GEL-2001: Analyse des signaux

Mini-test 2 A2009 : Solutions

Département de génie électrique et de génie informatique

Problème 1 (1 pt)

a)

On demande si l'expression suivante est vraie ou fausse:

$$G(\omega) * H(\omega) \Leftrightarrow h(t) * g(t)\,.$$

Cette affirmation est bien sûr erronée considérant la dualité entre la convolution et la multiplication. C'est donc **FAUX**.

b)

On demande si la réponse impulsionnelle suivante et celle d'un filtre causal:

$$h(t) = -\mathrm{e}^{-t}\mathrm{U}(-t)\,.$$

Par définition, pour qu'un filtre soir causal, sa réponse impulsionnelle doit être nulle pour tous les $t < 0$ (Ref. Notes de cours §6.4.1). Dans ce cas, la fonction $h(t)$ est clairement non nulle pour tous les t négatifs. Alors, le filtre ne peut pas être causal et l'énoncé est donc **FAUX**.

c)

On demande si la réponse en fréquence $H(\omega) = 1$ correspond à un filtre causal. La transformée de Fourier de la réponse en fréquence correspond à la réponse impulsionnelle et, dans ce cas, donne une impulsion à $t = 0$. Le critère de causalité énoncé plus tôt est donc respecté et cet énoncé est **VRAI**.

d)

On demande si l'énoncé mathématique suivant est vrai:

$$x(t) * \delta(t-a) = x(a)\,.$$

Tenant compte des propriétés de la fonction delta-dirac dans le produit de convolution, la fonction $x(t)$ devrait plutôt être décalé. L'énoncé est donc **FAUX**.

Problème 2 (2 pt)

Soit un filtre RC ayant une réponse impulsionnelle de la forme:

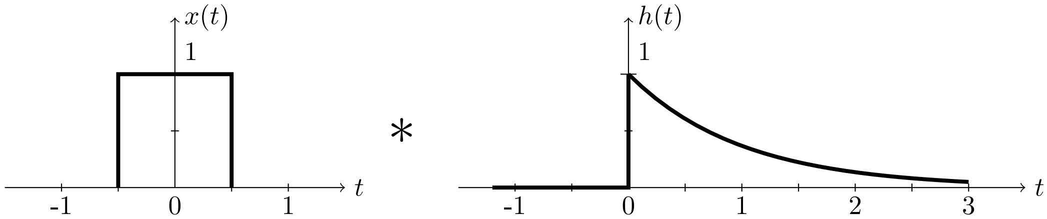
$$h(t) = \mathrm{e}^{-t/RC}\mathrm{U}(t)\,.$$

On demande de trouver la sortie de ce filtre pour une entrée $x(t) = \mathrm{Rect}(t)$. On demande aussi de faire la convolution de manière graphique considérant que la constante RC est de 1 seconde.

On veut calculer la convolution:

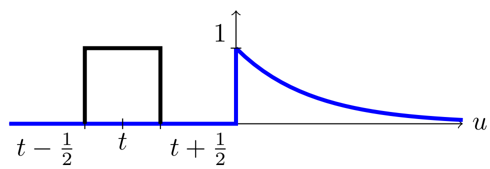
$$\{x * h\}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)x(t-u)\mathrm{d}u\,.$$

Graphiquement, on a:



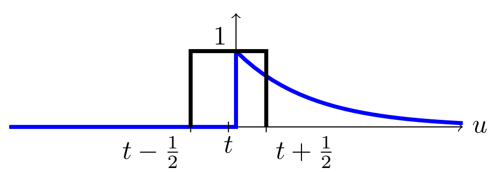
Pour $t \in \left]-\infty, -1/2\right]$, $y(t) = 0$ puisque à la fois $x(t)$ et $h(t)$ sont nuls.

$$y(t) = 0$$



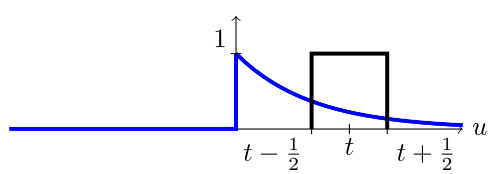
Pour $t \in [-1/2, 1/2]$, on a:

$$y(t) = \int_{0}^{t+1/2} \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = 1 - \mathrm{e}^{-(t+1/2)}\,.$$



Pour $t \in [1/2, \infty]$, on a:

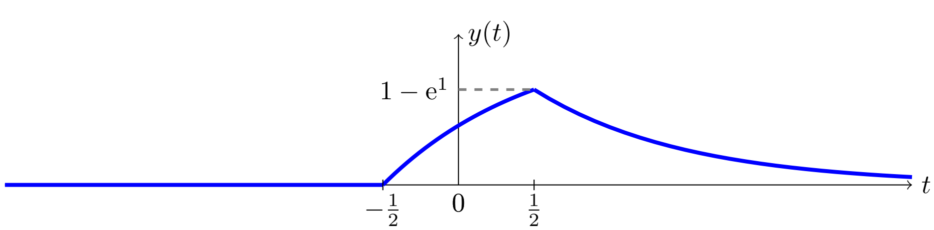
$$y(t) = \int_{t-1/2}^{t+1/2} \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$$



$$= \mathrm{e}^{-t}\left(\mathrm{e}^{1/2} - \mathrm{e}^{-1/2}\right)$$
$$= 2\sinh(1/2)\mathrm{e}^{-t}\,.$$

Finalement, on a:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad t < -\frac{1}{2} \\ 1 - \mathrm{e}^{-(t+1/2)} & \text{pour} \quad -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 2\sinh(1/2)\mathrm{e}^{-t} & \text{pour} \quad t > \frac{1}{2} \end{cases} \tag{1}$$

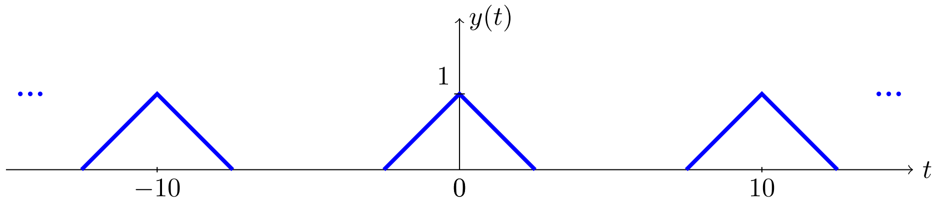


Problème 3 (2 pt)

On demande de tracer le résultat de la convolution suivante:

$$y(t) = \mathrm{Tri}(t) * \delta_{T_s}(t)\,,$$

où la période du peigne de dirac, T_s, est de 10.



On demande aussi l'expression analytique de $Y(\omega)$, la transformée de Fourier de y(t). On calcule :

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \mathcal{TF}\left\{\mathrm{Tri}(t) * \delta_{T_s}(t)\right\}\,, \\ &= \mathcal{TF}\left\{\mathrm{Tri}(t)\right\} \times \mathcal{TF}\left\{\delta_{T_s}(t)\right\}\,, \\ &= \mathrm{Sa}^2(\omega/2) \times \delta_{\omega_s}(\omega)\,. \\ &= \mathrm{Sa}^2(\omega/2) \times \frac{2\pi}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\frac{2\pi}{T_s})\,. \end{aligned}$$

Le graphique de cette expression est le suivant: