STT-2920 : Probabilités pour ingénieurs

SOLUTION DE L'EXAMEN NUMÉRO 1

Mercredi le 25 octobre 2017

Numéro 1. [10 points]

(a) Voici un exemple d'une séquence de longueur 13 comprenant 6 lettres A, 4 lettres B et 3 lettres C : ABBAAACACCBAB. Combien de séquences différentes (de longueur 13) peut-on former avec 6 lettres A, 4 lettres B et 3 lettres C ?

Solution 1 :

$$\frac{13!}{6!\,4!\,3!} = 60\,060.$$

Solution 2 :

$$\binom{13}{6} \times \binom{7}{4} = 1\,716 \times 35 = 60\,060.$$

(b) Si on écrit $(x+2)^{15}$ sous forme d'un polynôme en x, quel sera le coefficient de x^{10} ?

Solution :

Le théorème du binôme de Newton nous donne

$$(x+2)^{15} = \sum_{k=0}^{15} \binom{15}{k} x^k\, 2^{15-k}.$$

Le terme en x^{10} est donc

$$\binom{15}{10} x^{10}\, 2^5 = \binom{15}{10} \times 2^5 \times x^{10} = \frac{15!}{10!\,5!} \times 32 \times x^{10} = 3003 \times 32 \times x^{10} = 96\,096\; x^{10}$$

La réponse est donc 96 096.

Numéro 2. [10 points]

On sait que parmi les VW Beetles vendues au Canada, 70% sont fabriquées en Allemagne et 30% sont fabriquées au Mexique. On sait aussi que parmi les VW Beetles fabriquées en Allemagne, 40% sont munies d'un moteur diesel alors que parmi les VW Beetles fabriquées au Mexique il y en a seulement 20% qui sont munies d'un moteur diesel.

(a) Quel pourcentage des VW Beetles vendues au Canada sont munies d'un moteur diesel ?

Solution :

On utilise la loi des probabilités totales :

$\mathbb{P}[D] = \mathbb{P}[D \mid A]\, \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[D \mid M]\, \mathbb{P}[M] = (0.40 \times 0.70) + (0.20 \times 0.30) = 0.28 + 0.06 = 0.34.$

La réponse est donc 34%.

(b) Votre voisin vient d'acheter une VW Beetle. Elle est munie d'un moteur diesel. Quelle est la probabilité que cette voiture a été fabriquée en Allemagne ?

Solution :

On utilise le théorème de Bayes :

$$\mathbb{P}[A \mid D] = \frac{\mathbb{P}[D \mid A]\ \mathbb{P}[A]}{\mathbb{P}[D]} = \frac{0.40 \times 0.70}{0.34} = \frac{0.28}{0.34} = \frac{28}{34} = \frac{14}{17} = 0.8235.$$

Numéro 3. [15 points]

On suppose que la loi exponentielle de moyenne 3 est un bon modèle pour décrire la distribution des durées de vie (exprimées en milliers d'heures) d'un nouveau type d'ampoules électriques. Autrement dit, si on choisit une ampoule au hasard, alors la durée de vie de cette ampoule (en milliers d'heures) est une variable aléatoire dont la densité de probabilité est la suivante :

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{3}\, e^{-t/3} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{1}$$

(a) Obtenez le 81^e centile de cette distribution. Autrement dit, obtenez la valeur t_* qui est telle que 81% des ampoules ont une durée de vie inférieure à t_* milles heures.

Solution :

Il suffit de résoudre l'équation

$$\int_{-\infty}^{t_*} f(t)\, dt = 0.81$$

c'est-à-dire

$$\int_0^{t_*} \frac{1}{3}\, e^{-t/3}\, dt = 0.81$$

c'est-à-dire

$$\left(-e^{-t/3}\right)\Big|_0^{t_*} = 0.81$$

c'est-à-dire

$$\left(-e^{-t_*/3}\right) - \left(-e^{-0/3}\right) = 0.81$$

c'est-à-dire

$$1 - e^{-t_*/3} = 0.81$$

donc

$$e^{-t_*/3} = 19/100$$

donc

$$-\frac{t_*}{3} = \log(19/100)$$

donc

$$\frac{t_*}{3} = \log(100/19)$$

donc

$$t_* = 3\log(100/19) = 4.9822$$

(b) Nous allons tester des ampoules jusqu'à ce qu'on en obtienne une qui va durer au moins t_* milles heures. Obtenez l'espérance et l'écart-type du nombre d'ampoules qu'il faudra tester.

