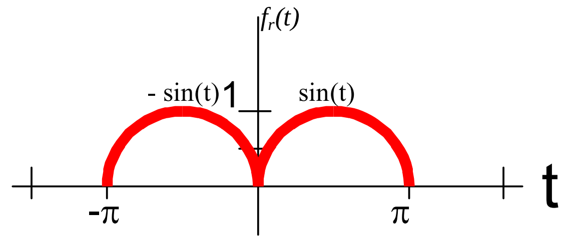
1997 Examen Partiel - *Solutions*



Problème 1

Méthode A

$$f(t) = |\sin t| \cdot \mathrm{Rect}\left(\frac{t}{2\pi}\right)$$

Avant de procéder à la dérivation, il est important de bien examiner l'effet de chaque facteur de la fonction et essayer de la simplifier. A l'aide de la définition de la fonction Rect$\left(\frac{\mathrm{t}}{2\pi}\right)$ on peut simplifier la fonction *f(t)*

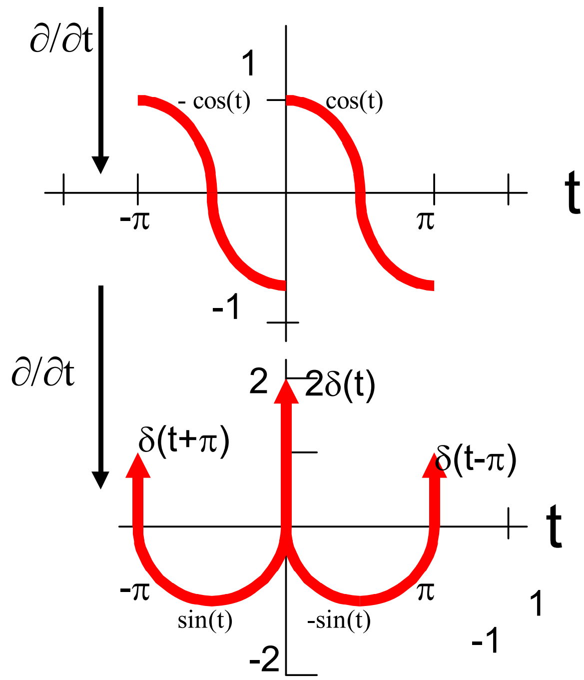
$$f(t) = \begin{cases} |\sin(t)| & pour\ -\pi \le t \le \pi \\ 0 & pour\ t \le -\pi\ ou\ bien\ \ t \ge \pi \end{cases}$$

Puis en levant la valeur absolue nous obtenons

$$f(t) = \begin{cases} 0 & pour\ t \le -\pi\ ou\ bien\ \ t \ge \pi \\ -\sin(t) & pour\ -\pi \le t \le 0 \\ \sin(t) & pour\ 0 \le t \le \pi \end{cases}$$

Nous allons utiliser la méthode de différentiation pour évaluer la transformée. La fonction est constante jusqu'à t=-π; dans ce point la fonction est continue. La dérivée sera donc nulle jusqu'à ce point. Dans l'intervalle [-π, 0] la fonction est égale à -sin(t) donc sa dérivée est égale à -cos(t). Dans l'intervalle [0,π] la fonction est égale à sin(t) donc sa dérivée est égale à cos(t). On applique la première dérivée

$$Df(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < -\pi \text{ ou bien } t > \pi \\ -\cos(t) & \text{pour } -\pi < t < 0 \\ \cos(t) & \text{pour } 0 < t < \pi \end{cases}$$



Puis la dérivée seconde

$$D^2 f(t) = -f(t) + 2\delta(t) + \delta(t-\pi) + \delta(t+\pi)$$

Le théorème de différentiation en temps nous donne

$$(j\omega)^2 F(\omega) = -F(\omega) + 2 + e^{-j\pi\omega} + e^{j\pi\omega}$$

Donc

$$\begin{aligned}(1-\omega^2)F(\omega) &= 2 + 2\cos(\pi\omega) \\ &= 2(1+\cos(\pi\omega)) \\ &= 4\cos^2(\pi\omega/2)\end{aligned}$$

