GEL19962 : Analyse des signaux

Examen Final A2004 : Solutions

Département de génie électrique et de génie informatique

Question 1 (9 pts)

Partie A (7 pts)

On cherche la réponses impulsionnelle du circuit RL présenté à la figure 1

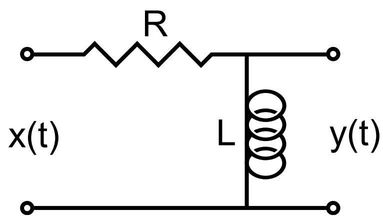


Fig. 1 – Circuit RL

On a :

$$X(\omega) = (R + \mathrm{j}\omega L)I(\omega)\,, \tag{1}$$
$$Y(\omega) = (\mathrm{j}\omega L)I(\omega)\,, \tag{2}$$

d'où :

$$I(\omega) = \frac{Y(\omega)}{\mathrm{j}\omega L}\,. \tag{3}$$

En substituant 3 dans 1, on a :

$$X(\omega) = (R + \mathrm{j}\omega L)\frac{Y(\omega)}{\mathrm{j}\omega L}\,, \tag{4}$$

d'où on déduit directement $H(\omega)$:

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{\mathrm{j}\omega L}{R + \mathrm{j}\omega L} = \mathrm{j}\omega\left(\frac{L}{R + \mathrm{j}\omega L}\right) = \mathrm{j}\omega\left(\frac{1}{\frac{R}{L} + \mathrm{j}\omega}\right)\,. \tag{5}$$

On sait que :

$$\mathrm{e}^{-\beta t}\mathrm{U}(t) \leftrightarrow \frac{1}{\beta + \mathrm{j}\omega}\,, \qquad \text{d'où} \qquad \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\mathrm{U}(t) \leftrightarrow \frac{1}{\frac{R}{L} + \mathrm{j}\omega}\,, \tag{6}$$

et aussi que :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t) \leftrightarrow \mathrm{j}\omega F(\omega)\,, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\mathrm{U}(t)\right] \leftrightarrow \mathrm{j}\omega\left[\frac{1}{\frac{R}{L} + \mathrm{j}\omega}\right]. \tag{7}$$

L'expression précédente peut être simplifiée pour trouver la réponse impulsionnelle recherchée.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\mathrm{U}(t)\right] = -\frac{R}{L}\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\mathrm{U}(t) + \overbrace{\delta(t)\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}}^{\delta(t)}\,. \tag{8}$$

$$\boxed{h(t) = -\frac{R}{L}\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\mathrm{U}(t) + \delta(t)} \tag{9}$$

Partie B (1 pts)

Le système est causal étant donnée que $h(t) = 0$ pour tout $t < 0$. De plus, comme le filtre est réalisable physiquement, le système est nécessairement causal.

Partie C (1 pts)

La réponse en fréquence du filtre, trouvée en A) est :

$$H(\omega) = \mathrm{j}\omega\left(\frac{1}{\frac{R}{L} + \mathrm{j}\omega}\right). \tag{10}$$

Pour un ω beaucoup plus grand que R/L, $H(\omega) \rightarrow \frac{\mathrm{j}\omega}{\mathrm{j}\omega} = 1$. Par ailleurs, si ω est très petit et beaucoup plus petit que R/L, $H(\omega) \rightarrow \frac{\mathrm{j}\omega}{R/L} \rightarrow 0$.

Donc les basses fréquences sont atténuées, mais pas les hautes fréquences. C'est un filtre passe haut (coupe bas).

