Université Laval
Professeur: Leslie A. Rusch

Département de génie électrique
et de génie informatique

GEL10280: Communications numériques
2007 Examen Partiel

Vendredi le 2 mars 2007; Durée: 11h30 à 13h20
Deux feuilles de documentation fournies; une calculatrice permise

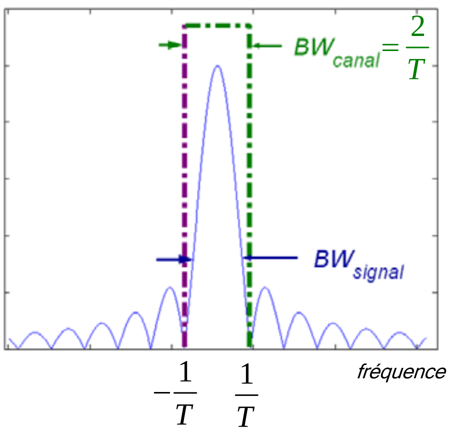
---

Problème 1 (35 points sur 100)

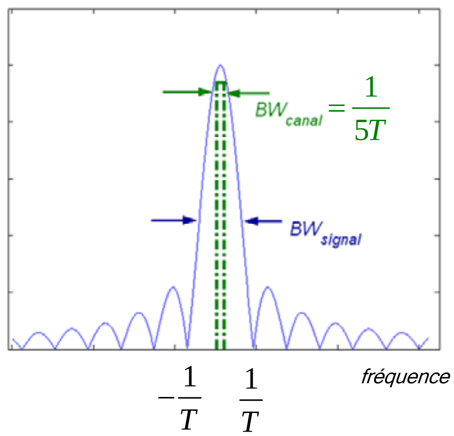
A. (15 points) Complétez la table suivante dans votre cahier bleu.

Format de modulation	Dimensionnalité de l'espace du signal	Symboles d'énergie égale (oui/non)	Modulation orthogonale (oui/non)
16PSK			
OOK			
BPSK			
64QAM			
8FSK			
DPSK			

B. (10 points) Considérez une impulsion rectangulaire en temps avec duré T. Comment est-ce que l'impulsion sera modifiée en passant par un canal limité en largeur de bande? Considérez les deux cas suivants pour la largeur de bande du canal.



Cas 1



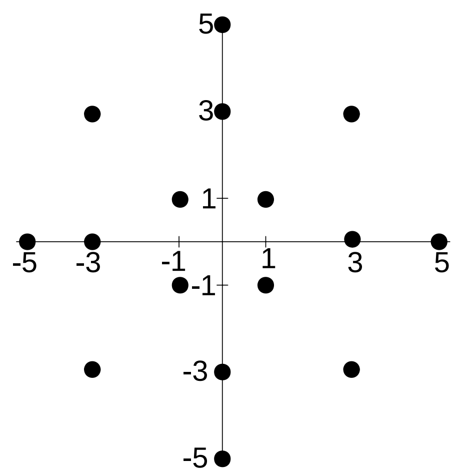
Cas 2

Esquissez l'impulsion en temps à la sortie du canal pour les deux cas. Indiquez votre échelle du temps en fonction de T. Discutez la qualité de communications que nous pouvons attendre pour les deux cas.

C. (10 points) Donnez une esquisse typique d'une graphique de BER vs. E_b/N_0 . Donnez une esquisse de BER vs. E_b/N_0 avec un plancher du BER. Expliquez comment un plancher du BER peut arriver.

Problème 2 (30 points sur 100)

Soit une modulation 16QAM ***NON***-rectangulaire. Les coordonnées de la constellation dans l'espace I/Q sont (±1, ±1) (±3, ±3) (0, ±3) (±3,0) (0, ±5) (±5,0)



A. (25 points) Trouvez la probabilité d'erreur.

B. (5 points) Quelle est la perte (ou avantage) en dB de cette constellation par rapport à une constellation 16QAM avec géométrie carré?

