STT-2920 *Rachid Kandri-Rody*

Examen 1

14 Octobre 2009
15h30-17h30

Répondre aux questions sur le questionnaire.
Cet examen compte pour 45% de la note finale.
L'examen compte 6 exercices répartis dans un questionnaire de **12 pages**, dont une page d'espace supplémentaire à la toute fin.
Vous avez **120 minutes** pour faire cet examen.
Donner tous les développements et calculs.
Toutes les réponses doivent être convenablement justifiées.
Une liste de formules est distribuée avec cet examen.
Utiliser le verso des feuilles pour le brouillon.
Éteindre et ranger tout appareil électronique.

À remplir par l'étudiant(e)

Nom :	Solutionnaire
Matricule :	
Section :	

À remplir par le(s) correcteur(s)

Exercice 1	16 / 16
Exercice 2	16 / 16
Exercice 3	16 / 16
Exercice 4	16 / 16
Exercice 5	16 / 16
Exercice 6	20 / 20
Total	100/100

Exercice 1 : **(16 pts)**

Un lot contient 10 pièces dont 3 défectueuses. On prélève, sans remise, un échantillon de taille 3.

(a) Quelle est la probabilité que l'échantillon contient au moins une pièce défectueuse ? (6 pts)

(b) Quelle est la probabilité que la deuxième pièce prélevée ne soit pas défectueuse ? (5 pts)

(c) Quelle est la probabilité que la troisième pièce prélevée ne soit pas défectueuse sachant que les deux premières pièces prélevées ne le sont pas non plus ? (5 pts)

Réponses :

Soit les év. A_k = « la k^e pièce prélevé est bonne » $k = 1, 2, 3$.

a) $$P(A_1^c \cup A_2^c \cup A_3^c) = 1 - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$
$$= 1 - P(A_1)\,P(A_2/A_1)\,P(A_3/A_1 \cap A_2)$$
$$= 1 - \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{5}{8} = \frac{17}{24}$$

7B
3D
10
→ 3 sans remise

ou bien,
$$P(A_1^c \cup A_2^c \cup A_3^c) = 1 - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$
$$= 1 - \frac{\binom{7}{3}\binom{3}{0}}{\binom{10}{3}} = \frac{17}{24}$$

b) $$P(A_2) = P(A_2/A_1)\,P(A_1) + P(A_2/A_1^c)\,P(A_1^c)$$
$$= \frac{6}{9} \cdot \frac{7}{10} + \frac{7}{9} \cdot \frac{3}{10} = 7/10$$

c) $$P(A_3/A_1 \cap A_2) = \frac{5}{8}$$

Exercice 2 : **(16 pts)**

Dans une certaine université, 20% des étudiants et 1% des étudiantes ont une taille supérieure à 6 pieds. De plus, 40% des élèves sont de sexe féminin. Sachant qu'un étudiant pris au hasard mesure plus de 6 pieds, quelle est la probabilité qu'il soit de sexe féminin ?

Réponse :

Bayes : $\Omega = \{A, A^c\}$ où $A =$ "Être de sexe féminin"

Soit $B =$ "taille plus grande que 6 pieds"

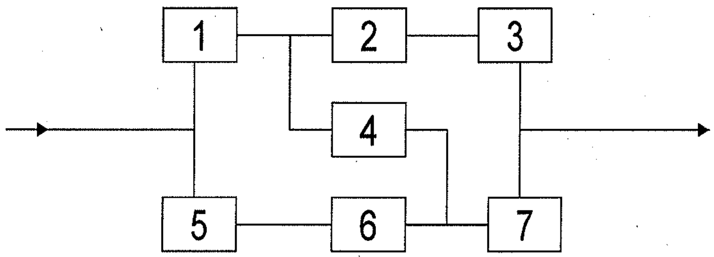
$$P(A/B) = \frac{P(B/A)\,P(A)}{P(B/A)\,P(A) + P(B/A^c)\,P(A^c)}$$

$$= \frac{0.01 \times 0.4}{0.01 \times 0.4 + 0.2 \times 0.6}$$

$$= 0.032$$

<u>Exercice 3</u> :(16 pts)

Calculer la fiabilité du réseau R suivant. On suppose que toutes les composantes ont la même fiabilité de .95 sauf la quatrième composante dont la fiabilité est de 0.90.