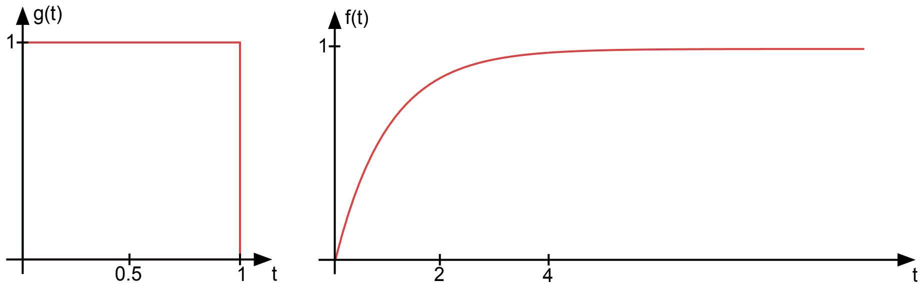
Question 2 (11 pts)

On cherche à calculer la convolution de $\mathrm{Rect}(t - 0.5)$ avec $(1 - \mathrm{e}^{-t})\,\mathrm{U}(t)$. Ces fonctions sont illustrées, respectivement, aux figures 2 (a) et 2 (b).

La convolution de ces deux fonctions peut s'écrire comme :

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(t-u)\mathrm{d}u\,. \tag{11}$$

Cette convolution peut se séparer en trois étapes distinctes : Les t pour lesquels les fonctions ne sont aucunement superposées, ceux pour lesquels les fonctions sont partiellement superposées et, enfin, les t pour lesquels les fonctions sont entièrement superposées.



(a) (b)

Fig. 2 – (a) Représentation graphique des fonctions $g(t) = \mathrm{Rect}(t - 0.5)$ (b) et fonction $f(t) = (1 - \mathrm{e}^{-t})\,\mathrm{U}(t)$.

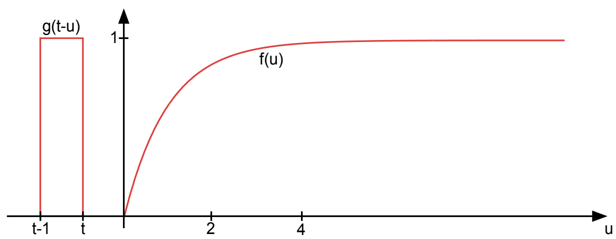


Fig. 3 – Première étape de la convolution de $g(t)$ avec $f(t)$ ($t = \ ]-\infty, 0[$).

Pour la première étape (figure 3), avec $t = \ ]-\infty, 0[$, on a :

$$f(t) * g(t) = 0\,. \tag{12}$$

Pour la deuxième étape (figure 4), avec $t = \ [0, 1]$, on a :

$$f(t) * g(t) = \int_0^t \left(1 - \mathrm{e}^{-u}\right) \mathrm{d}u = \left.\left(u + \mathrm{e}^{-u}\right)\right|_0^t = t + \mathrm{e}^{-t} - 1\,. \tag{13}$$

Enfin, pour la dernière étape (figure 5), avec $t = \ ]1, \infty$, on a :

$$f(t) * g(t) = \int_{t-1}^t \left(1 - \mathrm{e}^{-u}\right) \mathrm{d}u = \left.\left(u + \mathrm{e}^{-u}\right)\right|_{t-1}^t = t + \mathrm{e}^{-t} - (t-1) - \mathrm{e}^{-(t-1)}\,. \tag{14}$$

En résumé, on a :

$$\boxed{f(t) * g(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad t = \ ]-\infty, 0[\\ t + \mathrm{e}^{-t} - 1 & \text{pour} \quad t = \ [0, 1] \\ t + \mathrm{e}^{-t} - (t-1) - \mathrm{e}^{-(t-1)} & \text{pour} \quad t = \ ]1, \infty \end{cases}} \tag{15}$$

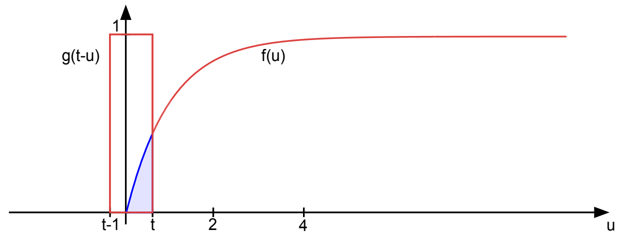


FIG. 4 – Deuxième étape de la convolution de $g(t)$ avec $f(t)$ ($t = \ [0, 1]$).

