Département de génie électrique et
de génie informatique
Faculté des sciences et de génie

Vision numérique
GIF-4100 / GIF-7001

Date 25 octobre 2018
Local PLT-2783
Heure 13h30 à 16h20

Examen partiel 1 A2018

Toute documentation
permise sauf Internet
30% de la note du trimestre

Question 1. (20 points au total) Coordonnées homogènes

A. (4 points)

Soit un point de coordonnées $\underline{p} = [x \ \ y \ \ z\ ]^t$ dans l'espace cartésien à trois dimensions. Quelles sont les coordonnées du point $\underline{p}$ en coordonnées homogènes. **Expliquez votre réponse**.

B. (4 points)

Soit un point $\underline{p} = [x \ \ y \ \ z \ \ 1]^t$ en coordonnées homogènes. Est-ce que $[2x \ \ 2y \ \ 2z \ \ 2]^t$ représente le même point en coordonnées cartésiennes en 3D?

C. (4 points)

Soit la matrice définie en coordonnées homogènes par l'équation (1) :

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Est-ce que cette matrice préserve les angles et les longueurs? **Justifiez votre réponse**.

D. (4 points)

Soit la matrice définie en coordonnées homogènes par l'équation (2):

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

La matrice M a des allures de matrice de projection de perspective dans le plan image normalisé (i.e. focale du sténopé = 1).

Quelles sont les coordonnées images réelles (i.e. non-homogènes) du point $\underline{p}_2 = [2\ 2\ 2\ 2\ ]^t$?

E. (4 points)

En utilisant la matrice de l'équation (2), les coordonnées images du point $[1 \ \ 1 \ \ 1 \ \ 1]^t$ sont $[1 \ \ 1 \ \ 1]$. Comment se fait-il que le facteur d'échelle du point image soit 1?

Question 2. (20 points au total) Transformations rigides et coordonnées homogènes

Deux référentiels dans le plan sont initialement confondus. Un référentiel subit une translation de 3 unités selon l'axe des x et de 2 unités selon l'axe des y. Il subit ensuite une rotation de -90 degrés par rapport à l'axe des z (sortant de la page). La configuration finale des référentiels est montrée à la Figure 1.

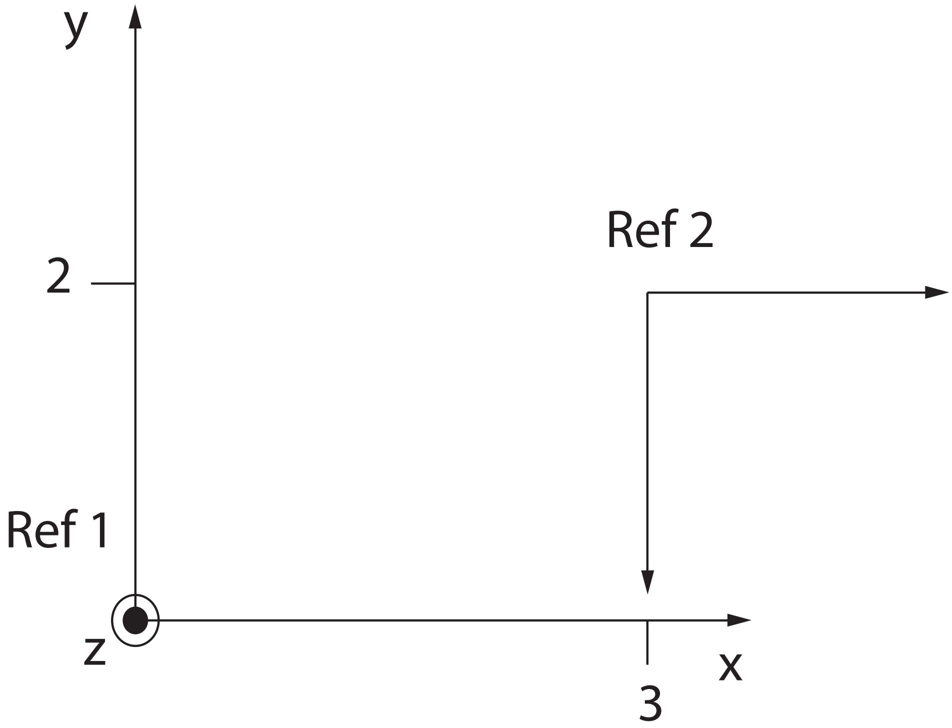

Figure 1. Configuration finale des référentiels de la Question 2.

