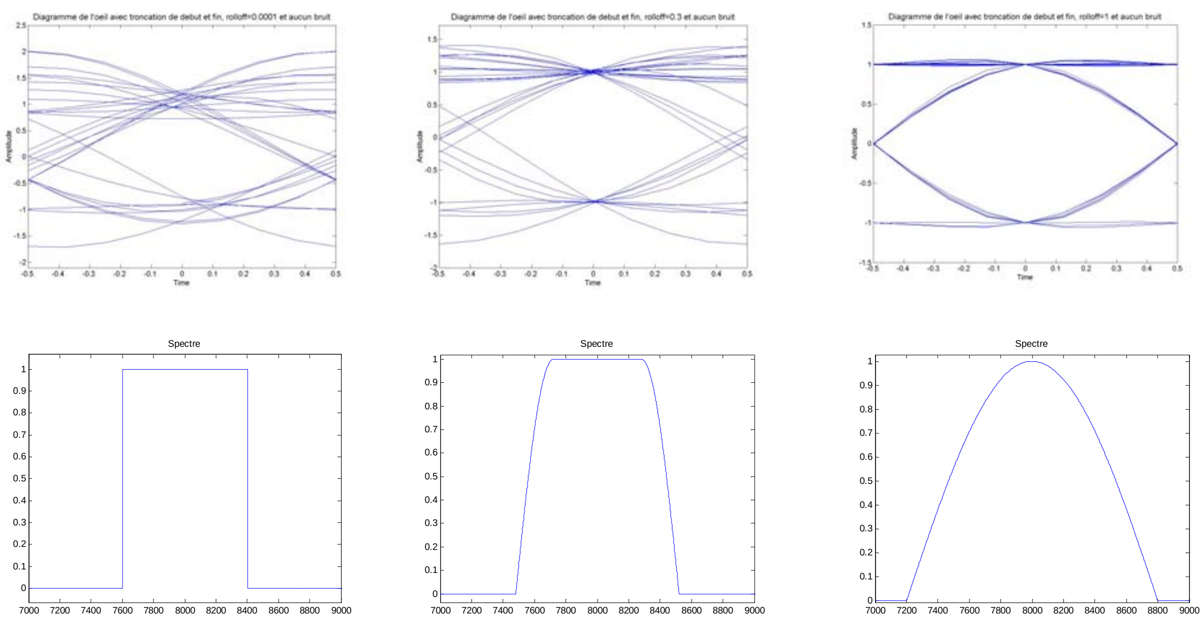
Mercredi le 12 mars 2014; Durée: 13h30 à 15h20
Aucune documentation permise; une calculatrice permise

Problème 1 (25 points sur 100)

