Solutionnaire 2015 Mini-test 2

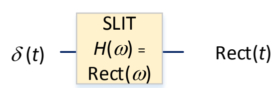
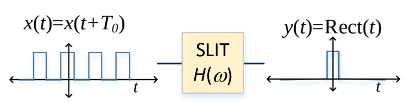
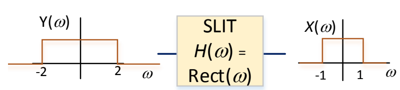
jeudi le 19 novembre 2015; durée: 08h30 à 09h20; aucune documentation permise; 7.5% de note finale

Problème 1 (20 points sur 100)

A. Est-ce que ces systèmes sont linéaires et invariant en temps?

$y(t)+3y'(t)=x(t)+3x'(t)-5x''(t)$	OUI	NON
$y(t_0)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t_0} x(z)dz$	OUI	NON
$y(t)=\frac{1}{1-x(t)}$		NON

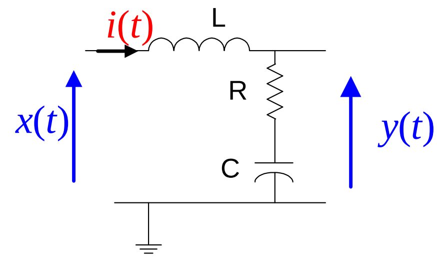
B. En supposant que ces systèmes sont linéaire et invariants en temps avec une réponse en fréquence de $H(\omega)$,

	VRAI	FAUX
	VRAI	FAUX
	VRAI	FAUX

Solutionnaire 2015 Mini-test 2

Problème 2 (30 points sur 100)

a. (15 points) Trouvez la réponse en fréquence du circuit suivant



$$H(\omega)=\frac{Z_2}{Z_1+Z_2}=\frac{R+1/j\omega C}{j\omega L+R+1/j\omega C}=\frac{1+j\omega RC}{(j\omega)^2 LC+1+j\omega RC}=\frac{1+j\omega RC}{j\omega RC+1-\omega^2 LC}$$

b. (15 points) Trouvez la sortie quand R=1, C=1, L=1/2 et l'entrée est une fonction périodique avec $\omega_0 = 1$, et les coefficients de Fourier :
$F(1)=1;\ F(10)=1;\quad F(n)=0$ ailleurs

$$x(t)=1\cdot e^{j\omega_0 t}+1\cdot e^{j10\omega_0 t}=e^{jt}+e^{j10t}$$

La sortie d'un SLIT quand l'entrée est une exponentielle complexe est

$$e^{j\omega_0 t}\to\left|H(\omega_0)\right|e^{j\omega_0 t+j\measuredangle H(\omega_0)}$$

Nous avons

$$H(\omega_0)=H(1)=\frac{1+j1\cdot1\cdot1}{j1\cdot1\cdot1+1-1^2\cdot1\cdot.5}=\frac{1+j}{j+.5}$$

$$H(10\omega_0)=H(10)=\frac{1+j10\cdot1\cdot1}{j10\cdot1\cdot1+1-10^2\cdot1\cdot.5}=\frac{1+10j}{-49+10j}$$

$$\left|H(1)\right|=\sqrt{1^2+1^2}\Big/\sqrt{1^2+.5^2}=\sqrt{8/5}=1.26$$

$$\measuredangle H(1)=\arctan(1)-\arctan(2)=45°-63°=-18°=-.32\text{ rad}$$

$$\left|H(10)\right|=\sqrt{1^2+10^2}\Big/\sqrt{49^2+10^2}=\sqrt{101/2501}=.2$$

$$\measuredangle H(10)=\arctan(10)-\arctan(-10/49)=84.289°-(-11.53°)$$

$$=95.82°=1.67\text{ rad}\quad 0<\theta<2\pi$$

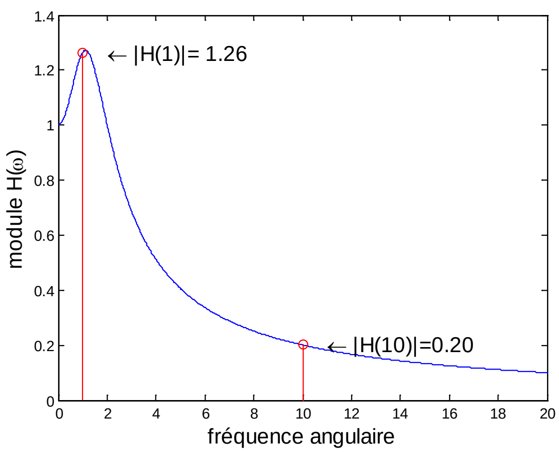
$$=\ -84.18\ =-1.47\text{ rad}\ -\pi<\theta<\pi$$

