MAT-1910 : Mathématiques de l'ingénieur II
Solutionnaire de l'examen 2 $\left(33\,\frac{1}{3}\%\right)$
Vendredi le 24 mars 2017 de 18h30 à 20h20

Section A : Robert Guénette
Section B : Hugo Chapdelaine
Section C : Alexandre Girouard

Identification

Prénom : ____________________ Nom : ____________________

N° de dossier ____________________ Section : ____________________

Résultats

Question:	1	2	3	4	5	Total
Points:	20	20	20	20	20	100
Note :						

Directives

— Veuillez désactiver la sonnerie de vos appareils électroniques et les ranger hors de portée.
— Vous avez droit à un aide-mémoire manuscrit d'une feuille 8"$\frac{1}{2}$ par 11" recto-verso.
— **Sauf avis contraire**, vous devez rédiger des solutions complètes et justifiées.
— **Sauf avis contraire**, vous devez donner des réponses exactes, et par conséquent vous ne pouvez pas approximer les quantités qui interviennent dans vos calculs.
— Vérifiez que le questionnaire comporte 5 questions réparties sur 11 pages.
— Vous avez droit à une calculatrice autorisée par la faculté des sciences et génie.

Évaluation des qualités

Qualités
1.1.1 Compréhension des notions mathématiques : questions 1 et 2
1.1.2 Capacité à résoudre des problèmes mathématiques : questions 3 et 4
1.1.3 Capacité à interpréter et à utiliser la terminologie appropriée : question 5

Question 1 (20 points)

Un quadrilatère R a pour sommets les points $A = (1, 0), B = (2, 0), C = (1, 1)$ et $D = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

(6) (a) Donner les équations des droites contenant les segments qui forment la frontière du trapèze.

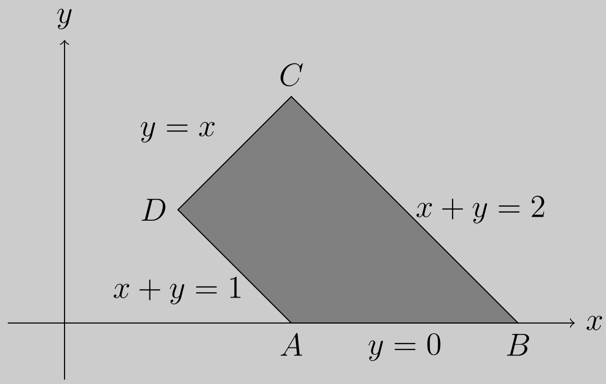
(4) (b) Si on fait le changement de variables $u = x - y$ et $v = x + y$, évaluer le jacobien de la transformation $x = x(u, v), y = y(u, v)$.

(10) (c) Utiliser obligatoirement ce changement de variables pour calculer l'intégrale

$$\iint_R (x + y)^2 \; e^{x^2 - y^2} \, dx \, dy.$$

Solution :

(a)



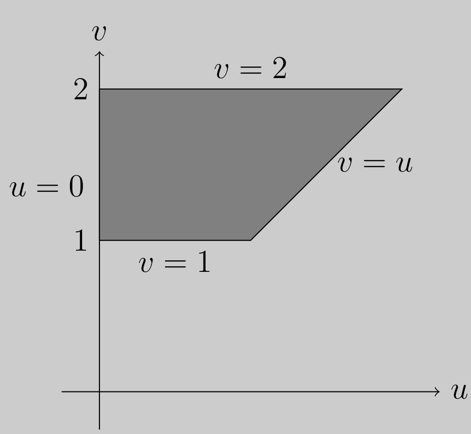
(b) Première méthode :

$$\begin{cases} u &= x - y \\ v &= x + y \end{cases} \Longrightarrow J = \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{2}$$

Deuxième méthode :

$$\begin{cases} x &= (u + v)/2 \\ y &= (v - u)/2 \end{cases} \Longrightarrow J = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$

(c) Dans le plan (u, v) des coordonnées curvilignes, les bornes sont



$$
\begin{aligned}
\iint_R (x+y)^2 \;\; e^{x^2-y^2} \; dx\,dy &= \int_{v=1}^{2}\int_{u=0}^{v} v^2 \; e^{uv} \; \frac{1}{2} \; du\,dv \\
&= \frac{1}{2} \int_{v=1}^{2} v \; e^{uv} \; \Big|_{u=0}^{v} \; dv \\
&= \frac{1}{2} \int_{v=1}^{2} v \; e^{v^2} - v \; dv \\
&= \frac{e^{v^2}}{4} \; \Big|_{v=1}^{2} - \frac{v^2}{4} \; \Big|_{v=1}^{2} \\
&= \frac{e^4 - e - 3}{4}
\end{aligned}
$$

Question 2 (20 points)

Considérons la courbe C définie dans l'espace $\mathbb{R}^3$ et obtenue par l'intersection du cylindre $x^2 + y^2 = 2$ et de la surface $z = x^2 - y^2$.

