# Mathématiques de l'ingénieur I (MAT-10363) – RÉPONSES
# Examen partiel du 28 avril (18h30 – 20h30)

## Question 1
**( 10 points )**

Considérer les énoncés suivants.

- Soit $T$ la droite qui est à la fois parallèle au plan $x = 0$ et tangente à la surface $z = f(x, y) := 2 + 5\sin y - xy + x^3$ au point $(2, 0)$. Le vecteur $(0, 1, 3)$ est parallèle à $T$.
- Pour $f(x, y) := xy\sqrt{1 + xy^2e^x - y}$, on a $f_{xxy}(1, 0) - f_{yxx}(1, 0) = 1$.
- Pour $f(x, y) := x^3y + y^2 + x^3 + 2$, on a que $f_{yy}$ est constante sur $\mathbb{R}^2$.
- Il existe une fonction $f = f(x, y)$ pour laquelle $f_x = 2xy$ et $f_y = x^2 + y$.

Combien des énoncés précédents sont **VRAIS** ?

(a) 0.

(b) 1.

(c) 2.

**(d) 3.**

(e) 4.

## Question 2
**( 10 points )**

On veut approcher la valeur de $\sqrt{2 + 2.01^3 - 0.98^2}$ sans l'aide d'une calculatrice. Pour cela on utilise le polynôme de Taylor d'ordre 1 associé à la fonction $f(x, y) := \sqrt{2 + x^3 - y^2}$ au point $(2, 1)$. Quelle valeur trouve-t-on ?

(a) 3.02658239...

**(b) 3.02666666...**

(c) 3.02658148...

(d) 3

(e) 3.02

## Question 3
**( 10 points )**

Soit $f(x,y) := e^y(\cos y - \sin x)$, $x(u,v) := 2uv$ et $y(u,v) := u + 3v$. Posons

$$h(u,v) := f(x(u,v), y(u,v)).$$

Lequel des énoncés suivants est **VRAI** ?

**(a) $\dfrac{\partial h}{\partial u}(0,0) = 1$ et $\dfrac{\partial h}{\partial v}(0,0) = 3$.**

(b) $\dfrac{\partial h}{\partial u}(0,0) = 3$ et $\dfrac{\partial h}{\partial v}(0,0) = 1$.

(c) $\dfrac{\partial h}{\partial u}(0,0) = -1$ et $\dfrac{\partial h}{\partial v}(0,0) = 3$.

(d) $\dfrac{\partial h}{\partial u}(0,0) = -1$ et $\dfrac{\partial h}{\partial v}(0,0) = 1$.

(e) $\dfrac{\partial h}{\partial u}(0,0) = 3$ et $\dfrac{\partial h}{\partial v}(0,0) = -1$.

## Question 4
**( 10 points )**

Soit $S$ la surface définie par l'équation $xyz - e^{x+y+z} = 5$ et soit $T$ le plan tangent à celle-ci au point $(-2, 3, -1)$. Lequel des énoncés suivants est **VRAI** ?

(a) L'équation de $T$ est $-2x + 3y - z = 14$.

(b) L'équation de $T$ est $3x + y - 3z = 0$.

**(c) L'équation de $T$ est $4x - y + 7z = -18$.**

(d) Le plan $T$ n'existe pas.

(e) Les énoncés (a), (b), (c) et (d) sont tous faux.

## Question 5
**( 10 points )**

Soit $f(x,y)$ une fonction dérivable dans le plan telle que $\nabla f(1,0)=(8,-6)$. Considérer l'équation

$$D_{\vec{u}} f(1,0) = -5 \tag{$\star$}$$

dans laquelle $\vec{u}=(u_1,u_2)$ est un vecteur unitaire inconnu. Lequel des énoncés suivants est **VRAI** ?

(a) L'équation ($\star$) ne possède aucune solution.

(b) L'équation ($\star$) ne possède aucune solution avec $u_1 > 0$.

**(c) L'équation ($\star$) possède exactement une solution avec $u_1 > 0$.**

(d) L'équation ($\star$) possède exactement deux solutions avec $u_1 > 0$.

(e) Les énoncés (a), (b), (c) et (d) sont tous faux.

## Question 6
**( 10 points )**

Soit $f(x,y) := x^2y + 4xy + y^3 - 5y$. Lequel des énoncés suivants est **VRAI** ?

(a) $f$ possède exactement 2 points critiques qui sont deux points de selle.

(b) $f$ possède exactement 2 points critiques qui sont un minimum local et un maximum local.

(c) $f$ possède exactement 4 points critiques qui sont tous des points de selle.

**(d) $f$ possède exactement 4 points critiques qui sont deux points de selle, un minimum local et un maximum local.**

(e) Les énoncés (a), (b), (c) et (d) sont tous faux.

