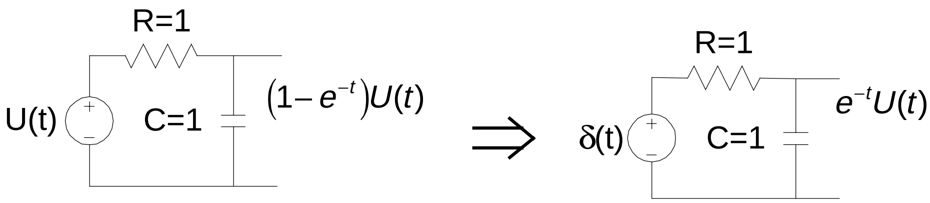
1999 Mini-Test 2 : Solutions

Problème 1 (1 point sur 5)

a)

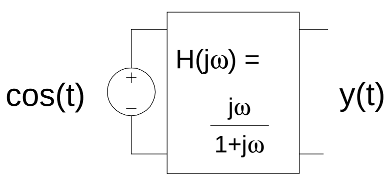


La dérivée de *U(t)* est la fonction delta. La dérivée de la sortie du système avec une entrée égale à la fonction *U(t)* est donnée par

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}U(t)\left[1-e^{-t}\right] &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}U(t)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}U(t)e^{-t} \\
&= \delta(t)+U(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}e^{-t}-e^{-t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}U(t) \\
&= \delta(t)+e^{-t}U(t)-e^{-t}\delta(t) \\
&= \delta(t)+e^{-t}U(t)-e^{-0}\delta(t) \\
&= \delta(t)+e^{-t}U(t)-\delta(t) \\
&= e^{-t}U(t)
\end{aligned}
$$

Donc a) est **Vrai**.

b)



$$\Longrightarrow\quad y(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$$

La réponse à un cosinus est la partie réelle de la réponse à un phaseur. La réponse à un phaseur est la réponse fréquencielle évaluée à la fréquence du phaseur, multiplié par le phaseur.

réponse à $e^{jt} = H(j\omega)e^{j\omega t}\Big|_{\omega=1} = H(j)e^{jt} = \dfrac{j}{1+j}e^{jt} = \left|\dfrac{j}{1+j}\right| e^{jArg\frac{j}{1+j}} e^{jt}$

$$= \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}} e^{jArg\frac{1+j}{1^2+1^2}} e^{jt}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{j\tan^{-1}\frac{1}{1}} e^{jt} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{j\tan^{-1}1} e^{jt} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{j\pi/4} e^{jt}$$

La partie réelle est

réponse à $\cos(t) = \mathrm{Re}\dfrac{1}{\sqrt{2}} e^{j\pi/4} e^{jt}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$$

Donc b) est **Vrai**.

Problème 2 (1 point sur 5)

a) $f(t)\cdot g(t) \Leftrightarrow \dfrac{1}{2\pi}F(\omega)*G(\omega)$ est le théorème de convolution, qui est **Vrai**

b) $\mathrm{TF}^{-1}\left\{\dfrac{2}{3j\omega-\omega^2}\right\} = e^{-3t}U(t)*\mathrm{sgn}(t)$

La convolution dans le temps correspond à la multiplication dans le domaine fréquenciel. Nous pouvons factoriser le rapport en

$$\mathrm{TF}^{-1}\left\{\frac{2}{3j\omega-\omega^2}\right\} = \mathrm{TF}^{-1}\left\{\frac{2}{j\omega}\bullet\frac{1}{3+j\omega}\right\}$$

Donc nous avons un produit. Dans la table de transformées on a que

$$TF\left\{e^{-\beta t}U(t)\right\} = \frac{1}{\beta+j\omega} \quad et \quad TF\left\{\mathrm{sgn}(t)\right\} = \frac{2}{j\omega}$$

Donc b) est **Vrai**.

c) $x(t)*\delta(t-t_0) = \delta(t-t_0)$

La convolution d'une fonction delta centrée sur t_0 avec n'importe quelle fonction $x(t)$, est la fonction $x(t)$ centrée sur t_0. Donc c) est **Faux**.

d) $$X(\omega) = 0 \;\; \forall \left|\omega\right| > \omega_0 \qquad \Rightarrow \qquad Y(\omega) = 0 \;\; \forall \left|\omega\right| > \omega_0$$

Un système linéaire et invariant dans le temps ne peut pas ajouter de contenu fréquenciel. Seulement les fréquences présents dans l'entrée seront présents à la sortie. Donc d) est **Vrai**.