Solution :

Puisque t_* est le 81^e centile notre distribution, on sait que 81% des ampoules durent moins de t_* milles heures. Donc 19% des ampoules durent plus que t_* milles heures. Donc, si on pose $N =$ *le nombre d'ampoules qu'il va falloir tester*, alors la variable aléatoire N suit la loi géométrique avec paramètre $p = 19/100$. On a donc

$$\begin{aligned}
\mu_N &= \frac{1}{p} = \frac{1}{19/100} = \frac{100}{19} = 5.2632 \\
\sigma_N &= \sqrt{\frac{1-p}{p^2}} = \frac{\sqrt{1-p}}{p} = \frac{\sqrt{81/100}}{19/100} = \frac{9/10}{19/100} = \frac{90}{19} = 4.7368
\end{aligned}$$

(c) On dispose de 16 ampoules et on les utilise séquentiellement, c'est-à-dire une après l'autre. Obtenez l'espérance et l'écart-type de la durée de vie totale.

Solution :

Si $T_1, T_2, ..., T_{16}$ dénotent les durées de vie individuelles de ces 16 ampoules, alors $T_1, T_2, ..., T_{16}$ sont des variables aléatoires indépendantes, toutes avec loi exponentielle avec paramètre $\lambda = 1/3$. En particulier on a $\mu_{T_i} = 1/\lambda = 3$ et $\sigma^2_{T_i} = 1/\lambda^2 = 9$.

La durée de vie totale est la somme de ces 16 durées de vie individuelles : $S = T_1 + T_2 + \cdots + T_{16}$. On obtient donc

$$\begin{aligned}
\mu_S &= \mu_{T_1} + \mu_{T_2} + \cdots + \mu_{T_{16}} = 16 \times 3 = 48 \\
\sigma_S &= \sqrt{\sigma^2_{T_1} + \sigma^2_{T_2} + \cdots + \sigma^2_{T_{16}}} = \sqrt{16 \times 9} = 12.
\end{aligned}$$

Numéro 4. [15 points]

Voici la fonction de répartition de la variable aléatoire X :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\infty < x < 0 \\ 1/10 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 4/10 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 7/10 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 9/10 & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ 1 & \text{si } 4 \leq x < \infty \end{cases}$$

(a) Calculez l'espérance de X. [Suggestion : Obtenez d'abord la fonction de masse de X].

Solution :

Voici la fonction de masse de la variable aléatoire X :

$$p_X(k) = \begin{cases} 1/10 & \text{si } k = 0 \\ 3/10 & \text{si } k = 1 \\ 3/10 & \text{si } k = 2 \\ 2/10 & \text{si } k = 3 \\ 1/10 & \text{si } k = 4 \\ 0 & \text{si } k \notin \{0, 1, 2, 3, 4\} \end{cases}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \sum_x x p_X(x) \\ &= \sum_{k=0}^{4} k p_X(k) \\ &= \left(0 \times \frac{1}{10}\right) + \left(1 \times \frac{3}{10}\right) + \left(2 \times \frac{3}{10}\right) + \left(3 \times \frac{2}{10}\right) + \left(4 \times \frac{1}{10}\right) \\ &= \frac{19}{10} = 1.9000 \end{aligned}$$

(b) Sachant que X est strictement plus grand que 2, quelle est la probabilité que X est égal à 3 ?

Solution :

$$\mathbb{P}[X = 3 \,|\, X > 2] = \frac{\mathbb{P}[X = 3]}{\mathbb{P}[X > 2]} = \frac{\mathbb{P}[X = 3]}{\mathbb{P}[X = 3] + \mathbb{P}[X = 4]} = \frac{2/10}{2/10 + 1/10} = \frac{2}{3}.$$

(c) Sachant que X est strictement plus grand que 2, quelle est l'espéramce de X ?

