Université Laval
Professeur: Leslie A. Rusch

Département de génie électrique
et de génie informatique

# GEL10280: Communications numériques
# 2008 Examen Partiel

*Vendredi le 10 mars 2008; Durée: 13h30 à 15h20*
*Deux feuilles de documentation fournies; une calculatrice permise*

---

## Problème 1 (10 points bonus)

A. (3.3 points) L'interférence intersymbol produit un effet que nous appelons « the patterning effect », où le taux d'erreur binaire varie en fonction du patron de bits envoyé. Par exemple, le patron 1110 génère plus d'erreurs que le patron 0000. Pourquoi?

B. (3.3 points) Supposons que nous mesurons le taux d'erreur binaire pour les quatre patrons 00, 01, 10 et 11 comme le suivant : $P_{00}\ P_{01}\ P_{10}\ P_{11}$. En plus, supposons que le zéro logique est trois fois plus probable que l'un logique. Quel est le taux d'erreur binaire moyenne?

C. (3.3 points) Comment est-ce que la relation vectorielle

$$\left\|\underline{r}-\underline{s}_i\right\|^2=\left\|\underline{r}\right\|^2-2\left\langle \underline{r},\underline{s}_i\right\rangle+\left\|\underline{s}_i\right\|^2$$

nous amène à un corrélateur pour le détecteur ML? MAP?

## Problème 2 (15 points sur 70)

A. (5 points) Quel format de modulation peut être utilisé pour atteindre 19.2kb/s dans un canal avec largeur de bande de 2400 Hz?

B. (10 points) Quel rapport signal-à-bruit (SNR) est nécessaire pour atteindre un taux d'erreur de $10^{-5}$? Est-ce que ce SNR est raisonnable?

## Problème 3 (40 points sur 70)

Pour les signaux

$$
\begin{aligned}
s_1(t) &= 1, & 0 \le t \le 1 \\
s_2(t) &= \cos 2\pi t, & 0 \le t \le 1 \\
s_3(t) &= \cos^2 \pi t, & 0 \le t \le 1
\end{aligned}
$$

A. (10 points) Est-ce que ces signaux ont la même énergie? Quelle est l'énergie moyenne par bit?

B. (10 points) Donnez une base orthonormée pour ces trois signaux.

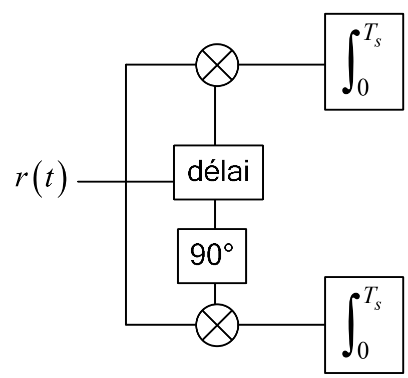
C. (10 points) Donnez les coordonnées des signaux; donnez une esquisse de la constellation dans l'espace du signal.