Problème 3 (2 points sur 5)

a) Approche graphique

On cherche la convolution de la fonction

$$x(t) = e^{-t}U(t)$$

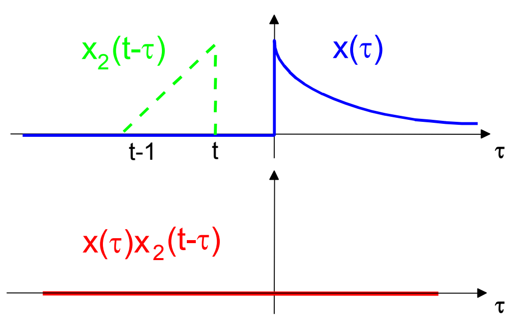
et la fonction

$$x_2(t) = \begin{cases} 1-t & 0<t<1 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

Dans ce cas il est plus intéressant de prendre la forme $\{x_2 * x\}(t)$ car il est plus facile de déplacer un triangle qu'une exponentielle décroissante.

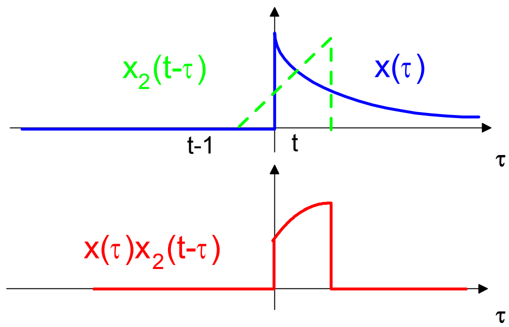
Cas 1 *t<0*

Considérons l'intervalle de $t\in[-\infty,0]$. Dans ce cas il n'y pas de recouvrement entre les deux fonctions, et la convolution est nulle, *i.e.*, $\{x_2 * x\}(t) = 0$



Cas 2 0<*t*<1

Une fois que *t* passe zéro, il y aura une recouvrement. Pour $t\in[0,1]$ le recouvrement sera juste partielle.

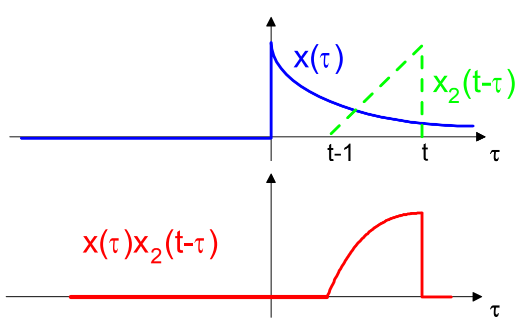


Les bornes d'intégration sont donc de zéro à *t*.

$$
\begin{aligned}
x(t)*x_2(t) &= \int_0^t (1-t+\tau)e^{-\tau}d\tau \\
&= \int_0^t (1-t)e^{-\tau}d\tau + \int_0^t \tau e^{-\tau}d\tau \\
&= (1-t)\int_0^t e^{-\tau}d\tau - \tau e^{-\tau}\Big|_0^t + \int_0^t e^{-\tau}d\tau \\
&= (t-1)e^{-\tau}\Big|_0^t - \tau e^{-\tau}\Big|_0^t - e^{-\tau}\Big|_0^t \\
&= (t-1)e^{-t} - (t-1) - te^{-t} - e^{-t} + 1 \\
&= 2 - t - 2e^{-t}
\end{aligned}
$$

Cas 3 *t>1*

Une fois que *t* passe un, il y aura une recouvrement complète.