La forme finale de la transformée de Fourier est

$$F(\omega) = \frac{4\cos^2(\pi\omega/2)}{1-\omega^2}$$

Méthode B

Cette méthode consiste à remarquer que la fonction $\mathrm{Rect}\left(\frac{t}{2\pi}\right)$ peut être décomposée en deux fonctions

$$\mathrm{Rect}\left(\frac{t}{2\pi}\right)=\begin{cases}\mathrm{Rect}\left(\dfrac{t-\pi/2}{\pi}\right) & pour\ 0\le t\le\pi\\ \mathrm{Rect}\left(\dfrac{t+\pi/2}{\pi}\right) & pour\ -\pi\le t\le 0\end{cases}$$

De même

$$\left|\sin(t)\right|=\begin{cases}\sin(t) & pour\ 0\le t\le\pi\\ -\sin(t) & pour\ -\pi\le t\le 0\end{cases}$$

La fonction *f*(t) est donc

$$\begin{aligned}f(t)&=\sin(t)\cdot\mathrm{Rect}\left(\frac{t-\pi/2}{\pi}\right)-\sin(t)\cdot\mathrm{Rect}\left(\frac{t+\pi/2}{\pi}\right)\\&=\frac{1}{2j}\left(e^{jt}-e^{-jt}\right)\cdot\mathrm{Rect}\left(\frac{t-\pi/2}{\pi}\right)-\frac{1}{2j}\left(e^{jt}-e^{-jt}\right)\cdot\mathrm{Rect}\left(\frac{t+\pi/2}{\pi}\right)\end{aligned}$$

Dons il suffit d'utiliser la table pour calculer la transformée de chaque terme

$$\begin{aligned}\mathrm{Rect}\left(\frac{t-\pi/2}{\pi}\right)&\Leftrightarrow e^{-j\frac{\pi}{2}\omega}\pi\mathrm{Sa}\left(\omega\frac{\pi}{2}\right)\\ \mathrm{Rect}\left(\frac{t+\pi/2}{\pi}\right)&\Leftrightarrow e^{j\frac{\pi}{2}\omega}\pi\mathrm{Sa}\left(\omega\frac{\pi}{2}\right)\\ e^{jt}\mathrm{Rect}\left(\frac{t-\pi/2}{\pi}\right)&\Leftrightarrow e^{-j\frac{\pi}{2}(\omega-1)}\pi\mathrm{Sa}\left((\omega-1)\frac{\pi}{2}\right)\\ e^{-jt}\mathrm{Rect}\left(\frac{t+\pi/2}{\pi}\right)&\Leftrightarrow e^{j\frac{\pi}{2}(\omega+1)}\pi\mathrm{Sa}\left((\omega+1)\frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

La transformée de la fonction totale est donc

$$F(\omega)=\frac{1}{2j}\left\{\begin{array}{l} e^{-j\frac{\pi}{2}(\omega-1)}\pi\mathrm{Sa}\left((\omega-1)\frac{\pi}{2}\right)-e^{-j\frac{\pi}{2}(\omega+1)}\pi\mathrm{Sa}\left((\omega+1)\frac{\pi}{2}\right) \\ -e^{j\frac{\pi}{2}(\omega-1)}\pi\mathrm{Sa}\left((\omega-1)\frac{\pi}{2}\right)+e^{j\frac{\pi}{2}(\omega+1)}\pi\mathrm{Sa}\left((\omega+1)\frac{\pi}{2}\right) \end{array}\right\}$$