D. (5 points) Quelle est la distance minimale dans l'espace du signal?

E. (5 points) Quelle est la perte par rapport à QPSK?

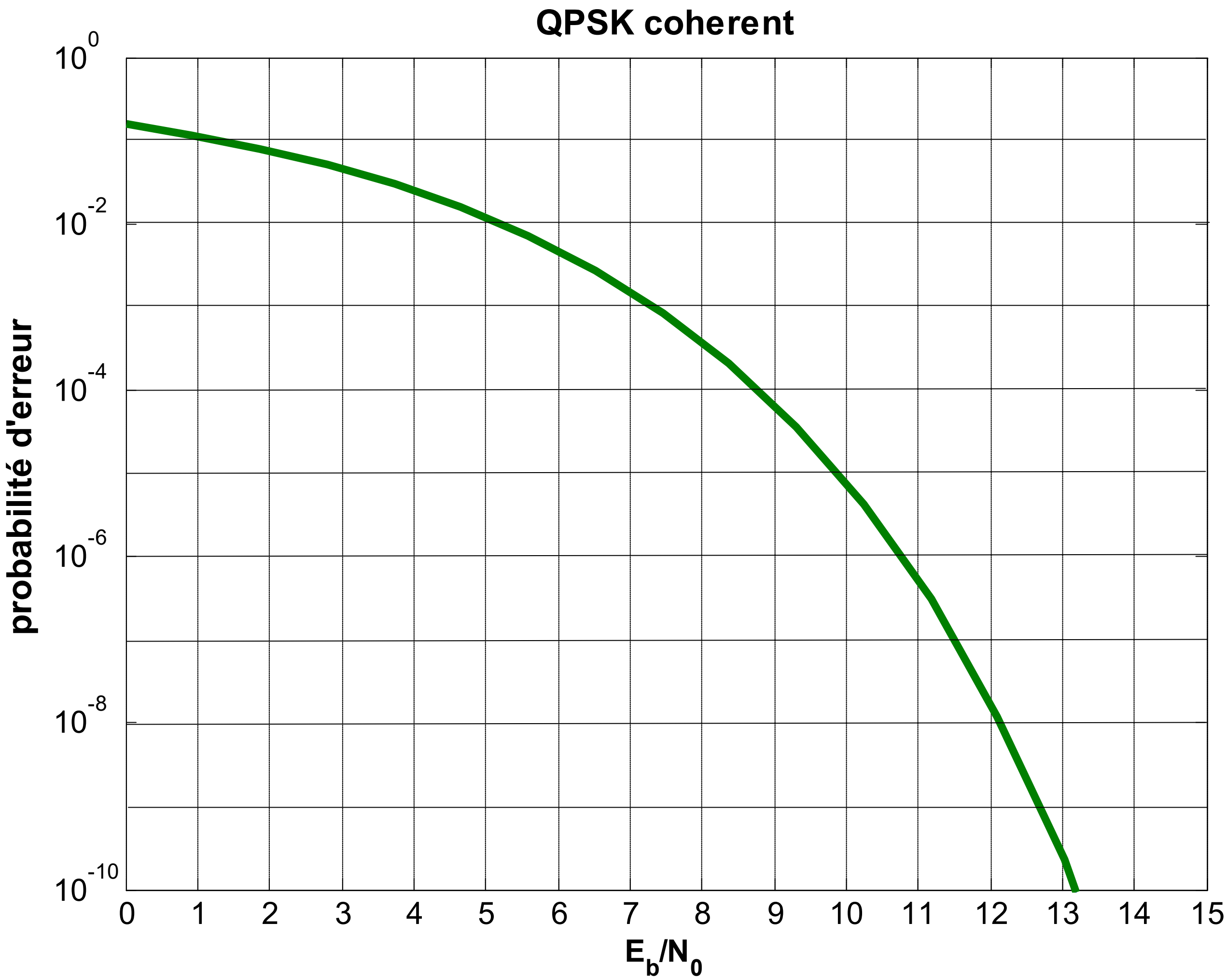
## Problème 4 (15 points sur 70)

