GEL-2001 83320 : Analyse des signaux

Mini-test 1 A2011 : Solutions

Département de génie électrique et de génie informatique

Problème 1 (1 pt)

a)

On demande d'identifier les coefficients de la série de Fourier pour la fonction suivante :

$$f(t) = 1 + 2\sin(2t) + \cos^2(2t).$$

Par inspection, on trouve d'abord que $\omega_0 = 2$, ce qui nous donne :

$$f(t) = 1 + 2\sin(\omega_0 t) + \cos^2(\omega_0 t).$$

En utilisant les relations d'Euler et une propriété du $\cos^2(t)$, on trouve la fonction sous sa forme exponentielle :

$$f(t) = 1 + \frac{1}{\mathrm{j}}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}\right] + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\omega_0 t)\,,$$

$$f(t) = 1 + \frac{1}{\mathrm{j}}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}\right] + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\omega_0 t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega_0 t}\right]\,.$$

À partir de cette dernière expression, il est possible de retrouver les termes associés aux coefficients de Fourier...

$$f(t) = \underset{\substack{\uparrow \\ F(0)}}{\tfrac{3}{2}} + \underset{\substack{\uparrow \\ F(1)}}{\tfrac{1}{\mathrm{j}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}} - \underset{\substack{\uparrow \\ F(-1)}}{\tfrac{1}{\mathrm{j}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}} + \underset{\substack{\uparrow \\ F(2)}}{\tfrac{1}{4}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\omega_0 t}} + \underset{\substack{\uparrow \\ F(-2)}}{\tfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega_0 t}}\,.$$

Finalement, on trouve les différents coefficients nous permettant ainsi de déduire que la réponse est :

$$F(0) = \tfrac{3}{2}, \quad F(1) = -\mathrm{j}, \quad F(-1) = \mathrm{j}, \quad F(2) = \tfrac{1}{4}, \quad F(-2) = \tfrac{1}{4}\,.$$

Problème 2 (2 pt)

On demande de calculer les coefficients $F(n)$ de $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} f(t-3k)$.

Par inspection du graphique ou de l'expression de $f(t)$, on trouve d'abord la période et la pulsation (fréquence angulaire) de la fonction périodique :

$$T_0 = 3, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{3}\,.$$

Les coefficients de la série de Fourier peuvent être trouvés directement en appliquant la définition de $F(n)$:

$$F(n) = \frac{1}{T_0}\int\limits_{-T_0/2}^{T_0/2} f_p(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t \quad = \frac{1}{3}\int_{-1.5}^{1.5} f_p(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t\,,$$

$$= \frac{1}{3}\left[\int_{-1}^{-0.5}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t + \int_{-0.5}^{0.5} 2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t + \int_{0.5}^{1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t\right]\,,$$

ce qui devient, après intégration :

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{-3\,\mathrm{j}n\omega_0}\left(\left[\mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}n\omega_0 t}\right]_{t=-1}^{-0.5} + \left[2\mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}n\omega_0 t}\right]_{t=-0.5}^{0.5} + \left[\mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}n\omega_0 t}\right]_{t=0.5}^{1}\right)\,,\\
&= \frac{1}{-3\,\mathrm{j}n\omega_0}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_0\frac{1}{2}} - \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_0} + 2\mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}n\omega_0\frac{1}{2}} - 2\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_0\frac{1}{2}} + \mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}n\omega_0} - \mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}n\omega_0\frac{1}{2}}\right)\,,\\
&= \frac{1}{-3\,\mathrm{j}n\omega_0}\left(-\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_0\frac{1}{2}} + \mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}n\omega_0\frac{1}{2}} - \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_0} + \mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}n\omega_0}\right)\,,\\
&= \frac{2}{3n\omega_0}\left[\sin(n\omega_0\frac{1}{2}) + \sin(n\omega_0)\right]\,,\\
&= \frac{1}{3}\mathrm{Sa}(n\omega_0\frac{1}{2}) + \frac{2}{3}\mathrm{Sa}(n\omega_0)\,,\\
&= \frac{1}{3}\mathrm{Sa}(n\frac{\pi}{3}) + \frac{2}{3}\mathrm{Sa}(n\frac{2\pi}{3})\,,
\end{aligned}
$$