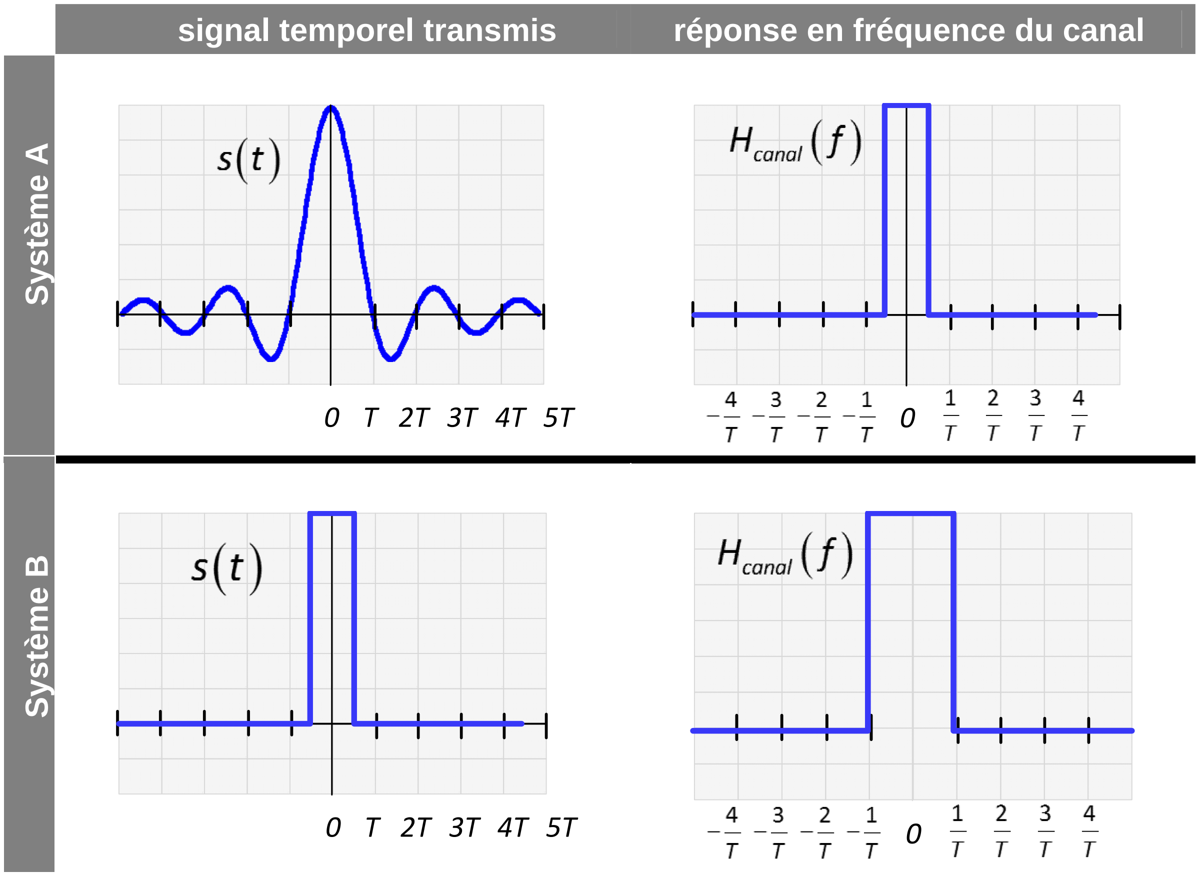
A. (10 points) Pour les trois impulsions « raised cosine » illustrées, donner les avantages/désavantages en faisant référence aux diagrammes suivantes :

facteur d'affaiblissement=0 | facteur d'affaiblissement=0.3 | facteur d'affaiblissement=1



B. (5 points) Quelle est l'impulsion Nyquist idéale et dans quel sens est-il optimal?

C. (10 points) Lequel de deux systèmes suivants souffrira plus de l'effet « interférence intersymbole » (ISI), et pourquoi?



Problème 2 (20 points)

Pour les signaux

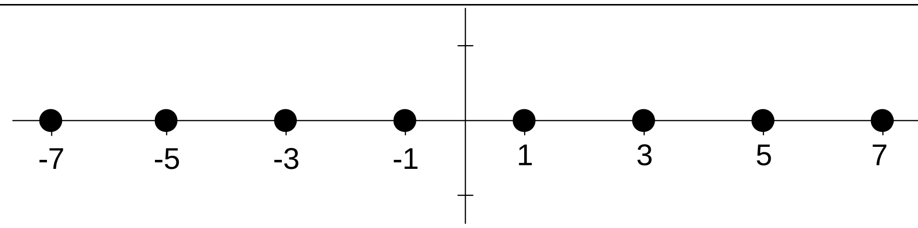
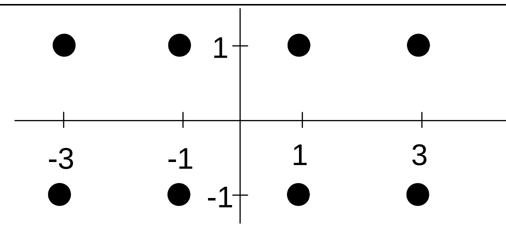
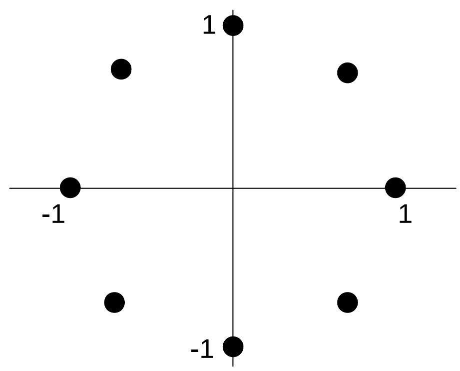
$$
\begin{aligned}
s_1(t) &= 1, && 0 \le t \le 1 \\
s_2(t) &= \cos 2\pi t, && 0 \le t \le 1 \\
s_3(t) &= \cos^2 \pi t, && 0 \le t \le 1
\end{aligned}
$$

