2003 Mini-Test 1 : Solutions

Problème 1 (1 point sur 5)

$$1 + 4\sin 5t - 6\cos 4t$$

La fréquence fondamentale:

$$\omega_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad T_0 = 2\pi$$

Les coefficients sont calculés ainsi

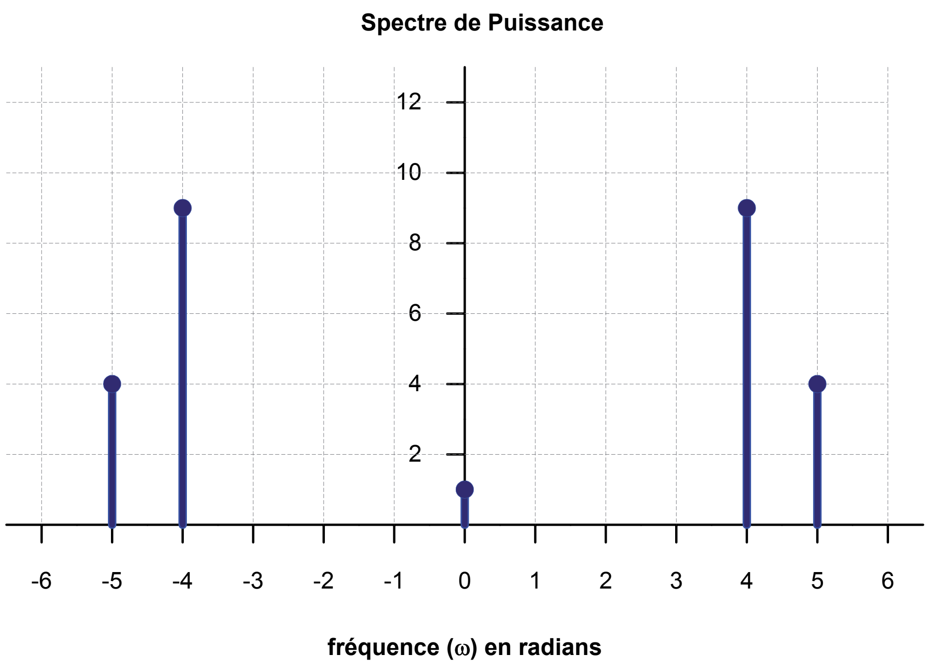
$$\begin{aligned}
&3 + 4\sin(5t) - 6\cos(4t) \\
&= 3 + \frac{4}{2j}\left(e^{j5t} - e^{-j5t}\right) - \frac{6}{2}\left(e^{j4t} + e^{-j4t}\right) \\
&= 3 - 2j\left(e^{j5t} - e^{-j5t}\right) - 3\left(e^{j4t} + e^{-j4t}\right)
\end{aligned}$$

Donc

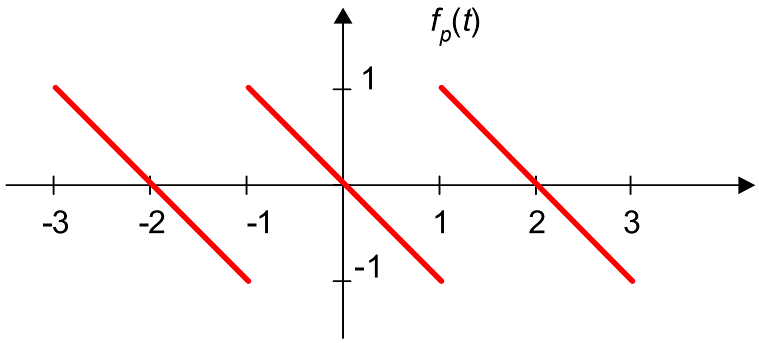
$$F(0) = 1 \quad F(4) = -3 \quad F(-4) = -3 \quad F(5) = -2j \quad F(-5) = 2j$$

Le spectre de puissance est

$$P(n) = \left|F(n)\right|^2 \quad \Rightarrow \quad P(0) = 1 \quad P(4) = 9 = P(-4) \quad P(5) = 4 = P(-5)$$



Problème 2 (1 point sur 5)



