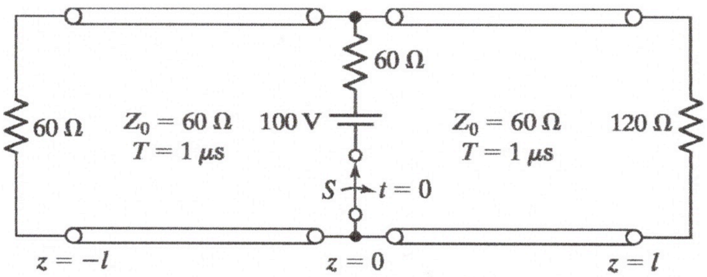
Problème 1 (8 points)



Dans le circuit montré ci-haut, le régime permanent est atteint dans les lignes avant d'ouvrir l'interrupteur S au temps $t = 0$.

a) Calculez les tensions et les courants partout dans le circuit en régime permanent à $t = 0^-$.

b) Tracez les tensions aux bornes des deux résistances en fonction du temps pour $t > 0$.

c) De votre réponse en b), déduisez l'énergie totale dissipée par les deux résistances pour $t > 0$.

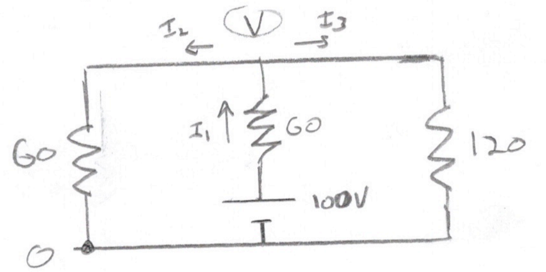
d) D'où provient cette énergie étant donné que la source est déconnectée ?

Barème

a)	V	Valeur	0.5	
		graphique	0.5	
	I	valeurs	0.5	
		graphique	0.5	
		signe	0.5	
b)		Amplitudes initiales	1.5	$V^+ = V^-$, calculs, valeurs
		Γ_{gauche}	0.5	
		Γ_{centre}	0.5	
		Γ droit	0.5	
		diag. en z	(1)	← donner le point si Vg, Vd ok
		Vg graphique	0.5	
		Vd graphique	0.5	
		Énergie	0.5	

#1 Transitoire avec conditions initiales

a) Régime permanent @ $t=0^-$



$$\frac{100-V}{60} = I_1 \qquad \frac{V-0}{60} = I_2 \qquad \frac{V-0}{120} = I_3$$

$$I_2 + I_3 = I_1$$

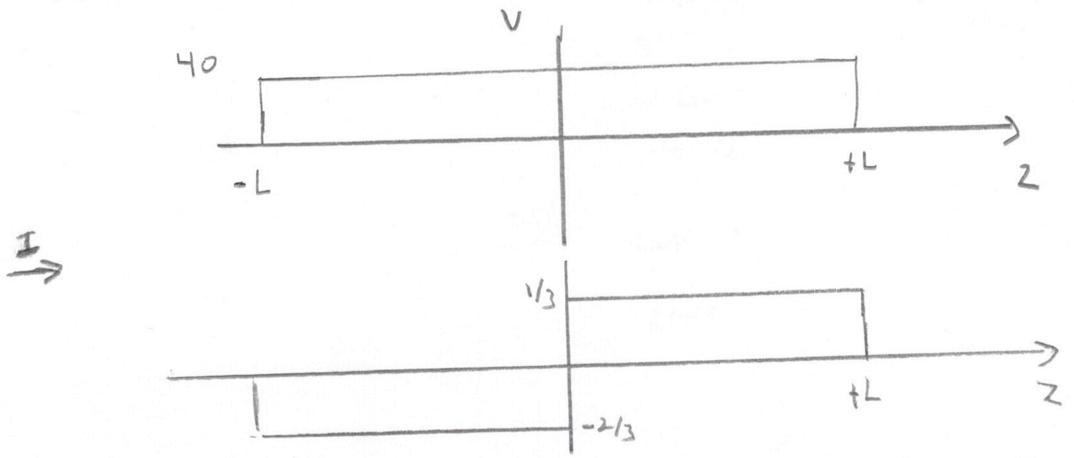
$$\frac{V}{60} + \frac{V}{120} = \frac{100-V}{60}$$

$$\frac{2V}{120} + \frac{V}{120} = \frac{200-2V}{120}$$

$5V = 200 \qquad V = 40$

$I_2 = 40/60 = 2/3 \qquad I_1 = 1$

$I_3 = 40/120 = 1/3$



Partout dans le circuit = figures en fonction de z

Attention définition du sens du courant

b) L'ouverture de l'interupteur va générer une onde dans chaque ligne, qui vont s'ajouter aux conditions initiales