.

Problème 3 (15 points sur 100)

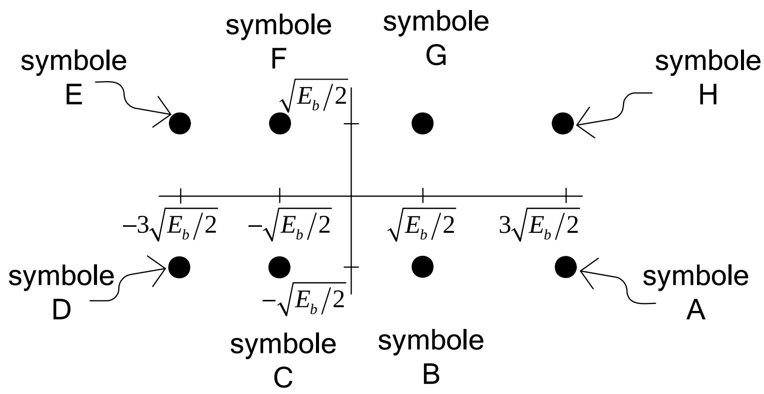
Il n'est pas possible d'avoir une communication fiable pour $\frac{E_b}{N_0} < \ln 2 = -1.6\,\text{dB}$

A. (10 points) Utilisez l'approximation $2^x \approx 1 + x \ln 2$ pour $x \ll 1$, pour développer cette limite sur E_b/N_0 .

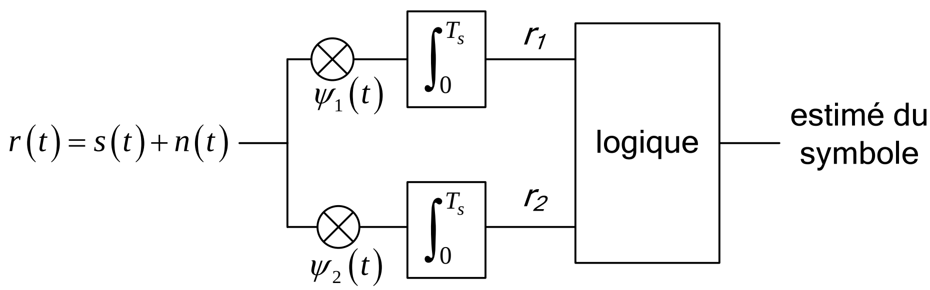
B. (5 points) Est-ce qu'il est possible de contourner cette limite en utilisant une modulation orthogonale de haute complexité (i.e., avec largeur de bande infinie)?

Problème 4 (20 points sur 100)

Considérons une détection cohérente de la modulation 8QAM rectangulaire. Voici l'espace du signal pour cette modulation.



