GEL2001 : Analyse des signaux

Corrigé Minitest 1 A2012

Département de génie Électrique et de génie informatique

Question 1 (2 point)

Soit la fonction $f(t) = 4 + 1.5\sin(3\pi/2t) + 0.5\cos(\pi t)$

1. Quelle est la période fondamentale de ce signal ?
   On commence par obtenir la fréquence fondamentale en trouvant la plus grande fréquence ω_0 telle que $3\pi/2$ et π soient des multiples entiers de ω_0. On obtient $\omega_0 = \pi/2$. La période fondamentale est donc donnée par $T_0 = 2\pi/\omega_0 = 4$.

2. Calculez les coefficients de la série de Fourier de la fonction $f(t)$.
   En décomposant $f(t)$ en exponentielles complexes, on peut obtenir les coefficients de sa série de Fourier par inspection :

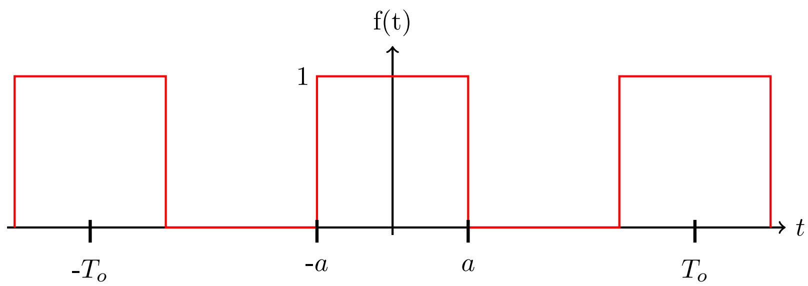
   $$f(t) = 4 + 1.5/2j[\exp(j3\omega_0 t) - \exp(-j3\omega_0 t)] + 0.5/2[\exp(j2\omega_0 t) + \exp(-j2\omega_0 t)]$$

   Les coefficients de la série de Fourier de $f(t)$ sont donc : $F(0) = 4$, $F(2) = F(-2) = 0.25$ et $F(3) = -F(-3) = -0.75j$.

3. Quelle est la puissance à la fréquence fondamentale et quelle est la puissance de l'harmonique à deux fois la fréquence fondamentale ?
   Puisque $f(t)$ ne contient aucun terme à la fréquence ω_0, $P(1) = 0$. En sommant les puissances de $F(2)$ et de $F(-2)$, on obtient $P(2) = 0.25^2 + 0.25^2 = 1/8$.

Question 2 (2 points)

Calculez la série de Fourier de $f(t)$ illustrée ci-bas :



.

La période de $f(t)$ est T_0. L'intégrale de Fourier de f(t) est :

$$
\begin{aligned}
F(n) &= \frac{1}{T_0}\int_{-a}^{a} \exp(-jn\frac{2\pi}{T_0}t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{T_0}\frac{T_0}{n\pi}\left.\frac{\exp(-jn\frac{2\pi}{T_0}t)}{-2j}\right|_{-a}^{a} \\
&= \frac{1}{T_0}\frac{T_0}{n\pi}\sin(\frac{n2\pi a}{T_0})
\end{aligned}
$$

Cette fonction n'étant pas définie pour $n = 0$, on doit évaluer séparément l'intégrale pour le coefficient DC, qui est égal à l'aire sous la courbe normalisée par la période. Donc,$F(0) = 2a/T_0$.

En utilisant la fonction $\mathrm{Sa}(x)$, qui vaut $\sin(x)/x$ pour $x \neq 0$ et 1 pour $x = 0$, on peut écrire la série de Fourier de $f(t)$, valide pour tout n, comme :

$$
F(n) = \frac{2a}{T_0}\mathrm{Sa}(\frac{n2\pi a}{T_0})
$$

Question 3 (1 points)

Vrai ou faux ?

1. Si $f(t)$ est réelle, $|F(n)| = |F(-n)|$.
   L'énoncé est VRAI (directement une des propriétés dans les notes de cours).

2. Pour une fonction dont la pente est discontinue, la série de Fourier converge nécessairement en $1/n^2$.
   L'énoncé est FAUX. Pour que la série de Fourier d'une fonction converge en $1/n^2$, la fonction doit être continue et sa première dérivée doit être discontinue. L'énoncé ne disant rien sur la continuité de la fonction, on ne peut rien conclure sur la convergence de sa série de Fourier.

3. La partie imaginaire d'un spectre $F(n)$ est réelle.
   L'énoncé est VRAI. $F(n)$ peut s'écrire comme $A(n) + jB(n)$, où $B(n)$ est la partie imaginaire de $F(n)$ et est une fonction réelle.

4. La puissance de $\cos(\omega_o t)$ est 1.
   L'énoncé est FAUX. La puissance d'un cosinus est de 1/2. On peut le voir en le décomposant en une paire d'exponentielles complexes d'amplitude 1/2, donc de puissance 1/4 chacune.

   On peut aussi arriver à la réponse sans faire de calcul en faisant l'observation suivante : le carré d'un cosinus d'amplitude unitaire est une fonction qui oscille entre 0 et 1. La puissance d'un signal étant la valeur moyenne de son carré, la puissance d'un cosinus unitaire se situe nécessairement entre 0 et 1 exclusivement.