GEL19962: Analyse des signaux

Examen 1 A2004 : Solutions

Département de génie électrique et de génie informatique

Question 1 (8 pts)

Partie A

Méthode 1

On remarque que

$$f(t) = \mathrm{Rect}\left(\frac{t-1}{2}\right) + \mathrm{Tri}\left(2(t-1)\right) . \tag{1}$$

Ainsi, connaissant les transformées de Fourier de $\mathrm{Rect}(t)$ et $\mathrm{Tri}(t)$, et en appliquant les propriétés de translation en temps et de dilatation, on obtient:

$$F(\omega) = \mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}\omega}\left[2\,\mathrm{Sa}(\omega) + \frac{1}{2}\mathrm{Sa}^2\left(\frac{\omega}{4}\right)\right] . \tag{2}$$

Méthode 2

On dérive deux fois $f(t)$ (voir les figures 1 (a) et 1 (b)) pour obtenir:

$$f''(t) = \delta'(t) + 2\delta(t-1/2) - 4\delta(t-1) + 2\delta(t-3/2) - \delta'(t-2) . \tag{3}$$

On a donc:

$$f''(t) \iff (\mathrm{j}\omega)^2 F(\omega) = \mathrm{j}\omega + 2\mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}\omega/2} - 4\mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}\omega} + 2\mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}3\omega/2} - \mathrm{j}\omega\mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}2\omega} , \tag{4}$$

$$F(\omega) = \frac{1-\mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}2\omega}}{\mathrm{j}\omega} + \frac{2\mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}\omega/2} - 4\mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}\omega} + 2\mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}3\omega/2}}{-\omega^2} \tag{5}$$

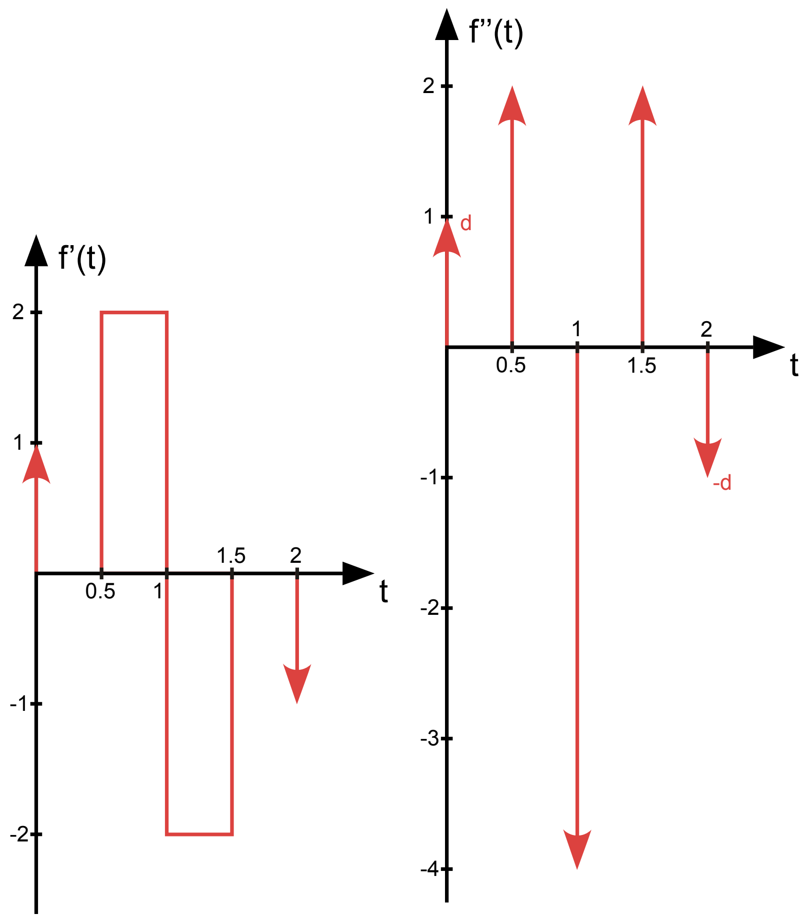
$$= \mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}\omega}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega} - \mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}\omega}}{\mathrm{j}\omega} + \frac{2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega/2} - 4 + 2\mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}\omega/2}}{-\omega^2}\right] , \tag{6}$$

$$= \mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}\omega}\left[2\,\mathrm{Sa}(\omega) + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{(1/2\,\mathrm{j})\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega/4} - \mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}\omega/4}\right)}{\omega/4}\right)^2\right] , \tag{7}$$

$$= \mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}\omega}\left[2\,\mathrm{Sa}(\omega) + \frac{1}{2}\mathrm{Sa}^2\left(\frac{\omega}{4}\right)\right] . \tag{8}$$

Partie B

Compte tenu de la présence du $\mathrm{Sa}(\omega)$ dans le résultat de a), et puisque $f(t)$ est discontinue, la décroissance asymptotique de $F(\omega)$ est en $\frac{1}{|\omega|}$.



