RÉPONSES ET CORRIGÉ PARTIEL
MAT-2930 PRÉTEST FINAL A-2019
QUESTIONS À LA MAIN

Q 1-

a) − 4
b) triangulaire
c) 12
d) 1/4
e) 4
f) Puissance décalée ou puissance itérée décalée
g) Gram-Schmidt
h) symétrique

Q2: −7 **Q3:** 0 **Q4:** 3, 4, 0, 2, 5, 6

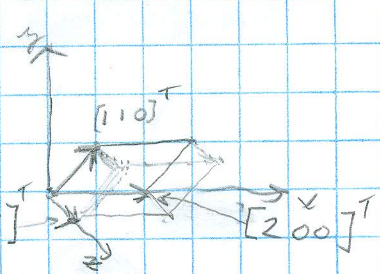
Q5: 0 (indice: la ligne 6 est le double de la ligne 5)

Q6: $x_1 = 0 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = -1 \quad \vec{x} = [0 \;\; 0 \;\; 1]^T$
Remarque: observez si les colonnes de A sont un multiple de $\vec{b}$ pour accélérer les calculs.

Q7: $\det(A) = -1 \quad \det(A^2) = 1 \quad \det(A^3) = -1$
Indice: il faut faire 3 permutations de lignes ou colonnes pour obtenir la matrice identité.

Q8: a) 2
Indice: ramener un des sommets à l'origine; posez les vecteurs principaux, construisez la matrice et calculez le déterminant.

b) $16 = 2 \times 8 \quad T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \det(T) = 8$



$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$\det(A) = 2$

Q9: $\det(A) = 5$

$$C = \begin{bmatrix} 9 & 10 & -8 \\ -5 & -5 & 5 \\ -2 & -5 & 4 \end{bmatrix} \text{ et } \mathrm{adj} = C^T$$

$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$ où M_{ij} est la matrice obtenue en enlevant la ligne i et la colonne j.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 9/5 & -1 & -2/5 \\ 2 & -1 & -1 \\ -8/5 & 1 & 4/5 \end{bmatrix}$$

RÉPONSES PRÉTEST

Q10- a) $\lambda^2 - 10\lambda + 21 = 0$ b) $\lambda_1 = 3$ $\lambda_2 = 7$

Q11- $[1\ 2\ 1]^T$ Indice : exemple 1 diapo. 4-43
tiré de Lay, exemple 4 sect. 5.1
Poole : exemples 4.18 et 4.19

Q12- a) OUI b) NON
b) Indice : peut-on générer une base pour $\mathbb{R}^2$? A-t-elle 3 vecteurs propres lin. indépendants ?
a) La matrice a-t-elle des valeurs propres distinctes ?

Q13- $P = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ et $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

Résultats intermédiaires :
Pour $\lambda = 2$, une solution générale pour une base est $x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Une base pour le sous-espace propre est $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$

$\lambda = 5 \Rightarrow x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $P = [\vec{v}_1\ \vec{v}_2\ \vec{v}_3]$ et D contient les valeurs propres associées à $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ et $\vec{v}_3$.

Q14- $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 1$ $A^8 = \begin{bmatrix} 766 & -765 \\ 510 & -509 \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ et $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow P = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

$A^8 = PD^8P^{-1}$

C'est l'exemple diapo 4-65
Source : Lay, sect. 5.3, exo d'entraînement
Poole exemple 4.29

$D^8 = \begin{bmatrix} 2^8 & 0 \\ 0 & 1^8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 256 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Q15- $\lambda_2 = 2$

Indice : on applique la puissance itérée à $A - (-10I)$

k	0	1	2
x_k	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 8 \\ 16 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6 \\ 12 \end{bmatrix}$
y_k	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}$
m_k	1	16	12

$\Rightarrow \lambda_2 - \lambda_1 = 12 \Rightarrow \lambda_2 = 12 + \lambda_1 = 2$
$(\lambda_1 = -10)$

RÉPONSES PRÉTEST

Q16 – $2 \pm \frac{1}{4}$, $4 \pm \cancel{\frac{1}{3}}\frac{1}{2}$, $6 \pm \cancel{\frac{3}{8}}\frac{1}{3}$, $8 \pm \frac{1}{8}$

Indice : pour chaque estimation, on veut le plus petit intervalle.

Q17 – $\hat{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$ Indice : 2 façons :

① $\hat{x} = R^{-1} Q^T \vec{b}$ Pour une R de 2x2, calculer R^{-1} est OK.

② $R\vec{x} = Q^T b = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[R \,\vdots\, Q^T \vec{b} \right] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cc:c} 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \Rightarrow \hat{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Q18 – a) $A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow \lambda_1 = 9 \Rightarrow \sigma_1 = \sqrt{9} = 3$
$\Rightarrow \lambda_2 = 1 \Rightarrow \sigma_2 = \sqrt{1} = 1$

b) $A^T A = \begin{bmatrix} 3 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda^2 - 10\lambda + 9$

$\lambda_1 = 9 \Rightarrow \sigma_1 = \sqrt{9} = 3$ $\lambda_2 = 1 \Rightarrow \sigma_2 = \sqrt{1} = 1$

Q19 – $A^T A = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda^2 - 13\lambda + 36 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = 4$

Vecteurs propres associés et normalisés $\left\{ \lambda_1 = 9 : \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} \quad \lambda_2 = 4 : \begin{bmatrix} -1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} \right.$

