Correction de l'examen final H19

MAT-2910

20 avril 2022

Université Laval

Table des matières

Question 1

Soit

$$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t \approx Q(f) = w_1 f(0) + w_2 f(t_2) + w_3 f(1).$$

1. Quel est le degré d'exactitude de Q si $w_1 = w_3 = 1/4$, $w_2 = 1/2$ et $t_2 = 1/2$?
2. En posant $x = -\pi/2 + \pi t$ ($t \in [0, 1]$), approximer

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x)\mathrm{d}x$$

   avec les mêmes paramètres qu'en 1.
3. On veut trouver les poids/noeuds qui maximisent le degré d'exactitude de Q. Quel est le degré optimal attendu et pourquoi (sans faire de calculs) ?
4. Écrire le système non linéaire qui permettrait de trouver les poids/noeuds (sans le résoudre). Comment pourrait-on le résoudre numériquement ?

Pour vérifier le degré d'exactitude est n, il suffit de vérifier l'exactitude pour les monômes de degré 0 jusqu'à n. Ainsi,

GIREF

Pour vérifier le degré d'exactitude est n, il suffit de vérifier l'exactitude pour les monômes de degré 0 jusqu'à n. Ainsi,

$$f(x) = 1, \int_0^1 1\mathrm{d}t = 1, \quad 1/4 + 1/2 + 1/4 = 1 \checkmark$$

Pour vérifier le degré d'exactitude est n, il suffit de vérifier l'exactitude pour les monômes de degré 0 jusqu'à n. Ainsi,

$$f(x) = 1, \int_0^1 1 \mathrm{d}t = 1, \quad 1/4 + 1/2 + 1/4 = 1 \checkmark$$

$$f(x) = x, \int_0^1 t \mathrm{d}t = 1/2, \quad 0 + 1/2 \times 1/2 + 1/4 = 1/2 \checkmark$$

Pour vérifier le degré d'exactitude est n, il suffit de vérifier l'exactitude pour les monômes de degré 0 jusqu'à n. Ainsi,

$$f(x) = 1, \int_0^1 1\mathrm{d}t = 1, \quad 1/4 + 1/2 + 1/4 = 1 \checkmark$$
$$f(x) = x, \int_0^1 t\mathrm{d}t = 1/2, \quad 0 + 1/2 \times 1/2 + 1/4 = 1/2 \checkmark$$
$$f(x) = x^2, \int_0^1 t^2\mathrm{d}t = 1/3, \quad 0 + 1/2 \times 1/4 + 1/4 = 3/8 \oslash$$

Pour vérifier le degré d'exactitude est n, il suffit de vérifier l'exactitude pour les monômes de degré 0 jusqu'à n. Ainsi,

$$
\begin{aligned}
f(x) = 1, \int_0^1 1\mathrm{d}t = 1, &\quad 1/4 + 1/2 + 1/4 = 1 \checkmark \\
f(x) = x, \int_0^1 t\mathrm{d}t = 1/2, &\quad 0 + 1/2 \times 1/2 + 1/4 = 1/2 \checkmark \\
f(x) = x^2, \int_0^1 t^2\mathrm{d}t = 1/3, &\quad 0 + 1/2 \times 1/4 + 1/4 = 3/8 \oslash
\end{aligned}
$$

Le degré d'exactitude est donc 1.

On fait le changement de variable proposé :

$$x = -\pi/2 + \pi t \iff x/\pi + 1/2 = t$$
$$\mathrm{d}x = \pi \mathrm{d}t$$

On fait le changement de variable proposé :

$$x = -\pi/2 + \pi t \iff x/\pi + 1/2 = t$$
$$\mathrm{d}x = \pi \mathrm{d}t$$

et

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x)\mathrm{d}x = \pi \int_{t(-\pi/2)}^{t(\pi/2)} \underbrace{\cos(-\pi/2 + \pi t)}_{g(t)} \mathrm{d}t = \pi \int_0^1 g(t)\mathrm{d}t.$$

On fait le changement de variable proposé :

$$x = -\pi/2 + \pi t \iff x/\pi + 1/2 = t$$
$$\mathrm{d}x = \pi \mathrm{d}t$$

et

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x)\mathrm{d}x = \pi \int_{t(-\pi/2)}^{t(\pi/2)} \underbrace{\cos(-\pi/2 + \pi t)}_{g(t)} \mathrm{d}t = \pi \int_0^1 g(t)\mathrm{d}t.$$

Alors,

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x)\mathrm{d}x \approx \pi \left[\frac{1}{4}g(0) + \frac{1}{2}g(0.5) + \frac{1}{4}g(1)\right] = \pi\left[0 + \frac{1}{2} + 0\right] = \pi/2.$$

Question 1 › Sous-questions 3&4

Il y a 4 inconnues : w_1, w_2, w_3, t_2. Selon l'approche de Gauss-Legendre, on devrait s'attendre à avoir besoin de 4 équations pour résoudre, c'est-à-dire l'exactitude des monômes de degré 0 jusqu'à 3. Ainsi, on aurait un degré d'exactitude optimal attendu de 3.

On obtiendrait les équations de cette façon :

Question 1 > Sous-questions 3&4

Il y a 4 inconnues : w_1, w_2, w_3, t_2. Selon l'approche de Gauss-Legendre, on devrait s'attendre à avoir besoin de 4 équations pour résoudre, c'est-à-dire l'exactitude des monômes de degré 0 jusqu'à 3. Ainsi, on aurait un degré d'exactitude optimal attendu de 3.

On obtiendrait les équations de cette façon :

$$f(x) = 1, \int_0^1 1 \mathrm{d}t = 1 \implies Q(1) = w_1 + w_2 + w_3 = 1$$

.

Il y a 4 inconnues : w_1, w_2, w_3, t_2. Selon l'approche de Gauss-Legendre, on devrait s'attendre à avoir besoin de 4 équations pour résoudre, c'est-à-dire l'exactitude des monômes de degré 0 jusqu'à 3. Ainsi, on aurait un degré d'exactitude optimal attendu de 3.

