STT-2920 | *Examen 1* | **26 Octobre 2011**
Probabilités pour ingénieurs | | **15h30-17h30**
Rachid Kandri-Rody

Répondre aux questions sur le questionnaire.
Cet examen compte pour 50% de la note finale.
L'examen compte 7 exercices répartis dans un questionnaire de **13 pages**, dont une page d'espace supplémentaire à la toute fin.
Vous avez **120 minutes** pour faire cet examen.
Donner tous les développements et calculs.
Définissez clairement les événements qui vont intervenir dans vos calculs.
Toutes les réponses doivent être convenablement justifiées.
Une liste de formules est distribuée avec cet examen.
Utiliser le verso des feuilles pour le brouillon.
Éteindre et ranger tout appareil électronique.

À remplir par l'étudiant(e)

Nom :	Prénom :
Matricule : Corrigé + Barème	Vos initiales :

Section : A

À remplir par le(s) correcteur(s)

Exercice 1	12 / 12
Exercice 2	14 / 14
Exercice 3	14 / 14
Exercice 4	16 / 16
Exercice 5	14 / 14
Exercice 6	16 / 16
Exercice 7	14 / 14
Total	100 /100

Exercice 1 : **(12 pts)**

Dans une entreprise, deux types de défauts peuvent se produire lors de la fabrication de pièces électroniques. Un récent test a montré que 12% des pièces ont des défauts de premier type, 8% des défauts de deuxième type et 5% des défauts des deux types.

(a) Quelle est la probabilité qu'une pièce choisie au hasard ait au moins un des deux défauts ? (6 pts)

(b) Quelle est la probabilité qu'une pièce choisie au hasard n'ait aucun défaut ? (6 pts)

Réponses :

a) $A_i =$ « Une pièce choisie au hasard a des défauts du i^{e} type », $i = 1, 2$.

$P(A_1) = 0.12$, $P(A_2) = 0.08$ et $P(A_1 \cap A_2) = 0.05$

d'où

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$
$$= 0.12 + 0.08 - 0.05 = \boxed{0.15}$$

b)
$$P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) = P(\overline{A_1 \cup A_2})$$
$$= 1 - P(A_1 \cup A_2)$$
$$= 1 - 0.15$$
$$= \boxed{0.85}$$

Exercice 2 : **(14 pts)**
La probabilité qu'un musée, possédant une alarme, soit cambriolé est de 0.002. S'il y a cambriolage, l'alarme fontionne avec une probabilité de 0.98. La probabilité que l'alarme fonctionne par erreur un jour donné sans qu'il y ait cambriolage est égale à 0.01.

(a) Quelle est la probabilité que l'alarme fonctionne un jour donné ? (7 pts)

(b) Quelle est la probabilité qu'il y ait vraiment cambriolage lorsque l'alarme a fonctionné ? (7 pts)

Réponses :

a) $C =$ « musée cambriolé » $\rightarrow P(C) = 0.002$

$A =$ « l'alarme fonctionne » $\rightarrow \begin{cases} P(A/C) = 0.98 \\ P(A/\bar{C}) = 0.01 \end{cases}$

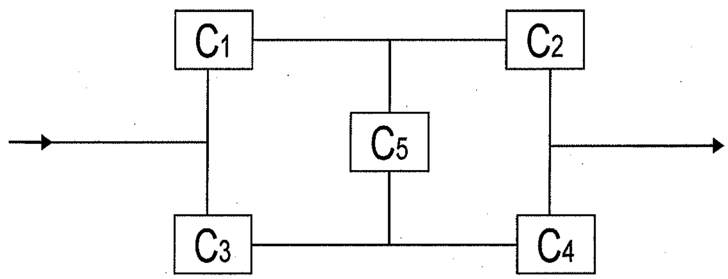
$$P(A) = P(C).P(A/C) + P(\bar{C}).P(A/\bar{C})$$
$$= 0.002 \times 0.98 + (1-0.002) \times 0.01 = 0.0119$$

b) $P(C/A) = \dfrac{P(C)\,P(A/C)}{P(A)}$

Bayes

$$= \frac{0.002 \times 0.98}{0.01194} = 0.164$$

Exercice 3 :(14 pts)
Calculer la fiabilité du réseau R qui figure dans le schéma suivant. On suppose que touts les composants C_i, $i = 1, \cdots, 5$, fonctionnent de façon indépendante et qu'ils ont la même fiabilité de 0.90 sauf le cinquième composant C_5 dont la fiabilité est de 0.95.



