Intra

MAT-2910 : Analyse Numérique pour ingénieur

• Donner tous les développements et calculs. **Pour recevoir des points, toute réponse doit être convenablement JUSTIFIÉE.**
• Seules les calculatrices avec l'auto-collant de la Faculté sont autorisées.
• Répondre aux questions sur le questionnaire. **Utiliser le verso des feuilles si nécessaire**.
• Un aide mémoire se retrouve à la fin du questionnaire, vous pouvez le détacher.
• N'oubliez pas d'identifier chaque page.

Je suis bien l'étudiant dont le nom et le numéro de dossier sont écrits ci-dessous. J'ai lu et compris les directives et je m'engage à les respecter.	
Nom :	
Prénom :	
Matricule :	
Signature :	

À remplir par le(s) correcteur(s)

Q1 (/15)	Q2 (/20)	Q3 (/35)	Q4 (/20)	Q5 (/10)	Total

Question 1 (15 pts) **Nom, Prénom :**________________________________

(a) [10 pts] Soient $\tilde{x} = 0.059$, $\tilde{y} = 0.1$ et $\tilde{z} = 0.25$ des approximations de x, y et z, respectivement. On suppose qu'elles ont toutes un chiffre significatif. Donner une approximation de $x \times (z - y)$ et déterminer combien elle a de chiffres significatifs.

(b) [5 pts] Calculer $\tilde{x} \times (\tilde{z} - \tilde{y})$ en arithmétique flottante avec 1 chiffre dans la mantisse et en utilisant l'arrondi.

Question 2 (20 pts) **Nom, Prénom :**________________________________

Soit $f(x) = 1 - \cos x$

(a) [5 pts] Déterminer le polynôme de Taylor $p_2(x)$ de degré 2 en $x_0 = 0$.

(b) [5 pts] Pourquoi peut-on dire qu'il donne une approximation d'ordre 4 de $f(x)$?

(c) [5 pts] Si x est divisé par 3, par combien environ est divisée l'erreur $|f(x) - p_2(x)|$? (justifier !)

(d) [5 pts] Déterminer une majoration de l'erreur pour $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Question 3 (35 pts) **Nom, Prénom :**________________________________

Soit $f(x) = 1 - \cos(x)$. On considère l'équation $f(x) = 0$.

(a) [5 pts] Montrer que $r = 0$ est l'unique racine dans l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

(b) [5 pts] Si on applique la méthode des points fixes avec $g(x) = f(x) + x$, la méthode converge-t'elle ? Si oui, à quel ordre ?

suite de la question 3, page suivante...

(c) [5 pts] Peut-on appliquer le méthode de la bissection sur l'intervalle $[-1, \frac{\pi}{2}]$? Si oui, combien faut-il d'itérations de la méthode pour que l'erreur absolue soit plus petite que 0.01 ?

(d) [10 pts] Sans faire d'itérations, déterminer l'ordre de convergence de la méthode de Newton pour la racine $r = 0$ de $f(x) = 0$? Le cas échéant, déterminer le taux de convergence.

suite de la question 3, page suivante...

(e) [10 pts] Faire 2 itérations de la méthode de Steffenson appliquée à la fonction g en partant de $x_0 = 0.1$. Quel semble être l'ordre de convergence ?

Question 4 (20 pts) **Nom, Prénom :**________________________________

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(a) [15 pts] Faire une factorisation LU la plus économique possible, en détaillant et justifiant la démarche.

suite de la question 4, page suivante...

Question 4 (20 pts) **Nom, Prénom :**______________________________

(b) [5 pts] Sachant que la factorisation LU d'une matrice de taille $n \times n$ nécessite environ $\frac{2}{3}n^3$ opérations élémentaires, et que la résolution d'un système triangulaire nécessite environ n^2 opération élémentaires, combien d'opérations élémentaires sont nécessaires pour le calcul de l'inverse d'une matrice admettant une factorisation LU (justifier clairement la réponse) ?

Question 5 (10 pts) **Nom, Prénom :**________________________________

On considère le système non-linéaire

$$x_1 - x_2^2 + 1 = 0$$
$$x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$$

(a) [1 pt] Vérifier que $r = (0,\ 1)$ est une racine.

(b) [4 pts] La convergence de Newton pour cette racine est-elle linéaire ou d'ordre au moins 2 ?

(c) [5 pts] Faire une itération à partir de $(1,\ 1)$.

Aide-mémoire MAT-2910

Analyse d'erreurs

— Erreur du développement de Taylor :

$$R_n(h) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_h)}{(n+1)!} h^{n+1} \qquad \text{où } \xi_h \text{ est compris entre } x_0 \text{ et } x_0 + h$$

— Propagation d'erreurs :

$$\Delta f \quad \simeq \quad \left| \frac{\partial f(x^*, y^*, z^*)}{\partial x} \right| \Delta x \; + \; \left| \frac{\partial f(x^*, y^*, z^*)}{\partial y} \right| \Delta y + \left| \frac{\partial f(x^*, y^*, z^*)}{\partial z} \right| \Delta z$$

Équations non linéaires

— Convergence des méthodes de points fixes : si $e_n = x_n - r$ alors :

$$e_{n+1} = g'(r) e_n + \frac{g''(r) e_n^2}{2} + \frac{g'''(r) e_n^3}{3!} + \cdots$$

— Méthode de Steffenson : x_0 donné

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(g(x_n) - x_n)^2}{g(g(x_n)) - 2g(x_n) + x_n}$$

Systèmes d'équations algébriques

— Normes vectorielles :

$$||\vec{x}||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad ||\vec{x}||_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$$

— Normes matricielles :

$$||A||_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|, \quad ||A||_\infty = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|,$$

— Borne pour l'erreur :

$$\frac{1}{\text{cond} A} \frac{||\vec{r}||}{||\vec{b}||} \le \frac{||\vec{e}||}{||\vec{x}||} \le \text{cond} A \; \frac{||\vec{r}||}{||\vec{b}||}$$