On obtiendrait les équations de cette façon :

$$f(x) = 1, \int_0^1 1\mathrm{d}t = 1 \implies Q(1) = w_1 + w_2 + w_3 = 1$$
$$f(x) = x, \int_0^1 t\mathrm{d}t = 1/2 \implies Q(x) = w_2 t_2 + w_3 = 1/2$$

.

Question 1 > Sous-questions 3&4

Il y a 4 inconnues : w_1, w_2, w_3, t_2. Selon l'approche de Gauss-Legendre, on devrait s'attendre à avoir besoin de 4 équations pour résoudre, c'est-à-dire l'exactitude des monômes de degré 0 jusqu'à 3. Ainsi, on aurait un degré d'exactitude optimal attendu de 3.

On obtiendrait les équations de cette façon :

$$f(x) = 1, \int_0^1 1 \mathrm{d}t = 1 \implies Q(1) = w_1 + w_2 + w_3 = 1$$
$$f(x) = x, \int_0^1 t \mathrm{d}t = 1/2 \implies Q(x) = w_2 t_2 + w_3 = 1/2$$
$$f(x) = x^2, \int_0^1 t^2 \mathrm{d}t = 1/3 \implies Q(x^2) = w_2 t_2^2 + w_3 = 1/3$$

.

Il y a 4 inconnues : w_1, w_2, w_3, t_2. Selon l'approche de Gauss-Legendre, on devrait s'attendre à avoir besoin de 4 équations pour résoudre, c'est-à-dire l'exactitude des monômes de degré 0 jusqu'à 3. Ainsi, on aurait un degré d'exactitude optimal attendu de 3.

On obtiendrait les équations de cette façon :

$$f(x) = 1, \int_0^1 1 \mathrm{d}t = 1 \implies Q(1) = w_1 + w_2 + w_3 = 1$$
$$f(x) = x, \int_0^1 t \mathrm{d}t = 1/2 \implies Q(x) = w_2 t_2 + w_3 = 1/2$$
$$f(x) = x^2, \int_0^1 t^2 \mathrm{d}t = 1/3 \implies Q(x^2) = w_2 t_2^2 + w_3 = 1/3$$
$$f(x) = x^3, \int_0^1 t^3 \mathrm{d}t = 1/4 \implies Q(x^3) = w_2 t_2^3 + w_3 = 1/4.$$

On pourrait le résoudre numériquement en utilisant la méthode de Newton, qui sert justement à résoudre des systèmes non linéaires.

Question 2

Soit la formule centrée pour approximer f'',

$$f''(x) \approx D(h) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}. \tag{1}$$

1. Montrer que (1) est bien une approximation du second ordre.
2. Appliquer à $f(x) = e^x$ pour approximer $f''(0)$, avec $h = 0.1$ et $h = 0.2$. Confirmer numériquement que la formule est d'ordre 2.
3. Construire une nouvelle approximation, à partir des deux obtenues précédemment, qui doit être encore meilleure.

Pour montrer que c'est une approximation du second ordre, on développe tous les termes de la forme $f(x+ah)$ $(a \neq 0)$ par un développement de Taylor, en se rappellant que

$$f(x+ah) = f(x) + ahf'(x) + \frac{a^2h^2}{2!}f''(x) + \frac{a^3h^3}{3!}f'''(x) + \dots$$

Ainsi :

Pour montrer que c'est une approximation du second ordre, on développe tous les termes de la forme $f(x+ah)$ $(a \neq 0)$ par un développement de Taylor, en se rappellant que

$$f(x+ah) = f(x) + ahf'(x) + \frac{a^2h^2}{2!}f''(x) + \frac{a^3h^3}{3!}f'''(x) + \dots$$

Ainsi :

- $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(x) + \frac{h^4}{24}f''''(x) + \mathcal{O}(h^5)$ (1)

Pour montrer que c'est une approximation du second ordre, on développe tous les termes de la forme $f(x+ah)$ $(a \neq 0)$ par un développement de Taylor, en se rappellant que

$$f(x+ah) = f(x) + ahf'(x) + \frac{a^2h^2}{2!}f''(x) + \frac{a^3h^3}{3!}f'''(x) + \dots$$

Ainsi :

- $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(x) + \frac{h^4}{24}f''''(x) + \mathcal{O}(h^5)$ (1)
- $f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f'''(x) + \frac{h^4}{24}f''''(x) + \mathcal{O}(h^5)$ (2)

Pour montrer que c'est une approximation du second ordre, on développe tous les termes de la forme $f(x+ah)$ $(a \neq 0)$ par un développement de Taylor, en se rappellant que

$$f(x+ah) = f(x) + ahf'(x) + \frac{a^2h^2}{2!}f''(x) + \frac{a^3h^3}{3!}f'''(x) + \dots$$

Ainsi :

- $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(x) + \frac{h^4}{24}f''''(x) + \mathcal{O}(h^5)$ (1)
- $f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f'''(x) + \frac{h^4}{24}f''''(x) + \mathcal{O}(h^5)$ (2)
- (1) + (2) $= 2f(x) + 0 + h^2f''(x) + 0 + \frac{h^4}{12}f''''(x) + \mathcal{O}(h^5)$

On peut maintenant substituer les identités dans la formule :

$$\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2} = \frac{[f(x+h)+f(x-h)]-2f(x)}{h^2}$$

On peut maintenant substituer les identités dans la formule :

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2} &= \frac{[f(x+h)+f(x-h)]-2f(x)}{h^2}\\ &= \frac{2f(x)+h^2f''(x)+\frac{h^4}{12}f''''(x)+\mathcal{O}(h^5)-2f(x)}{h^2}\end{aligned}$$

On peut maintenant substituer les identités dans la formule :

