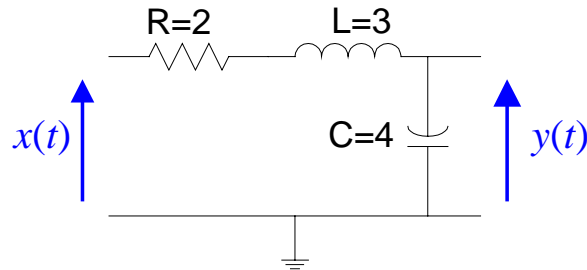
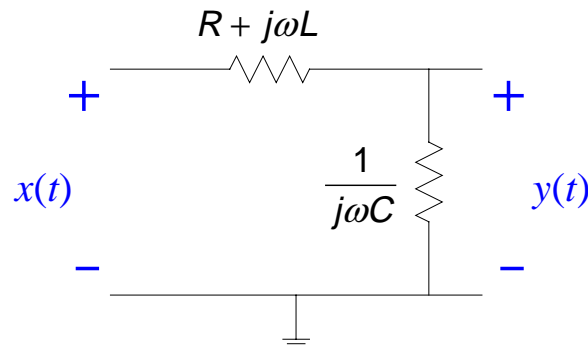


# 1999 Examen Partiel - Solutions

## Problème 1



En remplaçant la bobine et le condensateur par leur impédance complexe, nous obtenons le diviseur de tension suivant



La relation entre les transformée de Fourier de l'entrée et la sortie est donc

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C} + R + j\omega L} = \frac{\frac{1}{j\omega 4}}{\frac{1}{j\omega 4} + 2 + j\omega 3} = \frac{1}{1 + j8\omega - 12\omega^2}$$

Nous pouvons factoriser le dénominateur pour arriver à

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j8\omega - 12\omega^2} = \frac{1}{(1 + j2\omega)(1 + j6\omega)}$$

Pour chercher la transformée inverse (c'est à dire la réponse impulsionnelle), nous utilisons les fractions partielles

$$H(\omega) = \frac{A}{1 + j2\omega} + \frac{B}{1 + j6\omega}$$

Après un peu d'algèbre, nous trouvons

$$A = -\frac{1}{2} \quad B = \frac{3}{2}$$

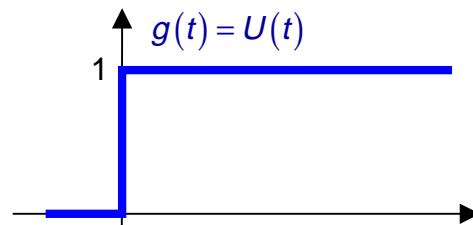
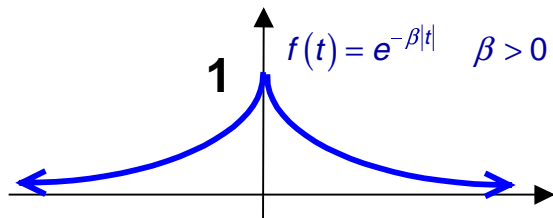
Donc,

$$H(\omega) = \frac{1}{2} \left( \frac{-1}{1 + j2\omega} + \frac{3}{1 + j6\omega} \right) = \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2} + j\omega} + \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{6} + j\omega}$$

Nous trouvons transformée inverse dans la table des transformées de Fourier fourni :

$$h(t) = -\frac{1}{4} e^{-t/2} U(t) + \frac{1}{4} e^{-t/6} U(t) = \frac{1}{4} U(t) [-e^{-t/2} + e^{-t/6}]$$

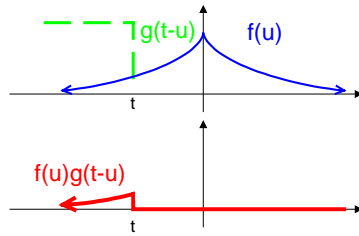
## Problème 2



Prenons l'échelon pour faire le déplacement. L'équation de  $g(t-u)$  est

$$g(t-u) = \begin{cases} 0 & t-u \leq 0 \\ 1 & t-u > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & t \leq u \\ 1 & t > u \end{cases}$$