Le détecteur optimal MAP est

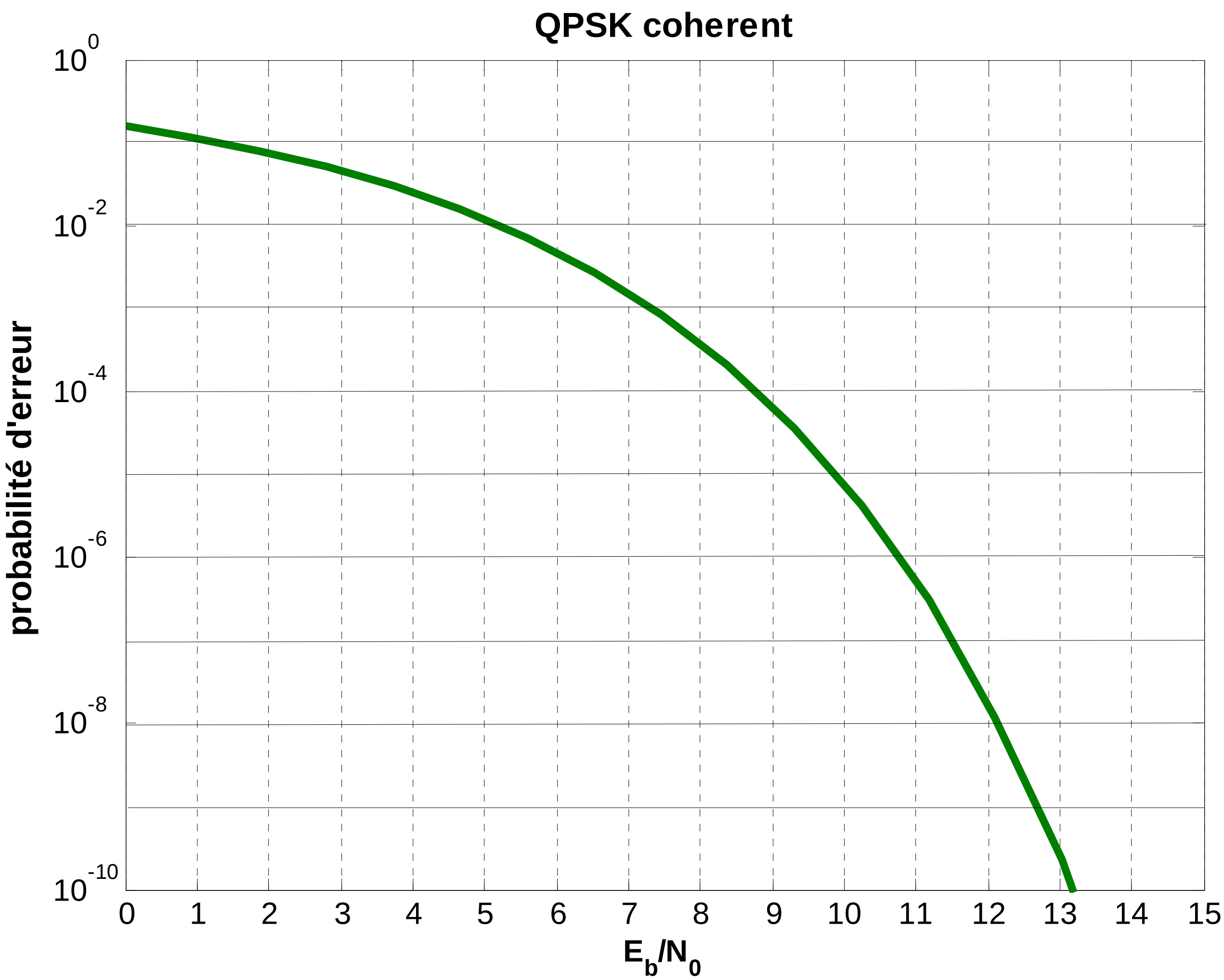


Supposons que $E_b/N_0 = 10\text{dB}$ et le vecteur reçu est

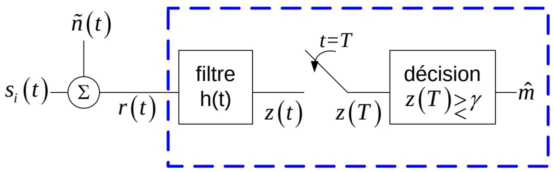
$$r = [r_1, r_2] = \left[\sqrt{E_b}, -1.5\sqrt{E_b}\right]$$

A. (5 points) Quel est l'estimé du symbole reçu si les symboles ont tous la même probabilité a priori?

(15 points) Quel est l'estimé du symbole reçu si les symboles ont tous la même probabilité a priori, sauf le symbole A qui a une probabilité à priori de 90%?