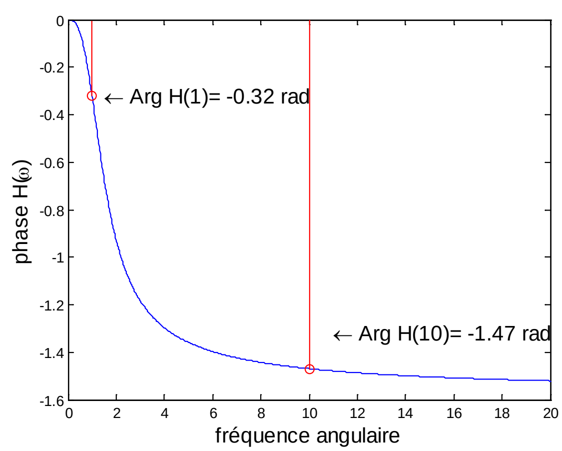
Donc la sortie pour ce système est

$$\begin{aligned}y(t)&=H(1)\cdot e^{j\omega_0 t}+H(10)\cdot e^{j10\omega_0 t}\\&=\left|H(1)\right|\cdot e^{jt+j\measuredangle H(1)}+\left|H(10)\right|\cdot e^{j10t+j\measuredangle H(10)}\\&=1.26\cdot e^{j(t-.32)}+.2\cdot e^{j(10t+1.67)}=1.26\cdot e^{j(t-.32)}+.2\cdot e^{j(10t-1.47)}\end{aligned}$$

Solutionnaire 2015 Mini-test 2

```
R=1;C=1;L=.5
w=linspace(20/1000,20,1000);
index1=find(w==1);index10=find(w==10);
H=(1+j*R*C*w)./(j*R*C*w+1-L*C*w.^2);
plot(w,abs(H));
xlabel('fréquence angulaire','FONTSIZE',14);
ylabel('module H(\omega)','FONTSIZE',14)
hold on; stem(w(index1),abs(H(index1)), 'r')
stem(w(index10),abs(H(index10)), 'r');
str1 = '\leftarrow |H(1)|= 1.26 ';
text(w(index1) +1,abs(H(index1)),str1,'FONTSIZE',14) ;
str10 = '\leftarrow |H(10)|=0.20 ';
text(w(index10) +1,abs(H(index10)),str10,'FONTSIZE',14) ;hold off
figure;plot(w,phase(H))
xlabel('fréquence angulaire','FONTSIZE',14);
ylabel('phase H(\omega)','FONTSIZE',14)
hold on; stem(w(index1),phase(H(index1)), 'r')
stem(w(index10),phase(H(index10)), 'r');
str1 = '\leftarrow Arg H(1)= -0.32 rad ';
text(w(index1) +.5,phase(H(index1)),str1,'FONTSIZE',14) ;
str10 = '\leftarrow Arg H(10)= -1.47 rad';
text(w(index10) +1,phase(H(index10))+.15,str10,'FONTSIZE',14) ;hold off
```



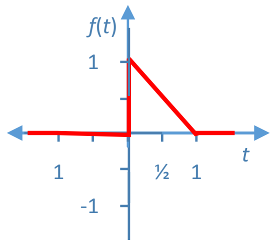


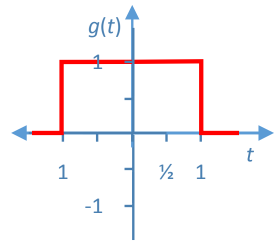
Solutionnaire 2015 Mini-test 2

Problème 3 (50 points sur 100) Trouvez la convolution de

$$f(t)=\begin{cases}1-t & 0<t<1\\ 0 & ailleurs\end{cases}$$

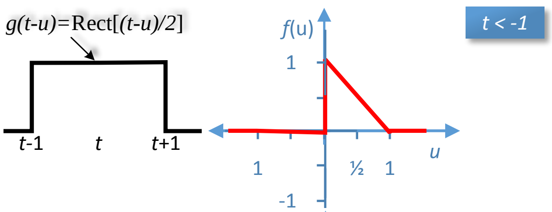
$$g(t)=\text{Rect}\left(\frac{t}{2}\right)$$



