Mathématiques de l'ingénieur I (MAT-10363)
Examen partiel du 1^er^ octobre 2004
SOLUTIONS

Question 1
(5 + 5 + 5 = 15 points)

a) Écrire $\dfrac{9-8i}{2+i}$ sous forme cartésienne.

$$\frac{9-8i}{2+i} = \frac{9-8i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i} = \frac{10-25i}{5} = 2-5i.$$

b) Calculer $\left|\dfrac{(3i-1)^5}{1-i+2}\right|$.

$$\left|\frac{(3i-1)^5}{1-i+2}\right| = \frac{|(3i-1)^5|}{|3-i|} = \frac{|3i-1|^5}{\sqrt{10}} = \frac{(\sqrt{10})^5}{\sqrt{10}} = 100.$$

c) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $w \in \mathbb{C}$, on a $\operatorname{Re}\left(\dfrac{z}{z+w}\right) + \operatorname{Re}\left(\dfrac{w}{w+z}\right) = 1$.

Pour tout $a, b \in \mathbb{C}$ on a $\operatorname{Re}(a+b) = \operatorname{Re}(a) + \operatorname{Re}(b)$. Donc,

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z}{z+w}\right) + \operatorname{Re}\left(\frac{w}{w+z}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{z}{z+w} + \frac{w}{w+z}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{z+w}{z+w}\right) = \operatorname{Re}(1) = 1.$$

Question 2
(10 points)

Mettre sous forme polaire $\left(\dfrac{4}{\sqrt{3}-i}\right)^5$.

On calcule d'abord le quotient :

$$\frac{4}{\sqrt{3}-i} = \frac{4}{\sqrt{3}-i} \cdot \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}+i} = \frac{4(\sqrt{3}+i)}{4} = \sqrt{3}+i.$$

On écrit ensuite ce dernier sous forme polaire :

$$|\sqrt{3}+i| = 2 \qquad \text{et} \qquad \arg(\sqrt{3}+i) = \pi/6,$$

et donc

$$\sqrt{3}+i = 2(\cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6)) = 2e^{i\pi/6}.$$

Par la formule de De Moivre,

$$\left(\frac{4}{\sqrt{3}-i}\right)^5 = \left(2e^{i\pi/6}\right)^5 = 32e^{5i\pi/6} = 32(\cos(5\pi/6) + i\sin(5\pi/6)).$$

Question 3
(20 points)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z^3+8)(z^2+2z+2) = 0$ et représenter ses solutions dans le plan complexe.

L'équation est satisfaite si et seulement si $z^3 + 8 = 0$ ou $z^2 + 2z + 2 = 0$.

- Cas $z^3 + 8 = 0$. Il faut calculer les racines cubiques de -8. On pose $z = re^{i\theta}$. En polaire, $-8 = 8e^{i\pi}$ et donc l'équation devient

$$z^3 = r^3 e^{3i\theta} = 8e^{i\pi}.$$

  Cette égalité tient si et seulement si les modules sont égaux et les arguments équivalents :

$$r^3 = 8 \qquad \text{et} \qquad 3\theta = \pi + 2\pi k \quad \text{où } k \in \mathbb{Z}.$$

  On a donc $r = 2$ et $\theta = \pi/3 + 2\pi k/3$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Il y a 3 solutions distinctes :

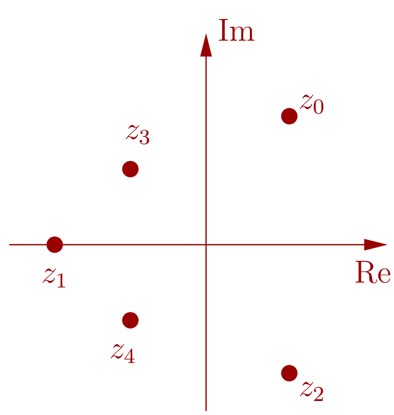
$$z_0 = 2e^{i\pi/3} = 1 + \sqrt{3}i, \qquad z_1 = 2e^{i\pi} = -2, \qquad z_2 = 2e^{5i\pi/3} = 1 - \sqrt{3}i.$$

- Cas $z^2 + 2z + 2 = 0$. On utilise la formule quadratique :

$$z_{3,4} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(2)}}{2(1)} = -1 \pm \sqrt{-1} = -1 \pm i.$$

On a donc un total de 5 solutions :

$$z_0 = 1 + \sqrt{3}i, \qquad z_1 = -2, \qquad z_2 = 1 - \sqrt{3}i, \qquad z_3 = -1 + i, \qquad z_4 = -1 - i.$$



Question 4
(15 points)

En utilisant les nombres complexes, démontrer l'identité $\cos 4\theta = 1 - 8\cos^2\theta\,\sin^2\theta$.

