Solutionnaire de l'examen 1 du 22 octobre 2010

Question # 1 (20 points). Soient les vecteurs colonnes suivants en notation Matlab :

$\mathbf{a_1}$ = [2 ; -3 ; 5] $\mathbf{a_2}$ = [1 ; 4 ; 6] et **b** = [7 ; -27 ; 7]

-a) Est-ce que **b** est une combinaison linéaire de $\mathbf{a_1}$ et de $\mathbf{a_2}$?

-b) Quelle est la dimension de l'espace vectoriel engendré par ces trois vecteurs?

-c) En général, quelle condition doit rencontrer une matrice A de 3 lignes et de 3 colonnes pour que ses trois vecteurs colonnes soient linéairement indépendants?

Solution 1:

On veut savoir si un vecteur X existe tel que :

$x_1*\mathbf{a_1} + x_2*\mathbf{a_2} + x_3*\mathbf{b} = 0$, équation (1)

ce qui dénoterait que **b** est une combinaison linéaire de $\mathbf{a_1}$ et $\mathbf{a_2}$, les poids étant x_1, x_2, et x_3. En notation matricielle :

$A*\mathbf{X} = 0$ équation (2)

avec A = [2 1 7; -3 4 -27 ; 5 6 7] et **X** = [x_1 ; x_2 ; x_3] équation (3)

On forme la matrice augmentée AUG = [2 1 7 0; -3 4 -27 0 ; 5 6 7 0]

et on procède à l'amener sous sa forme échelon réduit :

AUG =

$$\begin{matrix} 2 & 1 & 7 & 0 \\ -3 & 4 & -27 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 0 \end{matrix} \approx \begin{matrix} 2 & 1 & 7 & 0 \\ -3 & 4 & -27 & 0 \\ 0 & 3{,}5 & -10{,}5 & 0 \end{matrix} \approx \begin{matrix} 2 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 5{,}5 & -16{,}5 & 0 \\ 0 & 3{,}5 & -10{,}5 & 0 \end{matrix} \approx \begin{matrix} 2 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 11 & -33 & 0 \\ 0 & 7 & -21 & 0 \end{matrix}$$

$$AUG \approx \begin{matrix} 2 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 7 & -21 & 0 \end{matrix} \approx \begin{matrix} 2 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \approx \begin{matrix} 2 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \approx \begin{matrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

En équations : $x_1 \quad + 5x_3 = 0$ équation (4)

$x_2 \quad -3\, x_3 \;= 0$ équation (5)

La dernière ligne ci-haut, toute en zéros, signifie «aucune contrainte sur x_3 », donc x_3 = variable libre. Prenons, comme d'habitude, $x_3 = 1$.

Il suit : $x_2 = 3$ et $x_1 = -5$. L'équation (1) ci-haut devient donc :

$-5*\mathbf{a_1} + 3*\mathbf{a_2} + 1*\mathbf{b} = 0$ ou $\mathbf{b} = 5*\mathbf{a_1} - 3*\mathbf{a_2}$ équation (6)

Le vecteur **b** est donc une combinaison linéaire de $\mathbf{a_1}$ et $\mathbf{a_2}$**.**

Solution 2 :

Si les trois vecteurs $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$ et **b** étaient linéairement indépendants, le déterminant de la matrice A serait différent de zéro. Dans ce cas inv(A) existerait et la seule solution de l'équation (2) A***X** = 0 serait **X** = 0, solution triviale.

Le déterminant de A est égal à :

det(A) = 2*[4*7 - 6*(-27)] – [-3*7 - 5*(-27)] + 7*[-3*6 – 5*4]

= 2*190 – 114 + 7*(-38) = 0

Les trois vecteurs ne sont donc pas linéairement indépendants.

Sous-question –b). Réponse : les deux vecteurs $\mathbf{a_1}$ et $\mathbf{a_2}$ engendrent un espace bidimensionnel R^2. Comme b est une combinaison linéaire de $\mathbf{a_1}$ et $\mathbf{a_2}$, **b** est dans ce plan et n'ajoute pas une troisième dimension. La réponse est 2.

