94

xcrs

Section: C

MAT-10363 Examen partiel du 9 novembre 2007

1. (20 points) On considère l'équation différentielle linéaire inhomogène

$$y'' + 2y' - 3y = F(x). \quad (1)$$

(a) Quelle est l'équation caractéristique de l'équation homogène associée à (1)?

Independance: $\frac{y_2}{y_1} \frac{e^x}{e^{-3x}} = e^{-4x} \neq$ constant donc y_2 et y_1 sont linéairement indépendants

$y'' + 2y' - 3y = 0$

$\lambda^2 + 2y - 3 = 0$

$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1-3)}}{2}$

$\lambda_1 = \frac{-2+4}{2} = 1$

$\lambda_2 = \frac{-2-4}{2} = -3$

$y_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-3x}$

(b) Pour chaque valeur $F(x)$ du membre de droite, indiquez dans le tableau suivant sous quelle forme il faudrait chercher une solution particulière si on utilise la méthode des coefficients indéterminés. **On ne vous demande pas de calculer explicitement la solution** y_p, seulement de donner sa forme (par exemple $Ax^2 + Bx + C$).

$\boxed{\text{Racine} = 1 \text{ ou } -3}$

$\beta = 3$ pi n'est pas une racine

$\alpha = 1$, $\lambda = 1$

0 n'est pas une racine

$F(x)$	$y_p(x)$
$\cos 3x$ $s=0$	$y_p = x^s(B\cos\beta x + C\sin\beta x) = B\cos 3x + C\sin 3x$
e^x $s=1$	$y_p = x^s B e^{\alpha x} = xBe^x$
$x - 1$ $s=0$	$y_p = x^s Q(x) = Ax + B$

15

Question 1: 20 /20

2. (20 points) Déterminer la solution de l'équation différentielle

$$xy'' + 2y' = 0$$

qui satisfait les conditions $y(1) = 1$ et $y'(1) = 2$.

$$y'' + \frac{2}{x} y' = 0$$

Équation homogène:

$u_h(x) = c\,e^{\int -p(x)\,dx}$

$u_h(x) = C\,e^{\int -\frac{2}{x}\,dx}$

$u_h(x) = C\,e^{-2\ln x}$

$u_h(x) = C\,e^{\ln \frac{1}{x^2}}$

$u_h(x) = \frac{C}{x^2}$

posons $u = y'$

$u' = y''$

$u' + \frac{2}{x} u = 0$

$\frac{2}{x} \to p(x)$

$\to u = y' \to y'(x) = \frac{C}{x^2}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{C}{x^2}$

$\int dy = \int \frac{C\,dx}{x^2} + k$

$y(x) = -\frac{C}{x} + k$

Conditions:

I $y(x) = -\frac{C}{x} + k$

$1 = -\frac{C}{1} + k$

$C = k + 1$

II $y'(x) = \frac{C}{x^2}$

$2 = \frac{C}{1^2}$

$2 = C = k$

3

Donc $y_h(x) = -\frac{2}{x} + 2$ 3

Question 2: 14/20

3. (40 points) Une cuve contient initialement 100 litres d'eau pure. Au temps $t = 0$, une solution d'eau qui contient un contaminant à une concentration de $1\text{g}/\ell$ commence à s'infiltrer dans la cuve à une vitesse de $1\ell/\text{min}$. Au même moment, on commence à vider le réservoir à une vitesse de $3\ell/\text{min}$.

(a) Déterminer le volume de solution dans la cuve au temps t (mesuré en minutes).

$V(t) = 100 - 2t$ ✓ 5

(b) Si $Q(t)$ désigne la quantité (en grammes) de contaminant présent dans la cuve au temps t, et si on fait l'hypothèse que la solution est bien mélangée en tout temps, expliquer brièvement pourquoi $Q(t)$ obéit à l'équation différentielle

$$Q'(t) + \frac{3}{100-2t}Q(t) = 1.$$

$\frac{dQ}{dt}$ = Quantité de matière entrant par unité de temps − quantité de matière sortant par unité de temps

