UNIVERSITÉ LAVAL

MAT-1910 : Mathématiques de l'ingénieur II
Examen 2 $\left(33\,\frac{1}{3}\%\right)$
Vendredi le 24 mars 2017 de 18h30 à 20h20

Section A : Robert Guénette
Section B : Hugo Chapdelaine
Section C : Alexandre Girouard

Identification

PRÉNOM : ______________________ NOM : ______________________

N$^{\text{o}}$ DE DOSSIER ______________________ SECTION : ______________________

Résultats

Question:	1	2	3	4	5	Total
Points:	20	20	20	20	20	100
Note :						

Directives

— Veuillez désactiver la sonnerie de vos appareils électroniques et les ranger hors de portée.
— Vous avez droit à un aide-mémoire manuscrit d'une feuille 8"$\frac{1}{2}$ par 11" recto-verso.
— **Sauf avis contraire**, vous devez rédiger des solutions complètes et justifiées.
— **Sauf avis contraire**, vous devez donner des réponses exactes, et par conséquent vous ne pouvez pas approximer les quantités qui interviennent dans vos calculs.
— Vérifiez que le questionnaire comporte 5 questions réparties sur 11 pages.
— Vous avez droit à une calculatrice autorisée par la faculté des sciences et génie.

Évaluation des qualités

Qualités
1.1.1 Compréhension des notions mathématiques : questions 1 et 2
1.1.2 Capacité à résoudre des problèmes mathématiques : questions 3 et 4
1.1.3 Capacité à interpréter et à utiliser la terminologie appropriée : question 5

Question 1 (20 points)

Un quadrilatère R a pour sommets les points $A = (1, 0), B = (2, 0), C = (1, 1)$ et $D = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

(6) (a) Donner les équations des droites contenant les segments qui forment la frontière du trapèze.

(4) (b) Si on fait le changement de variables $u = x - y$ et $v = x + y$, évaluer le jacobien de la transformation $x = x(u, v), y = y(u, v)$.

(10) (c) Utiliser obligatoirement ce changement de variables pour calculer l'intégrale

$$\iint_R (x+y)^2 \ \ e^{x^2-y^2} \, dx \, dy.$$

Question 2 (20 points)

Considérons la courbe C définie dans l'espace $\mathbb{R}^3$ et obtenue par l'intersection du cylindre $x^2 + y^2 = 2$ et de la surface $z = x^2 - y^2$.

(4) (a) Paramétriser la courbe C et préciser l'intervalle de paramétrisation.

(6) (b) Donner l'équation paramétrique de la droite tangente à C au point $(1, 1, 0)$.

(4) (c) Déterminer tous les points (x_0, y_0, z_0) de la courbe C tels que la droite tangente à C en (x_0, y_0, z_0) soit perpendiculaire à l'axe des z.

(6) (d) Si C représente un fil métallique dont la densité est donnée par $\rho(x, y) = \sqrt{2 + 16x^2\, y^2}$, calculer la masse de C.
On utilisera l'identité $\sin 2t = 2 \sin t\, \cos t$.

Question 3 (20 points)

On considère un champ de force posé dans l'espace et défini par

$$\vec{F}(x,y,z) = \big(3x^2 - 3y^2 - cy, \;\; -6xy + cx, \;\; e^{\sin(z)}\cos(z)\big)$$

où $c \geq 0$ est un paramètre.

(4) (a) Prouvez que ce champ est conservatif (potentiel) lorsque $c = 0$ mais pas lorsque $c > 0$.

(6) (b) Pour $c = 0$, trouvez une fonction potentielle $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ telle que $\vec{F} = \vec{\nabla} f$.

(4) (c) Supposez que $c = 0$. Étant donnée une courbe C qui est paramétrisée par l'application $\vec{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$, prouvez que le travail effectué par $\vec{F}$ en parcourant C est

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a)).$$

(6) (d) Supposez que $c = 0$. Pour la courbe $C \subset \mathbb{R}^3$ qui est obtenue par l'intersection du cylindre $x^2 + y^2 = 2017$ et de la surface $z = x^2 - y^2$, calculez le travail

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Question 4 (20 points)

Dans le plan, on considère le champ vectoriel

$$\vec{F} = \left(-y + \cos \pi x, \;\; 3x + 4y^3\right).$$

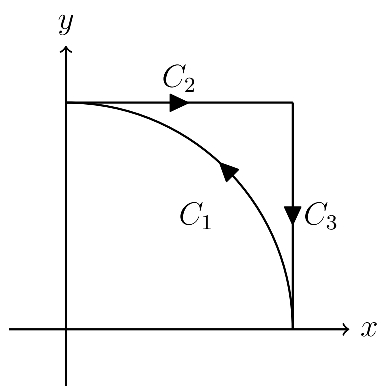
On définit les courbes suivantes :

- C_1 est l'arc du cercle unité qui relie le point $(1,0)$ au point $(0,1)$ dans le sens positif (anti-horaire),
- C_2 est le segment de droite qui va du point $(0,1)$ au point $(1,1)$,
- C_3 est le segment de droite qui va du point $(1,1)$ au point $(1,0)$,
- C est la courbe fermée qui est composée des courbes C_1, C_2 et C_3 et parcourue dans le même sens.

(6) (a) Calculer directement le travail du champ vectoriel $\vec{F}$ le long de la courbe C_2.

(8) (b) En utilisant le théorème de Green, calculer le travail du champ $\vec{F}$ le long de la courbe C.

(6) (c) En déduire le travail du champ $\vec{F}$ le long de la courbe C_1.



Question 5 (20 points)
Pour les questions 1 à 3, encercler la bonne réponse.

1. (5 points) Lequel des champs vectoriels suivants est conservatif sur $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$:
   (a) $\vec{F} = \left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$,
   (b) $\vec{F} = \left(\dfrac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$,
   (c) $\vec{F} = (y^2, x)$,
   (d) $\vec{F} = \left(\dfrac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$.
   (e) aucune de ces réponses.

2. (5 points) Déterminer lequel des énoncés suivants est faux :
   (a) Soit $C \subseteq \mathbb{R}^3$ une courbe orientée et $\vec{F}$ un champ vectoriel dans $\mathbb{R}^3$. On aura toujours que $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{-C} \vec{F} \cdot d\vec{r}$.
   (b) Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction. Alors $\vec{\nabla} f$ est un champ vectoriel conservatif.
   (c) La somme de deux champs vectoriels conservatifs est toujours conservatif.
   (d) Soit $\vec{F}(x,y) = (P(x,y),\ Q(x,y)$ un champ vectoriel défini sur $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tel que $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$. Alors $\vec{F}$ est nécessairement conservatif sur D.

3. (5 points) On considère la courbe plane C donnée en coordonnées polaires par $r(\theta) = \sin(\theta)$ pour $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. L'intégrale suivante $\int_C ds$ est égale à
   (a) π,
   (b) 2,
   (c) $\frac{\pi}{2}$,
   (d) 2π,
   (e) 3π.

4. (5 points) On considère les champs vectoriels suivants :

$$\vec{F_1} = (-y, x), \quad \vec{F_2} = (x, y), \quad \vec{F_3} = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right) \quad \text{et} \quad \vec{F_4} = (x-1, x+1).$$

Écrire le champ vectoriel approprié sous chacune des images ci-dessous :