Sous-question –c). Réponse 1 : il faut que le déterminant de la matrice A soit différent de zéro. Dans ce cas, inv(A) existe et l'équation A***X** = **0** aurait seulement la solution triviale X = inv(A)* 0 = 0, ce qui montre qu'il n'y pas de combinaison linéaire des trois vecteurs colonnes de A qui donne le vecteur zéro.

Réponse 2 : il faut que l'opération rref(A) donne trois colonnes pivots, c'est-à-dire, dans le présent cas d'une matrice carrée de rang 3, la matrice identité I_3.

Question # 2 (30 points). –a) On veut solutionner l'équation matricielle A***X** = **b** par la méthode de l'échelon réduit appliquée à la matrice augmentée AUG. En notation Matlab les données sont :

A = [1 -2 3 ; -4 5 6 ; 3 -2 1] et **b** = [6 ; 24 ; 2]

Suite à la commande rref(AUG), Matlab livre la réponse suivante :

$$\text{rref(AUG)} = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{matrix}$$

Interpréter ce résultat et donner la valeur de **X.**

-b) Est-ce qu'une autre méthode de solution pourrait donner **X** en fonction de **b**? Donner la formule sans l'exécuter numériquement.

-c) Soit la matrice M = [-1   2   2 ; 2   -1   2; 2   2   -1]. Calculer son déterminant, son inverse inv(M), et le déterminant de inv(M).

-a) Réponse : mise sous forme d'équation matricielle la réponse de rrefA) exprime ceci : I_3***X** = [1 ; 2 ; 3].

Comme I_3***X** = **X**, la valeur de **X** est [1 ; 2 ; 3].

Une autre façon de voir ce résultat est d'écrire les équations qui correspondent à rref(A). Elles sont tout simplement :

$x_1 = 1$

$x_2 = 2$

$x_3 = 3$

-b) Une autre façon de solutionner l'équation A*X = b est d'écrire :

Inv(A)*A***X** = I_3***X** = **X** = inv(A)***b**

Si cela avait été demandé il aurait fallu évaluer inv(A). On aurait trouvé :

$$48*\text{inv}(A) = \begin{matrix} -17 & 4 & 27 \\ -22 & 8 & 18 \\ 7 & 4 & 3 \end{matrix}$$

(PAS DEMANDÉ À L'EXAMEN)

Avec Matlab on peut vérifier que inv(A)***b** = [1 ; 2 ; 3]

-b) AUTRE RÉPONSE : la méthode de Cramer.(Voir les notes du cours 06, pages 3-11, ou dans le livre de David Lay, pp. 201-204).

La solution de A***X** = **b** est donnée par :

x_i = det A_i(**b**)/det A où A_i(b) est la matrice obtenue en remplaçant la ième colonne par le vecteur **b**.

(PAS REQUIS À L'EXAMEN). Si on exécute numériquement cette approche on trouve : x_1 = det [6 -2 3; 24 5 6; 2 -2 1] / det(A)

= - 48/(-48) = 1. Puis x_2 = -96/(-48) = 2 et x3 = -144/(-48) = 3

Réponse à –c). Le déterminant de M est égal à :

(-1)*(1 – 4) -2* (-2 -4) + 2*(4 + 2) = 3 + 12 + 12 = 27

Le déterminant de inv(M) est 1/27.

Pour l'inverse de M on procède par opération sur les lignes (voir le cours 03) :

$$\begin{matrix} -1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \approx \begin{matrix} -1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \approx \begin{matrix} -1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 3 & 2 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} -1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & -2 & -2 & 1 \end{matrix} \approx \begin{matrix} -1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -9 & -2 & -2 & 1 \end{matrix} \approx \begin{matrix} -1 & 2 & 0 & 5/9 & -4/9 & 2/9 \\ 0 & 3 & 0 & 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -9 & -2 & -2 & 1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 1/9 & -2/9 & -2/9 \\ 0 & 3 & 0 & 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -9 & -2 & -2 & 1 \end{matrix} \approx \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & -1/9 & 2/9 & 2/9 \\ 0 & 1 & 0 & 2/9 & -1/9 & 2/9 \\ 0 & 0 & 1 & 2/9 & 2/9 & -1/9 \end{matrix}$$

La matrice inverse M est constituée par les trois colonnes de droite. On peut l'écrire comme suit:

$$9^* \operatorname{inv}(M) = \begin{matrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{matrix}$$

De façon assez surprenante 9*inv(M) est la matrice originale M.

