EXAMEN PARTIEL 2

Mathématiques de l'ingénieur II — Hiver 01
MAT-10364
Date: 23 mars.

Remarques:

- Durée de l'examen: deux heures
- Documentation permise: deux feuilles-résumé.
- Vous êtes priés de vous identifier (nom et numéro de matricule) sur le cahier et de placer votre carte d'identité sur la table à côté de vous.
- **Chaque réponse devra être accompagnée des calculs détaillés. Dans le cas contraire, elle sera considérée comme nulle.**

Question 1. (8 + 8 + 4 points)

On considère la courbe

$$\vec{r}(t) = (\cos t \sin t,\ \sin^2 t,\ 2t), \qquad t \in [0, 2\pi].$$

(a) Montrer que cette courbe est tracée sur le cylindre d'équation

$$x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = 1/4.$$

(b) Déterminer le vecteur tangent au point $P_0 = (1/2, 1/2, \pi/2)$ de la courbe.

(c) Quelle est l'équation paramétrique de la droite tangente à cette courbe au point P_0?

Question 2. (20 points)

On considère un fil métallique ayant la forme d'un arc de cercle de rayon 1 centré à l'origine dessiné dans le plan et reliant les points $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ et $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$.

Déterminer les coordonnées du centre de masse sachant que la densité du fil en un point $P = (x, y)$ de la courbe est donnée par

$$\delta(x, y) = y.$$

Question 3. (6 + 4 + 10 points)

Soit C la courbe d'intersection des deux surfaces

$$y = x^2 + 1 \qquad \text{et} \qquad z = 1 + x.$$

(a) Donner une paramétrisation de la courbe C.

(b) Trouver l'intervalle du paramètre qui correspond à la portion de C qui joint le point $A = (1, 2, 2)$ au point $B = (2, 5, 3)$.

(c) Si cette portion de la courbe C reliant les points A et B représente un fil métallique de densité $\delta(x, y, z) = x$, évaluer la masse de C.

Question 4. (20 points)

Soit le champ vectoriel

$$\vec{F} = (xy,\ xz,\ -y).$$

Calculer le travail de $\vec{F}$ le long du chemin C constitué du segment joignant les points $A = (1, 0, 0)$ à $B = (1, 1, 0)$ suivi du segment joignant B à $C = (0, 1, 0)$ suivi du segment joignant C à $D = (0, 1, 1)$.

Question 5. (12 + 8 points)

Soit $\vec{v}$ le champ de vecteurs défini par

$$\vec{v} = (2x \sin z + ye^x,\ e^x,\ x^2 \cos z).$$

(a) Le champ $\vec{v}$ est-il conservatif? Si oui, déterminer un potentiel.

(b) Déterminer le travail de $\vec{v}$ le long de la courbe d'intersection du paraboloïde $y = x^2 + z^2$ avec le plan $y = 3$ joignant le point $A = (-\sqrt{3}, 3, 0)$ au point $B = (\sqrt{3}, 3, 0)$ et qui est située dans la région où $z \geq 0$.