13 décembre 2018 **GEL 1002**

Solutionnaire EXAMEN 2

Exercice I : *Mesures à l'oscilloscope*

1) On doit mesurer l'amplitude de chaque signal pour en déduire le module de l'impédance :

$$V = 5 \cdot 25 = 125\,V$$
$$I = 6 \cdot 1.5 = 9\ A$$
$$Z = \frac{V}{I} = 13.89\,\Omega$$

On mesure ensuite le retard entre le courant et la tension ainsi que la période des signaux :

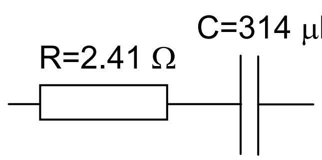
$$\Delta t = 2 \cdot 0.003 = 6\ ms$$
$$T = 9 \cdot 0.003 = 27\ ms$$

Le déphasage entre le courant et la tension est donc :

$$\varphi = \frac{\Delta t}{T} \cdot 360° = 80°$$

On remarque que le courant est en avance sur la tension. L'impédance a donc une réactance de nature capacitive. Son déphasage est négatif.

$$\overline{Z} = R + jX = Z \cdot \cos\varphi + j\,Z \cdot \sin\varphi = R - \frac{j}{C\omega} = 2.41 - j13.68\,\Omega = 13.89\,\Omega\ \angle -80°$$



2) La puissance est dissipée par la résistance :

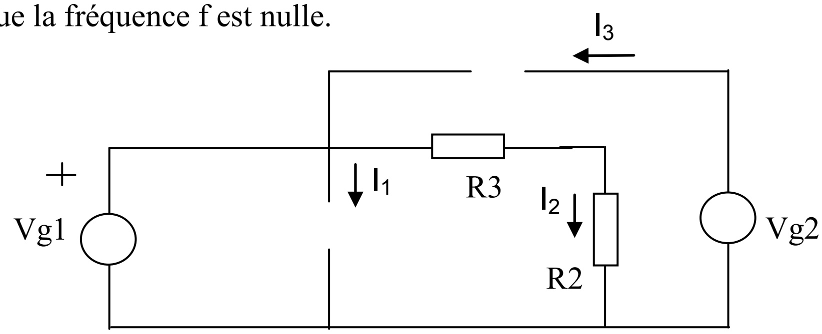
$$P = R \cdot I_{RMS}^2 = \frac{R}{2} \cdot I_{\max}{}^2 = 97.6\,W$$

3) La valeur de l'impédance lorsque la fréquence devient égale à 20 Hz :

$$\overline{Z} = R - \frac{j}{C \cdot 2\pi f} = 2.41 - j\frac{1}{314\ 10^{-6} \cdot 2\pi f} = 2.41 - j\,25.34\,\Omega = 25.45\,\Omega\ \ \angle -84.6°$$

Exercice II ***: Analyse d'un circuit par la méthode d'inspection (20 pts)***

1) On suppose que la fréquence f est nulle.



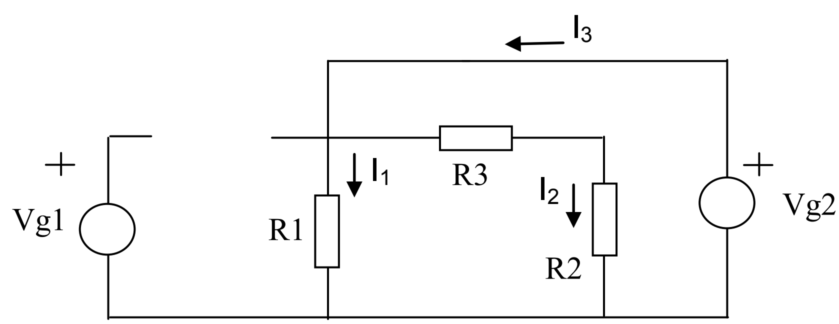
La tension de chaque générateur correspond à sa tension continue : $V_{g1} = 4V$ $V_{g2} = 2\,V$