(a) (b)

Fig. 1 – *(a) Dérivée première de $f(t)$ et (b) Dérivée seconde de $f(t)$.*

Question 2 (6 pts)

Partie A

Méthode 1

On remarque que la fonction $f(t) = |t|$ est égale à $t \cdot \mathrm{Sgn}(t)$. Ainsi, connaissant la transformée de Fourier de $\mathrm{Sgn}(t)$ et en appliquant la propriété de dérivation en fréquence, on obtient:

$$f(t) \iff \mathrm{j}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left(\mathscr{F}\{\mathrm{Sgn}(t)\}\right) = \mathrm{j}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left(\frac{2}{\mathrm{j}\omega}\right) = -\frac{2}{\omega^2}\,. \tag{9}$$

Méthode 2

On remarque que la dérivée de $f(t) = |t|$ est en fait $\mathrm{Sgn}(t)$. Ainsi,

$$\mathrm{j}\omega F(\omega) = \mathscr{F}\{\mathrm{Sgn}(t)\} = \frac{2}{\mathrm{j}\omega} \quad \text{et donc} \quad F(\omega) = -\frac{2}{\omega^2}\,. \tag{10}$$

Partie B

Méthode 1

On peut appliquer encore une fois la propriété de dérivation en fréquence en utilisant le résultat trouvé en a):

$$\mathscr{F}\left\{t^2 \cdot \mathrm{Sgn}(t)\right\} = \mathrm{j}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}F(\omega) = \mathrm{j}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left(-\frac{2}{\omega^2}\right) = \frac{4\,\mathrm{j}}{\omega^3}\,. \tag{11}$$

Méthode 2

Il est possible de dériver une ou deux fois $g(t) = t^2 \cdot \mathrm{Sgn}(t)$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(t^2 \cdot \mathrm{Sgn}(t)\right) = 2t \cdot \mathrm{Sgn}(t) = 2f(t)\,, \tag{12}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(t^2 \cdot \mathrm{Sgn}(t)\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(2t \cdot \mathrm{Sgn}(t)\right) = 2\,\mathrm{Sgn}(t)\,. \tag{13}$$

Après la première dérivation, on peut utiliser le résultat de la partie a):

$$\mathrm{j}\omega G(\omega) = 2F(\omega) \to G(\omega) = 2 \cdot \frac{-2}{\mathrm{j}\omega \cdot \omega^2} = \frac{4\,\mathrm{j}}{\omega^3}\,. \tag{14}$$

Après la seconde dérivation, on peut utiliser la transformée de Fourier de $\mathrm{Sgn}(t)$, qui est connue:

$$(\mathrm{j}\omega)^2 G(\omega) = 2 \cdot \mathscr{F}\{\mathrm{Sgn}(t)\} = 2 \cdot \frac{2}{\mathrm{j}\omega} \to G(\omega) = \frac{4}{(\mathrm{j}\omega)^3} = \frac{4j}{\omega^3}\,. \tag{15}$$

Note

Dans le numéro 2, l'application directe de la définition de la transformation de Fourier est plus complexe, dû aux limites $-\infty$ et ∞.

Question 3 (16 pts)

Partie A

Dans un premier temps, on demande quelle est la puissance totale du signal $f(t)$. Le spectre de ce signal, $F(\omega)$, étant connu, il est possible de déduire plusieurs informations importantes au sujet du signal. Ce spectre est présenté à la figure 2.

