Solutionnaire 2014 Mini-test 2

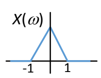
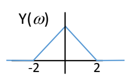
jeudi le 20 novembre 2014; durée: 08h30 à 09h20; aucune documentation permise; 7.5% de note finale

Problème 1 (30 point sur 100)

A. Est-ce que ces systèmes sont linéaires et invariant en temps?

$y(t)=x^2(t)$	OUI	[✓ NON]
$y(t)=x(t)-x(t-1)$	[✓ OUI]	NON
$y(t)=x(t)\sin(t)$	OUI	[✓ NON]

B. En supposant que ces systèmes sont linéaire et invariants en temps avec une réponse en fréquence de $H(\omega)$,

$x(t)$ périodique — SLIT $H(\omega)$ — $y(t)$ périodique	[✓ VRAI]	FAUX
 — SLIT $H(\omega)$ — 	VRAI	[✓ FAUX]
$\delta(t)$ — SLIT $H(\omega)$ — $y(t)=\mathrm{TF}^{-1}\{H(\omega)\}$	[✓ VRAI]	FAUX

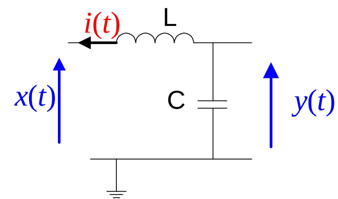
C. En supposant que ces systèmes sont linéaire et invariants en temps avec une réponse en fréquence de $H(\omega)$,

$x(t)=0 \quad \lvert t\rvert > T_{\max} \quad ; \quad X(\omega)=0 \quad \lvert\omega\rvert > W_{\max} \quad ; \quad x(t)\Leftrightarrow X(\omega)$	OUI	[✓ NON]
$f(t)*g(t) \Leftrightarrow \dfrac{F(\omega)*G(\omega)}{2\pi} \quad ; \quad f(t)\Leftrightarrow F(\omega) \quad g(t)\Leftrightarrow G(\omega)$	OUI	[✓ NON]
$\mathrm{Rect}(t)\cdot\delta(t)$ est périodique	OUI	[✓ NON]
$\mathrm{Rect}(t)*\delta(t)$ est périodique	OUI	[✓ NON]

Solutionnaire 2014 Mini-test 2

Problème 2 (20 points sur 100)

a. (15 points) Trouvez la réponse en fréquence du circuit suivant



$$H(\omega) = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{1/j\omega C}{j\omega L + 1/j\omega C} = \frac{1}{(j\omega)^2 LC + 1} = \frac{1}{1 - \omega^2 LC}$$

b. (1 point) Trouvez la sortie quand C=1, L=1/2 et l'entré est une fonction périodique avec $\omega_0 =$ 1, et les coefficients de Fourier : $F(1)=1;\ F(2)=1;\ F(4)=1;\quad F(n)=0$ ailleurs

$$f(t) = 1\cdot e^{j\omega_0 t} + 1\cdot e^{j2\omega_0 t} + 1\cdot e^{j4\omega_0 t} = e^{jt} + e^{j2t} + e^{j4t}$$

La sortie d'un SLIT quand l'entrée est une exponentielle complexe est

$$e^{j\omega_0 t} \rightarrow |H(\omega_0)| e^{j\omega_0 t + j\measuredangle H(\omega_0)}$$

Nous avons

$$H(\omega_0) = H(1) = \frac{1}{1 - 1^2 \cdot ½ \cdot 1} = \frac{1}{1 - ½} = 2$$

$$H(2\omega_0) = H(2) = \frac{1}{1 - 2^2 \cdot ½ \cdot 1} = \frac{1}{1-2} = -1$$

$$H(4\omega_0) = H(4) = \frac{1}{1 - 4^2 \cdot ½ \cdot 1} = \frac{1}{1-8} = -\frac{1}{7}$$

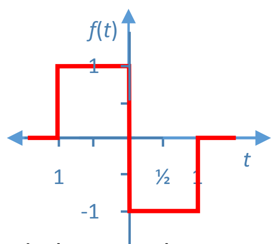
Donc la sortie pour ce système est

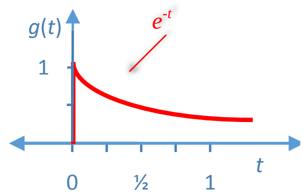
$$\begin{aligned} f(t) &\rightarrow |H(1)| e^{jt + j\measuredangle H(1)} + |H(2)| e^{j2t + j\measuredangle H(2)} + |H(4)| e^{j4t + j\measuredangle H(4)} \\ &= 2e^{jt + j0} + e^{j2t + j\pi} + \frac{1}{7} e^{j4t + j\pi} \\ &= 2e^{jt} - e^{j2t} - \frac{1}{7} e^{j4t} \end{aligned}$$

