2006 Examen final – Solutionnaire

Problème 1 (25 points sur 100)

Supposons que nous avons un PLL d'ordre deux où le filtre de la boucle est

$$F(\omega) = \frac{1}{j\omega + 1}$$

et le gain est unitaire (soit K_0=1).

A. (5 points) Donnez la fonction de transfert en boucle fermée.

$$H(\omega) = \frac{K_0 F(\omega)}{j\omega + K_0 F(\omega)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{j\omega+1}}{\frac{1}{j\omega+1} + j\omega} = \frac{1}{j\omega(1+j\omega)+1}$$

$$= \frac{1}{j\omega + (j\omega)^2 + 1} = \frac{\hat{\Theta}}{\Theta}$$

B. (10 points) Donnez l'erreur asymptotique quand la phase change linéairement, donc $\Theta(j\omega) = 1/(j\omega)^2$.

$$\lim_{j\omega \to 0} j\omega E(\omega) = \lim_{j\omega \to 0} \frac{j\omega \cdot j\omega\, \Theta(\omega)}{j\omega + K_0 F(\omega)} = \lim_{j\omega \to 0} \frac{(j\omega)^2 \cdot \frac{1}{(j\omega)^2}}{j\omega + \frac{1}{1+j\omega}}$$

$$= \lim_{j\omega \to 0} \frac{1+j\omega}{j\omega(1+j\omega)+1} = 1$$

C. (10 points) Supposons que nous changeons le filtre de la boucle à

$$F(\omega) = \frac{1}{j\omega + .10}$$ (un 0.10 me rendrait plus confiant…)

En sachant que

$$B_N = \frac{\omega_n}{8\varsigma} \text{ pour } \mathrm{H}(\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\varsigma\omega_n \cdot j\omega + \omega_n^2}$$

discutez de l'effet de cette modification sur le bruit dans l'estimée de la phase et sur l'erreur asymptotique dans l'estimée de la phase (voir partie B).

$$\hat{\theta}(\omega) = \theta(\omega)\ H(\omega) = \frac{10^\circ}{j\omega} H(\omega) = \frac{10^\circ}{j\omega(1 + j\omega + (j\omega)^2)}$$

ω_n^2 $2\zeta\omega_n$

$\omega_n^2 = 1 \Rightarrow \omega_n = 1$

$2\zeta\omega_n = 1 = 2\zeta \quad \zeta = \frac{1}{2}$

$\omega_n^2 = 1 \quad \omega_n = 1 \qquad 2\zeta\omega_n = .10 = 2\zeta \quad \zeta = .05$

$$B_N = \frac{\omega_n}{8\zeta} = \frac{1}{8 \cdot .05} = \frac{1}{.4} = \frac{10}{4} = 2.5$$

Donc l'erreur asymptotique est reduit d'un 1 à .1, soit un facteur de 10.

La largeur de bande équivalente du bruit est augmenté par un facteur de

$1/4 : 2.5$ soit un facteur de 10.

Donc en changent la fréquence de coupure dans $F(\omega)$ nous pourons chercheras à ajuster l'effet de deux sortes d'erreur: asymtotique (dynamique) et stochastique (bruit)

Problème 2 (20 points sur 100)

A. (5 points) Quelles sont les trois caractéristiques désirées d’une séquence d’étalement, soit une séquence pseudo-bruit?

1) balance : même # de zéros et un
2) pas de longue suite d'un ou de zéro
3) fonction d'autocorrelation aigue

symétric (exiantant de 1 que de 0)
Pas de longues séquences de bits identiques
Faible corellation croisée

B. (5 points) Quelles sont trois approches pour fournir une référence de phase pour un PLL?

1) pilote
2) mettre au carré (ou quatrième)
3) à partir des données (ex: Costas)

génération d'une tonalité
Élever le signal au carré
remodulation

C. (5 points) Discutez l’efficacité du spectre étalé contre le bruit AWGN et le bruit à bande étroite.

Le spectre étalé n'a pas d'avantage ni de désavantage contre le bruit AWGN
Le spectre étalé est très efficace contre le bruit à bande étroite, avec une diminution proportionnel à le gain d'étalement.

