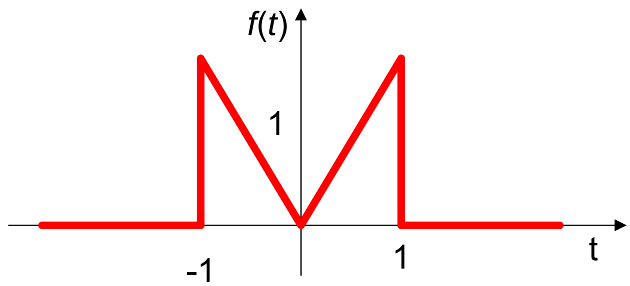
2002 Examen Partiel - *Solutions*

Problème 1



A-

Méthode le plus élégant:

En examinant le graphique, nous notons que la fonction f(t) est essentiellement un rectangle moins un triangle :

$$f(t) = \text{Rect}\left(\frac{t}{2}\right) - \text{Tri}\left(\frac{t}{2}\right)$$

Ces fonctions sont dans la table de transformées, donc nous avons directement:

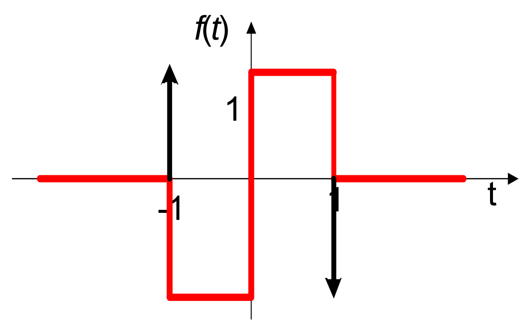
$$F(\omega) = TF\left\{\text{Rect}\left(\frac{t}{2}\right)\right\} - TF\{\text{Tri}(t)\} = 2\,\text{Sa}\left(\frac{\omega 2}{2}\right) - \text{Sa}^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$= 2\frac{\sin\omega}{\omega} - \frac{4\sin^2\omega/2}{\omega^2}$$

$$= \frac{2\omega\sin\omega - 4\sin^2\omega/2}{\omega^2} = \frac{4\omega\sin\omega/2\cos\omega/2 - 4\sin^2\omega/2}{\omega^2}$$

$$= \frac{4\sin\omega/2}{\omega^2}\left[\omega\cos\omega/2 - \sin\omega/2\right]$$

Méthode 1:



En utilisant l'approche du chapitre 5, on va examiner la dérivée de la fonction. La fonction est constante jusqu'à *t=-1*, donc la dérivée est nulle jusqu'à *t=-1.* À *t=-1* il y a un échelon de hauteur un, donc la dérivée est une fonction delta avec un poids de un. De *t=-1* à *t=0*, la pente est constante, égale à moins un. De *t=0* à *t=1*, la pente est constante, égale à un. À *t=1* il y a un échelon de hauteur moins un, donc la dérivée est une fonction delta avec un poids de moins un. Après ce point la dérivée est nulle.

$$\frac{df}{dt} = \delta(t+1) - \delta(t-1) - \mathrm{Rect}\left(\frac{t+1/2}{1}\right) + \mathrm{Rect}\left(\frac{t-1/2}{1}\right)$$

Le théorème de la différentiation en temps nous donne

$$\begin{aligned} j\omega F(\omega) &= TF\{\delta(t+1)\} - TF\{\delta(t-1)\} - TF\left\{\mathrm{Rect}\left(\frac{t+1/2}{1}\right)\right\} + TF\left\{\mathrm{Rect}\left(\frac{t-1/2}{1}\right)\right\} \\ &= e^{j\omega}TF\{\delta(t)\} - e^{-j\omega}TF\{\delta(t)\} - e^{j\omega/2}TF\{\mathrm{Rect}(t)\} + e^{-j\omega/2}TF\{\mathrm{Rect}(t)\} \\ &= e^{j\omega} - e^{-j\omega} - e^{j\omega/2}\,\mathrm{Sa}(\omega/2) + e^{-j\omega/2}\,\mathrm{Sa}(\omega/2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j\omega F(\omega) &= e^{j\omega} - e^{-j\omega} + \mathrm{Sa}(\omega/2)\left\{-e^{j\omega/2} + e^{-j\omega/2}\right\} \\ &= 2j\sin(\omega) - 2j\sin(\omega/2)\,\mathrm{Sa}(\omega/2) = 4j\sin(\omega/2)\cos(\omega/2) - 4j\frac{\sin(\omega/2)\sin(\omega/2)}{\omega} \\ &= 4j\sin(\omega/2)\left[\cos(\omega/2) - \frac{\sin(\omega/2)}{\omega}\right] = 4j\sin(\omega/2)\left[\frac{\omega\cos(\omega/2) - \sin(\omega/2)}{\omega}\right] \end{aligned}$$

$$F(\omega) = 4\sin(\omega/2)\left[\frac{\omega\cos(\omega/2) - \sin(\omega/2)}{\omega^2}\right]$$

On vérifie bien que la transformée est réelle et paire puisque *f(t)* est paire.✓

Méthode 2:

