Identification

NOM: ____________________ PRÉNOM: ____________________

NUMÉRO D'IDENTIFICATION (NI): ____________________

SECTION: ____________________

MAT-1910: Mathématiques de l'ingénieur II
Examen 2 (40%)
Vendredi 23 avril 2021 de 18h30 à 21h00

Enseignants:
Hugo Chapdelaine (NRC 16327)
Rachid Kandri-Rody (NRC 16326)

Solutions

Directives

- Identifiez immédiatement votre cahier d'examen.
- Assurez-vous que cet examen comporte 6 questions réparties sur 12 pages.
- Assurez-vous que les sonneries de vos appareils électroniques sont désactivées et rangez-les hors de portée.
- Vous avez droit à une feuille aide-mémoire *manuscrite* et recto-verso $8\frac{1}{2}$" par 11".
- Sauf indication contraire, vous devez rédiger des solutions complètes et justifiées.
- Vous avez droit à une calculatrice autorisée par la faculté des sciences et génie.
- Dans tous les cas où c'est possible, vous devez écrire la valeur exacte et non une valeur numérique approchée (p.ex. si $x^2 = 2$ et $x > 0$ vous devriez écrire $x = \sqrt{2}$ plutôt que $x \approx 1,414$).

Résultats

Questions	1	2	3	4	5	6	~~7~~	Total
Points	15	15	20	20	20	20	~~20~~	110
Note/110								

Question 1 (15 pts) On considère une particule se déplaçant sur une trajectoire donnée par la paramétrisation

$$\vec{r}(t) = (\cos^2 t - 1, \sin^2 t - 2) \qquad \text{pour } t \in [0, \pi]$$

Quelle est la distance totale parcourue par cette particule ?

$ds = |r'(t)|\, dt$ $\qquad r'(t) = (-\sin t \cdot 2\cos t \;,\; \cos t \; 2\sin t)$ $\quad t \in [0,\pi]$

$|r'(t)| = \sqrt{8\cos^2 t \sin^2 t}$

$= \sqrt{8}\,|\cos t \sin t|$ $\longrightarrow$ valeur absolue

Ainsi la distance l parcourue par la particule est

$l := \int_0^\pi \sqrt{8}\,|\cos t \sin t|\, dt$ $\qquad$ On remarque que

pour $t \in [0,\pi)$, $\sin t \geq 0$; $\quad t \in [0, \pi/2] \Rightarrow \cos t \geq 0$

$t \in [\pi/2, \pi] \Rightarrow \cos t \leq 0$

$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$l = \int_0^{\pi/2} \sqrt{8}\, \underbrace{\cos t \sin t}_{\frac{\sin 2t}{2}}\, dt + \int_{\pi/2}^{\pi} -\sqrt{8}\cos t \sin t\, dt$

$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{2}\sin 2t\, dt - \int_{\pi/2}^{\pi} \sqrt{2}\sin 2t\, dt$

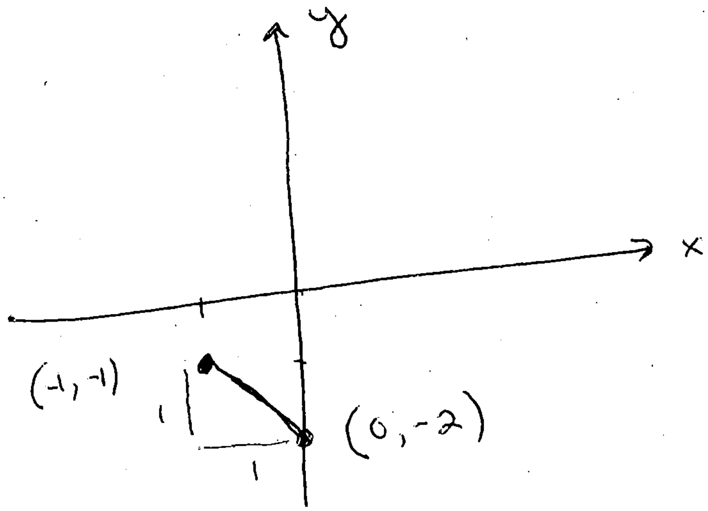
$= \sqrt{2}\left[-\frac{\cos 2t}{2}\Big|_0^{\pi/2} + \frac{\cos 2t}{2}\Big|_{\pi/2}^{\pi} \right] = \sqrt{2}(1+1) = \boxed{2\sqrt{2}}$

si on pose $x(t) = \cos^2 t - 1$ et $y(t) = \sin^2 t - 2$

on peut aussi remarquer que

$$x(t) + y(t) = -2 \quad \text{et} \quad (x(0), y(0)) = (0, -2)$$

$$\left(x\left(\tfrac{\pi}{2}\right), y\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right) = (-1, -1)$$



Ainsi la distance totale parcourue par la particule est $2\sqrt{2}$.

