

**SYSTÈMES ET COMMANDE LINÉAIRES**  
GEL-19963

Professeur : André Desbiens

Premier examen (25% de la note finale)

Vendredi 9 février 2001, 10h30-12h20

Une feuille 8.5 X 11 pouces est autorisée

---

**Note:** Une bonne réponse sans justification ne vaut ***aucun*** point.

**QUESTION 1 - Régime transitoire (25 %)**

Le système étudié est le suivant :

$$G(s) = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_n} s + \frac{1}{\omega_n^2} s^2}$$

Les conditions initiales sont nulles et l'entrée est la suivante :

$$u(t) = \delta(t) + 5 \cos 2t \quad t > 0$$

Quelles doivent être les valeurs de  $z$  et  $\omega_n$  pour qu'il n'y ait pas de régime transitoire?

**QUESTION 2 - Réponses temporelles (5 % + 10 % + 10% = 25 %)**

A) La fonction de transfert d'un système est :

$$G(s) = \frac{\sum_{i=1}^n (n + 2^{i+1}) s^{i-1}}{\sum_{i=1}^n (100i)^{0.6n} s^{i-1}} e^{-5s}$$

Les conditions initiales sont nulles. L'entrée est un échelon d'amplitude unitaire appliqué au temps  $t = 2$ . Que vaut la sortie du système à l'instant  $t = 6$ ?

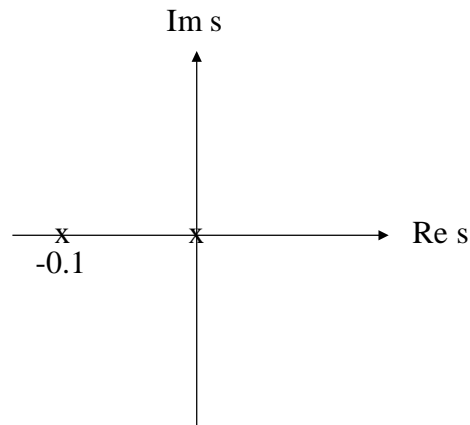
- B) Quelle est l'erreur de traînage d'un système du premier ordre de gain statique unitaire et de constante de temps  $T$ . On suppose la pente du signal d'entrée égale à  $p$ . Démontrez votre réponse.
- C) La réponse en régime permanent d'un système à une entrée en rampe de pente 2 est :

$$y_p(t) = 5t - 0.5 \cos 2t$$

Quelle serait la réponse en régime permanent du même système si l'entrée était un échelon d'amplitude 2?

### QUESTION 3 - Réponses en fréquences (14 % + 11 % = 25 %)

- A) Un système possède un gain unitaire et le plan de Laplace suivant :



Tracez approximativement ses lieux de Black et Nyquist en indiquant le sens des fréquences croissantes. Nommez les axes de vos graphiques.

- B) Une sinusoïde d'amplitude 2, de fréquence 3 rad/sec est appliquée à l'entrée du système suivant :

$$G(s) = \frac{2s}{1+4s} e^{-3s}$$

Quelle est l'expression de sa sortie en régime permanent?

### QUESTION 4 - Systèmes du second ordre (6 % + 7 % + 6% + 6% = 25 %)

Un système peut être représenté par la fonction de transfert suivante :

$$G(s) = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_n} s + \frac{1}{\omega_n^2} s^2}$$

Ses pôles sont complexes conjugués. Les parties imaginaires des pôles sont  $\pm 2$ . Les parties réelles sont négatives. Le facteur de surtension (facteur de résonance) vaut 2. Le rapport d'amplitude à la fréquence de résonance est 6 dB. Le gain statique est positif.

- A) Quelle est la fréquence de résonance du système?
- B) Quel est le gain statique du système?
- C) Quelle est la période des oscillations transitoire suite à une excitation en échelon?
- D) À quelle fréquence le système présente-t-il une phase de  $-90^\circ$ ?

**Bonne chance !**

## FORMULES :

### 1. Transformation de Laplace

$y(t)$ pour $t > 0$	$Y(s)$	Seuil de définition	Pôles de $Y(s)$
1	$\frac{1}{s}$	$\text{Re } s > 0$	0
$\delta(t)$	1	$\text{Re } s > -\infty$	-
t	$\frac{1}{s^2}$	$\text{Re } s > 0$	0, double
$e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$	$\text{Re } s > -a$	-a
$te^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\text{Re } s > -a$	-a, double
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\text{Re } s > 0$	$\pm j\omega$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\text{Re } s > 0$	$\pm j\omega$
$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$\text{Re } s > -a$	$-a \pm j\omega$
$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$\text{Re } s > -a$	$-a \pm j\omega$

