Mardi le 15 octobre 2013; Durée: 13h30 à 15h20
Aucune documentation permise; aucune calculatrice permise

Problème 1 (35 points sur 100)

A. (25 points) Trouvez la transformée de Fourier inverse de

$$\frac{\cos\omega}{\omega^2-2\omega+2}$$

Nous commençons avec le dénominateur – compléter le carré

$$F(\omega)=\frac{1}{\omega^2-2\omega+2}=\frac{1}{\omega^2-2\omega+1-1+2}=\frac{1}{(\omega-1)^2+1}$$

Nous cherchons la transformée de Fourier parmi les entrées dans le table de transformées fourni. La transformée le plus proche est

$$e^{-\beta|t|}\Leftrightarrow\frac{2\beta}{\beta^2+\omega^2}\qquad ?\Leftrightarrow\frac{1}{1+(\omega-1)^2}$$

L'exploitation directe n'est pas possible étant donné le décalage en fréquence au dénominateur - $F(\omega$-1) au lieu de $F(\omega)$. Nous avons une propriété pour le décalage en fréquence :

$$e^{jbt}f(t)\Leftrightarrow F(\omega-b)\qquad e^{jbt}e^{-\beta|t|}\Big|_{b=1,\beta=1}\Leftrightarrow\frac{2}{1+(\omega-1)^2}$$

$$e^{jt-|t|}\Leftrightarrow\frac{2}{1+(\omega-1)^2}$$

La dernière étape est de traiter le numérateur – un cosinus. Nous écrivons le cosinus comme une somme des exponentielles complexes. Ensuite, nous exploitons la propriété sur la multiplication par une exponentielle complexe dans le domaine fréquentiel. La multiplication par une exponentielle complexe en fréquence engendra une décalage dans le domaine temporelle.

$$\cos\omega=\frac{e^{j\omega}+e^{-j\omega}}{2}\qquad f(t+a)\Leftrightarrow e^{ja\omega}F(\omega)$$

Pour trouver notre réponse,

$$\frac{\cos\omega}{1+(\omega-1)^2}=\frac{e^{j\omega}+e^{-j\omega}}{2}\frac{1}{1+(\omega-1)^2}=\frac{½e^{j\omega}}{1+(\omega-1)^2}+\frac{½e^{-j\omega}}{1+(\omega-1)^2}$$

et

$$\tfrac14 e^{jt-|t|}\Big|_{t=t+1} \Leftrightarrow \frac{\tfrac12 e^{j\omega}}{1+(\omega-1)^2} \qquad \tfrac14 e^{jt-|t|}\Big|_{t=t-1} \Leftrightarrow \frac{\tfrac12 e^{-j\omega}}{1+(\omega-1)^2}$$

$$\tfrac14 e^{j(t+1)-|t+1|} \Leftrightarrow \frac{\tfrac12 e^{j\omega}}{1+(\omega-1)^2} \qquad \tfrac14 e^{j(t-1)-|t-1|} \Leftrightarrow \frac{\tfrac12 e^{-j\omega}}{1+(\omega-1)^2}$$

$$\tfrac14 e^{j(t+1)-|t+1|} + \tfrac14 e^{j(t-1)-|t-1|} \Leftrightarrow \frac{\cos\omega}{1+(\omega-1)^2}$$

B. (10 points) Est-ce que cette transformée de Fourier inverse est une fonction continue? Est-ce qu'elle est une fonction paire, impaire, ou ni paire ni impaire?

On peut répondre aux questions, soit en examinant le domaine fréquentiel ou le domaine temporelle. Etant donné que la transformé est fournie dans le domaine fréquentiel, il semble que cette solution est plus directe.

Fonction continue ou non dans le domaine temporel?

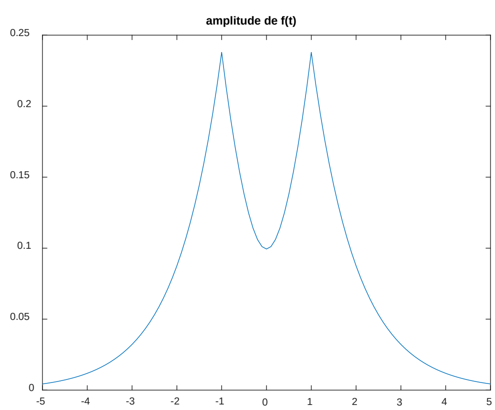
Domaine fréquentiel - $\dfrac{\cos\omega}{\omega^2-2\omega+2}$