Il faut trouver l'amplitude de ces ondes

Leur tension doit être égales $\quad 40 + V^- = 40 + V^+ \qquad V^- = V^+$

Leurs courants doivent être égaux $\quad -\frac{2}{3} + I^- = \frac{1}{3} + I^+$

Il faut une définition consistante de la direction du courant

$$-\frac{2}{3} - \frac{V^-}{60} = \frac{1}{3} + \frac{V^+}{60}$$

dans l'impédance de ligne

puisque l'onde est vers la gauche

$$-\frac{2}{3} - \frac{V^+}{60} = \frac{1}{3} + \frac{V^+}{60} \longrightarrow \frac{V^+}{30} = -1 \qquad V^+ = -30$$

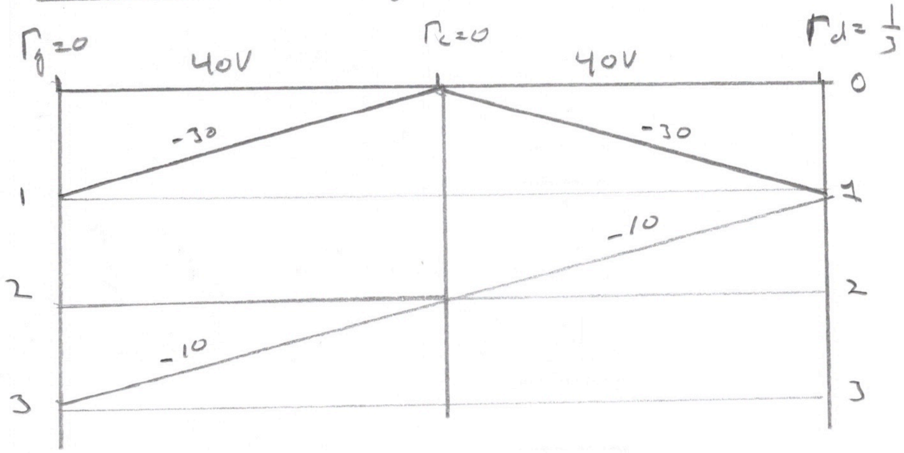
b) <u>coefficients de réflexion</u>

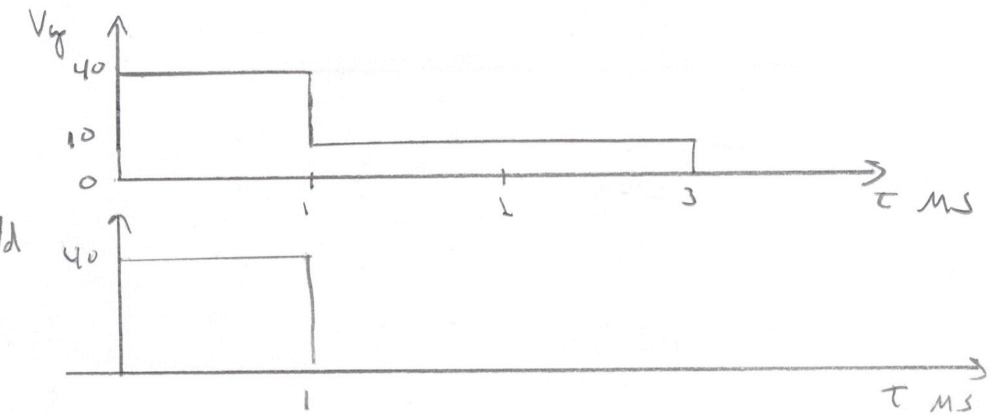
à gauche (à la 60 Ω) $\Gamma_g = 0$ (adapté)

à droite (à la 120 Ω) $\Gamma_d = \dfrac{120-60}{120+60} = \dfrac{1}{3}$

au centre : 2 Lignes de 60 connectées ensemble $\Gamma_c = 0$

<u>diagrammes en z</u>





---

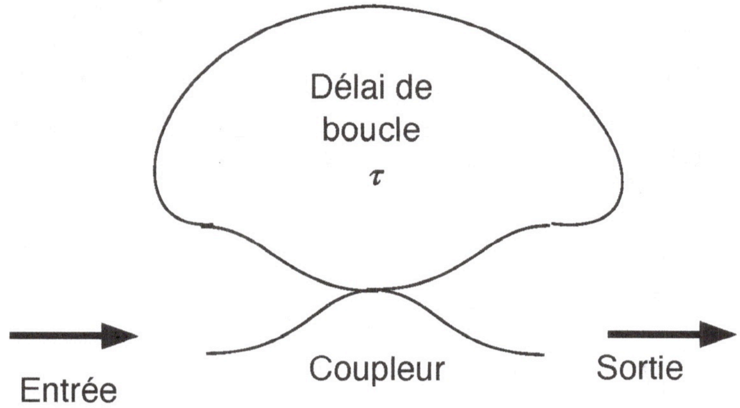
c) Energie = ∫ Puissance dt

$$\mathcal{E} = \frac{(40)^2}{60} \times 1\,\text{ms} + \frac{10^2}{60} \times 2\,\text{ms} + \frac{40^2}{120} \times 1\,\text{ms}$$

$$\mathcal{E} = \left(\frac{160\cancel{0}}{\cancel{6}0} + \frac{20\cancel{0}}{6\cancel{0}} + \frac{160\cancel{0}}{12\cancel{0}} \right) \times 1\,\text{ms}$$

$$\mathcal{E} = \left(\frac{80}{3} + \frac{10}{3} + \frac{40}{3} \right) \times 1\,\text{ms} = \frac{130}{3} \times 10^{-6}\ \text{J}$$