QPSK coherent
probabilité d'erreur
10^0
10^-2
10^-4
10^-6
10^-8
10^-10
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
Eb/N0

Récepteur d'échantillonnage



MAP: i qui maximise $p(z|s_i)\,p(s_i)$

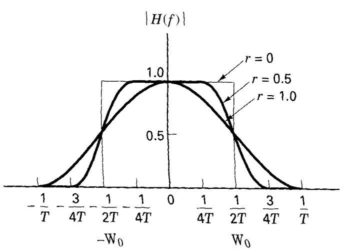
i qui minimise $\left\|\mathbf{r}-\mathbf{s}_i\right\|^2 - N_0 \ln P(\mathbf{s}_i)$

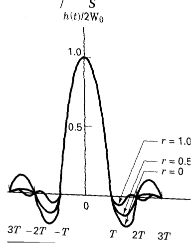
$P(\mathbf{s}_i) =$ probabilité a priori de symbole $\mathbf{s}_i$

ML: i qui maximise $p(z|s_i)$

i qui minimise $\left\|\mathbf{r}-\mathbf{s}_i\right\|^2$

Raised cosine $v(t) = \dfrac{\sin(\pi t/T_s)}{\pi t/T_s}\dfrac{\cos(r\pi t/T_s)}{1-4r^2t^2/T_s^2}$





Énergie moyenne

$$E_{moy} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\left\|\mathbf{s}_i\right\|^2 = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\left[\text{énergie du signal } i\right]$$

Énergie par bit v. énergie par symbole

$$E_b \log_2 M = E_s$$

QAM

Conversion de l'espace I/Q vers espace du signal

$$\left(\tilde{a}_n^I, \tilde{a}_n^Q\right) = \sqrt{\frac{M\cdot E_s}{\sum_{i=1}^{M}\left[\left(a_n^I\right)^2+\left(a_n^Q\right)^2\right]}}\left(a_n^I, a_n^Q\right)$$

coordonnées, espace du signal

coordonnées, espace I/Q

cas rectangulaire (carrée) $M=L^2$

$$P_e = 2\left(1-\frac{1}{\sqrt{M}}\right)Q\left(\sqrt{\frac{3\log_2 M}{(M-1)}\frac{E_b}{N_0}}\right) \qquad d_{\min} = \sqrt{\frac{6\log_2 L}{L^2-1}}$$

Borne d'union

$$P_e \approx \frac{2K}{M}Q\left(\frac{D_{\min}}{\sqrt{2N_0}}\right) = \frac{2K}{M}Q\left(d_{\min}\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

K est le nombre des paires des signaux séparés par la distance minimale D_{min}

Distance minimale dans l'espace du signal

$$D_{\min} = \min_{i\neq k}\left\|\mathbf{s}_i-\mathbf{s}_k\right\| \text{ et } d_{\min} = \frac{D_{\min}}{\sqrt{2E_b}}$$

Pour une modulation orthogonale

$$P_e(bit) = P_b = P_e(symbol)\frac{M/2}{M-1}$$

$$P_e(BPSK) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

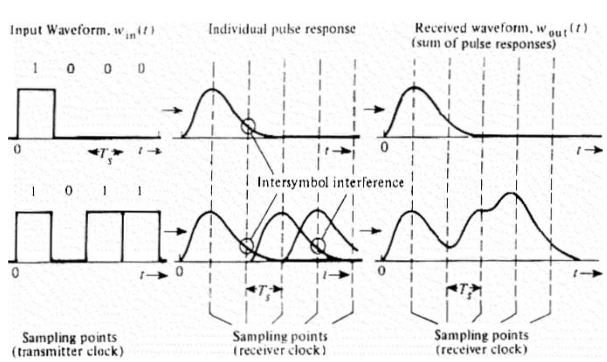
$$P_e(OOK) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