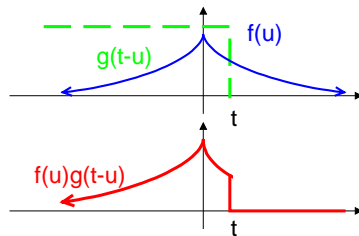
et le graphique est



Il y a deux régions de définition pour la convolution. Pour  $t < 0$ , fonction  $g(t-u)$  est nulle après  $u=t$ , donc le produit est  $f(u)g(t-u)$  nulle pour tout les valeurs de  $u > t$ . Donc la convolution dans cette région est

$$\begin{aligned} f * g &= \int_{-\infty}^t e^{\beta u} du \quad t < 0 \\ &= \frac{e^{-\beta u}}{\beta} \Big|_{-\infty}^t = \frac{1}{\beta} [e^{\beta t}] = \frac{e^{\beta t}}{\beta} \end{aligned}$$

Quand  $t > 0$  nous avons le graphique



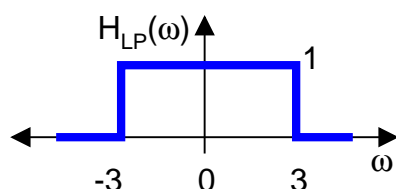
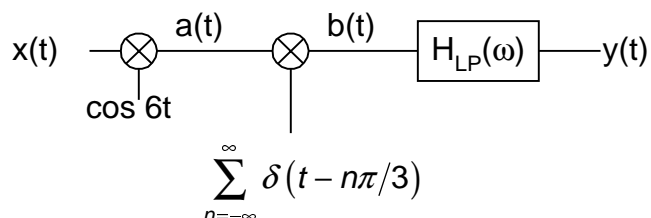
L'intégrale de convolution donc couvre l'intervalle de zéro vers  $t$ .

$$\begin{aligned} f * g &= \int_{-\infty}^0 e^{\beta u} du + \int_0^t e^{-\beta u} du \quad t > 0 \\ &= \frac{1}{\beta} - \frac{e^{-\beta u}}{\beta} \Big|_0^t = \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta} [e^{-\beta t} - 1] = \frac{2 - e^{-\beta t}}{\beta} \end{aligned}$$

La convolution est donc

$$f * g = \begin{cases} \frac{2 - e^{-\beta t}}{\beta} & t > 0 \\ \frac{e^{\beta t}}{\beta} & t < 0 \end{cases}$$

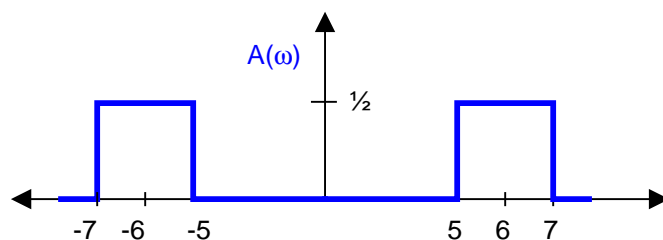
### Problème 3



L'entrée est  $x(t) = \frac{1}{\pi} \text{Sa}(t)$ , donc sa transformée est  $X(\omega) = \text{Rect}\left(\frac{\omega}{2}\right)$  après le table des transformées. La modulation par un cosinus donne le suivant

$$\begin{aligned}
 A(\omega) &= TF[x(t)\cos 6t] \\
 &= \frac{1}{2\pi} X(\omega) * \pi [\delta(\omega - 6) + \delta(\omega + 6)] \\
 &= \frac{1}{2} X(\omega - 6) + \frac{1}{2} X(\omega + 6) \\
 &= \frac{1}{2} \text{Rect}\left(\frac{\omega - 6}{2}\right) + \frac{1}{2} \text{Rect}\left(\frac{\omega + 6}{2}\right)
 \end{aligned}$$

