Q1(a) Soit A l'ensemble des ministères, B l'ensemble des partis.
On cherche une fonction surjective de A dans B. (3)
Il y a

$$5^{12} - C(5,1)\,4^{12} + C(5,2)\,3^{12} - C(5,1)\,2^{12} + C(5,0)\cdot 1^{12}$$

telles fonctions. (3)

(b) Il s'agit d'une fonction non-surjective de A dans B. En tout, $\exists\ 5^{12}$ fonctions de A dans B, (3)
le nombre cherché est :

$$5^{12} - (\text{réponse pour (a)})$$
$$= C(5,1)\,4^{12} - C(5,2)\,3^{12} + C(5,1)\,2^{12} - C(5,0)\cdot 1^{12}$$ (3)

Q2(a) Il s'agit d'un dérangement de 10 élts (3)

$$\Rightarrow 10!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \cdots + \frac{1}{10!}\right)$$ (3)

(b) On choisit 5 personnes parmi 10 qui prennent leurs propres cellulaires.
$\exists$ $C(10,5)$ choix. (2)

Puis, on trouve un dérangement parmi les 5 cellulaires restants pour les 5 autres personnes.
$\exists$ $5!\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}\right)$ choix (2)

En tout, on a $C(10,5)\cdot 5!\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}\right)$ choix. (2)

<u>Q3</u> On considère les premiers fruits dans une rangée de n fruits. Si on commence avec un orange, alors il faut compléter le reste de la rangée et mettre deux fraises côte à côte. $\exists$ a_{n-1} façons de faire cela. (2)
De même si on commence avec une pomme. (2)

Si on commence avec fraise-orange, on a a_{n-2} façons de compléter le reste de la rangée. (2)

De même si on commence avec fraise-pomme. (2)

Si on commence avec deux fraises, on peut mettre n'importe quel fruit dans le reste de la rangée, donc $\exists$ 3^{n-2} façons de compléter la rangée (2)

Par le principe de la somme,
$a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2} + 3^{n-2}$. (2)

Q4 (Méthode 1)

Poly caractéristique $x^2 - 7x + 12$ (2)
$= (x-3)(x-4)$

racines : 3, 4. (2)

Donc, $a_n = A3^n + B4^n$ pour certains A et B. 2

$n=0$, $a_0 = A+B = 1$

$n=1$, $a_1 = 3A+4B = 2$

$\Rightarrow A = 2,\ B = -1.$ 4

$\Rightarrow a_n = 2\cdot 3^n - 4^n$ 2

Méthode 2

Soit $G(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$

$$\begin{aligned} G(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \\ &= 1 + 2x + (7a_1 - 12a_0)x^2 \\ &\quad + (7a_2 - 12a_1)x^3 + \cdots \\ &= 1+2x + (7a_1x^2 + 7a_2x^3 + \cdots) \\ &\quad + (-12a_0x^2 - 12a_1x^3 + \cdots) \\ &= 1+2x + 7x(-a_0 + a_0 + a_1x + \cdots) \\ &\quad - 12x^2(a_0 + a_1x + \cdots) \end{aligned}$$

2

2

$$G(x) = 1+2x + 7x(-1+G(x)) - 12x^2 G(x)$$

$$G(x)(1-7x+12x^2) = 1-5x$$

$$G(x) = \frac{1-5x}{(1-3x)(1-4x)} \quad 2$$

$$= \frac{2}{1-3x} - \frac{1}{1-4x} \quad 2$$

$$= 2\sum_{n=0}^{\infty}(3x)^n - \sum_{n=0}^{\infty}(4x)^n \quad 2$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(2\cdot 3^n - 4^n)x^n$$

$$\Rightarrow a_n = 2\cdot 3^n - 4^n. \quad 2$$

Q5 (Méthode 1)

Poly caractéristique : $X^2 - X - 2$
$= (X-2)(X+1)$

racines 2 et -1. $\quad 2$

2 est aussi dans la fonction exponetielle, donc

$$a_n = A\,2^n + B(-1)^n + Cn2^n$$ (2)

Chercher C :

remplacer a_n par $Cn2^n$,
a_{n-1} par $C(n-1)\,2^{n-1}$ et
a_{n-2} par $C(n-2)\,2^{n-2}$ (2)

$$Cn2^n = C(n-1)2^{n-1} + 2C(n-2)2^{n-2} + 3\cdot 2^n$$

Annuler 2^{n-1} :

$$2Cn = C(n-1) + C(n-2) + 6$$

$$C = 2$$ (2)

Chercher A et B

$$a_n = A\,2^n + B(-1)^n + 2n2^n$$

$$a_0 = A + B = 0$$

$$a_1 = 2A - B + 4 = 1$$

$\Rightarrow A = -1,\ B = 1$ (2)

$\Rightarrow a_n = -2^n + (-1)^n + n\,2^{n+1}$ (2)

<u>Méthode 2</u>

Soit $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$

$= x + (a_1 + 2a_0 + 3\cdot 2^2)x^2 + (a_2 + 2a_1 + 3\cdot 2^3)x^3 + \cdots$ (2)

$= x + (a_1 x^2 + a_2 x^3 + \cdots) + (2a_0 x^2 + 2a_1 x^3 + \cdots) + (3\cdot 2^2 x^2 + 3\cdot 2^3 x^3 + \cdots)$

