MAT-2930 – Algèbre linéaire appliquée
Département de génie électrique et de génie informatique
Examen 1 (Pondération : 35%)
15 octobre 2020, 13h30 à 15h35
Francis Gagnon

Consignes

1. Les réponses aux questions de la section MANUEL doivent être faites sur des feuilles vierges (pages vierges, pour les tablettes). **Zéro point sera attribué aux réponses sans justification ou développement mathématique.**
2. Les réponses aux questions de la section MATLAB doivent être faites dans des scripts. Les affichages demandés doivent tous être affichés dans la fenêtre de commandes.

Votre soumission

1. Un fichier `examen1.pdf` contenant la réponse aux questions 1 et 2
2. Deux scripts matlab : `question3.m`, `question4.m`

MANUEL

1. (16 points) Vrai ou faux ? Justifier votre réponse.
   (a) (4 points) La matrice P de la factorisation $P^\intercal LU$ permet de réduire l'erreur d'arrondi sur des coefficients d'un ordre de grandeur différent.
   (b) (4 points) Pour a_1, b_1, c_1 et c_2 sont des réels positifs, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ et $\mathbf{c}$, des vecteurs tels que $\mathbf{a} = [a_1, 0]$, $\mathbf{b} = [0, b_2]$ et $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$, alors $\mathbf{c} = [-c_1, -c_2]$.
   (c) (4 points) Le système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ peut avoir une solution unique pour une matrice A rectangulaire $m \times n$ avec $m \neq n$.
   (d) (4 points) Trois vecteurs dans $\mathbb{R}^2$ peuvent être linéairement indépendants.
2. (28 points) Soit la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -2 & -10 & 3 \\ 4 & 13 & 1 \end{bmatrix}$$

   (a) (10 points) Effectuer une décomposition $P^\intercal LU$ de la matrice A.
   (b) (4 points) Avec L et U des matrices triangulaires inférieure et supérieure respectivement, est-il possible d'écrire $A = LU$? Justifier votre réponse.
   (c) (10 points) En utilisant uniquement les matrices P, L et U dans vos calculs, c'est-à-dire sans utiliser A, déterminer la solution du système $A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} b_1 & -1 & 4 \end{bmatrix}^\intercal$ sous la forme vectorielle $\mathbf{x} = \mathbf{u} + b_1\mathbf{v}$.
   (d) (4 points) Pour quelle(s) valeur(s) de b_1 dans $\mathbb{R}$ le système en (c) est consistant ?

MATLAB

3. (26 points) Soit le système :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 & -3 & -5 \\ 7 & 3 & -1 & 6 & -5 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}}_{A} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

   (a) (6 points) Déterminer et afficher la forme échelon réduit de la matrice augmentée du système.

   (b) (6 points) Déterminer et afficher la solution du système sous la forme paramétrique vectorielle.

   (c) (4 points) Déterminer et afficher une base pour le sous-espace Col A.

   (d) (4 points) Déterminer et afficher une base pour le sous-espace Nul A.

   (e) (6 points) En utilisant la base calculée en (d), déterminer si le vecteur $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$ appartient au sous-espace Nul A sans faire de produit matriciel. Afficher un commentaire dans la fenêtre de commandes qui analyse vos résultats.

4. (30 points) On estime qu'il y a actuellement 450 bélugas femelles dans l'estuaire du Saint-Laurent [1]. Parmi ces individus, le 5/9 est non mature (0 à 10 ans), le 3/9 est mature juvénile (11 à 20 ans) et le reste est mature adulte (20 à 30 ans). On suppose que leur âge maximal est 30 ans. Les juvéniles produisent en moyenne deux femelles par décennie, tandis que les adultes en produisent seulement une. Les bélugas non matures ne se reproduisent pas. Étant donné le haut taux de mortalité dans les nouveau-nées, le taux de survie des non matures est de seulement 17 %. Celui des matures juvéniles est de 94 %.

   (a) (5 points) Afficher la matrice L du modèle de Leslie.

   (b) (10 points) Tracer l'évolution des trois classes d'âge jusqu'en 2100 inclusivement. Ajouter un titre au graphique, aux axes, ainsi qu'une légende.

   (c) (5 points) Dans une nouvelle figure, tracer l'évolution de la population totale jusqu'en 2100 inclusivement. Ajouter un titre au graphique et aux axes.

   (d) (5 points) Selon cette matrice de Leslie, calculer et afficher la valeur théorique de la population totale à très long terme.

   (e) (5 points) À la lumière de ces résultats, la population est-elle en santé et pourquoi ? Afficher vos réponses dans la fenêtre de commandes.

1. Les données du problème sont partiellement fictives pour simplifier.