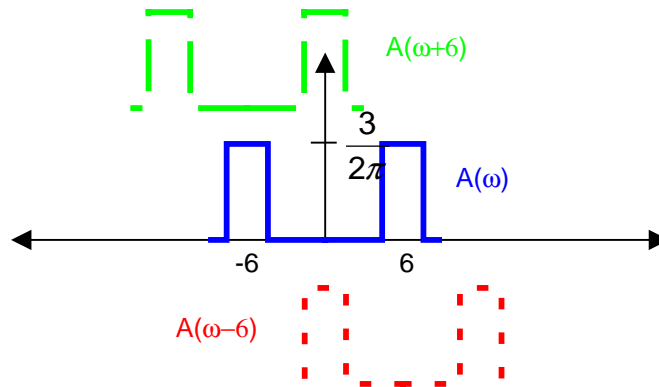
qui est graphiquement



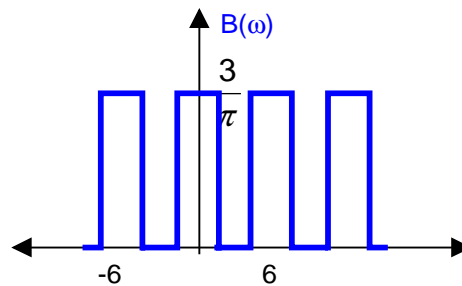
Pour procéder avec la partie c, il faut réaliser que nous faisons un échantillonnage. Dans le domaine spectral un échantillonnage va produire des copies du spectre du signal échantillonné. Les copies sont répétées avec la période  $2\pi/T_e$  qui ici est  $2\pi/\pi/3 = 6$ . Les copies sont diminuées par le facteur  $1/T_e = 3/\pi$  (voir page 116 des notes du cours). Donc nous avons

$$\begin{aligned}
 B(\omega) &= A_e(\omega) = \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A(\omega - k\omega_e) \\
 &= \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \text{Rect}\left(\frac{\omega - k\omega_e - 6}{2}\right) + \frac{1}{2} \text{Rect}\left(\frac{\omega - k\omega_e + 6}{2}\right) \\
 &= \frac{3}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{Rect}\left(\frac{\omega - k\omega_e - 6}{2}\right) + \text{Rect}\left(\frac{\omega - k\omega_e + 6}{2}\right)
 \end{aligned}$$

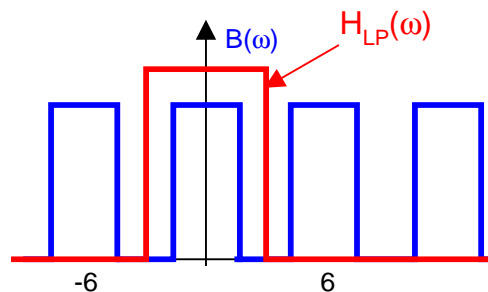
Voici une interprétation graphique pour trois des termes dans la somme infinie.



Donc la somme infinie aura la forme suivante

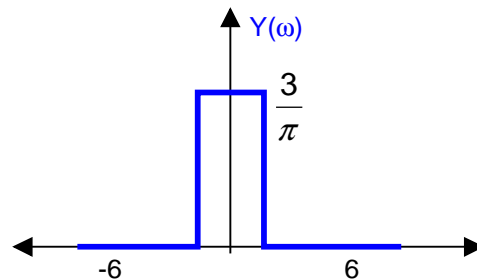


La dernière étape est un filtrage passe-bas



Donc un seul rectangle restera à la fin.

$$Y(\omega) = \frac{3}{\pi} \text{Rect}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$