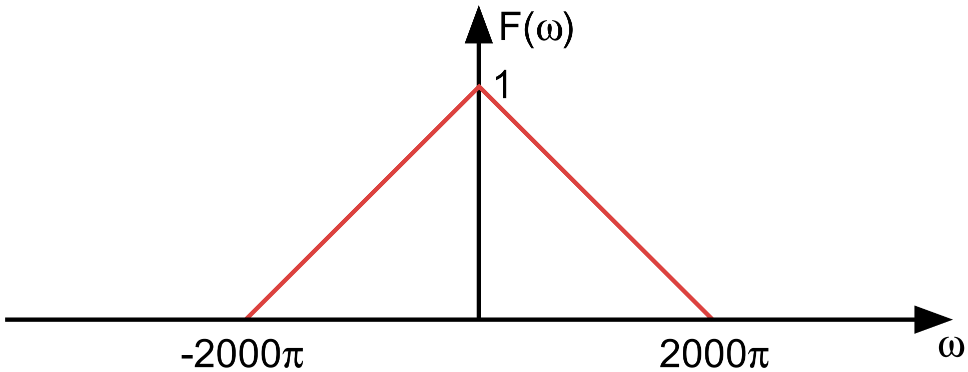


FIG. 2 – *Spectre $F(\omega)$ de la fonction $f(t)$.*

On doit remarquer immédiatement qu'il s'agit d'un signal non périodique. En effet, comme le spectre $F(\omega)$ est continu, le signal $f(t)$ doit être non périodique.

Gardant cette première observation on tête, il est maintenant important de se rappeler la définition conceptuelle de la puissance d'un signal. La puissance P est définie comme la moyenne temporelle de l'énergie du signal sur tout le temps. Comme le signal considéré est a énergie finie, si on fait la moyenne temporelle de cette énergie sur tout le temps, on doit avoir un résultat nul. En effet, l'énergie, qui est finie, se retrouve à être divisée par une valeur infinie.

Partie B

Dans un second temps, on nous demande de trouver l'énergie totale du signal $f(t)$. Suivant le théorème de Parseval, l'énergie est donnée par :

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 \, \mathrm{d}\omega \tag{16}$$

Étant donné que $F(\omega)$ est symétrique, on peut faire le calcul sur $\omega > 0$, puis multiplier le résultat par 2 pour avoir l'énergie totale. Ainsi, on calcule E en utilisant le spectre $F(\omega)$ connu:

$$E = \frac{1}{2\pi} 2 \int_{-2000\pi}^{0} \left(1 + \frac{\omega}{2000\pi}\right)^2 \mathrm{d}\omega \tag{17}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-2000\pi}^{0} \left[1 + \frac{2\omega}{2000\pi} + \frac{\omega^2}{(2000\pi)^2}\right] \mathrm{d}\omega \tag{18}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\omega + \frac{\omega^2}{2000\pi} + \frac{\omega^3}{3(2000\pi)^2}\right]_{-2000\pi}^{0} \tag{19}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[2000\pi - \frac{(2000\pi)^2}{2000\pi} + \frac{(2000\pi)^3}{3(2000\pi)^2}\right] \tag{20}$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{2000\pi}{3} = \frac{2000}{3} \tag{21}$$

Partie C

On définit maintenant la fonction $g(t)$ comme la fonction $f(t)$ multipliée avec un cosinus à une fréquence f_0 de 1 MHz. Cette fréquence f_0 correspond à une fréquence angulaire ω_0 de $2\pi \times 10^6$ rad/s [1], car $\omega = 2\pi f$. Dans cette situation, on se retrouve avec le spectre de la fonction originale $F(\omega)$ avec une amplitude diminuée de moitié et décalé à $\pm\omega_0$. Ceci peut-être démontré de façon analytique en décomposant le cosinus en termes exponentiels (relation de Euler).

$$G(\omega) = \mathscr{F}\{g(t)\} \tag{22}$$

$$= \mathscr{F}\{f(t)\cos(\omega_0 t)\} \tag{23}$$

$$= \mathscr{F}\left\{f(t)\frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{+\,\mathrm{j}\omega_0 t} + \mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}\omega_0 t}\right]\right\} \tag{24}$$

$$= \mathscr{F}\left\{\frac{1}{2}\left[f(t)\mathrm{e}^{+\,\mathrm{j}\omega_0 t} + f(t)\mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}\omega_0 t}\right]\right\} \tag{25}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\mathscr{F}\left\{f(t)\mathrm{e}^{+\,\mathrm{j}\omega_0 t}\right\} + \mathscr{F}\left\{f(t)\mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}\omega_0 t}\right\}\right] \tag{26}$$

En utilisant la propriété de la translation en fréquence de la transformé de Fourier, on déduit $G(\omega)$:

$$G(\omega) = \frac{1}{2}\left[F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0)\right] \tag{27}$$

$$= \frac{F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0)}{2} \tag{28}$$

Il était aussi demandé de tracer le graphique de $G(\omega)$. Celui-ci est présenté à la figure 3. Sur ce graphique, on remarque, en plus de la forme générale, l'amplitude de $G(\omega)$ et le décalage à $\pm\omega_0$.