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2} &= \frac{[f(x+h)+f(x-h)]-2f(x)}{h^2} \\ &= \frac{2f(x)+h^2f''(x)+\frac{h^4}{12}f''''(x)+\mathcal{O}(h^5)-2f(x)}{h^2} \\ &= f''(x)+\frac{h^2}{12}f''''(x)+\mathcal{O}(h^3)\end{aligned}$$

On peut maintenant substituer les identités dans la formule :

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2} &= \frac{[f(x+h)+f(x-h)]-2f(x)}{h^2}\\ &= \frac{2f(x)+h^2f''(x)+\frac{h^4}{12}f''''(x)+\mathcal{O}(h^5)-2f(x)}{h^2}\\ &= f''(x)+\frac{h^2}{12}f''''(x)+\mathcal{O}(h^3)\\ &= f''(x)+\mathcal{O}(h^2)\end{aligned}$$

On peut maintenant substituer les identités dans la formule :

$$
\begin{aligned}
\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} &= \frac{[f(x+h) + f(x-h)] - 2f(x)}{h^2} \\
&= \frac{2f(x) + h^2 f''(x) + \frac{h^4}{12} f''''(x) + \mathcal{O}(h^5) - 2f(x)}{h^2} \\
&= f''(x) + \frac{h^2}{12} f''''(x) + \mathcal{O}(h^3) \\
&= f''(x) + \mathcal{O}(h^2)
\end{aligned}
$$

L'ordre de la formule est bien 2 car le terme d'erreur est $\mathcal{O}(h^2)$.

Première approximation : $x = 0$, $h = 0.1$, $x + h = 0.1$, $x - h = -0.1$, donc

$$D(0.1) = \frac{f(0.1) - 2f(0) + f(-0.1)}{(0.1)^2}$$

Première approximation : $x = 0$, $h = 0.1$, $x + h = 0.1$, $x - h = -0.1$, donc

$$D(0.1) = \frac{f(0.1) - 2f(0) + f(-0.1)}{(0.1)^2}$$
$$= \frac{e^{0.1} - 2 + e^{-0.1}}{0.01}$$

Première approximation : $x = 0$, $h = 0.1$, $x + h = 0.1$, $x - h = -0.1$, donc

$$\begin{aligned} D(0.1) &= \frac{f(0.1) - 2f(0) + f(-0.1)}{(0.1)^2} \\ &= \frac{e^{0.1} - 2 + e^{-0.1}}{0.01} \\ &= \frac{0.01000833611}{0.01} \end{aligned}$$

Première approximation : $x = 0$, $h = 0.1$, $x + h = 0.1$, $x - h = -0.1$, donc

$$\begin{aligned}
D(0.1) &= \frac{f(0.1) - 2f(0) + f(-0.1)}{(0.1)^2} \\
&= \frac{e^{0.1} - 2 + e^{-0.1}}{0.01} \\
&= \frac{0.01000833611}{0.01} \\
&= 1.00083\ldots
\end{aligned}$$

Deuxième approximation : $x = 0$, $h = 0.2$, $x + h = 0.2$, $x - h = -0.2$, donc

$$D(0.2) = \frac{f(0.2) - 2f(0) + f(-0.2)}{(0.2)^2}$$

Deuxième approximation : $x = 0$, $h = 0.2$, $x + h = 0.2$, $x - h = -0.2$, donc

$$D(0.2) = \frac{f(0.2) - 2f(0) + f(-0.2)}{(0.2)^2}$$
$$= \frac{e^{0.2} - 2 + e^{-0.2}}{0.04}$$

Deuxième approximation : $x = 0$, $h = 0.2$, $x + h = 0.2$, $x - h = -0.2$, donc

$$
\begin{aligned}
D(0.2) &= \frac{f(0.2) - 2f(0) + f(-0.2)}{(0.2)^2} \\
&= \frac{e^{0.2} - 2 + e^{-0.2}}{0.04} \\
&= \frac{0.04013351123}{0.04}
\end{aligned}
$$

Deuxième approximation : $x = 0$, $h = 0.2$, $x + h = 0.2$, $x - h = -0.2$, donc

$$\begin{aligned} D(0.2) &= \frac{f(0.2) - 2f(0) + f(-0.2)}{(0.2)^2} \\ &= \frac{e^{0.2} - 2 + e^{-0.2}}{0.04} \\ &= \frac{0.04013351123}{0.04} \\ &= 1.0033\ldots \end{aligned}$$

Pour valider l'ordre de convergence numériquement, il faut se rappeller que si h est divisée par k, alors l'erreur sera divisée par k^p si la méthode est d'ordre p. En effet,

$$\frac{E(h/k)}{E(h)} = \frac{Ch^p/k^p}{Ch^p} = \frac{1}{k^p}.$$

Pour valider l'ordre de convergence numériquement, il faut se rappeller que si h est divisée par k, alors l'erreur sera divisée par k^p si la méthode est d'ordre p. En effet,

$$\frac{E(h/k)}{E(h)} = \frac{Ch^p/k^p}{Ch^p} = \frac{1}{k^p}.$$

Ainsi, si la formule est d'ordre $p = 2$, alors $\frac{E(0.1)}{E(0.2)} \approx 1/4$, car $h = 0.2$ et $h/2 = 0.1$ ($k = 2$).

Question 2 › Sous-question 2

Pour valider l'ordre de convergence numériquement, il faut se rappeller que si h est divisée par k, alors l'erreur sera divisée par k^p si la méthode est d'ordre p. En effet,

$$\frac{E(h/k)}{E(h)} = \frac{Ch^p/k^p}{Ch^p} = \frac{1}{k^p}.$$

Ainsi, si la formule est d'ordre $p = 2$, alors $\frac{E(0.1)}{E(0.2)} \approx 1/4$, car $h = 0.2$ et $h/2 = 0.1$ ($k = 2$).

Sachant que la vraie valeur est $f''(0) = e^0 = 1$, alors $E(0.1) = 0.00083$ et $E(0.2) = 0.0033$, et $\frac{E(0.1)}{E(0.2)} = 0.2515\ldots \approx 1/4$.