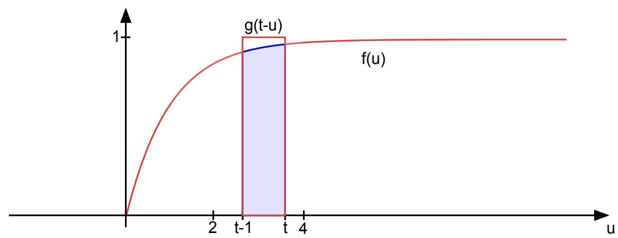


FIG. 5 – Troisième étape de la convolution de $g(t)$ avec $f(t)$ ($t =]1, \infty$).

Question 3 (14 pts)

Partie A (1 pts)

Comme le spectre $F(\omega)$ du signal $f(t)$ est continu, $f(t)$ doit être non-périodique. De plus il s'agit d'un signal à énergie finie puisqu'il est borné en ω. Ainsi donc, la puissance de $f(t)$ sera nulle.

Partie B (2 pts)

L'énergie totale est donnée par :

$$E_{tot} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 \, \mathrm{d}\omega \, . \tag{16}$$

Si on observe attentivement le spectre $F(\omega)$, on remarque que l'énergie est séparée uniformément dans les deux triangles. Le plus facile pour faire ce calcul est d'intégrer sur un triangle recentré sur 0 et de considérer le double de ce résultat pour l'énergie totale. Ceci revient exactement au même que de calculer l'intégrale sur un triangle entre -1100 et -900 puis sur l'autre entre 900 et 1100. Ceci est possible puisque que le spectre est symétrique. Plus simple encore, étant donné que les triangles sont eux même symétriques, on peut simplifier le problème d'avantage en calculant l'intégrale sur un demi-triangle et en multipliant par 2 pour avoir l'énergie d'un triangle.

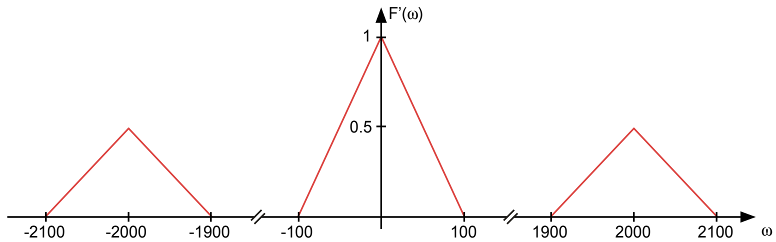


FIG. 6 – Spectre de la fonction $f'(t)$, après modulation avec un cosinus de fréquence ω_0.

$$E_{tri} = \frac{2}{2\pi}\int_0^{100}\left|1-\frac{1}{100}\omega\right|^2 \mathrm{d}\omega = \frac{1}{\pi}\int_0^{100}\left(1-\frac{\omega}{50}+\frac{\omega^2}{10000}\right)\mathrm{d}\omega\,, \tag{17}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\omega-\frac{\omega^2}{100}+\frac{\omega^3}{30000}\right]_0^{100} = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{100^2}{100}+\frac{100^3}{30000}\right] = \frac{100}{3\pi}\,, \tag{18}$$

d'où :

$$\boxed{E_{tot} = 2E_{tri} = \frac{200}{3\pi}\,.} \tag{19}$$

Partie C (4 pts)

On cherche le spectre de $a(t)$, connaissant le spectre de $f(t)$. Entre $f(t)$ et $a(t)$ le signal est multiplié par un cosinus puis est filtré par un filtre $H(\omega)$ donné. La multiplication par le cosinus donne :

$$f'(t) = f(t)\cos(\omega_0 t) = f(t)\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}}{2}\right]\,. \tag{20}$$

Utilisant les propriétés de de décalage, on retrouve directement le spectre recherché. On aurait pu aussi, de façon plus intuitive, faire la convolution du spectre du cosinus avec le spectre de $f(t)$. On a donc :

$$F'(\omega) = \frac{1}{2}F(\omega-\omega_0)+\frac{1}{2}F(\omega+\omega_0)\,. \tag{21}$$