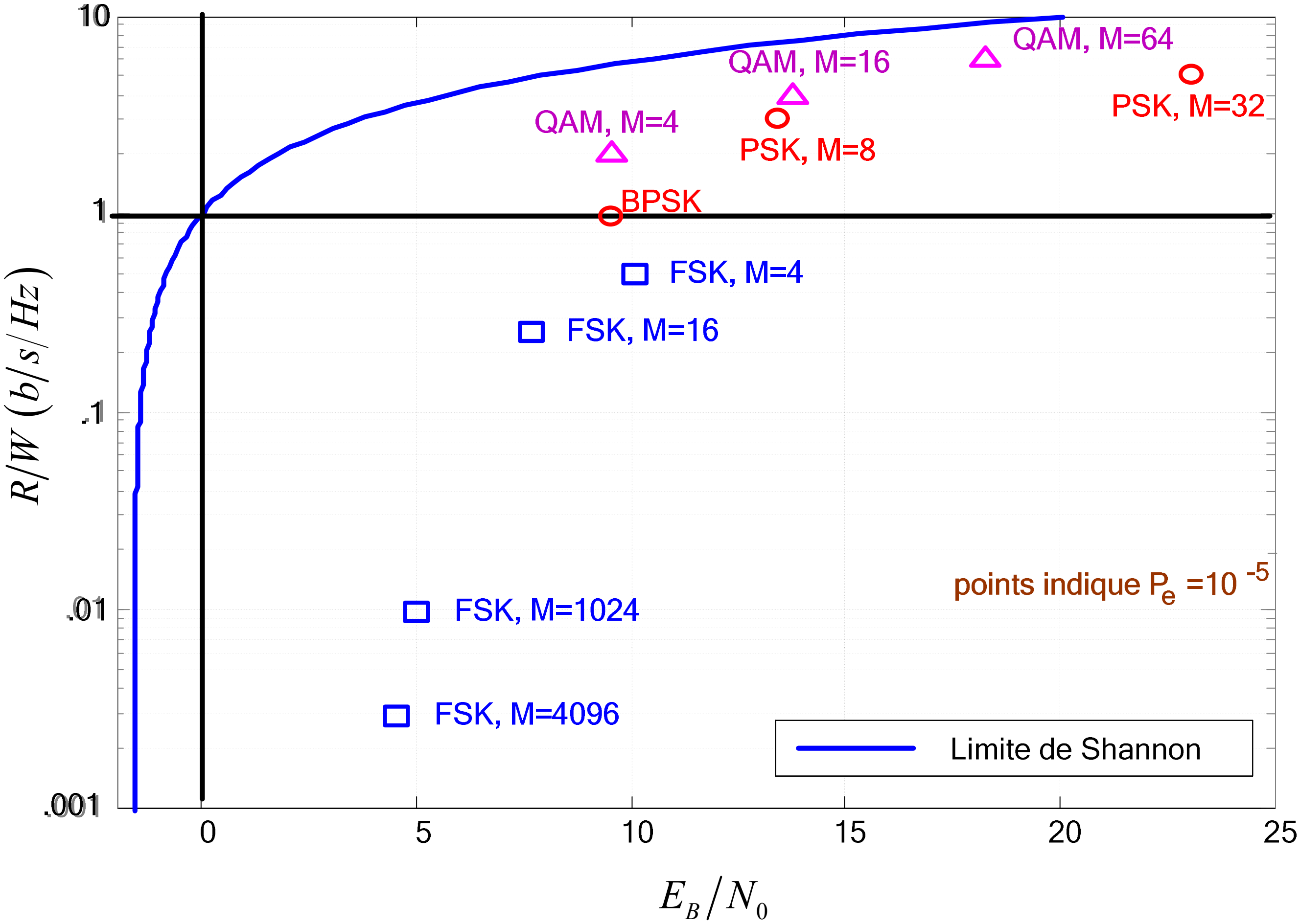
Supposons que nous avons un système à taux binaire de1 kb/s et nous exploitons une modulation différentielle de la phase, avec le récepteur non cohérent suivant.



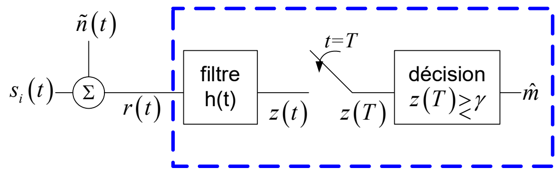

A. (10 points) Pour envoyer l'information avec modulation DQPSK, quel est le délai du récepteur?

B. (5 points) Supposons que le canal a une phase qui dérive lentement. La phase reste constante pendant une période de ~2ms. Est-ce que nous pouvons utiliser 16 DPSK pour envoyer l'information à 1 kb/s? Justifiez votre réponse.


