Mat 10364, Mathématiques de l'ingénieur II : Corrigé de examen II, hiver 08

---

no 1 Dans chacun des deux cas, nous commençons par vérifier si les conditions d'intégrabilité sont satisfaites.

(a) $\vec{v} = (x\,y^2\,z^2 - y, x^2\,y\,z^2 - y, x^2\,y^2\,z - z)$. Or

$$\frac{\partial v_1}{\partial y} = 2\,x\,y\,z^2 - 1, \quad \frac{\partial v_2}{\partial x} = 2\,x\,y\,z^2.$$

La condition $\dfrac{\partial v_1}{\partial y} = \dfrac{\partial v_2}{\partial x}$ étant violée, le champ n'est pas conservatif.

(b)

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_3}{\partial y} &= 2\,x^2\,y\,z = \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{\partial v_1}{\partial z} &= 2\,x\,y^2\,z = \frac{\partial v_3}{\partial x} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} &= 2\,x\,y\,z^2 - 1 = \frac{\partial v_1}{\partial y} \end{aligned}$$

Les conditions d'intégrabilité étant satisfaites, cela vaut la peinde de chercher un potentiel. On intégre d'abord la première composante, par rapport à x.

$$f(x,y,z) = \int v_1\,dx = \frac{1}{2}x^2\,y^2\,z^2 - x\,y + g(y,z).$$

De l'égalité

$$x^2\,y\,z^2 - x = \frac{\partial f}{\partial y} = x^2\,y\,z^2 - x + \frac{\partial g}{\partial y},$$

on tire $\dfrac{\partial g}{\partial y} = 0$ et donc $g(y,z) = h(z)$. Ainsi

$$f(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2\,y^2\,z^2 - x\,y + h(z).$$

Finalement, de

$$x^2\,y^2\,z - z = \frac{\partial f}{\partial z} = x^2\,y^2\,z + h'(z),$$

on tire $h'(z) = -z$ donc $h(z) = -\frac{1}{2}\,z^2 + C$, d'où

$$f(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2\,y^2\,z^2 - x\,y - \frac{1}{2}\,z^2 + C.$$

no 2 Le plus simple ici est d'utiliser les coordonnées cylindriques par rapport à Oy, c'est-à-dire

$$\begin{array}{rcl} x & = & r\cos\theta \\ y & = & y \\ z & = & r\sin\theta \end{array}$$

Les points du cône satisfont $y = \sqrt{3}\,r$, ceux du plan $r\sin\theta + y = 1$. En combinant les deux équation, on tire

$$r\sin\theta + \sqrt{3}\,r = 1 \Rightarrow r(\sin\theta + \sqrt{3}) = 1 \Rightarrow r = \frac{1}{\sin\theta + \sqrt{3}}.$$

On remarque que le dénominateur n'est jamais nul donc que θ peut prendre toutes les valeurs dans $[0, 2\pi)$. On reporte cette valeur de r dans les équations ci-haut et on obtient la représentation paramétrique

$$\begin{array}{rcl} x & = & \frac{\cos\theta}{\sin\theta+\sqrt{3}} \\ y & = & \frac{\sqrt{3}}{\sin\theta+\sqrt{3}} \\ z & = & \frac{\sin\theta}{\sin\theta+\sqrt{3}} \end{array}$$

pour $\theta \in [0, 2\pi)$.

no 3 (a) Un point de la courbe est sur P si $y = z$ c'est-à-dire

$$2\sin^2 t = \sqrt{3}\,\sin t \Rightarrow \sin t = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{3}.$$

(b) La normale à P est le vecteur $(0, 1, -1)$. On cherche le vecteur tangent à C en $t = \frac{\pi}{3}$.

$$\vec{r}'(t) = (-\sin(t), 4\,\sin(t)\,\cos(t), \sqrt{3}\,\cos(t)).$$

Donc

$$\vec{r}'(\frac{\pi}{3}) = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}).$$

L'angle ϕ entre la courbe est la normale est l'angle entre la tangente et la normale, qui est donné par

$$\cos\phi = \frac{\vec{r}'(\frac{\pi}{3})\cdot(0,1,-1)}{\|\vec{r}'(\frac{\pi}{3})\|\|(0,1,-1)\|}.$$