$\frac{dQ}{dt} = (M_{\text{entrant}} \times \text{concentration}_1) - (M_{\text{sortant}} \times \text{concentration}_2)$

$$\frac{dQ}{dt} = \left(\frac{1\ell}{\text{min}} \cdot \frac{1\text{g}}{\ell}\right) - \left(\frac{3\ell}{\text{min}} \cdot \frac{Q}{V}\right) \quad \text{où } V = 100-2t$$

$$\frac{dQ}{dt} = 1 - \frac{3Q}{100-2t}$$

10

$$Q'(t) + \frac{3Q(t)}{100-2t} = 1$$ ✓

(c) Sachant par (b) que $Q(t)$ est solution de l'équation différentielle

$$Q'(t) + \frac{3}{100-2t}Q(t) = 1,$$

déterminer $Q(t)$.

$$p(t) = \frac{3}{100-2t} \qquad q(t) = 1$$

$$Q(t) = Q_h + Q_p$$

$$Q(t) = Ce^{\int -p(t)\,dt} + e^{\int -p(t)\,dt}\int e^{\int p(t)\,dt}\cdot q(t)\,dt$$

$$Q(t) = Ce^{-\int \frac{3}{100-2t}dt} + e^{-\int \frac{3}{100-2t}dt}\int e^{\int \frac{3}{100-2t}dt}\cdot dt$$

$\begin{cases} \text{posons } u = 100-2t \\ du = -2\,dt \end{cases}$

$$Q(t) = Ce^{\frac{3}{2}\int\frac{du}{u}} + e^{\frac{3}{2}\int\frac{du}{u}}\int e^{-\frac{3}{2}\int\frac{du}{u}}\cdot dt$$

$$Q(t) = Ce^{\frac{3}{2}\ln|u|} + e^{\frac{3}{2}\ln|u|}\int e^{-\frac{3}{2}\ln|u|}\,dt$$

$$Q(t) = Ce^{\ln\sqrt{(100-2t)^3}} + e^{\ln\sqrt{(100-2t)^3}}\int e^{\ln(100-2t)^{-\frac{3}{2}}}dt$$

$$Q(t) = C\sqrt{(100-2t)^3} + \sqrt{(100-2t)^3}\int(100-2t)^{-3/2}\,dt$$

$\begin{cases} \text{posons } u = 100-2t \\ \text{alors } du = -2\,dt \end{cases}$

$$Q(t) = C\sqrt{(100-2t)^3} + \sqrt{(100-2t)^3}\left(-\frac{1}{2}\int(u)^{-3/2}\,du\right)$$

$$Q(t) = C\sqrt{(100-2t)^3} + \sqrt{(100-2t)^3}\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{u^{-1/2}}{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$Q(t) = C\sqrt{(100-2t)^3} + \sqrt{(100-2t)^3}\cdot(100-2t)^{-1/2}$$

$$Q(t) = C(100-2t)^{3/2} + (100-2t)$$

(c) (suite...) À $t=0$ $\quad Q(t)=0$

$$0 = C(100-0)^{3/2} + 100-0$$

$$-100 = C\,1000$$

$$-0{,}1 = C$$

$$Q(t) = -0{,}1\,(100-2t)^{3/2} + 100-2t \quad \checkmark \qquad 20$$

Vérification: $Q'(t) + \frac{3}{100-2t} Q(t) = 1$

$$0{,}3(100-2t)^{1/2}-2 + \frac{3}{100-2t}\left[-0{,}1(100-2t)^{3/2} + 100-2t\right] = 1 \quad \checkmark \text{ ok}$$

$$0{,}3(100-2t)^{1/2} - 2 - 0{,}3\,\frac{(100-2t)^{3/2}}{(100-2t)} + 3\,\frac{100-2t}{100-2t}$$

$$-2+3=1 \checkmark$$

(d) A quel moment la solution dans la cuve atteindra-t-elle une concentration de 0.2g/ℓ de contaminant?

$$Q(t) = -0{,}1 \cdot \tfrac{3}{2}\,(100-2t)^{1/2}\cdot(-2) + 0 - 2$$

$$Q'(t) = +0{,}3\,(100-2t)^{1/2} - 2$$

d) $\frac{Q(t)}{V(t)} = 0{,}2\,g/\ell$

$$\frac{-0{,}1(100-2t)^{3/2} + 100-2t}{100-2t} = 0{,}2$$

$$-0{,}1(100-2t)^{1/2} + 1 = 0{,}2$$

$$(100-2t)^{1/2} = 8$$

$$100-2t = 8^2$$

$$t = \frac{100-8^2}{2}$$

$$t = 18$$

$\boxed{t = 18\text{ minutes}}$ ✓

Question 3: 40/40

4. (20 points) Le déplacement $x(t)$ d'une masse suspendue à un ressort est régi par l'équation différentielle

$$3x'' + kx' + 12x = 0 \qquad (2)$$

où $k \geq 0$ est une constante.