Il est plus aisée de retrouver la transformée à partir de la deuxième dérivée avec le théorème de la différentiation dans le temps.
La deuxième dérivée est donnée par :

$$\frac{d^2f}{dt^2} = \delta'(t+1) - \delta'(t-1) - \delta(t+1) - \delta(t-1) + 2\delta(t)$$

$$\begin{aligned} (j\omega)^2 F(\omega) &= TF\{\delta'(t+1)\} - TF\{\delta'(t-1)\} - TF\{\delta(t+1/2)\} - TF\{\delta(t-1/2)\} + 2TF\{\delta(t)\} \\ &= j\omega e^{j\omega} - j\omega e^{-j\omega} - e^{j\omega} - e^{-j\omega} + 2 = j\omega(e^{j\omega} - e^{-j\omega}) - (e^{j\omega} + e^{-j\omega}) + 2 \\ &= -2\omega\sin(\omega) - 2\cos(\omega) + 2 = 2\left[-\omega\sin(\omega) + (1-\cos(\omega))\right] \\ &= 2\left[-2\omega\sin(\omega/2)\cos(\omega/2) + 2\sin^2(\omega/2)\right] \\ &= -4\sin(\omega/2)\left[\omega\cos(\omega/2) - \sin(\omega/2)\right] \end{aligned}$$

Méthode 3:

$$f(t)=\begin{cases}-t & -1<t<0\\ t & 0<t<1\\ 0 & \text{ailleurs}\end{cases} = -t\,\mathrm{Rect}\left(\frac{t+1/2}{1}\right)+t\,\mathrm{Rect}\left(\frac{t-1/2}{1}\right)$$

La transformée de Fourier du Rect est

$$\mathrm{Rect}\left(\frac{t+1/2}{1}\right)\Leftrightarrow e^{j\omega/2}\,\mathrm{Sa}(\omega/2)$$

$$\mathrm{Rect}\left(\frac{t-1/2}{1}\right)\Leftrightarrow e^{-j\omega/2}\,\mathrm{Sa}(\omega/2)$$

Donc, en exploitant la propriété

$$tf(t)\Leftrightarrow j\frac{dF(\omega)}{d\omega}$$

Nous savons que

$$\begin{aligned}F(\omega)&=j\frac{d}{d\omega}e^{j\omega/2}\,\mathrm{Sa}(\omega/2)+j\frac{d}{d\omega}e^{-j\omega/2}\,\mathrm{Sa}(\omega/2)\\&=j\frac{d}{d\omega}\frac{e^{j\omega/2}\sin(\omega/2)}{\omega/2}+j\frac{d}{d\omega}\frac{e^{-j\omega/2}\sin(\omega/2)}{\omega/2}\end{aligned}\quad \text{etc.}$$

Méthode 4:

Il est toujours possible de calculer la transformée en utilisant l'équation d'analyse.

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-1}^{0}-te^{-j\omega t}dt+\int_{0}^{1}te^{-j\omega t}dt$$

B-

Pour chercher l'énergie totale, nous utilisons un calcul dans le domaine temporel

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}f^2(t)dt=\int_{-1}^{1}t^2(t)dt=\left.\frac{t^3}{3}\right|_{-1}^{1}=\frac{2}{3}$$

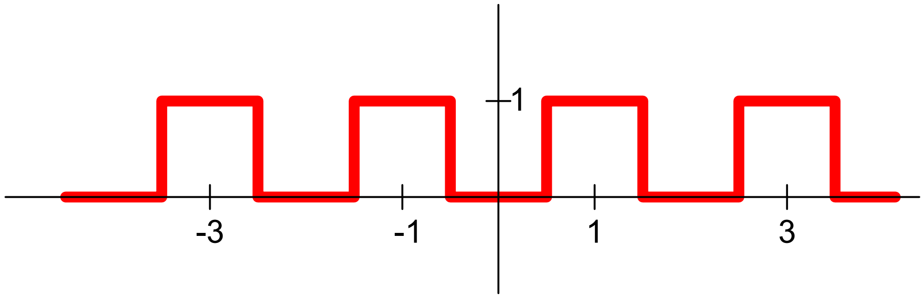
L'énergie DC, c'est-à-dire l'énergie pour ω=0, est

$$E(0)=\frac{1}{2\pi}\left|F(0)\right|^2=\frac{1}{2\pi}$$

Donc l'énergie à DC comme pourcentage de l'énergie totale est

$$\frac{1/2\pi}{2/3}=\frac{3}{4\pi}=18\%$$

Problème 2



A-

$$f_r(t) = \mathrm{Rect}\left(\frac{t-1}{1}\right)$$

$$F_r(\omega) = TF\left\{\mathrm{Rect}\left(\frac{t-1}{1}\right)\right\} = e^{-j\omega} TF\{\mathrm{Rect}(t)\} = e^{-j\omega}\,\mathrm{Sa}(\omega/2)$$

$$F(n) = \frac{1}{T_0} F_r(n\omega_0) = \frac{1}{T_0} e^{-jn\omega_0} Sa(n\omega_0/2) = \frac{1}{2} e^{-jn\pi} Sa(n\pi/2)$$