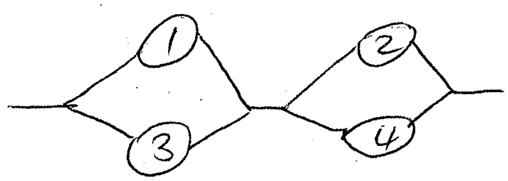
Réponse : Faire les calculs au millième près.

$R =$ « le réseau fonctionne », $C_i =$ « le comp. C_i fonctionne ».

$P(C_1) = P(C_2) = P(C_3) = P(C_4) = 0{,}90$

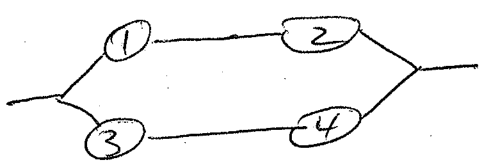
$P(C_5) = 0{,}95$

R/C_5 :



$\longrightarrow P(R/C_5) = \left[1-(1-0{,}90)^2\right]^2 = 0{,}9801$

$R/\overline{C_5}$:



$\longrightarrow P(R/\overline{C_5}) = 1-(1-0{,}90^2)^2 = 0{,}9639$

$$P(R) = P(C_5)\,P(R/C_5) + P(\overline{C_5})\,P(R/\overline{C_5})$$
$$= 0{,}95 \times 0{,}9801 + 0{,}05 \times 0{,}9639$$
$$= \boxed{0{,}979 29}$$

<u>Exercice 4</u> : (16 pts)

La longueur X d'une pièce fabriquée en série est une variable aléatoire X qui possède la fonction de densité suivante :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad 0 \le x \le 1 \\ 1 & \text{si} \quad 1 \le x \le k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où k étant une constante plus grande que 1.

(a) Montrer que la valeur de la constante k est égale à $\frac{5}{3}$ (4 pts)

(b) Calculer l'espérance de X. (4 pts)

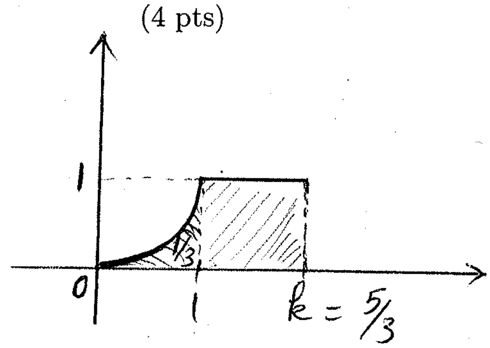
(c) Trouver la fonction de répartition de la variable X. (4 pts)

(d) En déduire $P(X \le 1.5/X > 1)$. (4 pts)

<u>Réponses</u> :

a) $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 x^2\,dx + \int_1^k dx$

$= \frac{1}{3} + (k-1) \Rightarrow \boxed{k = 5/3}$



b) $EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_0^1 x^3\,dx + \int_1^{5/3} x\,dx$

$= \left(\frac{x^4}{4}\right)_0^1 + \left(\frac{x^2}{2}\right)_1^{5/3} = \boxed{1.139}$

c) si $x < 0 \longrightarrow F(x) = P(X \le x) = \boxed{0}$

si $x \geqslant 5/3 \longrightarrow F(x) = \boxed{1}$

si $0 \le x \le 1$: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_0^x t^2\,dt = \boxed{\frac{x^3}{3}}$

si $1 \le x < 5/3$: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_0^1 t^2\,dt + \int_1^x dt = \frac{1}{3} + [t]_1^x$

$= \boxed{x - 2/3}$

d) $P(X \le 1.5/X > 1) = \frac{P(1 \le X \le 1.5)}{P(X > 1)} = \frac{F(1.5) - F(1)}{1 - F(1)}$

$= \frac{1.5 - 2/3 - 1/3}{1 - 1/3} = \boxed{3/4}$

Exercice 5 : **(14 pts)**

Soit X une variable aléatoire représentant le nombre d'heures d'entraînement quotidien d'un athlète. Supposons que la fonction de masse de cette variable soit de la forme :

$$f(x) = \begin{cases} 0.1 & \text{si} \quad x = 0 \\ ax & \text{si} \quad x = 1 \text{ ou } x = 2 \\ a(5-x) & \text{si} \quad x = 3 \text{ ou } x = 4 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où a étant une constante réelle.

(a) Montrer que la valeur de la constante a est égale à 0.15 (4 pts)

(b) Quelle est la probabilité que l'athlète s'entraîne au moins deux heures au cours d'une journée ? (4 pts)

(c) Quelle est la probabilité que l'athlète s'entraîne au moins deux heures au cours d'une journée sachant qu'il s'entraîne cette journée-là ? (6 pts)

Réponses :

a) $1 = 0.1 + a + 2a + a(5-3) + a(5-4) = 0.1 + 6a$

donc $6a = 0.9$ d'où $\boxed{a = 0.15}$

b) $P(X \geq 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1)$

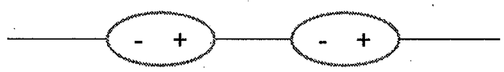
$= 1 - 0.1 - 0.15 = \boxed{0.75}$

c) $P(X \geq 2 / X \geq 1) = \dfrac{P(X \geq 2 \text{ et } X \geq 1)}{P(X \geq 1)}$

$= \dfrac{P(X \geq 2)}{P(X \geq 1)} = \dfrac{P(X \geq 2)}{1 - P(X=0)}$

$= \dfrac{0.75}{1 - 0.1} = \dfrac{0.75}{0.9} = 0.83\overline{3}$

Exercice 6 :(16 pts)
Pour alimenter un circuit électrique, on utilise deux piles électriques, branchées en série, dont les durées de vie T_1 et T_2 sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées avec la loi uniforme sur l'intervalle [50, 100]. La variable aléatoire $V = min\{T_1, T_2\}$ désigne la durée de vie de cette source d'alimentation.



(a) Montrer que la fonction de répartition de V est égale à : (8 pts)

$$F_V(v) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad v < 50 \\ 1 - (2 - \frac{v}{50})^2 & \text{si} \quad 50 \leq v \leq 100 \\ 1 & \text{si} \quad v > 100 \end{cases}$$

(b) En déduire la densité de V. (4 pts)

(c) Calculer $P(V > 70)$. (4 pts)

Réponses :

a) on a : $T_i \sim \mathcal{U}[50, 100]$, ind. $i = 1, 2$ → densité $f_{T_i}(t) = \begin{cases} \frac{1}{50} & \text{si } t \in [50,100] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

f.d.r. $F_{T_i}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 50 \\ \frac{t-50}{50} & \\ 1 & \text{si } t > 100 \end{cases}$

d'où la f.d.r. de V :

$$F_V(v) = P(V \leq v) = P(\min(T_1, T_2) \leq v)$$
$$= 1 - P(\min(T_1, T_2) > v) = 1 - P(T_1 > v \text{ et } T_2 > v)$$
(du fait de l'ind. des T_i)
$$= 1 - P(T_1 > v)\, P(T_2 > v)$$
$$= 1 - (1 - F_{T_1}(v))(1 - F_{T_2}(v))$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{si } v < 50 \\ 1 - \left(2 - \frac{v}{50}\right)^2 & \text{si } v \in [50, 100] \\ 1 & \text{si } v \geq 100 \end{cases}$$

Exercice 6 : (suite)

b) densité de V est égale à

$$f_V(v) = F_V'(v) = \begin{cases} \frac{1}{25}\left(2 - \frac{v}{50}\right) & \text{si } v \in [50, 100] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

c) $\mathbb{P}(V > 70) = 1 - F_V(70)$

$$= 1 - \left[1 - \left(2 - \frac{70}{50}\right)^2\right]$$

$$= \boxed{0.36}$$

Exercice 7 : **(14 pts)**
On tire simultanément deux jetons d'une urne contenant trois jetons numérotés 0, 1 et 2. Soit X le plus petit et Y le plus grand des numéros obtenus.

(a) Déterminer la loi conjointe de X et Y. (6 pts)

(b) Déterminer les lois marginales de X et Y. (4 pts)

(c) X et Y sont-elles indépendantes ? (4 pts)

Réponse :

a) et b) $\Omega = \{ \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\} \}$

$x \backslash y$	1	2	$\mathcal{L}(X)$
0	1/3	1/3	2/3
1	0	1/3	1/3
$\mathcal{L}(Y)$	1/3	2/3	1

c) Non car il y a un 0 dans le tableau de la loi conjointe.