EXAMEN 2

MAT-18996: Analyse numérique pour l'ingénieur — Hiver 2009

Remarques:

1) Toutes les réponses doivent être adéquatement justifiées. En particulier, les détails des calculs doivent être donnés. Dans le cas contraire, une réponse sera considérée comme nulle.
2) Documents permis: deux feuilles 8 1/2 × 11 manuscrites, recto-verso.
3) Seules les calculatrices avec l'auto-collant de la Faculté sont autorisées.
4) Soignez la présentation, la qualité du français et la présentation de vos raisonnements.
5) Déposez votre carte d'identité avec photo sur le coin gauche de votre table et assoyez-vous du côté droit.
6) Nous ne répondrons à **aucune** question concernant ces exercices, sauf si nous constatons la présence d'une ambiguïté ou d'une erreur dans l'énoncé des questions, auquel cas la réponse sera annoncée à l'ensemble des étudiants.

Voici un extrait d'une table des valeurs des noeuds et des poids correspondants pour la formule de quadrature de Gauss-Legendre à n noeuds:

n	Noeuds	Poids
1	0	2
2	-0.57735	1
	0.57735	1
3	-0.77460	0.55556
	0	0.88889
	0.77460	0.55556
4	-0.86114	0.34785
	-0.33998	0.65215
	0.33998	0.65215
	0.86114	0.34785
5	-0.90618	0.23693
	-0.53847	0.47863
	0	0.56889
	0.53847	0.47863
	0.90618	0.23693

Question 1. (15 points)

On considère l'équation différentielle

$$\begin{cases} y'(t) &= 2t\Big(y(t)+t\Big)-1 \\ y(1) &= 0 \end{cases}$$

a) [2 pts] Vérifier que sa solution est

$$y(t) = e^{t^2-1} - t.$$

b) [3 pt] Expliciter la méthode d'Euler modifiée (Runge-Kutta 2) lorsqu'appliquée à cette équation différentielle.

c) [5 pts] Calculer les valeurs approchées de $y(1.1)$ à l'aide de la méthode d'Euler modifiée avec $h = 0.1$ et $h = 0.05$.

d) [5 pts] En vous servant de la solution exacte et des résultats obtenus en **c)**, montrer que la méthode d'Euler modifiée est d'ordre 2.

Question 2. (20 points)

On considère l'intégrale

$$I = \int_2^6 e^x \, dx.$$

a) [5 pts] Calculer la valeur approchée de I par la formule de Gauss-Legendre à 3 noeuds (voir table en première page). Calculer la valeur **exacte** de l'erreur commise.

b) [5 pts] Si l'intervalle d'intégration $[2,6]$ est divisé en deux sous-intervalles de longueurs égales, calculer la valeur approchée de I en utilisant la formule de Gauss-Legendre à 1 noeud sur chacun des deux sous-intervalles. Calculer la valeur **exacte** de l'erreur commise.

c) [5 pts] Si on utilise la formule de Simpson 1/3 composée pour calculer la valeur approchée de I, déterminer combien de points d'évaluation il faudrait prendre pour que l'erreur en valeur absolue soit inférieure à 10^{-5} ?

d) [5 pts] Si on utilise la formule du trapèze composée pour calculer la valeur approchée de I, déterminer combien de points d'évaluation il faudrait prendre pour que l'erreur en valeur absolue soit inférieure à 10^{-5} ?

Question 3. (25 points)

Soit une fonction $f(x)$ connue aux points $x_i, \ \ i = 0, 1, ..., 5,$

x_i	-1	0	2	3	5	8
$f(x_i)$	3	-1	0	2	6	7

a) [10 pts] En utilisant la méthode de polynômes de Lagrange, construire le polynôme qui interpole la fonction $f(x)$ aux 3 noeuds suivants:

$$(-1, 3), \ (0, -1), \ (2, 0),$$

et calculer une approximation de $f(1)$. En supposant que $|f'''(\xi)| \leq M$, donner une approximation raisonnable de l'erreur commise.

b) [10 pts] En utilisant la méthode de Newton, construire un polynôme d'interpolation de degré 3 et calculer l'approximation de $f(4)$. Donner une bonne approximation de l'erreur commise. (Suggestion: $f^{(n)}(\xi) \approx n! \, f[x_i, ..., x_{i+n}]$).

c) [5 pts] Sans faire de calcul, estimer la valeur de $f'(4)$ avec la formule centrée d'ordre 2. Comparer ce résultat avec l'approximation de $f'(4)$ obtenue en utilisant le meilleur polynôme d'interpolation de degré 2.

Question 4. (20 points)

a) [5 pts] On considère l'équation différentielle

$$\begin{cases} y''(t) - \left(1 - y^2(t)\right) y'(t) + y(t) & = 0 \\ y(0) & = 5 \\ y'(0) & = 0. \end{cases}$$

Transformer cette équation différentielle en un système équivalent d'équations différentielles **d'ordre 1**.

b) [2 pts] On considère l'intégrale

$$I = \int_1^2 \left(7x^6 + 3x^2 - 15\right) dx.$$

Quel est le nombre minimal de noeuds pour lequel on est assuré que le calcul de I avec la méthode de Gauss-Legendre est exact?

c) [5 pts] Le terme d'erreur d'une certaine méthode d'intégration numérique est donné par l'expression suivante:

$$Err(\xi) \ = \ -\frac{2^4}{13} f^{(5)}(\xi) \, h^7.$$

Déterminer l'ordre de la méthode en question.
Déterminer le degré de précision (d'exactitude) de la méthode en question. Expliquer en quelques mots ces notions.

d) [8 pts] Rappeler la formule de différence centrée d'ordre 2 pour $f''(x)$ et démontrer que son ordre de convergence est bien 2 en général (Indication: utiliser des développements de Taylor d'ordre 4).

Question 5. (20 points)

Calculer la spline cubique naturelle qui interpole les 3 points $(-2, 4)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$.