A. (10 points) Est-ce que ces signaux ont la même énergie? Quelle est l'énergie moyenne par bit?

B. (10 points) Donnez une base orthonormée pour ces trois signaux.

Problème 3 (55 points sur 100)

Voici quatre constellations de 8 symboles avec énergie moyenne par symbole de E_s :

A	
B	
C	
D	Hypercube de dimension 8; points de constellation à $\left(\sqrt{E_s},0,0,0,0,0,0,0\right)$ $\left(0,\sqrt{E_s},0,0,0,0,0,0\right)$ $\left(0,0,\sqrt{E_s},0,0,0,0,0\right)$ $\left(0,0,0,\sqrt{E_s},0,0,0,0\right)$ $\left(0,0,0,0,\sqrt{E_s},0,0,0\right)$ $\left(0,0,0,0,0,\sqrt{E_s},0,0\right)$ $\left(0,0,0,0,0,0,\sqrt{E_s},0\right)$ $\left(0,0,0,0,0,0,0,\sqrt{E_s}\right)$

A. (10 points) Donnez la correspondance entre les constellations et les modulations 8PSK, 8QAM, 8PAM, et 8FSK.

B. (5 points) Comment savons-nous que seulement la constellation D a les coordonnées dans l'espace du signal?

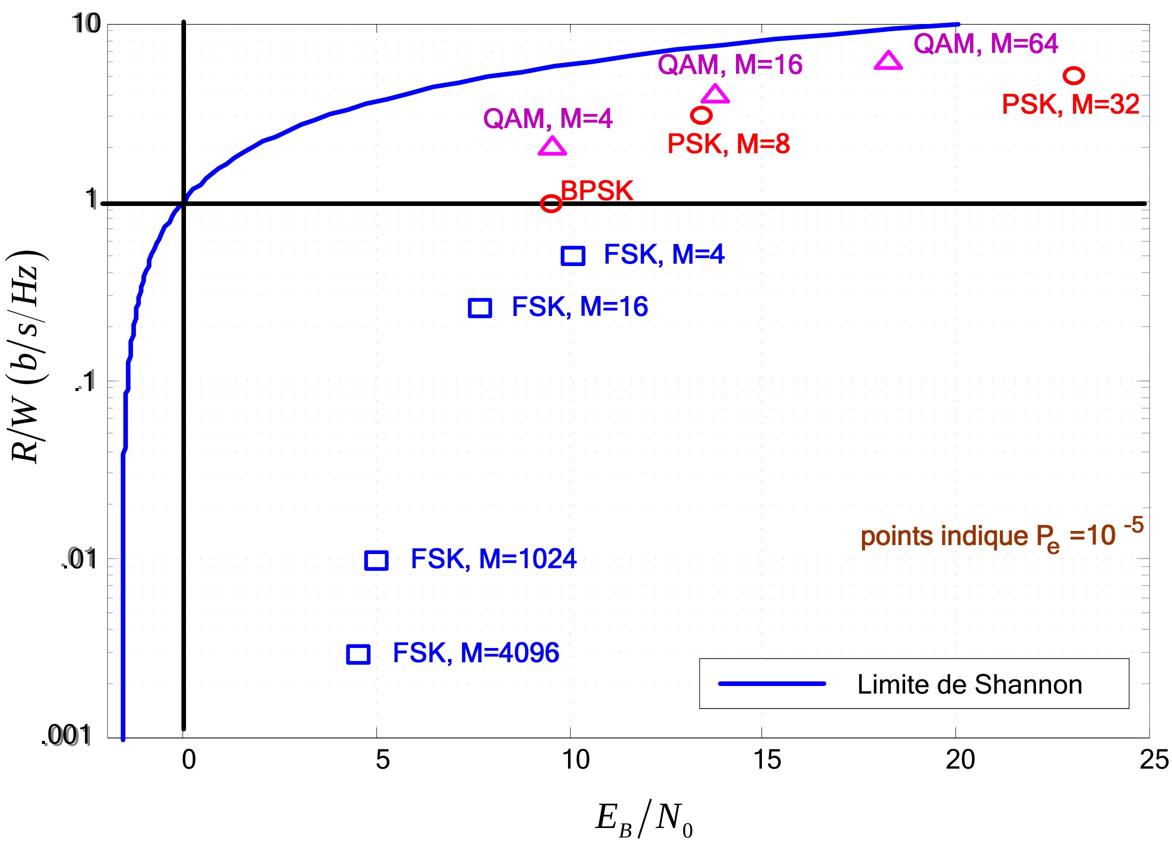
C. (10 points) Supposons que 1 Mb/s est transmis avec l'impulsion de Nyquist idéale. Quelle est la largeur de bande (en Hz) pour chaque constellation et l'efficacité spectrale (en b/s/Hz) pour la détection cohérente?