Problème 2 (8 points)



Vous avez un coupleur directionnel 2×2 ayant une de ses sorties reliée à une entrée, tel qu'indiqué à la figure ci-haut. On peut réaliser ce composant avec des fibres optiques, des guides d'ondes métalliques ou des lignes de transmission. Cette situation est également un très bon modèle pour le couplage dans un résonateur, qui peut être implanté dans une large varitété de technologies, dont l'optique intégrée sur silicium.

Le délai de propagation dans la boucle est τ

Le ratio du coupleur est 50%, c'est à dire que 50% de la puissance incidente à l'une des entrées se retrouve à l'une des sorties.

Le coupleur est sans perte, mais la ligne de transmission dans la boucle ne l'est pas, une fraction α de la puissance est perdue par atténuation à chaque tour dans la boucle.

Calculez et tracez la réponse impulsionnelle et la fonction de transfert entre l'entrée et la sortie de ce composant.

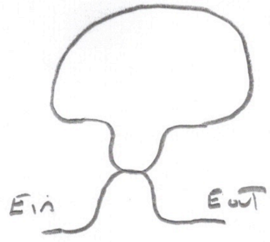
Discutez comment ce filtre respecte la conservation de l'énergie, même lorsque les pertes dans la boucle sont nulles.

Barème P2

0.5	coupleur	$r = \frac{j}{\sqrt{2}}(e^{j\pi/4})$
0.5		$t = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{j\pi/4})$
0.5	$h(t)$	calculs (suivre ~3 premières pulses)
0.5		résultat somme infinie
1.5		graphique → impulsion zéro → exp décroissante échantillonnée
0.5	$H(\omega)$	TF des pulses
0.5		résultat somme infinie
0.5		résultat série géométrique
1.5		graphique → modes lorentziens périodiques
1,5	conservation - sans perte $\lvert H(\omega)\rvert = 1$ → pas d'autre sortie - modes étroits et peu profonds - phase	

on ne pénalise pas pour $(e^{j\pi/4})$

#2 Coupleur et boucle



Délai de boucle γ

fraction P perdue par tour α

fraction conservé $1-\alpha$

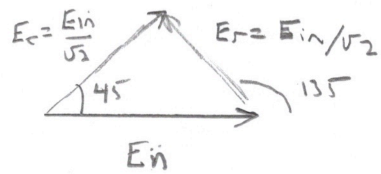
Atténuation amplitude $a = \sqrt{1-\alpha}$

Coupleur 50/50

transmission (direct) $\tau = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{j\pi/4}\right)$

réflexion (croisement) $j\Gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{j\pi/4}\right) \cdot j$

on va le mettre à part



---

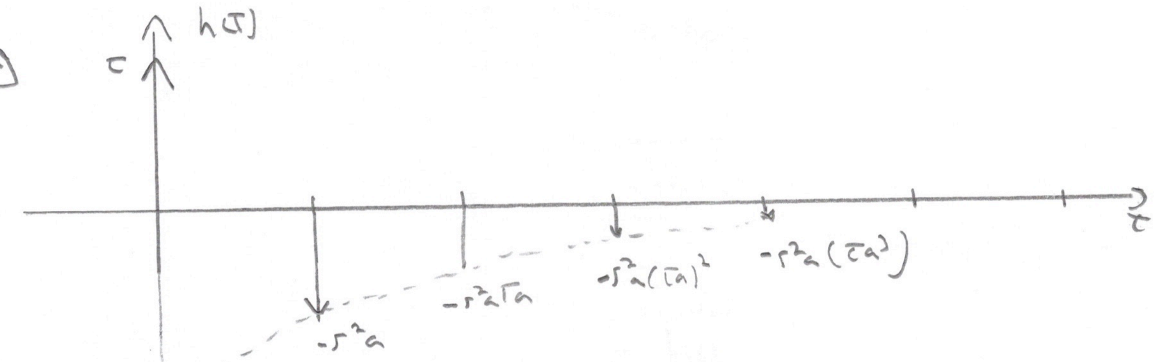
réponse impulsionnelle $\quad E_{in} = \delta(t)$

$$h(t) = \tau\delta(t) + j\Gamma a j\Gamma\,\delta(t-\gamma) + j\Gamma a\tau a j\Gamma\,\delta(t-2\gamma) + j\Gamma a\tau a\tau a j\Gamma\,\delta(t-3\gamma)$$