Question 2 (15 pts) Pour chacun des deux champs vectoriels sur $\mathbb{R}^3$ suivants, dire si il est conservatif, et, le cas échéant, calculez le potentiel associé:

(1) $\vec{F_1} = (xy^2z^2 - y, x^2yz^2 - y, x^2y^2z - z)$,

(2) $\vec{F_2} = (xy^2z^2 - y, x^2yz^2 - x, x^2y^2z - z)$

$\vec{F} = (P, Q, R)$

1) $P_y = 2xyz^2 - 1 \qquad Q_x = 2xyz^2 \qquad P_y \neq Q_x$

Comme $P_y \neq Q_x$ il suit que $\vec{F}_1$ n'est pas conservatif.

2) $P_y = 2xyz^2 - 1 \qquad Q_x = 2xyz^2 - 1 \qquad R_x = 2xy^2z$

$P_z = 2xy^2z \qquad Q_z = 2x^2yz \qquad R_y = 2x^2yz$

On voit $P_y = Q_x \quad P_z = R_x$ et $Q_z = R_y$

Trouvons un potentiel.

$$E_1 := \int P\,dx = \frac{1}{2}x^2y^2z^2 - yx + C(y,z)$$

$$(E_1)_y = x^2yz^2 - x + \frac{\partial C}{\partial y} \Longrightarrow \frac{\partial C}{\partial y} = 0 \Longrightarrow C \text{ est indépendant de } y$$

$$\| $$

$$Q = x^2yz^2 - x$$

Donc $E_1 = \frac{1}{2}x^2y^2z^2 - yx + C(z)$

$$(E_1)_z = x^2y^2z + \frac{\partial C}{\partial z} \Rightarrow \frac{\partial C}{\partial z} = -z$$

$$\parallel$$

$$R = x^2y^2z - z \Rightarrow C(z) = -\frac{z^2}{2} + \underbrace{D}_{\text{cte}}$$

Donc

$$E(x,y,z) := \frac{x^2}{2}y^2z^2 - yx - \frac{z^2}{2} + D \quad \text{est un potentiel}$$

Question 3 (20 pts) On considère la coquille mince S donnée par les équations

$$x^2+y^2+z^2=1 \quad \text{et} \quad -1 \leq z \leq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

On supposera que la densité surfacique σ de S est constante et égal à 1. Soit m la masse de S et $c_m = (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ son centre de masse.

(1) Soit (ρ, θ, ϕ) les coordonnées sphériques. Montrer que $|d\vec{S}| = \sin\phi d\phi d\theta$.

(2) Montrer que $m = 2\pi(1+\frac{1}{\sqrt{2}})$

(3) Calculer les coordonnées de c_m.

1) L'élément de volume en sphérique est $\underset{\shortparallel}{dV}\ \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$ on trouve que

Donc comme $\rho = 1$ est constant sur S on trouve que

$$|d\vec{S}| = \frac{dV}{d\rho} = \sin\phi \, d\phi \, d\theta$$

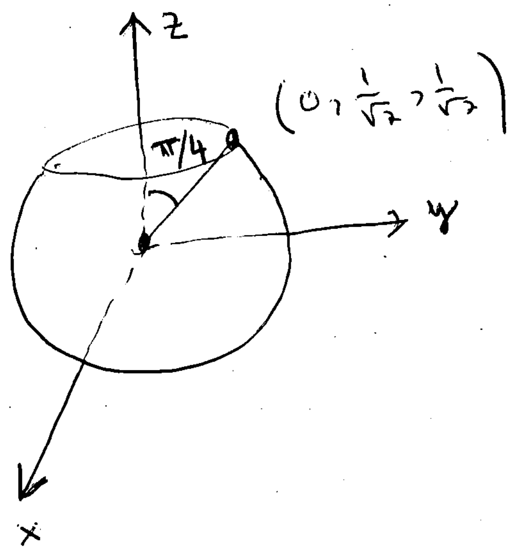
On aurait aussi pu prendre la paramétrisation de S suivante $\vec{r}(\theta,\phi) = (\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi)$ et remarquer que $\vec{r}_\theta \perp \vec{r}_\phi$ et donc

$$|d\vec{S}| = |\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\phi| \, d\theta \, d\phi = \underbrace{|\vec{r}_\theta|}_{=\sin\phi} \cdot \underbrace{|\vec{r}_\phi|}_{=1} \, d\theta \, d\phi$$

ou bien calculer directement $|\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\phi|$

