2002 Mini-Test 1 : Solutions

Problème 1 (1 point sur 5)

$$2 + 3\sin 4\pi t - 5\cos 3\pi t$$

Il y a deux candidats pour la fréquence fondamentale:

$$\omega_0 = 3\pi, \quad \omega_0 = 4\pi$$

Si je commence avec la première possibilité, $\omega_0 = 3\pi$, on voit que l'autre fréquence n'est pas multiple de cette fréquence. La seule fréquence pour laquelle les deux fréquences sont multiples est $\omega_0 = \pi$. Cette fréquence est alors la fréquence fondamentale.

$$\omega_0 = \pi \quad \Rightarrow \quad T_0 = 2$$

Les coefficients sont calculer ainsi

$$\begin{aligned}
&2 + 3\sin 4\pi t - 5\cos 3\pi t \\
&= 2 + \frac{3}{2j}\left(e^{j4\pi t} - e^{-j4\pi t}\right) - \frac{5}{2}\left(e^{j3\pi t} + e^{-j3\pi t}\right) \\
&= 3 - \frac{3}{2}j\left(e^{j4\pi t} - e^{-j4\pi t}\right) - \frac{5}{2}\left(e^{j3\pi t} + e^{-j3\pi t}\right) \\
&= \frac{3}{2}je^{-j4\pi t} - \frac{5}{2}e^{-j3\pi t} + 2 - \frac{5}{2}e^{j3\pi t} - \frac{3}{2}je^{j4\pi t}
\end{aligned}$$

Donc, la réponse est **2**.

$$F(0) = 2 \quad F(3) = -\frac{5}{2} \quad F(-3) = -\frac{5}{2} \quad F(4) = -\frac{3}{2}j \quad F(-4) = \frac{3}{2}j$$

Problème 2 (1 point sur 5)

$$f_p(t) = \begin{cases} -\tfrac{1}{2}e^{\beta t} & t < 0 \\ 0 & t = 0 \\ \tfrac{1}{2}e^{-\beta t} & t > 0 \end{cases}$$

Cette fonction est réelle et impaire…

1. $f_p(t)$ est une fonction réelle, donc on sait que

   $F^*(-n) \neq F(n)$ est FAUX

2. $f_p(t)$ est impair, donc on sait que

   $f_p(t)$ est ni pair ni impair est FAUX

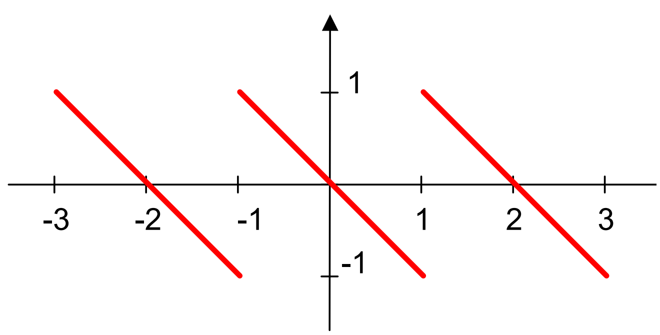
3. $f_p(t)$ est une fonction réelle, donc on sait que

   Arg $F(n)$ est pair est FAUX

4. $f_p(t)$ est une fonction impair alors F(n) est imaginaire ***pur***, donc on sait que

   $B(n) = 0 \quad \forall n$ est FAUX

Problème 3 (3 points sur 5)



a) ***1 point***

Expression analytique: $f_p(t) = -t \qquad -1 < t < 1, \quad f_p(t+2) = f_p(t)$

$$T_0 = 2 \Rightarrow \quad \omega_0 = \pi$$

Expression analytique plus rigoureuse:

$$g_p(t) = -t \qquad -1 < t < 1, \quad f_p(t) = \begin{cases} g_p(t - \lfloor t \rfloor) & si \quad \lfloor t \rfloor \text{ est pair} \\ g_p(t - \lfloor t \rfloor - 1) & si \quad \lfloor t \rfloor \text{ est impair} \end{cases}$$

b) ***2 point***

Les coefficients complexes de Fourier pour cette fonction périodique sont déterminés par

$$F(n) = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} f_p(t)e^{-j\omega_0 nt}dt = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f_p(t)e^{-j\omega_0 nt}dt$$

Notez: on peut utiliser n'importe quelle période pour l'intégration.

On commence avec *n=0*.

$$F(0) = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f_p(t)dt = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} t.dt = 0$$

Pour les autres valeurs de *n*:

$$\begin{aligned}
F(n) &= -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} t.e^{-j\pi nt}dt = -\frac{1}{2}\left[\frac{t.e^{-j\pi nt}}{-j\pi n}\right]_{-1}^{1} - \frac{1}{2j\pi n}\int_{-1}^{1} e^{-j\pi nt}dt \\
&= \frac{1}{2j\pi n}\left(e^{j\pi n} + e^{-j\pi n}\right) - \frac{1}{2(\pi n)^2}\left[e^{-j\pi nt}\right]_{-1}^{1} \\
&= -\frac{j}{\pi n}\cos n\pi - \frac{1}{2(\pi n)^2}\left(e^{j\pi n} - e^{-j\pi n}\right) \\
&= -\frac{j(-1)^n}{\pi n} - \frac{1}{(2\pi n)^2}\sin n\pi \\
&= -\frac{j(-1)^n}{\pi n}
\end{aligned}$$