Université Laval
Professeur: Leslie A. Rusch

Département de Génie Électrique
et de Génie Informatique

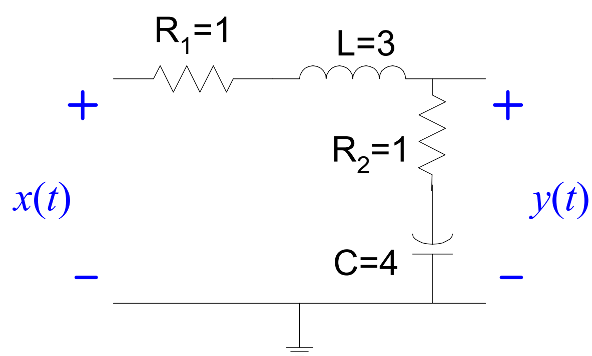
GEL19962: Analyse des signaux
2003 Examen Final

Lundi le 15 décembre 2003; durée: 10h30 à 12h20
Une feuille des notes 8.5"×11" permise; aucune calculatrice permise

---

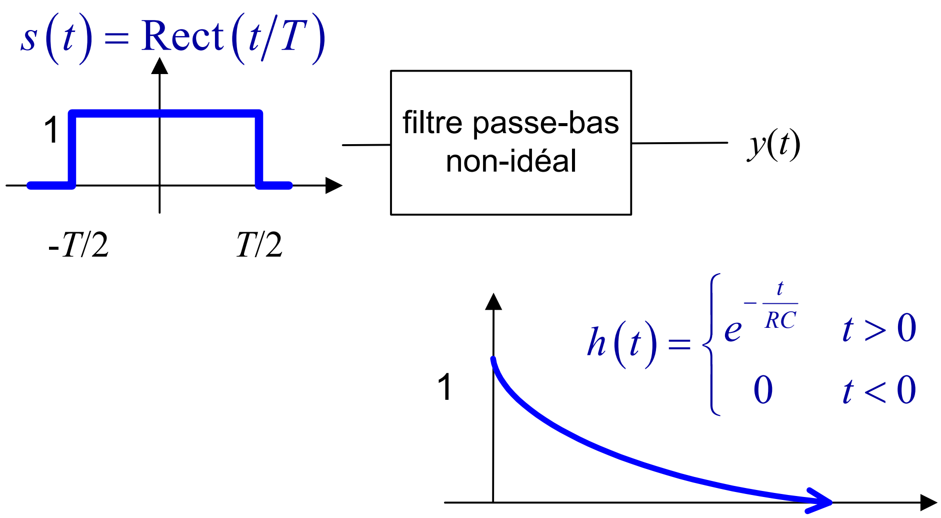
Problème 1 (8 points sur 45)

Trouvez la réponse impulsionnelle du circuit suivant.



Problème 2 (13 points sur 45)

A. (7 points) Donnez l'équation pour la sortie $y(t)$ du système suivant, avec entrée $s(t)$ et filtre avec réponse impulsionnelle $h(t)$.