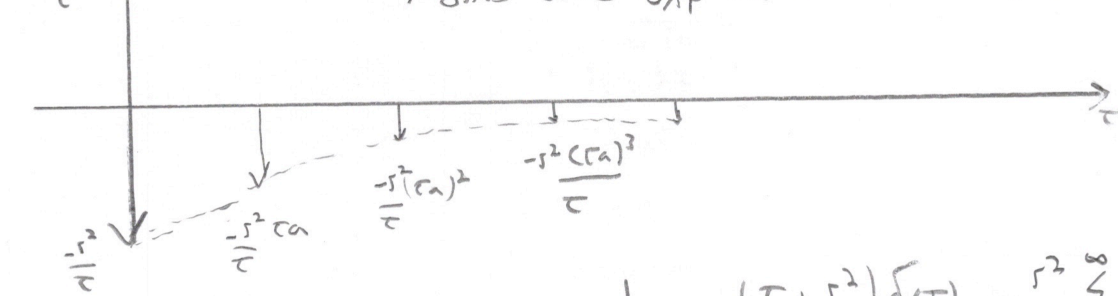
$$h(t) = \tau\delta(t) - \Gamma^2 a\left[\delta(t-\gamma) + \tau a\,\delta(t-2\gamma) + (\tau a)^2\delta(t-2\gamma) + \cdots\right]$$

$$h(t) = \tau\delta(t) + \frac{\Gamma^2 a}{\tau a}\delta(t) - \frac{\Gamma^2 a}{\tau a}\delta(t) - \frac{\Gamma^2 a}{\tau a}\left[\tau a\,\delta(t-\gamma) + (\tau a)^2\delta(t-2\gamma) + (\tau a)^3\delta(t-3\gamma)\right]$$

$$h(t) = \left(\tau + \frac{\Gamma^2}{\tau}\right)\delta(t) - \frac{\Gamma^2}{\tau}\left[(\tau a)^0\delta(t) + (\tau a)^1\delta(t-\gamma) + (\tau a)^2\delta(t-2\gamma) + \cdots\right]$$



Une impulsion à zéro
moins une exp décroissante échantillonée



$$h(t) = \left(\tau + \frac{\Gamma^2}{\tau}\right)\delta(t) - \frac{\Gamma^2}{\tau}\sum_{n=0}^{\infty}(\tau a)^n\delta(t-n\gamma)$$

Fonction de transfert

$$h(t) = \left(\tau + \frac{r^2}{\tau}\right)\delta(t) - \frac{r^2}{\tau}\sum_{n=0}^{\infty}(\tau a)^n \delta(t - n\gamma)$$

$$H(\omega) = \left(\tau + \frac{r^2}{\tau}\right) - \frac{r^2}{\tau}\sum_{n=0}^{\infty}(\tau a)^n e^{jn\omega\gamma} \qquad \sum r^n = \frac{1}{1-r} \quad |r|<1$$

$$H(\omega) = \left(\tau + \frac{r^2}{\tau}\right) - \frac{r^2}{\tau}\frac{1}{1-\tau a e^{-j\omega\gamma}}$$

$$H(\omega) = \tau + \frac{r^2}{\tau}\frac{(1-\tau a e^{-j\omega\gamma})}{1-\tau a e^{-j\omega\gamma}} - \frac{r^2}{\tau}\frac{1}{1-\tau a e^{-j\omega\gamma}}$$

$$\boxed{H(\omega) = \tau - \frac{r^2 a e^{-j\omega\gamma}}{1-\tau a e^{-j\omega\gamma}}}$$

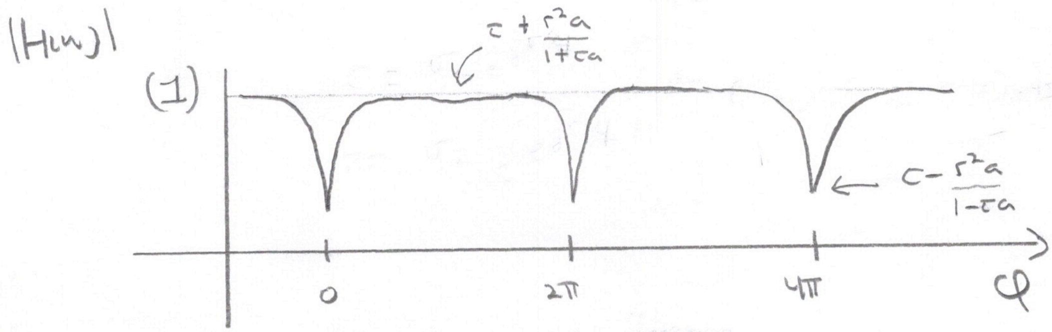
$\tau = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{j\pi/4}$ coupleur 50/50

