UNIVERSITÉ
LAVAL

Faculté des Sciences et de génie
Département de génie électrique et de génie informatique

GEL-2001 Analyse de signaux
Jérôme Genest

Examen partiel

Date: Jeudi le 18 octobre 2018

Durée: de 8h30 à 10h30

Salle: CSL-3174, CSL-3170

Cet examen vaut 40% de la note finale.

Remarques:

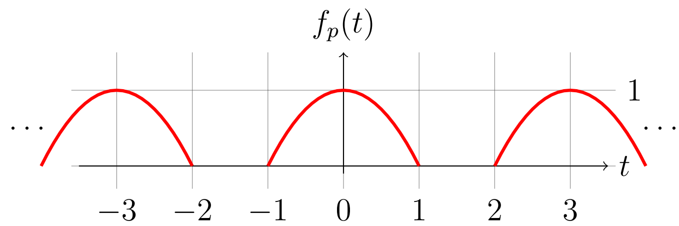
i) *L'utilisation d'une calculatrice est permise.*

ii) *Aucun document n'est permis durant l'examen.*

iii) *Seule la liste des formules fournie à la fin du questionnaire est permise.*

iv) *Votre carte d'identité doit être placée sur votre bureau en conformité avec le règlement de la Faculté.*

Problème 1 (12 points)



Soit la fonction périodique $f_p(t)$ illustrée ci-haut.

La fonction peut être exprimée, sur l'intervalle $[-1, 1]$ par: $f_p(t) = 1 - t^2$. On utilise ensuite la périodicité $f_p(t + T_o) = f_p(t)$ pour définir la fonction sur ses autres périodes.

a) Calculez la transformation de Fourier du signal restreint à sa période centrale (i.e zéro à l'extérieur de $[-T_o/2, T_o/2]$).

b) Est-ce que ce signal restreint est un signal de puissance finie ou d'énergie finie ?

c) Calculez la *transformation* de Fourier $F_p(\omega)$ du signal périodique $f_p(t)$.

d) Quelle est la valeur à n=0 du spectre de la série de Fourier $F_p(n)$?

Problème 2 (8 points)

Lorsqu'on enregistre numériquement un signal, seulement certains instants discrets sont mémorisés. On peut modéliser cette opération par la multiplication du signal $f(t)$ par un peigne de Dirac $\delta_{T_0}(t)$. Supposons que le signal est $f(t) = 1+\cos(2\pi/5t)$ et que l'espacement entre les impulsions est $T_0 = 1$. On a donc:

$$g(t) = f(t)\delta_{T_0}(t) = [1 + \cos(2\pi/5t)]\delta_1(t).$$

Par la suite, on coupe les fréquences du spectre de $G(\omega)$ de manière à ne conserver que les fréquences telles que $-\pi < \omega < \pi$, opération qu'on peut représenter par:

$$H(\omega) = G(\omega)\text{Rect}(\omega/2\pi).$$

a) Tracez $g(t)$.

b) Calculez et tracez $G(\omega)$, la transformation de Fourier de $g(t)$.

c) Tracez $H(\omega)$.

d) Calculez et donnez l'expression analytique de $h(t) \Longleftrightarrow H(\omega)$

Problème 3 (12 points)

On utilise un radar pour mesurer la position et la vitesse d'un satellite en orbite autour de la terre. Le signal du radar est un cosinus multiplié par une enveloppe de manière à former un pulse de durée finie. Pour les besoins du problème, le signal envoyé est:

$$f(t) = \cos(100t)\mathrm{Sa}^2(t/2).$$

Le spectre de $f(t)$ sera nommé $F(\omega)$, tel que $F(\omega) \Longleftrightarrow f(t)$.

a) Calculez et tracez $F(\omega)$ en module et en phase. Utilisez des axes brisés afin de bien illustrer les spectres demandés (i.e. Faites comme si l'axe ω était coupé là où il n'y a pas de signal).

