

Calcul matriciel MAT-1903, Examen final le 20 décembre 2012

Salle VCH-3860, Professeur Michel Duguay, 656-3557

Question #1 (20 points) Gram-Schmidt et factorisation QR.

- a) Soit une matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -4 & 11 & 5 & 0 \end{bmatrix}$. Construire une base orthonormale du sous-espace $\text{Col } A$.
- b) Accomplir une factorisation QR de A .

Question #2 (20 points) Solution d'un système inconsistant.

Soit la matrice A formée de vecteurs colonnes orthogonaux $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$, et soit le vecteur cible $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$.

- a) Déterminez la projection orthogonale $\hat{\mathbf{b}}$ de \mathbf{b} sur $\text{Col } A$;
- b) Trouvez la solution $\hat{\mathbf{x}}$ au sens des moindres carrés de l'équation $A^* \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{b}}$. Expliquez en termes de vecteurs colonnes ce que signifie cette équation.
- c) Comparez et expliquez les résultats trouvés en -a) et en -b).

Question #3 (20 points). Évolution dynamique.

Soit un point qui se déplace dans l'espace suivant l'équation $\mathbf{x}'(t) = A^* \mathbf{x}(t)$. La matrice A est :

$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 & -2 & -1 & 6 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$. La position initiale du point est :

$\mathbf{x}(t=0) = \begin{bmatrix} 0.2033 & -0.2857 & 1.2107 \end{bmatrix}$.

La commande Matlab `[V,D] = eig(A, 'nobalance')` donne les résultats suivants :

$V =$

1.0000	-0.5000	-0.2967
-0.2857	-1.0000	1.0000
0.1429	0.5000	0.5678

D =

3.0000	0	0
0	-5.0000	0
0	0	3.0000

Écrire l'équation avec valeurs numériques qui décrit le mouvement du point dans l'espace. Quelle sera la direction du point après un temps prolongé?

Question # 4 (20 points), les moindres carrés. Trouver par la méthode des moindres carrés la meilleure droite ($y = f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x$) qui passe près des points suivants dans le plan x, y . L'abscisse x est sur la ligne du haut, l'ordonnée y est sur la ligne du bas :

0	1	2	3	4
0	1	4	5	6

Question # 5. Travail de créativité (20 points). Vous pouvez vous référer aux TPs pour l'écriture numérique détaillée des matrices, mais non pas pour les réponses demandées ci-dessous.

- a) Expliquez comment votre nouvelle application matricielle peut remplir un rôle intéressant dans certains domaines d'application. Comment votre application se démarque-t-elle de la compétition?
- b) Regardant vers l'avenir, donnez avec justification un domaine d'application qui est prometteur et qui mériterait un financement de la part des investisseurs ou des gouvernements.
- c) Énoncez quelques démarches à faire qui pourraient contribuer à protéger la propriété intellectuelle associée à votre nouvelle application matricielle.