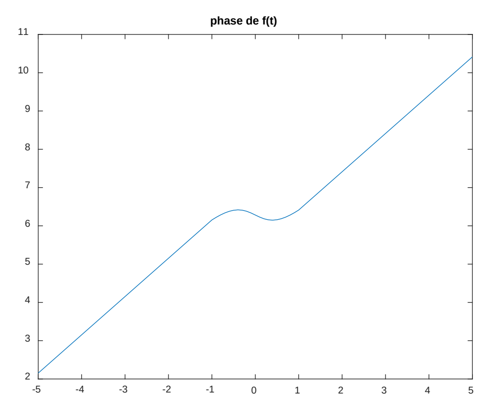
Le numérateur est borne par un (cosinus). Le dénominateur décroit comme ω^2 (notons que ω^2 domine ω pour ω grande). Nous pouvons conclure que la fonction est continue, mais la dérivée n'est pas continue.

Domaine temporelle - $\tfrac14 e^{j(t+1)-|t+1|} + \tfrac14 e^{j(t-1)-|t-1|}$

La valeur absolue est une fonction continue, mais nous parlons d'une fonction complexe. Donc, il faut regarder la partie réelle et la partie imaginaire pour tirer conclusion. Voici les graphiques

```
t=-5:.1:5;f=.25*exp(j*(t+1)-abs(t+1))+.25*exp(j*(t-1)-abs(t-1));
plot(t,abs(f));title('amplitude de f(t)');
figure;plot(t,phase(f));title('phase de f(t)');
```





Fonction paire, impaire ou ni paire ni impaire dans le domaine temporel?

Domaine fréquentiel - $\dfrac{\cos\omega}{\omega^2-2\omega+2}$

Le spectre est réel. Mais le spectre n'est pas une fonction paire :

$$\frac{\cos(-\omega)}{\omega^2+2\omega+2}=\frac{\cos(\omega)}{\omega^2+2\omega+2}\neq\frac{\cos(\omega)}{\omega^2-2\omega+2}$$

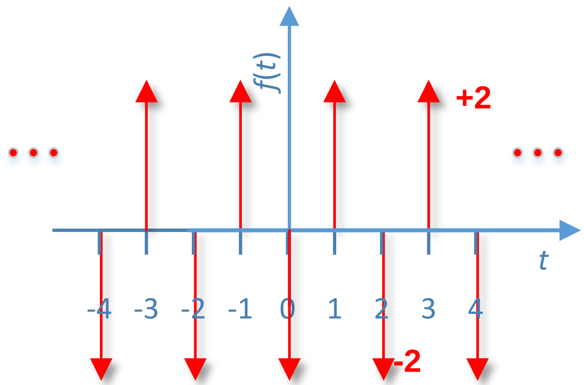
Donc $F(\omega)\neq F^*(-\omega)$ implique que la fonction dans le domaine temporelle n'est pas réelle. Une fonction complexe est ni paire ni impaire.

Domaine temporelle - $¼e^{j(t+1)-|t+1|}+¼e^{j(t-1)-|t-1|}$

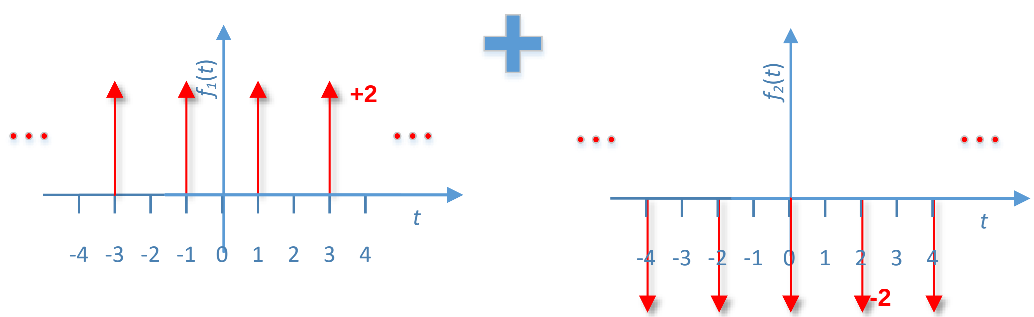
La fonction dans le domaine temporel est complexe. Une fonction complexe est ni paire ni impaire.

Problème 2 (30 points sur 100)

A. (20 points) Trouvez la transformée de Fourier de la fonction périodique suivante



En examinant le graphique nous observons une fonction périodique des fonctions deltas. Un train d'impulsions est une fonction périodique ou toutes les fonctions deltas ont le même poids. Ici nous observons deux poids, donc il y a deux trains d'impulsions deltas.



