1999 Mini-Test 1 : Solutions

Problème 1 (1 point sur 5)

Quelles sont les coefficients complexes de Fourier pour la fonction suivante?

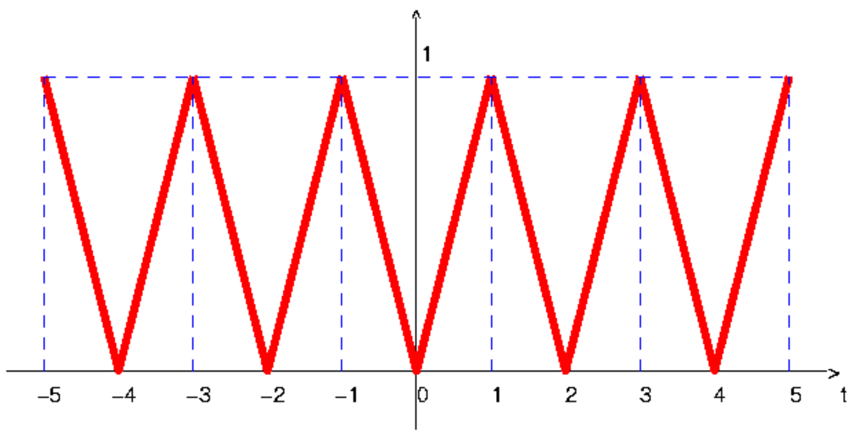
$$1+4\sin 2\pi t-2\cos 4\pi t$$

Il y a un seul candidat possible pour la fréquence fondamentale: $\omega_0=2\pi$. Donc pour trouver les coefficients de Fourier par inspection, il faut simplement écrire le cosinus et sinus dans leurs formes complexes.

$$\begin{aligned}
&1+4\sin 2\pi t-2\cos 4\pi t\\
&=1+4\frac{1}{2j}\left(e^{j2\pi t}-e^{-j2\pi t}\right)-2\frac{1}{2}\left(e^{j4\pi t}+e^{-j4\pi t}\right)\\
&=1+\frac{2}{j}\left(e^{j2\pi t}-e^{-j2\pi t}\right)-\left(e^{j4\pi t}+e^{-j4\pi t}\right)\\
&=1-2je^{j2\pi t}+2je^{-j2\pi t}-e^{j4\pi t}-e^{-j4\pi t}\\
&=F(0)+F(1)e^{j2\pi t}+F(-1)e^{-j2\pi t}+F(2)e^{j4\pi t}+F(-2)e^{-j4\pi t}
\end{aligned}$$

4. $F(0)=1 \quad F(1)=-2j \quad F(-1)=2j \quad F(2)=-1 \quad F(-2)=-1$

Problème 2 (1 point sur 5)



Cette fonction est réelle et impaire…

a) $F^*(n)=F(-n)$ **VRAI**

$f_p(t)$ est une fonction réelle, donc on sait que la partie réelle de la série de Fourier est paire.

b) $A(n)$ est impair **FAUX**

$f_p(t)$ est une fonction réelle, donc on sait que la partie réelle de *F(n)* est paire.

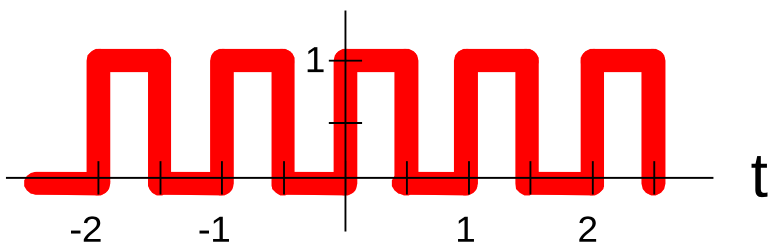
c) $F(n)$ est imaginaire pure **FAUX**

$f_p(t)$ est une fonction réelle paire, donc on sait que les coefficients la série de Fourier *F(n)* sont réels.

d) $B(n) = 0 \quad \forall n$ **VRAI**

Comme **c)** est faux, la partie imaginaire est nulle. pas la partie réelle.

Problème 3 (3 points sur 5)



a) L'expression analytique pour cette fonction périodique est

$$f_p(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < ½ \\ 0 & ½ < t < 1 \end{cases}, \quad f_p(t+1) = f_p(t)$$

La période est $T_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = 2\pi/T_0 = 2\pi$

b) Les coefficients complexes de Fourier pour cette fonction périodique sont

$$F(n) = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} f_p(t)e^{-j\omega_0 nt}dt = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f_p(t)e^{-j\omega_0 nt}dt$$

Notez: on peut utiliser n'importe quelle période pour l'intégration.

On commence avec *n=0*.

$$F(0) = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} f_p(t)dt = \int_0^{½} dt = t\Big|_0^{½} = \frac{1}{2}$$

Pour les autres valeurs de *n* nous allons poser

$$F(n) = \int_0^{½} e^{-jn2\pi t}dt = \frac{e^{-jn2\pi t}\Big|_0^{½}}{-j2n\pi} = \frac{j}{2n\pi}\left[e^{-jn\pi} - 1\right]$$

$$= \frac{j}{2n\pi}\left[(-1)^n - 1\right] = \begin{cases} 0 & n \text{ pair} \\ \dfrac{-j}{n\pi} & n \text{ impair} \end{cases}$$

La série de Fourier nous pouvons écrire comme

$$f(t) = \frac{1}{2} - \frac{j}{\pi}e^{j2\pi t} + \frac{j}{\pi}e^{-j2\pi t} - \frac{j}{3\pi}e^{j6\pi t} + \frac{j}{3\pi}e^{-j6\pi t} \mp \cdots$$