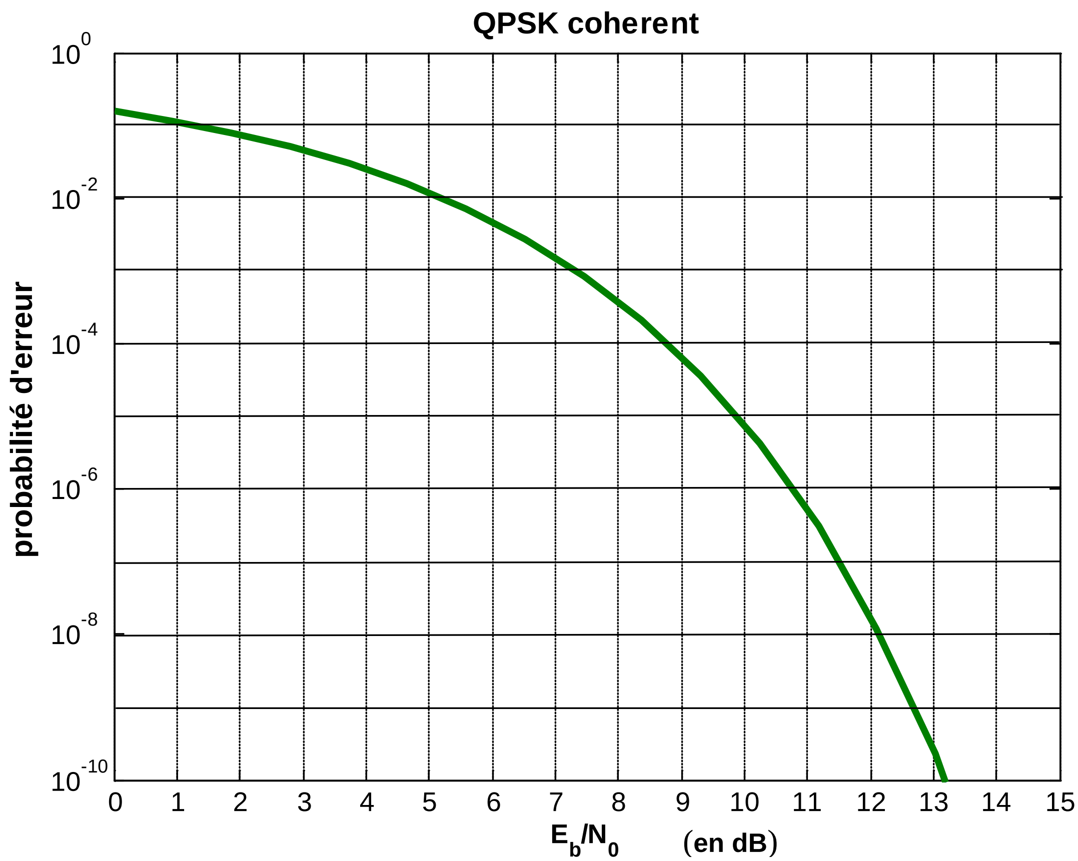
D. (10 points) Calculer les coordonnées pour l'espace du signal pour les constellations A et B.

