

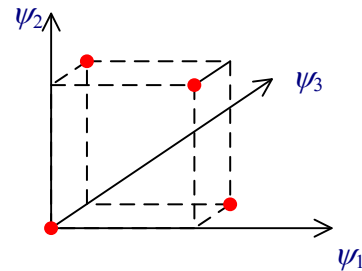
*Mercredi 9 mars 2016; Durée: 13h30 à 15h20*

*Deux feuilles de documentation fournies; une calculatrice permise*

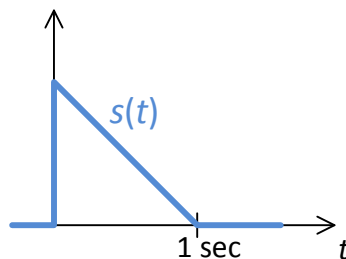
### Problème 1 (20 points sur 100)

- A. (5 points) Est-ce que la modulation suivante est une modulation orthogonale? Justifiez votre réponse.

$$\begin{aligned}s_1 &= [0 \quad 0 \quad 0] \sqrt{E_b} \\ s_2 &= [4/3 \quad 4/3 \quad 0] \sqrt{E_b} \\ s_3 &= [0 \quad 4/3 \quad 2/3] \sqrt{E_b} \\ s_4 &= [4/3 \quad 0 \quad 2/3] \sqrt{E_b}\end{aligned}$$



- B. (5 points) Dans quelles circonstances sont les récepteurs ML (maximum likelihood ou plus vraisemblable) et MAP (maximum a posteriori) équivalents?
- C. (5 points) Donnez une équation et une esquisse de la réponse impulsionnelle  $h(t)$  pour le filtre adapté au signal suivant



- D. (5 points) Donnez une esquisse du récepteur avec corrélateur pour le signal du problème 1C qui est équivalent au récepteur de filtre adapté.

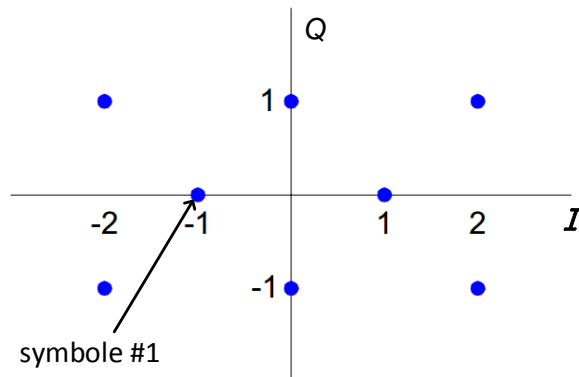
**Problème 2 (15 points sur 100)**

E. (15 points) Complétez la table suivante dans votre cahier bleu.

Format de modulation	Dimensionnalité de l'espace du signal	Symboles d'énergie égale (oui/non)	Modulation orthogonale (oui/non)
OOK			
BPSK			
16QAM			
8FSK			
DBPSK			

### Problème 3 (35 points sur 100)

Soit une modulation 8QAM **NON**-rectangulaire.



- A. (15 points) En supposant que tous les symboles ont la même probabilité *a priori*, donnez une esquisse de la région de décision (dans l'espace IQ) pour le symbole #1?

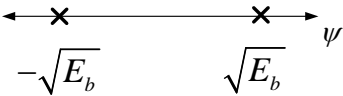
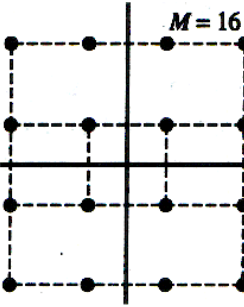
Pour les trois vecteurs reçus suivants, indiquez si le vecteur tombe dans la région de décision pour le symbole #1.

coordonnées IQ ( $r_1, r_2$ )	Choisir symbole 1? oui/non
$(-1.5, 0)$	
$(-0.5, .75)$	
$(-1, -0.95)$	

- B. (10 points) Donnez les coordonnées des symboles dans l'espace du signal.
- C. (10 points) Donnez la probabilité d'erreur du symbole en utilisant l'approximation venant de la borne d'union.

### Problème 4 (30 points sur 100)

Supposons un système avec un taux binaire de 1024 b/s et une impulsion Nyquist idéale pour les trois modulations suivantes. Supposons la détection cohérente pour le 16QAM et la détection non cohérente pour DBPSK et 8FSK.