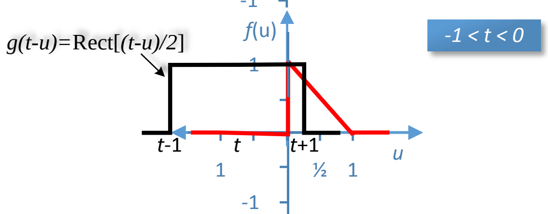


a. **régions** de définition de la convolution

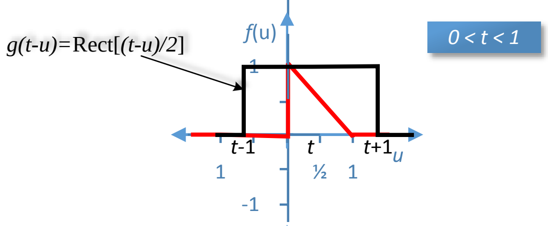
b. **intégrales et bornes d'intégration**



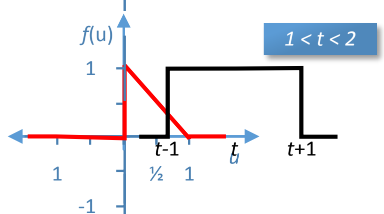
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(t-u)du=0$$



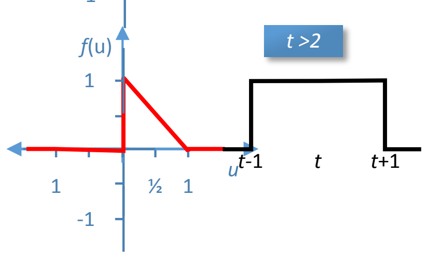
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(t-u)du=\int_{-\infty}^{\infty}(1-u)\text{Rect}\left[(t-u)/2\right]du$$
$$=\int_{0}^{t+1}(1-u)du$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(t-u)du=\int_{0}^{1}(1-u)du$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(t-u)du=\int_{t-1}^{1}(1-u)du$$



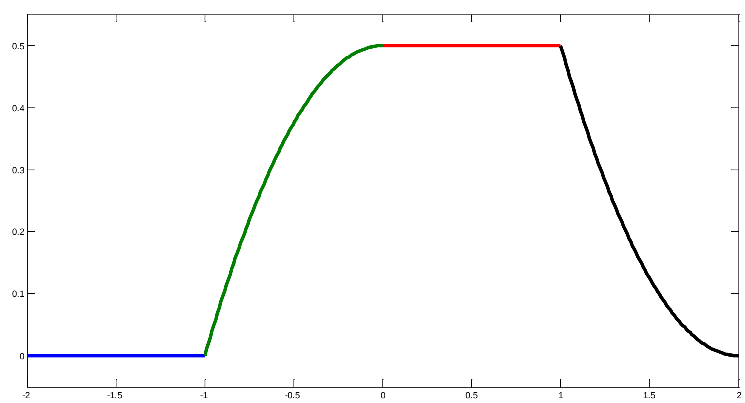
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(t-u)du=0$$

Solutionnaire 2015 Mini-test 2

a. (15 points) Donnez les intégrales à évaluer pour **chaque région** de définition de la convolution; **spécifiez clairement les bornes d'intégration pour chaque région.**

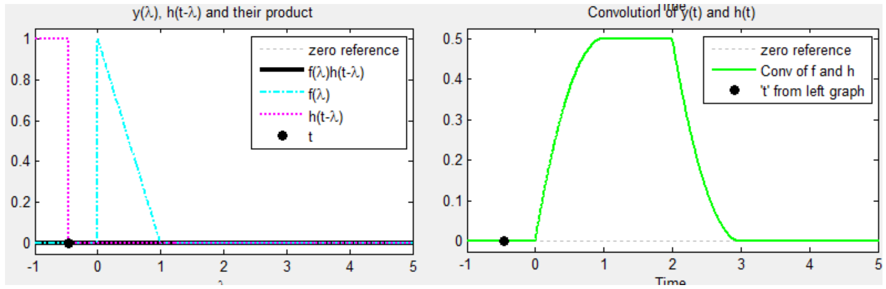
	Partie b	Partie c
$t < -1$	zéro	0
$-1 < t < 0$	$\int_0^{t+1} (1-u)\,du$	$\left[u - u^2/2\right]_0^{t+1} = t+1-(t+1)^2/2 = t+1-t^2/2-t-.5$ $= .5 - t^2/2$
$0 < t < 1$	$\int_0^{1} (1-u)\,du$	$\left[u - u^2/2\right]_0^{1} = 1-1^2/2 = .5$
$1 < t < 2$	$\int_{t-1}^{1} (1-u)\,du$	$\left[u - u^2/2\right]_{t-1}^{1} = 1-.5-\left[t-1-(t-1)^2/2\right] = .5-t+1+t^2/2-t+.5$ $= 2-2t+t^2/2$
$2 < t$	zéro	0