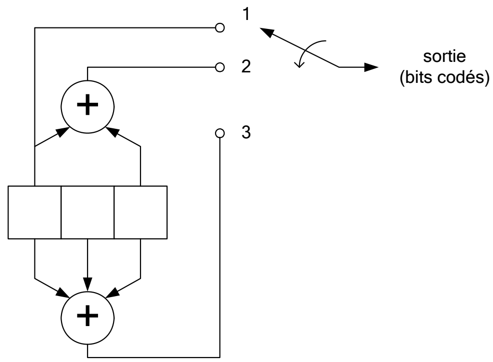
L'utilisation du spectre étalé n'a aucun effet sur le bruit AWGN. Cependant, il est efficace contre le bruit en bande étroite (et c'est pour cela que les forces armées l'utilisait!!)

D. (5 points) En quoi la modulation avec codage en treillis (TCM) est-elle supérieure au codage convolutif?

Le TCM est plus efficace spectralement que les codes convolutifs.

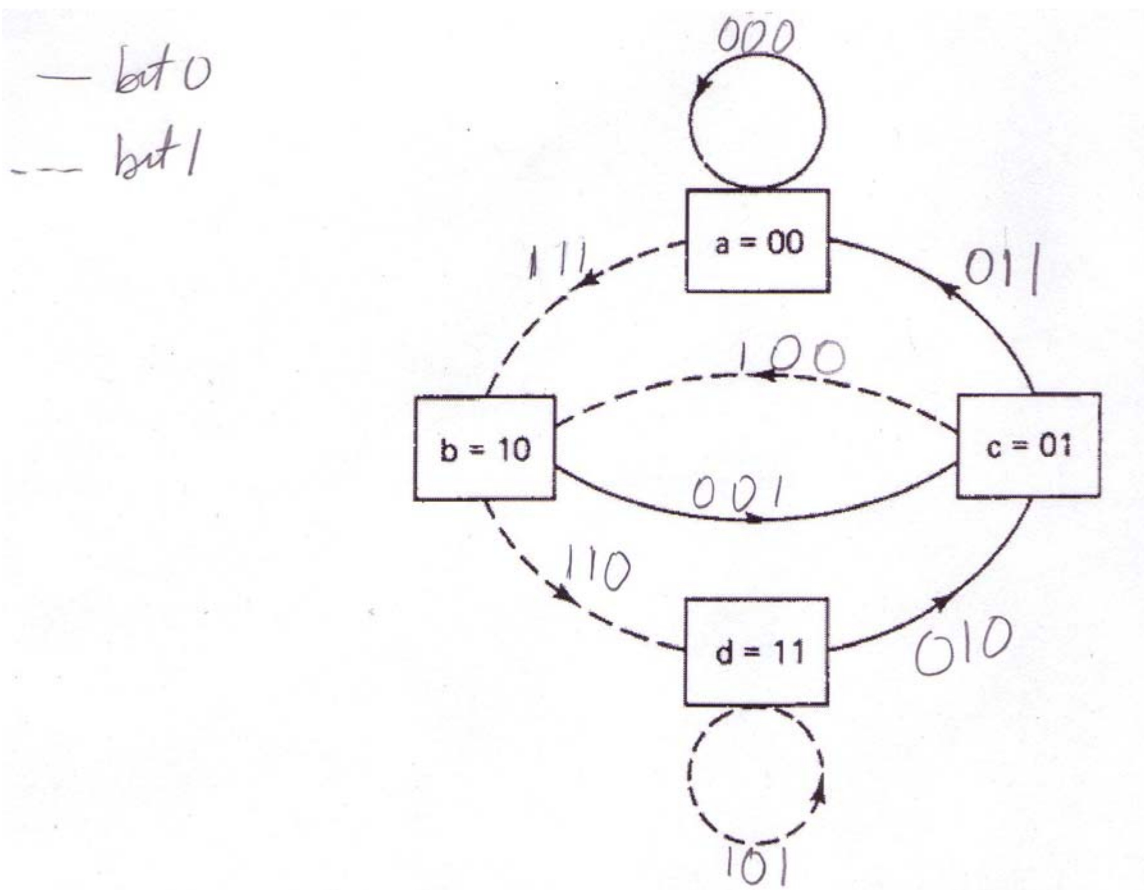
Problème 3 (30 points sur 100)