Solution :

À la partie (b) on a obtenu $\mathbb{P}[X = 3 \,|\, X > 2] = 2/3$. De la même façon on a $\mathbb{P}[X = 4 \,|\, X > 2] = 1/3$. On obtient donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X \,|\, X > 2] &= \sum_x x\, \mathbb{P}[X = x \,|\, X > 2] \\ &= \sum_{k=3}^{4} k\, \mathbb{P}[X = k \,|\, X > 2] \\ &= \left(3 \times \frac{2}{3}\right) + \left(4 \times \frac{1}{3}\right) \\ &= 2 + \frac{4}{3} \;=\; \frac{10}{3} \;=\; 3.3333 \end{aligned}$$

Numéro 5. [10 points] Voici la densité de probabilité conjointe des variables X et Y :

$$f(x,y) = \begin{cases} 4\,x^2\ e^{-x(2+y)} & \text{si } x > 0 \text{ et } y > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(a) Complétez la phrase suivante :

La densité marginale de X est donnée par $f_X(x) = \begin{cases} 4x\,e^{-2x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0, \end{cases}$

et la densité marginale de Y est donnée par $f_Y(y) = \begin{cases} ????? & \text{si } y \geq 0, \\ 0 & \text{si } y < 0. \end{cases}$

Solution :

Les valeurs possibles de Y sont les réels positifs. Pour $y \geq 0$ on obtient

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx \ = \ \int_0^{\infty} 4\,x^2\ e^{-x(2+y)}\,dx \\ &= \frac{4}{(2+y)^3} \int_0^{\infty} (x(2+y))^2\ e^{-x(2+y)}\,(2+y)\,dx \ = \ \frac{4}{(2+y)^3} \int_0^{\infty} u^2\,e^{-u}\,du \\ &= \frac{8}{(2+y)^3} \qquad \left(\text{puisque } \int_0^{\infty} u^2\,e^{-u}\,du = 2 \right) \end{aligned}$$

On a donc

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{8}{(2+y)^3} & \text{si } y \geq 0, \\ 0 & \text{si } y < 0. \end{cases}$$

(b) Obtenez $\mathbb{P}[Y > 1/2 \,|\, X = 2]$. [Suggestion : Obtenez d'abord la densité conditionnelle de Y sachant que $X = 2$].

Solution :

Voici la densité marginale de Y sachant que $X = 2$. Pour tout $y \geq 0$,

$$f_{Y|X\,=\,2}(y) = \frac{f(2,y)}{f_X(2)} = \frac{16\,e^{-2(2+y)}}{8\,e^{-4}} = 2\,e^{-2y}.$$

On reconnaît ici la loi exponentielle avec paramètre $\lambda = 2$. On obtient

$$\mathbb{P}[Y > 1/2 \,|\, X = 2] = \int_{1/2}^{\infty} f_{Y|X\,=\,2}(y)\,dy = \int_{1/2}^{\infty} 2\,e^{-2y}\,dy = \left(-e^{-2y}\right)\Big|_{1/2}^{\infty} = e^{-1} = 1/e = 0.3679$$

Numéro 6. [10 points]

(a) On suppose que X est une variable aléatoire avec densité

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{36}\, x(6-x) & \text{si } 0 < x < 6 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculez l'espérance de la variable aléatoire $1/X$.

Solution :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[1/X] &= \int_0^6 \frac{1}{x}\, f_X(x)\, dx = \int_0^6 \frac{1}{x}\, \frac{1}{36}\, x(6-x)\, dx \\ &= \frac{1}{36} \int_0^6 (6-x)\, dx = \frac{1}{36} \left(6x - \frac{x^2}{2} \right)\Big|_0^6 = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(b) On suppose que X est une variable aléatoire avec fonction de répartition

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - 27/x^3 & \text{si } x \geq 3, \\ 0 & \text{si } x < 3. \end{cases}$$

Obtenez la densité de probabilité de la variable aléatoire $Y = \log(X/3)$. Prenez le soin de bien indiquer l'ensemble des valeurs possibles de Y. [Suggestion : Obtenez d'abord la fonction de répartition de Y].

Solution : Les valeurs possibles de X sont les réels plus grands que 3. Donc les valeurs possibles de Y sont les réels plus grands que 0. Pour $y > 0$ on obtient

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{y} \mathbb{P}[Y \leq y] \\ &= \frac{d}{dy} \mathbb{P}[\log(X/3) \leq y] = \frac{d}{dy} \mathbb{P}[X \leq 3\, e^y] \\ &= \frac{d}{dy} \left(1 - 27/(3e^y)^3\right) = \frac{d}{dy} \left(1 - e^{-3y}\right) = 3\, e^{-3y}. \end{aligned}$$