(4) (a) Paramétriser la courbe C et préciser l'intervalle de paramétrisation.

(6) (b) Donner l'équation paramétrique de la droite tangente à C au point $(1, 1, 0)$.

(4) (c) Déterminer tous les points (x_0, y_0, z_0) de la courbe C tels que la droite tangente à C en (x_0, y_0, z_0) soit perpendiculaire à l'axe des z.

(6) (d) Si C représente un fil métallique dont la densité est donnée par $\rho(x, y) = \sqrt{2 + 16x^2\, y^2}$, calculer la masse de C.
On utilisera l'identité $\sin 2t = 2 \sin t \, \cos t$.

Solution :

(a) Une paramétrisation possible est

$$\begin{cases} x = \sqrt{2}\, \cos t, \\ y = \sqrt{2}\, \sin t, \\ z = 2\,(\cos^2 t - \sin^2 t) = 2 \cos 2t, \end{cases} \qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

(b) On doit calculer la valeur du paramètre t_0 telle que

$$\begin{cases} x = \sqrt{2}\, \cos t_0 = 1, \\ y = \sqrt{2}\, \sin t_0 = 1, \\ z = 2\,(\cos^2 t_0 - \sin^2 t_0) = 0, \end{cases} \qquad \Longrightarrow t_0 = \frac{\pi}{4}$$

Ensuite, on évalue le vecteur tangent au point $t_0 = \frac{\pi}{4}$:

$$\frac{d\vec{r}}{dt}(t_0) = \Big(-\sqrt{2}\, \sin t_0,\ \sqrt{2}\, \cos t_0,\ -8 \sin t_0 \cos t_0\Big) = (-1, 1, -4)$$

Finalement, l'équation de la droite tangente s'écrit

$$\vec{R}(s) = \vec{r}(t_0) + s\, \frac{d\vec{r}}{dt}(t_0) = (1, 1, 0) + s\,(-1, 1, -4) = (1 - s,\ 1 + s,\ -4s).$$

(c) On doit trouver tous les points de la courbe vérifiant $\dfrac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{k} = 0$, c'est-à-dire

$$\Big(-\sqrt{2}\, \sin t,\ \sqrt{2}\, \cos t,\ -8 \sin t \cos t\Big) \cdot (0, 0, 1) = 0 \Longrightarrow -8 \sin t \cos t = 0.$$

Donc toutes les valeurs de t qui vérifient

$$\sin t = 0 \quad \text{et} \quad \cos t = 0 \Longrightarrow t = 0,\ \pi/2,\ \pi,\ 3\pi/2.$$

En utilisant l'équation de la courbe, on trouve les 4 points $(\sqrt{2}, 0, 2)$, $(-\sqrt{2}, 0, 2)$, $(0, \sqrt{2}, -2)$ et $(0, -\sqrt{2}, -2)$.

(d) La masse du fil métallique est donnée par

$$M = \int_C \rho \, ds.$$

Débutons par le calcul de $ds = \|\frac{d\vec{r}}{dt}\| \, dt$.

$$\|\frac{d\vec{r}}{dt}\| = \sqrt{2\sin^2 t + 2\cos^2 t + 64\sin^2 t \cos^2 t} = \sqrt{2 + 16(\sin^2 2t)}.$$

Evaluons la densité ρ sur la courbe

$$\rho = \sqrt{2 + 16x^2\, y^2} = \sqrt{2 + 16 \cdot 2\cos^2 \cdot 2\sin^2 t} = \sqrt{2 + 64\sin^2 t \cos^2 t} = \sqrt{2 + 16(\sin^2 2t)}.$$