Note : L'opération effectuée ici, de multiplier $f(t)$ par un cosinus, est en fait une modulation AM (*Amplitude Modulation*). Le signal $g(t)$ est la porteuse (le cosinus) modulée par $f(t)$. On appelle $f(t)$ le signal modulant et $g(t)$ le signal modulé. Dans une application de radio, un fort gain serait aussi ajouté au signal $g(t)$.

1. Toute au long de cette question, incluant dans les figures, $\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi \times 10^6$ rad/s

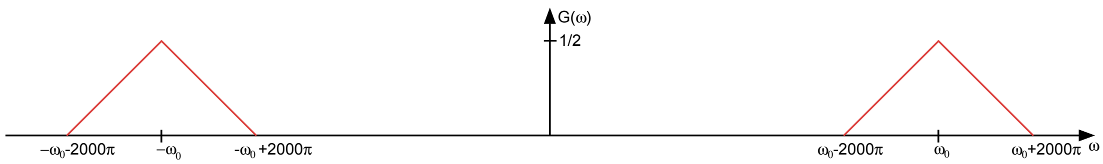


FIG. 3 – *Spectre $G(\omega)$ de la fonction $g(t)$.*

Partie D

On demande de calculer l'énergie totale du signal transmis, $g(t)$. Ce calcul peut se faire de la même façon qu'en B). On peut faire le calcul entre $-\omega_0 - 2000\pi$ et $-\omega_0$, puis multiplier par 4 (pour les deux côtés du triangles à $-\omega_0$ et pour la partie positive de $G(\omega)$) pour avoir l'énergie totale de $g(t)$. En réutilisant ce que nous avons déjà fait en B), on a alors:

$$\begin{aligned} E &= 4\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_0-2000\pi}^{-\omega_0}\left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{(\omega+\omega_0)}{2000\pi}\right)\right]^2 \mathrm{d}\omega & (29)\\ &= 4\frac{1}{2\pi}\int_{-2000\pi}^{0}\frac{1}{4}\left[\left(1+\frac{\omega}{2000\pi}\right)\right]^2 \mathrm{d}\omega & (30)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-2000\pi}^{0}\left[\left(1+\frac{\omega}{2000\pi}\right)\right]^2 \mathrm{d}\omega & (31)\\ &= \frac{1}{2}\times\frac{2000}{3} = \frac{2000}{6} & (32)\end{aligned}$$

On constate que l'énergie du signal transis $g(t)$ est la moitié de celle de $f(t)$. Bien que ce résultat soit contre-intuitif, on le comprend rapidement en observant le graphique de $G(\omega)$, présenté à la figure 3. On remarque que le signal est divisé en deux parties d'amplitude 2 fois plus faible que celle du signal original. Comme la puissance dépend du carré du signal, on aura deux fois 1/2 au carré, soit deux fois 1/4. L'énergie de g(t) sera donc la moitié de celle de $f(t)$. Ceci s'explique aussi par le fait que le cosinus ait une valeur efficace (RMS) de 1/2.

Partie E

On multiplie le signal $g(t)$ par le même cosinus que en C) pour obtenir $h(t)$. Ainsi, la fonction $g(t)$ sera décalé elle aussi à $\pm\omega_0$. Étant donné que $g(t)$ contient de l'information déjà centrée sur $\pm\omega_0$, on doit se retrouver avec un contenu spectral à $\pm 2\omega_0$ et à $\omega = 0$. Ceci peut se démontrer mathématiquement de la même façon qu'en C).