$r = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{j\pi/4}$

$a = \sqrt{1-\alpha}$

constante

TF de l'exp échantillonée donc Lorentzienne (1er ordre) périodisé



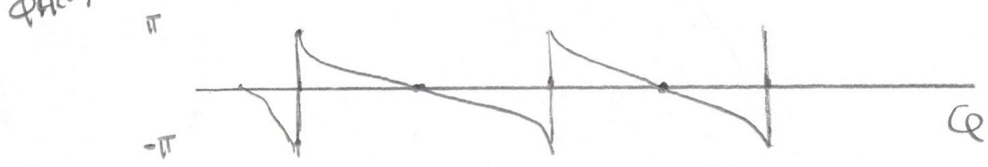
$\varphi = \omega\gamma$

la phase de $e^{j\pi/4}$ décale les modes

c) Sans perte, il faut que $|H(\omega)| = 1$ car le signal (l'onde) n'a nulle part d'autre à aller qu'à la sortie

Les modes deviennent de plus en plus étroits et de moins en moins profonds

mais présence de phase !



Calcul direct de la forme close de $H(\omega)$

$$E_{out} = \tau E_{in} + j r E_2$$

$$E_1 = j r E_{in} + \tau E_2$$

$$E_2 = a E_1 e^{-j\varphi_1}$$

Phase pour 1 tour $\varphi_1 = \omega T$

$$E_{out} = \tau E_{in} + j r a E_1 e^{-j\varphi_1}$$

$$E_1 = j r E_{in} + \tau a E_1 e^{-j\varphi_1} \rightarrow E_1 (1 - \tau a e^{-j\varphi_1}) = j r E_{in}$$

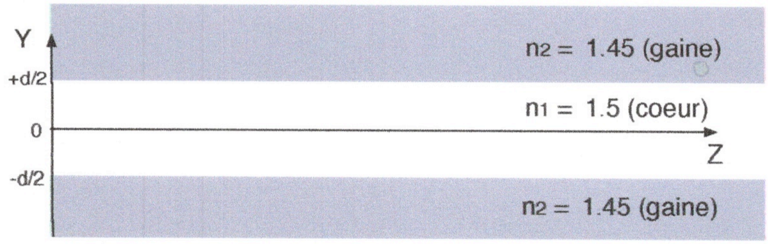
$$E_1 = \frac{j r E_{in}}{1 - \tau a e^{-j\varphi_1}}$$

$$E_{out} = \tau E_{in} + \frac{j r a j r E_{in} e^{-j\varphi_1}}{1 - \tau a e^{-j\varphi_1}}$$

$$\frac{E_{out}}{E_{in}} = \tau - \frac{r^2 a e^{-j\varphi_1}}{1 - \tau a e^{-j\varphi_1}}$$

Tous les points pour $H(\omega)$ (calculs)

Problème 3 (10 points)



On a un guide plan formé de trois diélectriques. La plaque centrale (le coeur du guide) est en verre et a un indice de réfraction $n_1 = 1.5$. Le coeur a une épaisseur $d = 10$ µm et est en "sandwich" avec des plaques d'indice $n_2 = 1.45$ de part et d'autre, agissant comme gaine pour le guide. On peut supposer que les plaques de gaine ont une épaisseur infinie.

Une des composantes du champ dans le guide est donnée par:

$$\bar{E}_z = \begin{cases} -\bar{E}_o \sin\left(\frac{h_1 d}{2}\right) e^{\alpha(y+d/2)} & y < -d/2 \\ \\ \bar{E}_o \sin(h_1 y) & y < -d/2 \ < t < d/2 \\ \\ \bar{E}_o \sin\left(\frac{h_1 d}{2}\right) e^{-\alpha(y-d/2)} & y > d/2 \end{cases}$$

Avec: $d = 10$µm $\quad n_1 = 1.5 \quad n_2 = 1.45 \quad \omega = 2\pi \times 200\text{THz}$

Une résolution de l'équation caractéristique nous donne $h_1 d/2 = 1.406$ pour le mode d'intérêt.

Comme le mode se propage simultanément dans des milieux d'indice différents, on a aussi un paramètre h dans le second millieu:

$$h_2^2 = \omega^2 \mu_2 \epsilon_2 - \beta^2 = -\alpha^2$$

a) À quelle famille ce mode appartient-il, pourquoi ?

b) Quelle est la fréquence de coupure de ce mode ?

c) Calculez sa constante de propagation et comparez avec la propagation d'une onde plane libre dans chacun des deux milieux d'indice n_1 et n_2.

d) Calculez les phaseurs de toutes les composantes du champ E et du champ H.

e) Tracez le champ longitudinal en fonction de y, prenez soin d'indiquer les valeurs importantes.

f) Quel est l'indice entier (l'ordre) de ce mode selon la nomenclature utilisée au cours ?

g) Les modes d'indice ou d'ordre zéro sont-ils possibles dans ce guide, pourquoi ?