Chaque fonction a un période de deux. Nous écrivons ces fonctions comme le suivant

$$f_1(t) = 2\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\big((t-1)-2n\big) \qquad f_2(t) = -2\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-2n)$$

Notons que $f_1(t)$ est centré à t = 1, et $f_2(t)$ est centré à t = 0. En utilisant la notation pour les trains des impulsions nous avons

$$f_1(t) = 2\delta_2(t-1) \qquad f_2(t) = -2\delta_2(t)$$

Etant donné que chaque fonction a un période de deux, la fréquence fondamentale pour chaque fonction périodique est $\omega_0 = \pi$. Nous trouvons facilement la transformée de Fourier de $f_2(t)$ easily dans le table

$$\delta_{T_0}(t) \Leftrightarrow \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) = \omega_0 \delta_{\omega_0}(\omega) \qquad f_2(t) = -2\delta_2(t) \Leftrightarrow -2\pi\delta_\pi(\omega) = -2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - n\pi)$$

Pour $f_1(t)$ nous avons simplement à appliquer la relation suivante.

$$f(t+a) \Leftrightarrow e^{ja\omega}F(\omega)$$

Donc

$$f_1(t) = 2\delta_2(t-1) \Leftrightarrow e^{ja\omega}\Big|_{a=-1} 2\pi\delta_\pi(\omega) = e^{-j\omega} 2\pi\delta_\pi(\omega) = 2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega}\delta(\omega - n\pi)$$

En utilisant la propriété d'échantillonnage de la fonction delta nous pouvons simplifier la coté droite à

$$2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega}\delta(\omega - n\pi) = 2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-jn\pi}\delta(\omega - n\pi) = 2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n\delta(\omega - n\pi)$$

$$f_1(t) \Leftrightarrow 2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n\delta(\omega - n\pi)$$

La transformée de Fourier est donc

$$2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\omega}\delta(\omega - n\pi) = 2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n\pi}\delta(\omega - n\pi) = 2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n\delta(\omega - n\pi)$$

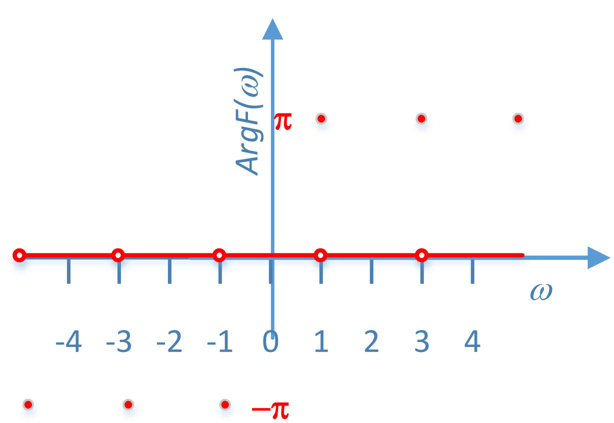
$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) \Leftrightarrow 2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n\delta(\omega - n\pi) - 2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - n\pi)$$

$$= 2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left((-1)^n - 1\right)\delta(\omega - n\pi) = -4\pi\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \text{ impair}}}^{\infty}\delta(\omega - n\pi)$$

$$= -4\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left((\omega - \pi) - k2\pi\right) = -4\pi\delta_{2\pi}(\omega - \pi)$$

B. (10 points) Tracez le spectre de phase. Est-ce que le spectre de phase est continu ou discret?

La fonction temporelle est périodique, donc le spectre de phase est discret. C.-à-d., le spectre de phase est nul partout sauf aux harmoniques. Les harmoniques ont un coefficient de Fourier qui est réel and négatif. Donc la phase aux harmoniques est soit π ou -π. Pour respecter la propriété que le spectre de phase est une fonction impaire, nous choisissons d'avoir une phase π pour les fréquences positifs, et une phase -π pour les fréquences négatif. Une esquisse du spectre de phase est



Problème 3 (35 points sur 100)

A. (15 points) CAS A : Trouvez la transformée de Fourier de $f_1(t) = f_c \cos(2\pi f_c t) Sa^2(t\pi f_c/2)$, f_c=1 MHz. Tracez le module de la transformée sur la feuille fournie. Calculez l'énergie totale, et le pourcentage d'énergie dans la bande $.8\ \text{MHz} \le f \le .8\ \text{MHz}$.

