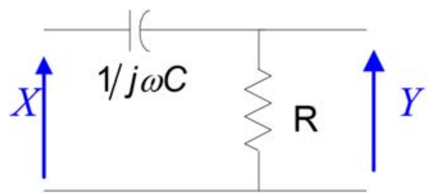
Jeudi le 12 décembre 2013; Durée: 8h30 à 10h20
Aucune documentation permise; aucune calculatrice permise

Problème 1 (30 points sur 100)



$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$$

A. (5 points) Trouvez la réponse en fréquence, $H(\omega)$, du circuit ci-haut.

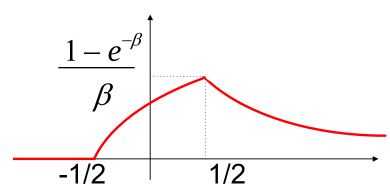
B. (10 points) Montrez que la réponse impulsionnelle du circuit est

$$h(t) = \delta(t) - \frac{1}{RC} e^{-t/RC} U(t)$$

C. (4 points) Est-ce que le filtre est passe-bas, passe-haut, ou passe-bande? Il faut justifier votre réponse en examinent $\lim\limits_{\omega\to 0}|H(\omega)|$ et $\lim\limits_{\omega\to\infty}|H(\omega)|$.

D. (5 points) Supposant que l'entrée est $x(t) = \text{Rect}(t)$. Étant donné que

$$\text{Rect}(t) * e^{-\beta t} U(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t \le -1/2 \\ \dfrac{1}{\beta}\left(1 - e^{-\beta(t+1/2)}\right) & \text{pour } -1/2 \le t \le 1/2 \\ \dfrac{2}{\beta} sh(\beta/2) e^{-\beta(t+1/2)} & \text{pour } t \ge 1/2 \end{cases}$$



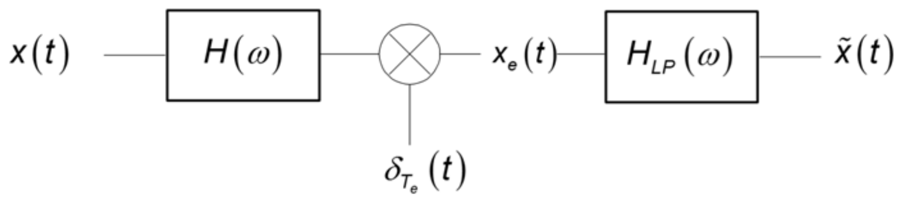
tracez la sortie du filtre, *y*(*t*).

E. (6 points) Pour l'entrée $x(t) * \delta_T(t) = \text{Rect}(t) * \delta_T(t)$, la sortie est *y*(*t*). Trois esquisses possible pour *y*(*t*) sont :

Indiquez pour chaque esquisse de *y*(*t*) si $1/RC \gg 1$, $1/RC \ll 1$ ou $1/RC \approx 1$, et justifiez votre choix.

Problème 2 (30 points sur 100)

Supposons que *x*(*t*) est un signal limité en fréquence avec une fréquence maximale de $\omega_{\max}$. Le signal $\tilde{x}(t)$ est la reconstruction du signal d'entrée *x*(*t*) qui a été échantillonné aux multiples de T_e. Le filtre $H(\omega)$ est un filtre optionnel pour éviter le repliement spectral.



A. (5 points) Quelle est le taux de Nyquist ω_{Nyq} et le période d'échantillonnage de Nyquist T_{Nyq}?

B. (5 points) Supposons que T_e = 1.25 T_{Nyq}. Spécifiez la réponse en fréquence $H(\omega)$ pour le filtre avant échantillonnage pour éviter le repliement spectral.

C. (4 points) Supposons que le signal d'entrée a un spectre triangulaire avec $\omega_{\max} = 1$. Tracez le spectre $X_e(\omega)$ après échantillonnage et avant le filtrage passe-bas pour ces deux cas :

i. Pas de filtre $H(\omega)$

ii. Avec filtre $H(\omega)$ spécifié en partie B.

D. (4 points) Supposons que le signal d'entrée a un spectre triangulaire avec $\omega_{\max} = 1$. Le filtre $H_{LP}(\omega)$ est un filtre passe-bas idéal avec fréquence de coupure $\omega_e = .8\omega_{\max}$. Tracez le spectre du signal reconstruit $\tilde{X}(\omega)$ pour ces deux cas :

i. Pas de filtre $H(\omega)$

ii. Avec filtre $H(\omega)$ spécifié en partie B.

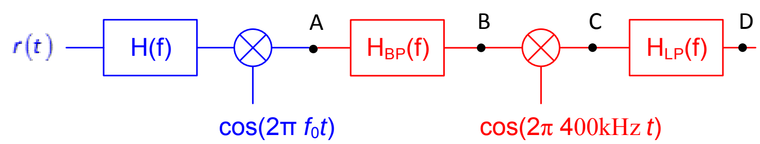
E. (10 points) Pour ce signal d'entrée avec un spectre triangulaire, trouvez l'erreur quadratique moyenne *e* pour les cas sans et avec filtre $H(\omega)$.