## Question 7
**( 10 points )**

Soit $f(x,y) := x^2 - 4xy$ et soit $E$ l'ellipse $x^2 + 9y^2 = 36$. Lequel des énoncés suivants est **VRAI** ?

(a) Le minimum de $f$ sur $E$ est atteint en un unique point, à savoir $(0,2)$.

(b) Le minimum de $f$ sur $E$ est atteint en un unique point, à savoir $(2, \frac{4\sqrt{2}}{3})$.

(c) Le minimum de $f$ sur $E$ est atteint en exactement deux points, à savoir $(0,2)$ et $(0,-2)$.

(d) Le minimum de $f$ sur $E$ est atteint en exactement deux points, à savoir $(2, \frac{4\sqrt{2}}{3})$ et $(-2, -\frac{4\sqrt{2}}{3})$.

**(e) Les énoncés (a), (b), (c) et (d) sont tous faux.**

## Question 8
**( 10 points )**

Soit $f(x,y) := e^{y-1} \sin x + \sqrt{1 + 2\,xy}$. Trouver la meilleure approximation quadratique (approximation de Taylor d'ordre 2) pour la fonction $f$ au voisinage du point $(0,1)$.

(a) $1 + 2x - x^2 + 2x(y-1)$

(b) $1 + 2x - x^2 + 2xy$

(c) $1 + 2x - \dfrac{x^2}{2} + 2xy$

(d) $1 + 2x - x^2 + 2xy - 2x^2y + xy^2$

**(e)** $\boldsymbol{1 - \dfrac{x^2}{2} + 2xy}$

## Question 9
**( 5 points )**

Soit $f(x, y) := \dfrac{x^2 + y^2}{2x - 1}$. Considérer les énoncés suivants.

- Le domaine de $f$ est $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x \neq \frac{1}{2}\}$.
- L'image de $f$ est $\{x \in \mathbb{R} |\ x \leq 0 \text{ ou } x \geq 1\}$.
- La courbe de niveau 2 de $f$ est un cercle.
- Il existe exactement deux plans horizontaux dont l'intersection avec la surface $z = f(x, y)$ n'est qu'un seul point.

Combien des énoncés précédents sont **VRAIS** ?

(a) 0.

(b) 1.

(c) 2.

(d) 3.

**(e) 4.**

## Question 10
**( 5 points )**

Soit $f(x, y)$ une fonction dérivable dans $\mathbb{R}^2$ et soit $F(x, y, z) := z - f(x, y)$. Soient $\vec{u} = (u_1, u_2)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ deux vecteurs unitaires qui vérifent

$$\vec{u} \cdot \nabla f(x_0, y_0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \vec{v} \cdot \nabla F(x_0, y_0, z_0) = 0$$

où $z_0 := f(x_0, y_0)$. Lequel des énoncés suivants est **FAUX** ?

(a) $\vec{v}$ est tangent à la surface $z = f(x, y)$ en $(x_0, y_0, z_0)$.

(b) $D_{\vec{u}} f(x_0, y_0) = 0$.

**(c) $\vec{u}$ est perpendiculaire à la courbe $f(x, y) = z_0$.**

(d) Le vecteur $(u_1, u_2, a)$ est perpendiculaire à $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ si et seulement si $a = 0$.

(e) On a $(v_1, v_2) \cdot \nabla f(x_0, y_0) = v_3$.

## Question 11
**( 5 points )**

Soit $f(x,y) := y\ln(1+x^2) + xy^2$. Lequel des énoncés suivants est **VRAI** ?

(a) $f_x = \ln(1+x^2) + \dfrac{2xy}{1+x^2} + y^2 + 2xy.$

**(b) $f_y - (1+x^2)(f_x - y^2) = \ln(1+x^2).$**

(c) $f_y(-1,2) = 4.$

(d) $f_{xx}(2,1) = -6/5.$

(e) Les énoncés (a), (b), (c) et (d) sont tous faux.

## Question 12
**( 5 points )**

Dans Maple, on exécute d'abord la commande

```
> with(plots):
```

Laquelle des commandes Maple suivantes permet alors de tracer les courbes de niveau de

$$f(x,y) := \cos x + \sqrt{xy}$$

dans la région $(x,y) \in [0,2] \times [0,3]$ ?

**(a)** `> contourplot(cos(x)+sqrt(x*y),x=0..2,y=0..3);`

(b) `> plot(cos(x)+sqrt(x*y),x=0..2,y=0..3);`

(c) `> levelplot(cos(x)+sqrt(x*y),x=0..2,y=0..3,grid=[40,40]);`

(d) `> implicitplot(cos(x)+sqrt(x*y),x=0..2,y=0..3,grid=[40,40]);`

(e) `> plot3d(cos(x)+sqrt(x*y),x=0..2,y=0..3);`