On observe que $\rho = \|\frac{d\vec{r}}{dt}\|$ aux points de la courbe. Par conséquent, l'intégrale ci-dessus devient

$$\begin{aligned} M = \int_C \rho \, ds &= \int_{t=0}^{2\pi} \sqrt{2 + 16(\sin^2 2t)}\, \sqrt{2 + 16(\sin^2 2t)} \, dt \\ &= \int_{t=0}^{2\pi} 2 + 16(\sin^2 2t) \, dt \\ &= 2t \,\Big|_{t=0}^{2\pi} + \frac{16}{2} \left[t - \frac{\sin 4t}{4} \right] \Big|_{t=0}^{2\pi} \\ &= 4\pi + 16\pi = 20\pi. \end{aligned}$$

Remarque : on a utilisé la formule

$$\begin{aligned} \int \sin^2 2t \, dt &= \frac{1}{2} \int \sin^2 u \, du \qquad \text{en posant } u = 2t \Longrightarrow du = 2dt, \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{u}{2} - \frac{\sin 2u}{4} \right], \\ &= \frac{t}{2} - \frac{\sin 4t}{8}. \end{aligned}$$

Question 3 (20 points)

On considère un champ de force posé dans l'espace et défini par

$$\vec{F}(x,y,z) = \big(3x^2 - 3y^2 - cy,\ \ -6xy + cx,\ \ e^{\sin(z)}\cos(z)\big)$$

où $c \geq 0$ est un paramètre.

(4) (a) Prouvez que ce champ est conservatif (potentiel) lorsque $c = 0$ mais pas lorsque $c > 0$.

(6) (b) Pour $c = 0$, trouvez une fonction potentielle $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ telle que $\vec{F} = \vec{\nabla} f$.

(4) (c) Supposez que $c = 0$. Étant donnée une courbe C qui est paramétrisée par l'application $\vec{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$, prouvez que le travail effectué par $\vec{F}$ en parcourant C est

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a)).$$

(6) (d) Supposez que $c = 0$. Pour la courbe $C \subset \mathbb{R}^3$ qui est obtenue par l'intersection du cylindre $x^2 + y^2 = 2017$ et de la surface $z = x^2 - y^2$, calculez le travail

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Solution :

(a) Le rotationnel de $\overrightarrow{F}$ est

$$\operatorname{rot}\overrightarrow{F}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 3x^2 - 3y^2 - cy & -6xy + cx & e^{\sin(z)}\cos(z) \end{vmatrix} = (0, 0, 2c).$$

Il est nul si et seulement si $c = 0$. Comme $\mathbb{R}^3$ est simplement connexe, ça signifie que $\overrightarrow{F}$ est conservatif pour $c = 0$, mais pas pour $c > 0$.

(b) La fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ recherchée devra satisfaire les trois équations

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -6xy, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = e^{\sin(z)}\cos(z).$$

En intégrant la première, on obtient

$$f(x,y,z) = x^3 - 3xy^2 + C_1(y,z).$$

On obtient donc

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -6xy + \frac{\partial C_1}{\partial y}(y,z).$$

Comme $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = -6xy$, on doit avoir $\dfrac{\partial C_1}{\partial y}(y,z) = 0$. Ceci implique qu'on peut choisir $C_1(y,z) = C_2(z)$ et donc

$$f(x,y,z) = x^3 - 3xy^2 + C_2(z).$$

Il en découle que $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = C_2'(z)$. Comme $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = e^{\sin(z)}\cos(z)$, on doit avoir

$$C_2'(z) = e^{\sin(z)}\cos(z),$$

ce qui implique que

$$C_2(z) = \int e^{\sin(z)}\cos(z)\,dz = e^{\sin(z)} + C.$$

En choisissant $C = 0$, on obtient

$$f(x,y,z) = x^3 - 3xy^2 + e^{\sin(z)}.$$

(c) On notera $\overrightarrow{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ de telle sorte que

$$\int_C \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r} = \int_a^b \overrightarrow{F}(x(t),y(t),z(t))\cdot \overrightarrow{r}'(t)\,dt = \int_a^b \overrightarrow{\nabla f}(x(t),y(t),z(t))\cdot \overrightarrow{r}'(t)\,dt.$$

Or il se trouve que la règle de dérivation en chaîne nous apprend que

$$\frac{d}{dt}f(\overrightarrow{r}(t)) = \frac{d}{dt}f(x(t),y(t),z(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{dy}{dt}+\frac{\partial f}{\partial z}\,\frac{dz}{dt} = \overrightarrow{\nabla f}(x(t),y(t),z(t))\cdot\overrightarrow{r}'(t).$$

On déduit donc du théorème fondamental du calcul intégral que

$$\int_C \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r} = \int_a^b \frac{d}{dt}f(\overrightarrow{r}(t))\,dt = f(\overrightarrow{r}(b)) - f(\overrightarrow{r}(a)).$$

(d) Le travail est nul puisque la courbe est fermée et le champ vectoriel est conservatif.