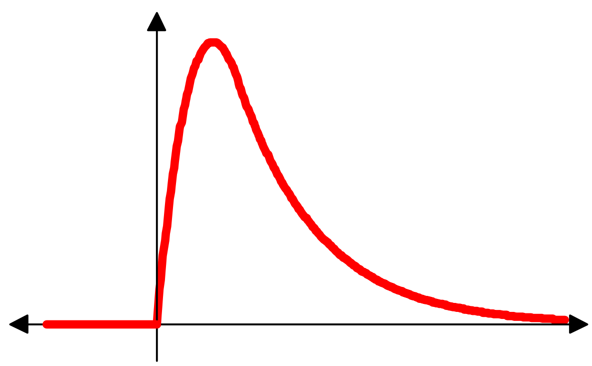
Pour $t \in [1,\infty]$ le recouvrement est complète, et les bornes d'intégration seront les limites du triangle, *i.e.*, *t*-1 jusqu'à *t*.

$$\begin{aligned}
x(t)*x_2(t) &= \int_{t-1}^{t}(1-t+\tau)e^{-\tau}d\tau \\
&= \int_{t-1}^{t}(1-t)e^{-\tau}d\tau + \int_{t-1}^{t}\tau e^{-\tau}d\tau \\
&= (1-t)\int_{t-1}^{t}e^{-\tau}d\tau - \tau e^{-\tau}\Big|_{t-1}^{t} + \int_{t-1}^{t}e^{-\tau}d\tau \\
&= (t-1)e^{-\tau}\Big|_{t-1}^{t} - \tau e^{-\tau}\Big|_{t-1}^{t} - e^{-\tau}\Big|_{t-1}^{t} \\
&= (t-1)e^{-t} - (t-1)e^{-t+1} - te^{-t} + (t-1)e^{-t+1} - e^{-t} + e^{-t+1} \\
&= e^{-t+1} - 2e^{-t} = e^{-t}(e-2)
\end{aligned}$$

Pour résumer, on a trouvé que la convolution est donnée par

$$x(t)*x_2(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 2-t-2e^{-t} & 0<t<1 \\ e^{-t}(e-2) & t>1 \end{cases}$$

Le produit de convolution donnera une courbe de la forme suivante:



a) Approche mathématique

On cherche la convolution de la fonction

$$x(t) = e^{-t}U(t)$$

et la fonction

$$x_2(t) = \begin{cases} 1-t & 0<t<1 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

On utilise la définition de la convolution

$$\begin{aligned} x(t)*x_2(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)x_2(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau}U(\tau)x_2(t-\tau)d\tau \end{aligned}$$

La fonction $x(t-\tau)$ est zéro sauf dans l'intervalle $0 < t-\tau < 1$ ou, également, $t-1 < \tau < t$. Donc la convolution sera

$$\begin{aligned} x(t)*x_2(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau}U(\tau)x_2(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{t-1}^{t} e^{-\tau}U(\tau)x_2(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{t-1}^{t} (1-t+\tau)e^{-\tau}U(\tau)d\tau \end{aligned}$$

Les limites d'intégration changeront encore à la cause de l'échelon dans l'intégrale. L'échelon est zéro quand tau est négatif. L'intervalle d'intégration, (et en conséquence tau) sera complètement négatif quand *t* est négatif. Quand *t* est entre zéro et un, une portion de l'intervalle sera négative. Quand *t* est plus grand qu'un l'intervalle sera complètement positif. Donc il faut évaluer les trois cas.