(ce qui est laborieux)

$S: \vec{r}(\theta,\phi) := (\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi)$



$\phi \in [\pi/4, \pi]$

$\theta \in [0, 2\pi)$

Donc $A(S) = \int_0^{2\pi} \int_{\pi/4}^{\pi} \sin\phi \, d\phi \, d\theta$

$= 2\pi(-\cos\phi)\Big|_{\pi/4}^{\pi} = 2\pi\left[1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$

---

3) $\bar{x} = \bar{y} = 0$ par symétrie

$\bar{z} = \frac{1}{A(S)} \cdot M_z$ où $M_z := \iint_S z\,|d\vec{S}| = \int_0^{2\pi}\int_{\pi/4}^{\pi} \underbrace{\cos\phi\,(\sin\phi)}_{\frac{\sin 2\phi}{2}} d\phi\, d\theta$

$= \pi \int_{\pi/4}^{\pi} \sin 2\phi \, d\phi = \pi\left(\frac{-\cos 2\phi}{2}\right)\Big|_{\pi/4}^{\pi} = \frac{\pi}{2}[-1+0]$

$= -\pi/2$

Ainsi $\bar{z} = \frac{-\frac{\pi}{2}}{2\pi\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \overset{6}{=} \frac{-1}{4\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$

Question 4 (20 pts) Une surface S est constituée d'une surface cylindrique

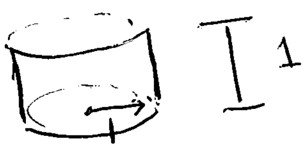
$$S_1 = \{(x,\ y,\ z) : x^2 + y^2 = 1,\ 0 \leq z \leq 1\}$$

surmontée de la demi-sphère S_2 centrée au point $(0,0,1)$ et de rayon 1. On considère le champ vectoriel $\vec{v} = (z,\ x,\ x^2 + y^2)$.

(1) Donnez une paramétrisation de S_1 en n'oubliant pas d'indiquer le domaine de paramétrisation de S_1.

(2) Calculez le flux de $\vec{v}$ à travers la surface S_1, orientée positivement.

(3) En utilisant le théorème de Gauss, calculez le flux de $\vec{v}$ à travers la surface S_2.

1) 

$S_1 :\ x^2+y^2=1$ et $0 \leq z \leq 1$

$\vec{r}(\theta, z) = (\cos\theta, \sin\theta, z)$ $\quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$, $\ 0 \leq z \leq 1$

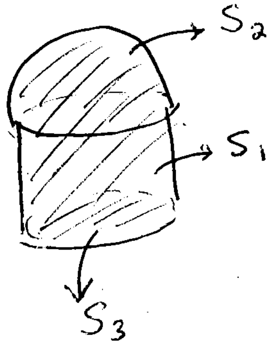
2) Il est clair géométriquement que $d\vec{S}_1 = (\cos\theta, \sin\theta, 0)\, d\theta\, dz$

Flux de $\vec{v}$ à travers S_1 est

$$\iint_{S_1} (z, \cos\theta, 1) \cdot (\cos\theta, \sin\theta, 0)\, dz\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (z\cos\theta + \sin\theta\cos\theta)\, dz\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{2} + \underbrace{\sin\theta\cos\theta}_{\frac{\sin 2\theta}{2}}\, d\theta = 0 + 0 = 0$$

