Examen final

MAT-2910 : Analyse Numérique pour ingénieur Hiver 2012

Remarques :

1) Seulement les calculatrices avec l'auto-collant de la Faculté seront admises.
2) Pour chaque question on fournira le détail des calculs et du raisonnement. En l'absence de ces détails, une solution sera considérée comme nulle.
3) Déposez votre carte d'identité avec photo sur le coin de votre table.

Voici un extrait d'une table de noeuds et de poids des quadratures de Gauss.

n	Noeuds	Poids
2	-0.57735	1
	0.57735	1
3	-0.77460	0.55556
	0	0.88889
	0.77460	0.55556
4	-0.86114	0.34785
	-0.33998	0.65215
	0.33998	0.65215
	0.86114	0.34785
5	-0.90618	0.23693
	-0.53847	0.47863
	0	0.56889
	0.53847	0.47863
	0.90618	0.23693

Question 1. (15 points)

Soit S une spline cubique naturelle donnée par

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) & = 1 + 2x - x^3, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ S_1(x) & = 2 + a(x-1) + b(x-1)^2 + c(x-1)^3, & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Trouver a, b et c.

Question 2. (20 points)

On considère l'équation différentielle du second ordre

$$\begin{cases} y''(t) - y'(t) - 2y(t) & = 2 - 2t - 2t^2 \\ y(0) & = 1 \\ y'(0) & = -1 \end{cases}$$

a) [10 pts] Vérifier que la solution exacte est $y(t) = e^{-t} + t^2$.

b) [10 pts] Transformer cette équation différentielle en un système équivalent d'équations différentielles d'ordre 1.

Question 3. (25 points)

On considère l'intégrale

$$I = \int_1^4 (6x^4 - 3x + 5)dx$$

a) [5 pts] Quel pas h doit-on prendre pour que l'erreur en valeur absolue soit inférieure à 10^{-7} si on utilise la formule du trapèze composée pour le calcul de I ?

b) [10 pts] Calculer la valeur approchée de I par la formule de Gauss-Legendre à 2 nœuds (voir table en première page).

c) [5 pts] Est-ce que l'approximation obtenue en b) est exacte ?

d) [5 pts] Le terme d'erreur d'une certaine méthode d'intégration numérique est donné par l'expression suivante :

$$Err(h) = -\frac{4^2}{80} f^{(6)}(\xi) h^8$$

– Déterminer l'ordre de la méthode en question.
– Déterminer le degré de précision (d'exactitude).

Question 4. (15 points)

Soit une fonction $f(x)$ connue aux points x_i, $i = 0, 1, ..., 4$,

x_i	-2	-1	0	1	2
$f(x_i)$	-1	3	1	-1	3

a) [10 pts] En utilisant la méthode de Newton, déterminer le meilleur polynôme d'interpolation de degré 2 pour avoir une approximation de $f(1.1)$. Quelle est cette approximation ?

b) [5 pts] Donner une approximation de l'erreur commise pour l'approximation de $f(1.1)$ obtenue en a).

Question 5. (25 points)

On veut approximer la dérivée de la fonction $f(x) = x - e^x$ en utilisant le schéma de dérivation numérique suivant :

$$f'(x) \simeq \frac{1}{3h}\left(f(x+h) + f(x) - 2f(x-h)\right)$$

a) [8 pts] En utilisant ce schéma, approximer $f'(0)$ pour $h = 0.1$ et $h = 0.05$.

b) [7 pts] En vous servant de la solution exacte et des résultats obtenus en a), montrer que ce schéma est d'ordre 1.

c) [5 pts] À l'aide de la formule de Richardson, calculer une nouvelle approximation de $f'(0)$.

d) [5 pts] À l'aide du schéma de différence centrée d'ordre 2, calculer une nouvelle approximation de $f'(0)$ avec $h = 0.1$.

Interpolation

– Interpolation de Lagrange : étant donné $(n+1)$ points $((x_i, f(x_i))$ pour $i = 0, 1, \cdots, n)$:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x), \quad L_i(x) = \frac{(x - x_0)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n)}{(x_i - x_0)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)}$$

– Différences divisées : $f[x_i] = f(x_i)$,

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}, \quad f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{(x_{i+2} - x_i)}, \quad \text{etc.}$$

– Interpolation de Newton :

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}),$$

$$\text{où } a_i = f[x_0, x_1, x_2, \cdots, x_i] \quad \text{pour } 0 \le i \le n$$

– Erreur d'interpolation :

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n) \ \text{ pour } \ \xi(x) \in]x_0, x_n[$$

