Automne 2021 GEL-3002

Examen partiel

Problème 1

a) $\tilde{H} = (\hat{y} + j\hat{z})\, 2\, e^{-0.2x} e^{-j160\pi x}$

$= (\hat{y} + j\hat{z})\, 2\, e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$

$-j\vec{k}\cdot\vec{r} = -0.2x - j160\pi x$

$-j\|\vec{k}\|\,\hat{a_k} \cdot (x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}) = -0.2x - j160\pi x$

$-j\|\vec{k}\|\,\hat{a_k} \cdot x\hat{x} = -0.2x - j160\pi x$
$-j\|\vec{k}\|\,\hat{a_k} \cdot y\hat{y} = 0$
$-j\|\vec{k}\|\,\hat{a_k} \cdot z\hat{z} = 0$

$\hat{a_k}$ a seulement une composante en x. De plus, le champ s'atténue et le déphasage devient plus négatif selon $x > 0$ d'où

$$\hat{a_k} = \hat{x}$$

b)
Comme $160\pi \gg 0.2$
c'est-à-dire
$$\beta \gg \alpha$$

On peut supposer que les pertes sont très faibles comme dans le cas d'un diélectrique à très faibles pertes. Dans ce cas, on a que :

$$\beta \approx \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

$\omega = 2\pi \cdot 12 \cdot 10^9$ rad/s
$\mu = \mu_0$
$\beta = 160\pi$

$$\sqrt{\mu\varepsilon} \approx \beta/\omega$$

$$\sqrt{\mu_0\varepsilon_0\varepsilon_r} \approx \beta/\omega$$

$$\sqrt{\varepsilon_r} \approx \beta/\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$$

$$\sqrt{\varepsilon_r} \approx \frac{160\pi}{2\pi \cdot 12 \cdot 10^9\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$$

$$\sqrt{\varepsilon_r} \approx 2$$

$$\varepsilon_r \approx 4$$

On peut confirmer l'hypothèse du diélectrique à très faibles pertes en calculant σ :

$$\alpha \approx \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

$$\sigma \approx \frac{2\alpha}{\sqrt{\mu/\varepsilon}} = \frac{2 \cdot 0{,}2}{377/2}$$

$$\sigma \approx 0{,}002 \text{ S/m}$$

Alors :

$$\sigma \ll \omega\varepsilon$$

$$0{,}002 \ll 2{,}67$$

c) La constante d'atténuation "α" apparaît dans la première exponentielle :

$$e^{-0{,}2x} = e^{-\alpha x}$$

$$\alpha = 0{,}2 \text{ Np/m}$$

d) Pour une onde plane :

$$\tilde{E} = -\eta\, \hat{a_z} \times \tilde{H}$$

avec

$$\eta \approx \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} + \frac{j}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\,\frac{\sigma}{\omega} \quad \left(\begin{matrix}\text{diélectriques à} \\ \text{très faibles pertes}\end{matrix}\right)$$

où

$$\mu = \mu_0 \qquad \sigma = 0{,}002$$
$$\epsilon = 4\epsilon_0 \qquad \omega = 2\pi \cdot 12 \cdot 10^9$$

$$\eta \approx \frac{377}{2} + j\,\frac{377}{4} \cdot \frac{0{,}002}{2\pi \cdot 12 \cdot 10^9}$$

$$\approx 188{,}5 + j\,2{,}5 \cdot 10^{-12}$$

$$\approx 188{,}5 \angle 1{,}326 \cdot 10^{-14}$$

$$\tilde{E} = -188{,}5 \angle 1{,}326 \cdot 10^{-14} \left(\hat{x} \times (\hat{y} + j\hat{z})\right) \cdot 2 e^{-0{,}2x} e^{-j160\pi x}$$

$$= -188{,}5 \angle 1{,}326 \cdot 10^{-14} \left(\hat{z} - j\hat{y}\right) 2 e^{-0{,}2x} e^{-j160\pi x}$$

$$= (j\hat{y} - \hat{z})\, 377\, e^{-0{,}2x} e^{-j160\pi x + j1{,}326 \cdot 10^{-14}}$$