b) Le satellite est à une distance de 1500 km. Le signal envoyé par le radar est réfléchi par la surface du satellite et retourne vers la terre. Comme la vitesse de la lumière est c=3e8 m/s, le radar détecte un écho après $\tau_o = 1/100$ seconde. Le signal détecté est donc:

$$g(t) = af(t - \tau_o),$$

où a représente le fait que le signal est aussi atténué par l'aller-retour. Calculez et tracez $G(\omega)$ en module et en phase.

c) Comme le satellite se déplace rapidement, le signal détecté est aussi soumis à l'effet Doppler. C'est en réalité un effet d'échelle, de telle sorte que le signal réellement détecté est:

$$H(\omega) = G(\omega/\beta).$$

Nous allons supposer[1] que $\beta = 0.9$. Tracez $H(\omega)$, en module et en phase. Expliquez le raisonnement qui vous permet de tracer $H(\omega)$ directement à partir de $G(\omega)$.

d) Calculez et donnez l'expression analytique de $h(t)$.

[1]Ce n'est pas réaliste car l'effet Doppler spécifie que $\beta = \frac{1}{1+v/c}$. Le beta utilisé ici implique que le satellite se déplace à 10% dela vitesse de la lumière!

Problème 4 (8 points)

En traitement des images, on utilise très souvent la transformation de Fourier en 2 dimensions définie telle que:

$$F(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)e^{-j(ux+vy)}dxdy,$$

où x, y correspondent à des positions dans l'image (en mètres) selon un système cartésien et u, v sont les fréquences spatiales (en rad/m) selon les axes x et y respectivement.

L'image d'un plancher rayé peut être exprimée par:

$$f(x,y) = \cos(2\pi x + \pi y).$$

Indice: Euler est votre ami pour séparer la TF 2D !

a) Calculez la transformation $F(u,v)$ de l'image $f(x,y)$ selon les définitions données ci-haut.

b) Tracez la partie réelle du spectre $F(u,v)$ dans le plan $u - v$. Pour chaque couple u, v il faudrait tracer la valeur de la partie réelle selon une troisième dimension. Pour les besoins de cet exemple, indiquez simplement par un point chaque endroit dans le plan $(u - v)$ où la partie réelle de $F(u,v)$ est non nulle. Indiquez la hauteur à côté de chaque point.

c) Quelle est la période des rayures sur le plancher ?

d) À quel angle sont les rayures par rapport à notre système de coordonnées cartésien ?

fonction temporelle	**transformée**
$\mathrm{Rect}\left(t/\tau\right)^{(1)}$	$\tau\,\mathrm{Sa}\left(\omega\tau/2\right)$
$\mathrm{Tri}\left(t/\tau\right)^{(2)}$	$\tau\,\mathrm{Sa}^2\left(\omega\tau/2\right)$
$\delta\left(t\right)$	1
1	$2\pi\delta\left(\omega\right)$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta\left(\omega-\omega_0\right)$
$\mathrm{U}(t)$	$1/j\omega+\pi\delta\left(\omega\right)$
$\mathrm{Sgn}(t)$	$2/j\omega$
$\delta_{T_0}\left(t\right)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\delta\left(t-nT_0\right)$	$\omega_0\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega-n\omega_0\right)$
$e^{-\beta t}\,\mathrm{U}\left(t\right)$	$\dfrac{1}{\beta+j\omega}$
$e^{-\beta\lvert t\rvert}$	$\dfrac{2\beta}{\beta^2+\omega^2}$
$\delta'\left(t\right)$	$j\omega$
$\delta''\left(t\right)$	$\left(j\omega\right)^2$

