UNIVERSITÉ
LAVAL

Faculté des Sciences et de génie
Département de génie électrique et de génie informatique

GEL-2001 Analyse de signaux
Jérôme Genest

Examen final

Date: Jeudi le 15 décembre 2011

Durée: de 8h30 à 10h20

Salle: PLT-2573, PLT-2708

Cet examen vaut 45% de la note finale.

Remarques:

i) *L'utilisation d'une calculatrice est permise.*

ii) *Aucun document n'est permis durant l'examen.*

iii) *Seule la liste des formules fournie à la fin du questionnaire est permise.*

iv) *Votre carte d'identité doit être placée sur votre bureau en conformité avec le règlement de la Faculté.*

Problème 1 (10 points)

Calculez la transformée de Fourier du signal $f(t) = (1 - t^2)\ \text{Rect(t)} + 1$.

Problème 2 (10 points)

Soit un message $m(t) = \text{Sa}^2(t/2)$.
Vous devez transmettre ce message en modulation d'amplitude (AM) en bande latérale unique (BLU) sans porteuse.

a) Tracez le spectre du message $M(\omega)$;

b) Décrivez, via un diagramme en blocs, le schéma de modulation requis pour transmettre le message en BLU à l'aide d'une porteuse à ω_c (la porteuse n'étant pas transmise). Expliquez l'utilité de chaque bloc;

c) Tracez le spectre du signal ainsi transmis, que vous noterez $S(\omega)$;

d) Décrivez, toujours à l'aide d'un diagramme en blocs, le schéma de démodulation nécessaire pour retrouver le message, en supposant qu'il y a d'autres canaux de part et d'autre du vôtre à ω_c;

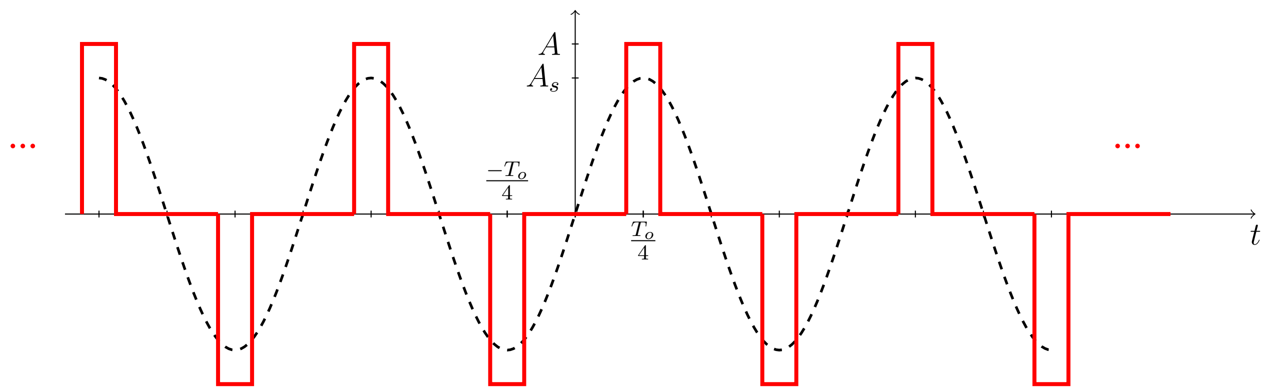
e) Étant donné que la porteuse n'est pas explicitement transmise, discutez les impacts d'une erreur de fréquence et/ou de phase à la démodulation.

Problème 3 (15 points)

Onduleur DC vers AC et onde sinusoïdale ‘modifiée”

Plusieurs onduleurs générant une tension AC à partir d’un DC utilisent une forme d’onde illustrée à la figure suivante pour approximer un sinus. Cette forme d’onde est nommée “modified sine wave” en anglais.