Cas 1 *t<0*

$$\begin{aligned} x(t)*x_2(t) &= \int_{t-1}^{t} (1-t+\tau)e^{-\tau}U(\tau)d\tau \\ &= \int_{t-1}^{t} (1-t+\tau)e^{-\tau}\cdot 0 \cdot d\tau = 0 \end{aligned}$$

Cas 2 0<*t<1*

$$\begin{aligned} x(t)*x_2(t) &= \int_{t-1}^{t} (1-t+\tau)e^{-\tau}U(\tau)d\tau \\ &= \int_{t-1}^{0} (1-t+\tau)e^{-\tau}U(\tau)d\tau + \int_{0}^{t} (1-t+\tau)e^{-\tau}U(\tau)d\tau \\ &= \int_{t-1}^{0} (1-t+\tau)e^{-\tau}\cdot 0 \cdot d\tau + \int_{0}^{t} (1-t+\tau)e^{-\tau}\cdot 1 \cdot d\tau \\ &= \int_{0}^{t} (1-t+\tau)e^{-\tau}d\tau \end{aligned}$$

La vrai limite inférieure de l'intégration sera zéro, parce que l'échelon sera zéro pendant l'intervalle de *t-1* à zéro. Maintenant on peut évaluer l'intégrale pour trouver la convolution pour cette région de *t.*

$$
\begin{aligned}
x(t)*x_2(t) &= \int_0^t (1-t+\tau)e^{-\tau}d\tau \\
&= \int_0^t (1-t)e^{-\tau}d\tau + \int_0^t \tau e^{-\tau}d\tau \\
&= (1-t)\int_0^t e^{-\tau}d\tau - \tau e^{-\tau}\Big|_0^t + \int_0^t e^{-\tau}d\tau \\
&= (t-1)e^{-\tau}\Big|_0^t - \tau e^{-\tau}\Big|_0^t - e^{-\tau}\Big|_0^t \\
&= (t-1)e^{-t} - (t-1) - te^{-t} - e^{-t} + 1 \\
&= 2 - t - 2e^{-t}
\end{aligned}
$$

Cas 3 *t>1*

Pour cette région de *t*, on sait que tout l'intervalle d'intégration est positif, donc l'échelon sera égal à un.

$$
\begin{aligned}
x(t)*x_2(t) &= \int_{t-1}^t (1-t+\tau)e^{-\tau}d\tau \\
&= \int_{t-1}^t (1-t)e^{-\tau}d\tau + \int_{t-1}^t \tau e^{-\tau}d\tau \\
&= (1-t)\int_{t-1}^t e^{-\tau}d\tau - \tau e^{-\tau}\Big|_{t-1}^t + \int_{t-1}^t e^{-\tau}d\tau \\
&= (t-1)e^{-\tau}\Big|_{t-1}^t - \tau e^{-\tau}\Big|_{t-1}^t - e^{-\tau}\Big|_{t-1}^t \\
&= (t-1)e^{-t} - (t-1)e^{-t+1} - te^{-t} + (t-1)e^{-t+1} - e^{-t} + e^{-t+1} \\
&= e^{-t+1} - 2e^{-t} = e^{-t}(e-2)
\end{aligned}
$$

Pour résumer, on a trouvé que la convolution est donnée par

$$
x(t)*x_2(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 2-t-2e^{-t} & 0<t<1 \\ e^{-t}(e-2) & t>1 \end{cases}
$$

b)

Pour ce problème il faut vérifier que la convolution dans le domaine du temps correspond à une multiplication dans le domaine fréquenciel. Il n'est pas difficile de trouver la transformée de Fourier de la fonction *x(t)*.

$$
x(t) \Leftrightarrow \frac{e^{-j\omega} + j\omega - 1}{(j\omega)^2}
$$

La transformée de la deuxième fonction est déjà connue

$$
x_2(t) = e^{-t}U(t) \Leftrightarrow \frac{1}{1+j\omega}
$$

Il faut montrer que le produit de ces deux transformées est égal à la transformée de la convolution. La convolution a une transformée donnée par

$$x(t) * x_2(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 2 - t - 2e^{-t} & 0 < t < 1 \\ e^{-t}(e-2) & t > 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2 - e^{-j\omega}}{j\omega} + \frac{e^{-j\omega} - 1}{(j\omega)^2} + \frac{e^{-j\omega} - 2}{1 + j\omega}$$

Avec on peu d'algèbre, c'est évident que les deux sont égaux.