À partir de deux approximations, on peut utiliser l'extrapolation de Richardson,

$$D = \frac{D(h) - 2^n D(h/2)}{1 - 2^n} + \mathcal{O}(h^{n+1}),$$

pour en obtenir une nouvelle d'ordre supérieur : $h = 0.2$, $h/2 = 0.1$, et la formule est d'ordre $n = 2$. Ainsi,

$$f''(0) \approx \frac{D(h) - 2^2 D(h/2)}{1 - 2^2}$$

À partir de deux approximations, on peut utiliser l'extrapolation de Richardson,

$$D = \frac{D(h) - 2^n D(h/2)}{1 - 2^n} + \mathcal{O}(h^{n+1}),$$

pour en obtenir une nouvelle d'ordre supérieur : $h = 0.2$, $h/2 = 0.1$, et la formule est d'ordre $n = 2$. Ainsi,

$$\begin{aligned} f''(0) &\approx \frac{D(h) - 2^2 D(h/2)}{1 - 2^2} \\ &= \frac{1.0033 - 4 \times 1.00083}{-3} \end{aligned}$$

À partir de deux approximations, on peut utiliser l'extrapolation de Richardson,

$$D = \frac{D(h) - 2^n D(h/2)}{1 - 2^n} + \mathcal{O}(h^{n+1}),$$

pour en obtenir une nouvelle d'ordre supérieur : $h = 0.2$, $h/2 = 0.1$, et la formule est d'ordre $n = 2$. Ainsi,

$$\begin{aligned} f''(0) &\approx \frac{D(h) - 2^2 D(h/2)}{1 - 2^2} \\ &= \frac{1.0033 - 4 \times 1.00083}{-3} \\ &= \frac{0.04013351123}{0.04} \end{aligned}$$

À partir de deux approximations, on peut utiliser l'extrapolation de Richardson,

$$D = \frac{D(h) - 2^n D(h/2)}{1 - 2^n} + \mathcal{O}(h^{n+1}),$$

pour en obtenir une nouvelle d'ordre supérieur : $h = 0.2$, $h/2 = 0.1$, et la formule est d'ordre $n = 2$. Ainsi,

$$\begin{aligned} f''(0) &\approx \frac{D(h) - 2^2 D(h/2)}{1 - 2^2} \\ &= \frac{1.0033 - 4 \times 1.00083}{-3} \\ &= \frac{0.04013351123}{0.04} \\ &= 1.000006\ldots \end{aligned}$$

Question 3

Soit l'équation différentielle

$$y' = 2y + t \quad y(0) = 1 \tag{2}$$

1. Faire 2 pas de temps de la méthode d'Euler avec $h = 0.1$ sur (2).
2. On introduit une nouvelle méthode (Adams-Moulton), définie comme

   $$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\Big(f(t_{n+1}, y_{n+1}) + f(t_n, y_n)\Big). \tag{3}$$

   Utiliser le schéma (3) pour faire 2 pas de temps sur (2) avec $h = 0.1$.
3. Écrire le système correspondant au premier pas de temps de la résolution de (4) avec la méthode (3) et $h = 0.1$ (ne pas résoudre).

$$y'' = 2y' + t \quad y(0) = 0, y'(0) = 1 \tag{4}$$

Question 3 › Sous-question 1

On identifie $f(t, y) = 2y + t$, $t_0 = 0$, $y_0 = 1$, $h = 0.1$.

Question 3 > Sous-question 1

On identifie $f(t,y) = 2y + t$, $t_0 = 0$, $y_0 = 1$, $h = 0.1$.

Première itération :

$$y_1 = y_0 + hf(t_0, y_0)$$

On identifie $f(t,y) = 2y + t$, $t_0 = 0$, $y_0 = 1$, $h = 0.1$.

Première itération :

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + hf(t_0, y_0) \\ &= 1 + (0.1)(2y_0 + t_0) \end{aligned}$$

On identifie $f(t, y) = 2y + t$, $t_0 = 0$, $y_0 = 1$, $h = 0.1$.

Première itération :

$$
\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + hf(t_0, y_0) \\
&= 1 + (0.1)(2y_0 + t_0) \\
&= 1 + (0.1)(2 + 0) = 1.2,
\end{aligned}
$$

On identifie $f(t, y) = 2y + t$, $t_0 = 0$, $y_0 = 1$, $h = 0.1$.

Première itération :

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + hf(t_0, y_0) \\ &= 1 + (0.1)(2y_0 + t_0) \\ &= 1 + (0.1)(2 + 0) = 1.2, \\ t_1 &= t_0 + h = 0.1 \end{aligned}$$

On identifie $f(t,y) = 2y + t$, $t_0 = 0$, $y_0 = 1$, $h = 0.1$.

Première itération :

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + hf(t_0, y_0) \\ &= 1 + (0.1)(2y_0 + t_0) \\ &= 1 + (0.1)(2 + 0) = 1.2, \\ t_1 &= t_0 + h = 0.1 \end{aligned}$$

Seconde itération :

$$y_2 = y_1 + hf(t_1, y_1)$$

On identifie $f(t, y) = 2y + t$, $t_0 = 0$, $y_0 = 1$, $h = 0.1$.

Première itération :

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + hf(t_0, y_0) \\ &= 1 + (0.1)(2y_0 + t_0) \\ &= 1 + (0.1)(2 + 0) = 1.2, \\ t_1 &= t_0 + h = 0.1 \end{aligned}$$

Seconde itération :

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + hf(t_1, y_1) \\ &= 1.2 + (0.1)(2 \times 1.2 + 0.1) \end{aligned}$$

On identifie $f(t,y) = 2y + t$, $t_0 = 0$, $y_0 = 1$, $h = 0.1$.