domaine temporel	**domaine fréquentiel**
$f\left(t\right)=\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}F\left(\omega\right)e^{j\omega t}d\omega$	$F\left(\omega\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f\left(t\right)e^{-j\omega t}dt$
$f(t)$	$F\left(\omega\right)$
$F\left(t\right)$	$2\pi f\left(-\omega\right)$
$f(t+a)$	$e^{ja\omega}F(\omega)$
$e^{jbt}f(t)$	$F\left(\omega-b\right)$
$f(at)$	$\dfrac{1}{\lvert a\rvert}F\left(\dfrac{\omega}{a}\right)$
$t^n f\left(t\right)$	$\left(j\right)^n\dfrac{d^n}{d\omega^n}F\left(\omega\right)$
$\dfrac{d^n}{dt^n}f\left(t\right)$	$\left(j\omega\right)^n F\left(\omega\right)$
$f(t)$ pas continue	décroissance $1/\omega$
$f\left(t\right)$ continue $f'\left(t\right)$ pas continue	décroissance $1/\omega^2$
$f\left(t\right), f'\left(t\right)$ continue $f''\left(t\right)$ pas continue	décroissance $1/\omega^3$
$E=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\lvert f(t)\rvert^2\,dt$	$E=\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\lvert F\left(\omega\right)\rvert^2\,d\omega$

---

[1] $\mathrm{Rect}\left(\dfrac{t-t_0}{\tau}\right)$ rectangle de hauteur un, centré sur $t=t_0$, et de longueur τ.

[2] $\mathrm{Tri}\left(\dfrac{t-t_0}{\tau}\right)$ triangle de hauteur un, τ centré sur $t=t_0$, avec une base de longueur 2τ.

$f(t) \quad \Leftrightarrow \quad F(\omega) = TF\{f(t)\}$ $F(\omega) = A(\omega) + jB(\omega) = \lvert F(\omega)\rvert e^{jArg(\omega)}$ $E(\omega) = \frac{1}{2\pi}\lvert F(\omega)\rvert^2$

fonction réelle en temps	
$f(t)$ réelle $\Leftrightarrow \quad F^*(\omega) = F(-\omega)$	
paire	**impaire**
$A(\omega) = \operatorname{Re} F(\omega)$	$B(\omega) = \operatorname{Im} F(\omega)$
$\lvert F(\omega)\rvert$	$\operatorname{Arg} F(\omega)$
$f(t) = f_{paire}(t) + f_{impaire}(t)$	
$f_{paire}(t) \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Re} F(\omega)$	$f_{impaire}(t) \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Im} F(\omega)$

fonction delta, etc.
$f_p(t) \Leftrightarrow 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_{Série}(n)\,\delta(\omega - n\omega_0)$ $f_p(t)$ périodique avec période T_0, $T_0\omega_0 = 2\pi$ $F_{Série}(n) = \frac{1}{T_0}\cdot F_r(\omega)\big\rvert_{\omega=n\omega_0}$, $f_r(t) = \begin{cases} f_p(t) & \frac{-T_o}{2} < t < \frac{T_o}{2} \\ 0 & ailleurs \end{cases}$
$f'(a) = \left[\lim_{t\to a^+} f(t) - \lim_{t\to a^-} f(t)\right]\delta(t-a)$ $t = a$ est un point de discontinuité de $f(t)$
$h(t)\delta(t-t_0) = h(t_0)\delta(t-t_0)$ propriété d'échantillonnage
$x_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nx_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi nx/x_0}$

$\int e^{ax} \quad dx = \frac{1}{a} e^{ax}$	$\int x \cos ax \quad dx = \frac{1}{a^2} \cos ax + \frac{x}{a} \sin ax$
$\int e^{bx} \sin ax \quad dx = \frac{1}{a^2+b^2} e^{bx} (b \sin ax - a \cos ax)$	$\int x e^{ax} \quad dx = \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2}\right) e^{ax}$
$\int e^{bx} \cos ax \quad dx = \frac{1}{a^2+b^2} e^{bx} (a \sin ax + b \cos ax)$	$\int x^2 e^{ax} \quad dx = \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3}\right) e^{ax}$
$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$	$e^{jx} = \cos x + j \sin x$
$\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$	$e^{jn\pi} = (-1)^n$
$\cos^2\theta = \frac{1}{2}[1 + \cos 2\theta]$	$e^{jn\pi/2} = \begin{cases} (-1)^{n/2} & n \text{ pair} \\ (-1)^{(n-1)/2} & n \text{ impair} \end{cases}$
$\cos\theta = \sin(\pi/2 - \theta)$	