$$
\begin{aligned}
H(\omega) &= \mathscr{F}\{h(t)\} && (33)\\
&= \mathscr{F}\{g(t)\cos(\omega_0 t)\} && (34)\\
&= \mathscr{F}\left\{g(t)\frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{+\,\mathrm{j}\omega_0 t} + \mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}\omega_0 t}\right]\right\} && (35)\\
&= \mathscr{F}\left\{\frac{1}{2}\left[g(t)\mathrm{e}^{+\,\mathrm{j}\omega_0 t} + g(t)\mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}\omega_0 t}\right]\right\} && (36)\\
&= \mathscr{F}\left\{\frac{1}{4}\left[f(t)\left(\mathrm{e}^{+\,\mathrm{j}\omega_0 t} + \mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}\omega_0 t}\right)\mathrm{e}^{+\,\mathrm{j}\omega_0 t} + f(t)\left(\mathrm{e}^{+\,\mathrm{j}\omega_0 t} + \mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}\omega_0 t}\right)\mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}\omega_0 t}\right]\right\} && (37)\\
&= \mathscr{F}\left\{\frac{1}{4}\left[f(t)\left(\mathrm{e}^{+\,\mathrm{j}2\omega_0 t} + 1\right) + f(t)\left(1 + \mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}2\omega_0 t}\right)\right]\right\} && (38)\\
&= \mathscr{F}\left\{\frac{1}{4}\left[f(t)\left(\mathrm{e}^{+\,\mathrm{j}2\omega_0 t} + \mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}2\omega_0 t} + 2\right)\right]\right\} && (39)\\
&= \frac{1}{4}\mathscr{F}\left\{f(t)\mathrm{e}^{+\,\mathrm{j}2\omega_0 t}\right\} + \frac{1}{4}\mathscr{F}\left\{f(t)\mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}2\omega_0 t}\right\} + \frac{1}{2}\mathscr{F}\{f(t)\} && (40)\\
&= \frac{F(\omega-2\omega_0)}{4} + \frac{F(\omega+2\omega_0)}{4} + \frac{F(\omega)}{2} && (41)
\end{aligned}
$$

Ici, le calcul a été fait au long. On aurait aussi pu simplifier le problème à l'aide de l'identité trigonométrique donnée:

$$
\begin{aligned}
H(\omega) &= \mathscr{F}\{h(t)\} && (42)\\
&= \mathscr{F}\{g(t)\cos(\omega_0 t)\} && (43)\\
&= \mathscr{F}\left\{f(t)\cos^2(\omega_0 t)\right\} && (44)\\
&= \mathscr{F}\left\{\frac{1}{2}f(t)\left(\cos(2\omega_0 t) + 1\right)\right\} && (45)\\
&= \frac{1}{2}\mathscr{F}\{f(t)\cos(2\omega_0 t)\} + \frac{1}{2}\mathscr{F}\{f(t)\} && (46)\\
&= \frac{1}{2}\mathscr{F}\left\{\frac{1}{2}f(t)\left(\mathrm{e}^{+\,\mathrm{j}2\omega_0 t} + \mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}2\omega_0 t}\right)\right\} + \frac{1}{2}\mathscr{F}\{f(t)\} && (47)\\
&= \frac{F(\omega-2\omega_0)}{4} + \frac{F(\omega+2\omega_0)}{4} + \frac{F(\omega)}{2} && (48)
\end{aligned}
$$

Ce résultat est illustré à la figure 4.

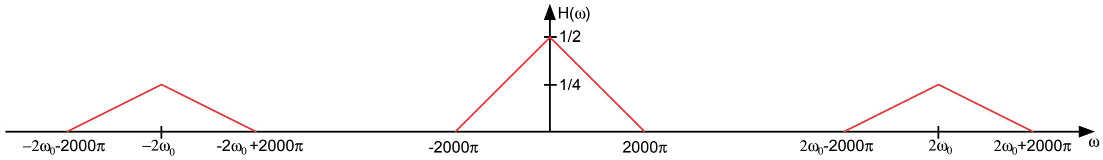


Fig. 4 – *Spectre $H(\omega)$ de la fonction $h(t)$.*

On doit remarquer ici que l'amplitude de $H(\omega)$ est de $1/4$ à $\pm 2\omega_0$ et $1/2$ près de $\omega = 0$.

Note : Cette opération de remodulation illustre en fait le processus de démodulation AM. En remodulant le signal AM à la fréquence de la porteuse, on décale l'information spectrale vers le double de la fréquence de la porteuse et vers 0. Cette information spectrale, autour de $\omega = 0$, en bande de base, est une copie presque exacte du signal modulant original $f(t)$, mais avec la moitié de l'amplitude. Le point suivant, F), aborde la question de filtrage nécessaire pour avoir une démodulation AM complète. En effet, le contenu spectral à $\pm 2\omega_0$ est non désiré et devra être éliminé. Ces notions de modulation seront reprises en détail à la fin du cours d'Analyse des signaux et dans le cours de Systèmes de communication.