$$P_e(QPSK) \approx 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

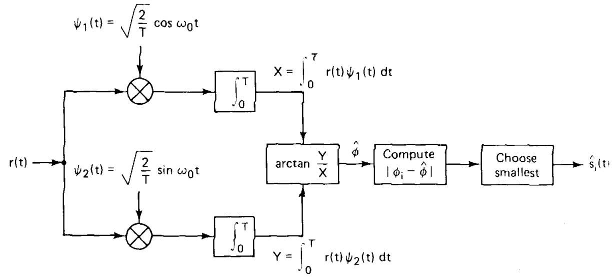
Perte par rapport à QPSK

$$d_{\min} = \sqrt{x}\sqrt{2} \qquad \text{perte} = -10\log_{10} x$$

L'effet d'ISI

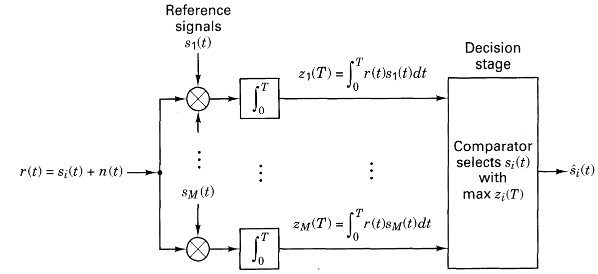


MPSK cohérent $\eta = \log_2 M$ †



$$P_e(M) \approx 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}} \sin \frac{\pi}{M}\right)$$
$$= 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_b \log_2 M}{N_0}} \sin \frac{\pi}{M}\right)$$

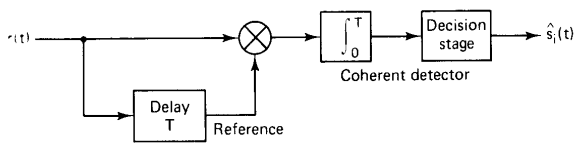
MFSK cohérent $\eta = \dfrac{\log_2 M}{M}$ †



$$P_e = (M-1)Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) = (M-1)Q\left(\sqrt{\frac{E_b \log_2 M}{N_0}}\right)$$

Séparation minimale $1/2T_s$

DPSK incohérent $P_e = \dfrac{1}{2} e^{-E_b/N_0}$



~1 dB de perte entre DPSK et BPSK

Processus Gram Schmidt

$$\psi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{E_1}} s_1(t) \text{ où } E_1 \triangleq \int_0^T s_1^2(t)\,dt$$
$$\theta_2(t) \triangleq s_2(t) - \langle s_2(t), \psi_1(t)\rangle \psi_1(t)$$
$$E_2 \triangleq \int_0^T \theta_2^2(t)\,dt \qquad \psi_2(t) = \frac{\theta_2(t)}{\sqrt{E_2}}$$
$$i. \quad \theta_i(t) = s_i(t) - \sum_{k=1}^{i-1} \langle s_i(t), \psi_k(t)\rangle \psi_k(t)$$
$$E_i \triangleq \int_0^T \theta_i^2(t)\,dt \qquad \psi_i(t) = \frac{\theta_i(t)}{\sqrt{E_i}}$$

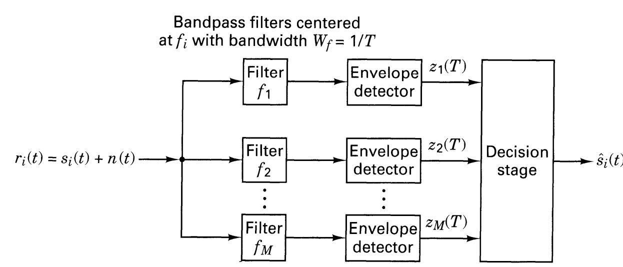
Loi de Shannon

$$C = W \log_2(1 + SNR) \qquad SNR = \frac{E_b}{N_0}\frac{R_b}{W}$$

Relations trigonométriques

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta$$
$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - \sin^2\theta$$
$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

MFSK incohérent



$$P_e(BFSK) = \frac{1}{2} e^{-E_b/2N_0}$$

~1 dB de perte entre BFSK cohérente et incohérente

Séparation minimale $1/T_s$

Efficacité spectrale

$$\eta = \frac{R_b}{W} = \frac{1}{T_b}\frac{1}{W} \text{ bits/s}$$

† en supposant une impulsion Nyquist idéale