E. (5 points) Trouvez la probabilité d'erreur en fonction de E_b/N_0 pour la constellation A en utilisant l'estimé provenant de la borne de l'union.

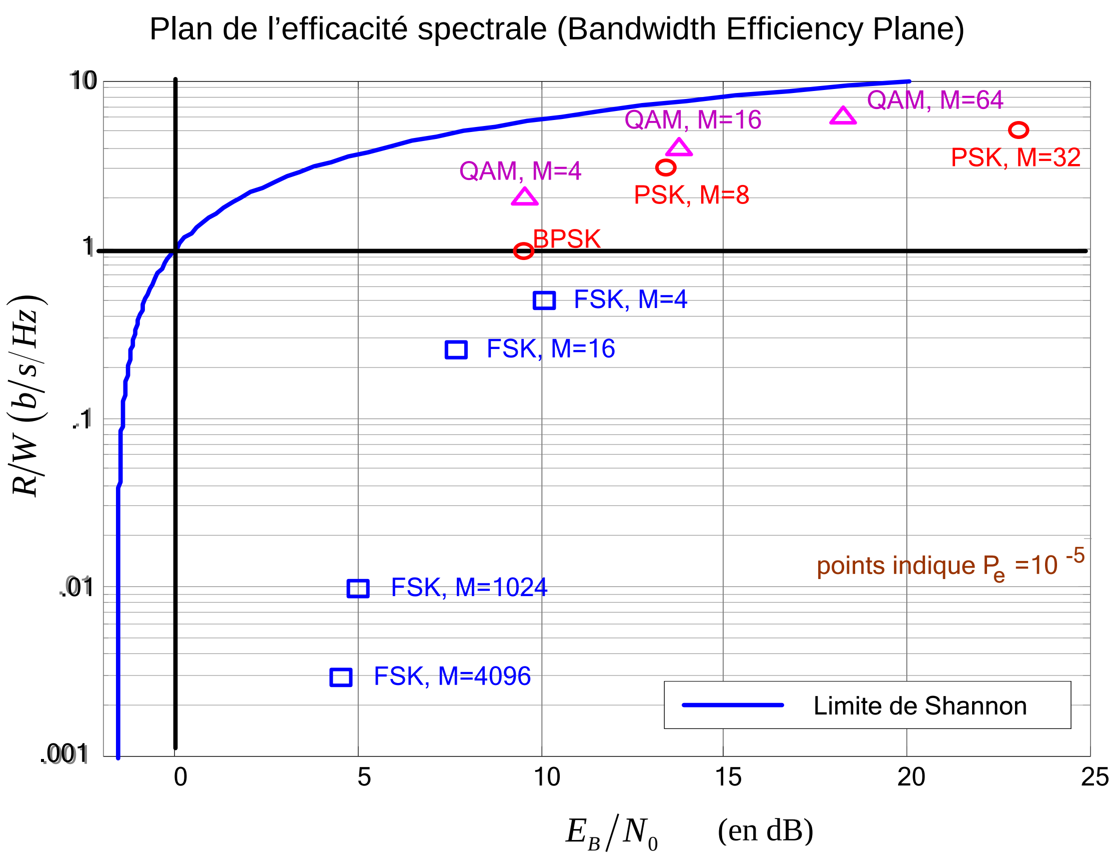
F. (5 points) Trouvez la perte en dB par rapport au QPSK pour constellation A.

G. (10 points) Mettre le point pour constellation A dans le graphique suivant



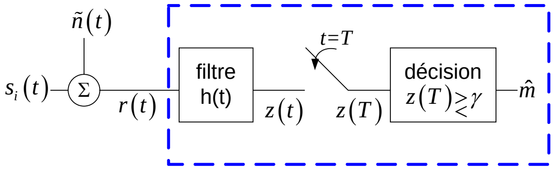


QPSK coherent
probabilité d'erreur
10^{0}
10^{-2}
10^{-4}
10^{-6}
10^{-8}
10^{-10}
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
E_b/N_0 (en dB)