Partie F

On demande la plage de fréquence angulaire que l'on peut avoir comme fréquence de coupure du filtre passe-bas qui nous laissera uniquement le signal autours de $\omega = 0$. Comme la portion du spectre autours de $\omega = 0$ se termine à $\omega = 2000\pi$, ceci sera le minium de la plage. De plus, comme la copie de ce contenu spectral autour de $2\omega_0$ débute à $2\omega_0 - 2000\pi$, ceci sera le maximum de la plage de fréquence de coupure acceptable pour ne pas avoir d'artéfact provenant de cette copie du spectre dans les hautes fréquences.

Ainsi, la plage acceptable de ω_f sera de 2000π à $2\omega_0 - 2000\pi$.

Partie G

Finalement, on demande l'énergie totale du signal $v(t)$. Procédant de la même façon qu'en B), on trouve :

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2\pi} 2 \int_{-2000\pi}^{0} \left[\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\omega}{2000\pi}\right)\right]^2 \mathrm{d}\omega && (49)\\
&= \frac{1}{2\pi} 2 \frac{1}{4} \int_{-2000\pi}^{0} \left[1 + \frac{\omega}{2000\pi}\right]^2 \mathrm{d}\omega && (50)\\
&= \frac{1}{4\pi} \int_{-2000\pi}^{0} \left[1 + \frac{2\omega}{2000\pi} + \frac{\omega^2}{(2000\pi)^2}\right] \mathrm{d}\omega && (51)\\
&= \frac{1}{4\pi} \left[\omega + \frac{\omega^2}{2000\pi} + \frac{\omega^3}{3(2000\pi)^2}\right]_{-2000\pi}^{0} && (52)\\
&= \frac{1}{4\pi} \left[2000\pi - \frac{(2000\pi)^2}{2000\pi} + \frac{(2000\pi)^3}{3(2000\pi)^2}\right] && (53)\\
&= \frac{1}{4\pi} \frac{2000\pi}{3} = \frac{2000}{12} && (54)
\end{aligned}
$$

On aurait pu aussi observer que le spectre du signal $v(t)$ est le même que celui du signal $f(t)$ original, mais avec la moité de l'amplitude. En considérant $0.5\,F(\omega)$ dans l'équation 16, on déduit intuitivement que l'énergie de $v(t)$ est le quart de celle de $f(t)$.

Question 4 (10 pts)

Partie A

Dans un premier temps, on demande de calculer la transformée de Fourier (TF) de la fonction périodique $f(t)$ donnée. Ce calcul doit se faire en quatre étapes. D'abord, on doit identifier une fonction restreinte de $f(t)$ correspondant à une période, ensuite on doit trouver la TF de cette fonction. Par la suite, connaissant la période fondamentale du signal périodique, on peut trouver ses coefficients de Fourier et, enfin, sa transformée de Fourier.

Une inspection du signal $f(t)$ nous permet de trouver que la période T_0 est égale à 1, entre $t = -0.5$ et $t = 0.5$. Notre fonction restreinte $f_r(t)$ sera donc $f_r(t) = 2t$, ce qui est illustré à la figure 5.

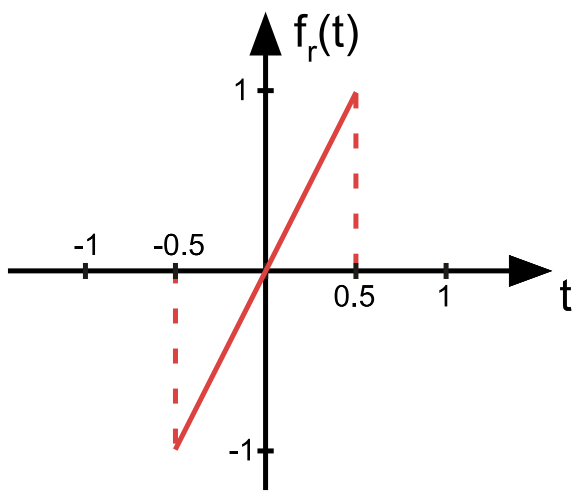


Fig. 5 – *Fonction restreinte $f_r(t)$ de la fonction périodique $f(t)$ dont on cherche la transformée de Fourier.*

Une fois que nous avons $f_r(t)$, nous pouvons trouver sa transformée de Fourier. Ici, plusieurs méthodes sont acceptable. La méthode présentée est celle de la dérivation. À la fin de la partie A, la même solution sera présenté utilisant la fonction d'analyse.