La largeur des impulsions rectangulaires est $2a$ et leur amplitude est A, tandis que l’amplitude du sinus désiré est A_s. Le paramètre a est variable, tel que $a \leq T_o/4$.



a) Calculez la transformée de Fourier du signal composé d’impulsions rectangulaires alternées en signe;

b) La *série* de Fourier du signal calculé en a) contient deux termes, un Sa et un sinus. Tracez les deux termes, d’abord sur deux graphiques séparés et indiquez à quels points la série de Fourier doit être évaluée. Tracez enfin les premiers termes de la série de Fourier.

c) En supposant que le signal passe dans un filtre passe-bas rectangulaire idéal qui coupe parfaitement à $\omega = 2\omega_o$ ($\omega_o T_o = 2\pi$), quelle fraction de la puissance est conservée par le filtre??

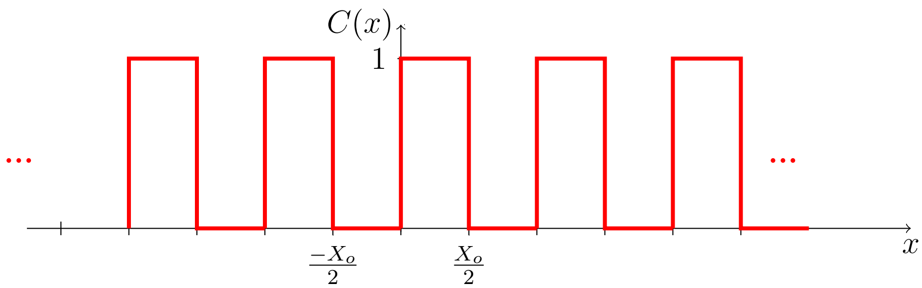
d) Toujours en supposant un filtre idéal à $2\omega_o$, Quelle est l’amplitude du signal temporel à la sortie du filtre? Que faut-il faire pour ajuster cette amplitude de manière à ce qu’elle soit égale à l’amplitude A_s du sinus désiré si, par exemple, $A_s = 110$ V, $A = 200V$ sachant, qu’il s’agit d’une ondulation à 60 Hz ?

e) Si l’onde quasi sinusoïdale est plutôt filtrée par un filtre de premier ordre tel que $H(\omega) = \frac{1}{1+j\omega/2\omega_o}$, quelle la puissance dans la première harmonique et quelle est la puissance résiduelle dans la 3e harmonique ?

Problème 4 (10 points)

Échantillonnage spatial

On utilise une caméra CCD pour mesurer un code à barres. Pour simplifier les calculs, le code à barre $C(x)$ est supposé être une suite infinie de barres noires et blanches alternées. Le signal spatial avant l'échantillonnage est illustré à la figure suivante.



Notez que le signal est spatial (en x) plutôt que temporel. Nous utiliserons donc les fréquences spatiales σ qui forment un couple de Fourier $x \Leftrightarrow \sigma$ tout comme $t \Leftrightarrow \omega$.

La caméra échantillonne ce signal, prenant un point pour chaque pixel. L'espacement entre les points mesurés est donc X_o. De plus chaque pixel mesure le signal sur toute sa taille, la réponse impulsionnelle est donc $h(x) = \text{Rect}(2x/X_o)$.

Pour les questions a) à d), on considère un échantillonnage idéal de C(x), c'est-à-dire le code à barres non filtré par h(x).

a) Déterminer la fréquence d'échantillonnage minimale σ_s de manière à respecter le critère de Nyquist pour la première harmonique. Notez que les harmoniques supérieures de l'onde carrée ne seront pas correctement échantillonnées.

b) Tracez les points mesurés par l'échantillonnage trouvé en a), en supposant que les points mesurés sont centrés sur le signal (i.e que les pixels de la caméra sont alignés avec les barres du code).

c) Calculez la transformée de Fourier du signal continu $C(x)$ avant l'échantillonnage, tout en indiquant où se trouvera la fréquence de Nyquist.

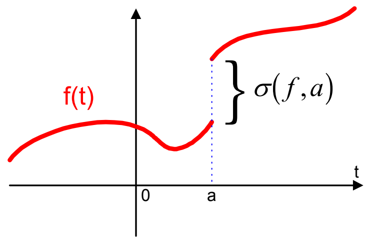
d) À quel endroit se replient les harmonique du signal lorsque celui-ci est échantillonné ?

e) Calculez et tracez la convolution entre le signal continu et la réponse impulsionnelle $h(x)$ du filtre.

f) Si la caméra est alignée avec les barres, quels points de la réponse en e) sont mesurés ? Qu'en est-il si les pixels de la caméra ne sont pas alignés avec les barres du code ?