Plan de l'efficacité spectrale (Bandwidth Efficiency Plane)
$R/W\ (b/s/Hz)$
10
1
.1
.01
.001
0 5 10 15 20 25
E_B/N_0 (en dB)
QAM, M=64
QAM, M=16
PSK, M=32
QAM, M=4
PSK, M=8
BPSK
FSK, M=4
FSK, M=16
FSK, M=1024
FSK, M=4096
points indique $P_e = 10^{-5}$
Limite de Shannon

Récepteur d'échantillonnage



MAP: i qui maximise $p(z|s_i)\,p(s_i)$

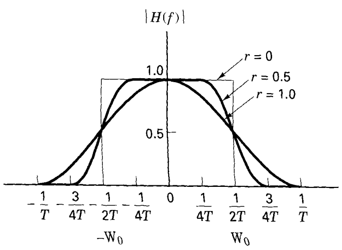
i qui minimise $\left\|\mathbf{r}-\mathbf{s}_i\right\|^2 - N_0 \ln P(\mathbf{s}_i)$

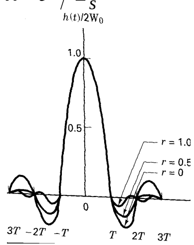
$P(\mathbf{s}_i)$ = probabilité a priori de symbole $\mathbf{s}_i$

ML: i qui maximise $p(z|s_i)$

i qui minimise $\left\|\mathbf{r}-\mathbf{s}_i\right\|^2$

Raised cosine $v(t) = \dfrac{\sin(\pi t/T_s)}{\pi t/T_s}\,\dfrac{\cos(r\pi t/T_s)}{1-4r^2t^2/T_s^2}$





Énergie moyenne

$$E_{moy} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\left\|\mathbf{s}_i\right\|^2$$

$$= \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\left[\text{énergie du signal } i\right]$$

Énergie par bit v. énergie par symbole

$$E_b \log_2 M = E_s$$

QAM $\eta = \log_2 M$ †

Conversion de l'espace I/Q vers espace du signal

$$\left(\tilde{a}_n^I, \tilde{a}_n^Q\right) = \sqrt{\frac{M \cdot E_s}{\sum_{i=1}^{M}\left[\left(a_n^I\right)^2 + \left(a_n^Q\right)^2\right]}}\left(a_n^I, a_n^Q\right)$$

coordonnées, espace du signal

coordonnées, espace I/Q

cas rectangulaire (carrée) $M=L^2$

$$P_e = 2\left(1-\frac{1}{\sqrt{M}}\right)Q\left(\sqrt{\frac{3\log_2 M}{(M-1)}\frac{E_b}{N_0}}\right) \qquad d_{\min} = \sqrt{\frac{6\log_2 L}{L^2-1}}$$

Borne d'union

$$P_e \approx \frac{2K}{M}Q\left(\frac{D_{\min}}{\sqrt{2N_0}}\right) = \frac{2K}{M}Q\left(d_{\min}\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

K est le nombre des paires des signaux séparés par la distance minimale D_{min}

Distance minimale dans l'espace du signal

$$D_{\min} = \min_{i\neq k}\left\|\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_k\right\| \quad \text{et} \quad d_{\min} = \frac{D_{\min}}{\sqrt{2E_b}}$$

$$P_e(BPSK) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

$$P_e(OOK) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

$$P_e(QPSK) \approx 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

Perte par rapport à QPSK

$d_{\min} = \sqrt{x}\sqrt{2}$ perte $= -10\log_{10} x$

Pour une modulation orthogonale

$$P_e(bit) = P_b = P_e(symbol)\frac{M/2}{M-1}$$

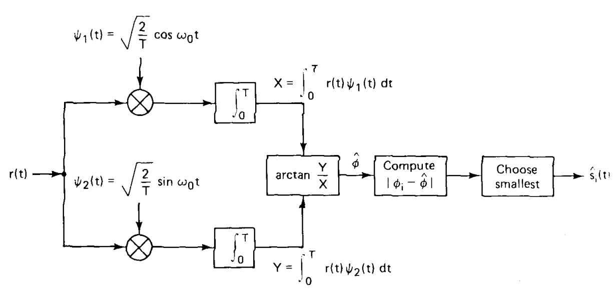
Pour une modulation non-orthogonale avec codage de gray