Le déphasage de $1{,}326 \cdot 10^{-14}$ rad est négligeable =>

$$\tilde{E} = (j\hat{y} - \hat{z})\, 377\, e^{-0{,}2x} e^{-j160\pi x}$$

e)

$$S_{av}(x) \iff \langle P \rangle$$

$$S_{av}(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(\tilde{E} \times \tilde{H}^*\right)$$

$$S_{av}(x) = \frac{1}{2}\,Re\left[\begin{array}{l}(j\hat{y}-\hat{z})\,377\,e^{-0{,}2x}\,e^{-j160\pi x} \quad \times \\ (\hat{y}-j\hat{z})\,2\,e^{-0{,}2x}\,e^{j160\pi x}\end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\,Re\left[\,2\,\hat{x}\;754\,e^{-0{,}4x}\,\right]$$

$$= \hat{x}\,754\,e^{-0{,}4x}$$

f) $\tilde{E} = (j\hat{y}-\hat{z})\,377\,e^{-0{,}2x}\,e^{-j160\pi x}$
$= j(\hat{y}+j\hat{z})\,377\,e^{-0{,}2x}\,e^{-j160\pi x}$

est composé de 2 composantes E_y et E_z de même amplitude et déphasées de $\pi/2$ rad =>

Polarisation circulaire

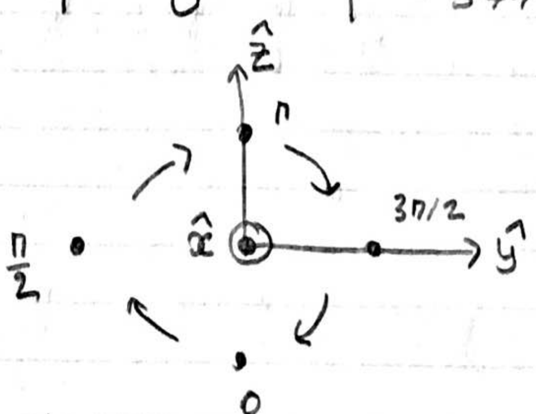
- Sens de polarisation

à $x=0$, on a :

$E_y = 377\cos(\omega t + \pi/2)$
$E_z = 377\cos(\omega t + \pi/2 + \pi/2)$
$= 377\cos(\omega t + \pi)$

ωt	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
E_y	0	-377	0	377
E_z	-377	0	377	0

La rotation ne suit pas les doigts de la main droite lorsque le pouce pointe en $\hat{x}$



=> Polarisation circulaire gauche

Problème 2

a)

- Champ électrique rouge

$\lambda_r = 750nm$

$\left.\begin{array}{l}\mu = \mu_0 \\ \epsilon = \epsilon_0 \\ \sigma = 0\end{array}\right\}$ Vide

$f_r = c/\lambda_r$

$\omega_r = \dfrac{2\pi \cdot 3 \cdot 10^8}{750 \cdot 10^{-9}}$

$= 8\pi \cdot 10^{14}$ rad/s

$K_r = \beta_r$

$\beta_r = 2\pi/\lambda_r = 2\pi/750 \cdot 10^{-9}$

$= \frac{8\pi}{3} \cdot 10^6$ rad/m

$\hat{a_{kr}} = \hat{z}$

$\tilde{E_r} = E_{or}\, e^{-jk_r \hat{a_{kr}} \cdot \vec{r}}\, e^{j\omega_r t}\, \hat{x}$

$= E_{or}\, e^{-j\frac{8\pi}{3} \cdot 10^6 z}\, e^{j 8\pi \cdot 10^{14} t}\, \hat{x}$

- Champ électrique vert

$\lambda_v = 500nm$

$\left.\begin{array}{l}\mu = \mu_0 \\ \epsilon = \epsilon_0 \\ \sigma = 0\end{array}\right\}$ vide

$f_v = c/\lambda_v$

$\omega_v = \dfrac{2\pi \cdot 3 \cdot 10^8}{500 \cdot 10^{-9}}$

$= 12\pi \cdot 10^{14}$ rad/s

$K_v = \beta_v$

$\beta_v = 2\pi/\lambda_v = 2\pi/500 \cdot 10^{-9}$

$= 4\pi \cdot 10^6$ rad/m

$\hat{a_{kv}} = \hat{z}$

$\tilde{E_v} = E_{ov}\, e^{-jk_v \hat{a_{kv}} \cdot \vec{r}}\, e^{j\omega_v t}\, \hat{y}$