Or

$$\begin{array}{l} \vec{r}'(\frac{\pi}{3})\cdot(0,1,-1) = \frac{\sqrt{3}}{2}. \\ \|\vec{r}'(\frac{\pi}{3})\| = \sqrt{\frac{3}{4}+3+\frac{3}{4}} = 3\frac{\sqrt{2}}{2}. \\ \|(0,1,-1)\| = \sqrt{2}. \end{array}$$

Finalement

$$\cos\phi = \frac{\sqrt{3}}{24}.$$

no 4 (a) Pour calculer l'élément de longueur, nous devons d'abord calculer le vecteur tangent

$$\vec{r}'(t) = (0, \sqrt{3}(1 - 3\,t^2), -6\,t).$$

La longueur de ce vecteur est

$$\sqrt{3(1-3\,t^2)^2 + 36\,t^2} = \sqrt{3 - 18\,t^2 + 27\,t^4 + 36\,t^2},$$

$$\sqrt{3(1-3\,t^2)^2 + 36\,t^2} = 3 + 18\,t^2 + 27\,t^4 = \sqrt{3}\sqrt{1 + 6\,t^2 + 9\,t^4} = \sqrt{3}(1 + 3\,t^2).$$

D'où

$$ds = \|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{3}(1 + 3\,t^2).$$

(b) Puisque le matériau est homogène $\bar{z} = \frac{1}{L}\int_C z\,ds$.
Or

$$L = \int_C ds = \int_{t=-1}^{1} \sqrt{3}(1 + 3\,t^2)\,dt = \sqrt{3}(2+2) = 4\sqrt{3}.$$

De même

$$\int_C z\,ds = \int_{t=-1}^{1} 3(1-t^2)\sqrt{3}(1+3\,t^2)\,dt = 3\sqrt{3}\int_{-1}^{1}(1 + 2\,t^2 - 3\,t^4)\,dt = 3\sqrt{3}(\frac{32}{15}).$$

Finalement

$$\bar{z} = \frac{8}{5}.$$

no 5 (a) On calcule d'abord le travail sur C_1. De

$$\vec{r}_1'(t) = (-1, 0, 0), \quad \vec{v}(\vec{r}(t)) = (-t - 1, 1, 0),$$

on tire que

$$\int_{C_1} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_{-1}^{1} (t+1)\, dt = 2.$$

Ensuite on calcule le travail sur C_2.

De

$$\vec{r}_2'(t) = (1, 0, -4\, s^3), \quad \vec{v}(\vec{r}(s)) = (s - 2 + s^4, 2 - s^4, 0),$$

on tire que

$$\int_{C_2} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_{-1}^{1} (s - 2 + s^4)\, ds = -\frac{18}{5}.$$

Finalement, on somme

$$\int_{C} \vec{v} \cdot d\vec{r} = 2 - \frac{18}{5} = -\frac{8}{5}.$$

(b) La courbe C étant fermée, pour que $\vec{v}$ soit conservatif, il faudrait que son intégrale sur C soit nulle ce qui n'est pas le cas. La réponse est donc non.

no 6 (a) Pour trouver l'élément d'aire, il faut d'abord calculer le produit vectoriel fondamental.

Or,

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = (-v\, \sin u, v\, \cos u, 0), \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = (\cos u, \sin u, -6v),$$

d'où

$$\vec{N} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = (-6\, v^2\, \cos u, -6\, v^2\, \sin u, -v).$$

Ainsi

$$dA = \|\vec{N}\| dudv = \sqrt{36\, v^4 + v^2} = v\sqrt{36\, v^2 + 1}.$$

(b) L'aire est l'intégrale sur le domaine de paramétrisation de l'élément d'aire, c'est-à-dire

$$A(S) = \int_{u]0}^{2\pi} \int_{v=0}^{3} v\sqrt{36\, v^2 + 1}\, dv\, du = 2\pi \int_{v=0}^{3} v\sqrt{36\, v^2 + 1}\, dv.$$

On pose $s = 36\, v^2 + 1$, d'où $ds = 72\, v$, donc

$$A(S) = \frac{\pi}{36} \int_{s=1}^{325} s^{\frac{1}{2}}\, ds = \frac{\pi}{54}(325^{\frac{3}{2}} - 1).$$