Un condensateur se comporte comme un circuit ouvert à fréquence nulle et une inductance comme un court-circuit. On en déduit

$$I_1 = 0\,A$$

$$I_2 = \frac{V_{g1}}{R_3 + R_2} = \frac{4}{200+50} = 16\,mA$$

2) On suppose que la fréquence f est infinie
   Un condensateur se comporte comme un court-circuit à fréquence infinie et une inductance comme un circuit ouvert.
   Pour les générateurs, on doit considérer les valeurs continues et les composantes alternatives



$$I_{1-CA-RMS} = \frac{V_{g2-CA-RMS}}{R_1} = \frac{5}{\sqrt{2}\cdot 10} = 354\,mA$$

$$I_{1-RMS} = \sqrt{I^2_{1-DC} + I^2_{1-CA-RMS}} = I_{1-CA-RMS} = 354\,mA$$

Remarque : Il n'y a pas de composante continue de courant à rajouter pour la valeur efficace de I_1 (question 1 – branche capacitive)

$$I_{2-CA-RMS} = \frac{V_{g2}}{R_2 + R_3} = \frac{5}{\sqrt{2}\cdot 250} = 14.1\,mA$$

$$I_{2-RMS} = \sqrt{I^2_{2-DC} + I^2_{2-CA-RMS}} = \sqrt{16^2 + 14.1^2} = 21.3\,mA$$

Exercice III*: Travail de préparation du laboratoire 8 (15 pts)*

1) Si le pont est équilibré, on peut écrire:

$$V_{ab} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad V_{ac} = V_{bc}$$

On peut utiliser la règle du diviseur de tension pour trouver les relations entre les impédances

$$\frac{R_x + jL_x\omega}{R_x + jL_x\omega + R_3} = \frac{R_2}{R_2 + \left(R_4 // \frac{-j}{C\omega}\right)} \qquad \Leftrightarrow \qquad (R_x + jL_x\omega)\cdot\left[R_2 + \left(R_4 // \frac{-j}{C\omega}\right)\right] = (R_x + jL_x\omega + R_3)\cdot R_2$$

$$\Leftrightarrow \quad (R_x + jL_x\omega)\cdot\left(R_4 // \frac{-j}{C\omega}\right) = R_3 \cdot R_2$$

$$\Leftrightarrow \quad (R_x + jL_x\omega)\cdot\left(\frac{R_4}{1 + jR_4C\omega}\right) = R_3 \cdot R_2$$

$$\Leftrightarrow \quad (R_x + jL_x\omega)\cdot R_4 = R_3 \cdot R_2 \cdot (1 + jR_4C\omega)$$

On sépare la partie réelle de la partie imaginaire pour obtenir un système de deux équations à deux inconnues.

$$\begin{cases} R_x \cdot R_4 = R_3 \cdot R_2 \\ R_4 \cdot L_x\omega = R_2 \cdot R_3 \cdot R_4 \cdot C \cdot \omega \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} R_x = \dfrac{R_2 \cdot R_3}{R_4} \\ L_x = R_2 \cdot R_3 \cdot C \end{cases}$$

Une méthode équivalente consiste à égaler le produit des impédances diagonalement opposées. La démonstration est plus courte.

$$(R_x + jL_x\omega)\cdot\left(R_4 // \frac{-j}{C\omega}\right) = R_2 \cdot R_3 \qquad \Leftrightarrow \qquad (R_x + jL_x\omega)\cdot\left(\frac{R_4}{1 + jR_4C\omega}\right) = R_2 \cdot R_3$$

$$\begin{cases} R_x \cdot R_4 = R_3 \cdot R_2 \\ R_4 \cdot L_x\omega = R_2 \cdot R_3 \cdot R_4 \cdot C \cdot \omega \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} R_x = \dfrac{R_2 \cdot R_3}{R_4} \\ L_x = R_2 \cdot R_3 \cdot C \end{cases}$$

2) On utilise les formules précédentes pour l'application numérique :

$$\begin{cases} R_x = \dfrac{R_2 \cdot R_3}{R_4} = \dfrac{100 \cdot 2000}{40000} = 5\ \Omega \\ L_x = R_2 \cdot R_3 \cdot C = 100 \cdot 2000 \cdot 10^{-8} = 0.002 = 2mH \end{cases}$$