On utilise la formule de De Moivre.

$$\begin{aligned}
\cos 4\theta &= \mathrm{Re}(e^{i4\theta}) = \mathrm{Re}\left((\cos\theta + i\sin\theta)^4\right)\\
&= \cos^4\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta\\
&= \cos^4\theta + 2\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta - 8\cos^2\theta\sin^2\theta\\
&= (\cos^2\theta + \sin^2\theta)^2 - 8\cos^2\theta\sin^2\theta\\
&= 1 - 8\cos^2\theta\sin^2\theta.
\end{aligned}$$

On peut aussi utiliser les formules d'Euler.

$$\begin{aligned}
1 - 8\cos^2\theta\,\sin^2\theta &= 1 - 8\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^2\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^2\\
&= 1 + \frac{1}{2}\left((e^{i\theta}+e^{-i\theta})(e^{i\theta}-e^{-i\theta})\right)^2\\
&= 1 + \frac{1}{2}\left(e^{2i\theta}-e^{-2i\theta}\right)^2\\
&= 1 + \frac{1}{2}\left(e^{4i\theta}-2+e^{-4i\theta}\right)\\
&= \frac{e^{4i\theta}+e^{-4i\theta}}{2}\\
&= \cos 4\theta.
\end{aligned}$$

Question 5
(15 points)

Trouver les trajectoires orthogonales de la famille de courbes $y = cx + c$ où $c \in \mathbb{R}$.

L'équation différentielle associée à cette famille est :

$$\frac{y}{x+1} = c \quad\Longrightarrow\quad \left(\frac{y}{x+1}\right)' = 0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{(x+1)y' - y}{(x+1)^2} = 0 \quad\Longrightarrow\quad y' = \frac{y}{x+1}.$$

L'équation différentielle associée aux trajectoires orthogonales est :

$$y' = -\frac{x+1}{y}.$$

C'est une équation séparable.

$$yy' = -(x+1) \quad\Longrightarrow\quad \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} - x + C \quad\Longrightarrow\quad x^2 + 2x + y^2 = 2C \quad\Longrightarrow\quad (x+1)^2 + y^2 = D,$$

où C et D sont des constantes réelles. Les trajectoires orthogonales sont donc des cercles centrés en $(-1, 0)$ et de rayons quelconques.

Question 6

(12 + 8 = 20 points)

On cherche à modéliser l'évolution d'une maladie infectieuse dans une population. On note par $s(t)$ la *proportion* d'individus qui sont infectés au temps t. Donc, $0 \leq s(t) \leq 1$. Aussi, $1 - s(t)$ représente la proportion d'individus sains. On observe en première approximation que le taux de variation de $s(t)$ est proportionnel au produit des proportions des individus infectés et des individus sains.

a) Donner l'équation diffférentielle qui décrit cette situation et trouver sa solution générale.

L'équation différentielle est

$$\frac{ds(t)}{dt} = ks(t)(1 - s(t)),$$

où k est la constante de proportionalité (à déterminer ultérieurement). C'est une équation séparable. En utilisant la formule

$$\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{b-a} \ln\left|\frac{x+a}{x+b}\right| + C$$

de l'aide-mémoire, on a

$$\frac{s'}{s(1-s)} = k \quad \Longrightarrow \quad -\int \frac{ds}{s(s-1)} = kt + C_0 \quad \Longrightarrow \quad \ln\left|\frac{s}{s-1}\right| = kt + C_0.$$

Donc,

$$\frac{s}{s-1} = C_1 e^{kt} \quad \Longrightarrow \quad s = sC_1 e^{kt} - C_1 e^{kt} \quad \Longrightarrow \quad s = \frac{C_1 e^{kt}}{C_1 e^{kt} - 1} = \frac{1}{1 - C_2 e^{-kt}}.$$

b) En partant d'une population infectée de 25%, on observe que la population infectée passe à 50% dès le lendemain. Déterminer la solution particulière correspondant à cette situation.

On a les conditions suivantes : $s(0) = 1/4$ et $s(1) = 1/2$. La première donne

$$\frac{1}{4} = s(0) = \frac{1}{1 - C_2} \quad \Longrightarrow \quad C_2 = -3,$$

et la deuxième

$$\frac{1}{2} = s(1) = \frac{1}{1 + 3e^{-k}} \quad \Longrightarrow \quad k = \ln 3.$$

La solution particulière correspondant à cette situation est

$$s(t) = \frac{1}{1 + 3e^{-t\ln 3}} = \frac{1}{1 + 3^{1-t}}.$$

Question 7
(5 points)

Laquelle des commandes Maple suivante résout le problème énoncé. Encercler la bonne lettre.

a) Calculer $\overline{i + \overline{2 - 2i}}$.
```
> conjugate(I+conjugate(2-2*I));
```

b) Calculer $(1 + i)(i + 3)$.
```
> (1+I)(I+3);
```

c) Calculer la partie réelle de $2 + i$.
```
> Re(2+i);
```

d) Calculer le module de $2 + 3i$.
```
> modulus(2+3i);
```

e) Calculer la partie imaginaire de $-2 + i$.
```
> im(-2+I);
```