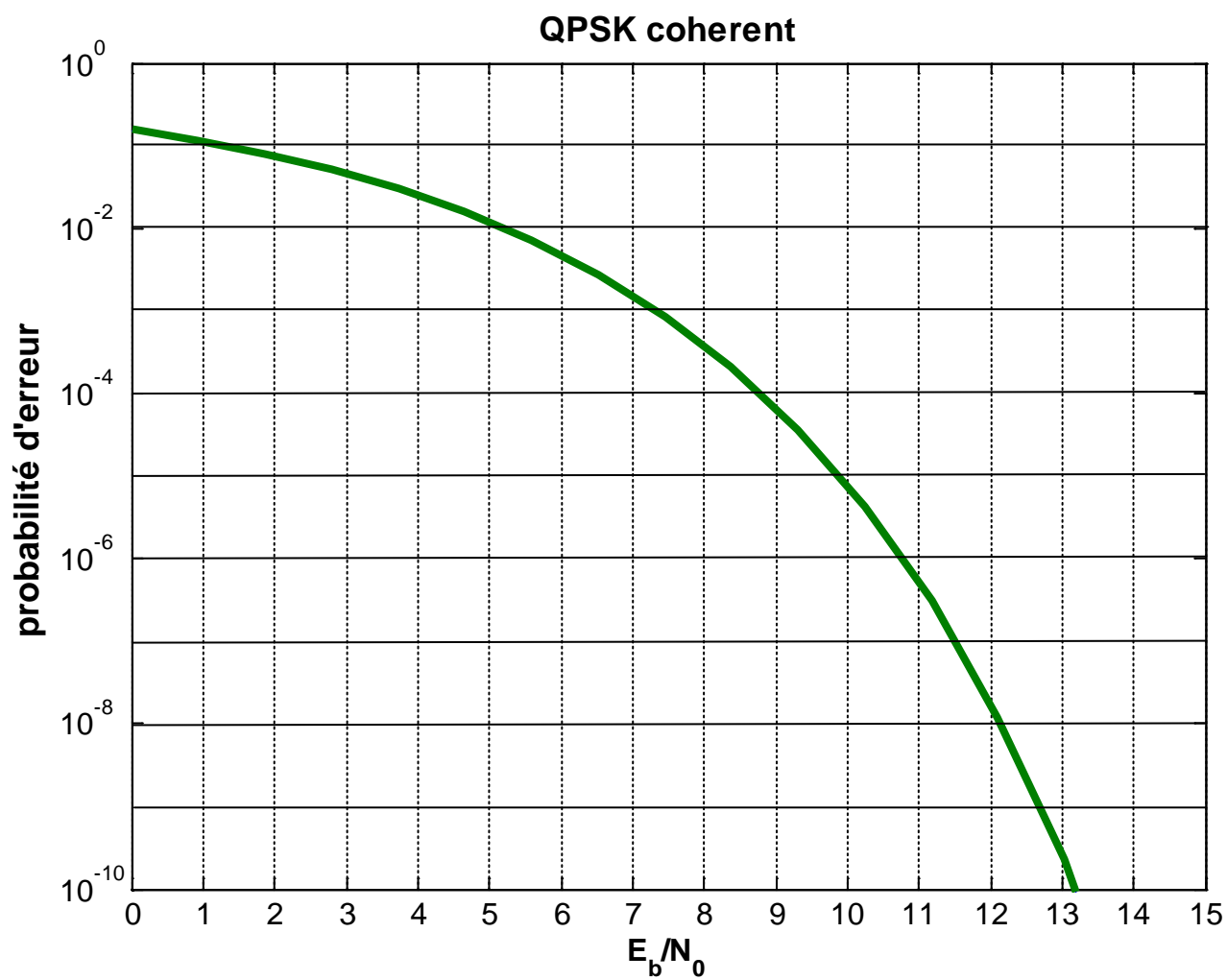
	$s_1 = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \sqrt{E_s}$ $s_2 = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \sqrt{E_s}$ $s_3 = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \sqrt{E_s}$ $s_4 = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \sqrt{E_s}$ $s_5 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0] \sqrt{E_s}$ $s_6 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0] \sqrt{E_s}$ $s_7 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0] \sqrt{E_s}$ $s_8 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1] \sqrt{E_s}$	
DBPSK	8FSK	16QAM

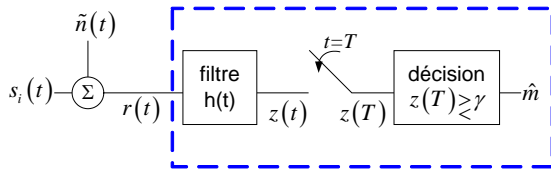
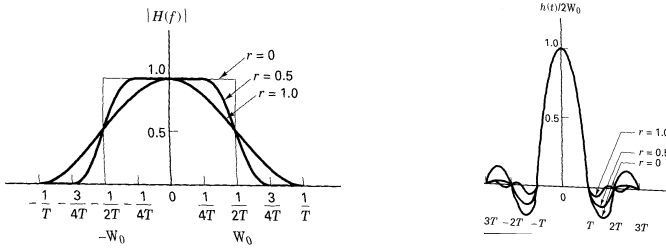
A. (15 points) Pour chaque modulation, donnez le suivant