Première itération :

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + hf(t_0, y_0) \\ &= 1 + (0.1)(2y_0 + t_0) \\ &= 1 + (0.1)(2 + 0) = 1.2, \\ t_1 &= t_0 + h = 0.1 \end{aligned}$$

Seconde itération :

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + hf(t_1, y_1) \\ &= 1.2 + (0.1)(2 \times 1.2 + 0.1) \\ &= 1.45, \end{aligned}$$

On identifie $f(t,y) = 2y + t$, $t_0 = 0$, $y_0 = 1$, $h = 0.1$.

Première itération :

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + hf(t_0, y_0) \\ &= 1 + (0.1)(2y_0 + t_0) \\ &= 1 + (0.1)(2 + 0) = 1.2, \\ t_1 &= t_0 + h = 0.1 \end{aligned}$$

Seconde itération :

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + hf(t_1, y_1) \\ &= 1.2 + (0.1)(2 \times 1.2 + 0.1) \\ &= 1.45, \\ t_2 &= t_1 + h = 0.2 \end{aligned}$$

On identifie $f(t, y) = 2y + t$, $t_0 = 0$, $y_0 = 1$, $h = 0.1$, $t_1 = 0.1$.

Première itération :

On identifie $f(t, y) = 2y + t$, $t_0 = 0$, $y_0 = 1$, $h = 0.1$, $t_1 = 0.1$.

Première itération :

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}\big(f(t_1, y_1) + f(t_0, y_0)\big)$$

On identifie $f(t, y) = 2y + t$, $t_0 = 0$, $y_0 = 1$, $h = 0.1$, $t_1 = 0.1$.

Première itération :

$$
\begin{aligned}
& y_1 = y_0 + \frac{h}{2}\big(f(t_1, y_1) + f(t_0, y_0)\big) \\
\iff \quad & y_1 = 1 + (0.05)\big((2y_1 + t_1) + (2y_0 + t_0)\big)
\end{aligned}
$$

On identifie $f(t,y) = 2y + t$, $t_0 = 0$, $y_0 = 1$, $h = 0.1$, $t_1 = 0.1$.

Première itération :

$$
\begin{aligned}
& y_1 = y_0 + \frac{h}{2}\big(f(t_1, y_1) + f(t_0, y_0)\big) \\
\iff\quad & y_1 = 1 + (0.05)\big((2y_1 + t_1) + (2y_0 + t_0)\big) \\
\iff\quad & y_1 = 1 + (0.05)\big(2y_1 + 0.1 + 2\big)
\end{aligned}
$$

On identifie $f(t,y) = 2y + t$, $t_0 = 0$, $y_0 = 1$, $h = 0.1$, $t_1 = 0.1$.

Première itération :

$$
\begin{aligned}
& y_1 = y_0 + \frac{h}{2}\big(f(t_1, y_1) + f(t_0, y_0)\big) \\
\iff \quad & y_1 = 1 + (0.05)\big((2y_1 + t_1) + (2y_0 + t_0)\big) \\
\iff \quad & y_1 = 1 + (0.05)\big(2y_1 + 0.1 + 2\big) \\
\iff \quad & y_1 = 1.105 + 0.1y_1,
\end{aligned}
$$

On identifie $f(t, y) = 2y + t$, $t_0 = 0$, $y_0 = 1$, $h = 0.1$, $t_1 = 0.1$.

Première itération :

$$
\begin{aligned}
& y_1 = y_0 + \frac{h}{2}\big(f(t_1, y_1) + f(t_0, y_0)\big) \\
\iff\ & y_1 = 1 + (0.05)\big((2y_1 + t_1) + (2y_0 + t_0)\big) \\
\iff\ & y_1 = 1 + (0.05)\big(2y_1 + 0.1 + 2\big) \\
\iff\ & y_1 = 1.105 + 0.1y_1, \\
\iff\ & y_1 = 1.105/0.9 = 1.22\overline{7}
\end{aligned}
$$

On se rappelle que $f(t, y) = 2y + t$, $t_1 = 0.1$, $y_1 = 1.22\overline{7}$, $h = 0.1$, $t_2 = 0.2$.

Seconde itération :

On se rappelle que $f(t,y) = 2y + t$, $t_1 = 0.1$, $y_1 = 1.22\overline{7}$, $h = 0.1$, $t_2 = 0.2$.

Seconde itération :

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{2}\big(f(t_2, y_2) + f(t_1, y_1)\big)$$

On se rappelle que $f(t, y) = 2y + t$, $t_1 = 0.1$, $y_1 = 1.22\overline{7}$, $h = 0.1$, $t_2 = 0.2$.

Seconde itération :

$$\begin{aligned} & y_2 = y_1 + \frac{h}{2}\big(f(t_2, y_2) + f(t_1, y_1)\big) \\ \iff & y_2 = 1.227 + (0.05)\big((2y_2 + t_2) + (2y_1 + t_1)\big) \end{aligned}$$

On se rappelle que $f(t,y) = 2y + t$, $t_1 = 0.1$, $y_1 = 1.22\overline{7}$, $h = 0.1$, $t_2 = 0.2$.

Seconde itération :

$$
\begin{aligned}
& y_2 = y_1 + \frac{h}{2}\big(f(t_2, y_2) + f(t_1, y_1)\big) \\
\iff \; & y_2 = 1.227 + (0.05)\big((2y_2 + t_2) + (2y_1 + t_1)\big) \\
\iff \; & y_2 = 1.227 + (0.05)\big(2y_2 + 0.2 + 2 \times 1.227 + 0.1\big)
\end{aligned}
$$

On se rappelle que $f(t,y) = 2y + t$, $t_1 = 0.1$, $y_1 = 1.22\overline{7}$, $h = 0.1$, $t_2 = 0.2$.