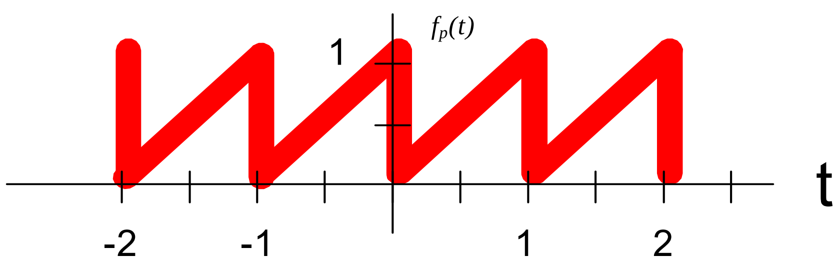
$$=-\sin\left((\omega-1)\frac{\pi}{2}\right)\pi\mathrm{Sa}\left((\omega-1)\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left((\omega+1)\frac{\pi}{2}\right)\pi\mathrm{Sa}\left((\omega+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=-2\frac{\sin\left((\omega-1)\frac{\pi}{2}\right)}{(\omega-1)}+2\frac{\sin\left((\omega+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(\omega+1)}$$

$$=2\frac{\cos^2\left(\omega\frac{\pi}{2}\right)}{(\omega-1)}+2\frac{\cos^2\left(\omega\frac{\pi}{2}\right)}{(\omega+1)}$$

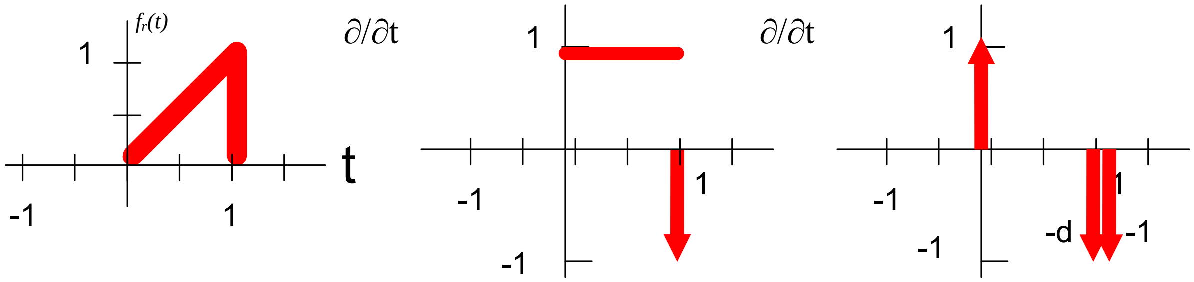
$$=4\frac{\cos^2\left(\omega\frac{\pi}{2}\right)}{1-\omega^2}$$

Problème 2



On voit que la fonction est périodique, on se restreint donc sur une période et on définit la fonction restriction comme suit

$$f_r(t)=\begin{cases} t & pour\ 0<t<1 \\ 0 & si\ non \end{cases}$$



la période $T_0=1$, et $\omega_0=2\pi$.

Nous allons utiliser la méthode de différentiation pour évaluer la transformée de la restriction de *f*(*t*). La fonction $f_r(t)$ est non nulle seulement sur l'intervalle [0,1]. En plus, elle admet une discontinuité en *t*=1. La première dérivée est

$$Df_r(t)=\begin{cases} 1 & pour\ 0<t<1 \\ -\delta(t-1) & pour\quad t=1 \\ 0 & si\ non \end{cases}$$

Puis la dérivée seconde

$$D^2f_r(t)=\begin{cases} \delta(t) & t==0 \\ -\delta'(t-1)-\delta(t-1) & pour\quad t=1 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

Le théorème de différenciation en temps nous donne

$$\begin{aligned}(j\omega)^2F_r(\omega) &= TF\{\delta(t)-\delta'(t-1)-\delta(t-1)\} \\ &= 1-j\omega e^{-j\omega}-e^{-j\omega}\end{aligned}$$

Donc la transformée de la restriction est

$$F_r(\omega)=\frac{1-(1+j\omega)e^{-j\omega}}{-\omega^2}$$

Maintenant on calcule les coefficients de la série de Fourier à partir de la transformée de Fourier de sa restriction.

