Mat 10364, Mathématiques de l'ingénieur II : examen I, 11/10/01

- Durée de l'examen : deux heures.
- Documentation permise : deux feuilles-résumé.
- Vous êtes priés de vous identifier (nom et numéro matricule) sur le cahier et de placer votre carte d'étudiant sur la table à côté de vous.
- **Chaque réponse devra être accompagnée des calculs détaillés. Dans le cas contraire, elle sera considérée comme nulle.**

No.1 (20pts)

Soit D le domaine du premier quadrant délimité par le cercle

$$(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{2}.$$

Sachant que le domaine est de densité $\rho=1$ et de masse $M=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$, calculer la coordonnée $\bar{x}$ du centre de masse.

No.2 (25pts)

On désigne par T le tétraèdre de sommets $A:(1,0,0)$, $B:(0,1,0)$, $C:(1,2,0)$ et $D:(0,1,1)$.

a) (9pts) Montrer que T est délimité par les plans $z=0$, $x+z=1$, $x+y=1$ et $y-x=1$.

b) (9pts) Exprimer l'intégrale $I = \iiint_T f(x,y,z)\,dxdydz$, comme une intégrale itérée de la forme

$$I = \int_{x=a}^{b} \left(\int_{z=z_1(x)}^{z_2(x)} \left(\int_{y=y_1(x,z)}^{y_2(x,z)} f(x,y,z)\,dy \right) dz \right) dx.$$

c) (7pts) Utiliser b) pour calculer le volume de T.

No.3 (20pts)

On considère l'intégrale triple en coordonnées cylindriques

$$I = \int_{\theta=0}^{2\pi} \left(\int_{r=0}^{1/2} \left(\int_{z=\sqrt{3}r}^{\sqrt{1-r^2}} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r\,dz \right) dr \right) d\theta.$$

a) (6pts) Montrer que, en coordonnées cartésiennes, I s'écrit

$$I = \int_{x=-1/2}^{1/2} \left(\int_{y=-\sqrt{1/4-x^2}}^{\sqrt{1/4-x^2}} \left(\int_{z=\sqrt{3(x^2+y^2)}}^{\sqrt{1-(x^2+y^2)}} f(x,y,z)\,dz \right) dy \right) dx.$$

b) (4pts) Représenter graphiquement le domaine d'intégration de I.

c) (10pts) Trouver l'expression de I en coordonnées sphériques.

No.4 (15pts)

Déterminer la masse du solide délimité par le cône

$$x^2 + y^2 = (2a - z)^2$$

et les plans $z = 0$ et $z = a$, si la densité est $\rho(x,y,z) = z$.

No.5 (20pts)

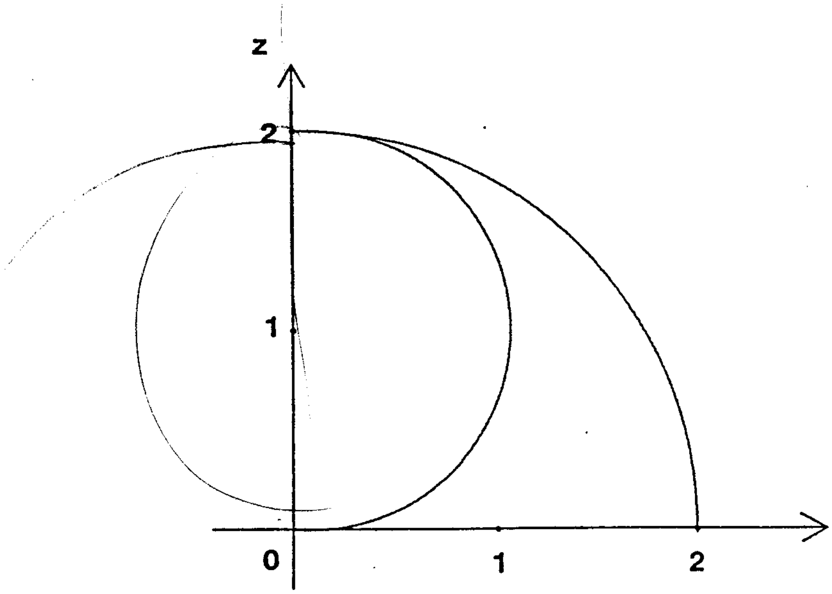
On considère le domaine D intérieur à la demi-sphère

$$B = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4, \ z \geq 0\}$$

et extérieur à la sphère

$$C = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1\}.$$

a) (8pts) Montrer que l'intersection de D avec un demi-plan vertical $\theta = c^{te}$ est de la forme



(Aide : exprimer les équations en coordonnées cylindriques.)

b) (12pts) Si la densité de D est $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2$, écrire le moment d'inertie par rapport à l'axe z sous la forme d'une intégrale en coordonnées sphériques. (Ne pas évaluer).

I) Quelques angles remarquables

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
0	0	1	0
$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$
$\pi/2$	1	0	–
$2\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$-1/2$	$-\sqrt{3}$
$3\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	-1
$5\pi/6$	$1/2$	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/3$
π	0	-1	0
$3\pi/2$	-1	0	–
2π	0	1	0

II) Quelques intégrales utiles.

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int f'(x)(f(x))^n\,dx = \frac{1}{n+1}(f(x))^{n+1} + C, \quad \text{si } n \neq -1$$

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C$$

$$\int e^{f(x)} f'(x)\,dx = e^{f(x)} + C$$

$$\int x\ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

$$\int \sqrt{a^2x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2x^2+1} + \frac{1}{2a}\ln\left(ax + \sqrt{a^2x^2+1}\right) + C$$

Soit $a \neq 0$; alors

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

$$\int \sin(ax)\, dx = -\frac{1}{a} \cos(ax) + C$$

$$\int \tan(ax)\, dx = -\frac{1}{a} \ln |\cos(ax)| + C$$

$$\int \sec^2(ax)\, dx = \frac{1}{a} \tan(ax) + C$$

$$\int \sec(ax)\, dx = \frac{1}{a} \ln |\sec(ax) + \tan(ax)| + C$$

$$\int \csc(ax)\, dx = \frac{1}{a} \ln |\csc(ax) - \cot(ax)| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right) + C$$

$$\int \sin^2 x\, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

$$\int \sin^3 x\, dx = -\frac{1}{3} \cos t \left(\sin^2 t + 2\right) + C$$

$$\int \sin^4 x\, dx = -\frac{1}{8} \left(2 \sin^3 x \cos x + 3 \cos x \sin x + 3x\right) + C$$

$$\int \cos^4 x\, dx = \frac{1}{8} \left(2 \cos^3 x \sin x + 3 \cos x \sin x + 3x\right) + C$$

$$\int e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a \cos bx + b \sin bx) + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$\int \cos(ax)\, dx = \frac{1}{a} \sin(ax) + C$$

$$\int \cot(ax)\, dx = \frac{1}{a} \ln |\sin(ax)| + C$$

$$\int \csc^2(ax)\, dx = -\frac{1}{a} \cot(ax) + C$$

$$\int \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

$$\int \cos^3\, dx = \frac{1}{3} \sin x \left(\cos^2 x + 2\right) + C$$