$= E_{ov}\, e^{-j4\pi \cdot 10^6 z}\, e^{j 12\pi \cdot 10^{14} t}\, \hat{y}$

• Champ électrique total

$$\tilde{E} = \tilde{E}_r + \tilde{E}_v$$

$$= E_{0r}\, e^{-j\frac{8\pi}{3}\cdot 10^6 z}\, e^{j 8\pi\cdot 10^{14} t}\,\hat{x} + E_{0v}\, e^{-j 4\pi\cdot 10^6 z}\, e^{j 12\pi\cdot 10^{14} t}\,\hat{y}$$

b)

On se trouve dans le vide $\Rightarrow$

$$\eta_0 = 377\,\Omega$$

dans les 2 cas :

$$\hat{a}_{kr} = \hat{a}_{kv} = \hat{z}$$

d'où

$$\tilde{H} = \frac{\hat{z}}{\eta} \times \tilde{E}$$

$$= \frac{E_{0r}}{\eta_0}\, e^{-j\frac{8\pi}{3}\cdot 10^6 z}\, e^{j 8\pi\cdot 10^{14} t}\,\hat{y} - \frac{E_{0v}}{\eta_0}\, e^{-j 4\pi\cdot 10^6 z}\, e^{j 12\pi\cdot 10^{14} t}\,\hat{x}$$

c)

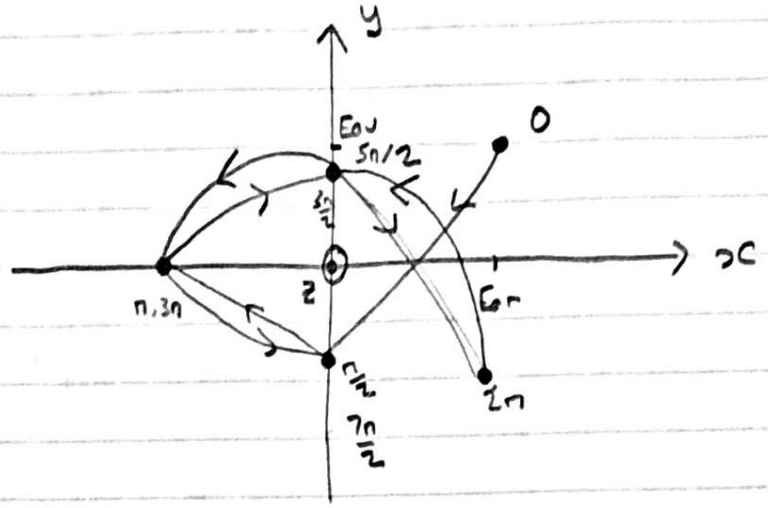
À $z = 0$, on suit l'évolution temporelle du champ total.

$\omega_r < \omega_v$, on trace 2 cycles de ω_r à $z = 0$

$$E(t) = E_{0r} \cos(\omega_r t)\,\hat{x} + E_{0v} \cos(\omega_v t)\,\hat{y}$$

$$\omega_v t = \omega_r t \left(\frac{\omega_v}{\omega_r}\right) = 1.5\,\omega_r t$$

ωt	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π	$7\pi/2$
E_x	E_{0r}	0	$-E_{0r}$	0	E_{0r}	0	$-E_{0r}$	0
E_y	E_{0v}	$-\frac{\sqrt{2}}{2} E_{0v}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2} E_{0v}$	$-E_{0v}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} E_{0v}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2} E_{0v}$



d) On ne peut conclure, le sens apparaît changer

e) Un polarisateur orienté selon "x" coupera le laser vert :

$$\tilde{E} = \tilde{E_r}$$
$$= E_{0r}\, e^{-j\frac{8\pi}{2}\cdot 10^6 z}\, e^{j 8\pi \cdot 10^{14} t}\, \hat{x}$$

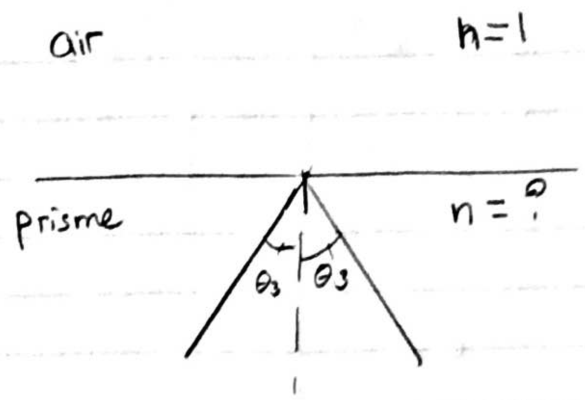
f) C'est une quantité temporelle. Lorsqu'il est question de polarisation elliptique, elle est définie pour une seule fréquence.