Le spectre de $f'(t)$ est représenté à la figure 6. Le filtre $H(\omega)$ constitue une boîte de largeur 2000, centrée sur zéro. Une fois filtré, tout ce qui se trouve au delà de ± 1000 rad/s sera coupé. Le spectre de $a(t)$ sera donc uniquement le triangle centré sur zéro, donné par la figure 7. L'expression analytique de ce spectre est :

$$A(\omega) = \mathrm{Tri}\left(\frac{\omega}{100}\right)\,. \tag{22}$$

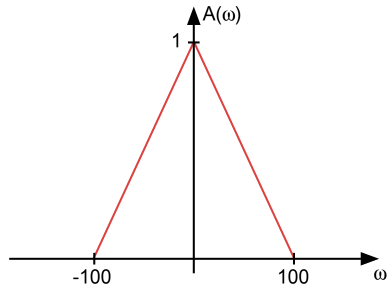


FIG. 7 – Spectre $A(\omega)$ de la fonction $a(t)$.

Partie D (4 pts)

On cherche le spectre de $b(t)$. On connaît le spectre de $a(t)$, trouvé en c), et le signal $e(t)$. On a :

$$b(t) = a(t)e(t) \qquad \leftrightarrow \qquad B(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left[A(\omega) * E(\omega)\right] , \tag{23}$$

et :

$$e(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_e) \qquad \leftrightarrow \qquad E(\omega) = \omega_e \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_e) , \tag{24}$$

avec :

$$\omega_e = \frac{2\pi}{T_e} . \tag{25}$$

$$B(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left[A(\omega) * E(\omega)\right] = \frac{1}{2\pi}\left[\text{Tri}\left(\frac{\omega}{100}\right) * \frac{2\pi}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_e)\right] , \tag{26}$$

$$= \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Tri}\left(\frac{\omega - n\omega_e}{100}\right) . \tag{27}$$

$$\tag{28}$$

Comme $T_e = 2\pi/180$, on a :

$$\boxed{B(\omega) = \frac{90}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Tri}\left(\frac{\omega - 180n}{100}\right) .} \tag{29}$$

La figure 8 présente le spectre $B(\omega)$.

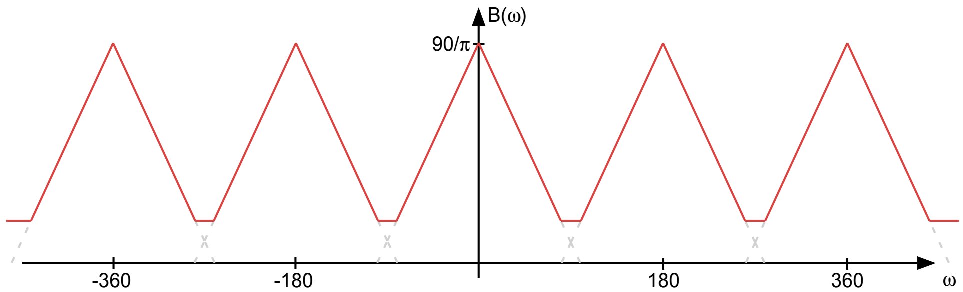


FIG. 8 – Spectre $B(\omega)$ de la fonction $b(t)$.

Partie E (0.5 pts)

La modulation avec le cosinus permet de ramener le signal en bande de base, c'est à dire autour de 0 Hz. Cette opération permettra, par la suite, de traiter le signal sans avoir à faire face aux limitations imposées par l'utilisation de hautes fréquences. Par exemple, il sera possible d'échantillonner le signal avec une fréquence d'échantillonnage beaucoup plus faible.

Partie F (0.5 pts)

Après la modulation (multiplication avec le cosinus), on se retrouve avec une partie du signal à de $\omega = 0$ et à de $\omega = \pm 2\omega_0$. Le filtre permet de garder seulement la partie autour de $\omega = 0$. Comme on veut échantillonner le signal plus tard dans le système (multiplication avec e(t)), cette opération va permettre de s'assurer que les composantes autour de $\omega = \pm 2\omega_0$ ne viennent pas se replier dans la bande spectrale d'intérêt.