– Approximation de l'erreur d'interpolation :

$$E_n(x) \simeq f[x_0, x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$$

– Splines cubiques : on pose $h_i = x_{i+1} - x_i$ et dans l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ on a :

$$p_i(x) = f_i + f_i'(x - x_i) + \frac{f_i''}{2!}(x - x_i)^2 + \frac{f_i'''}{3!}(x - x_i)^3$$

où

$$\begin{aligned} f_i &= f(x_i) \\ f_i' &= f[x_i, x_{i+1}] - \frac{h_i f_i''}{3} - \frac{h_i f_{i+1}''}{6} \\ f_i''' &= \frac{f_{i+1}'' - f_i''}{h_i} \end{aligned}$$

et les f_i'' sont solutions de :

$$\frac{h_i}{(h_i + h_{i+1})} f_i'' + 2 f_{i+1}'' + \frac{h_{i+1}}{(h_i + h_{i+1})} f_{i+2}'' = 6 f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}], \ \ i = 0, 1, \cdots, n-2$$

Différentiation et intégration numériques

- Dérivées d'ordre 1 :

$f'(x)$	$=$	$\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}+O(h)$ *Différence avant d'ordre 1*
$f'(x)$	$=$	$\dfrac{f(x)-f(x-h)}{h}+O(h)$ *Différence arrière d'ordre 1*
$f'(x)$	$=$	$\dfrac{-f(x+2h)+4f(x+h)-3f(x)}{2h}+O(h^2)$ *Différence avant d'ordre 2*
$f'(x)$	$=$	$\dfrac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}+O(h^2)$ *Différence centrée d'ordre 2*
$f'(x)$	$=$	$\dfrac{3f(x)-4f(x-h)+f(x-2h)}{2h}+O(h^2)$ *Différence arrière d'ordre 2*

- Dérivées d'ordre supérieur :

$f''(x)$	$=$	$\dfrac{f(x-2h)-2f(x-h)+f(x)}{h^2}+O(h)$ *Différence arrière d'ordre 1*
$f''(x)$	$=$	$\dfrac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h^2}+O(h)$ *Différence avant d'ordre 1*
$f''(x)$	$=$	$\dfrac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}+O(h^2)$ *Différence centrée d'ordre 2*

- Extrapolation de Richardson : $Q_{exa} = \dfrac{2^n Q_{app}(\frac{h}{2}) - Q_{app}(h)}{(2^n-1)} + O(h^{n+1})$
- Formule des trapèzes :

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left(f(x_0) + 2\left[f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})\right] + f(x_n)\right) - \frac{(b-a)}{12} f''(\xi)h^2$$

- Formule de Simpson 1/3 :

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \cdots$$
$$+ 4f(x_{2n-3}) + 2f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})) - \frac{(b-a)}{180} f''''(\xi)h^4$$

- Formule de Simpson 3/8 :

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{3h}{8}(f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + 2f(x_3) + 3f(x_4) + \cdots$$
$$+ 2f(x_{3n-3}) + 3f(x_{3n-2}) + 3f(x_{3n-1}) + f(x_{3n})) - \frac{(b-a)f''''(\xi)}{80}h^4$$

- Intégration de Gauss (les w_i et t_i seront fournis si nécessaire) :

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{(b-a)}{2}\int_{-1}^1 f\left(\frac{(b-a)t+(a+b)}{2}\right)dt = \frac{(b-a)}{2}\int_{-1}^1 g(t)dt \simeq \frac{(b-a)}{2}\sum_{i=1}^n w_i g(t_i)$$

Équations différentielles :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t,y), \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

- Euler (ordre 1) : $y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$
- Taylor (ordre 2) : $y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) + \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial f(t_n,y_n)}{\partial t} + \frac{\partial f(t_n,y_n)}{\partial y}f(t_n,y_n)\right)$
- Euler modifiée (ordre 2) : $\hat{y} = y_n + hf(t_n, y_n)$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(f(t_n,y_n) + f(t_n+h,\hat{y})\right)$$

- Point milieu (ordre 2) : $k_1 = hf(t_n, y_n)$

$$y_{n+1} = y_n + h\left(f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2})\right)$$

- Runge-Kutta d'ordre 4 :

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(t_n,y_n) \\ k_2 &= hf(t_n+\frac{h}{2}, y_n+\frac{k_1}{2}) \\ k_3 &= hf(t_n+\frac{h}{2}, y_n+\frac{k_2}{2}) \\ k_4 &= hf(t_n+h, y_n+k_3) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}\left(k_1+2k_2+2k_3+k_4\right) \end{aligned}$$