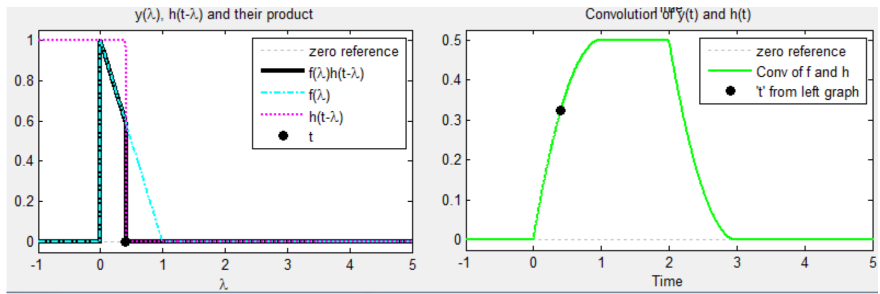
```
t1=linspace(-2,-1,100);
t2=linspace(-1,0,100);
t3=linspace(0,1,100);
t4=linspace(1,2,100);
O=ones(1,100);
A=.5-t2.^2*.5;
B=2-2*t4+t4.^2*.5;
plot(t1,0*O,t2,A,t3,.5*O,t4,B)
```

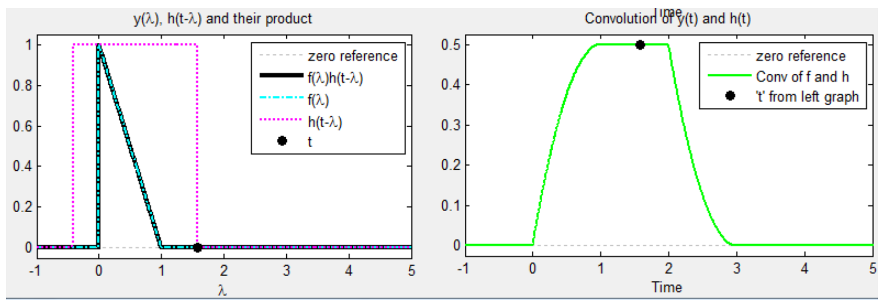


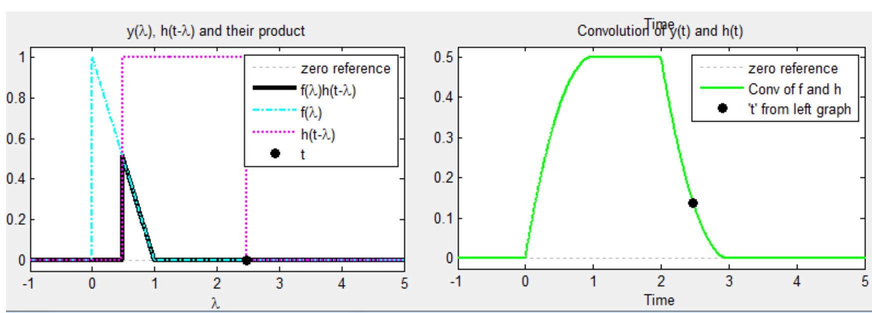
Solutionnaire 2015 Mini-test 2

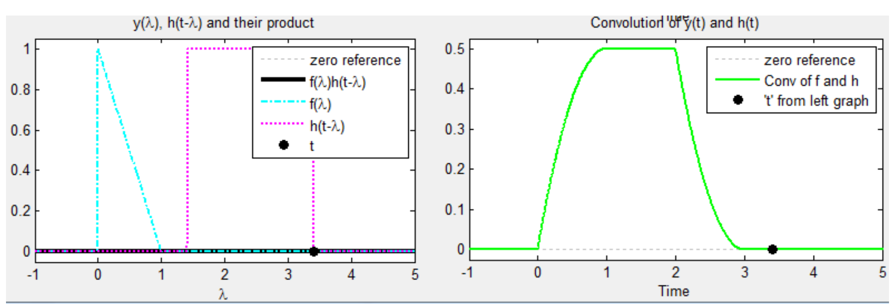
<table>
<tr><th colspan="2">$f(t) * g(t-1)$</th></tr>
<tr><td>0

$t < -1$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$.5-t^2/2$

$-1 < t < 0$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>0

$0 < t < 1$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$2-2t+t^2/2$

$1 < t < 2$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>0

$2 < t$</td><td>
</td></tr>
</table>