Nous pouvons voir que la sortie est donc juste l'entre avec une facteur d'échelle, et

$$y(t) = \frac{3}{\pi} x(t).$$

## Problème 4

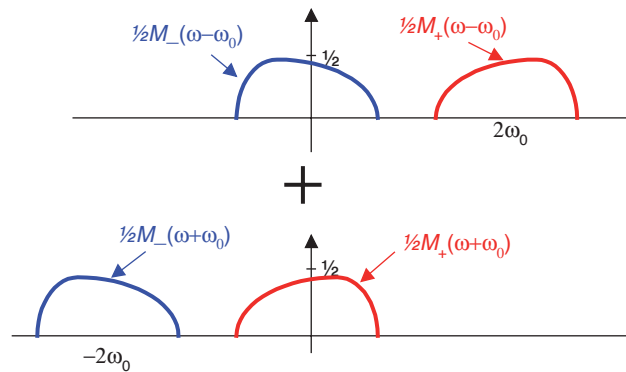
Nous commençons avec  $x_1(t)$  qui est modulée par un cosinus:

$$x_1(t) = m(t) \cos \omega_0 t$$

La modulation (multiplication) en temps correspond à une convolution en fréquence, donc

$$\begin{aligned} X_1(\omega) &= \frac{1}{2\pi} M(\omega) * \text{TF}[\cos \omega_0 t] \\ &= \frac{1}{2\pi} M(\omega) * \pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \\ &= \frac{1}{2} M(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} M(\omega + \omega_0) \end{aligned}$$

Le graphique est un peu difficile à voir, à la cause de recouvrement au tour de fréquence zéro.



Nous utilisons la notation indiquée dans le problème,

$$M_+(\omega) = \begin{cases} M(\omega), & \omega > 0 \\ 0, & \omega < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad M_-(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega > 0 \\ M(\omega), & \omega < 0 \end{cases}$$

Donc,

$$M(\omega) = M_+(\omega) + M_-(\omega)$$

Dans la deuxième branche, le message  $m(t)$  est modulé par un sinus:

$$x_2(t) = m(t) \sin \omega_0 t$$

Le spectre est donc

$$\begin{aligned} X_2(\omega) &= \frac{1}{2\pi} M(\omega) * \text{TF}[\sin \omega_0 t] \\ &= \frac{1}{2\pi} M(\omega) * \frac{\pi}{j} [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)] \\ &= \frac{1}{2j} M(\omega - \omega_0) - \frac{1}{2j} M(\omega + \omega_0) \end{aligned}$$

Les deux signaux passent par un filtre passe-bas dont la réponse en fréquence est donnée par:

$$H_{LP}(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < B/2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} = \text{Rect}\left(\frac{\omega}{B}\right)$$

La sortie du filtre est le produit de la transformée de l'entrée et de la réponse en fréquence du filtre. Le produit du spectre de l'entrée avec la réponse en fréquence du filtre a l'effet de laisser passer juste les deux contributions du spectre en basse fréquence. En regardant le graphique on peut écrire

$$Y_1(\omega) = X_1(\omega) H_{LP}(\omega) = \frac{1}{2} M_+(\omega + \omega_0) + \frac{1}{2} M_-(\omega - \omega_0)$$

Un résultat similaire s'applique à la deuxième branche:

$$Y_2(\omega) = X_2(\omega) H_{LP}(\omega) = \frac{-1}{2j} M_+(\omega + \omega_0) + \frac{1}{2j} M_-(\omega - \omega_0)$$

Les sorties des filtres sont modulées à une haute fréquence. Dans la première branche,

$$z_1(t) = y_1(t) \cos \omega_c t \quad \omega_c \gg B$$

Dans le domaine fréquentiel,

$$\begin{aligned} Z_1(\omega) &= \frac{1}{2\pi} Y_1(\omega) * \text{TF}[\cos \omega_c t] \\ &= \frac{1}{2\pi} Y_1(\omega) * \pi [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)] \\ &= \frac{1}{2} Y_1(\omega - \omega_c) + \frac{1}{2} Y_1(\omega + \omega_c) \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} M_+(\omega - \omega_c + \omega_0) + \frac{1}{2} M_-(\omega - \omega_c - \omega_0) \right] + \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} M_+(\omega + \omega_c + \omega_0) + \frac{1}{2} M_-(\omega + \omega_c - \omega_0) \right] \\ &= \frac{1}{4} M_+(\omega - \omega_c + \omega_0) + \frac{1}{4} M_-(\omega - \omega_c - \omega_0) + \frac{1}{4} M_+(\omega + \omega_c + \omega_0) + \frac{1}{4} M_-(\omega + \omega_c - \omega_0) \end{aligned}$$