Exercice IV*: Tracé de diagrammes de Bode*

1)

$$\overline{H}(j\omega)=\frac{\overline{V}_c(j\omega)}{\overline{V}_g(j\omega)}=\frac{\frac{1}{jC\omega}}{R_L+jL\omega+\frac{1}{jC\omega}}=\frac{1}{1-LC\omega^2+jRC\omega}=\frac{1}{1-LC(2\pi f)^2+j2\pi RCf}$$

2)

$$\left\|\overline{H}\right\|=\frac{1}{\sqrt{\left(1-LC\left(2\pi f\right)^2\right)^2+\left(2\pi RCf\right)^2}} \qquad \angle\overline{H}=-\tan^{-1}\left(\frac{2\pi RCf}{1-LC\cdot\left(2\pi f\right)^2}\right)$$

3)

$$\left\|\overline{H}\right\|=\frac{1}{\sqrt{\left(1-7.24\,10^{-9}f^2\right)^2+7.85\,10^{-11}f^2}} \qquad \angle\overline{H}=-\tan^{-1}\left(\frac{8.86\,10^{-6}f}{1-7.24\,10^{-9}f^2}\right)$$

4)

$$f_n=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}=11755\ Hz$$

$$Gn_{dB}=20\cdot Log_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{\left(1-LC\left(2\pi f_n\right)^2\right)^2+\left(2\pi RCf_n\right)^2}}\right)=-20\cdot Log_{10}\left(2\pi RCf_n\right)=19.65\ dB$$

Il trouver Δf_{-3dB}, il faut trouver les fréquences f_1 et f_2 pour lesquelles on a un gain de Gn -3dB = 16.65 dB

$$G_{-3dB}=20\cdot Log_{10}\left\|\overline{H}\right\|=-10\cdot Log_{10}\left(\left(1-LC\left(2\pi f\right)^2\right)^2+\left(2\pi RCf\right)^2\right)=16.65\ dB$$

$$\left(1-LC\left(2\pi f\right)^2\right)^2+\left(2\pi RCf\right)^2=10^{-1.665}$$

$$\left(1-7.24\,10^{-9}f^2\right)^2+7.85\,10^{-11}f^2=0.02163$$

On pose $X=f^2$

$$\left(1-7.24\,10^{-9}X\right)^2+7.85\,10^{-11}X=0.02163$$

$$1-1.45\,10^{-8}X+5.24\,10^{-17}X^2+7.85\,10^{-11}X=0.02163$$

$$0.978-1.44\,10^{-8}X+5.24\,10^{-17}X^2=0=c+bX+aX^2$$

$$\Delta=b^2-4ac=2.28\,10^{-18}$$

$$X_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=1.52\,10^8 \qquad X_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=1.23\,10^8$$

On en déduit : $f_1=\sqrt{X_1}=\sqrt{1.52\,10^8}=12321\ Hz$ $\qquad f_2=\sqrt{X_2}=\sqrt{1.23\,10^8}=11093\ Hz$

Donc $\Delta f_{-3dB} = f_1 - f_2 = 1227 Hz$ et $Q = \frac{f_n}{\Delta f_{-3dB}} = \frac{11755}{1227} = 9.58$

5) Calcul pour chaque point

Gain en décibel : $G_{dB} = 20 \cdot Log_{10} \left\| \overline{H} \right\|$ Phase en degrés : $\phi = \Delta t \cdot f \cdot 360$

Fréquence (Hz)	*V_g (V)*	*Vc (V)*	*Δt (μs)*	*Gain (dB)*	*Déphasage (degrés)*
100	1	1.000	-1.41	0.0006	-0.051
5000	5	6.095	-1.72	1.721	-3.096
8000	4	7.386	-2.611	5.328	-7.52
11000	1	6.328	-9.615	16.03	-38.1
12000	0.25	2.187	-25.83	18.84	-111.6
13000	0.3	1.196	-32.62	12.01	-152.7
15000	0.8	1.246	-31.12	3.85	-168.1
20000	3	1.577	-24.25	-5.59	-174.7
100000	10	0.14	-4.98	-37.1	-179.3