P3 Guidage Barème

a) 0.5
0.25 réponse
0.25 justification

---

b) 0.5

---

c) 1
0.5 calcul / Valeur
0.5 entre B_1 et B_2 ligne

---

d)
0.5 H_z gaine
0.5 H_z coeur
0.5 E_x gaine
0.5 E_x coeur
0.5 H_y coeur
0.5 H_y gaine

Tous nuls 3 pts

5

0.5 E_y coeur
0.5 E_y gaine
0.5 H_x coeur
0.5 H_x gaine

---

e) 1
0.25 forme sin coeur 1/2 cycle
0.25 forme exp gaine, avec discontinuité de pente
0.25 coeur / gaine séparation ± 5 mm
0.25 0.986 E_0 à l'interface

---

f) 1

---

g) 1

3 Guidage

a) c'est un mode TM puisqu'on spécifie un E_z non nul

b) $n_1 = 1.5$ $\quad \varepsilon_{r1} = 1.5^{2}$ $\quad \mu_{1r} = 1$ $\quad \varepsilon_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_{r1}$ $\quad \mu_1 = \mu_0$

$n_2 = 1.45$ $\quad \varepsilon_{r2} = 1.45^{2}$ $\quad \mu_{2r} = 1$ $\quad \varepsilon_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_{r2}$ $\quad \mu_2 = \mu_0$

$$\frac{h_1 d}{2} = 1.406 \qquad d = 10\,\mu m \qquad h_1 = \frac{2 \times 1.406}{d} = 2.812 \times 10^5$$

Selon ce qu'on a vu au cours

$$f_c = \frac{h}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{h_1}{2\pi\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}} = 8.945\ \text{THz}$$

cependant la condition est un peu différente pour les guides diélectriques. À la coupure $\beta = \omega\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}$

Le guide ~~est~~ tellement petit que l'onde voit juste la gaine
coeur

La propagation n'est plus guidée et est comme une onde plane dans le milieu 2

On trouve en réalité que $f_c = 0$

On verra que cela ne change pas les réponses qui suivent

---

c) $\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2} = \sqrt{\omega^2\mu\varepsilon\left(1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2\right)} = \sqrt{\omega^2\mu\varepsilon\left(1-\frac{h^2}{(2\pi f)^2\mu\varepsilon}\right)}$

$\beta = \sqrt{\omega^2\mu\varepsilon - h^2}$

On retrouve l'expression donnée pour h_2, qui est aussi valide pour h_1 peu importe la signification du f_c calculé

$$\beta = \sqrt{\omega^2\mu_1\varepsilon_1 - h_1^2} = \sqrt{\omega^2\mu_2\varepsilon_2 - h_2^2} = 6.28 \times 10^6\ \text{rad/m}$$

$\uparrow$ positif $\qquad\qquad \uparrow$ négatif

on voit que β est entre la propagation libre dans milieu 1 et dans 2

d) On a

$$E_z = \begin{cases} E_0 \sin(h_1 y) & \text{coeur} \\ E_0 \sin\left(\frac{h_1 d}{2}\right) e^{-\alpha(y - d/2)} & \text{gaine} \end{cases}$$

$$\gamma_z = j\beta$$

$$H_x = \frac{-1}{h^2}\left(\cancel{\gamma_z \frac{dH_z}{dx}} - j\omega\varepsilon \frac{dE_z}{dy}\right) \qquad H_y = \frac{-1}{h^2}\left(\cancel{\gamma_z \frac{dH_z}{dy}} + j\omega\varepsilon \frac{dE_z}{dx}\right)$$

$$E_x = \frac{-1}{h^2}\left(\gamma_z \frac{dE_z}{dx} + \cancel{j\omega\mu \frac{dH_z}{dy}}\right) \qquad E_y = \frac{-1}{h^2}\left(\gamma_z \frac{dE_z}{dy} - \cancel{j\omega\mu \frac{dH_z}{dx}}\right)$$

$H_z = 0$ coeur et gaine

$$H_x = + \frac{j\omega\varepsilon}{h^2} \frac{dE_z}{dy} \begin{cases} \xrightarrow{\text{coeur}} & \dfrac{j\omega\varepsilon_1 h_1 E_0 \cos(h_1 y)}{h_1^2} \\ \xrightarrow{\text{gaine}} & \dfrac{j\omega\varepsilon_2 (-\alpha) E_0 \sin\left(\frac{h_1 d}{2}\right) e^{-\alpha(y-d/2)}}{h_2^2} \end{cases}$$

$$H_y = -\frac{j\omega\varepsilon}{h^2} \frac{dE_z}{dx} = 0 \quad \text{coeur et gaine}$$

$E_x = 0$ coeur et gaine

$$E_y = -\frac{\gamma_z}{h^2} \frac{dE_z}{dy} \begin{cases} \xrightarrow{\text{coeur}} & \dfrac{-j\beta}{h_1^2} h_1 E_0 \cos(h_1 y) \\ \xrightarrow{\text{gaine}} & \dfrac{-j\beta}{h_2^2} (-\alpha) E_0 \sin\left(\frac{h_1 d}{2}\right) e^{-\alpha(y-d/2)} \end{cases}$$