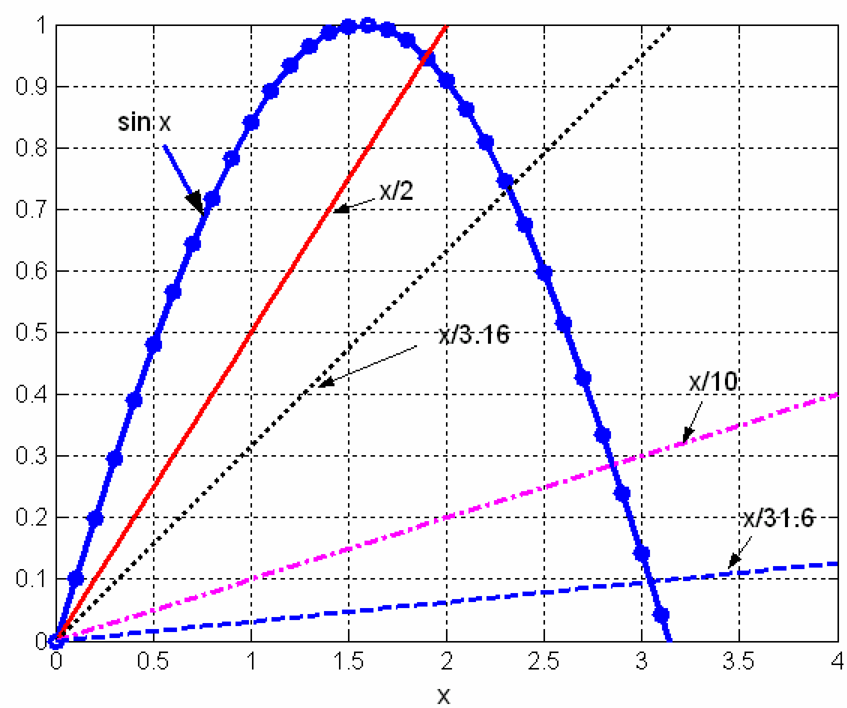


B. (2 points) Donnez la largeur de bande 3 dB (fréquence pour laquelle le spectre d'amplitude est la moitié de sa valeur maximale) du signal d'entrée en fonction de T, la largeur du signal en temps.

C. (2 points) Donnez la largeur de bande 3 dB du filtre passe-bas non idéal en fonction de *RC,* la constante de décroissance.

D. (2 points) Discutez l'impact de $T >> RC$ et $RC >> T$ sur la sortie $y(t)$.

Voici un graphique qui peut être utile :



Problème 3 (10 points sur 45)

Nous avons un signal avec la forme Gaussienne, soit

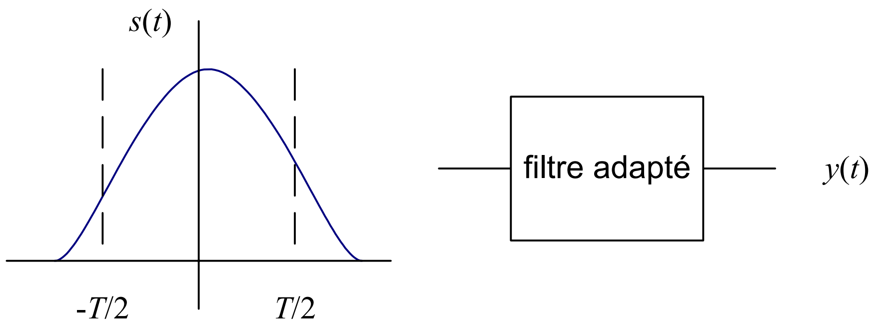
$$s(t) = e^{-\frac{t^2}{T^2}}$$

où 70% de l'énergie du signal tombe dans la région $-T/2 < t < T/2$.

Un petit rappel que la transformée d'un signal Gaussien est encore Gaussien, soit

$$e^{-at^2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\pi}} e^{-\omega^2/4a}$$

Ce signal passe par un filtre adapté, c'est-à-dire, un filtre qui maximise le rapport signal à bruit pour un canal avec bruit blanc additif.



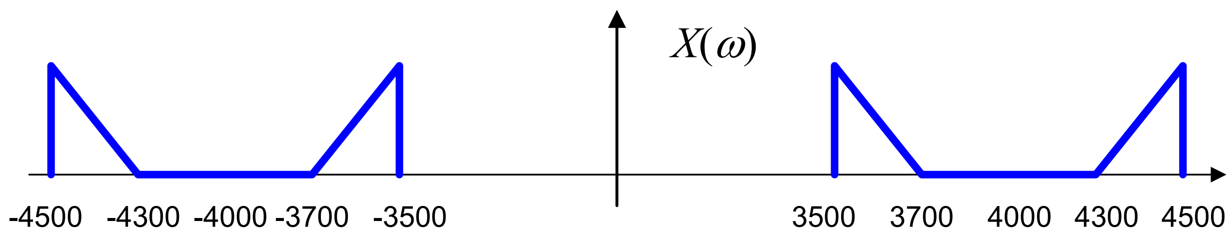
L'équation de la réponse impulsionnelle d'un filtre adapté est

$$h(t) = s(T-t) = e^{-\frac{(T-t)^2}{T^2}}$$

Trouvez la sortie $y(t)$.

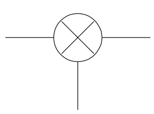
Problème 4 (14 points sur 45)

Voici le spectre d’un signal réel de temps continu qui a été modulé par une porteuse à 4000.