3) 

$$E = \mathrm{int}(S_1 \cup S_2 \cup S_3)$$

$$\underbrace{\iint_{S_1} \vec{v} \circ d\vec{S}_1}_{=0} + \iint_{S_2} \vec{v} \circ d\vec{S}_2 + \iint_{S_3} \vec{v} \circ d\vec{S}_3 \overset{\text{Gauss}}{=} \underbrace{\iiint_E \mathrm{div}(\vec{v})\, dV}_{=0}$$

car $\mathrm{div}(\vec{v}) = 0$

$$\iint_{S_3} \vec{v} \circ d\vec{S}_3 = \iint_{S_3} (0, x, x^2+y^2) \circ (0,0,-1)\, dx\, dy$$

$$= \iint_{S_3} -(x^2+y^2)\, dx\, dy$$

$$= -\int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2\, r\, dr = -2\pi \cdot \frac{r^4}{4}\Big|_0^1$$

$$= -\frac{\pi}{2}$$

Ainsi on doit avoir que $\displaystyle\iint_{S_2} \vec{v} \circ d\vec{S}_2 = \boxed{\frac{\pi}{2}}$

Question 5 (20 pts) Soient deux arcs de cercle C_1 et C_2 de représentation paramétriques:

$$C_1 : \vec{r}_1(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, 0) \quad \text{pour} \quad \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$C_2 : \vec{r}_2(\theta) = (0, \sin\theta, \cos\theta) \quad \text{pour} \quad \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

Soit S la surface de représentation paramétrique:

$$S : \vec{r}(t,\theta) = t\vec{r}_1(\theta) + (1-t)\vec{r}_2(\theta) \quad \text{pour} \quad t \in [0,1] \quad \text{et} \quad \theta \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

Soit le champ vectoriel $\vec{W} = (z, x, y)$.

(1) Calculer $\text{rot}(\vec{W})$.

(2) Calculer le vecteur normal $\vec{N} = \vec{r}_t \times \vec{r}_\theta$ à la surface S.

(3) Calculer le travail T du champ vectoriel $\vec{W}$ le long de la frontière de S orientée positivement par rapport à la normale dont la troisième composante est positive.

1) $\text{rot}(\vec{W}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ z & x & y \end{vmatrix} = (1, -(-1), 1) = (1,1,1)$

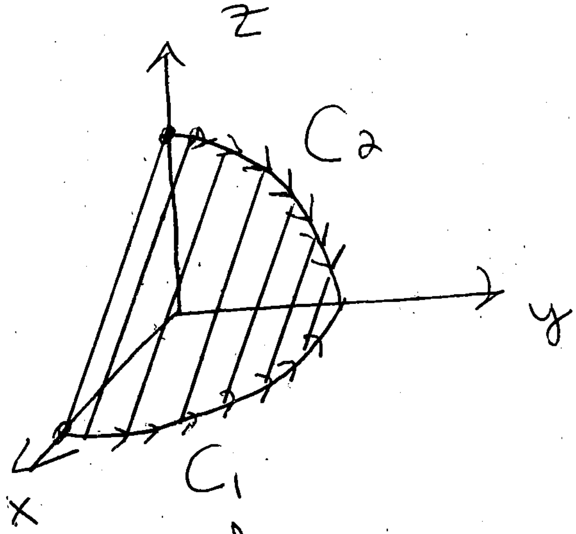
2) $\vec{r}(t,\theta) = (t\cos\theta, t\sin\theta + (1-t)\sin\theta, (1-t)\cos\theta)$
$= (t\cos\theta, \sin\theta, (1-t)\cos\theta)$

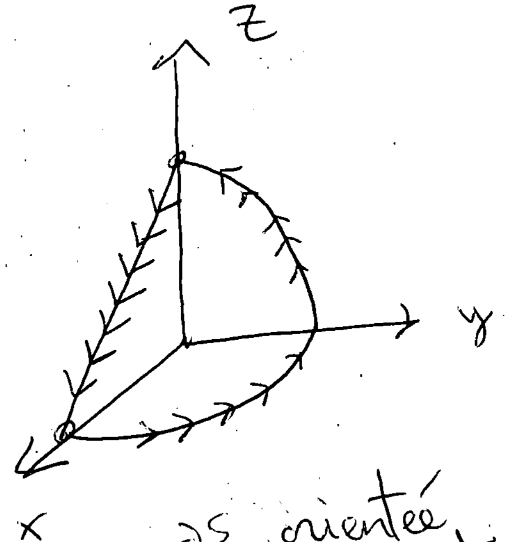
$\vec{r}_t = (\cos\theta, 0, -\cos\theta)$ $\quad \vec{r}_\theta = (-t\sin\theta, \cos\theta, -(1-t)\sin\theta)$

$\vec{r}_t \times \vec{r}_\theta = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos\theta, & 0, & -\cos\theta \\ -t\sin\theta, & \cos\theta, & (t-1)\sin\theta \end{vmatrix} = (\cos^2\theta, -(-\sin\theta)\cos\theta, \cos^2\theta)$