A. (7 points)

Donnez l'expression de la matrice de translation en coordonnées homogènes.

B. (7 points)

Donnez l'expression de la matrice de rotation en coordonnées homogènes.

C. (6 points)

Si un point a les coordonnées $[1 \quad 1 \quad 1]^t$ (en coordonnées homogènes) dans le référentiel *Ref 1*, quelles sont ses coordonnées dans le référentiel *Ref 2*? Expliquez votre réponse.

Question 3. (20 points au total) Formation d'image avec un sténopé

Soit le sténopé non-inverseur de focale F = 10 mm de la Figure 2.

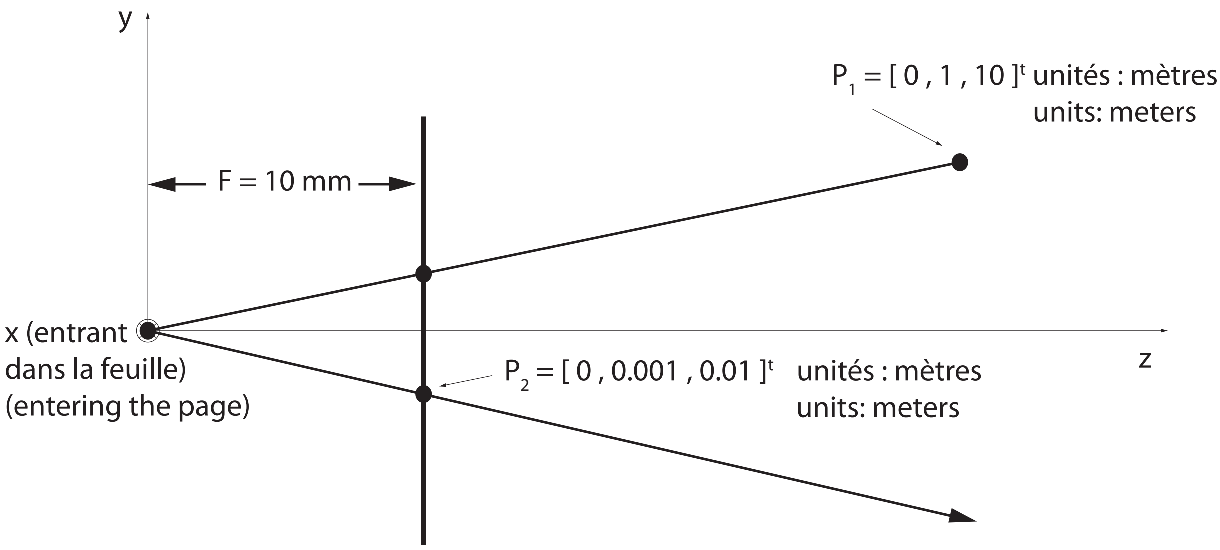

Figure 2. Géométrie de la Question 3.

A. (10 points)

Quelles sont les coordonnées image du point $\underline{P}_1$ de coordonnées réelles $[0\text{ m}, 1\text{ m}, 10\text{ m}]^t$?

B. (10 points)

Quelle est l'équation du projecteur pour le point image $\underline{P}_2$ de coordonnées $[0\text{ m}, 0.001\text{ m}, 0.01\text{ m}]^t$?