Dans la table nous trouvons

$$\text{Tri}(t/\tau) \Leftrightarrow \tau \text{Sa}^2(\omega\tau/2)$$

En appliquant la dualité

$$F(t) \Leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$$
$$\tau \text{Sa}^2(t\tau/2) \Leftrightarrow 2\pi\,\text{Tri}(-\omega/\tau) = 2\pi\,\text{Tri}(\omega/\tau)$$

Dans notre cas $\tau = \pi f_c$.

$$\pi f_c \text{Sa}^2(t\pi f_c/2) \Leftrightarrow 2\pi\,\text{Tri}(\omega/\pi f_c)$$
$$f_c \text{Sa}^2(t\pi f_c/2) \Leftrightarrow 2\,\text{Tri}(\omega/\pi f_c)$$

La multiplication par un cosinus peut être écrit comme une multiplication par des exponentielles complexes. La propriété pour la multiplication par une exponentielle complexe peut être exploitée.

$$\cos(2\pi f_c t) = \frac{e^{j2\pi f_c t} + e^{-j2\pi f_c t}}{2} \qquad e^{jbt} f(t) \Leftrightarrow F(\omega - b)$$

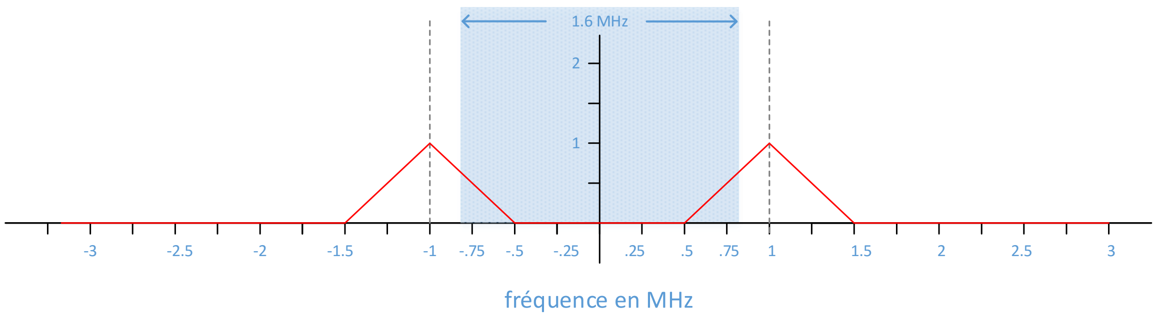
Nous concluons que

$$f_c \cos(2\pi f_c t)\text{Sa}^2\left(\frac{t\pi f_c}{2}\right) = \frac{e^{j2\pi f_c t} + e^{-j2\pi f_c t}}{2} f_c \text{Sa}^2\left(\frac{t\pi f_c}{2}\right) = ½ e^{j2\pi f_c t} f_c \text{Sa}^2\left(\frac{t\pi f_c}{2}\right) + ½ e^{-j2\pi f_c t} f_c \text{Sa}^2\left(\frac{t\pi f_c}{2}\right)$$

et

$$½ e^{j2\pi f_c t} f_c \text{Sa}^2\left(\frac{t\pi f_c}{2}\right) \Leftrightarrow ½ \cdot 2\,\text{Tri}(\omega/\pi f_c)\Big|_{\omega=\omega-2\pi f_c} = \text{Tri}\left(\frac{\omega - 2\pi f_c}{\pi f_c}\right)$$
$$½ e^{-j2\pi f_c t} f_c \text{Sa}^2\left(\frac{t\pi f_c}{2}\right) \Leftrightarrow ½ \cdot 2\,\text{Tri}(\omega/\pi f_c)\Big|_{\omega=\omega+2\pi f_c} = \text{Tri}\left(\frac{\omega + 2\pi f_c}{\pi f_c}\right)$$
$$f_c \cos(2\pi f_c t)\text{Sa}^2\left(\frac{t\pi f_c}{2}\right) \Leftrightarrow \text{Tri}\left(\frac{\omega - 2\pi f_c}{\pi f_c}\right) + \text{Tri}\left(\frac{\omega + 2\pi f_c}{\pi f_c}\right)$$

La transformée est deux triangles, un centré à $2\pi f_c$ et un centré à $-2\pi f_c$, chaque avec une largeur qui est égale à la fréquence centrale (πf_c).