Question # 3 (25 points). –a) Accomplir la factorisation LU de la matrice A = [2 3 ; 4 8]

-b) Décrire un exemple de l'application de la factorisation LU au calcul matriciel.

-c) Nommer une contrainte sur une matrice en général pour qu'elle soit factorisable en LU.

Réponse : -a) On part de $A = \begin{matrix} 2 & 3 \\ 4 & 8 \end{matrix}$ et on écrit $L = \begin{matrix} 2 & 0 \\ 4 & * \end{matrix}$

l'étoile symbolisant une inconnue. On divise la première colonne de L par 2 parce qu'on veut une diagonale constituée de 1s.

On a donc : L = 1   0

2   *

La prochaine étape est de transformer A vers sa forme échelon.
L’opération L2 → L2 – 2L1 va nous créer un zéro en bas à gauche :

AMODIF = 2   3   On saisit le pivot (2) de la deuxième colonne

0   2

pour l’introduire dans L : L = 1   0

● 2   2

On divise le 2 de la diagonale par 2 pour obtenir : L = 1   0

● 2   1

● Notre U est AMODIF. On vérifie que le produit L*U redonne A.

-b) Réponse : Une application de la factorisation LU d’une matrice A est que la solution de l’équation A***X** = **b** est facilitée. On écrit :

A***X** = L*U***X** = L***Y** = **b** où **Y** est par définition **Y** = U***X**

Connaissant L et **b** on solutionne **Y** = inv(L)***b**. Avec ce **Y** solutionné on trouve **X** = inv(U)***Y**.

-c) Réponse : Contraintes (voir p. 29 du cours 04): Pour la matrice générale m x n la décomposition LU exige :

- l’existence d’une matrice carrée L de dimension m x m, triangulaire inférieure, et possédant des 1 sur la diagonale;

- l’existence d’une matrice U de dimension m x n qui est une forme échelon de la matrice A.

Question # 4 (25 points). –a) Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice

$A = [\ 1 \quad 2\ ;\ 0 \quad 3\ ]$.

-b) Diagonaliser la matrice $B = [3 \quad 0 \quad 0\ ;\ 5 \quad 4 \quad 0\ ;\ 3 \quad 6 \quad 1\ ]$.

Réponse : -a) On trouve les valeurs propres en mettant le déterminant de la matrice $(A - \lambda I_2)$ égal à zéro. On a donc :

$$\mathrm{Det} \begin{matrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & 3-\lambda \end{matrix} = (1-\lambda) * (3-\lambda) = 0$$

D'où il vient : $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$

Pour $\lambda_1 = 1$ on doit avoir $A*V = \lambda_1 V = \lambda_1 * I_2 * V$, avec $V = [\ x_1\ ;\ x_2\ ]$. On doit donc avoir :

$(A - \lambda_1 I_2)*V = 0$, ce qui donne $[\ (1-1) \quad 2\ ;\ 0 \quad (3-1)]\ *\ [\ x_1\ ;\ x_2\ ] = [\ 0\ ;\ 0\ ]$

En équations, la première est : $0*x_1 + 2*x_2 = 0$

ce qui donne immédiatement $x_2 = 0$.

La deuxième ligne est $0*x_1 + 2*x_2 = 0$ et n'apporte aucune contrainte sur x_1. La variable x_1 est donc libre et on peut la prendre comme étant 1. Le vecteur propre V1 est donc $V1 = [\ 1\ ;\ 0\ ]$.

Pour $\lambda_2 = 3$ la matrice $(A - \lambda_2 I_2) = [\ (1-3) \quad 2\ ;\ 0 \quad (3-3)] = [\ -2 \quad 2\ ;\ 0 \quad 0]$.

La première équation est : $-2x_1 + 2x_2 = 0$, d'où $x_1 = x_2$. La deuxième équation est $0*x_1 + 0*x_2 = 0$, ce qui signifie aucune contrainte sur x_1 ou x_2. On peut donc prendre $V2 = [\ 1\ ;\ 1\ ]$.

Remarquer que V2 = [5 ; 5] ou V2 = [- 21 ; - 21] sont aussi bons : ces vecteurs pointent dans la même direction.Mais [1 ; 1] est plus pratique comme vecteur propre de base.

Réponse pour –b)