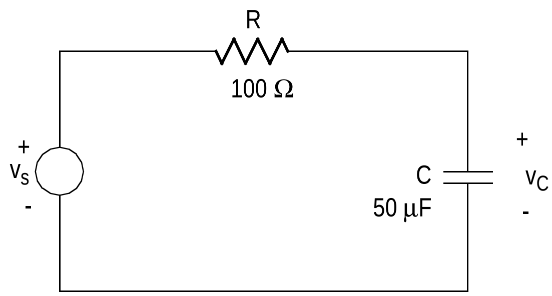
## GEL-16132 Circuits

***Corrigé du test no. 3 (A99)***

**Question no.1**




$$v_s = 120\cos(200\pi t)u(t) = 120\mathrm{Re}\{e^{j200\pi t}u(t)\}$$

a) On utilise la méthode des noeuds pour écrire l'équation d'équilibre du circuit:

$$\left[\frac{1}{R} + C\frac{d}{dt}\right]v_C = \frac{v_s}{R}$$

ou bien: $$RC\frac{dv_C}{dt} + v_C = v_s$$

Avec les valeurs numériques, on a l'équation différentielle suivante:

$$0.005\frac{dv_C}{dt} + v_C = 120\mathrm{Re}\{e^{j200\pi t}u(t)\}$$

b) On résout en premier lieu l'équation suivante: $$0.005\frac{dv_x}{dt} + v_x = e^{j200\pi t}u(t)$$

Pour t < 0, on a: $v_x = 0$

Pout t > 0, on a: $v_x = v_{xp} + v_{xh}$

avec $$v_{xp} = \frac{1}{0.005(j200\pi) + 1}e^{j200\pi t} = 0.3033e^{-j1.263}e^{j200\pi t}$$

$$v_{xh} = Ae^{\frac{-t}{0.005}}$$

À t = 0, $v_x$ doit être continue, c'est à dire: $$v_x(0+\ \ ) = v_x(0-\ \ ) = 0 = A + 0.3033e^{-j1.263}$$

On déduit: $$A = -0.3033e^{-j1.263}$$

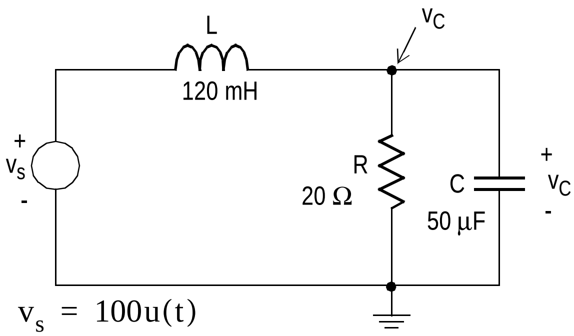
Finalement, on a: $$v_x = \left\{0.3033e^{-j1.263}e^{j200\pi t} - 0.3033e^{-j1.263}e^{\frac{-t}{0.005}}\right\}u(t)$$

La tension $v_C(t)$ est donnée par la relation suivante:

$$v_C = 120\mathrm{Re}\{v_x\} = 120\mathrm{Re}\left\{\left\{0.3033e^{-j1.263}e^{j200\pi t} - 0.3033e^{-j1.263}e^{\frac{-t}{0.005}}\right\}u(t)\right\}$$

$$\boxed{v_C = \left\{36.4\cos(200\pi t - 1.263) - 11.03e^{\frac{-t}{0.005}}\right\}u(t)}$$

**Question no.2**




$$v_s = 100u(t)$$

a) On utilise la méthode des noeuds pour établir l'équation d'équilibre du circuit:

$$\left[\frac{1}{R} + Cs + \frac{1}{Ls}\right]v_C = \frac{1}{Ls}v_s$$

ou bien: $$\left[LCs^2 + \frac{L}{R}s + 1\right]v_C = v_s$$

Avec les valeurs numériques, on a l'équation suivante: $$6\times10^{-6}\frac{d^2v_C}{dt^2} + 0.006\frac{dv_C}{dt} + v_C = v_s = 100u(t)$$

b) Pour t < 0, on a: $v_C = 0$

Pour t > 0, on a: $v_C = v_{CP} + v_{CH}$

avec $v_{CP} = 100$

$$v_{CH} = A_1e^{s_1t} + A_2e^{s_2t}$$

$s_1$ et $s_2$ sont les fréquences naturelles du circuit, qui sont les racines de l'équation caractéristique:

$$6\times10^{-6}s^2 + 0.006s + 1 = 0$$

On a: $s_1 = -788.67$ et $s_2 = -211.32$.

À t = 0, la tension $v_C$ et sa dérivée doivent être continue, c'est à dire:

$$v_C(0+) = v_C(0-) = 0 = 100 + A_1 + A_2$$

$$\frac{dv_C}{dt}(0+) = \frac{dv_C}{dt}(0-) = 0 = s_1A_1 + s_2A_2$$

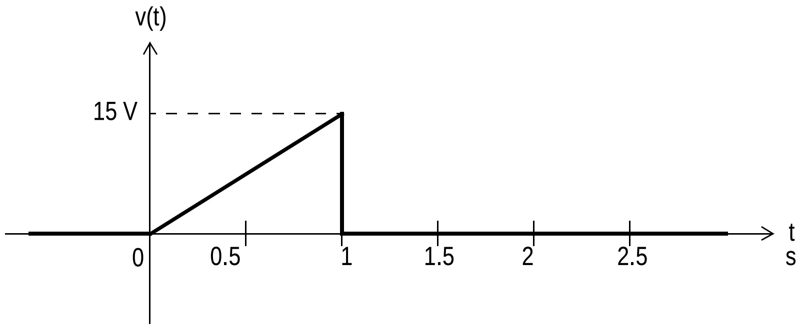
On déduit: $A_1 = 36.6$ et $A_2 = -136.6$

Finalement, la tension $v_C$ est égale à:

$$v_C = \{36.6e^{-788.67t} - 136.6e^{-211.32t} + 100\}u(t)$$

**Question no.3**

a)




$$v(t) = 15r(t) - 15r(t-1) - 15u(t-1)$$

La transformée de Laplace de v(t) est:

$$V(s) = \frac{15}{s^2} - e^{-s}\frac{15}{s^2} - e^{-s}\frac{15}{s}$$

b) On décompose F(s) en fractions partielles:

$$F(s) = \frac{10s + 27}{s(3s^2 + 33s + 54)} = \frac{10s + 27}{3s(s+2)(s+9)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+9}$$

Les constantes A, B, C sont:

$$A = \left.\frac{10s + 27}{3(s+2)(s+9)}\right|_{s = 0} = 0.5$$

$$B = \left.\frac{10s + 27}{3s(s+9)}\right|_{s = -2} = \frac{-1}{6}$$

$$C = \left.\frac{10s + 27}{3s(s+2)}\right|_{s = -9} = \frac{-1}{3}$$

La fonction f(t) est: $f(t) = \left\{0.5 - \frac{1}{6}e^{-2t} - \frac{1}{3}e^{-9t}\right\}u(t)$