<u>Réponse</u> :

E_i = " la i^e composante fonctionne ", $P(E_i) = 0{,}95$, $i \neq 4$

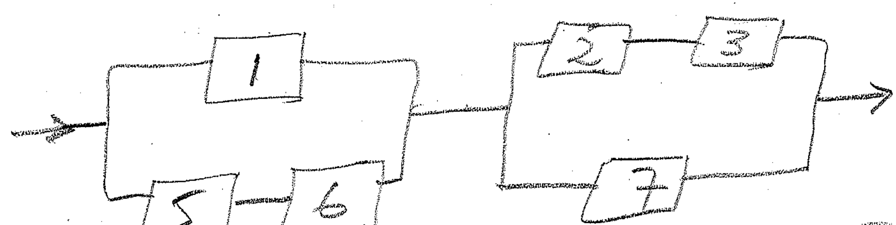
$i = 1, \ldots, 7$

R = " le réseau R fonctionne ", $P(E_4) = 0{,}90$

on a $P(R) = P\left[(R \cap E_4) \cup (R \cap E_4^c)\right]$

$= P(R/E_4)\,P(E_4) + P(R/E_4^c)\,P(E_4^c)$

R/E_4 :



Posons $E_8 = E_5 \cap E_6$ et $E_9 = E_2 \cap E_3$

on a $P(E_8) = P(E_9) = 0{,}95^2 = 0.9025$

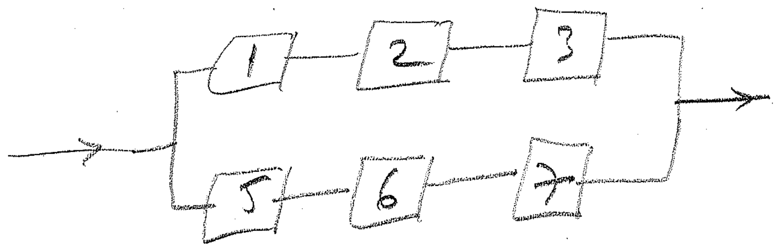
$$P(R/E_4) = P(E_1 \cup E_8)\,P(E_9 \cup E_7)$$

$$= \left[1 - P(E_1^c)P(E_8^c)\right]\left[1 - P(E_9^c)P(E_7^c)\right]$$

$$= \left[1 - 0.05 \times 0.0975\right]^2 = 0{,}9951$$

Exercice 3 : (suite)

R/E_4^c :



Posons $E_{10} = E_1 \cap E_2 \cap E_3$ et $E_{11} = E_5 \cap E_6 \cap E_7$

on a $P(E_{10}) = P(E_{11}) = 0.95^3 = 0.8574$

$$P(R/E_4^c) = P(E_{10} \cup E_{11})$$
$$= 1 - (1 - 0.8574)^2 = 0.9797$$

d'où :

$$P(R) = 0.9951 \times 0.90 + 0.9797 \times 0.10$$
$$= 0.9936$$

Exercice 4 : **(16 pts)**

Une variable aléatoire X possède la fonction de densité suivante :

$$f(x) = \begin{cases} ax & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ a & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 2.5 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

(a) Trouver la valeur de la constante "a". (4 pts)

Réponse : on cherche a tel que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \int_0^1 a\,x\,dx + \int_1^{2.5} a\,dx = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \left.\frac{a\,x^2}{2}\right|_0^1 + \left. a\,x\right|_1^{2.5} = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad a = 1/2; \end{aligned}$$

on vérifie que pour $a = 1/2$, on a bien $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(b) Trouver la moyenne et la variance de X. (6 pts)

Réponse : on calcule

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 x^2\,dx + \frac{1}{2}\int_1^{2.5} x\,dx \\ &= \left.\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}\right|_0^1 + \left.\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}\right|_1^{2.5} \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{3} + \frac{(2.5)^2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{71}{48} \approx 1.4792. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\,f(x)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 x^3\,dx + \frac{1}{2}\int_1^{2.5} x^2\,dx \\ &= \left.\frac{1}{2}\frac{x^4}{4}\right|_0^1 + \left.\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}\right|_1^{2.5} \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{4} + \frac{(2.5)^3}{6} - \frac{1}{6} = 2.5625 \end{aligned}$$

$$V(X) = 2.5625 - 1.4792^2 = 0.3745$$

Exercice 4 : **(suite)**

(c) Trouver la fonction de répartition de la variable X. (6 pts)