Voici l'implémentation d'un code convolutif avec registres à décalage

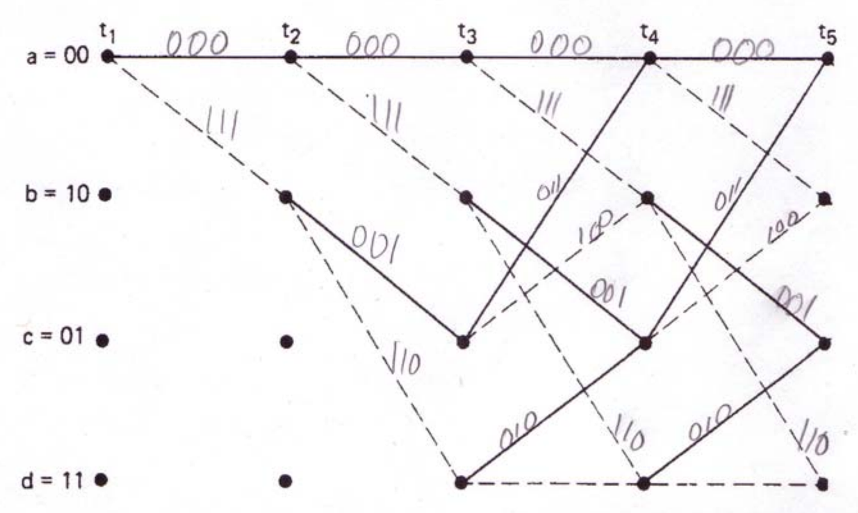


Utilisez la feuille fournie pour les parties A et B. N'oubliez pas de mettre votre nom et matricule sur la feuille avant de la remettre.

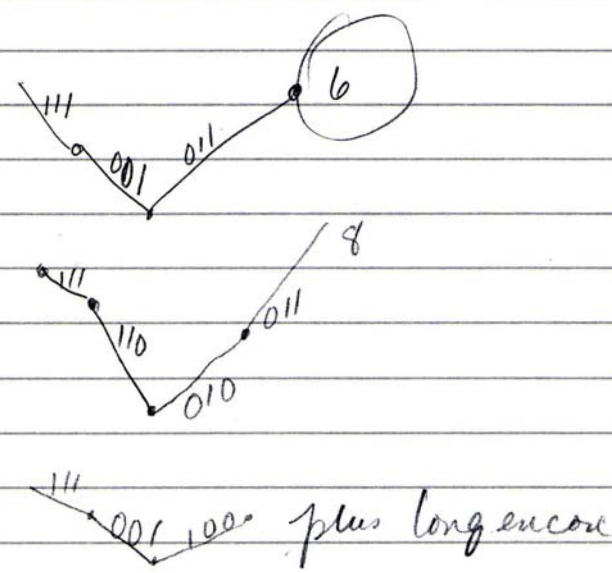
A. (10 points) Donnez le diagramme d'état pour ce code.



B. (5 points) Donnez le treillis d'encodage pour ce code.



C. (10 points) Trouvez la distance minimale pour le code convolutif donné dans ce graphique en utilisant la distance de Hamming.



distance minimale = 6

D. (5 points) Combien d'erreurs peuvent être corrigées?

$$t = \left\lfloor \frac{d_{min}-1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{6-1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor = 2$$

Problème 4 (25 points sur 100)

Considérons l'algorithme de Viterbi pour décoder un code convolutif. Supposons que la longueur de contrainte est K, qu'il y a un bit (k=1) qui entre dans les K registres à chaque intervalle, qu'il y a n bits de parité, que nous utilisons des décisions fermes, et que nous avons choisi de forcer une décision après h=5K bits.