Partie G (1 pts)

Non, il ne serait pas possible de reconstruire fidèlement $f(t)$ à partir de $b(t)$ parce que la fréquence d'échantillonnage, ω_e, est trop petite. Ceci fait en sorte qu'il y a du repliement spectral (*aliasing*) et le spectre original est perdu (voir figure 8). On doit remarquer que, ici, le critère de Nyquist n'est pas respecté. C'est à dire que la fréquence d'échantillonnage est plus petite que deux fois la largeur de bande du signal à échantillonner.

Partie H (1 pts)

La fréquence d'échantillonnage minimale pour échantillonner le signal est égale au double de la bande de ce signal (critère de Nyquist). La bande de ce signal est de 100 rad/s. Alors la fréquence d'échantillonnage minimale, $\omega_{e_{min}}$, est de 200 rad/s. Donc :

$$T_{e_{max}} = \frac{2\pi}{\omega_{e_{min}}} = \frac{2\pi}{200} = \frac{\pi}{100} \,. \tag{30}$$

Question 4 (11 pts)

Partie A (6 pts)

On veut calculer la série de Fourier du signal carré périodique d'amplitude 100 à une fréquence de 60 Hz. On a :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_0 t}\,, \tag{31}$$

où :

$$F(n) = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)\mathrm{e}^{-jn\omega_0 t}\mathrm{d}t = 60\left[\int_0^{1/120} 100\mathrm{e}^{-j120\pi nt}\mathrm{d}t - \int_{1/120}^{1/60} 100\mathrm{e}^{-j120\pi nt}\mathrm{d}t\right]\,, \tag{32}$$

$$= 60\left[\frac{100\mathrm{e}^{-j120\pi nt}}{-\,\mathrm{j}120\pi n}\bigg|_0^{1/120} + \frac{100\mathrm{e}^{-j120\pi nt}}{\mathrm{j}120\pi n}\bigg|_{1/120}^{1/60}\right]\,. \tag{33}$$

$$= \frac{6000}{120n\pi}\left[\frac{\mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}n\pi}}{-\,\mathrm{j}} + \frac{1}{\mathrm{j}} + \frac{\mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}2n\pi t}}{\mathrm{j}} - \frac{\mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}n\pi t}}{\mathrm{j}}\right]\,, \tag{34}$$

$$= \frac{50}{\mathrm{j}n\pi}\left[1 + \mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}2n\pi t} - 2\mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}n\pi t}\right] = \frac{100}{\mathrm{j}n\pi}\left[1 - (-1)^n\right]\,. \tag{35}$$

Ce dernier résultat est valide pour tous les n différents de 0 puisque, comme la fonction $f(t)$ a une valeur moyenne nulle, $F(0) = 0$. Finalement, la série de Fourier est donnée par :

$$\boxed{f(t) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{100}{\mathrm{j}n\pi}\left[1 - (-1)^n\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}120\pi nt}}\,. \tag{36}$$

Partie B (2 pts)

On filtre le signal avec un filtre rectangulaire idéal en $\mathrm{Rect}(\omega/2\omega_c)$ avec une fréquence de coupure $f_c = 75$ Hz. Ceci correspond à un ω_c de 150π. Toute les fréquences au delà de 150π seront coupées. Étant donné que la fréquence fondamentale de la série de Fourier de $f(t)$ est de 120π, la première harmonique se trouve à $\pm 120\pi$, la deuxième à $\pm 240\pi$, et ainsi de suite. En conséquent, après le filtrage, seule la première harmonique et la composante continue seront encore présentes, soit : $F(0)$, $F(-1)$ et $F(1)$. On sait déjà que $F(0) = 0$. Pour la première harmonique, on a, utilisant 35 :

$$F(-1) = \frac{100}{\mathrm{j}(-1)\pi}\left[1 - (-1)^{-1}\right] = -\frac{200}{\mathrm{j}\pi}\,, \tag{37}$$

et

$$F(1) = \frac{100}{\mathrm{j}(1)\pi}\left[1 - (-1)^{1}\right] = \frac{200}{\mathrm{j}\pi}\,. \tag{38}$$