Seconde itération :

$$
\begin{aligned}
& y_2 = y_1 + \frac{h}{2}\big(f(t_2, y_2) + f(t_1, y_1)\big) \\
\iff \ & y_2 = 1.227 + (0.05)\big((2y_2 + t_2) + (2y_1 + t_1)\big) \\
\iff \ & y_2 = 1.227 + (0.05)\big(2y_2 + 0.2 + 2 \times 1.227 + 0.1\big) \\
\iff \ & y_2 = 1.3647 + 0.1y_2,
\end{aligned}
$$

On se rappelle que $f(t, y) = 2y + t$, $t_1 = 0.1$, $y_1 = 1.22\overline{7}$, $h = 0.1$, $t_2 = 0.2$.

Seconde itération :

$$
\begin{aligned}
& y_2 = y_1 + \frac{h}{2}\big(f(t_2, y_2) + f(t_1, y_1)\big) \\
\iff\ & y_2 = 1.227 + (0.05)\big((2y_2 + t_2) + (2y_1 + t_1)\big) \\
\iff\ & y_2 = 1.227 + (0.05)\big(2y_2 + 0.2 + 2 \times 1.227 + 0.1\big) \\
\iff\ & y_2 = 1.3647 + 0.1y_2, \\
\iff\ & y_2 = 1.3647/0.9 = 1.516\overline{3}
\end{aligned}
$$

On doit dans un premier temps dé terminer le système d'EDO d'ordre associé à l'EDO d'ordre 2, avec le changement de variable habituel, $y_1 = y$ et $y_2 = y'$. On dérive :

On doit dans un premier temps dé terminer le système d'EDO d'ordre associé à l'EDO d'ordre 2, avec le changement de variable habituel, $y_1 = y$ et $y_2 = y'$. On dérive :

$$y_1' = y' = y_2,$$

On doit dans un premier temps dé terminer le système d'EDO d'ordre associé à l'EDO d'ordre 2, avec le changement de variable habituel, $y_1 = y$ et $y_2 = y'$. On dérive :

$$
\begin{aligned}
y_1' &= y' = y_2, \\
y_2' &= y'' = 2y' + t = 2y_2 + t
\end{aligned}
$$

On doit dans un premier temps dé terminer le système d'EDO d'ordre associé à l'EDO d'ordre 2, avec le changement de variable habituel, $y_1 = y$ et $y_2 = y'$. On dérive :

$$\begin{aligned} y_1' &= y' = y_2, \\ y_2' &= y'' = 2y' + t = 2y_2 + t \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{cases} y_1' = y_2 & y_1(0) = y(0) = 1 \\ y_2' = 2y_2 + t & y_2(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

On a $\vec{f}(t,\vec{y}) = (y_2, 2y_2 + t)$ et $\vec{y}^{(0)} = (1,0)$ (on note les numéros d'itération en haut pour ne pas confondre avec les indices des vecteurs). Le système est donc

On a $\vec{f}(t, \vec{y}) = (y_2, 2y_2 + t)$ et $\vec{y}^{(0)} = (1, 0)$ (on note les numéros d'itération en haut pour ne pas confondre avec les indices des vecteurs). Le système est donc

$$\vec{y}^{(1)} = \vec{y}^{(0)} + \frac{h}{2}\left(\vec{f}\left(t_1, \vec{y}^{(1)}\right) + \vec{f}\left(t_0, \vec{y}^{(0)}\right)\right)$$

On a $\vec{f}(t,\vec{y}) = (y_2, 2y_2 + t)$ et $\vec{y}^{(0)} = (1,0)$ (on note les numéros d'itération en haut pour ne pas confondre avec les indices des vecteurs). Le système est donc

$$\vec{y}^{(1)} = \vec{y}^{(0)} + \frac{h}{2}\left(\vec{f}\left(t_1, \vec{y}^{(1)}\right) + \vec{f}\left(t_0, \vec{y}^{(0)}\right)\right)$$

$$\iff \left(y_1^{(1)}, y_2^{(1)}\right) = (1,0) + (0.05)\left(\left(y_2^{(1)}, 2y_2^{(1)} + 0.1\right) + (0,0)\right)$$

On a $\vec{f}(t,\vec{y}) = (y_2, 2y_2 + t)$ et $\vec{y}^{(0)} = (1,0)$ (on note les numéros d'itération en haut pour ne pas confondre avec les indices des vecteurs). Le système est donc

$$\vec{y}^{(1)} = \vec{y}^{(0)} + \frac{h}{2}\left(\vec{f}\left(t_1, \vec{y}^{(1)}\right) + \vec{f}\left(t_0, \vec{y}^{(0)}\right)\right)$$

$$\iff \left(y_1^{(1)}, y_2^{(1)}\right) = (1,0) + (0.05)\left(\left(y_2^{(1)}, 2y_2^{(1)} + 0.1\right) + (0,0)\right)$$

$$\iff \begin{cases} y_1^{(1)} = 1 + 0.05y_2^{(1)} \\ y_2^{(1)} = 0.005 + 0.1y_2^{(1)} \end{cases}$$

Question 4

T (°C)	0	10	20	40
μ (Pa.s)	6.2	5.5	4.5	3.1

Table 1 – Données de température (T) vs viscosité (μ).

1. Donner une approximation de la viscosité à $30°$C à l'aide du *meilleur* pol. d'interpolation de deg. 2 possible.
2. Estimer l'erreur commise sur l'approximation précédente.
3. Avec le même polynôme, estimer la température donnant une viscosité de 4Pa.s.
4. Déterminer le polynôme d'interpolation de degré 1 interpolant une fonction f en a et b, et en déduire la formule du trapèze :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{2}\Big(f(a)+f(b)\Big).$$

Question 4 › Sous-question 1

Pour obtenir la meilleure approximation possible à $T = 30$, on doit prendre les 3 points les plus *proches* de 30, par la forme du terme d'erreur, donc les points à $T = 10, 20, 40$. On construit la table de différence divisée associée au tableau :

Pour obtenir la meilleure approximation possible à $T = 30$, on doit prendre les 3 points les plus *proches* de 30, par la forme du terme d'erreur, donc les points à $T = 10, 20, 40$. On construit la table de différence divisée associée au tableau :

i	x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
0	10	5.5	-0.1	0.001	-
1	20	4.5	-0.07	-	-
2	40	3.1	-	-	-

Table 2 – Différences divisées pour 3 points de la table 1.

