Corrigé Final H2012

Question 1)

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = 1 + 2x - x^3 & 0 \le x \le 1 \\ S_1(x) = 2 + a(x-1) + b(x-1)^2 + c(x-1)^3 & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

S est une spline naturelle.

i) Continuité de S en $x = 1$:

$$S_0(1) = 1 + 2(1) - (1)^3 = 2$$
$$S_1(1) = 2 + a(1-1) + b(1-1)^2 + c(1-1)^3 = 2$$

Et S est continue en $x = 1$.

ii) Continuité de S' en $x = 1$

$$S_0'(1) = 2 - 3(1)^2 = -1$$
$$S_1'(1) = a + 2b(1-1) + 3c(1-1)^2 = a$$

Et S'est continue en $x = 1$ si $a = -1$

iii) Continuité de S'' en $x = 1$

$$S_0''(1) = -6(1)$$
$$S_1''(1) = 2b + 6c(1-1) = 2b$$

Et S''est continue en $x = 1$ si $b = -3$

iv) La spline est naturelle $S_0''(0) = S_1''(2) = 0$:

$$S_0''(0) = 0 \text{ on n'a rien de plus}$$
$$S_1''(2) = 2b + 6c(2-1) = 2b + 6c = -6 + 6c = 0$$

Et la spline est naturelle si $c = 1$

Question 2)

$$\begin{cases} y''(t) = 2 - 2t - 2t^2 + 2y(t) + y'(t) \\ y(0) = 1 \qquad y'(0) = -1 \end{cases}$$

a) Soit $y(t) = e^{-t} + t^2$ alors

$$y'(t) = -e^{-t} + 2t \qquad y''(t) = e^{-t} + 2$$

Et on a bien que

$$y''(t) - y'(t) - 2y(t) = (e^{-t} + 2) - (-e^{-t} + 2t) - 2(e^{-t} + t^2) = 2 - 2t - 2t^2$$

De plus,

$$y(0) = e^0 + (0)^2 = 1, \qquad y'(0) = -e^0 + 2(0) = -1$$

On peut conclure que $y(t) = e^{-t} + t^2$ est la solution de l'EDO.

b) Posons

$$u_0(t) = y(t), \quad u_1(t) = y'(t)$$

Alors on a le système d'EDO

$$\begin{cases} u_o'(t) = \boldsymbol{u_1}(t) \\ u_1'(t) = 2 - 2t - 2t^2 + 2u_0(t) + u_1(t) \\ u_0(0) = 1 \qquad u_1(0) = -1 \end{cases}$$

Question 3)

$$I = \int_1^4 6x^4 - 3x + 5\, dx$$

a) Pour la règle du trapèze composée, l'erreur E_I est donnée par

$$E_I = \left|\frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi)\right| \qquad \xi \in [a,b]$$

Ici $a = 1, b = 4$ et $f(x) = 6x^4 - 3x + 5$, alors on peut majorer E_I (trouver une borne supérieure de E_I) :

$$E_I = \left|\frac{(4-1)}{12} h^2 (72\xi^2)\right| = 18\xi^2 h^2 \leq 18(16)h^2 = 288h^2 \qquad \xi \in [1{,}4]$$

Pour garantir la précision voulue, on impose

$$E_I \leq 288h^2 \leq 10^{-7} \Leftrightarrow \quad h \leq 1.863390 \times 10^{-5}$$

b) Pour Gauss-Legendre avec 2 points, sans oublier de ramener d'abord sur l'intervalle $[-1{,}1]$

$$I = \frac{3}{2} \int_{-1}^{1} f\left(\frac{3t+5}{2}\right) dt \approx \frac{3}{2}\left[w_1 f\left(\frac{3t_1+5}{2}\right) + w_2 f\left(\frac{3t_2+5}{2}\right)\right]$$