Problème 3

a) Réflexion totale interne

La démarcation provient de l'angle critique à partir duquel la lumière est entièrement réfléchie à l'interface prisme - liquide.

b)

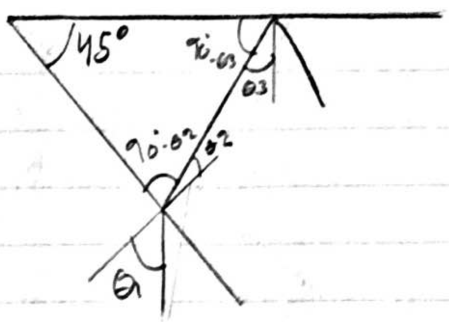


Il y a une démarcation à l'angle critique à l'interface prisme-air

$$\theta_c = \operatorname{asin}\left(\frac{n_{air}}{n_v}\right)$$

$$\theta_3 = \theta_c = \operatorname{asin}\left(\frac{1}{n_v}\right)$$

Un peu de géométrie :



$$180° = 45° + (90° - \theta_2) + (90° - \theta_3)$$

$$\theta_3 = 45° - \theta_2$$
$$\theta_2 = 45° - \theta_3$$

À l'interface air-prisme

$$n_{air} \sin\theta_1 = n_v \sin\theta_2$$
$$n_{air} \sin\theta_1 = n_v \sin(45° - \theta_3)$$
$$\frac{n_{air}}{n_v} \sin\theta_1 = \sin 45° \cos\theta_3 - \cos 45° \sin\theta_3$$
$$\frac{n_{air}}{n_v} \sin\theta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\theta_3 - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\theta_3$$

Or

$$\theta_3 = \text{asin}\left(\frac{n_{air}}{n_v}\right)$$

$$\frac{n_{air}}{n_v} = \sin\theta_3$$

D'où

$$\sin\theta_3 \sin\theta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta_3 - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta_3$$

$$\sin\theta_3\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \sin\theta_1\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta_3$$

$\theta_1 = 2°$

$$\tan\theta_3 = \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2 + \sin 2°}$$

$$= 0{,}953$$

$$\theta_3 = 43{,}62°$$

d'où

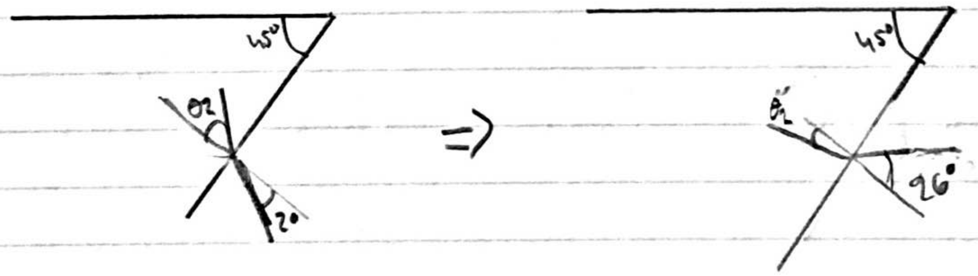
$$\sin\theta_3 = n_{air}/n_v$$

$$n_v = n_{air}/\sin\theta_3$$

$$= 1{,}45$$

c)

La démarcation se déplace de 28° anti-horaire :



$\underline{\underline{\theta_2}}$

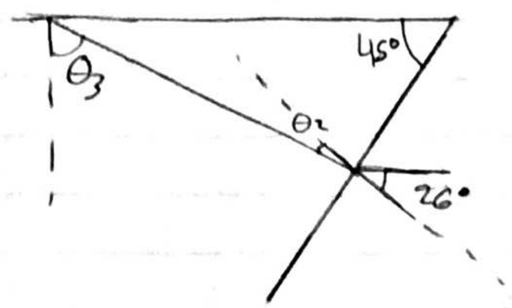
$$n_{air}\sin 26° = n_v \sin\theta_2$$

$$\sin\theta_2 = \frac{1}{1{,}45}\sin 26°$$

$$= 0{,}3023$$

$$\theta_2 = 17{,}6°$$

$\underline{\theta_3}$



$$180° = 45° + (90° + \theta_2) + (90° - \theta_3)$$

$$\theta_3 = 45° + \theta_2$$
$$= 45° + 17{,}6°$$
$$= 62{,}6°$$

$\underline{n_L}$

$$\sin\theta_3 = n_L / n_v$$
$$n_L = n_v \sin\theta_3$$
$$= 1{,}45 \sin 62{,}6°$$
$$= 1{,}29$$

d) Quelques longueurs d'onde (au moins une)