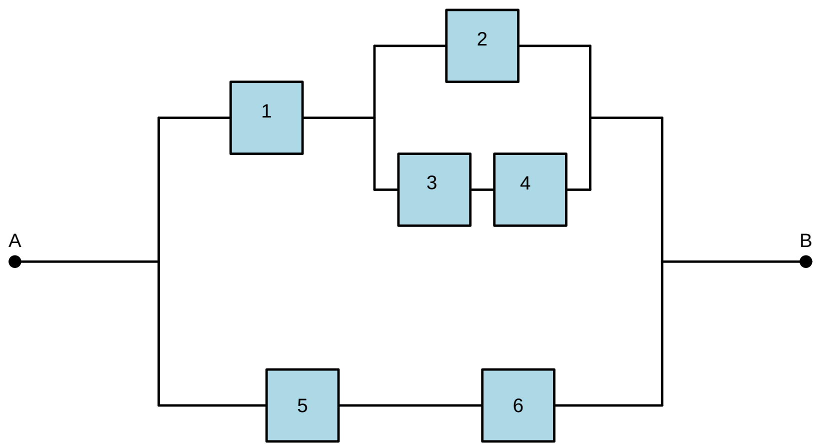
La densité de probabilité de la variable aléatoire Y est donc la suivante :

$$f_Y(y) = \begin{cases} 3\, e^{-3y} & \text{si } y \geq 0 \\ 0 & \text{si } y < 0. \end{cases}$$

Il s'agit de la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 3$ c'est-à-dire de moyenne $1/3$.

Numéro 7. [10 points + 2 points bonis]

Le schéma ci-dessous représente le réseau routier reliant la ville A à la ville B. Chacun des 6 carrés ombragés représente un pont. Demain, un ouragan passera dans cette région et, indépendamment les uns des autres, chacun des 6 ponts a une probabilité 1/3 d'être détruit (c'est-à-dire une probabilité 1/3 qu'il sera devenu inutilisable et une probabilité 2/3 qu'il sera toujours utilisable).



(a) Calculez la probabilité qu'il sera toujours possible de voyager de la ville A à la ville B (via ce réseau routier) après l'ouragan.

Réponse :

$$\text{Fiabilité du réseau } = \frac{544}{729} = 0.7462$$

Explications. On utilise les 2 règles usuelles. Chaque pont a une fiabilité égale à 2/3. On obtient donc ceci :

1. La fiabilité de la branche comprenant les ponts 3 et 4 est $2/3 \times 2/3 = 4/9$.
2. La fiabilité du sous-réseau comprenant les ponts 2, 3 et 4 est $1-(1-2/3)(1-4/9) = 1 - \{(1/3) \times (5/9)\} = 1 - 5/27 = 22/27$.
3. La fiabilité de la branche Nord (ponts 1, 2, 3 et 4) est $2/3 \times 22/27 = 44/81$.
4. La fiabilité de la branche Sud (ponts 5 et 6) est $2/3 \times 2/3 = 4/9$.
5. La fiabilité du réseau est donc

$$1 - (1 - 44/81)(1 - 4/9) = 1 - \{(37/81) \times (5/9)\} = 1 - 185/729 = 544/729 = 0.7462.$$

(b) Calculez la probabilité qu'exactement 4 des 6 ponts seront détruits par cet ouragan.

Réponse : Il s'agit tout simplement d'une probabilité binomiale :

$$\binom{6}{4}(1/3)^4(2/3)^2 = 15 \times \frac{1}{81} \times \frac{4}{9} = \frac{60}{729} = \frac{20}{243} = 0.0823$$

(c) [Question boni pour 2 points additionnels] Une fois l'ouragan passé, on apprend qu'exactement 4 des 6 ponts ont été détruits par cet ouragan (mais on ne sait pas lesquels). Calculez la probabilité qu'il est toujours possible de voyager (via ce réseau routier) de la ville A à la ville B.

Réponse :

Il y a $\binom{6}{4} = 15$ façons différentes de “choisir” les 4 ponts qui seront détruits. D'après nos hypothèses, ces 15 configurations sont équiprobables. Parmi ces 15 configurations, il y en a seulement 2 pour lesquelles il est possible de voyager du point A au point B :

- La configuration pour laquelle les 2 ponts non détruits sont les ponts numéro 1 et numéro 2,
- La configuration pour laquelle les 2 ponts non détruits sont les ponts numéro 5 et numéro 6.

La probabilité demandée est donc 2/15 c'est-à-dire 0.13333.