Mat 10364, Mathématiques de l'ingénieur II : examen II, 5/04/02

- Durée de l'examen : deux heures.
- Documentation permise : deux feuilles-résumé.
- Vous êtes priés de vous identifier (nom et numéro matricule) sur le cahier et de placer votre carte d'étudiant sur la table à côté de vous.
- **Chaque réponse devra être accompagnée des calculs détaillés. Dans le cas contraire, elle sera considérée comme nulle.**

---

n° 1 (20pts) Pour chacun des trois champs suivants, dire s'il est potentiel (=conservatif) et, le cas échéant, calculer le potentiel associé.

(a) $\vec{v}_1 = (zy - y, xz + y, xy + 1)$.

(b) $\vec{v}_2 = (zy - y, xz + x, xy + 1)$

(c) $\vec{v}_3 = (zy - y, xz - x, xy + 1)$.

n° 2 (20 pts) On note C la courbe paramétrée

$$\vec{r}(t) = (\cos t, \sqrt{3}\sin t, \sqrt{2}\cos t),\ \ t \in [0, \pi].$$

C coupe le plan P d'équation $\sqrt{3}\,x - y = 0$ en un point $\vec{r}_0$.

(a) Montrer que

$$\vec{r}_0 = \vec{r}(\frac{\pi}{4}).$$

(b) Déterminer (à π près) l'angle que fait la tangente à C avec la normale à P au point $\vec{r}_0$.

n° 3 (20 pts) Une éolienne expérimentale prend la forme indiquée à la figure 1.

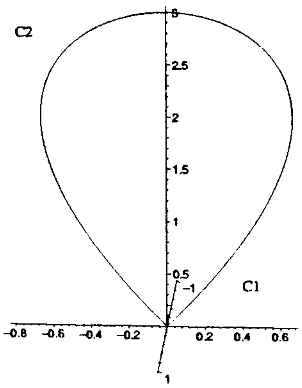

figure 1.

La portion C_1 de l'éolienne a pour équation

$$\vec{r}(t) = (0, \sqrt{3}(t - t^3), 3(1 - t^2)),\ t \in [0, 1],$$

alors que la portion C_2 est le symétrique de C_1 par rapport à Oz.

(a) Montrer que l'élément de longueur sur la courbe C_1 s'écrit en termes du paramètre t comme suit

$$ds = \sqrt{3}(1 + 3\,t^2)\,dt.$$

Note : On rappelle que $a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2$.

(b) Calculer la composante $\bar{z}$ du centre de gravité sous l'hypothèse que le matériau est homogène.

n° 4 (20 pts) On note $\vec{v}$ le champ défini par

$$\vec{v} = (x - y, ye^{z-1}, z - 1)$$

et par C la courbe fermée constituée des portions C_1 et C_2 définies par

$$C_1: \quad \vec{r}_1(t) = (-\cos t, 1, 1 + \sin t), \quad t \in [0, \pi]$$

$$C_2: \quad \vec{r}_2(s) = (s, 2 - s^2, 1), \quad s \in [-1, 1]$$

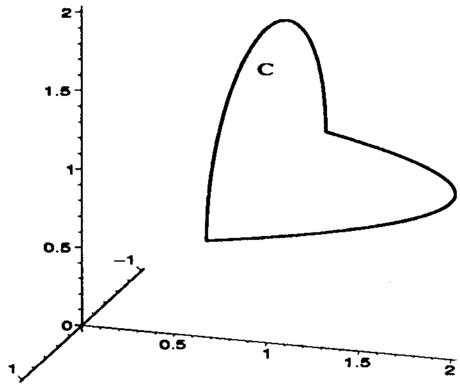

figure 2.

(a) Calculer le travail de $\vec{v}$ le long de C.

(b) Le champ $\vec{v}$ est-il conservatif? Justifier.

n° 5 (20pts) On considère la surface S paramétrée

$$\vec{r}(u,v) = (v\cos u, v\sin u, v^2), \quad (u,v) \in [0, 2\pi] \times [0, 2].$$

(a) Trouver un vecteur normal à S au point $\vec{r}(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2})$.

(b) Trouver une représentation paramétrique du plan tangent en ce point.

(c) Montrer que, sur S, l'élément d'aire s'écrit

$$dA = v\sqrt{4v^2+1}\,du\,dv.$$

(d) Calculer l'aire de de S.