STT-2920 Automne 2015 Minitest 4

PRÉNOM EN GROSSES LETTRES CARRÉES : ____

NOM DE FAMILLE EN GROSSES LETTRES CARRÉES : ____________________________________

MATRICULE : ____

Les deux problèmes ci-dessous concernent le scénario suivant. On dispose d'un échantillon aléatoire de taille n issu de la distribution de probabilité avec densité

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \dfrac{\theta}{4^\theta} \; x^{\theta-1} & \text{si } 0 < x < 4, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'espérance et la variance de cette distribution sont respectivement $4\theta/(\theta+1)$ et $16\theta/(\theta+1)^2(\theta+2)$.

Numéro 1. [7 points]

(a) Obtenez l'estimateur du paramètre θ avec la méthode des moments.

(b) Supposons que $n = 5$ et que nos observations sont $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (3.50, 3.70, 2.35, 3.80, 2.90)$. Avec le résultat de la partie (a), calculez l'estimation du paramètre θ avec une précision de 3 décimales.

Numéro 2. [8 points]

(a) Obtenez l'estimateur du paramètre θ avec la méthode du maximum de la vraisemblance.

(b) Supposons que $n = 5$ et que nos observations sont $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (3.50, 3.70, 2.35, 3.80, 2.90)$. Avec le résultat de la partie (a), calculez l'estimation du paramètre θ avec une précision de 3 décimales.

Quelques calculs, certains utiles, d'autres inutiles. Avec $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (3.50, 3.70, 2.35, 3.80, 2.90)$,

$$\prod_{i=1}^{5} x_i = 335.3662 \quad \sum_{i=1}^{5} x_i = 16.25 \quad \sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 54.3125 \quad \sum_{i=1}^{5} \log(x_i) = 8.815223 \quad \sum_{i=1}^{5} 1/x_i = 1.589502$$