MAT-2930 TEST PRÉPARATOIRE AUTOMNE 2019

IMPORTANT
Tous les exercices qui ne sont pas faits en Matlab doivent être appuyés par des **calculs ou par une justification** en utilisant les propriétés et/ou théorèmes, sauf s'il est spécifié le contraire.
Ce test préparatoire est plus long qu'un véritable examen. Il a pour but de couvrir une partie substantielle de la matière et de vous donner une idée du type de problèmes pouvant être demandés.
Ce test de couvre pas la totalité de la matière :
1) Si par exemple une question est posée sur une méthode itérative, l'examen final pourrait comprendre une question sur une autre méthode itérative, ou la même.
2) Si un exercice est à faire en Matlab, il pourrait être demandé de faire un exercice semblable à la main à l'examen final, et vice versa.
3) Si une question teste une propriété particulière (ex. : inversion des colonnes d'une matrice), une question semblable pourrait nécessiter une autre propriété semblable (ex. : inversion des lignes d'une matrice, multiplication d'une ligne d'une matrice par un scalaire, etc.).
4) Les TP4 et TP5 font aussi partie de la matière.
5) Les exercices recommandés dans le livre font aussi partie de la matière.
Il est recommandé de commencer dès maintenant la rédaction de votre feuille aide-mémoire.

1. QUESTIONS DE COMPRÉHENSION

   (a) Si le déterminant d'une matrice est égal à 4, que sera le déterminant d'une nouvelle matrice obtenue en interchangeant 2 lignes de la première?

   (b) À part pour une matrice diagonale, pour quel autre type de matrice carrée le déterminant est égal aux produit des éléments sur la diagonale?

   (c) Soit une matrice A dont le déterminant est 4. Si la matrice B est obtenue en multipliant une colonne de la matrice A par 3, quel sera le déterminant de la matrice B?

   (d) Si le déterminant de la matrice A est égal à 4, quel sera le déterminant de l'inverse de A?

   (e) Si le déterminant de la matrice A est égal à 4, quel sera le déterminant d'une nouvelle matrice obtenue en ajoutant à la ligne 3 le double de la ligne 1?

   (f) Quelle méthode itérative permet, lorsqu'elle est utilisée de façon répétée, d'obtenir tous les valeurs propres d'une matrice si au départ on a la valeur propre dominante?

   (g) Quelle méthode permet d'obtenir une base orthogonale de tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$?

   (h) Qui suis-je? Je suis une matrice toujours diagonalisable.

2. Calculez le déterminant de la matrice A :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Calculez le déterminant de la matrice A (aucune justification nécessaire) :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 4 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & 3 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

4. Quelles sont les valeurs propres de la matrice précédente (aucune justification nécessaire)?
5. Déterminez le déterminant de la matrice A (justifiez) :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 4 & 2 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 3 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 8 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 7 & 2 & 8 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

6. Résolvez le système linéaire suivant avec la méthode de Cramer :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

7. Calculez les déterminants de A, A^2 et A^3 :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

8. Aires, volumes et transformations :
   (a) Calculez le volume du parallélépipède délimité par les 8 sommets suivants : (1,1,0), (3,1,0), (4,2,0), (2,2,0), (1,1,1), (3,1,1), (4,2,1) et (2,2,1).
   (b) Si on applique la transformation suivante au solide en a), quel sera son nouveau volume (justifiez)?

$$T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

9. Pour la matrice A, calculez le déterminant, la matrice des cofacteurs et l'inverse de A :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

10. Pour la matrice A, donnez :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

   (a) Le polynôme (l'équation) caractéristique.
   (b) Les valeurs propres.

