NOM : MATRICULE :

GEL2001 : ANALYSE DES SIGNAUX

MINITEST 2 A2011

DÉPARTEMENT DE GÉNIE ÉLECTRIQUE ET DE GÉNIE INFORMATIQUE

Question 1

Vrai ou faux ?

1. $\frac{1}{2\pi}G(\omega)H(\omega) = h(t) \times g(t)$
   Faux. L'énoncé serait vrai s'il y avait un symbole de convolution au membre de droite.

2. $\mathrm{Tri}(t+1)$ est la réponse impulsionnelle d'un filtre causal
   Faux. $\mathrm{Tri}(t+1)$ est non-nulle pour $t < 0$. Elle représente donc un filtre non-causal.

3. Si $u(t)$ est l'entrée d'un système défini par $h(t) = u(t)$, alors la sortie est $u(t)$
   Faux. L'élément neutre de la convolution étant $\delta(t)$, c'est la seule entrée qui fait que la sortie d'un système soit égale à sa réponse à l'impulsion.

4. $\mathrm{TF}^{-1}(\frac{2}{5j\omega-\omega^2}) = e^{-5t}u(t) * \mathrm{sgn}(t)$
   Vrai. $\frac{2}{5j\omega-\omega^2} = \frac{2}{j\omega}\frac{1}{5+j\omega} \Longleftrightarrow \mathrm{TF}^{-1}(\frac{2}{j\omega}) * \mathrm{TF}^{-1}(\frac{1}{5+j\omega}) = e^{-5t}u(t) * \mathrm{sgn}(t)$

Question 2

Calculez $\frac{d}{dt}(\mathrm{Rect}(t) * \exp(-|t|))$

La façon la plus simple d'obtenir la réponse est de choisir d'appliquer la dérivée à la fonction $\mathrm{Rect}(t)$ pour obtenir des Dirac (élément neutre de la convolution) et utiliser la propriété de décalage : $\frac{d}{dt}(\mathrm{Rect}(t) * \exp(-|t|)) = ((\delta(t+\frac{1}{2}) - \delta(t-\frac{1}{2})) * \exp(-|t|)) = \exp(-|t+\frac{1}{2}|) - \exp(-|t-\frac{1}{2}|)$

Question 3

a) En utilisant la méthode du court-circuit virtuel, le potentiel au noeud de l'entrée négative est égal à celui du noeud de l'entrée positive. En posant le potentiel du noeud de l'entrée positive à zéro, on obtient l'équation suivante :

$V(\omega) = -(Z_C||Z_R)I(\omega) = -\frac{Z_C Z_R}{Z_C+Z_R}I(\omega) = -\frac{\frac{1}{j\omega C}R}{\frac{1}{j\omega C}+R}I(\omega) = -\frac{R}{1+j\omega RC}I(\omega)$

$H(\omega) = \frac{V(\omega)}{I(\omega)} = -\frac{R}{1+j\omega RC}$

C'est donc un système passe bas de gain $-R$ et de constante de temps RC. Exprimé en amplitude et en phase, on a :

$|H(\omega)| = \frac{R}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}}$

$\mathrm{Arg}(H(\omega)) = \pi - \mathrm{atan}(RC\omega)$

b) Lorsque $\omega = \frac{1}{RC}$, les expressions pour la fonction de transfert, en module et en phase, se réduisent à :

$|H(\omega)| = \frac{R}{\sqrt{2}}$

$\mathrm{Arg}(H(\omega)) = \pi - \mathrm{atan}(1) = \pi - \frac{\pi}{4}$

La sortie du filtre est donc : $v(t) = \frac{R}{\sqrt{2}}\cos\left(\omega_0 t + \pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{R}{\sqrt{2}}\cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{4}\right)$