---

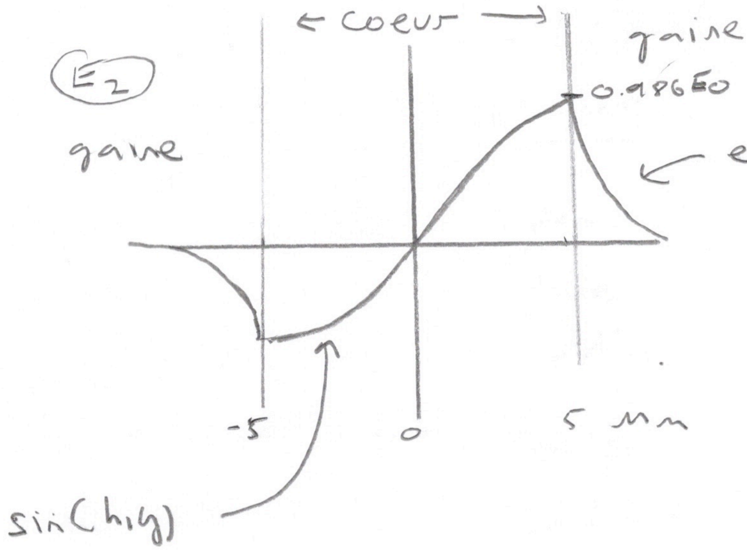
on a $\alpha = j h_2$

$$\frac{-j\beta \times -j h_2}{h_2^2} = \frac{-\beta}{h_2}$$

$$\frac{j\omega\varepsilon_2}{h_2^2} \, -jh_2 = + \frac{\omega\varepsilon}{h_2}$$

	coeur	gaine
E_z	$E_0 \sin(h_1 y)$	$E_0 \sin(\frac{h_1 d}{2}) e^{-\alpha(y-d/2)}$
H_z	0	0
E_x	0	0
H_y	0	0
E_y	$\frac{-j\beta}{h_1} E_0 \cos(h_1 y)$	$\frac{-\beta}{h_2} E_0 \sin(\frac{h_1 d}{2}) e^{-\alpha(y-d/2)}$
H_x	$\frac{j\omega\varepsilon_1}{h_1} E_0 \cos(h_1 y)$	$\frac{\omega\varepsilon}{h_2} E_0 \sin(\frac{h_1 d}{2}) e^{-\alpha(y-d/2)}$

e) E_z



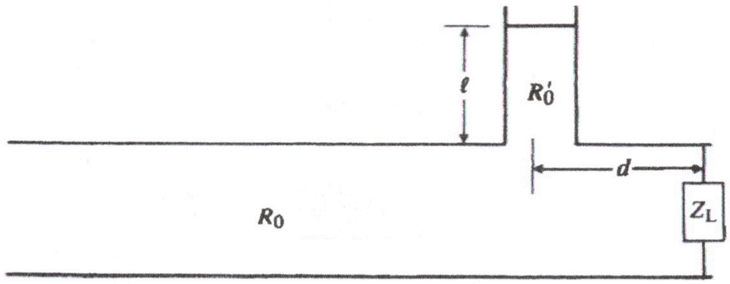
$\sin(\frac{h_1 d}{2}) = 0.986$

Le champ est continu, mais pas sa dérivée !

f) il y a 1 ventre (une demi λ) dans le coeur
c'est un mode d'indice 1
Le champ longitudinal est impair → c'est normal

g) Non, le mode TEM n'est pas supporté car il n'y en pas deux conducteurs.

Problème 4 (9 points)



Une impédance de charge doit être adaptée à une ligne de transmission en utilisant un 'stub' placé tel qu'illustré à la figure ci-haut. En supposant que $Z_L = 25 + j25\,\Omega$, $R_o = 50\,\Omega$ et $R_o' = 35\,\Omega$, trouvez les distances d et ℓ requises pour l'adaptation.

La section de ligne entre la charge et le stub est d'impédance R_o.

Indiquez toutes les étapes logiques sur l'abaque de Smith fournie à la page suivante.