QPSK coherent
probabilité d'erreur
$10^{0}$
$10^{-2}$
$10^{-4}$
$10^{-6}$
$10^{-8}$
$10^{-10}$
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
$E_b/N_0$


10
1
.1
.01
.001
$R/W\ (b/s/Hz)$
0
5
10
15
20
25
$E_B/N_0$
QAM, M=4
QAM, M=16
QAM, M=64
PSK, M=8
PSK, M=32
BPSK
FSK, M=4
FSK, M=16
FSK, M=1024
FSK, M=4096
points indique $P_e = 10^{-5}$
Limite de Shannon

**Récepteur d'échantillonnage**




**MAP**: $i$ qui maximise $p(z|s_i)\, p(s_i)$

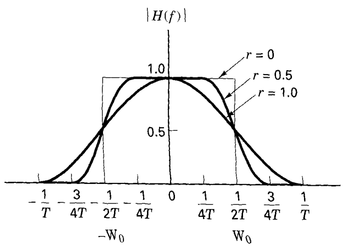
$i$ qui minimise $\left\|\mathbf{r}-\mathbf{s}_i\right\|^2 - N_0 \ln P(\mathbf{s}_i)$

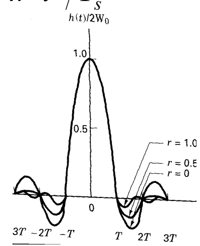
$P(\mathbf{s}_i)$ = probabilité a priori de symbole $\mathbf{s}_i$

**ML**: $i$ qui maximise $p(z|s_i)$

$i$ qui minimise $\left\|\mathbf{r}-\mathbf{s}_i\right\|^2$

**Raised cosine** $v(t) = \dfrac{\sin(\pi t/T_s)}{\pi t/T_s} \dfrac{\cos(r\pi t/T_s)}{1-4r^2t^2/T_s^2}$




**Énergie moyenne**

$$E_{moy} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\left\|\mathbf{s}_i\right\|^2$$

$$= \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\left[\text{énergie du signal } i\right]$$

**Énergie par bit v. énergie par symbole**

$$E_b \log_2 M = E_s$$

**QAM**

**Conversion de l'espace I/Q vers espace du signal**

$$\left(\tilde{a}_n^I, \tilde{a}_n^Q\right) = \sqrt{\frac{M \cdot E_s}{\sum_{i=1}^{M}\left[\left(a_n^I\right)^2 + \left(a_n^Q\right)^2\right]}}\left(a_n^I, a_n^Q\right)$$

coordonnées, espace du signal

coordonnées, espace I/Q

**cas rectangulaire (carrée)** $M=L^2$

$$P_e = 2\left(1-\frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q\left(\sqrt{\frac{3\log_2 M}{(M-1)}\frac{E_b}{N_0}}\right) \qquad d_{\min} = \sqrt{\frac{6\log_2 L}{L^2-1}}$$

**Borne d'union**

$$P_e \approx \frac{2K}{M} Q\left(\frac{D_{\min}}{\sqrt{2N_0}}\right) = \frac{2K}{M} Q\left(d_{\min}\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

$K$ est le nombre des paires des signaux séparés par la distance minimale $D_{min}$

**Distance minimale** dans l'espace du signal

$$D_{\min} = \min_{i \neq k}\left\|\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_k\right\| \text{ et } d_{\min} = \frac{D_{\min}}{\sqrt{2E_b}}$$

$$P_e(BPSK) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

$$P_e(OOK) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

$$P_e(QPSK) \approx 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

**Perte par rapport à QPSK**

$$d_{\min} = \sqrt{x}\sqrt{2} \quad \text{perte} = -10\log_{10} x$$

**Pour une modulation orthogonale**

$$P_e(bit) = P_b = P_e(symbol)\frac{M/2}{M-1}$$

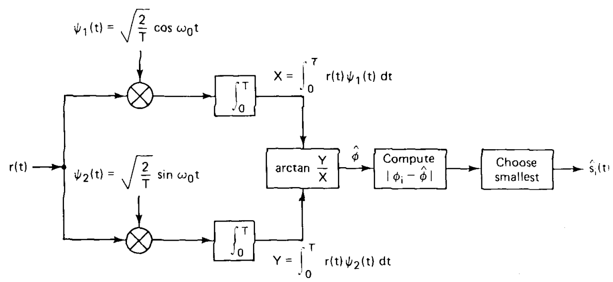
**Pour une modulation non-orthogonale avec codage de gray**

