Mat 10364, Mathématiques de l'ingénieur I : corrigé de l'examen I

no 1 (20pts)

(a) (10) Calculer

$$\left|\frac{1-3\,i}{1+2\,i}-\frac{1+3\,i}{1-2\,i}\right|.$$

Le plus simple est de simplifier les 2 nombres

$$\frac{1-3\,i}{1+2\,i}=\frac{(1-3\,i)(1-2\,i)}{1+4}=\frac{1}{5}(-5-5\,i)=-1-i.$$

$$\frac{1+3\,i}{1-2\,i}=\frac{(1+3\,i)(1+2\,i)}{1+4}=\frac{1}{5}(-5+5\,i)=-1+i.$$

La différence est $-2\,i$ et le module est $|-2\,i|=2$.

(b) (10) Calculer la forme polaire de

$$z=\left(\frac{1}{i}\right)^{29}.$$

Puisque $i=\cos(\frac{\pi}{2})+\sin(\frac{\pi}{2})\,i$, on déduit de la formule de De Moivre

$$\left(\frac{1}{i}\right)^{29}=(\cos(\frac{-\pi}{2})+\sin(\frac{-\pi}{2})\,i)^{29}=\cos(\frac{-29\,\pi}{2})+\sin(\frac{-29\,\pi}{2})\,i.$$

Donc

$$\left(\frac{1}{i}\right)^{29}=\cos(\frac{-\pi}{2}-14\,\pi)+\sin(\frac{-\pi}{2}-14\pi)\,i=\cos(\frac{-\pi}{2})+\sin(\frac{-\pi}{2})\,i.$$

no 2 (20pts) Trouver la forme cartésienne des racines de l'équation

$$z^3=\left(\sqrt{3}+i\right)^6$$

et représentez ces racines dans le plan complexe.
On met d'abord $w=\sqrt{3}+i$ sous forme polaire.

$$|w|^2=3+1=4\Rightarrow|w|=2\Rightarrow\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2},\sin\theta=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{6}.$$

Donc

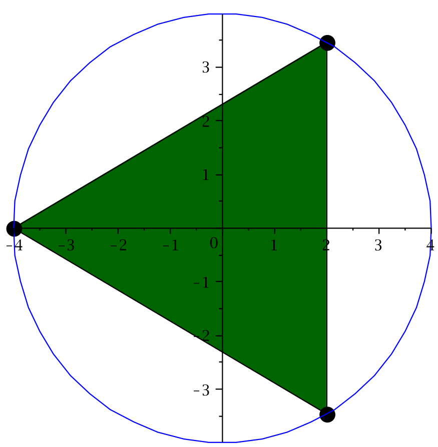
$$\zeta=w^6=2^6(\cos(6\,\frac{\pi}{6})+\sin(6\,\frac{\pi}{6})\,i)=2^6(\cos\pi+\sin\pi i).$$

Si $z = \rho(\cos\phi + \sin\phi\, i)$ l'égalité $z^3 = \zeta$ devient
$\rho^3 = 2^6$ donc $\rho = 2^2 = 4$ et

$$3\,\phi = \pi + 2\,k\pi \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{3} + 2\,k\frac{\pi}{3}, k = 0, 1, 2.$$

On obtient 3 racines

$$\begin{aligned} z_1 &= 4\,(\cos(\tfrac{\pi}{3}) + \sin(\tfrac{\pi}{3})\,i) = 4(\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\,i) = 2 + 2\sqrt{3}\,i \\ z_2 &= 4\,(\cos(\pi) + \sin(\pi)\,i) = 4(-1 + 0\,i) = -4 \\ z_3 &= 4\,(\cos(\tfrac{5\pi}{3}) + \sin(\tfrac{5\pi}{3})\,i) = 4(\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\,i) = 2 - 2\sqrt{3}\,i \end{aligned}$$



no 3 (20pts) On note $p(z)$ le polynôme de degré 4 donné par

$$p(z) = z^4 - 3\,z^3 - 9\,z^2 - 3\,z - 10.$$

(a) (5) Trouver la valeur de la constante a pour laquelle

$$p(z) = (z + 2)(z^3 + a\,z^2 + z - 5).$$

Il suffit d'identifier les coefficient de z^3 (ou de z^2)

$$\begin{aligned} \text{Coef de } z^3 : \quad 2 + a &= -3 \Rightarrow a = -5. \\ \text{Coef de } z^2 : \quad 1 + 2\,a &= -9 \Rightarrow a = -5. \end{aligned}$$

l'un servant de validation à l'autre.

(b) (7) Posons $q(z) = (z^3 + a\,z^2 + z - 5)$ où a est la valeur calculée en (a). Montrer que $q(-i) = 0$ et déduisez-en la valeur d'une autre racine de q sans faire de calcul.

$$q(z) = z^3 - 5\,z^2 + z - 5 \Rightarrow q(i) = i^3 - 5\,i^2 + i - 5 = -i + 5 + i - 5 = 0.$$

Puisque q est à coefficients réels $\bar{i} = -i$ doit aussi être une racine.

(c) (8) Quelles sont les quatre racines de $p(z)$. Justifier.

Nous connaissons déja 3 racines, $-2, i, -i$. La dernière racine cherchée est aussi une racine de q. Or puisque i et $-i$ sont des racines de q, celui-ci peut être divisé par $(z-i)(z+i) = z^2+1$. En divisant $q(z)$ par z^2+1 On a

$$q(z) = (z^2+1)(z-5),$$

donc la 4e racine est $z = 5$.

