Mini test 1 MAT-2910

8 février 2018 **Analyse numérique pour ingénieurs** Section S - Hiver 2018

- Cet examen contient 3 page(s) et 2 exercices.
- Durée de l'examen : 50 minutes
- Calculatrice autorisée

Exercice 1 : [35 points]

1) Donner les étapes de l'algorithme de bissection (condition initiale, étapes dans la boucle et hypothèses assurant la convergence)

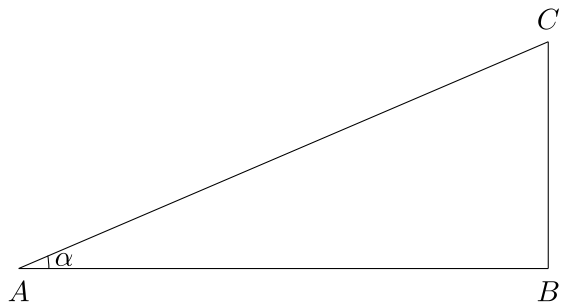
Solution : La fonction f doit être continue. On part de deux points x_1 et x_2 tels que $f(x_1)f(x_2) < 0$. A chaque étape on dispose de x_n et x_{n+1} tel que $f(x_n)f(x_{n-1}) < 0$. On calule le point milieu x_{n+1} et on recommence l'algorithme sur l'intervalle où l'on détecte un changement de signe.

2) Soit g la fonction définie par $g(x) = x^2 + 2x$. Déterminer ses point fixes, l'ordre de convergence de la suite $x_{n+1} = g(x_n)$ correspondant attendu et les caractériser (répulsifs, attractifs ou indéterminés). Enfin, pour $x_0 = 2$, calculer x_1 et x_2.

Solution : On pose l'équation $x^2 + 2x - x = 0$, c'est à dire $x^2 + x = 0$. Les points fixes sont 0 et -1. La dérivée est $g'(x) = 2x + 2$: $g'(0) = 2$ (point fixe répulsif pas de convergence) et $g'(-1) = 0$ (point fixe attractif et convergence quadratique). Enfin partant de 2 l'algorithme de point fixe donne $x_1 = 2^2 + 2 \times 2 = 8$ et $x_2 = x_1^2 + 2x_1 = 64 + 16 = 80$.

Exercice 2 : [65 points]

On considère le triangle suivant :



On note $x = CB$ et $y = AC$. On mesure approximativement $x^* = 1.20$ et $y^* = 2$ avec des erreurs respectives $\Delta x = 0.01$ et $\Delta y = 0.1$. A l'aide de ces mesures on désire retrouver une approximation de l'angle α et la précision de notre calcul. Celui-ci est donné par la formule $\alpha = \arcsin(\frac{x}{y})$.

1) On pose $D^* = \frac{x^*}{y^*}$. Déterminer la formule de propagation d'erreur pour l'opération de division et calculer ΔD et D^*.

Solution : on a

$$\Delta D = \frac{|y^*|\,\Delta x + |x^*|\,\Delta y}{|y^*|^2} = 0.035$$

et $D^* = 0.6$

2) Déterminer le polynome $P_2(h)$ de Taylor de la fonction f = arcsin de degré 2 en 0.5 et donner sa factorisation de Hörner. On rappelle que $\arcsin(0.5) = \frac{\pi}{6}$, $f'(x) = \left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$, que $f^{(2)}(x) = \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$, $f^{(3)}(x) = \frac{1+2x^2}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}$ et que $f^{(4)} = \frac{3x(2x^2+3)}{(1-x^2)^{\frac{7}{2}}}$

Solution : La fonction arcsin est définie sur $[-1,1]$, infiniment dérivable sur $]-1,1[$. On a :

$$\arcsin'(x) = \left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\arcsin^{(2)}(x) = \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

On écrit le développement de Taylor avec $x_0 = 0.5$:

$$\begin{aligned} f(x_0+h) &= \frac{\pi}{6} + \frac{2h}{\sqrt{3}} + \frac{h^2}{2}\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{2}} + R_2(h) \\ &= \frac{\pi}{6} + \frac{2h}{\sqrt{3}} + \frac{2h^2}{3\sqrt{3}} + R_2(h) \end{aligned}$$

La factorisation de Hörner du polynome :

$$\frac{\pi}{6} + h\left(\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{2h}{3\sqrt{3}}\right)$$

3) Calculer $\alpha^* = \arcsin(D^*)$ à l'aide du polynome de Taylor trouvé.