$= (\cos^2\theta, \sin\theta\cos\theta, \cos^2\theta)$

3)





∂S orientée positivement en 3 morceaux

Stokes

$$\int_{\partial S} \vec{W} \cdot d\vec{r} = \iint_S \operatorname{rot}(\vec{W}) \cdot d\vec{S}$$

$$= \iint_S (1,1,1) \cdot (\cos^2\theta, \sin\theta\cos\theta, \cos^2\theta)\, dt\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \left(\cos^2\theta + \sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta\right) dt\, d\theta$$

$2\cos^2\theta = 1 + \cos 2\theta$

$$= 1 \cdot \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2\theta) + \frac{1}{2}\sin 2\theta \; d\theta$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{\sin 2\theta}{2}\Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{2}\,\frac{\cos 2\theta}{2}\Big|_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{\pi}{2} + 0 - \frac{1}{4}\left[-1-1\right] = \boxed{\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}}$$

Question 6 (20 pts) Pour cette question, vous devez uniquement encercler la bonne réponse selon la question (la justification n'est pas nécessaire).

(1) (5 pts) Soit C le cercle unité orienté positivement et $\vec{n}$ le vecteur normal unitaire au cercle unité qui pointe vers l'exérieur. Soit $\vec{F}$ le champ vectoriel planaire $\vec{F} = (x\cos y + x, -\sin y + 2y)$. Que vaut l'intégrale suivante:

$$I = \int_C \vec{F} \bullet \vec{n} ds,$$

où ds correspond à l'élement de longeur d'arc ?

(a) $I = \pi$,

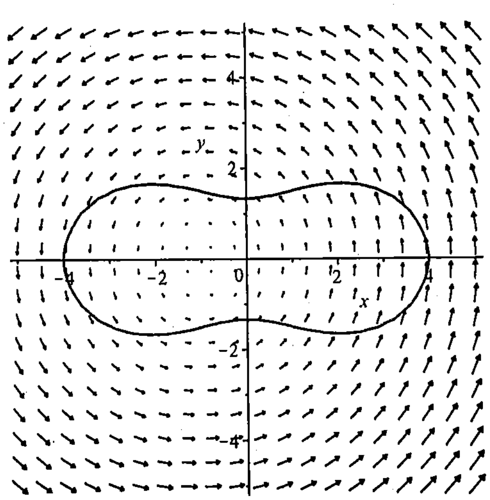
(b) $I = 2\pi$,

(c) $I = 3\pi$,

(d) $I = 4\pi$,

(e) Aucun des choix précédents.

(2) On considère le champ vectoriel et la courbe représentée par l'image ci-bas:



Que peut-on dire du travail $W := \int_C \vec{F} \bullet \vec{dr}$, si C est parcourue dans le sens **anti-horaire**?

(a) $W < 0$ (b) $W = 0$ (c) $W > 0$

(**3**) Soit $\vec{r} = (x, y, z)$ vecteur position basé à l'origine du plan $\mathbb{R}^3$ et $r = ||\vec{r}||$ sa longeur. Soit

$$\vec{F}(x, y, z) = -\frac{1}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

un champ vectoriel gravitationnel. On notera par $\mathcal{O}$ l'origine de $\mathbb{R}^3$. Lequel des énoncés suivants est faux:

(a) $\mathrm{rot}(\vec{F}) = \vec{0}$.

(b) $\mathrm{div}(\vec{F}) = 0$.

? (c) $\vec{F}$ n'admet pas de potentiel sur $\mathbb{R}^3 \backslash \{\mathcal{O}\}$.

(d) $\vec{F}$ admet une singularité au point $\mathcal{O}$.

(e) $\vec{F}$ est conservatif sur $\mathbb{R}^3 \backslash \{\mathcal{O}\}$.

(**4**) Pour lequel des 5 champs vectoriels $\vec{F}$ suivants existe-t-il un champ vectoriel $\vec{G}$ tel que $\mathrm{rot}(\vec{G}) = \vec{F}$?

(a) $\vec{F} = (x^3, z^3, y^3)$

(b) $\vec{F} = (x^3, y^3, z^3)$

(c) $\vec{F} = (z^3, y^3, x^3)$

(d) $\vec{F} = (y^3, x^3, z^3)$

(e) $\vec{F} = (y^3, z^3, x^3)$.