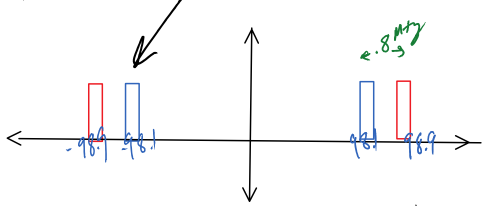


Spectre à pt D

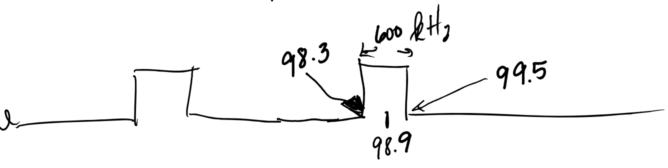


c) Il faut couper le signal à f_{CH01} avant de demoduler à la fréq intermed, donc

H(f) doit couper

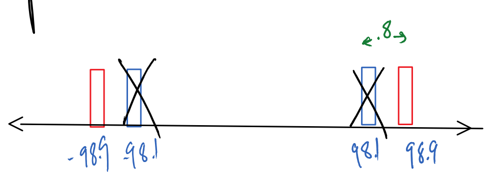


par exemple

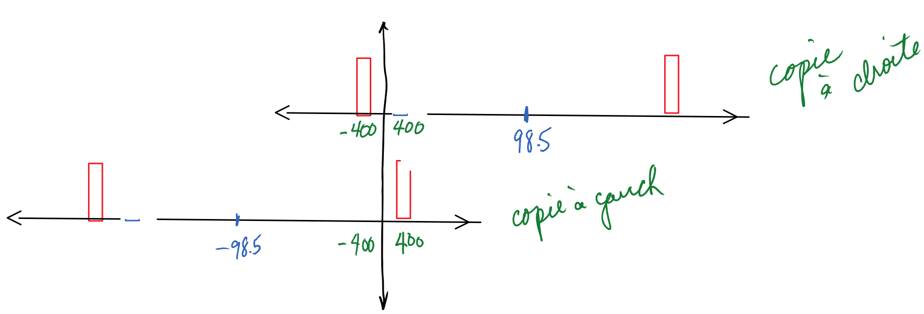


D)

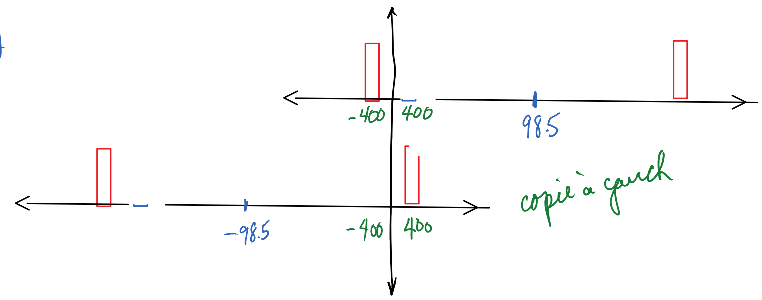
Spectre après H(f)



Spectre à pt A



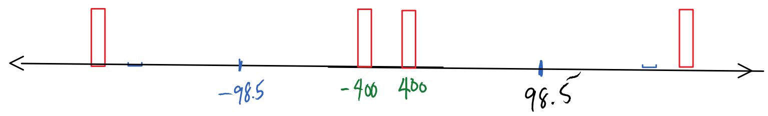
Spectre à pt A



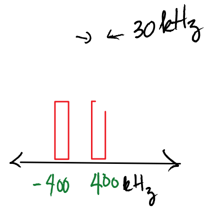
copie à droite

copie à gauche

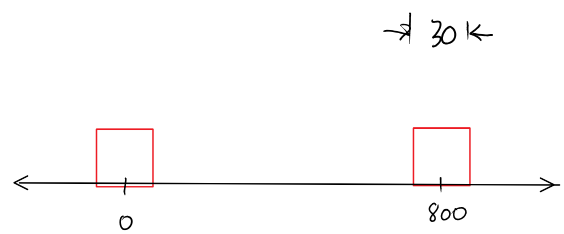
total:



Spectre à pt B



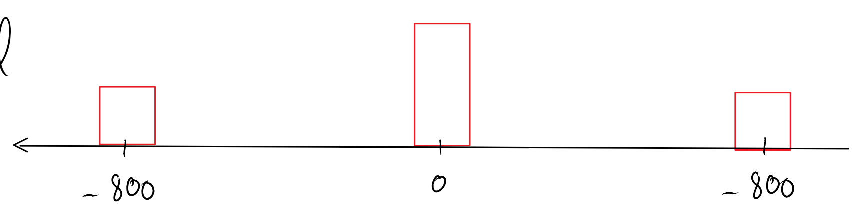
Spectre à pt C



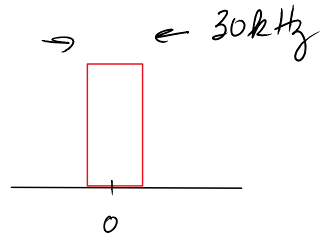
copie à droite

copie à gauche

total



Spectre à
pt D



Examen final 2013, Problème 4

December-15-15 4:35 PM

1. Filtre anti-repliement. Assure qu'on n'aura pas de recouvrement spectral lors d'un échantillonnage en bas de la fréquence de Nyquist pour le signal. Le filtre coupe le contenu fréquentiel du signal à une fréquence maximale qui respecte la fréquence de Nyquist pour le taux d'échantillonnage utilisé. Le recouvrement spectral évité serait venu du signal échantillonné, pas d'un autre signal interférant.

2. Filtre anti-image. Assure qu'on n'aura pas de recouvrement spectral lors de l'utilisation d'un récepteur superhétérodyne. Le filtre coupe le contenu non désiré qui arrivera à la fréquence intermédiaire, sans toucher le contenu désiré. Le recouvrement spectral évité serait venu d'un autre signal interférant, pas le signal désiré.