$$F(n)=\frac{F_r(n\omega_0)}{T_0}=F_r(2\pi n)$$
$$=\frac{1-(1+j2\pi n)e^{-j2\pi n}}{-4\pi^2n^2}=\frac{1-(1+j2\pi n).1}{-4\pi^2n^2}=\frac{j2\pi n}{4\pi^2n^2}=\frac{j}{2\pi n}$$

Ce résultat ne donne pas le coefficient pour n=0, donc nous la calculons à part.

$$F(n)=\frac{1}{T_0}\int_0^1 tdt=\frac{1}{2}$$

Les coefficients sont donc

$$F(n)=\begin{cases}\dfrac{j}{2\pi n} & n\neq 0\\ \dfrac{1}{2} & n=0\end{cases}$$

La transformée de la fonction périodique est le peigne de Dirac suivant:

$$F(\omega)=2\pi\sum_{-\infty}^{+\infty}F(n)\delta(\omega-n\omega_0)$$
$$=2\pi\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{j}{2\pi n}\delta(\omega-n2\pi)$$
$$=\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{j}{n}\delta(\omega-n2\pi)$$

La puissance moyenne totale est

$$P=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}\left|f_p(t)\right|^2dt=\frac{1}{1}\int_0^1 t^2dt=\left.\frac{t^3}{3}\right|_0^1=\frac{1}{3}$$

Toutefois, on peut vérifier à l'aide des coefficient de Fourier

$$P=\sum_{-\infty}^{+\infty}\left|F(n)\right|^2=\left|F(0)\right|^2+2\sum_{1}^{+\infty}\left|\frac{j}{2\pi n}\right|^2$$
$$=\frac{1}{4}+2\frac{1}{4\pi^2}\sum_{1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2\pi^2}.\frac{\pi^2}{6}=\frac{1}{3}$$

La puissance dans la bande de fréquence $-7 < \omega < 7$?

$$-7 < \omega < 7 \quad \Rightarrow -7 < n\omega_0 < 7 \quad \Rightarrow -7 < 2\pi n < 7$$

n	$\omega = n\omega_0 = 2\pi n$
0	0
1	$2\pi \approx 6{,}28$
-1	$-2\pi \approx -6{,}28$
2	$4\pi \approx 12{,}56$
-2	$-4\pi \approx -12{,}56$

En regardent le table on voit que pour $|n|>1$ les harmoniques ne sont pas dans la bande de fréquence donnée. Ce qui donne *n*= 0, -1, 1 pour cette bande

$$\begin{aligned} P(-7 < \omega < 7) &= |F(0)|^2 + |F(-1)|^2 + |F(1)|^2 \\ &= \frac{1}{4} + 2\frac{1}{4\pi^2} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi^2} \end{aligned}$$

Problème 3

On remarque que la fonction $f(t) = \dfrac{t^2}{a^2 + t^2}$ est le produit d'une puissance de *t* avec une fonction qui fait penser à la propriété de la dualité. On remarque à partir du tableau des transformées

$$e^{-\beta|t|} \Leftrightarrow \frac{2\beta}{\beta^2 + \omega^2}$$

À l'aide la propriété de dualité nous trouvons

$$\frac{2\beta}{\beta^2 + t^2} \Leftrightarrow 2\pi e^{-\beta|\omega|}$$

Puis la multiplication par la puissance de *t* qui correspond à une dérivation dans le domaine des fréquences

$$\frac{t^2 2\beta}{\beta^2 + t^2} \Leftrightarrow -2\pi \frac{\partial^2}{\partial\omega^2} e^{-\beta|\omega|}$$