Question 4 (20 points)

Dans le plan, on considère le champ vectoriel

$$\vec{F} = \left(-y + \cos \pi x, \;\; 3x + 4y^3\right).$$

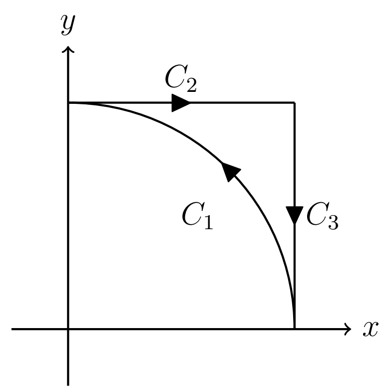
On définit les courbes suivantes :

- C_1 est l'arc du cercle unité qui relie le point $(1, 0)$ au point $(0, 1)$ dans le sens positif (anti-horaire),
- C_2 est le segment de droite qui va du point $(0, 1)$ au point $(1, 1)$,
- C_3 est le segment de droite qui va du point $(1, 1)$ au point $(1, 0)$,
- C est la courbe fermée qui est composée des courbes C_1, C_2 et C_3 et parcourue dans le même sens.

(6) (a) Calculer directement le travail du champ vectoriel $\vec{F}$ le long de la courbe C_2.

(8) (b) En utilisant le théorème de Green, calculer le travail du champ $\vec{F}$ le long de la courbe C.

(6) (c) En déduire le travail du champ $\vec{F}$ le long de la courbe C_1.



Solution :

(a) La courbe C_2 est paramétrisée par $\vec{r}(x) = (x, 1)$. Le travail du champ vectoriel $\vec{F}$ le long de C_2 est

$$\begin{aligned}\int_{C_2} P\,dx + Q\,dy &= \int_{x=0}^{1} P\,dx = \int_{x=0}^{1} -y + \cos \pi x \; dx \\ &= \int_{x=0}^{1} -1 + \cos \pi x \; dx = -x + \frac{\sin \pi x}{\pi}\Big|_0^1 = (-1+0) - 0 = -1\end{aligned}$$

(b) On change l'orientation de la courbe C et on applique le théorème de Green.

$$\begin{aligned}\int_{-C} P\,dx + Q\,dy &= -\int_{C} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\; dx\,dy \\ &= \iint_D 4\; dx\,dy = 4A(D).\end{aligned}$$

Or l'aire de D est égale à l'aire du carrée moins l'aire du disque

$$A(D) = A(\text{carrée}) - A(\text{disque}) = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

Par conséquent, le travail du champ $\vec{F}$ le long de la courbe C est

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \pi - 4.$$

(c) On a que

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Or il manque le calcul de $\int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r}$.
On paramétrise C_3 dans le sens inverse par $\vec{r}(y) = (1, y)$. Le travail du champ vectoriel $\vec{F}$ le long de C_3 est

$$\begin{aligned} \int_{-C_3} P\,dx + Q\,dy &= \int_{y=0}^{1} Q\,dy = \int_{y=0}^{1} 3x + 4y^3\,dy \\ &= \int_{y=0}^{1} 3 + 4y^3 = 3y + y^4\Big|_0^1 = 3 + 1 = 4 \end{aligned}$$

Par conséquent, le travail du champ $\vec{F}$ le long de la courbe C_3 est

$$\int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -4.$$

Finalement, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= (\pi - 4) - (-1) - (-4) = \pi + 1. \end{aligned}$$

Question 5 (20 points)

Pour les questions 1 à 3, encercler la bonne réponse.

1. (5 points) Lequel des champs vectoriels suivants est conservatif sur $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$: **(La réponse est (a))**
   (a) $\vec{F} = \left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$,
   (b) $\vec{F} = \left(\dfrac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$,
   (c) $\vec{F} = (y^2, x)$,
   (d) $\vec{F} = \left(\dfrac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$.
   (e) aucune de ces réponses.