Tables de Transformées et Propriétés
Examen Final

Dérivée d'une fonction discontinue



$$(D_f)' = D_{f'} + \sigma(f,a)\delta_a$$

Manipulation sur la fonction delta

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$$

et $f(t)\delta(t-a) = f(a)\delta(t-a)$

$$f(t)*\delta(t) = f(t)$$

et $f(t)*\delta(t-a) = f(t-a)$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-jn\tau\omega} = \frac{2\pi}{\tau}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega - \frac{2\pi n}{\tau}\right)$$

Séries de Fourier

$F_{série}(n) = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f_p(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$ et $f_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_{série}(n)e^{jn\omega_0 t}$

Théorème de Parseval : $\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}\left|f_p(t)\right|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|F_{série}(n)\right|^2$

Calcul des coefficients de Fourier d'une fonction périodique

Soit $f_r(t)$ la restriction de la fonction $f_p(t)$ sur $[-T_0/2, T_0/2]$ et $f_r(t) \Leftrightarrow F_r(\omega)$. Nous aurons: $F_{Série}(n) = \frac{F_r(n\omega_0)}{T_0}$

Transformée de Fourier

$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$ et $f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$

Théorème de Parseval : $\int_{-\infty}^{+\infty}\left|f(t)\right|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|F(\omega)\right|^2 d\omega$

Produit de convolution

$$f(t)*g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(t-u)du = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)f(t-u)du$$

Tables de Transformées et Propriétés
Examen Final

Fonction	Transformée de Fourier	Fonction	Transformée de Fourier
$f(t)$	$F(\omega)$	$\delta(t)$	1
$F(t)$	$2\pi f(-\omega)$	1	$2\pi\delta(\omega)$
$f(t+a)$	$e^{ja\omega}F(\omega)$	$\delta_{T_0}(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT_0)$	$\omega_0\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-n\omega_0)$
$f(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$	$\mathrm{U}(t)$	$\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$
$e^{jbt}f(t)$	$F(\omega-b)$	$\mathrm{Sgn}(t)$	$\frac{2}{j\omega}$
$t^n f(t)$	$(j)^n\frac{d^n}{d\omega^n}F(\omega)$	$\mathrm{Rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)$ †	$\tau\,\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$
$\frac{d^n}{dt^n}f(t)$	$(j\omega)^n F(\omega)$	$\mathrm{Tri}\left(\frac{t}{\tau}\right)$ ‡	$\tau\ \ \mathrm{Sa}^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$
$f(t)\times g(t)$	$\frac{1}{2\pi}F(\omega)*G(\omega)$	$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\,\delta(\omega-\omega_0)$
$f(t)*g(t)$	$F(\omega)\times G(\omega)$	$\cos(\omega_0 t)$	$\pi\left[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right]$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\omega_0 t}$	$2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\delta(\omega-n\omega_0)$	$\sin(\omega_0 t)$	$\frac{\pi}{j}\left[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)\right]$
$e^{-\beta t}\mathrm{U}(t)$	$\frac{1}{\beta+j\omega}$	$\mathrm{Sa}(tB)$	$\frac{\pi}{B}\mathrm{Rect}\left(\frac{\omega}{2B}\right)$
$e^{-\beta\lvert t\rvert}$	$\frac{2\beta}{\beta^2+\omega^2}$	$\mathrm{Sa}^2(tB)$	$\frac{\pi}{2B^2}\mathrm{Tri}\left(\frac{\omega}{2B}\right)$

† $\mathrm{Rect}\left(\frac{t-t_0}{\tau}\right)$ est un rectangle de hauteur un, centré sur $t=t_0$, et de longueur τ.

‡ $\mathrm{Tri}\left(\frac{t-t_0}{\tau}\right)$ est un triangle de hauteur 1 centré sur $t=t_0$, avec un base de longueur 2τ.