Il faut évaluer les dérivés. La première dérivée

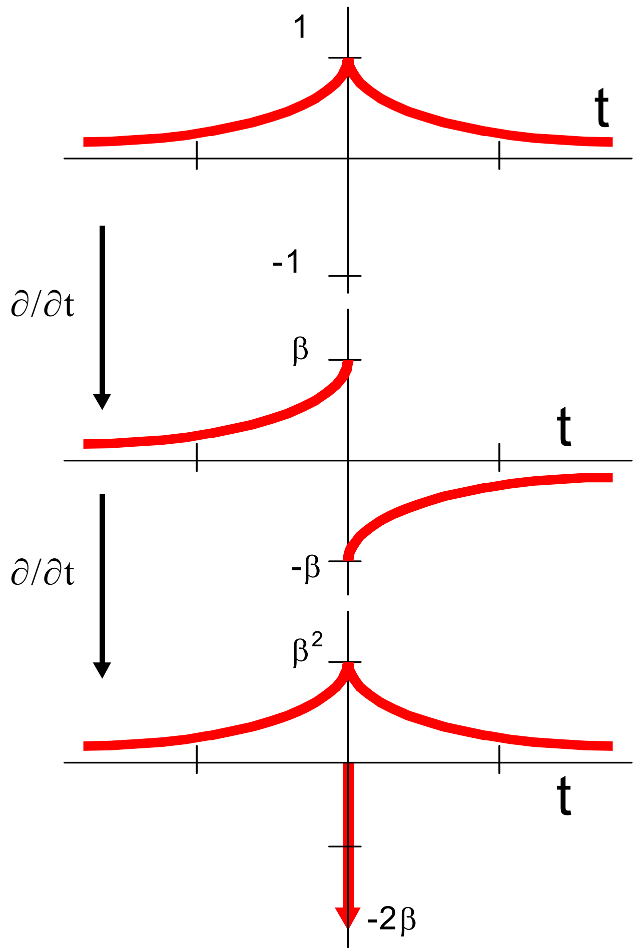
$$\frac{\partial}{\partial\omega} e^{-\beta|\omega|} = \frac{\partial}{\partial\omega}\begin{cases} e^{-\beta\omega} & \omega > 0 \\ e^{\beta\omega} & \omega < 0 \\ 0 & \omega = 0 \end{cases} = \begin{cases} -\beta e^{-\beta\omega} & \omega > 0 \\ \beta e^{\beta\omega} & \omega < 0 \\ 0 & \omega = 0 \end{cases}$$

Puis la seconde dérivée

$$\frac{\partial^2}{\partial\omega^2} e^{-\beta|\omega|} = \begin{cases} \beta^2 e^{-\beta\omega} & \omega > 0 \\ \beta^2 e^{\beta\omega} & \omega < 0 \\ -2\beta\delta(\omega) & \omega = 0 \end{cases}$$

En réduisant ceci à une forme plus compacte

$$\frac{2\beta t^2}{\beta^2 + t^2} \Leftrightarrow 4\pi\beta\delta(\omega) - 2\pi\beta^2 e^{-\beta|\omega|}$$



Enfin la transformée cherchée

$$\frac{t^2}{\beta^2 + t^2} \Leftrightarrow 2\pi\delta(\omega) - \beta\pi e^{-\beta|\omega|}$$

Pour calculer l'aire sous la courbe, on calcule l'intégrale du premier terme

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta}{2} e^{-\beta|\omega|} d\omega = \int_{-\infty}^{0} \frac{\beta}{2} e^{\beta\omega} d\omega + \int_{0}^{\infty} \frac{\beta}{2} e^{-\beta\omega} d\omega$$
$$= \beta \int_{0}^{\infty} e^{-\beta\omega} d\omega = 1$$

L'intégrale du deuxième terme donne aussi 1

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\mathrm{d}\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta}{2} e^{-\beta|\omega|}\mathrm{d}\omega - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega)\mathrm{d}\omega = 1 - 1 = 0$$

Nous savons aussi que l'aire sous la courbe de la transformée est égale à la fonction évalué au point zéro.

$$f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\mathrm{d}\omega$$

Donc nous pouvons aussi la calculer comme le suivant.

$$f(0) = \frac{0^2}{\beta^2 + 0^2} = 0$$