Pour trouver la transformée de $f_r(t)$ par dérivation, on doit d'abord trouver sa dérivée première (figure 6 (a)) et sa dérivée seconde (figure 6 (b)). Une fois celle-ci identifiée, on peut trouver sa TF pour ensuite, utilisant la propriété de la dérivation, trouver la TF de la fonction restreinte.

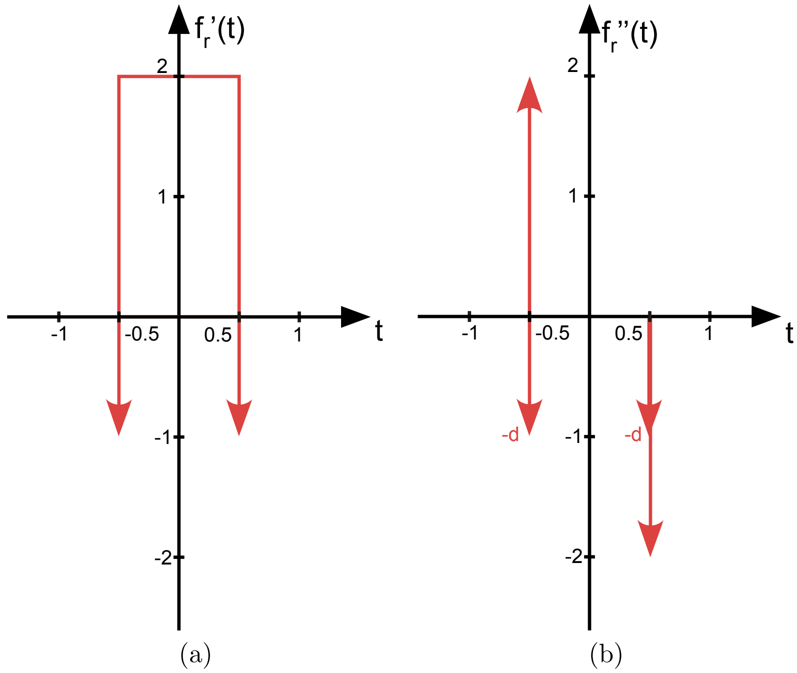


FIG. 6 – *(a) Première dérivée de $f_r(t)$ et (b) dérivée seconde de $f_r(t)$.*

$$f_r''(r) = -\delta'(t+0.5) + 2\delta(t+0.5) - 2\delta(t-0.5) - \delta'(t-0.5) \tag{55}$$

$$\ddot{F}_r(\omega) = -\mathrm{j}\omega \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\omega}{2}} + 2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\omega}{2}} - 2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega}{2}} - \mathrm{j}\omega \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega}{2}} \tag{56}$$

$$\ddot{F}_r(\omega) = -\mathrm{j}\omega\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\omega}{2}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega}{2}}\right) + 2\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\omega}{2}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega}{2}}\right) \tag{57}$$

$$F_r(\omega) = \frac{-\mathrm{j}\omega\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\omega}{2}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega}{2}}\right)}{(\mathrm{j}\omega)^2} + \frac{2\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\omega}{2}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega}{2}}\right)}{(\mathrm{j}\omega)^2} \tag{58}$$

$$F_r(\omega) = \frac{-\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\omega}{2}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega}{2}}\right)}{\mathrm{j}\omega} + \frac{2\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\omega}{2}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega}{2}}\right)}{(\mathrm{j}\omega)^2} \tag{59}$$

