Mini-test 4 *Solutions*

Problème 1 *(1 point sur 5)*

Le ***théorème de changement d'échelle*** est

$$f(\alpha t) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{|\alpha|}F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$$

Donc pour

$$f(t) \Leftrightarrow \frac{e^{1-j\omega}-1}{1-j\omega}$$

on a pour alpha positif que

$$f(\alpha t) \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}\frac{e^{1-j\omega/\alpha}-1}{1-j\,\omega/\alpha} = \frac{e^{1-j\omega/\alpha}-1}{\alpha - j\omega}$$

La réponse correcte est **b)**.

Problème 2 (1 point sur 5)

Le ***théorème de dualité*** est

$$\text{Pour } f(t) \quad \Leftrightarrow \quad F(\omega) \quad \text{on a que } F(t) \quad \Leftrightarrow \quad 2\pi f(-\omega)$$

Dans ce problème on cherche la transformée de

$$\cos\pi\omega \,\mathrm{Rect}\,\omega$$

Dans le table de transformées avec taux égal à un, on a

$$\cos\pi t \,\mathrm{Rect}\,t \Leftrightarrow \frac{2}{\pi}\frac{\cos\frac{\omega}{2}}{1-\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^2}$$

On va utiliser la dualité avec cette relation pour arriver à

$$\frac{2}{\pi}\frac{\cos\frac{t}{2}}{1-\left(\frac{t}{\pi}\right)^2} \Leftrightarrow 2\pi\cos\pi(-\omega)\,\mathrm{Rect}(-\omega)$$

Les fonctions cosinus et rectangle sont paires, donc on peut changer les arguments à oméga.

$$\frac{2}{\pi}\frac{\cos\frac{t}{2}}{1-\left(\frac{t}{\pi}\right)^2} \Leftrightarrow 2\pi\cos\pi(\omega)\,\mathrm{Rect}(\omega)$$

On peut diviser les deux côtés par deux pi.

$$\frac{1}{\pi^2}\frac{\cos\frac{t}{2}}{1-\left(\frac{t}{\pi}\right)^2} \Leftrightarrow \cos\pi(\omega)\,\mathrm{Rect}(\omega)$$

Dans le dénominateur on multiple par le pi carré, donc

$$\frac{\cos\frac{t}{2}}{\pi^2-t^2} \Leftrightarrow \cos\pi(\omega)\,\mathrm{Rect}(\omega)$$

La réponse correcte est **d)**.
(Voir le problème 9.3 dans le chapitre 9.)

Problème 3 *(1 point sur 5)*

Le ***somme de Poisson*** nous dit que les coefficients de Fourier d'une extension périodique de *x(t)* sont

$$X(n)=\frac{1}{T_0}X(\omega)\Big|_{\omega=n\omega_0} \quad \text{où} \quad \mathrm{x(t)} \Leftrightarrow \mathrm{X}(\omega)$$

Dans ce problème on peut voir dans l'équation et dans le graphique que la période et la fréquence fondamentale sont donnés par

$$T_0=2 \quad \text{et} \quad \omega_0=\frac{2\pi}{T_0}=\pi$$

Par l'équation, la fonction *x(t)* est donné par

$$x(t)=e^{-|t|}$$

Dans la table des transformées on trouve la transformée de cette fonction

$$e^{-|t|} \Leftrightarrow \frac{2}{1+\omega^2}$$

Donc les coefficients de Fourier pour $x_p(t)$ sont

$$X(n) = \frac{1}{T_0} X(n\omega_0) = \frac{1}{2}\frac{2}{1+(n\omega_0)^2} = \frac{1}{2}\frac{2}{1+(n\pi)^2} = \frac{1}{1+n^2\pi^2}$$

La série de Fourier est donc

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+n^2\pi^2} e^{jn\pi t}$$

La réponse correcte est **b)**.

Problème 4 *(2 points sur 5)*

On cherche la fréquence de Nyquist de

$$x(t) = \mathrm{Sa}^2(\mathrm{t})$$

Il faut savoir la fréquence maximum, *i.e.* la fréquence après laquelle la transformée de $x(t)$ est toujours zéro. Donc il faut savoir la transformée de $x(t)$. On cherche dans le table, mais on a seulement le résultat

$$\Lambda\left(\frac{t}{\tau}\right) \Leftrightarrow \tau^2\,\mathrm{Sa}^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

Il faut utiliser la dualité pour arriver à

$$\tau^2\,\mathrm{Sa}^2\left(\frac{t\tau}{2}\right) \Leftrightarrow 2\pi\Lambda\left(\frac{-\omega}{\tau}\right)$$

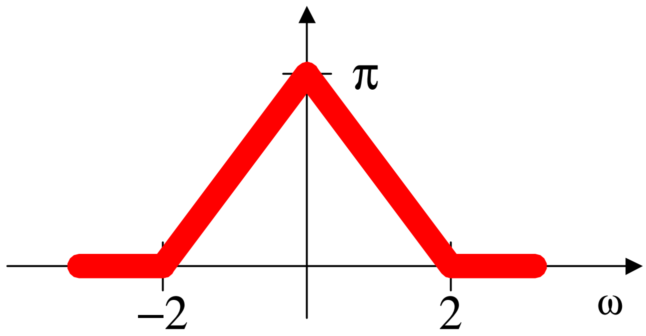
On veut avoir l'argument de *Sa* égale à *t*, donc on choisit tau égal à deux.

$$4\,\mathrm{Sa}^2(t) \Leftrightarrow 2\pi\Lambda\left(\frac{-\omega}{2}\right)$$

On divise les deux côtés par quatre

$$\mathrm{Sa}^2(t) \Leftrightarrow \frac{\pi}{2}\Lambda\left(\frac{-\omega}{2}\right)$$

La graphique de cette transformée est



On peut lire directement de la fréquence maximum est deux. Donc la fréquence de Nyquist est

$\omega_N = 2\omega_{\max} = 2 \cdot 2 = 4$