Solutionnaire 2014 Mini-test 2

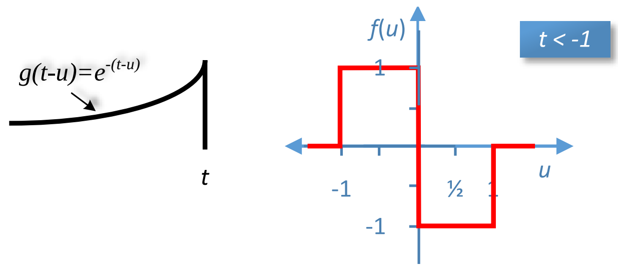
Problème 3 (50 points sur 100)

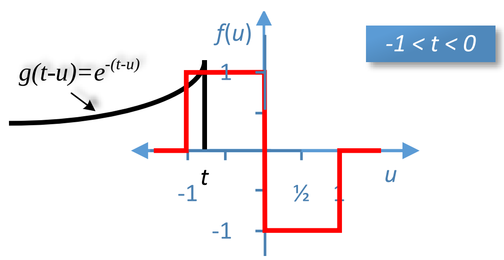
Trouvez la convolution de $f(t) = \text{Rect}(t+.5)\text{-Rect}(t-.5)$ et $g(t) = U(t)e^{-t}$

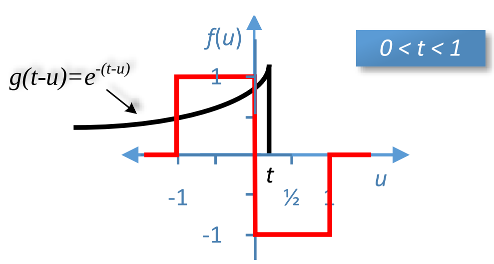


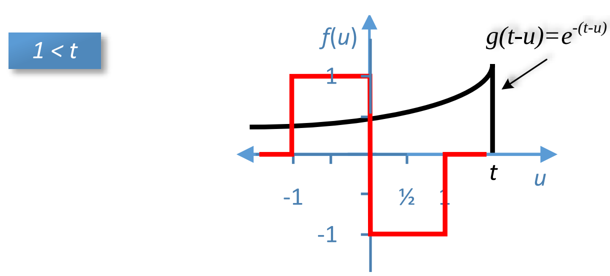


a. **<u>régions</u>** de définition de la convolution









b. (15 points) Donnez les intégrales à évaluer pour **<u>chaque région</u>** de définition de la convolution; **<u>spécifiez clairement les bornes d'intégration pour chaque région.</u>**

Solutionnaire 2014 Mini-test 2

	Partie b	Partie c
$t < -1$	zéro	**0**
$-1 < t < 0$	$\int_{-1}^{t} e^{-(t-u)} du$	$e^{-t}\int_{-1}^{t} e^{u} du = e^{-t}\, e^{u}\Big\vert_{-1}^{t} = e^{-t}\left(e^{t} - 1/e\right) = 1 - e^{-t}/e$
$0 < t < 1$	$\int_{-1}^{0} e^{-(t-u)} du - \int_{0}^{t} e^{-(t-u)} du$	$e^{-t}\int_{-1}^{0} e^{u} du - e^{-t}\int_{0}^{t} e^{u} du = e^{-t}\, e^{u}\Big\vert_{-1}^{0} - e^{-t}\, e^{u}\Big\vert_{0}^{t} = e^{-t}\left(1 - 1/e\right) - e^{-t}\left(e^{t} - 1\right) = 2e^{-t} - 1 - e^{-t}/e$
$1 < t$	$\int_{-1}^{0} e^{-(t-u)} du - \int_{0}^{1} e^{-(t-u)} du$	$e^{-t}\int_{-1}^{0} e^{u} du - e^{-t}\int_{0}^{1} e^{u} du = e^{-t}\, e^{u}\Big\vert_{-1}^{0} - e^{-t}\, e^{u}\Big\vert_{0}^{1} = e^{-t}\left(1 - 1/e\right) - e^{-t}\left(e - 1\right) = e^{-t}\left(2 - 1/e - e\right)$