$\frac{y_2}{y_1} = \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \tan 2x \neq$ constant

donc y_2 et y_1 sont linéairement indépendants

(a) Quelle est la solution générale de (2) dans le cas où $k = 0$?

Équation homogène

$3\lambda^2 + 0\lambda + 12 = 0$

$\lambda^2 + 0 + 4 = 0$

$\lambda = \frac{0 \pm \sqrt{0 - 4 \cdot 4}}{2} = \pm \frac{4}{2} i = \pm 2i$

$y_h(x) = C_1 e^{0x} \cos 2x + C_2 e^{0x} \sin 2x$

$y_h(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$

(b) Si $k = 8$, lequel des trois graphiques suivants représente le mieux l'allure de la solution $x(t)$?

$3\lambda^2 + 8\lambda + 12 = 0$

$\lambda^2 + \frac{8}{3}\lambda + 4 = 0$

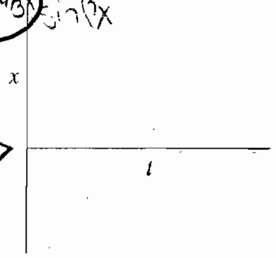
$\frac{-\frac{8}{3} \pm \sqrt{(\frac{8}{3})^2 - 4 \cdot 4}}{2}$

$-\frac{4}{3} \pm \frac{\sqrt{80}}{6} i$

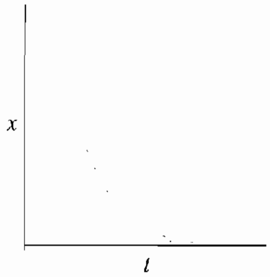
$y_h(x) = C_1 e^{-\frac{4}{3}x} \cos \frac{\sqrt{80}}{6} x + C_2 e^{-4/3x} \sin \frac{\sqrt{80}}{6} x$

$y_h(x) = C_1 e^{-\frac{4}{3}x} \cos \beta x + C_2 e^{-4/3x} \sin \beta x$

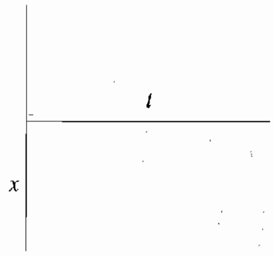
plus x augmente plus $e^{-\frac{4}{3}x}$ diminue $\Rightarrow$



Graphique 1



Graphique 2



Graphique 3

Réponse: 1

allure exponentielle. ($\neq \cos$, $\neq \sin$) $\Delta > 0$

(c) Parmi les valeurs de k suivantes, il y en a pour lesquelles la solution aura l'allure du graphe 2. Encercler **la plus petite** de ces valeurs.

(i) $k = 6$ (ii) $k = 8$ (iii) $k = 10$ (iv) $k = 12$ (v) $k = 14$

$3\lambda^2 + 6\lambda + 12 = 0$

$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 4}}{2}$

$3\lambda^2 + 10\lambda + 12 = 0$

$\lambda = -\frac{10}{3} \pm \sqrt{(\frac{10}{3})^2 - 4 \cdot 4}$

$\sqrt{-\frac{44}{9}}$

$3\lambda^2 + 12\lambda + 12 = 0$

$\lambda = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 4}}{2}$

$\lambda = \frac{-6 \pm \sqrt{20}}{2}$ > 0

$y_h = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$

$3\lambda^2 + 14\lambda + 12 = 0$

$-\frac{14}{3} \pm \sqrt{(\frac{14}{3})^2 - 4 \cdot 4}$

$\sqrt{\frac{52}{9}}$

Question 4: 20 /20