Alternative

On pourrait aussi diviser p par z^2+1 pour obtenir

$$r(z) = (z^2 - 3\,z - 10) = (z-5)(z+2).$$

no 4 (20pts)

(a) (10) Trouver la solution du problème d'équation différentielle

$$\begin{cases} y' - 2\,y^2\,\cos x &= 0 \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 1. \end{cases}$$

L'ED est séparable

$$\frac{dy}{y^2} = 2\,\cos x\,dx \Rightarrow -\frac{1}{y} = 2\sin x + C \Rightarrow y = -\frac{1}{C + 2\,\sin x}.$$

Pour trouver la constante, on utilise la C.I.

$$1 = -\frac{1}{C + 2\,\sin(\frac{\pi}{2})} = -\frac{1}{C+2} \Rightarrow C = -3.$$

(b) (10) Trouver la famille des trajectoires orthogonales à la famille de courbes

$$3\,y + \,a\,x = 2,$$

où a est un paramètre réel.

L'ED de la famille est obtenue comme suit

$$3\,y + \,a\,x = 2, \Rightarrow \frac{3\,y-2}{x} = -a \Rightarrow \frac{3\,x\,y' - (3\,y-2)}{x^2} = 0,$$

donc

$$y' = \frac{3\,y-2}{3\,x}.$$

L'ED de la famille orthogonale est donc

$$y' = -\frac{3\,x}{3\,y-2}.$$

On sépare et on intègre

$$\int (3\,y-2)\,dy = -\int 3\,x\,dx \Rightarrow \frac{3}{2}\,y^2 - 2\,y + \frac{3}{2}\,x^2 = C, \Rightarrow \frac{3}{2}(y-\frac{2}{3})^2 + \frac{3}{2}\,x^2 = D.$$

Il s'agit d'une famille de cercles centrés en $(0,-2)$.

no 5 (20pts) Pour étudier le contrôle de la température dans une pièce fermée et climatisée, on se propose d'utiliser un modèle de la forme

$$\frac{dT}{dt} = E(t) + A(t), \tag{1}$$

où $E(t)$ représente les échanges avec le milieur extérieur et $A(t)$ les apports du système de climatisation [1]. On désigne par T_e la température extérieure supposée constante et par T_r la température de référence du système de climatisation.

On fait les deux hypothèses suivantes

- L'échange de chaleur avec le milieu extérieur est directement proportionnel à la différence entre la température ambiante T et la température extérieure T_e, c'est-à-dire

$$E(t) = k_1(T_e - T).$$

- L'apport de chaleur du système de climatisation $A(t)$ est directement proportionnel à la différence entre la température ambiante T et la température de référence T_r, c'est-à-dire

$$A(t) = k_2(T_r - T).$$

(a) (4)Quel est le signe des constantes k_1 et k_2.

Si $T_e > T$ il y a un gain de chaleur venant de l'extérieur, i.e. $\Delta T = k_1(T_e - T) > 0$ donc $k_1 > 0$.

Si le thermostat détecte que la température ambiante est inférieure à la température choisie, c'est-à-dire $T_r > T$ le système fournit de la chaleur, i.e. $\Delta T = k_2(T_r - T) > 0$ ce qui exige que $k_2 > 0$.

(b) (6) Montrer que la solution générale de (1) est de la forme

$$T(t) = \frac{1}{B}\left(A - C\,e^{-B\,t}\right),$$

On peut récrire l'ED sous la forme

1. qui peuvent être négatifs si l'on raffraichit.

$$T'(t) = (k_1\,T_e + k_2\,T_r) - (k_1 + k_2)T = A - B\,T.$$

C'est une équation séparable

$$\frac{dT}{-A + B\,T} = -1\,dt \Rightarrow \frac{1}{B}\ln(|B\,T - A|) = -t + C.$$

On prend l'exponentielle des deux membres pour obtenir

$$B\,T - A = De^{-B\,t} \Rightarrow T = \frac{1}{B}(A + D\,e^{-B\,t}),$$

où A et B sont connus et D dépend de la température initiale.

(c) (5) Expliquer pourquoi, après un temps assez long la température se stabilisera autour de la valeur

$$T_\infty = \frac{k_1\,T_e + k_2\,T_r}{k_1 + k_2}.$$

Puisque

$$T = \frac{1}{B}(A + D\,e^{-B\,t}),$$

et que $\lim_{t\to\infty} e^{-B\,t} = 0$, on aura

$$T_\infty = \lim_{t\to\infty} T = \frac{A}{B} = \frac{k_1\,T_e + k_2\,T_r}{k_1 + k_2},$$

à cause des valeurs de A et B déterminées à la question (b).

(d) (5) Sous quelles conditions a-t-on $T_\infty = T_r$? Ceci est-il physiquement réaliste ? Expliquez.

Pour avoir $T_\infty = T_r$, il faut que

$$(k_1 + k_2)T_r = k_1\,T_e + k_2\,T_r \Rightarrow k_1 T_r = k_1 T_e \Rightarrow T_r = T_e.$$

Ceci est réaliste, si la température de référence est la température extérieure, dès que $T = T_e = T_r$ il n'y aura plus d'échange ou d'apport du système et la pièce sera thermiquement stable. Ceci ne changera que si T_e change !