Réponse :

- si $x < 0$, alors

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0;$$

- si $0 \leq x < 1$, alors

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{x} \frac{t}{2}\,dt = \frac{x^2}{4};$$

- si $1 \leq x \leq 2.5$, alors

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{1} \frac{t}{2}\,dt + \int_{1}^{x} \frac{dt}{2} = \frac{2\,x-1}{4};$$

- si $x > 2.5$, alors

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{1} \frac{t}{2}\,dt + \int_{1}^{2.5} \frac{dt}{2} + \int_{2.5}^{x} 0\,dt = 1.$$

<u>Exercice 5</u> : (16 pts)

On vous propose le jeu suivant. Vous lancez deux dés moyennant une mise de 1\$. Si vous obtenez une somme égale à 3, on vous remet 17\$, sinon vous perdez votre mise.

(a) [8 pts] Trouvez la distribution de probabilité de votre gain.

(b) [8 pts] Est-ce un jeu équitable pour vous ?
Indication : calculer l'espérance de votre gain.

<u>Réponses</u> :

a) $$\text{gain} = \underset{\text{v.a.}}{X} = \begin{cases} 16\,\$ & \text{si somme} = 3 \\ -1\,\$ & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$P(\text{Somme} = 3) = P\{(1,2),(2,1)\} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

fct. de masse :

x_i	-1	16
p_i	$\frac{17}{18}$	$\frac{1}{18}$

b) $$EX = -\frac{17}{18} + \frac{16}{18} = -\frac{1}{18} < 0$$

donc jeu non équitable pour moi.

Exercice 6 : **(20 pts)**

On lance trois fois une pièce de monnaie équilibrée. On note X le nombre de faces obtenu au dernier lancer et Y le nombre total de faces obtenues.

(a) Trouver la loi conjointe du couple (X, Y). (5 pts)

(b) Donner la loi marginale de X et celle de Y. (4 pts)

(c) X et Y sont-elles indépendantes ? (2 pts)

(d) Calculer $E(Y/X = 1)$. (4 pts)

(e) Calculer le coefficient de corrélation de X et Y. Interpréter. (5 pts)

Réponses :

a) $\Omega = \{PPP, PPF, PFP, FPP, PFF, FPF, FFP, FFF\}$

fct. de masse de (X,Y)

$x \backslash y$	0	1	2	3	$\mathcal{L}(X)$
0	1/8	2/8	1/8	0	1/2
1	0	1/8	2/8	1/8	1/2
$\mathcal{L}(Y)$	1/8	3/8	3/8	1/8	1

$p(x,y) = P(X=x, Y=y)$

$p(0,0) = p(0,2) = p(1,1) = p(1,3) = 1/8$ car c'est la proba. d'avoir un des év : PPP, FFP, PPF ou FFF.

$p(0,3) = p(1,0) = 0$ (év. impossible)

$p(0,1) = P(FPP \text{ ou } PFP) = 2/8$

$p(1,2) = P(FPF \text{ ou } PFF) = 2/8$

b) Loi de X :

x_i	0	1
p_i	1/2	1/2

Loi de Y :

y_i	0	1	2	3
p_i	1/8	3/8	3/8	1/8

c) Non, car $p(1,0) = 0 \neq \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} = p(1)\,p(0)$.

Exercice 6 : (suite)

d) $E(Y/X=1) = \sum_{y=0}^{3} y\, P_{Y/X=1}(y)$

$= 1 \cdot \frac{1/8}{1/2} + 2 \cdot \frac{2/8}{1/2} + 3 \cdot \frac{1/8}{1/2}$

$= 2$

e) $EX = \frac{1}{2}$, $EX^2 = \frac{1}{2}$, $VX = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

$EY = \frac{3}{2}$, $EY^2 = 3$, $VY = 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$

$E(XY) = 1.1.\frac{1}{8} + 1.2.\frac{2}{8} + 1.3.\frac{1}{8} = 1$

$Cov(X,Y) = E(XY) - EXEY = 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} = \frac{1}{4}$

$$\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{VX \cdot VY}} = \frac{1/4}{\sqrt{\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.576$$

donc X et Y varient moyennement dans le même sens.