Cette fonction est réelle et impaire…

1. $f_p(t)$ est une fonction réelle, donc on sait que

   $F^*(n) \neq F(-n)$ et l'énoncé est FAUX

2. $f_p(t)$ est une fonction réelle, donc on sait que

   $|F(n)|$ est paire et l'énoncé est FAUX

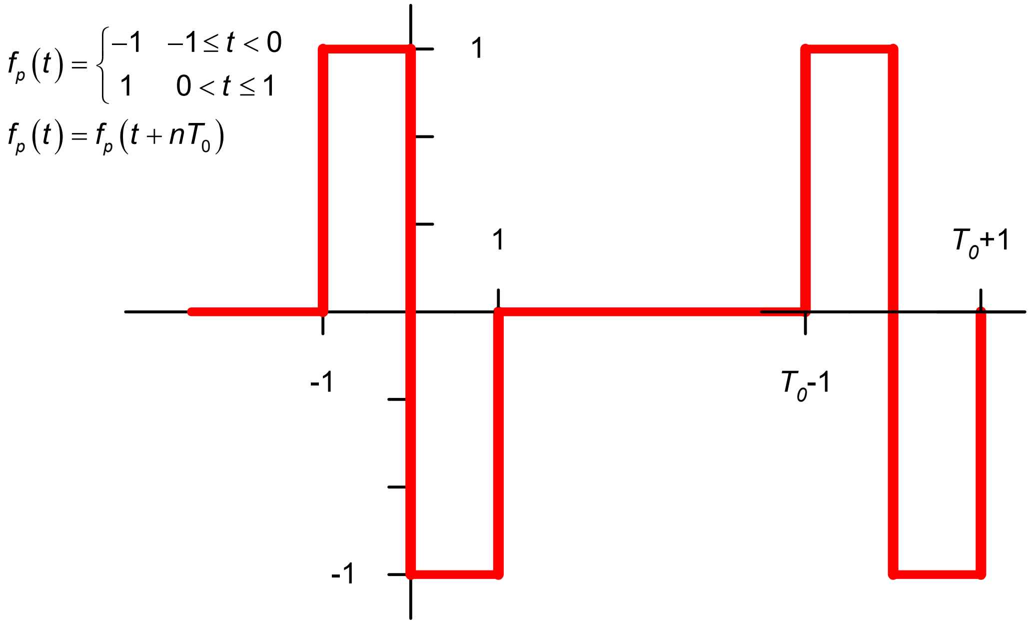
3. Arg F(n) est toujours réel peu-importe la fonction $f_p(t)$

   l'énoncé est FAUX

4. $f_p(t)$ est une fonction impaire alors F(n) est imaginaire ***pur***, donc on sait que

   $B(n) \neq 0 \quad \forall n$ et et l'énoncé est FAUX

Problème 3 (3 points sur 5)



a) ***1 point***

Les coefficients complexes de Fourier pour cette fonction périodique sont déterminés par

$$F(n) = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} f_p(t)e^{-j\omega_0 nt}dt = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f_p(t)e^{-j\omega_0 nt}dt$$

Notez: on peut utiliser n'importe quelle période pour l'intégration.

On commence avec *n=0*.

$$F(0) = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f_p(t)dt = \frac{1}{T_0}\int_{-1}^{0} dt - \frac{1}{T_0}\int_0^1 dt = 0$$

Pour les autres valeurs de *n*:

$$\begin{aligned}
F(n) &= \frac{1}{T_0}\int_{-1}^{0} e^{-jn\omega_0 t}dt - \frac{1}{T_0}\int_0^1 e^{-jn\omega_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\left[\frac{e^{-jn\omega_0 t}}{-jn\omega_0}\right]_{-1}^{0} - \frac{1}{T_0}\left[\frac{e^{-jn\omega_0 t}}{-jn\omega_0}\right]_0^1 \\
&= \frac{-1}{T_0 jn\omega_0}\left(1 - e^{jn\omega_0}\right) - \frac{-1}{T_0 jn\omega_0}\left(e^{-jn\omega_0} - 1\right) \\
&= \frac{-1}{T_0 jn\omega_0}\left(2 - e^{jn\omega_0} - e^{-jn\omega_0}\right) = \frac{-1}{T_0 jn\omega_0}\left(2 - 2\cos n\omega_0\right) \\
&= \frac{2j}{T_0 n\omega_0}\left(1 - \cos n\omega_0\right)
\end{aligned}$$

Nous utilisons la relation $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ pour la dernière simplification

$$F(n) = \frac{2j}{T_0 n\omega_0} 2\sin^2\frac{n\omega_0}{2} = \frac{4j}{T_0 n \, 2\pi/T_0}\sin^2\frac{n\omega_0}{2} = \frac{2j}{n\pi}\sin^2\frac{n\omega_0}{2}$$

b) Pour T_0=2 les coefficients sont

$$F(n) = \frac{2j}{n\pi}\sin^2\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 & n \text{ pair} \\ \dfrac{2j}{n\pi} & n \text{ impair} \end{cases}$$

Pour T_0=4 les coefficients sont

$$F(n) = \frac{2j}{n\pi}\sin^2\frac{n\pi}{4} = \begin{cases} \dfrac{2j}{n\pi} & n/2 \text{ entier et impair} \\ \dfrac{j}{n\pi} & n \text{ impair} \end{cases}$$

Il y a plus des lignes spectrales plus que le période est grand. En plus, elles sont plus rapprochées parce que ω_0 est plus petit.

Pour To=4, pour le cas n/2 entier et pair, F(n)=0.