11. La matrice A a pour valeur propre $\lambda = 3$. Calculez une base du sous-espace propre associé à λ :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

12. Est-ce que les matrice suivantes sont diagonalisables? Justifiez.

   (a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$$

   (b)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

13. Diagonalisez la matrice A dont les valeurs propres sont $\lambda = 2$ et $\lambda = 5$.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

14. Pour la matrice A, calculez les vecteurs propres et calculez A^8 :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

15. Méthode de la puissance décalée. Vous devez calculer la 2ème valeur propre de la matrice A. Faites 2 itérations à la main et utilisez le résultat obtenu pour calculer λ_2. On fournit la valeur de λ_1 et $\mathbf{x_0}$.

$$A = \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ 8 & -2 \end{bmatrix}$$

λ_1 = -10

$$\mathbf{x_0} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

16. À l'aide de la technique des disques de Gershgorin, déterminez le plus précisément possible l'intervalle où se trouve chaque valeur propre de la matrice A.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/6 & 6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1/8 & 8 \end{bmatrix}$$

17. Déterminez la solution au sens des moindres carrés de l'équation Ax=b en utilisant la factorisation A = QR indiquée.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

18. Calculez les valeurs singulières des matrices suivantes :

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

(b)

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 2 \\ 0 & \sqrt{(3)} \end{bmatrix}$$

19. Déterminez une décomposition en valeurs singulières de la matrice A :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

20. **MATLAB** : implémentez la méthode de Gram-Schmidt pour déterminer une base orthogonale de A, et ensuite effectuez une factorisation QR (**sans la commande qr()**). Votre programme doit fonctionner pour n'importe quelle dimension de matrice. Ainsi, une boucle sera nécessaire. La commande size() permettra de déterminer le nombre de boucles nécessaire. Stockez les vecteurs orthogonaux obtenus dans une matrice V où V = [v1 v2 ... vn]. Construisez la matrice Q à partir de la matrice V. Construisez la matrice R à partir des matrices Q et A.

$$A = \begin{bmatrix} -10 & 13 & 7 & -11 \\ 2 & 1 & -5 & 3 \\ -6 & 3 & 13 & -3 \\ 16 & -16 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & -5 & -7 \end{bmatrix}$$

21. **MATLAB** (classement) : les noeuds du graphe suivant représentent des intersections dans le quartier d'une ville.

Il y a des sens uniques à une seule voie, des rues à une voie dans chaque direction et un boulevard à deux voies dans chaque direction : **il s'agit donc d'un graphe orienté.**

Construisez la matrice d'adjacence C en assignant la valeur de 1 à chaque voie. Affichez le vecteur propre approprié pour le classement. Classez les intersections en ordre décroissant de connectivité, de la plus connectée à la moins connectée.