Solution : $f(0.6) \approx P_2(0.1) = 0.6429178$.

4) Déterminer la formule du reste de développement de Taylor d'ordre 2 en 0.5 (dans le cas de la fonction arcsin).

Solution :

$$\arcsin^{(3)}(x) = (1+2x^2)(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}$$

Donc le reste R_2 s'écrit avec un ξ compris entre 0.5 et $0.5+h$:

$$R_2(h) = (1+2\xi^2)(1-\xi^2)^{-\frac{5}{2}}\frac{h^3}{6}$$

5) Trouver une majoration du reste en supposant que $x_0 + h > 0$ (on pourra étudier les variations de la fonction $f^{(3)}$). A l'aide de cette majoration donner l'ordre de l'approximation et le nombre de chiffres significatifs de l'approximation α^* trouvée.

Solution : Pour trouver une majoration du reste, on doit éliminer ξ. On étudie la fonction $f^{(3)}$. Sa dérivée est :

$$f^{(4)}(x) = \frac{3x(2x^2+3)}{(1-x^2)^{-\frac{7}{2}}}$$

La dérivée change de signe en 0, négative à gauche de 0 et positive à droite. La fonction $f^{(3)}$ est donc croissante sur $[0,1[$ et décroissante sur $]-1,0]$. Comme $x_0+h>0$, on majore le reste suivant le signe de h (on note par ailleurs que le minimum de $f^{(3)}$ est atteint en 0 et qu'il est égal à $f^{(3)}(0)=1$, donc $f^{(3)}$ est positive). Si $h<0$, $0 \leq f^{(3)}(0.5+h) \leq f^{(3)}(0.5)$ donc

$$|R_2(h)| \leq \left|f^{(3)}(0.5)\right| \frac{|h|^3}{6}$$

Si $h>0$, $f^{(3)}(0.5+h) \geq f^{(3)}(0.5) \geq 0$ donc

$$|R_2(h)| \leq \left|f^{(3)}(0.5+h)\right| \frac{h^3}{6}.$$

L'approximation est d'ordre 3.

On fait le calcul pour $h=0.1$:

$$|R_2(h)| \leq f^{(3)}(0.6)\frac{h^3}{6}.$$

et $f^{(3)}(0.6) = 5.2490234375$ donc

$$|R_2(h)| \leq f^{(3)}(0.6)\frac{0.1^3}{6} = 0.000874 = 0.874 \times 10^{-3} \leq 0.5 \times 10^{-2}$$

Le nombre de chiffres significatifs est de 2 : 6 et 4.

6) En calculant l'erreur “exacte” donnée par une calculatrice pour deux valeurs, vérifier votre réponse concernant l'ordre.

Solution : L'erreur exacte dans le cas de $f(0.6)$ est $E_1 = 0.000583278$ et dans le cas de $f(0.7)$ est $E_2 = 0.00546261$. On quotiente :

$$\frac{E_2}{E_1} = 9.357$$

On n'est pas loin de $8 = 2^3$, donc ordre 3.

7) Calculer l'erreur faite en approchant $\alpha = \arcsin(D)$ par $P_2(D^*)$.

Solution :

$$\begin{aligned} |\arcsin(D) - P_2(D^*)| &\leq |\arcsin(D) - \arcsin(D^*)| + |\arcsin(D^*) - P_2(D^*)| \\ &\leq \left|f'(D^*)\right| \Delta D^* + |R_2(h)| \\ &\leq 0.04375 + 0.000874 = 0.044624 \end{aligned}$$

Dans cet exemple l'erreur de propagation est plus forte que l'erreur de troncature