Pour calculer l'énergie dans une bande de fréquence, nous intégrons

$$E=\int_{-\omega_0}^{\omega_0}\left[\mathrm{Tri}\left(\frac{\omega-2\pi f_c}{\pi f_c}\right)+\mathrm{Tri}\left(\frac{\omega+2\pi f_c}{\pi f_c}\right)\right]^2 d\omega$$

$$=2\int_0^{\omega_0}\left[\mathrm{Tri}\left(\frac{\omega-2\pi f_c}{\pi f_c}\right)\right]^2 d\omega=4\pi\int_0^{.8f_c}\left[\mathrm{Tri}\left(\frac{2\pi f-2\pi f_c}{\pi f_c}\right)\right]^2 df$$

$$=4\pi\int_{.5f_c}^{.8f_c}\left(\frac{f-f_c/2}{f_c/2}\right)^2 df=4\pi\int_0^{.3f_c}\left(\frac{f}{f_c/2}\right)^2 df=16\pi\left.\frac{f^3}{3f_c^2}\right|_0^{.3f_c}=\frac{16\pi(.3)^3 f_c}{3}=\frac{16\pi(.3)^3 f_c}{3}$$

L'énergie totale est

$$E=2\cdot 4\pi\int_0^{f_c}\left(\frac{f-f_c/2}{f_c/2}\right)^2 df=2\cdot 16\pi\left.\frac{f^3}{3f_c^2}\right|_0^{.5f_c}=\frac{32\pi(.5)^3 f_c}{3}=\frac{4\pi f_c}{3}$$

Donc le pourcentage d'énergie est

$$E=\frac{16\pi(.3)^3 f_c}{3}\Bigg/\frac{4\pi f_c}{3}=4(.3)^3\approx 10\%$$

B. (10 points) CAS B : Trouvez la transformée de Fourier de $f_2(t)=f_c\cos(2\pi f_c t)Sa(t\pi f_c/2)$, f_c=1 MHz. Tracez le module de la transformée sur la feuille fournie. Calculez l'énergie totale, et le pourcentage d'énergie dans la bande $.8\text{ MHz}\le f\le .8\text{ MHz}$.

Dans la table nous trouvons

$$\mathrm{Rect}(t/\tau)\Leftrightarrow \tau\mathrm{Sa}(\omega\tau/2)$$

En appliquant la dualité

$$F(t)\Leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$$
$$\tau\mathrm{Sa}(t\tau/2)\Leftrightarrow 2\pi\,\mathrm{Rect}(-\omega/\tau)=2\pi\,\mathrm{Rect}(\omega/\tau)$$

Dans notre cas $\tau=\pi f_c$.

$$\pi f_c\mathrm{Sa}(t\pi f_c/2)\Leftrightarrow 2\pi\,\mathrm{Rect}(\omega/\pi f_c)$$
$$f_c\mathrm{Sa}(t\pi f_c/2)\Leftrightarrow 2\,\mathrm{Rect}(\omega/\pi f_c)$$

La multiplication par un cosinus peut être écrit comme une multiplication par des exponentielles complexes. La propriété pour la multiplication par une exponentielle complexe peut être exploitée.

$$\cos(2\pi f_c t) = \frac{e^{j2\pi f_c t} + e^{-j2\pi f_c t}}{2} \qquad e^{jbt} f(t) \Leftrightarrow F(\omega - b)$$

Nous concluons que

$$f_c \cos(2\pi f_c t)\mathrm{Sa}^2\left(\frac{t\pi f_c}{2}\right) = \frac{e^{j2\pi f_c t} + e^{-j2\pi f_c t}}{2} f_c \mathrm{Sa}\left(\frac{t\pi f_c}{2}\right) = ½ e^{j2\pi f_c t} f_c \mathrm{Sa}\left(\frac{t\pi f_c}{2}\right) + ½ e^{-j2\pi f_c t} f_c \mathrm{Sa}\left(\frac{t\pi f_c}{2}\right)$$