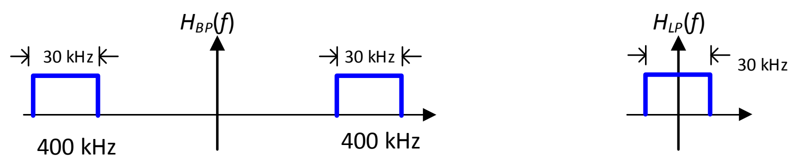
$$e = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| x(t) - \tilde{x}(t) \right|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| X(\omega) - \tilde{X}(\omega) \right|^2 d\omega$$

F. (2 points) Est-ce que vous pouvez réduire l'erreur moyenne quadratique en proposant un autre filtre anti-repliement?

Problème 3 (30 points sur 100)

Les postes CHOI FM à 98.1 MHz et NRJ FM à 98.9 MHz ont chacun un spectre rectangulaire avec une largeur de bande de 30 kHz centrée sur leur fréquence allouée. La somme de ces deux signaux, $r(t)$, est reçue dans le récepteur superhétérodyne suivant :





A. (5 points) Pour la réception du poste NRJ FM, quelle fréquence f_0 doit être utilisée?

B. (8 points) Supposant qu'il n'a pas de filtre $H(f)$, tracez le spectre aux points A, B, C et D.

C. (9 points) Proposez un filtre anti-image $H(f)$ pour aider la réception.

D. (8 points) Supposant qu'on utilise le filtre $H(f)$ proposé, tracez le spectre aux points A, B, C et D.

Problème 4 (10 points sur 100)

Discutez les similarités et les différences dans ces deux stratégies de filtrage :

a. L'utilisation d'un filtre anti-repliement du spectre dans un système d'échantillonnage

b. L'utilisation d'un filtre anti-image dans un récepteur superhétérodyne.

Double Angle Formulas

$$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\begin{aligned}\cos(2\theta) &= \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ &= 2\cos^2\theta - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2\theta\end{aligned}$$

Sum and Difference Formulas

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

Half Angle Formulas

$$\sin^2\theta = \frac{1}{2}\left(1 - \cos(2\theta)\right)$$

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2}\left(1 + \cos(2\theta)\right)$$

Product to Sum Formulas

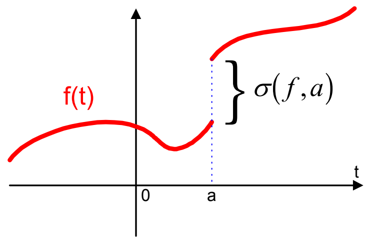
$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\right]$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)\right]$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)\right]$$

Tables de Transformées et Propriétés
Examen Final

Dérivée d'une fonction discontinue



$$\left(D_f\right)' = D_{f'} + \sigma(f,a)\,\delta_a$$

Manipulation sur la fonction delta

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$$

et $f(t)\delta(t-a) = f(a)\delta(t-a)$

$$f(t)*\delta(t) = f(t)$$

et $f(t)*\delta(t-a) = f(t-a)$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-jn\tau\omega} = \frac{2\pi}{\tau}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega - \frac{2\pi n}{\tau}\right)$$

Séries de Fourier

$F_{série}(n) = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f_p(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$ et $f_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_{série}(n)e^{jn\omega_0 t}$

Théorème de Parseval : $\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}\left|f_p(t)\right|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|F_{série}(n)\right|^2$

Calcul des coefficients de Fourier d'une fonction périodique

Soit $f_r(t)$ la restriction de la fonction $f_p(t)$ sur $\left[-T_0/2, T_0/2\right]$ et

$f_r(t) \Leftrightarrow F_r(\omega)$. Nous aurons: $F_{Série}(n) = \frac{F_r(n\omega_0)}{T_0}$

Transformée de Fourier

$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$ et $f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$

Théorème de Parseval : $\int_{-\infty}^{+\infty}\left|f(t)\right|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|F(\omega)\right|^2 d\omega$

Produit de convolution

$$f(t)*g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(t-u)du = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)f(t-u)du$$

Tables de Transformées et Propriétés
Examen Final

Fonction	Transformée de Fourier	Fonction	Transformée de Fourier
$f(t)$	$F(\omega)$	$\delta(t)$	1
$F(t)$	$2\pi f(-\omega)$	1	$2\pi\delta(\omega)$
$f(t+a)$	$e^{ja\omega}F(\omega)$	$\delta_{T_0}(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT_0)$	$\omega_0\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-n\omega_0)$
$f(at)$	$\frac{1}{\|a\|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$	$U(t)$	$\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$
$e^{jbt}f(t)$	$F(\omega-b)$	$\mathrm{Sgn}(t)$	$\frac{2}{j\omega}$
$t^n f(t)$	$(j)^n\frac{d^n}{d\omega^n}F(\omega)$	$\mathrm{Rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)$ †	$\tau\,\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$
$\frac{d^n}{dt^n}f(t)$	$(j\omega)^n F(\omega)$	$\mathrm{Tri}\left(\frac{t}{\tau}\right)$ ‡	$\tau\ \ \mathrm{Sa}^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$
$f(t)\times g(t)$	$\frac{1}{2\pi}F(\omega)*G(\omega)$	$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\,\delta(\omega-\omega_0)$
$f(t)*g(t)$	$F(\omega)\times G(\omega)$	$\cos(\omega_0 t)$	$\pi\left[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right]$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\omega_0 t}$	$2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\delta(\omega-n\omega_0)$	$\sin(\omega_0 t)$	$\frac{\pi}{j}\left[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)\right]$
$e^{-\beta t}U(t)$	$\frac{1}{\beta+j\omega}$	$\mathrm{Sa}(tB)$	$\frac{\pi}{B}\mathrm{Rect}\left(\frac{\omega}{2B}\right)$
$e^{-\beta\|t\|}$	$\frac{2\beta}{\beta^2+\omega^2}$	$\mathrm{Sa}^2(tB)$	$\frac{\pi}{2B^2}\mathrm{Tri}\left(\frac{\omega}{2B}\right)$

† $\mathrm{Rect}\left(\frac{t-t_0}{\tau}\right)$ est un rectangle de hauteur un, centré sur $t=t_0$, et de longueur τ.

‡ $\mathrm{Tri}\left(\frac{t-t_0}{\tau}\right)$ est un triangle de hauteur 1 centré sur $t=t_0$, avec un base de longueur 2τ.