# Mathématiques de l'ingénieur I (MAT-10363)
# Examen partiel du 7 novembre 2003
# SOLUTIONS

## Question 1
**( 8 + 8 + 4 = 20 points )**

Considérer l'équation différentielle d'ordre 2

$$y'' - y' + \frac{1}{4}y = (x+1)e^{x/2} \qquad \text{(I).}$$

a) Trouver la solution générale $y_h$ de l'équation homogène associée.

L'équation homogène associée est : $y'' - y' + \frac{1}{4}y = 0$ (H).

Il s'agit d'une ÉD du 2$^{\text{e}}$ ordre linéaire à coefficients constants.

Son polynôme caractéristique est $\lambda^2 - \lambda + 1/4$.

Il possède la racine **double** $\lambda_1 = 1/2$.

Donc, la sol. gén. de l'éq. homogène est :

$$y_h(x) = e^{x/2}\left(c_1 x + c_2\right).$$

b) Trouver une solution particulère $y_p$ de (I).

Le membre de droite de (I) est $r(x) = (x+1)e^{x/2}$.

Le nombre complexe $\alpha + i\beta$ associé à ce $r(x)$ est $1/2 + 0i$.

Or, $1/2$ est une racine double du polynôme caractéristique, ce qui implique le facteur $x^2$ ($s = 2$) dans la sol. part. à essayer.

Comme $x+1$ est un polynôme de degré 1, on a la forme :

$$y_p(x) = x^2(Ax+B)e^{x/2} = (Ax^3 + Bx^2)e^{x/2}.$$

On calcule

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= \left(\frac{A}{2}x^3 + \left(3A + \frac{B}{2}\right)x^2 + 2Bx\right)e^{x/2} \\ y_p''(x) &= \left(\frac{A}{4}x^3 + \left(3A + \frac{B}{4}\right)x^2 + (6A+2B)x + 2B\right)e^{x/2} \end{aligned}$$

En substituant dans (I), on trouve

$$\begin{aligned} (x+1)e^{x/2} &= y_p'' - y_p' + \frac{1}{4}y_p \\ &= \left(\frac{A}{4}x^3 + \left(3A + \frac{B}{4}\right)x^2 + (6A+2B)x + 2B\right)e^{x/2} \\ &\quad -\left(\frac{A}{2}x^3 + \left(3A + \frac{B}{2}\right)x^2 + 2Bx\right)e^{x/2} \\ &\quad +\frac{1}{4}\left(Ax^3 + Bx^2\right)e^{x/2} \\ &= \left(0x^3 + 0x^2 + 6Ax + 2B\right)e^{x/2} \end{aligned}$$

On a une identité en $x$ si et seulement si

$$6A = 1 \quad \text{et} \quad 1 = 2B,$$

ce qui donne $A = 1/6$ et $B = 1/2$.

Donc, la sol. part. cherchée est

$$y_p(x) = \left(\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2}\right) e^{x/2}.$$

c) En déduire la solution générale de (I).

Par le **principe de superposition**,

$$y_g = y_h + y_p = e^{x/2}(c_1 x + c_2) + \left(\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2}\right) e^{x/2} = e^{x/2}\left(\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2\right).$$

## Question 2

**( 5 + 10 = 15 points )**

Considérer l'équation différentielle $y' + \dfrac{y}{x} = \ln x + \dfrac{1}{2}$ $(\star)$.

a) Montrer que $y_p(x) = \dfrac{x \ln x}{2}$ est une solution particulière de $(\star)$ sur $(0, \infty)$.

$$y_p'(x) = \frac{\ln x}{2} + \frac{1}{2}.$$

Après **subsitution** dans $(\star)$, on trouve

$$y_p' + \frac{y_p}{x} = \frac{\ln x}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\ln x}{2} = \ln x + \frac{1}{2},$$

ce qui correspond bien au membre de droite de $(\star)$.

Donc $y_p$ est une sol. part. de $(\star)$.

b) Trouver la solution générale de $(\star)$ sur $(0, \infty)$.

On trouve la solution générale de l'équation homogène associée :

$$y' + \frac{y}{x} = 0.$$

Il s'agit d'une équation du 1$^{\text{er}}$ ordre séparable :

$$\begin{aligned}
\frac{y'}{y} &= -\frac{1}{x} \\
\ln|y| &= -\ln|x| + c_1 \quad (c_1 \in \mathbb{R}) \\
y &= \frac{c_2}{x} \quad (c_2 \neq 0) \\
y &= \frac{c}{x} \quad (c \in \mathbb{R},\ \text{car } y(x) = 0 \text{ est aussi solution}).
\end{aligned}$$

Par le **principe de superposition** on a

$$y_g = y_h + y_p = \frac{c}{x} + \frac{x \ln x}{2}.$$

## Question 3
**( 20 points )**

En utilisant un changement de variable approprié, résoudre l'équation différentielle $x^2y' = x^2 + xy + y^2$ sur $(0, \infty)$.

On pose $u(x) := y(x)/x$.

