EXAMEN PARTIEL 1

MAT-18996: analyse numérique pour l'ingénieur — Hiver 2008
Date: 7 mars, 18h30-20h20.

Remarques:

1) Documents admis: deux feuilles 8 1/2 $\times$ 11, recto-verso.
2) Seulement les calculatrices avec l'auto-collant de la Faculté seront admises.
3) Vous pouvez répondre aux questions dans l'ordre de votre choix, mais identifiez clairement les questions.
4) Pour chaque question on fournira le détail des calculs et du raisonnement. En l'absence de ces détails, une solution sera considérée comme nulle.
5) Déposez votre carte d'identité avec photo sur le coin de votre table.

Question 1. (6 + 2 + 8 points)

Soit $f(x) = \sqrt{1+x}$.

a) Trouver le développement de Taylor $P_2(x)$ à l'ordre 2 de la fonction $f(x)$ au voisinage de $x_0 = 0$.

b) En utilisant $P_2(x)$, calculer une approximation de $\sqrt{1.1}$.

c) A l'aide de la formule d'erreur de Taylor, estimer l'erreur commise et la comparer avec la valeur exacte de l'erreur fournie par votre calculatrice.

Question 2. (4 + 8 + 8 points)

Considérons l'équation

$$f(x) = x^2 - 2\ln x - 2 = 0, \text{ pour } x > 0.$$

a) Montrer que $f(x) = 0$ admet exactement deux racines $0 < r_1 < 1$ et $r_2 > 1$. Situer la racine r_2 dans un intervalle de longueur au plus 1.

b) Etudier la convergence de l'algorithme du point fixe

$$x_{n+1} = e^{(x_n^2-2)/2} \tag{1}$$

pour le calcul approché des racines r_1 et r_2.

c) Si l'algorithme (1) diverge pour une racine, proposer un autre algorithme de point fixe qui convergera pour cette racine. Justifier votre réponse.

Question 3. (9 + 3 + 4 points)

L'équation $f(x) = 0$ possède deux racines $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$. L'application de la méthode de Newton à l'équation $f(x) = 0$ produit les résultats ci-dessous.

n	x_n (r_1)	x_n (r_2)
1	0.00000	3.00000
2	0.40000	2.71428
3	0.68235	2.50522
4	0.86668	2.24529
5	0.96522	2.16856
6	0.99681	2.11495
7	0.99996	2.07790

a) Déterminer, à partir de ces résultats numériques, si cet algorithme converge linéairement ou quadratiquement et ce, pour chacune des racines.

b) Dans le cas de la convergence linéaire, donner une approximation du taux de convergence.

c) Que peut-on dire de la multiplicité de chacune des racines ? Justifier.

Question 4. (9 + 5 + 2 points)

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & 3 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer une factorisation LU de la matrice A par la méthode de votre choix.

b) Utiliser la factorisation précédente pour résoudre le système linéaire

$$A\,\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c) Sachant que

$$A \begin{pmatrix} 43 \\ -14 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A \begin{pmatrix} -21 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

calculer A^{-1}.

Question 5. (2 + 2 + 5 + 5 + 2 points)

On considère le système linéaire

$$A\,\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix} = \mathbf{b}.$$

a) Déterminer la solution exacte $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ du système linéaire.

b) Calculer le résidu correspondant à la solution $\hat{\mathbf{x}} = (1.1, -1.1)$.

c) A l'aide de a) et b), trouver une borne inférieure du conditionnement de A en utilisant la norme infinie.

La matrice A ci-dessus est un cas particulier de la matrice

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

dépendant du paramètre $\alpha > 0$.

d) Calculer la valeur exacte du conditionnement, $\text{cond}_\infty(A_\alpha)$, de la matrice A_α en norme infinie. Si $\alpha = 10$, comparer votre réponse avec celle obtenue en (c).

e) A partir de quelle valeur de α a-t-on $\text{cond}_\infty(A_\alpha) > 10^4$?

Question 6. (2 + 8 + 6 points)

Considérons le système non linéaire

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 4xy & = & 0, \\ x^2 - \sin y & = & 0. \end{array} \right. \tag{2}$$

a) Trouver deux solutions du système (2).

b) Faire une itération de la méthode de Newton à partir du point $(1, 0)$. Fournir les détails du calcul.

c) Montrer que le prochain itéré calculé par la méthode de Newton à partir du point $(x_n, 0)$ est donné par

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{n+1} = \dfrac{x_n}{2}, \\ y_{n+1} = 0. \end{array} \right.$$

Dans ce cas précis, que peut-on dire sur la vitesse de convergence de la méthode de Newton pour le calcul approché de la racine $(0, 0)$? Fournir une explication.