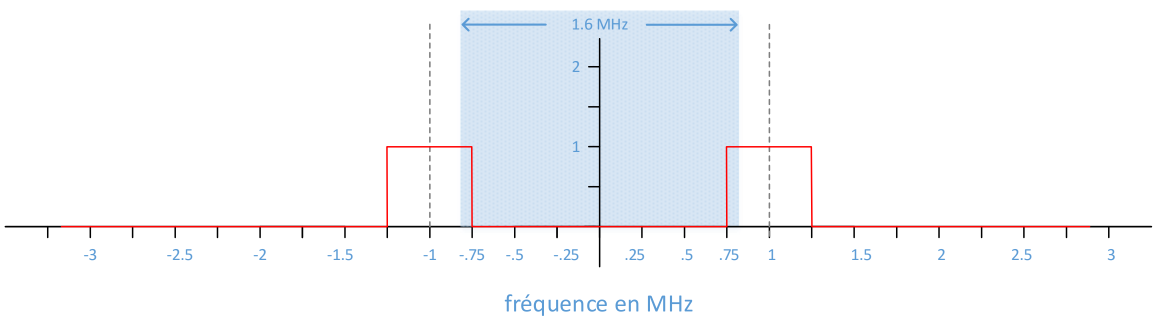
et

$$½ e^{j2\pi f_c t} f_c \mathrm{Sa}\left(\frac{t\pi f_c}{2}\right) \Leftrightarrow ½ \cdot 2\,\mathrm{Rect}(\omega/\pi f_c)\Big|_{\omega=\omega-2\pi f_c} = \mathrm{Rect}\left(\frac{\omega - 2\pi f_c}{\pi f_c}\right)$$

$$½ e^{-j2\pi f_c t} f_c \mathrm{Sa}\left(\frac{t\pi f_c}{2}\right) \Leftrightarrow ½ \cdot 2\,\mathrm{Rect}(\omega/\pi f_c)\Big|_{\omega=\omega+2\pi f_c} = \mathrm{Rect}\left(\frac{\omega + 2\pi f_c}{\pi f_c}\right)$$

$$f_c \cos(2\pi f_c t)\mathrm{Sa}\left(\frac{t\pi f_c}{2}\right) \Leftrightarrow \mathrm{Rect}\left(\frac{\omega - 2\pi f_c}{\pi f_c}\right) + \mathrm{Rect}\left(\frac{\omega + 2\pi f_c}{\pi f_c}\right)$$

La transformée est deux rectangles, un centré à $2\pi f_c$ et un centré à $-2\pi f_c$, chaque avec une largeur qui est la moitié de la fréquence centrale (πf_c).



Pour calculer l'énergie dans une bande de fréquence, nous intégrons

$$E = \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \left[\mathrm{Rect}\left(\frac{\omega - 2\pi f_c}{\pi f_c}\right) + \mathrm{Rect}\left(\frac{\omega + 2\pi f_c}{\pi f_c}\right)\right]^2 d\omega$$

$$= 2\int_0^{\omega_0} \left[\mathrm{Rect}\left(\frac{\omega - 2\pi f_c}{\pi f_c}\right)\right]^2 d\omega = 4\pi \int_0^{.8 f_c} \left[\mathrm{Rect}\left(\frac{2\pi f - 2\pi f_c}{\pi f_c}\right)\right]^2 df$$

$$= 4\pi \int_{.75 f_c}^{.8 f_c} 1^2\, df = 4\pi\, f\Big|_{.75 f_c}^{.8 f_c} = 4\pi(.05 f_c) = .2\pi f_c$$

L'énergie totale est

$$E = 4\pi \int_{.75 f_c}^{1.25 f_c} 1^2\, df = 4\pi\, f\Big|_{.75 f_c}^{1.25 f_c} = 4\pi(.5 f_c) = 2\pi f_c$$

Donc le pourcentage d'énergie est

$$E = .2\pi f_c / 2\pi f_c = \frac{.2}{2} \approx 10\%$$

C. (10 points) Discuter l'implication de la dualité dans ces deux cas en examinant le taux de décroissance **dans le domaine temporel** et 1) la régularité (e.g. continuité et dérivabilité) du spectre et 2) la largeur de bande dans le domaine fréquentiel.

Dans le domaine temporel, $f_1(t)$ décroit comme $1/f^2$; la fonction $f_2(t)$ décroit comme $1/f$. La fonction $f_1(t)$ décroit beaucoup plus vite Dans le domaine fréquentiel, le rectangle est discontinue, donc nous attendons que $f_2(t)$ décroit moins vite que la transformée du triangle qui est continue; c'est le cas.

La transformée de Fourier de $f_2(t)$ a la moitié de largeur de bande de $f_1(t)$. Il parait qu'une fonction qui décroit plus vite a une largeur de bande plus importante. En calculant l'énergie dans une bande de fréquence restreinte, nous arrivons au même pourcentage de l'énergie pour les deux signaux. Il peut avoir plusieurs définitions de largeur de bande – 1) bande avec énergie non-zéro, 2) bande avec une concentration d'énergie.