Ici $w_1 = w_2 = 1$ et $t_1 = -0.57735$, $t_2 = -t_1$, on calcule d'abord les deux points d'évaluation :

$$A = \frac{3t_1+5}{2} = 1.633975 \qquad\qquad B = \frac{3t_2+5}{2} = 3.366025$$

Et ensuite :

$$I \approx \frac{3}{2}[42.86744769 + 765.132225] = 1211.999509$$

c) Non la quadrature de Gauss avec n points est de précision 2n-1, donc pour 2 points la précision est de 3, on n'intègre pas exactement des polynômes de degré 4.

d) Si la méthode d'intégration numérique a un terme d'erreur de la forme

$$E(h) = -\frac{16}{80} f^{(6)}(\xi) h^8$$

l'ordre de la méthode correspond à la puissance du paramètre h, elle est donc d'ordre 8. Puisque la dérivée 6^{eme} des polynômes de degré 5 et moins est toujours nulle, la précision de cette quadrature est de 5.

Question 4)

a) On construit le meilleur polynôme de degré 2 en prenant les 3 points les plus proche de 1.1 :

0	1		
		-2	
1	-1		3
		4	
2	3		

$$p_2(x) = 1 - 2(x-0) + 3(x-0)(x-1) = 1 - 2x + 3x(x-1)$$

Et $f(1{,}1) \approx p_2(1.1) = -0.87$

b) Ne connaissant pas $f(x)$ on ne peut pas utiliser la formule du terme d'erreur! On utilise plutôt l'approximation :

$$E_2(x) \approx f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

Avec ici $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$ les trois points de a) auquel on ajoute le point $x_3 = -1$ (le point restant le plus près de 1.1) au tableau de différences

-1	3			
		-2		
0	1		0	
		-2		1
1	-1		3	
		4		
2	3			

$$E_2(x) \approx 1(x-0)(x-1)(x-2) \qquad E_2(1.1) \approx -0.099$$

Question 5)

$$f(x) = x - e^x \qquad\qquad f'(x) \approx \frac{1}{3h}\big(f(x+h) + f(x) - 2f(x-h)\big)$$

a) Pour $h = 0.1$ on aura

$$f'(0) \approx \frac{1}{0.3}\big(f(0.1) + f(0) - 2f(-0.1)\big) = \frac{1}{0.3}\big((0.1 - e^{0.1}) - 1 - 2(-0.1 - e^{-0.1})\big) = 0.0150131$$

Pour $h = 0.05$ on aura

$$f'(0) \approx \frac{1}{0.15}\big(f(0.05) + f(0) - 2f(-0.05)\big) = \frac{1}{0.15}\Big((0.05 - e^{0.05}) - 1 - 2(-0.05 - e^{-0.05})\Big) = 7.918351 \times 10^{-3}$$

b) On sait que $f'(0) = 0$ alors

$$E(0.1) = |f'(0) - 0.0150131| = 0.0150131 \qquad E(0.05) = |f'(0) - 7.918351 \times 10^{-3}| = 7.918351 \times 10^{-3}$$

Si la méthode est d'ordre p alors $E(h) = Ch^p$, et $\frac{E(h)}{E\left(\frac{h}{2}\right)} \approx 2^p$ dans notre cas

$$\frac{E(0.1)}{E(0.05)} = \frac{0.0150131}{7.918351} \times 10^{-3} = 1.8959 \approx 2$$

Et on en conclut que l'ordre est 1.

c) On note $Q(0.1)$ l'approximation de $f'(0)$ avec $h = 0.1$, $Q(0.05)$ l'approximation de $f'(0)$ avec $h = 0.05$. L'ordre de la méthode étant 1, l'extrapolation de Richardson Q_{ex} nous donne :

$$Q_{ex} = \frac{2Q(0.05) - Q(0.1)}{2-1} = \frac{2(7.918351 \times 10^{-3}) - 0.0150131}{2-1} = 8.23602 \times 10^{-4}$$

d) La formule centrée d'ordre 2 donne

$$f'(0) \approx \frac{f(0.1) - f(-0.1)}{0.2} = -1.667500 \times 10^{-3}$$