GEL-2001 83320 : Analyse des signaux

Mini-test 2 A2010 : Solutions

Département de génie électrique et de génie informatique

Problème 1 (1 point)

a)

On demande si $\frac{d}{dt}(f * g) = \frac{df}{dt} * \frac{dg}{dt}$. La réponse est faux, car $\frac{d}{dt}(f * g) = \frac{df}{dt} * g$ ou $\frac{d}{dt}(f * g) = f * \frac{dg}{dt}$.

b)

On demande si $\frac{1}{2\pi} f(t)g(t) = F(\omega) * G(\omega)$. La réponse est faux, car $f(t)g(t) = \frac{1}{2\pi} F(\omega) * G(\omega)$.

c)

On demande si $rect(t) * u(t) = rect(t)$. La réponse est faux, car seulement l'impulsion $\delta(t)$ est un élément neutre de la convolution. La fonction échelon ne l'est pas.

d)

On demande si une fonction périodique filtrée par un système linéaire et invariant dans le temps est une fonction périodique. La réponse est vrai, car le filtre va répondre de la même manière pour chaque période du signal. Le signal de sortie sera donc aussi périodique.

Problème 2 (2 points)

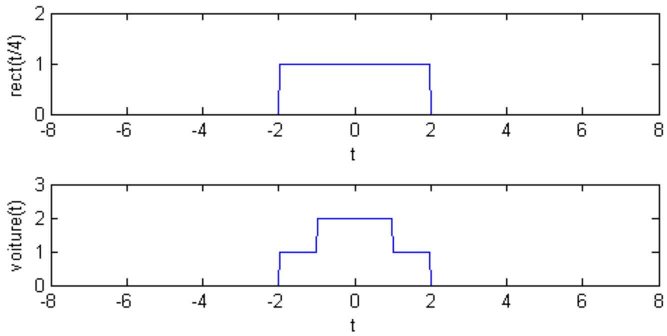

Figure 1 – Voiture(t) et rect(t/4)

On veut calculer $\frac{d}{dt}\left(\text{rect}(\frac{t}{4}) * \text{voiture}(t)\right)$. La façon longue de procéder consisterait à calculer la convolution directement et à dériver par la suite. Par contre, on peut utiliser la propriété qui dit que $\frac{d}{dt}(f * g) = \frac{df}{dt} * g$ pour obtenir un calcul plus simple. Si on choisit de dériver le rectangle, on doit calculer $\text{voiture}\,(t) * (\delta\,(t+2) - \delta\,(t-2)) = \text{voiture}\,(t+2) - \text{voiture}\,(t-2)$.

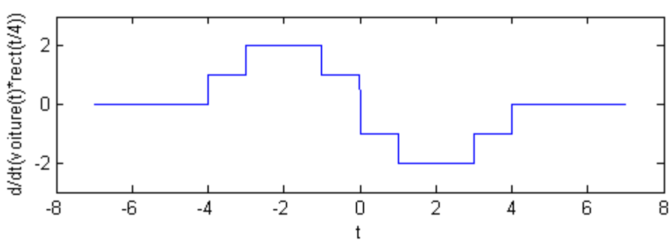

Figure 2 – Résultat de la convolution

Problème 3 (2 points)

a)

On demande de trouver la fonction de transfert $H(\omega)$ en module et phase. Pour trouver la fonction de transfert, on débute avec la règle du diviseur de tension. Donc :

$$H(\omega) = \frac{\frac{1}{jC\omega} + R}{\frac{1}{jC\omega} + R + jL\omega} = \frac{1 + jRC\omega}{jRC\omega + 1 - LC\omega^2}.$$

Le module est :

$$|H(\omega)| = \frac{|num|}{|denum|} = \frac{\sqrt{real^2 + imag^2}}{\sqrt{real^2 + imag^2}} = \frac{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}{\sqrt{(1 - LC\omega)^2 + (RC\omega)^2}}.$$

La phase est :

$$\angle H(\omega) = \angle num - \angle denum = atan(\frac{\omega RC}{1}) - atan(\frac{\omega RC}{1 - \omega^2 LC})$$

b)

On demande si le filtre est causal. Il l'est, car il est physiquement réalisable dans le laboratoire.

Reponse plus exacte, mais pas nécessaire pour avoir plein crédit pour le calcul de la phase

---

Problème 3 (2 points)

a)

On demande de trouver la fonction de transfert $H(\omega)$ en module et phase. Pour trouver la fonction de transfert, on débute avec la règle du diviseur de tension. Donc :

$$H(\omega) = \frac{\frac{1}{jC\omega} + R}{\frac{1}{jC\omega} + R + jL\omega} = \frac{1 + jRC\omega}{jRC\omega + 1 - LC\omega^2}.$$

Le module est :

$$|H(\omega)| = \frac{|num|}{|denum|} = \frac{\sqrt{real^2 + imag^2}}{\sqrt{real^2 + imag^2}} = \frac{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}{\sqrt{(1 - LC\omega)^2 + (RC\omega)^2}}.$$

La phase est :

$$\angle H(\omega) = \angle num - \angle denum = atan(\frac{\omega RC}{1}) - atan(\frac{\omega RC}{1 - \omega^2 LC}) + \pi \mathrm{u}(-\mathrm{sgn}(1 - \omega^2 LC)).$$

où $\mathrm{u}(t)$ est la fonction échelon et $\mathrm{sgn}(t)$ vaut 1 lorsque t est positif et -1 lorsqu'il est négatif. Le dernier terme de l'expression représente donc un saut de phase de π lorsque le dénominateur du deuxième terme devient négatif.

The principal value Arg of a complex number given as $x+iy$ is normally available in math libraries of many programming languages using the function atan2( ) or some language specific variant. The value of $\mathrm{atan2}(y, x)$ is the principal value in the range $(-\pi, \pi]$.

Many texts say the value is given by $\arctan(y/x)$, as y/x is slope, and arctan converts slope to angle. This is correct only when $x > 0$, so the quotient is defined and the angle lies between $-\pi/2$ and $\pi/2$, but extending this definition to cases where x is not positive is relatively involved. Specifically, one may define the principal value of the argument separately on the four half-planes $x > 0$, $x < 0$ (separated into two quadrants if one wishes a branch cut on the negative x-axis), $y > 0$, $y < 0$, and then patch together.

$$\mathrm{Arg} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to (-\pi, \pi]$$

$$\mathrm{Arg}(x + iy) = \mathrm{atan2}(y, x) = \begin{cases} \arctan(y/x) & x > 0 \\ \pi/2 - \arctan(x/y) & y > 0 \\ -\pi/2 - \arctan(x/y) & y < 0 \\ \pi + \arctan(y/x) & x < 0, y \geq 0 \\ -\pi + \arctan(y/x) & x < 0, y < 0 \\ \text{undefined} & x = 0, y = 0 \end{cases}$$