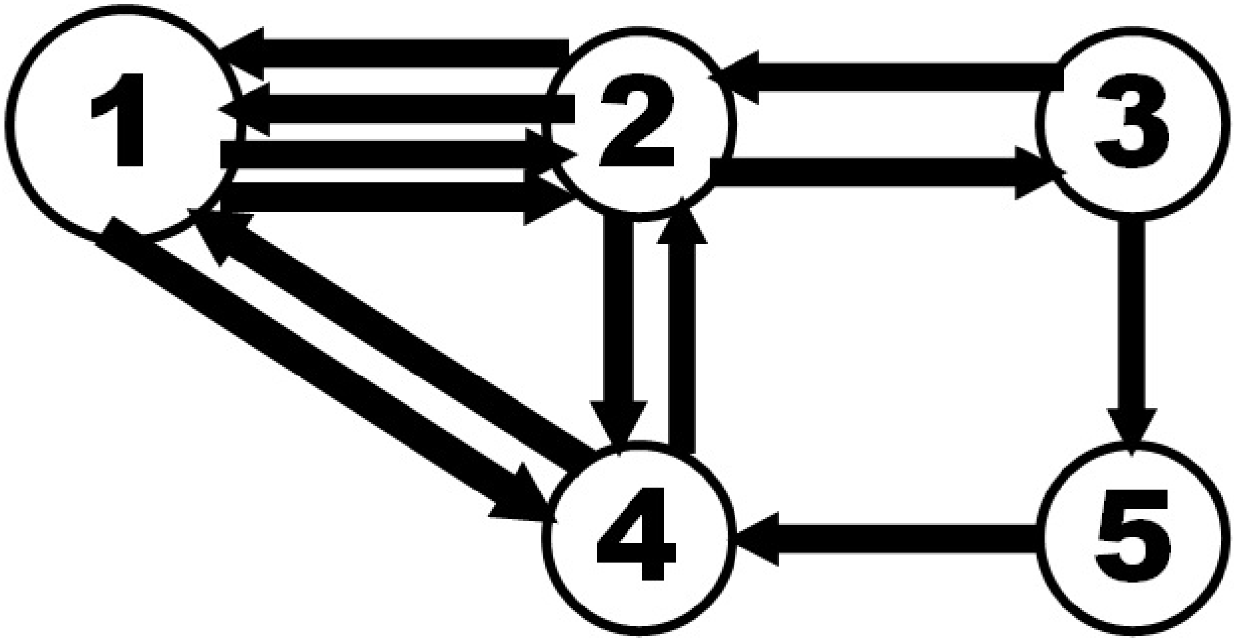

Figure 1: Graphe orienté

22. **MATLAB** : implémentez la méthode des moindres carrés pour calculer les coefficients du polynôme de degré 2 qui approxime le mieux les données suivantes : (-2,0), (-1,-11), (0,-10), (1,-9) et (2,8) et calculez l'erreur quadratique moyenne de l'approximation. **La commande polyfit() est interdite.**

23. **MATLAB** : effectuez la compression de l'image générée par le fichier SuperMario.m en utilisant la décomposition en valeurs singulières en ne gardant que les 5 valeurs singulières les plus grandes. Vous devez utilisez la commande svd() (**la commande svds() est interdite.**). À partir des résultats de la commande svd(), vous devez ainsi générer des nouvelles matrices U2, S2,V2 pour ensuite construire une image compressée A2 que vous devez afficher avec la commande imshow(A2/255, 'InitialMagnification', 'fit').

```
% SuperMario.m

Imario = 255*ones(16,12);

% Casquette
Imario(1, 4:8) = 100;
Imario(2, 3:11) = 100;

% Tête : peau
Imario(3:7, 3:11) = 150;
Imario(5, 12) = 150;
Imario(3, 10:11) = 255; % morceau de l'arrière-plan blanc
Imario(7, 11) = 255; % morceau de l'arrière-plan blanc

% Oeil
Imario(3:4, 8) = 80;

% Moustache
Imario(5, 9) = 80;
Imario(6, 8:11) = 80;

% Cheveux
Imario(3, 3:5) = 80;
Imario(4:6, 2) = 80;
Imario(6, 3) = 80;
Imario(4:5, 4) = 80;
Imario(5, 5) = 80;

Imario(8, 3:8) = 80;
Imario(9, 2:11) = 80;
Imario(10, 1:12) = 80;
Imario(11, 3:10) = 80;

Imario(15:16, 2:4) = 80;
Imario(16, 1) = 80;
Imario(15:16, 9:11) = 80;
Imario(16, 12) = 80;

Imario(13:14, 3:5) = 100;
Imario(11:13, 4:9) = 100;
Imario(13:14, 8:10) = 100;
Imario(10, 5:8) = 100;
Imario(8:9, 5) = 100;


Imario(11:13, 5) = 100;
Imario(9, 8) = 100;

Imario(11:13, 1:2) = 150;
Imario(12, 3) = 150;
```

```
Imario(11:13, 11:12) = 150;
Imario(12, 10) = 150;

% Boutons de salopette
Imario(11, 5) = 150;
Imario(11, 8) = 150;

A = Imario;

figure(2);
imshow(A/255, 'InitialMagnification', 'fit')
pause(3)
close
```