Asymptotes et points caractéristiques

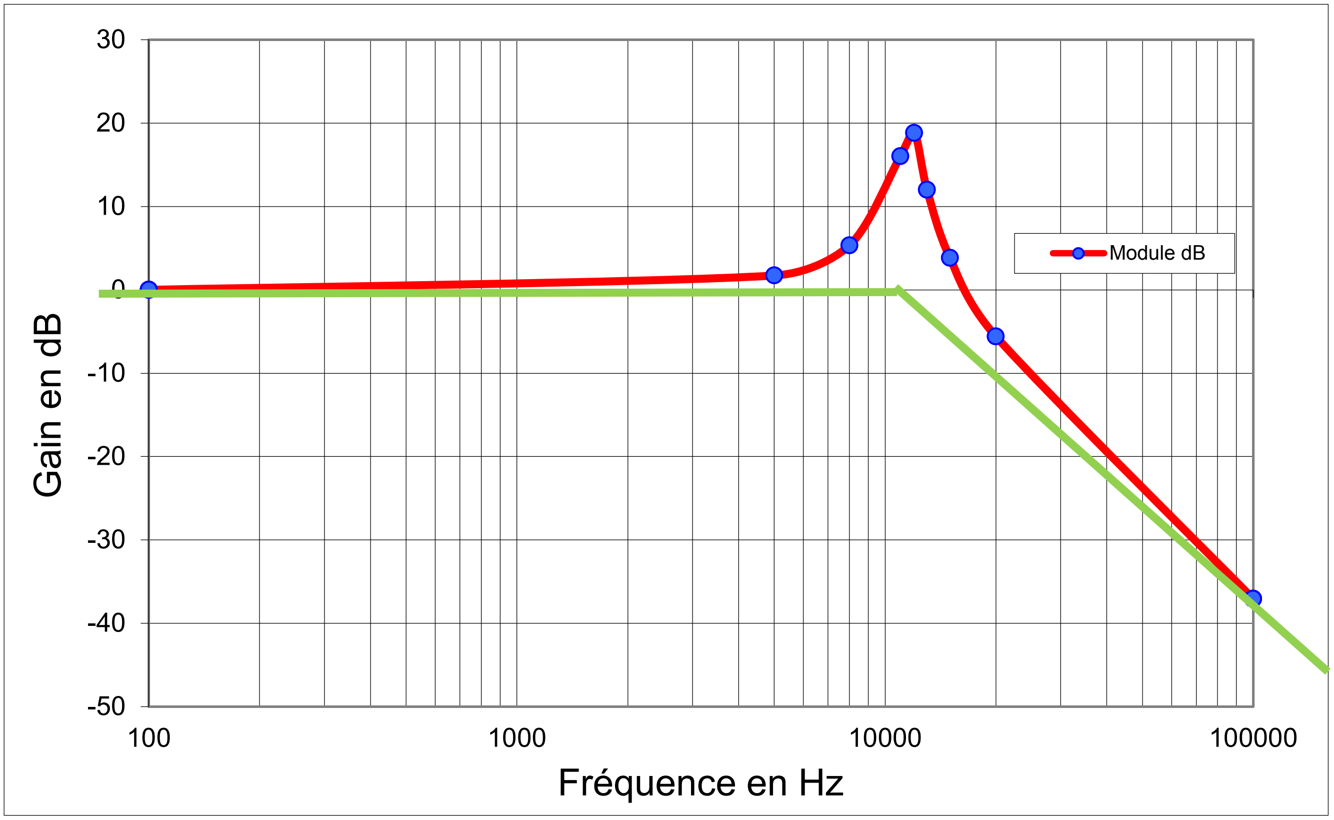
Asymptotes de la courbe de gain :