Question 4. (20 points au total) Projection de perspective

Supposons qu'un sténopé **non-inverseur** de longueur focale F = 1 et d'axe optique Z observe deux droites parallèles dont l'origine est respectivement située à $\underline{p}_1 = [-x \;\; -y \;\; 0]^t$ et $\underline{p}_2 = [x \;\; -y \;\; 0]^t$ et dont l'orientation est donnée par le vecteur **unitaire** $\underline{u} = [u_x \;\; 0 \;\; u_z]^t$. Ces deux droites parallèles sont situées dans le plan Π tel que montré à la Figure 3. Les équations paramétriques des droites en coordonnées réelles sont données à l'équation (3).

$$\begin{aligned} \underline{L}_1(\lambda) &= \underline{p}_1 + \lambda \underline{u} \\ \underline{L}_2(\beta) &= \underline{p}_2 + \beta \underline{u} \end{aligned} \tag{3}$$

A. (5 points)

Quelles sont les coordonnées images des points sur $\underline{L}_1(\lambda)$ et $\underline{L}_2(\beta)$ pour une direction $\underline{u}$ donnée?

B. (5 points)

Que deviennent les coordonnées images quand $\lambda = \beta = \infty$ (i.e. quelles sont les coordonnées images d'un point à l'infini sur chaque droite)?

C. (5 points)

Quelles sont les équation des *images* des droites $\underline{L}_1$ et $\underline{L}_2$ dans le repère image et quelles sont les coordonnées de l'intersection entre celles-ci? **Expliquez votre résultat**.

D. (5 points)

Où sont situés les points images des points à l'infini sur les droites parallèles $\underline{L}_1$ et $\underline{L}_2$ quand les composantes du vecteur unitaire $\underline{u}$ changent? **Justifiez votre réponse**.

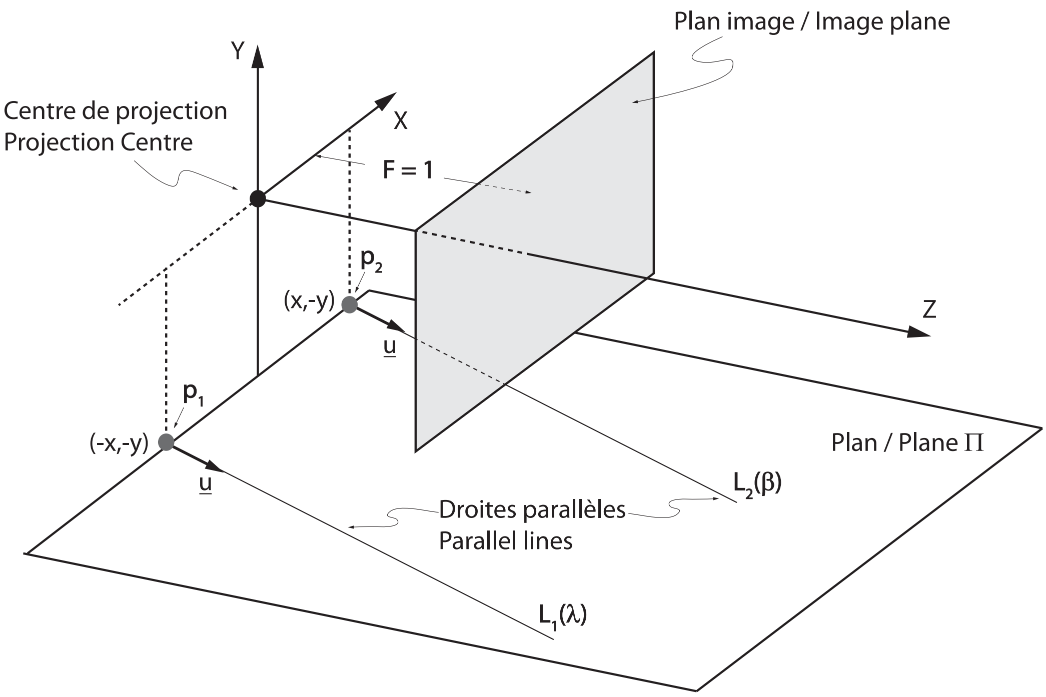

Figure 3. Géométrie de la Question 4.