A. (15 points) Quelle information doit être sauvegardée pour chaque intervalle de bit et quelle est la quantité d'information à sauvegarder?

Il faut sauvgarder

1) le chemins pour arriver à chaque état; 2^{K-1} états, $h = 5K$ sauts par chemin

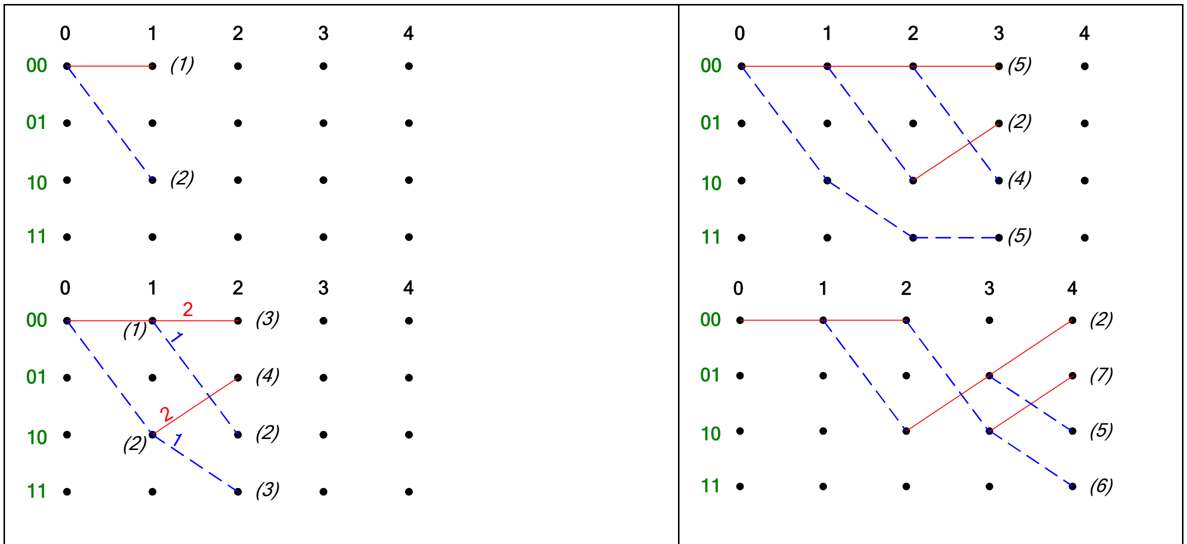
2) la distance globale pour arriver à chaque état

2^{K-1} vecteurs de longueur $5K$ avec chaque element la précision k, soit un bit pour les code avec de décision fermes;

la distance globales sont 2^{K-1} elements avec une précision de plusieurs bits (au ~~moins~~ plus $5K \times n$ = distance globale maximale pour un chemin de $5K$ sauts.

B. (10 points) Donnez l'information sauvegardée pour les quatre intervalles de bits illustrés dans la table suivante.

Donnée 0 : ——— Donnée 1 : - - - -



B. ~~CHEMIN~~ K = 3 $2^{3-1} = 4$ états   h = 5×3=15

		Chemin	Dist
t=1	Chemin état A	- - - - - - - - - - - 0 1	dist état A: 1
	B	- - - - - - - -	-
	C	- - - - - - - - 1 1	dist état C: 2
	D		-
t=2	A	— — — — — 0 0	dist A 3
	B	— — — — — 1 0	4
	C	— — — — 0 1	2
	D	— — — — — 1 1	3
t=3	A	0 0 0	5
	B	0 1 0	2
	C	0 0 1	4
	D	1 1 1	5
t=4	A	— — — 0 1 0 0	2
	B	0 0 1 0	7
	C	~~4~~ 0 1 0 1	5
	D	0 0 1 1	6