Maintenant que nous avons $F_r(\omega)$, il est possible de trouver les coefficients de Fourier. Pour cela nous devons connaître T_0, que nous avons déjà, et $\omega_0 = 2\pi/T_0 = 2\pi$. Nous avons alors :

$$F_n(n) = \frac{F_r(n\omega_0)}{T_0} \tag{60}$$

$$F_n(n) = \frac{-\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{n2\pi}{2}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{n2\pi}{2}}\right)}{\mathrm{j}n2\pi} + \frac{2\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{n2\pi}{2}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{n2\pi}{2}}\right)}{(\mathrm{j}n2\pi)^2} \tag{61}$$

$$F_n(n) = \frac{-\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\pi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\pi}\right)}{\mathrm{j}n2\pi} + \frac{2\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\pi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\pi}\right)}{(\mathrm{j}n2\pi)^2} \tag{62}$$

$$F_n(n) = \frac{-2\cos(n\pi)}{\mathrm{j}n2\pi} - \frac{4\,\mathrm{j}\sin(n\pi)}{(n2\pi)^2} \tag{63}$$

$$F_n(n) = \frac{\mathrm{j}\cos(n\pi)}{n\pi} \tag{64}$$

Comme la valeur moyenne de f(t) est nulle, nous n'avons pas de DC. Alors $F_n(0) = 0$. En conséquent, il est possible de dire que :

$$F_n(n) = \frac{(-1)^n\,\mathrm{j}}{n\pi}, \quad \text{pour } n \neq 0. \tag{65}$$

Enfin, utilisant la relation entre les coefficients de Fourier et la transformation de Fourier, on trouver la TF de la fonction périodique :

$$F(\omega) = 2\pi \sum_{\substack{-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty} F(n)\delta(\omega - n\omega_0) \tag{66}$$

$$F(\omega) = 2\pi \sum_{\substack{-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,\mathrm{j}}{n\pi}\delta(\omega - n2\pi) \tag{67}$$

Parmis les autres méthodes pour résoudre ce problème, il était possible d'employer l'intgrale de Fourier pour trouver la transformé de Fourier $F_r(\omega)$ ou encore pour trouver directement $F_n(n)$. En posant $f_r(t) = 2t$ pour $t \in [-0.5{,}0.5]$, on a:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t = 2\int_{-0.5}^{+0.5} t\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t \tag{68}$$

$$= 2\left[\frac{t\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}}{-\mathrm{j}\omega} - \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}}{(-\mathrm{j}\omega)^2}\right]\Bigg|_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \tag{69}$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega}{2}}}{-\mathrm{j}\omega} + \frac{\mathrm{e}^{+\mathrm{j}\frac{\omega}{2}}}{-\mathrm{j}\omega} - \frac{2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega}{2}}}{(-\mathrm{j}\omega)^2} + \frac{2\mathrm{e}^{+\mathrm{j}\frac{\omega}{2}}}{(-\mathrm{j}\omega)^2} \tag{70}$$

$$= -\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega}{2}}}{\mathrm{j}\omega} - \frac{\mathrm{e}^{+\mathrm{j}\frac{\omega}{2}}}{\mathrm{j}\omega} + \frac{2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega}{2}}}{\omega^2} - \frac{2\mathrm{e}^{+\mathrm{j}\frac{\omega}{2}}}{\omega^2} \tag{71}$$

$$= -\frac{2}{\mathrm{j}\omega}\cos(\frac{\omega}{2}) - \frac{4\,\mathrm{j}}{\omega^2}\sin(\frac{\omega}{2}). \tag{72}$$

Bien que cette dernière méthode soit valide, elle est relativement longue et il est facile de faire des erreurs. Il est beaucoup plus facile de s'y perdre que dans la première méthode présentée.

Partie B

On demande quelle est la fraction de la puissance dans la portion DC du signal. Sans poser aucun calcul, on peut remarquer que la moyenne de $f(t)$ est nulle. Comme la valeur moyenne est nulle, il n'y a pas de composante continue. Par conséquent, la fraction de la puissance dans portion DC est de 0% ($P(0) = 0$).

Partie C

Pour finir, on demande de donner la puissance dans la première harmonique du signal périodique. Nous avons la relation suivante :

$$P_1 = |F_n(-1)|^2 + |F_n(+1)|^2 . \tag{73}$$

Alors, la puissance demandée sera, utilisant le résultat de A) :

$$P_1 = \left|\frac{(-1)^{(-1)}\,\mathrm{j}}{(-1)\pi}\right|^2 + \left|\frac{(-1)^{(+1)}\,\mathrm{j}}{(+1)\pi}\right|^2 \tag{74}$$

$$P_1 = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{\pi^2} = \frac{2}{\pi^2} \tag{75}$$