On a

$$y' = (xu)' = u + xu'.$$

Donc,

$$\begin{array}{rcl} x^2y' & = & x^2 + xy + y^2 \\ x^2(u + xu') & = & x^2 + x(xu) + (xu)^2 \\ x^3u' & = & x^2 + x^2u^2 \\ xu' & = & 1 + u^2 \qquad (\text{car } x \neq 0). \end{array}$$

C'est une équation séparable :

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{u'}{1+u^2} & = & \dfrac{1}{x} \\ \arctan u & = & \ln x + c \\ u & = & \tan(\ln x + c) \quad (c \in \mathbb{R}). \end{array}$$

Comme $u = y/x$, on trouve la sol. gén. $y(x) = x \tan(\ln x + c)$.

## Question 4
**( 7 + 6 + 7 = 20 points )**

Considérer le problème (P) aux conditions initiales $\left\{ \begin{array}{rcl} y'' & = & 2yy', \\ y(0) & = & 1, \\ y'(0) & = & 2. \end{array} \right.$

a) Poser $z(y) := y'(x)$. Après ce changement de variable, le problème (P) est réduit à un problème d'ordre 1 avec condition initiale. Quel est ce nouveau problème (P$'$) ?

$$y''(x) = \frac{d(y'(x))}{dx} = \frac{d(z(y(x)))}{dx} = \frac{d(z(y))}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = z\frac{dz}{dy}.$$

En substituant dans l'équation de (P), on a

$$\begin{aligned}
y'' &= 2yy', \\
z\frac{dz}{dy} &= 2yz, \\
\frac{dz}{dy} &= 2y.
\end{aligned}$$

Lorsque $x = 0$, on a $y = 1$ et $y' = z = 2$.

Donc, le nouveau problème (P′) a la condition $z(1) = 2$.

(Puisque $z(1) \neq 0$, la solution cherchée n'est pas nulle au voisinage de $y = 1$, ce qui nous a permis de diviser par $z$ dans les équations précédentes.)

On a donc le nouveau problème (P′)

$$\begin{cases}
\dfrac{dz}{dy} = 2y, \\
z(1) = 2.
\end{cases}$$

b) Résoudre le problème (P′) obtenu en a).

l'équation $\frac{dz}{dy} = 2y$ est séparable. Sa solution générale est

$$z = y^2 + c.$$

Or, $z(1) = 2$ et donc

$$2 = 1^2 + c,$$

ce qui donne $c = 1$.

La solution de (P′) est $z(y) = 1 + y^2$.

c) En déduire la solution de (P).

$$\begin{aligned}
y'(x) &= z(y) = 1 + y^2 \\
\frac{y'}{1+y^2} &= 1 \\
\arctan y &= x + d \\
y &= \tan(x + d).
\end{aligned}$$

Comme $y(0) = 1$, on a

$$1 = \tan(0 + d).$$

La constante $d = \frac{\pi}{4}$ fait l'affaire ce qui donne la sol. part.

$$y(x) = \tan(x + \pi/4).$$

## Question 5
**( 20 points )**

Sachant que

$$2xy'' - 3y' + \frac{2}{x}y = 0$$

admet la solution $y_1(x) = x^2$ sur $(0, \infty)$, trouver une deuxième solution $y_2 : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ et déduire la solution générale de cette équation différentielle.

On utilise la **méthode de la variation de la constante**.

On cherche une sol. part. de la forme $y_2(x) := u(x)y_1(x) = x^2u(x)$.

$$\begin{aligned} y_2' &= 2xu + x^2u' \\ y_2'' &= 2u + 4xu' + x^2u'' \end{aligned}$$

En substituant dans l'ÉD, on trouve

$$\begin{aligned} 0 &= 2xy_2'' - 3y_2' + \frac{2}{x}y_2 \\ 0 &= 2x(2u + 4xu' + x^2u'') - 3(2xu + x^2u') + \frac{2}{x}(x^2u) \\ 0 &= 2x^3u'' + 5x^2u' \end{aligned}$$

Cette dernière est une ÉD se ramenant à une équation du 1er ordre en posant $p(x) = u'(x)$.

$$\begin{aligned} 2x^3p' &= -5x^2p \\ \frac{p'}{p} &= -\frac{5}{2x} \\ p &= ax^{-5/2} \qquad (a \neq 0) \end{aligned}$$

Comme on ne cherche qu'une solution particulière, on fixe $a = -3/2$ (par exemple).

$$u' = -\frac{3}{2}x^{-5/2} \quad \Longrightarrow \quad u = x^{-3/2} + b.$$

En prenant $b = 0$, on trouve $u(x) = x^{-3/2}$ ce qui donne la sol. part.

$$y_2(x) = x^2u(x) = x^{1/2} = \sqrt{x}.$$

Les solutions $y_1$ et $y_2$ sont lin. ind. puisque

$$y_1/y_2 = x^{3/2} \neq 0 \quad \text{sur } (0, \infty).$$

Donc, on trouve

$$y_h(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = c_1x^2 + c_2\sqrt{x}.$$

## Question 6
**( 5 points )**

On veut résoudre avec Maple le problème $\begin{cases} y'' - 3y &= 0, \\ y(0) &= 1, \\ y'(0) &= 4. \end{cases}$

Compléter ce qui manque dans les commandes Maple suivantes

```
> ED:=diff(y(x), x,x )-3* y(x) =0;
```

```
> dsolve({ED, y(0) =1, D(y)(0)=4 }, y(x) );
```