Pour obtenir la meilleure approximation possible à $T = 30$, on doit prendre les 3 points les plus *proches* de 30, par la forme du terme d'erreur, donc les points à $T = 10, 20, 40$. On construit la table de différence divisée associée au tableau :

i	x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
0	10	5.5	-0.1	0.001	-
1	20	4.5	-0.07	-	-
2	40	3.1	-	-	-

Table 2 – Différences divisées pour 3 points de la table 1.

On a donc le polynôme $p_2(T) = 5.5 - 0.1(T - 10) + 0.001(T - 10)(T - 20)$, et $p(30) = 3.7$.

Ici, on n'a aucune information analytique sur la fonction interpolée. On doit donc utiliser l'estimation du terme d'erreur vue en classe, qui utilise le terme suivant dans la table des différences divisées. Il s'agit de compléter le tableau :

Ici, on n'a aucune information analytique sur la fonction interpolée. On doit donc utiliser l'estimation du terme d'erreur vue en classe, qui utilise le terme suivant dans la table des différences divisées. Il s'agit de compléter le tableau :

i	x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
0	10	5.5	-0.1	0.001	-0.0006375
1	20	4.5	-0.07	0.007375	-
2	40	3.1	0.0775	-	-
3	0	6.2	-	-	-

Table 3 – Différences divisées pour la table 1.

Ici, on n'a aucune information analytique sur la fonction interpolée. On doit donc utiliser l'estimation du terme d'erreur vue en classe, qui utilise le terme suivant dans la table des différences divisées. Il s'agit de compléter le tableau :

i	x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
0	10	5.5	-0.1	0.001	-0.0006375
1	20	4.5	-0.07	0.007375	-
2	40	3.1	0.0775	-	-
3	0	6.2	-	-	-

Table 3 – Différences divisées pour la table 1.

$$E_2(x) \approx \underbrace{f[x_0, x_1, x_2, x_3]}_{-0.0006375}(x-10)(x-20)(x-40) \implies E_2(30) = 1.275$$

Il s'agit de résoudre une équation quadratique. En développant p_2, on obtient

$$p_2(T) = 6.7 - 0.13T + 0.001T^2,$$

et on veut résoudre $p_2(T) = 4 \iff p_2(T) - 4 = 0$. On utilise la formule quadratique et on trouve $T \approx 25.94$ ou $T \approx 104.051$. Il est important de sélectionner la première de ces 2 racines, qui se situe dans l'intervalle $[10, 40]$, puisque notre interpolation est seulement valide sur cet intervalle !

Le polynôme de degré 1 qui passe par les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ est

Le polynôme de degré 1 qui passe par les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ est

$$p_1(x) = f[a] + f[a, b](x - a) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Le polynôme de degré 1 qui passe par les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ est

$$p_1(x) = f[a] + f[a,b](x-a) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

En l'intégrant, on a

$$\int_a^b \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \right] \mathrm{d}x$$

Le polynôme de degré 1 qui passe par les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ est

$$p_1(x) = f[a] + f[a,b](x-a) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

En l'intégrant, on a

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \right] \mathrm{d}x \\
&= f(a)x\Big|_{x=a}^{x=b} + \frac{f(b)-f(a)}{(b-a)} \frac{(x-a)^2}{2}\Big|_{x=a}^{x=b}
\end{aligned}$$

Le polynôme de degré 1 qui passe par les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ est

$$p_1(x) = f[a] + f[a, b](x - a) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

En l'intégrant, on a

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right] \mathrm{d}x \\
&= f(a)x \Big|_{x=a}^{x=b} + \frac{f(b) - f(a)}{(b - a)} \frac{(x - a)^2}{2} \Big|_{x=a}^{x=b} \\
&= f(a)(b - a) + \frac{(b - a)}{2} f(b) - \frac{(b - a)}{2} f(a)
\end{aligned}$$

Le polynôme de degré 1 qui passe par les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ est

$$p_1(x) = f[a] + f[a,b](x-a) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

En l'intégrant, on a

$$\begin{aligned} &\int_a^b \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \right] \mathrm{d}x \\ &= f(a)x \Big|_{x=a}^{x=b} + \frac{f(b)-f(a)}{(b-a)} \frac{(x-a)^2}{2} \Big|_{x=a}^{x=b} \\ &= f(a)(b-a) + \frac{(b-a)}{2} f(b) - \frac{(b-a)}{2} f(a) \\ &= \frac{(b-a)}{2} \big(f(b) + f(a) \big). \end{aligned}$$

Si on approxime $\int_a^b f$ par $\int_a^b p_1$, on obtient ceci, qui est la formule du trapèze.

Question 5

Question 5 > Énoncé

```
function x = ma_fonction(f,J, x0, nmax, epsilon)
x0 = x0';
x(1,:) = x0';
for n=1:AAA
    jac=J(x0);
    b = (-f(x0));
    delta = jac BBB b;
    x0 = x0 + delta;
    x(n+1,:) = x0';
    test = norm(b);
    tol = CCC(delta);
    tolrel = tol/(CCC(x0)+eps);
    if (tolrel < epsilon && test <= epsilon),
        break;
    end
end
```

Code Matlab incomplet.

1. Quelle méthode vue dans le cours est implémentée dans cette fonction ?
2. Par quoi doit-on remplacer les triples lettres ? **AAA**(nmax, length(x0), epsilon), **BBB**(/, \, ∼), **CCC**(abs, norm, sqrt)

Question 5 > Solution

1. Il s'agit de la méthode de Newton pour les systèmes.
2. **AAA** représente le nombre d'itération qui pourra être fait au maximum : ainsi, c'est nmax. **BBB** est l'opérateur pour résoudre le système avec la matrice jacobienne, et donc il s'agit de $\backslash$. **CCC** est utilisé pour le critère de tolérance de la correction δ. Comme δ est une quantité vectorielle, on utilise la norme pour le comparer à la tolérance (scalaire), donc norm.