Si fait en admittance −2

Barème

		Sol 1	Sol 2
1	Z_c valeur et position abaque	0.5+0.5j	0.5+0.5j
1	Z_c position en λ	0.088 λ	0.088 λ
2	Z valeur et position abaque	1+1j	1−1j
1	Z position en λ	0.162 λ	0.338 λ
1	d	0.074 λ	0.25 λ
1	stub $\pm \frac{50}{35} j$	−1.43j	+1.43j
1	longueur stub ℓ	0.347 λ	0.143j
1	Position du c.c		

#1 Matching 1 stub en série

Solution 1

	charge	Position
	$Z_c = 0.5 + 0.5j$	0.088λ
on va à	$Z = 1 + 1j$	0.162λ

$$d = (0.162 - 0.088)\lambda = 0.74\lambda$$

stub: impédance $Z_s = \frac{-50}{35}j = -1.43j$ @ 0.347λ

$$l = (0.347 - 0)\lambda = 0.347\lambda$$

position du c.c

Solution 2

charge	position
$Z_c = 0.5 + 0.5j$	0.088λ
$Z = 1 - 1j$	0.338λ

$$d = (0.338 - 0.088)\lambda = 0.25\lambda$$

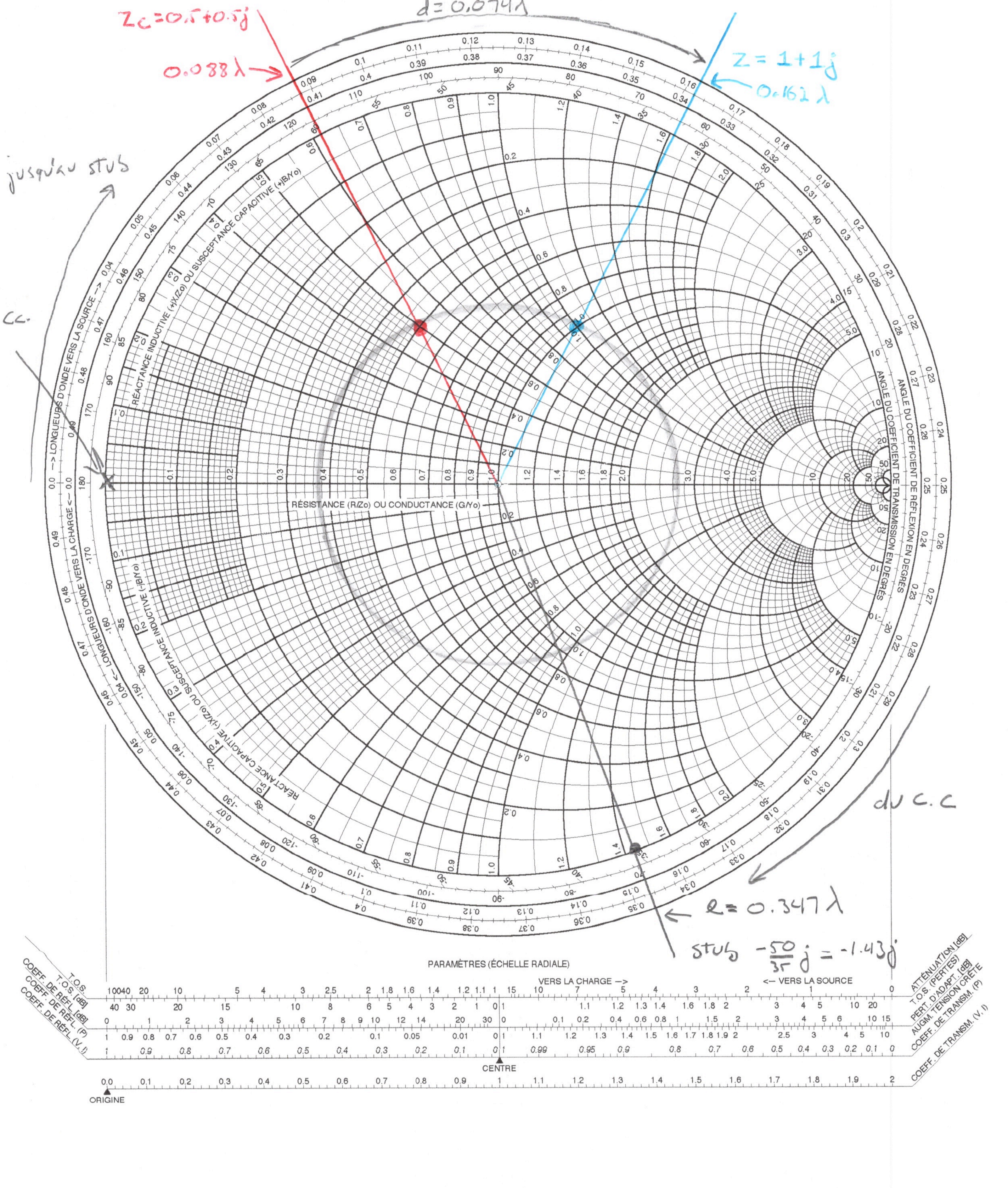
stub: impédance $Z_s = \frac{+50}{35}j = 1.43j$ @ 0.153λ

$$l = (0.153 - 0)\lambda$$

Solution 1 z=1+1j

Abaque de Smith

COORDONNÉES EN IMPÉDANCE OU ADMITTANCE NORMALISÉES



Solution 2 avec z = 1-1j

Abaque de Smith

COORDONNÉES EN IMPÉDANCE OU ADMITTANCE NORMALISÉES