- Largeur de bande totale occupée
- Une esquisse du spectre
- Efficacité spectrale en b/s/Hz

B. (15 points) Discutez les compromis de performance pour chaque modulation en utilisant la matrice suivante. Par exemple, indiquez quelle modulation est la meilleure/pire pour chaque critère, ou comment les modulations se distinguent pour un critère.

DBPSK	8FSK	16QAM	
			BER vs. $E_b/N_0$
			efficacité spectrale
			complexité



**Récepteur d'échantillonnage****MAP:**  $i$  qui maximise  $p(z|s_i) p(s_i)$  $i$  qui minimise  $\|\mathbf{r} - \mathbf{s}_i\|^2 - N_0 \ln P(\mathbf{s}_i)$  $P(\mathbf{s}_i)$  = probabilité a priori de symbole  $\mathbf{s}_i$ **ML:**  $i$  qui maximise  $p(z|s_i)$  $i$  qui minimise  $\|\mathbf{r} - \mathbf{s}_i\|^2$ **Raised cosine**  $v(t) = \frac{\sin(\pi t/T_s)}{\pi t/T_s} \frac{\cos(r\pi t/T_s)}{1 - 4r^2 t^2/T_s^2}$ **Énergie moyenne**

$$E_{\text{moy}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \|\mathbf{s}_i\|^2$$

$$= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M [\text{énergie du signal } i]$$

**Énergie par bit v. énergie par symbole**

$$E_b \log_2 M = E_s$$

**QAM****Conversion de l'espace I/Q vers espace du signal**

$$(\tilde{a}_n^I, \tilde{a}_n^Q) = \sqrt{\frac{M \cdot E_s}{\sum_{i=1}^M [(a_n^I)^2 + (a_n^Q)^2]}} (a_n^I, a_n^Q)$$

coordonnées,  
espace du  
signal

coordonnées,  
espace I/Q

**cas rectangulaire (carrée)  $M=L^2$** 

$$P_e = 2 \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{M}} \right) Q \left( \sqrt{\frac{3 \log_2 M}{(M-1)} \frac{E_b}{N_0}} \right) \quad d_{\min} = \sqrt{\frac{6 \log_2 L}{L^2 - 1}}$$

**Borne d'union**

$$P_e \approx \frac{2K}{M} Q \left( \frac{D_{\min}}{\sqrt{2N_0}} \right) = \frac{2K}{M} Q \left( d_{\min} \sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right)$$

$K$  est le nombre des paires des signaux séparés par la distance minimale  $D_{\min}$

**Distance minimale** dans l'espace du signal

$$D_{\min} = \min_{i \neq k} \|\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_k\| \quad \text{et} \quad d_{\min} = \frac{D_{\min}}{\sqrt{2E_b}}$$

**Pour une modulation orthogonale**

$$P_e(\text{bit}) = P_b = P_e(\text{symbol}) \frac{M/2}{M-1}$$

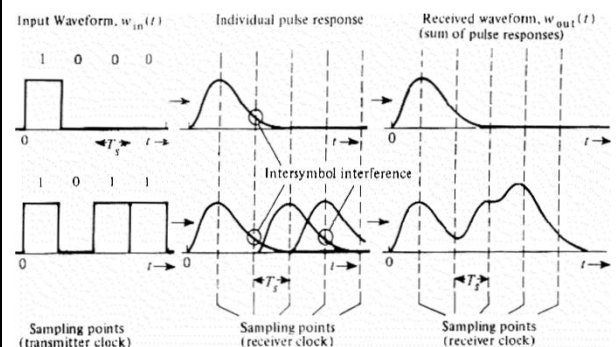
$$P_e(\text{BPSK}) = Q \left( \sqrt{\frac{2E_b}{N_0}} \right)$$