$= x + x(-a_0 + a_0 + a_1 x + \cdots) + 2x^2(a_0 + a_1 x + \cdots) + 12x^2(1 + 2x + (2x)^2 + \cdots)$ (2)

$$G(x) = x + xG(x) + 2x^2G(x) + \frac{12x^2}{1-2x}$$

$$(1 - x - 2x^2)G(x) = x + \frac{12x^2}{1-2x}$$

$$(1-2x)(1+x)\,G(x) = \frac{x+10x^2}{1-2x}$$

$$G(x) = \frac{x+10x^2}{(1-2x)^2(1+x)} \qquad 2$$

$$= \frac{1}{1+x} - \frac{3}{1-2x} + \frac{2}{(1-2x)^2} \qquad 2$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n - 3\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n + 2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(2x)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n - 3\cdot 2^n + 2(n+1)2^n\right)x^n \qquad 2$$

$$\Rightarrow a_n = (-1)^n - 3\cdot 2^n + 2(n+1)2^n$$

$$= (-1)^n - 3\cdot 2^n + 2n2^n + 2\cdot 2^n$$

$$= (-1)^n - 2^n + n2^{n+1}. \qquad 2$$

Q6 (Méthode 1)

Poly caractéristique $X-3$ racine 3. (2)

1 n'est pas une racine, on a un poly de degré 1 dans la relation de récurrence

$\Rightarrow$ $a_n = A\,3^n + Bn + C$ (2)

pour certains A, B et C

Chercher B et C : $Bn+C = 3(B(n-1)+C) - 2n+1$ (2)

$(2B-2)n + 2C - 3B + 1 = 0$

$2B-2=0$

$2C-3B+1=0$

$\Rightarrow$ $B=1$, $C=1$. (2)

Donc, $a_n = A\,3^n + n + 1$.

Chercher A : $n=0$, $a_0 = A+1 = 3$

$A = 2$ (2)

Donc $a_n = 2\cdot 3^n + n + 1$. (2)

Methode 2

Sort $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$

$= 3 + (3a_0 - 2 + 1)x + (3a_1 - 2\cdot 2 + 1)x^2$

$+ (3a_2 - 2\cdot 3 + 1)x^3 + \cdots$ (2)

$= 3 + (3a_0 x + 3a_1 x^2 + 3a_2 x^3 + \cdots)$

$+ (-2x - 2\cdot 2x^2 - 2\cdot 3x^3 - \cdots)$

$+ (x + x^2 + x^3 + \cdots)$

$= 3 + 3x(a_0 + a_1 x + \cdots)$

$- 2x(1 + 2x + 3x^2 + \cdots)$ (2)

$+ x(1 + x + x^2 + \cdots)$

$= 3 + 3x\,G(x) - \frac{2x}{(1-x)^2} + \frac{x}{1-x}$

$G(x)(1-3x) = 3 - \frac{2x}{(1-x)^2} + \frac{x}{1-x}$

$G(x) = \frac{2x^2 - 7x + 3}{(1-x)^2(1-3x)}$ (2)

$= \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{2}{1-3x}$ (2)

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} (3x)^n \quad 2$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1+2\cdot 3^n)x^n$$

$$\Rightarrow a_n = n+1+2\cdot 3^n \quad 2$$

Q7 (a) Soit $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$$G(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$
$$= 2 + (-a_0+3)x + (-a_1+3)x^2 + \cdots \quad 2$$
$$= 2 + (-a_0 x - a_1 x^2 - \cdots) + (3x + 3x^2 + \cdots) \quad 2$$
$$= 2 - x(a_0 + a_1 x + \cdots) + 3x(1 + x + x^2 + \cdots)$$
$$= 2 - xG(x) + \frac{3x}{1-x}$$

2 2

$$(x+1)G(x) = 2 + \frac{3x}{1-x}$$
$$= \frac{2+x}{1-x}$$

$$G(x) = \frac{2+x}{(1-x)(1+x)} = \frac{2+x}{1-x^2}. \quad 2$$

(b) $G(x) = \dfrac{2+x}{1-x^2}$

$= (2+x)(1+x^2+x^4+x^6+\cdots)$ 2

La seule terme de x^{2016} dans ce produit est $2 \cdot x^{2016}$ 2

Donc, $a_{2016} = 2$. 2

Alternativement

Poly caractéristique $x+1$, -1 est la seule racine.

$a_n = A(-1)^n + B$ pour certains A et B. 2

$B = -B + 3 \Rightarrow B = \frac{3}{2}$.

$a_n = A(-1)^n + \frac{3}{2}$.

$a_0 = A + \frac{3}{2} = 2$ 2

$\Rightarrow \quad A = \frac{1}{2}$

Donc, $\quad a_n = \frac{1}{2}(-1)^n + \frac{3}{2}$.

$n = 2016, \qquad a_{2016} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$ ②

Q8

$$E_a = x^3 + x^4 + x^5 + \cdots \qquad ②$$
$$= x^3(1 + x + x^2 + \cdots)$$
$$= \frac{x^3}{1-x} \quad ②$$

$$E_b = 1 + x^3 + x^6 + x^9 + \cdots \quad ②$$
$$= \frac{1}{1-x^3} \quad ②$$

$$E_c = x^2 + x^3 + x^4 \quad ②$$

Donc, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = E_a E_b E_c = \frac{x^3(x^2+x^3+x^4)}{(1-x)(1-x^3)}$

$$= \frac{x^5}{(1-x)^2} \quad ②$$