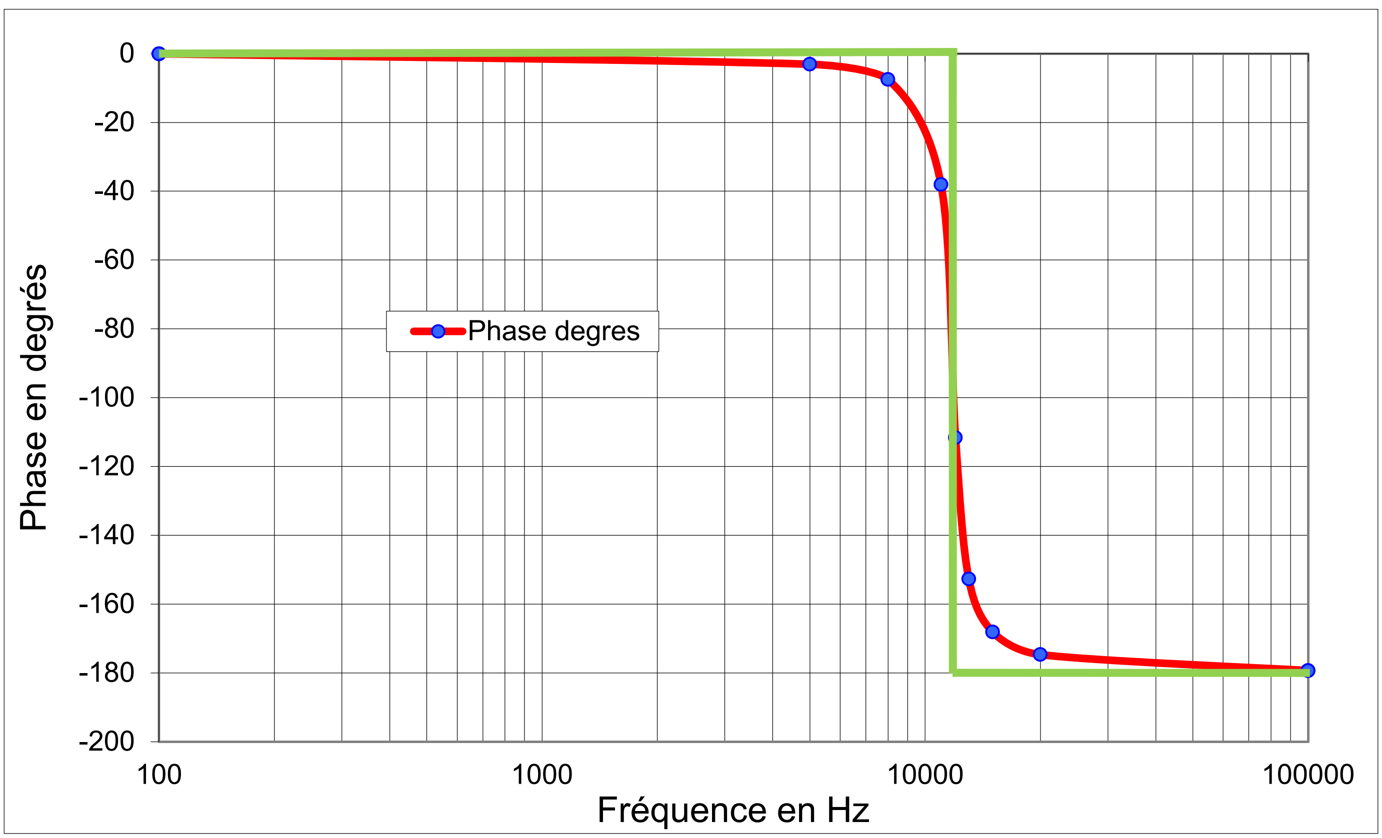
0 dB si $f < f_n$ 0 dB si $f = f_n$ pente de -40 dB/decade si $f > f_n$

Les deux asymptotes se coupent au point (f_n, 0)

Asymptotes de la courbe de phase :

0^o si $f < f_n$ -180^o si $f > f_n$ inversion brusque de phase à $f=f_n$


30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
-50
Gain en dB
Module dB
100
1000
10000
100000
Fréquence en Hz


0
-20
-40
-60
-80
-100
-120
-140
-160
-180
-200
Phase en degrés
Phase degres
100
1000
10000
100000
Fréquence en Hz