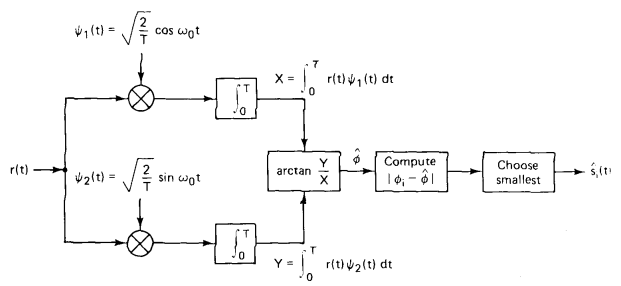
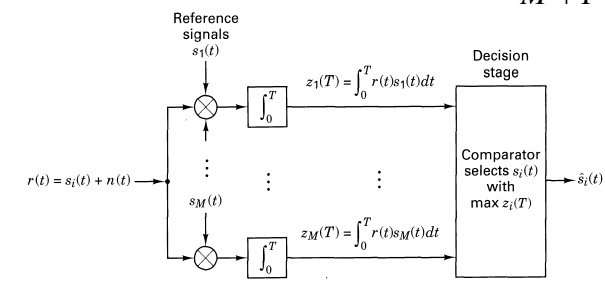
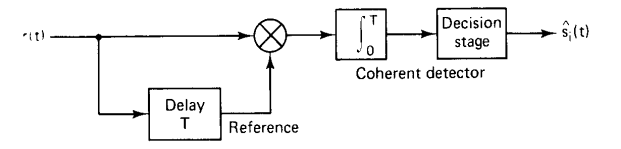
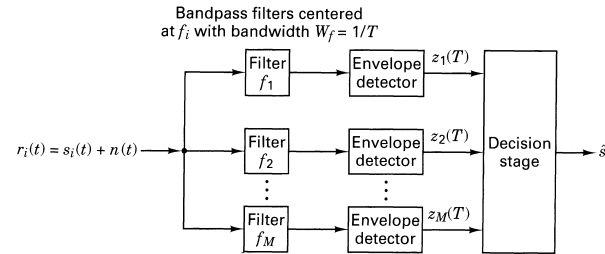
$$P_e(\text{OOK}) = Q \left( \sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right)$$

$$P_e(\text{QPSK}) \approx 2Q \left( \sqrt{\frac{2E_b}{N_0}} \right)$$

**Perte par rapport à QPSK**

$$d_{\min} = \sqrt{x} \sqrt{2} \quad \text{perte} = -10 \log_{10} x$$

**L'effet d'ISI**

<p><b>MPSK cohérent</b> <math>\eta = \log_2 M</math> <sup>†</sup></p>  $P_e(M) \approx 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}} \sin \frac{\pi}{M}\right)$ $= 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_b \log_2 M}{N_0}} \sin \frac{\pi}{M}\right)$	<p><b>MFSK cohérent</b> <math>\eta = \frac{2 \log_2 M}{M+1}</math> <sup>†</sup></p>  $P_e = (M-1)Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) = (M-1)Q\left(\sqrt{\frac{E_b \log_2 M}{N_0}}\right)$ <p><b>Séparation minimale</b> <math>1/2T_s</math></p>
<p><b>DPSK incohérent</b> <math>P_e = \frac{1}{2} e^{-E_b/N_0}</math></p>  <p>~1 dB de perte entre DPSK et BPSK</p>	<p><b>Processus Gram Schmidt</b></p> $\psi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{E_1}} s_1(t) \text{ où } E_1 \triangleq \int_0^T s_1^2(t) dt$ $\theta_2(t) \triangleq s_2(t) - \langle s_2(t), \psi_1(t) \rangle \psi_1(t)$ $E_2 \triangleq \int_0^T \theta_2^2(t) dt \quad \psi_2(t) = \frac{\theta_2(t)}{\sqrt{E_2}}$ <p>i. <math>\theta_i(t) = s_i(t) - \sum_{k=1}^{i-1} \langle s_i(t), \psi_k(t) \rangle \psi_k(t)</math></p> $E_i \triangleq \int_0^T \theta_i^2(t) dt \quad \psi_i(t) = \frac{\theta_i(t)}{\sqrt{E_i}}$
<p><b>Loi de Shannon</b></p> $C = W \log_2(1 + SNR) \quad SNR = \frac{E_b R_b}{N_0 W}$ <p><b>Relations trigonométriques</b></p> $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$ $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$ $\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - \sin^2 \theta$ $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$	<p><b>MFSK incohérent</b> <math>\eta = \frac{\log_2 M}{M}</math></p>  $P_e(BFSK) = \frac{1}{2} e^{-E_b/2N_0}$ <p>~1 dB de perte entre BFSK cohérente et incohérente</p> <p><b>Séparation minimale</b> <math>1/T_s</math></p>
<p><b>Efficacité spectrale</b></p> $\eta = \frac{R_b}{W} = \frac{1}{T_b} \frac{1}{W} \text{ bits/s}$	

<sup>†</sup> en supposant une impulsion Nyquist idéale