Vous avez besoin de créer un système pour convertir le signal dans une forme numérique en temps pour le sauvegarder; il est aussi nécessaire de reconstruire ***exactement*** le signal continu après la lecture de la forme numérique. (Pour faciliter et soulager vos calculs, vous n’avez pas besoin de tenir compte de niveau absolu du spectre, mais juste la forme. Par exemple, une modulation peut introduire une réduction du spectre par un demi, mais la forme n’est pas changée).

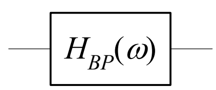
Vous avez plusieurs composantes idéales disponibles (en plusieurs copies de chaque)



$\cos(\omega_0 t)$

syntonisable

$0 \le \omega_0 \le 8000$

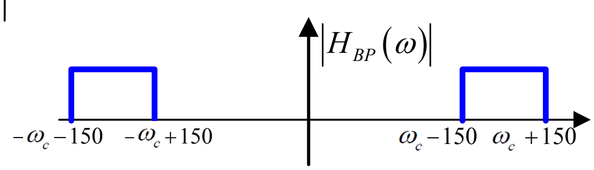


$$H_{BP}(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega - \omega_c| < 300, |\omega + \omega_c| < 300 \\ 0 & \textit{ailleurs} \end{cases}$$

syntonisable

$0 \le \omega_c \le 10000$

taux d'échantillonnage de 700



A. (9 points) Proposez un système de conversion du signal continu avec spectre $X(\omega)$ vers une forme numérique. Justifiez votre réponse en traçant le spectre du signal après chaque composante du système.

B. (5 points) Proposez un système de reconstruction du signal continu avec spectre $X(\omega)$ à partir de la forme numérique de la partie A. Justifiez votre réponse en traçant le spectre du signal après chaque composante du système.

Examen Final 2003

Fonction	Transformée de Fourier	Fonction	Transformée de Fourier
$f(t)$	$F(\omega)$	$\delta(t)$	1
$F(t)$	$2\pi f(-\omega)$	1	$2\pi\delta(\omega)$
$f(t+a)$	$e^{ja\omega}F(\omega)$	$\delta_{T_0}(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT_0)$	$\omega_0\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-n\omega_0)$
$f(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$	$\mathrm{U}(t)$	$\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$
$e^{jbt}f(t)$	$F(\omega-b)$	$\mathrm{Sgn}(t)$	$\frac{2}{j\omega}$
$t^n f(t)$	$(j)^n\frac{d^n}{d\omega^n}F(\omega)$	$\mathrm{Rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)$ †	$\tau\,\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$
$\frac{d^n}{dt^n}f(t)$	$(j\omega)^n F(\omega)$	$\mathrm{Tri}\left(\frac{t}{\tau}\right)$ ‡	$\tau^2\,\mathrm{Sa}^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$
$f(t)\times g(t)$	$\frac{1}{2\pi}F(\omega)*G(\omega)$	$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\,\delta(\omega-\omega_0)$
$f(t)*g(t)$	$F(\omega)\times G(\omega)$	$\cos(\omega_0 t)$	$\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\omega_0 t}$	$2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\delta(\omega-n\omega_0)$	$\sin(\omega_0 t)$	$\frac{\pi}{j}[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$
$e^{-\beta t}\,\mathrm{U}(t)$	$\frac{1}{\beta+j\omega}$	$\mathrm{Sa}(tB)$	$\frac{\pi}{B}\mathrm{Rect}\left(\frac{\omega}{2B}\right)$
$e^{-\beta\lvert t\rvert}$	$\frac{2\beta}{\beta^2+\omega^2}$	$\mathrm{Sa}^2(tB)$	$\frac{\pi}{2B^2}\mathrm{Tri}\left(\frac{\omega}{2B}\right)$

† $\mathrm{Rect}\left(\frac{t-t_0}{\tau}\right)$ est un rectangle de hauteur un, centré sur $t=t_0$, et de longueur τ.

‡ $\mathrm{Tri}\left(\frac{t-t_0}{\tau}\right)$ est un triangle de hauteur τ centré sur $t=t_0$, avec un base de longueur 2τ.