$$P_e(bit) = P_b = \frac{P_e(symbol)}{\log_2 M}$$

Efficacité spectrale

$$\eta = \frac{R_b}{W} = \frac{1}{T_b}\frac{1}{W} \text{ bits/s/Hz}$$

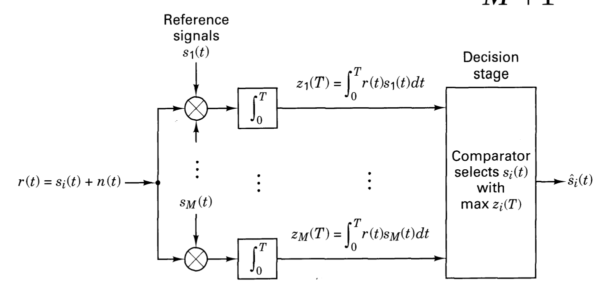
MPSK cohérent $\eta = \log_2 M$ †



$$P_e(M) \approx 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}} \sin\frac{\pi}{M}\right)$$

$$= 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_b \log_2 M}{N_0}} \sin\frac{\pi}{M}\right)$$

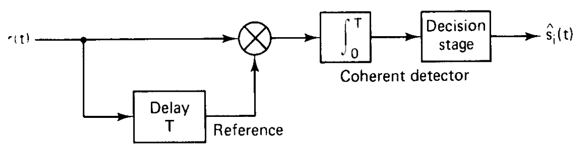
MFSK cohérent $\eta = \dfrac{2\log_2 M}{M+1}$ †



$$P_e = (M-1)Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) = (M-1)Q\left(\sqrt{\frac{E_b \log_2 M}{N_0}}\right)$$

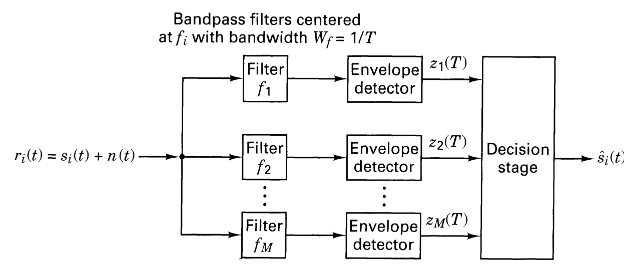
Séparation minimale $1/2T_s$

DPSK incohérent $P_e = \frac{1}{2} e^{-E_b/N_0}$



~1 dB de perte entre DPSK et BPSK

MFSK incohérent $\eta = \dfrac{\log_2 M}{M}$ †



$$P_e(BFSK) = \frac{1}{2} e^{-E_b/2N_0}$$

~1 dB de perte BFSK cohérente vs. incohérente

Séparation minimale $1/T_s$

Loi de Shannon

$$C = W \log_2(1 + SNR) \qquad SNR = \frac{E_b}{N_0}\eta$$

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{W}{C}\left(2^{C/W} - 1\right) \qquad \frac{C}{W} \to 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{E_b}{N_0} \to -1.6dB$$

Relations trigonométriques

θ	$\cos\theta$	$\sin\theta$	$\tan\theta$
0	1	0	0
$\pi/8$	.85	.38	.41
$\pi/4$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	1
$\pi/3$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}$
$\pi/2$	0	1	∞

$$\tan(y) = x \Leftrightarrow y = \arctan x + k\pi$$

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \sin\beta + \cos\alpha\cos\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

Processus Gram Schmidt

$$\psi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{E_1}} s_1(t) \text{ où } E_1 = \int_0^T s_1^2(t)\,dt$$

$$\theta_2(t) = s_2(t) - \langle s_2(t), \psi_1(t)\rangle \psi_1(t)$$

$$E_2 = \int_0^T \theta_2^2(t)\,dt \qquad \psi_2(t) = \frac{\theta_2(t)}{\sqrt{E_2}}$$

$i.$ $$\theta_i(t) = s_i(t) - \sum_{k=1}^{i-1} \langle s_i(t), \psi_k(t)\rangle \psi_k(t)$$

$$E_i = \int_0^T \theta_i^2(t)\,dt \qquad \psi_i(t) = \frac{\theta_i(t)}{\sqrt{E_i}}$$

† en supposant une impulsion Nyquist idéale