Question 5. (20 points au total) Homographies

Supposons un sténopé **non-inverseur** C_1 de matrice de paramètres intrinsèques K_1. Supposons qu'un second sténopé C_2, de matrice de paramètres intrinsèques K_2, ait le même centre de projection que C_1, mais ait subi une rotation *R* de θ degrés autour de l'axe des x (**entrant dans la page**) comme montré à la Figure 4. Supposons aussi que le repère "monde" soit celui du sténopé C_1. Un point objet P, qui réside sur un plan, est projeté sur les plans images des deux sténopés pour donner les images $\underline{p}_1$ et $\underline{p}_2$.

Soit $\underline{P}_1$ le vecteur exprimant les coordonnées du point P dans le repère C_1 et $\underline{P}_2$ les coordonnées du point P dans le repère C_2.

Dans le repère C_1, la projection de perspective du point P de coordonnées $\underline{P}_1$ est donnée par l'équation (4).

$$\underline{\tilde{p}}_1 = \underline{\underline{K}}_1 \underline{\tilde{P}}_1 \tag{4}$$

Dans le repère C_2, la projection de perspective du point P de coordonnées $\underline{P}_2$ est donnée par l'équation (5).

$$\underline{\tilde{p}}_2 = \underline{\underline{K}}_2 \underline{\tilde{P}}_2 \tag{5}$$

A. (5 points)

Donnez l'équation de transformation rigide qui permet de calculer $\underline{P}_2$ à partir de $\underline{P}_1$.

B. (5 points)

Donnez l'équation de projection de perspective qui permet de calculer les coordonnées images (dans le repère image)du point image $\underline{p}_2$ du point P en fonction des coordonnées $\underline{P}_1$ en utilisant la transformation rigide trouvée en (A).

C. (5 points)

On sait que le plan sur lequel réside le point P induit une homographie entre les sténopés C_1 et C_2 donnée par l'équation (6) où $\underline{t}$ est la translation entre C_1 et C_2, $\underline{n}$ est le vecteur normal au plan et *d* est la distance entre le plan et l'origine du repère monde.

$$\underline{\tilde{p}}_2 = \underline{\underline{\tilde{K}}}_2 \left[\underline{\underline{\tilde{R}}} \quad \frac{t\, n^t}{d} \right] \underline{\underline{\tilde{K}}}_1^{-1} \underline{\tilde{p}}_1 \tag{6}$$

Dans la configuration de la Figure 4, la translation entre C_1 et C_2 est nulle car C_2 n'a subi qu'une rotation par rapport à C_1. Que devient alors l'équation (6)? En quoi ce résultat se compare-t-il au résultat de votre réponse en C?

D. (5 points)

Dans le présent problème, est-ce vraiment important que le point P se trouve sur un plan? Justifiez votre réponse.

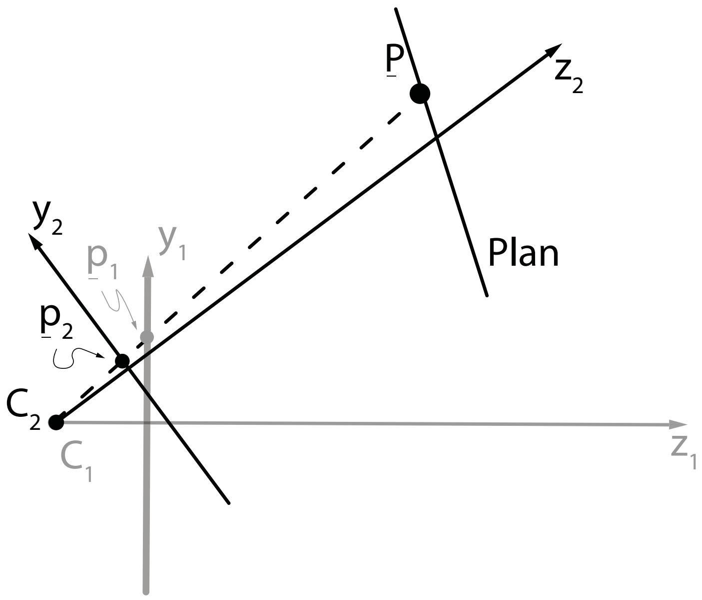

Figure 4. Géométrie de la Question 5.