$V = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$ et $\sigma_1 = \sqrt{9} = 3$ $\sigma_2 = \sqrt{4} = 2$

$\Sigma = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$\vec{u}_1 = \frac{1}{\sigma_1} A \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$ $\vec{u}_2 = \begin{bmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} \Rightarrow U = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$

$$A = U \Sigma V^T = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

```
% Q20_SolGramSchmidt_QR.m

A = [   -10 13  7   -11 ;
        2   1   -5  3   ;
        -6  3   13  -3  ;
        16  -16 -2  5   ;
        2   1   -5  -7  ]

N_V = size(A,2);
V = zeros(size(A));
V(:,1) = A(:,1); % v1=x1

for i=2:N_V
    V(:,i) = A(:,i);
    for j=1:i-1
        V(:,i) = V(:,i) - dot(A(:,i), V(:,j))/dot(V(:,j), V(:,j)) * V(:,j);
    end
end

W = V

N_V = size(W, 2);
Q = zeros(size(V));

% TRÈS IMPORTANT : IL FAUT NORMALISER CHAQUE COLONNE DE W POUR OBTENIR Q
disp('TRÈS IMPORTANT : IL FAUT NORMALISER CHAQUE COLONNE DE W POUR OBTENIR Q')
for i=1:N_V
    Q(:,i) = W(:,i)/norm(W(:,i));
end

Q
R = Q'*A

% Vérification
A2 = Q*R
```

```
% Q21_SolConnectiviteIntersec.m

C = [   0   2   0   1   0   ;
        2   0   1   1   0   ;
        0   1   0   0   1   ;
        1   1   0   0   0   ;
        0   0   0   1   0   ]

[V, D] = eig(C)

% On va chercher la plus grande valeur
% propre en valeur absolue.
absD = abs(D)
diagAbsD = diag(absD)
maxDiagAbsD = max(diagAbsD)
I = find(diagAbsD == maxDiagAbsD) % On veut l'indice correspondant
% On va chercher le vecteur propre correspondant à la plus grande valeur
% propre en valeur absolue.
monVecteurPropre = V(:,I)

[c,Inter]=sort(monVecteurPropre,'descend')
B = ['1','2','3','4','5'];
BClassementConnect = B(Inter)
```

```
% Q22_SolMC.m

A = [   1   -2  4   ;
        1   -1  1   ;
        1   0   0   ;
        1   1   1   ;
        1   2   4   ]

b = [0 -11 -10 -9 8]'

% Une façon plus élégante
if 0 % Façon d'isoler un bout de code sans le mettre en commentaires
pts = [ -2  0   ;
        -1  -11 ;
        0   -10 ;
        1   -9  ;
        2   8   ]

coorX = pts(:,1)
coorY = pts(:,2)

A = [coorX.^0 coorX.^1 coorX.^2]
b = coorY
end   % FIN : Une façon plus élégante

AtA = A'*A
xchapeau = inv(AtA)*A'*b
bchapeau = A*xchapeau
erreur_quadratique_moyenne = norm(b-bchapeau)
```

```
% Q23_SolSuperMario.m

Imario = 255*ones(16,12);

% Casquette
Imario(1, 4:8) = 100;
Imario(2, 3:11) = 100;

% Tête : peau
Imario(3:7, 3:11) = 150;
Imario(5, 12) = 150;
Imario(3, 10:11) = 255; % morceau de l'arrière-plan blanc
Imario(7, 11) = 255; % morceau de l'arrière-plan blanc

% Oeil
Imario(3:4, 8) = 80;

% Moustache
Imario(5, 9) = 80;
Imario(6, 8:11) = 80;

% Cheveux
Imario(3, 3:5) = 80;
Imario(4:6, 2) = 80;
Imario(6, 3) = 80;
Imario(4:5, 4) = 80;
Imario(5, 5) = 80;

Imario(8, 3:8) = 80;
Imario(9, 2:11) = 80;
Imario(10, 1:12) = 80;
Imario(11, 3:10) = 80;

Imario(15:16, 2:4) = 80;
Imario(16, 1) = 80;
Imario(15:16, 9:11) = 80;
Imario(16, 12) = 80;

Imario(13:14, 3:5) = 100;
Imario(11:13, 4:9) = 100;
Imario(13:14, 8:10) = 100;
Imario(10, 5:8) = 100;
Imario(8:9, 5) = 100;


Imario(11:13, 5) = 100;
Imario(9, 8) = 100;

Imario(11:13, 1:2) = 150;
Imario(12, 3) = 150;
```

```
Imario(11:13, 11:12) = 150;
Imario(12, 10) = 150;

% Boutons de salopette
Imario(11, 5) = 150;
Imario(11, 8) = 150;

A = Imario;

figure();
imshow(A/255, 'InitialMagnification', 'fit')
pause(3)

N = 5
[U, S, V] = svd(A)
U2 = U(:,1:N)
S2 = zeros(N,N);
for i=1:N
   S2(i,i) = S(i,i);
end
S2
V2 = V(:, 1:N)
A2 = U2*S2*V2'
figure()
imshow(A2/255, 'InitialMagnification', 'fit')

% SI LA COMMANDE SVDS() EST AUTORISÉE
N = 5
[U3, S3, V3] = svds(A,N)
A3 = U3*S3*V3'
figure()
imshow(A3/255, 'InitialMagnification', 'fit')
```