Question 6

Soit la fonction

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = a + \frac{175}{16}(x-1) + \frac{b}{16}(x-1)^3 & 1 \leq x \leq 2 \\ S_1(x) = 9 + \frac{17}{8}(x-2) - \frac{141}{16}(x-2)^2 + 3(x-2)^3 & 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

et les points $\{(1,1),(2,9),(4,2)\}$.

1. Existe-t-il des constantes a, b telles que S interpole les trois points ? Si oui, les déterminer.
2. Est-ce que S est une spline cubique ? Si oui, est-elle naturelle ?

On vérifie aisément que $S_1(2) = 9$ et $S_1(4) = 2$.

On vérifie aisément que $S_1(2) = 9$ et $S_1(4) = 2$.

Première contrainte : $S_0(1) = 1 \iff a = 1$.

On vérifie aisément que $S_1(2) = 9$ et $S_1(4) = 2$.

Première contrainte : $S_0(1) = 1 \iff a = 1$.
Deuxième contrainte : $S_0(2) = 9 \iff a + \frac{175}{16} + \frac{b}{16} = 9$.

On vérifie aisément que $S_1(2) = 9$ et $S_1(4) = 2$.

Première contrainte : $S_0(1) = 1 \iff a = 1$.
Deuxième contrainte : $S_0(2) = 9 \iff a + \frac{175}{16} + \frac{b}{16} = 9$.

On obtient que $b = -47$. C'est la seule solution possible pour avoir l'interpolation des 3 points, mais c'est possible.

Avec $a = 1$ et $b = -47$, l'interpolation a été vérifée à la question précédente. Il faut maintenant vérifier la continuité des dérivées aux points intérieurs (le seul point intérieur ici est 2). On calcule les dérivées premières :

Question 6 › Sous-question 2

Avec $a = 1$ et $b = -47$, l'interpolation a été vérifiée à la question précédente. Il faut maintenant vérifier la continuité des dérivées aux points intérieurs (le seul point intérieur ici est 2). On calcule les dérivées premières :

$$S_0'(x) = \frac{175}{16} - \frac{141}{16}(x-1)^2$$

Avec $a = 1$ et $b = -47$, l'interpolation a été vérifée à la question précédente. Il faut maintenant vérifier la continuité des dérivées aux points intérieurs (le seul point intérieur ici est 2). On calcule les dérivées premières :

$$S_0'(x) = \frac{175}{16} - \frac{141}{16}(x-1)^2$$
$$S_1'(x) = \frac{17}{8} - \frac{141}{8}(x-2) + 9(x-2)^2$$

On vérifie l'égalité en $x = 2$:

Avec $a = 1$ et $b = -47$, l'interpolation a été vérifée à la question précédente. Il faut maintenant vérifier la continuité des dérivées aux points intérieurs (le seul point intérieur ici est 2). On calcule les dérivées premières :

$$S_0'(x) = \frac{175}{16} - \frac{141}{16}(x-1)^2$$
$$S_1'(x) = \frac{17}{8} - \frac{141}{8}(x-2) + 9(x-2)^2$$

On vérifie l'égalité en $x = 2$:

$$S_0'(2) = \frac{17}{8}$$

Avec $a = 1$ et $b = -47$, l'interpolation a été vérifiée à la question précédente. Il faut maintenant vérifier la continuité des dérivées aux points intérieurs (le seul point intérieur ici est 2). On calcule les dérivées premières :

$$S_0'(x) = \frac{175}{16} - \frac{141}{16}(x-1)^2$$
$$S_1'(x) = \frac{17}{8} - \frac{141}{8}(x-2) + 9(x-2)^2$$

On vérifie l'égalité en $x = 2$:

$$S_0'(2) = \frac{17}{8} \quad \& \quad S_1'(2) = \frac{17}{8} \qquad \checkmark$$

Donc, la condition de continuité de la dérivée est respectée.

On vérifie la troisième condition, que la dérivée seconde soit continue aux points intérieurs :

On vérifie la troisième condition, que la dérivée seconde soit continue aux points intérieurs :

$$S_0''(x) = -\frac{141}{8}(x-1)$$

On vérifie la troisième condition, que la dérivée seconde soit continue aux points intérieurs :

$$S_0''(x) = -\frac{141}{8}(x-1)$$
$$S_1''(x) = -\frac{141}{8} + 18(x-2)$$

On vérifie l'égalité en $x = 2$:

On vérifie la troisième condition, que la dérivée seconde soit continue aux points intérieurs :

$$S_0''(x) = -\frac{141}{8}(x-1)$$
$$S_1''(x) = -\frac{141}{8} + 18(x-2)$$

On vérifie l'égalité en $x = 2$:

$$S_0''(2) = -\frac{141}{8}$$

On vérifie la troisième condition, que la dérivée seconde soit continue aux points intérieurs :

$$S_0''(x) = -\frac{141}{8}(x-1)$$
$$S_1''(x) = -\frac{141}{8} + 18(x-2)$$

On vérifie l'égalité en $x = 2$:

$$S_0''(2) = -\frac{141}{8} \quad \& \quad S_1''(2) = -\frac{141}{8} \qquad \checkmark$$

Donc, la condition de continuité de la dérivée seconde est respectée.

On vérifie la troisième condition, que la dérivée seconde soit continue aux points intérieurs :

$$S_0''(x) = -\frac{141}{8}(x-1)$$
$$S_1''(x) = -\frac{141}{8} + 18(x-2)$$

On vérifie l'égalité en $x = 2$:

$$S_0''(2) = -\frac{141}{8} \quad \& \quad S_1''(2) = -\frac{141}{8} \quad \checkmark$$

Donc, la condition de continuité de la dérivée seconde est respectée.

S est bien une spline cubique ! Naturelle ? Non, car $S_1''(4) = 36 - (141/8) \neq 0$.

Questions ?