Le signal temporel après filtrage est donné par :

$$g(t) = \sum_{n=-1}^{1} F(n)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_0 t} = F(0) + F(-1)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t} + F(1)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}\,, \tag{39}$$

ce qui donne :

$$g(t) = \frac{200}{\mathrm{j}\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t} - \frac{200}{\mathrm{j}\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t} = \frac{400}{\pi}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}}{2\,\mathrm{j}}\right]\,, \tag{40}$$

$$g(t) = \frac{400}{\pi}\sin(\omega_0 t)\,. \tag{41}$$

Finalement, utilisant la valeur connue de ω_0 :

$$\boxed{g(t) = \frac{400}{\pi}\sin(120\pi t)\,.} \tag{42}$$

Partie C (2 pts)

Calculons d'abord la puissance totale :

$$P_t = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T_0}\left[\int_0^{T_0/2} 100^2\mathrm{d}t + \int_{T_0/2}^{T_0} (-100)^2\mathrm{d}t\right]\,, \tag{43}$$

$$= \frac{100^2}{T_0}\left[\frac{T_0}{2} + T_0 - \frac{T_0}{2}\right] = \frac{100^2 T_0}{T_0} = 10000\,. \tag{44}$$

Après le filtre, il ne reste que la première harmonique. La puissance dans celle-ci est :

$$P_1 = \sum_{-1}^{1} |F(n)|^2 = |F(-1)|^2 + |F(1)|^2 = 2\,|F(1)|^2 = 2\left[\frac{200}{\pi}\right]^2 \approx 8106\,. \tag{45}$$

Enfin, la fraction de la puissance perdue est de :

$$\Delta P = \frac{P_t - P_1}{P_t} = \frac{10000 - 8106}{10000} = 18.94\%\,. \tag{46}$$

Partie D (1 pts)

NOTE : *Une erreur s'est glissée dans l'examen. on aurait dû lire* $H(\omega) = \frac{1}{1+\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_c}}$ *au lieu de* $H(\omega) = \frac{1}{1+\frac{\omega}{\omega_c}}$. *La solution présenté ici est celle pour la question telle que posé à l'examen.*

On a le filtre :

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + \frac{\omega}{\omega_c}}\,, \qquad \text{avec} \qquad \omega_c = 150\pi\text{rad/s}\,. \tag{47}$$

Le signal filtré sera alors :

$$f_f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H(n\omega_0)F(n)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_0 t} \tag{48}$$

Ainsi, dans la première harmonique, on aura :

$$F_f(1) = H(\omega_0)F(1) = \frac{1}{1+\frac{\omega_0}{\omega_c}}F(1) = \frac{1}{1+\frac{120\pi}{150\pi}}F(1) = \frac{5}{9}F(1) \tag{49}$$

et

$$F_f(-1) = H(-\omega_0)F(-1) = \frac{1}{1+\frac{-\omega_0}{\omega_c}}F(-1) = \frac{1}{1-\frac{120\pi}{150\pi}}F(-1) = 5F(-1)\,. \tag{50}$$

La puissance de cette harmonique sera alors :

$$P_f(1) = \left|\frac{5}{9}F(1)\right|^2 + |5F(-1)|^2 = \left|\frac{5}{9}\frac{200}{\mathrm{j}\pi}\right|^2 + \left|5\frac{200}{\mathrm{j}\pi}\right|^2 \approx 102572 \tag{51}$$

De la même façon, pour la troisième harmonique, on a $F_f(3) = \frac{5}{17}F(3)$ et $F_f(-3) = \frac{-5}{7}F(3)$. Alors la puissance sera :

$$P_f(3) = \left|\frac{5}{17}F(3)\right|^2 + \left|\frac{-5}{7}F(-3)\right|^2 = \left|\frac{5}{17}\frac{200}{\mathrm{j}3\pi}\right|^2 + \left|\frac{-5}{7}\frac{200}{\mathrm{j}3\pi}\right|^2 \approx 269 \tag{52}$$