MAT-2930 – Algèbre linéaire appliquée
Département de génie électrique et de génie informatique
Examen 1 (Pondération : 35%)
15 octobre 2020, 13h30 à 15h35
Francis Gagnon

CONSIGNES

1. Les réponses aux questions de la section MANUEL doivent être faites sur des feuilles vierges (pages vierges, pour les tablettes). **Zéro point sera attribué aux réponses sans justification ou développement mathématique.**
2. Les réponses aux questions de la section MATLAB doivent être faites dans des scripts. Les affichages demandés doivent tous être affichés dans la fenêtre de commandes.

VOTRE SOUMISSION

1. Un fichier `examen1.pdf` contenant la réponse aux questions 1 et 2
2. Deux scripts matlab : `question3.m`, `question4.m`

MANUEL

1. (20 points) Vrai ou faux ? Justifier votre réponse.
   (a) (4 points) Les coordonnées homogènes sont nécessaires pour effectuer la rotation d'une image dans l'espace $\mathbb{R}^3$.
   (b) (4 points) Les lignes d'une matrice A inversible forment un ensemble de vecteurs linéairement indépendants.
   (c) (4 points) Pour deux vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ dans l'espace $\mathbb{R}^3$, si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ alors $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 < \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$.
   (d) (4 points) La méthode du pivot partiel améliore le conditionnement d'une matrice.
   (e) (4 points) Si A est une matrice non singulière $m \times m$, et, B et C, des matrices quelconques $m \times m$, $AB = AC$ implique que $B = C$.
2. (24 points) Soit la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 6 & -9 \end{bmatrix}$$

   (a) (5 points) Pour quelle(s) valeur(s) de b_1 dans $\mathbb{R}$ le système $A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} b_1 & -5 & 9 \end{bmatrix}^\intercal$ est consistant ?
   (b) (4 points) Donner la ou les solutions du système en (a) dans le cas où il est consistant.
   (c) (3 points) La matrice A est-elle inversible ? Justifier votre réponse.
   (d) (3 points) Calculer le rang de la matrice A.
   (e) (3 points) Déterminer une base pour le sous-espace des colonnes de A, Col A.
   (f) (3 points) Quelle est la dimension du sous-espace Nul A ? Justifier votre réponse.
   (g) (3 points) Déterminer un vecteur qui appartient au sous-espace Nul A.

MATLAB

3. (24 points) Soit les vecteurs :

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -6 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v_3} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

   (a) (6 points) Démontrer que $\mathbf{b}$ est une combinaison linéaire de $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$ et $\mathbf{v_3}$ avec l'algorithme de Gauss-Jordan. Afficher un commentaire dans la fenêtre de commandes qui analyse le résultat de l'algorithme.

   (b) (6 points) Déterminer la matrice A de l'équation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ qui permet de calculer les poids de la combinaison linéaire (ou facteurs de pondération).

   (c) (6 points) Effectuer une décomposition $P^{\mathsf{T}}LU$ de la matrice A en (b) et afficher le résultat.

   (d) (6 points) Déterminer les poids de la combinaison linéaire en utilisant uniquement les matrices P, L, U et $\mathbf{b}$ dans vos calculs, c'est-à-dire sans utiliser A.

4. (32 points) On observe l'évolution du cervezavirus (CERVID-19) dans une boite de Petri que l'on suppose parfaitement étanche (système fermé). Le virus peut muter en trois souches différentes : la souche A (virulente), B (peu virulente) et C (non virulente). Les taux de mutation mensuels du virus A vers B et C sont de 30 % et 5 %, ceux du virus B vers A et C sont de 20 % et 2 %, et ceux du virus C vers A et B sont de 10 % et 15 %, respectivement. Les portions résiduelles ne mutent pas.

   (a) (4 points) Afficher la matrice de transition P de la chaîne de Markov.

   (b) (10 points) On débute l'expérience avec 1 000 000 copies/mL du virus de la souche C. Calculer l'évolution des trois souches pour les 24 prochains mois. Afficher les résultats sous la forme d'une matrice 24×3, où chaque ligne donne l'état des trois souches au $k^{\text{ième}}$ mois.

   (c) (4 points) Déterminer le pourcentage des trois souches à l'état stationnaire.

   (d) (10 points) Au 25^e^ mois, on y injecte un antiviral expérimental appelé klorokyne et on observe l'évolution pendant 24 mois supplémentaires. Il agit comme un agent mutagène qui transforme de manière instantanée 100 000 copies/mL de souche A en souche C (la version non virulente). Tracer l'évolution des trois souches pour les 48 mois d'expérience. Ajouter un titre au graphique, aux axes, ainsi qu'une légende.

   (e) (4 points) Selon les calculs en (d), l'antiviral est-il-efficace ? Aurait-on pu prédire l'efficacité sans effectuer ces calculs ? Si oui, comment ? Afficher vos réponses dans la fenêtre de commandes.