Comme $\mathrm{Sa}(0) = 1$, $F(0) = 1$. On peut aussi faire l'intégrale suivante :

$$
F(0) = \frac{1}{3}\int_{-1.5}^{1.5} f_p(t)\mathrm{d}t = 1\,.
$$

Une méthode plus rapide serait de trouver la série de Fourier d'un rectangle général, car la fonction est composée de deux rectangles.

$$
\begin{aligned}
F_{\text{rect}}(n) = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f_p(t)\mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t = \frac{1}{T_0}\int_{-a}^{a} A\mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t \quad &= \frac{A}{T_0(-\,\mathrm{j}n\omega_0)}\left[\mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}n\omega_0 a} - \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_0 a}\right]\,,\\
= \frac{2A}{T_0 n\omega_0}\sin(n\omega_0 a) = \frac{2Aa}{T_0}\mathrm{Sa}(n\omega_0 a)\,.
\end{aligned}
$$

Sachant que nous avons un rect de [-1 1] et d'amplitude 1 et un rect de [-0.5 0.5] lui aussi d'amplitude 1 :

$$
F(n) = \frac{2(1)(1)}{3}\mathrm{Sa}(n\omega_0) + \frac{2(1)}{(3)(2)}\mathrm{Sa}(n\omega_0\frac{1}{2}) = \frac{2}{3}\mathrm{Sa}(n\omega_0) + \frac{1}{3}\mathrm{Sa}(n\omega_0\frac{1}{2})\,.
$$

Problème 3 (2 pt)

Vrai, faux ou JP (J'ai peur) ? Bonne réponse : 0.5 points ; mauvaise réponse : -0.25 points ; JP : 0 point.

1)

Si la dérivée d'une fonction est discontinue, sa série de Fourier converge nécessairement vers zéro en $1/n$. Cet énoncé est **FAUX**, car pour converger vers $1/n$ la fonction ne doit pas être continue. Si on sait seulement que sa dérivé est discontinue, elle peut converger vers $1/n$ ou $1/n^2$.

2)

Pour que l'énoncé 2 soit pertinent, il aurait fallu lire, si $f_p(t)$ sur une période est nulle pour $t < 0$ et non-nulle pour $t > 0$, $F(n)$ est nécessairement complexe. Cet énoncé est **VRAI**, car $F(n)$ est réel et pair si et seulement si $f_p(t)$ est paire et, dans cet énoncé, $f_p(t)$ sur une période n'est pas paire.

3)

On demande si $F(n) = F(-n)$ lorsque $f(t)$ est imaginaire. On sait que $F^*(n) = F(-n)$ lorsque $f(t)$ est réelle. Donc si $f(t)$ est imaginaire $F(-n) = -F^*(n)$, cet énoncé est **FAUX**. On peut démontrer que si $f(t)$ est imaginaire $F(-n) = -F^*(n)$ à partir de la propriété que $F^*(n) = F(-n)$ lorsque $f(t)$ est réelle. On part de $f_{\text{imag}} = \mathrm{j} f_{\text{real}}$.

$$\begin{aligned} F_{f_{\text{real}}}(n) &= a + \mathrm{j}b\,, \\ F_{f_{\text{imag}}}(n) &= \mathrm{j}F_{f_{\text{real}}}(n) = \mathrm{j}a - b\,, \\ F_{f_{\text{imag}}}(-n) &= \mathrm{j}F_{f_{\text{real}}}(-n) = \mathrm{j}F^*_{f_{\text{real}}}(n) = \mathrm{j}a + b\,, \\ &= \mathrm{j}a + b = -F^*_{f_{\text{imag}}}(n)\,. \end{aligned}$$

4)

On demande si lorsque $F(n) = 1$, $f(t)$ est de puissance infinie. Cet énoncé est **VRAI**, car le Théorème de Parseval dit que :

$$P = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F(n)|^2,$$

et la somme d'une infinité de 1 donne l'infini.