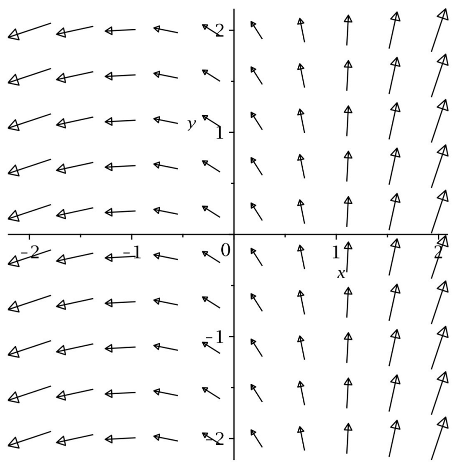
2. (5 points) Déterminer lequel des énoncés suivants est faux : **(La réponse est (d))**
   (a) Soit $C \subseteq \mathbb{R}^3$ une courbe orientée et $\vec{F}$ un champ vectoriel dans $\mathbb{R}^3$. On aura toujours que $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{-C} \vec{F} \cdot d\vec{r}$.
   (b) Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction. Alors $\vec{\nabla} f$ est un champ vectoriel conservatif.
   (c) La somme de deux champs vectoriels conservatifs est toujours conservatif.
   (d) Soit $\vec{F}(x,y) = (P(x,y),\ Q(x,y)$ un champ vectoriel défini sur $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tel que $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$. Alors $\vec{F}$ est nécessairement conservatif sur D.

3. (5 points) On considère la courbe plane C donnée en coordonnées polaires par $r(\theta) = \sin(\theta)$ pour $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. L'intégrale suivante $\int_C ds$ est égale à **(La réponse est (c))**
   (a) π,
   (b) 2,
   (c) $\frac{\pi}{2}$,
   (d) 2π,
   (e) 3π.

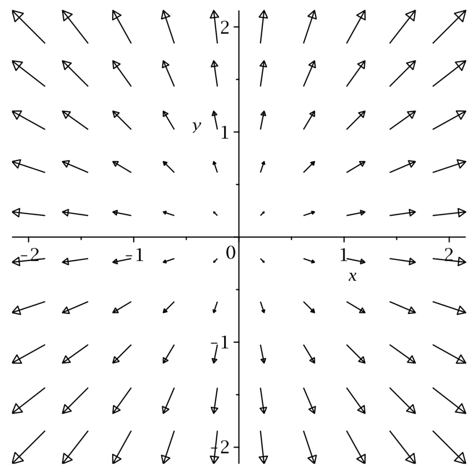
4. (5 points) On considère les champs vectoriels suivants :

$\vec{F}_1 = (-y, x), \quad \vec{F}_2 = (x, y), \quad \vec{F}_3 = \left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}\right) \quad \text{et} \quad \vec{F}_4 = (x-1, x+1).$

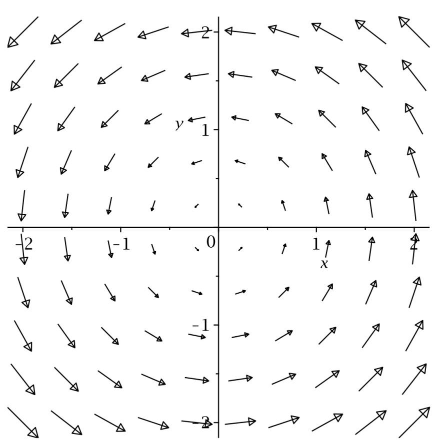
Écrire le champ vectoriel approprié sous chacune des images ci-dessous :



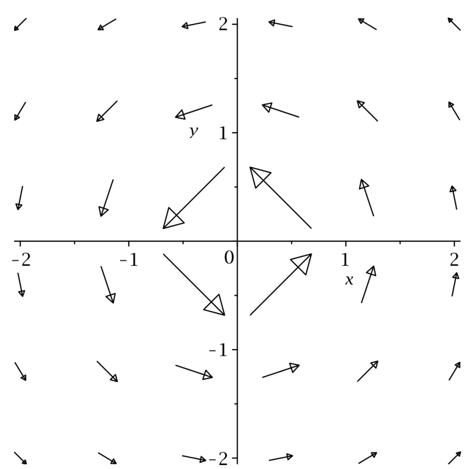
F_4



F_2



F_1



F_3