$$P_e(bit) = P_b = \frac{P_e(symbol)}{\log_2 M}$$

**Efficacité spectrale**

$$\eta = \frac{R_b}{W} = \frac{1}{T_b}\frac{1}{W} \text{ bits/s}$$

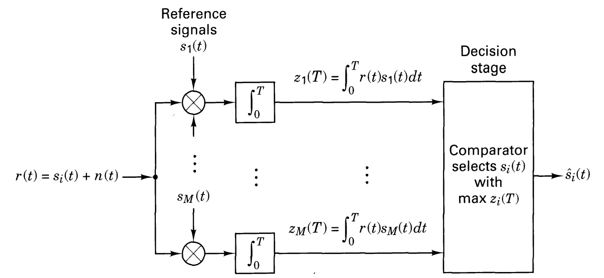
**MPSK cohérent** $\eta = \log_2 M$ †




$$P_e(M) \approx 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}\sin\frac{\pi}{M}\right)$$

$$= 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_b\log_2 M}{N_0}}\sin\frac{\pi}{M}\right)$$

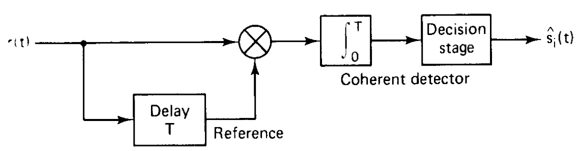
**MFSK cohérent** $\eta = \frac{2\log_2 M}{M+1}$ †




$$P_e = (M-1)Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) = (M-1)Q\left(\sqrt{\frac{E_b\log_2 M}{N_0}}\right)$$

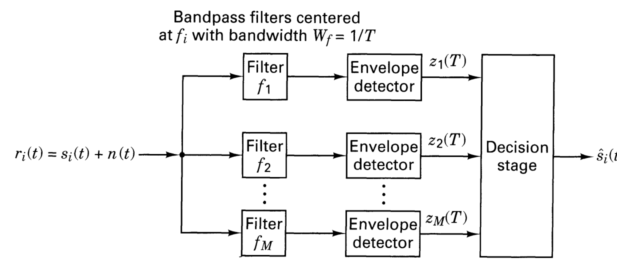
**Séparation minimale** $1/2T_s$

**DPSK incohérent** $P_e = \frac{1}{2}e^{-E_b/N_0}$




~1 dB de perte entre DPSK et BPSK

**MFSK incohérent** $\eta = \frac{\log_2 M}{M}$ †




$$P_e(BFSK) = \frac{1}{2}e^{-E_b/2N_0}$$

~1 dB de perte entre BFSK cohérente et incohérente

**Séparation minimale** $1/T_s$

**Loi de Shannon**

$$C = W\log_2(1 + SNR) \qquad SNR = \frac{E_b}{N_0}\eta$$

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{W}{C}\left(2^{C/W} - 1\right) \qquad \frac{C}{W} \to 0 \Rightarrow \frac{E_b}{N_0} \to -1.6dB$$

**Relations trigonométriques**

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - \sin^2\theta$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

**Processus Gram Schmidt**

$$\psi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{E_1}}s_1(t) \text{ où } E_1 \triangleq \int_0^T s_1^2(t)\,dt$$

$$\theta_2(t) \triangleq s_2(t) - \langle s_2(t), \psi_1(t)\rangle\psi_1(t)$$

$$E_2 \triangleq \int_0^T \theta_2^2(t)\,dt \qquad \psi_2(t) = \frac{\theta_2(t)}{\sqrt{E_2}}$$

$$i. \quad \theta_i(t) = s_i(t) - \sum_{k=1}^{i-1}\langle s_i(t), \psi_k(t)\rangle\psi_k(t)$$

$$E_i \triangleq \int_0^T \theta_i^2(t)\,dt \qquad \psi_i(t) = \frac{\theta_i(t)}{\sqrt{E_i}}$$

† en supposant une impulsion Nyquist idéale