Dans la deuxième branche,

$$z_2(t) = y_2(t) \sin \omega_c t \quad \omega_c \gg B$$

Dans le domaine fréquentiel,



$$\begin{aligned}
Z_2(\omega) &= \frac{1}{2\pi} Y_2(\omega) * \text{TF}[\sin \omega_c t] \\
&= \frac{1}{2\pi} Y_2(\omega) * \frac{\pi}{j} [\delta(\omega - \omega_c) - \delta(\omega + \omega_c)] \\
&= \frac{1}{2j} Y_2(\omega - \omega_c) - \frac{1}{2j} Y_2(\omega + \omega_c) \\
&= \frac{1}{2j} \left[ \frac{-1}{2j} M_+(\omega - \omega_c + \omega_0) + \frac{1}{2j} M_-(\omega - \omega_c - \omega_0) \right] - \frac{1}{2j} \left[ \frac{-1}{2j} M_+(\omega + \omega_c + \omega_0) + \frac{1}{2j} M_-(\omega + \omega_c - \omega_0) \right] \\
&= \frac{1}{4} M_+(\omega - \omega_c + \omega_0) - \frac{1}{4} M_-(\omega - \omega_c - \omega_0) - \frac{1}{4} M_+(\omega + \omega_c + \omega_0) + \frac{1}{4} M_-(\omega + \omega_c - \omega_0)
\end{aligned}$$

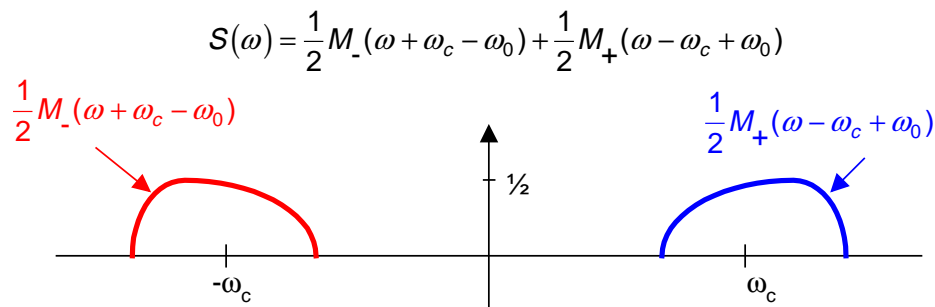
Le signal de sortie,  $s(t)$  est donc

$$s(t) = z_1(t) + z_2(t)$$

avec un spectre de

$$\begin{aligned}
S(\omega) &= Z_1(\omega) + Z_2(\omega) \\
&= \frac{1}{4} \left[ M_+(\omega - \omega_c + \omega_0) + M_-(\omega - \omega_c - \omega_0) + M_+(\omega + \omega_c + \omega_0) + M_-(\omega + \omega_c - \omega_0) \right] \\
&\quad + \frac{1}{4} M_+(\omega - \omega_c + \omega_0) - \frac{1}{4} M_-(\omega - \omega_c - \omega_0) - \frac{1}{4} M_+(\omega + \omega_c + \omega_0) + \frac{1}{4} M_-(\omega + \omega_c - \omega_0) \\
&= \frac{1}{2} M_-(\omega + \omega_c - \omega_0) + \frac{1}{2} M_+(\omega - \omega_c + \omega_0)
\end{aligned}$$

Le graphique est



C'est un signal de *bande latérale unique inférieure*.