Problème 4

a) $$\Gamma_{av} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} = \frac{1 - 1{,}5}{1 + 1{,}5}$$
$$= \frac{-0{,}5}{2{,}5} = -0{,}2$$

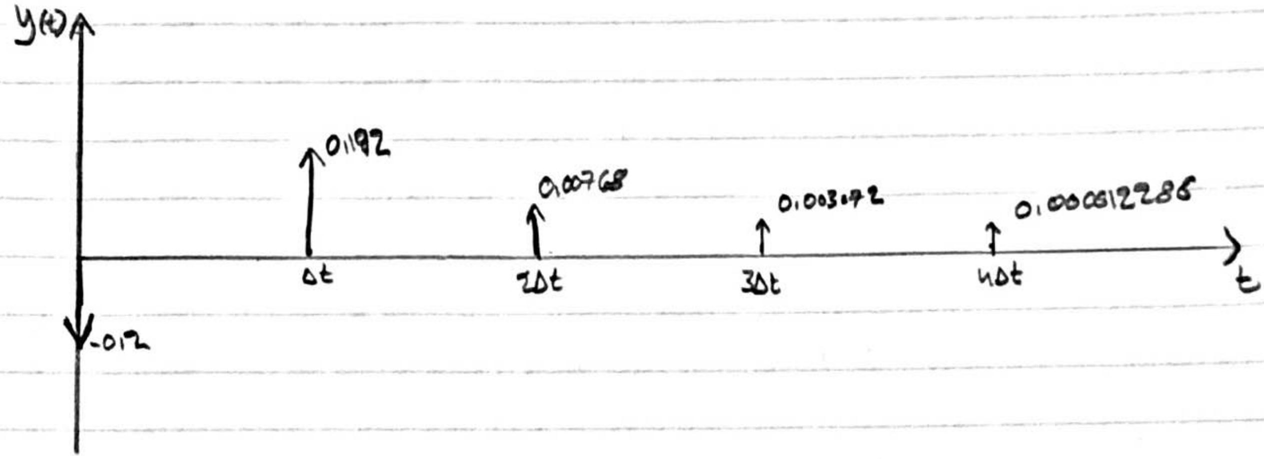
$$\tau_{av} = 1 + \Gamma = 1 - 0{,}2$$
$$= 0{,}8$$

b) $$\Gamma_{va} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} = \frac{1{,}5 - 1}{1{,}5 + 1} = \frac{0{,}5}{2{,}5}$$
$$= 0{,}2$$

$$\tau_{av} = 1 + \Gamma = 1 + 0{,}2$$
$$= 1{,}2$$

c)

# imp	coeff	val.
1	Γ_{av}	-0.2
2	$\tau_{av}\Gamma_{va}\tau_{va}$	0.192
3	$\tau_{av}\Gamma_{va}^{3}\tau_{va}$	0.00768
4	$\tau_{av}\Gamma_{va}^{5}\tau_{va}$	0.003072
5	$\tau_{av}\Gamma_{av}^{7}\tau_{va}$	0.000012288



d) On se trouve dans le verre, alors :

$$V_p = \frac{c}{1.5} = 2 \cdot 10^8 \, m/s$$

entre chaque impulsion, l'onde fait un aller-retour d'une longueur de 2cm au total

$$\Delta z = 0.02m$$

alors l'espacement temporel :

$$\Delta t = \frac{\Delta z}{V_p}$$
$$= 0.02 / 2.10^8$$
$$= 0.1ns$$

e) h(t) est une exponentielle décroissante échantillonnée On s'attend alors à un 1er périodisé. Par contre, la première impulsion observée ne marche pas avec l'exponentielle. Ainsi, il doit avoir une constante dans le spectre

La sortie en transmission est un 1er ordre périodisé, alors la conservation d'énergie implique que la sortie en réflexion est 1 moins un 1er ordre périodisé de telle sorte que la somme des deux sorties (réflexion et transmission) a un module unitaire.