2. Système du deuxième ordre  $G(s) = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}}$

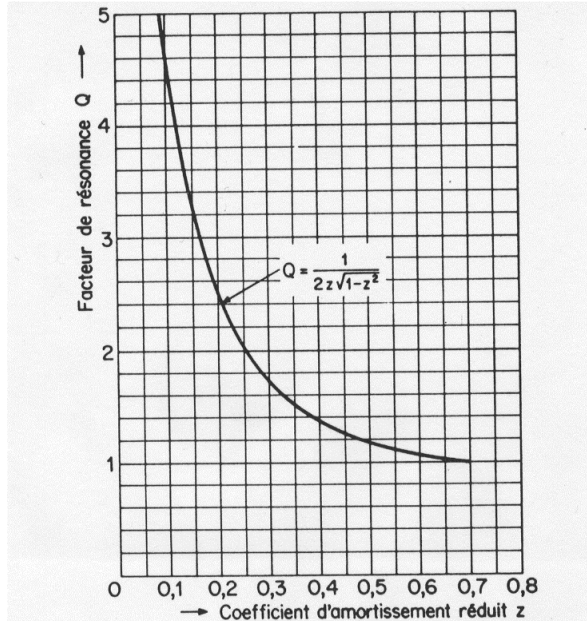


FIG. 8-4. — Facteur de résonance vs facteur d'amortissement.

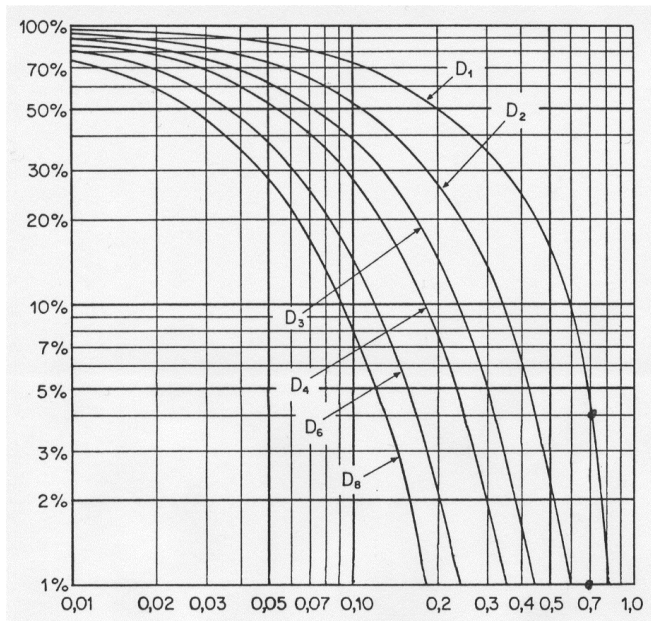


FIG. 8-6. — Dépassements successifs de la réponse d'un système du second ordre à un échelon ou à un essai de lâcher. En abscisses: le facteur d'amortissement  $z$ . (D'après C.S. DRAPER, W. MCKAY et S. LEES, ouvrage cité au § 1.Ab de la bibliographie, p. 257.)

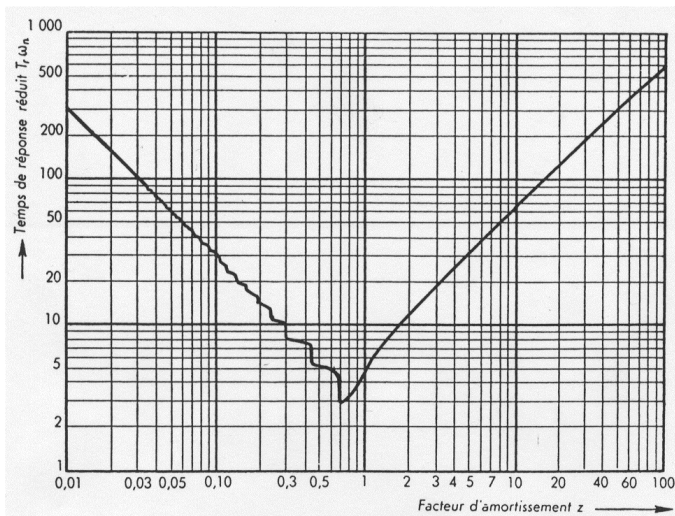


FIG. 8-11. — Temps de réponse  $T_r$  vs facteur d'amortissement. Noter (a) le minimum dans la zone  $z = 0,7$  et (b) les discontinuités pour  $z < 0,7$ , conséquences de la définition du temps de réponse. (D'après C. Draper, W. McKay et S. Lees, *loc. cit.*)