Résultat équivalent en calculant directement $F(n) = \dfrac{e^{-jn\pi/2} - e^{-j3n\pi/2}}{j2n\pi}$

Pour n=0,

$$F(n=0) = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_{1/2}^{3/2} dt = \frac{1}{2}$$

Simplification

$$F(n) = \frac{1}{2}(-1)^n Sa(n\pi/2) = \frac{1}{2}(-1)^n \frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi/2} = \frac{(-1)^n}{n\pi}\sin(n\pi/2)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(-1)^n}{n\pi}(-1)^{\frac{n-1}{2}} & \text{n impaire} \\ \dfrac{1}{2} & \text{n=0} \\ 0 & \text{n paire} \end{cases} \quad = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{n\pi} & \text{n impaire} \\ \dfrac{1}{2} & \text{n=0} \\ 0 & \text{n paire} \end{cases}$$

En résumé,

$$F\left(2k-1\right)=\frac{(-1)^k}{(2k-1)\pi}$$

$$F(0)=\frac{1}{2}$$

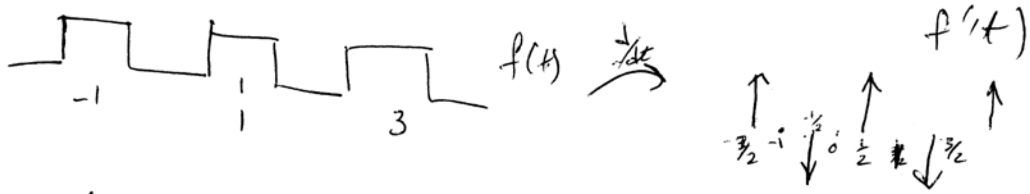
La transformée de Fourier est donc

$$F\left(\omega\right)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F_{Série}\left(n\right)\delta\left(\omega-n\omega_0\right)=2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{\left(-1\right)^k}{(2k-1)\pi}\delta\left(\omega-(2k-1)\pi\right)$$

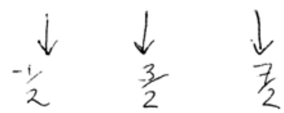
ou,

$$F\left(\omega\right)=\sum_{\substack{n=-\infty,\\ n\text{ impair},\\ n\neq 0}}^{+\infty}\frac{2\left(-1\right)^{\frac{n+1}{2}}}{n}\delta\left(\omega-n\pi\right)+\pi\delta\left(\omega\right)$$

Méthode B



etc $= \delta_2\left(t-\frac{1}{2}\right)$



itc $= -\delta_2\left(t+\frac{1}{2}\right)$

$$f'(t) = \delta_2\left(t-\tfrac{1}{2}\right) - \delta\left(t+\tfrac{1}{2}\right)$$

$$j\omega F(\omega) = e^{-j\frac{\omega}{2}}\,\omega_c\,\delta_{\omega_c}(\omega) - e^{j\frac{\omega}{2}}\,\omega_c\,\delta_{\omega_c}(\omega)$$

$$= \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\frac{\omega}{2}}\,\delta(\omega-n\pi) - \pi\sum e^{-j\frac{\omega}{2}}\,\delta(\omega-n\pi)$$

$$= \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(e^{j\frac{n\pi}{2}} - e^{-j\frac{n\pi}{2}}\right)\delta(\omega-n\pi)$$

$$= \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2j\,\sin\frac{n\pi}{2}\,\delta(\omega-n\pi)$$

$$= 2j\pi \sum_{n\ \text{impair}} (-1)^{\frac{n-1}{2}}\,\delta(\omega-n\pi)$$

$$F(\omega) = 2\pi \sum_{n\ \text{impair}} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n\pi}\,\delta(\omega-n\pi)$$

B-

Nous calculons les premiers 3 harmoniques

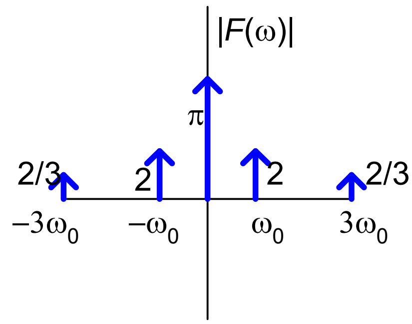
$$F(n=0)=\frac{1}{2}$$

$$F(n=1)=\frac{-1}{\pi} \quad F(n=-1)=\frac{1}{\pi}$$

$$F(n=2)=0 \quad F(n=-2)=0$$

$$F(n=3)=\frac{1}{3\pi} \quad F(n=-1)=\frac{-1}{3\pi}$$

Voilà le graphique de la transformée $F(\omega)$, qui n'est pas $F(n)$.



C-

En regardent la somme, nous voyons un terme $e^{-jn\pi\frac{1}{2}}$ et nous pensons à la série de Fourier de la fonction évaluer à t=½. La fonction à ce point est discontinue, donc nous exploitons le théorème de Fourier pour dire

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left[\lim_{t^+\to ½} f(t)-\lim_{t^-\to ½} f(t)\right]=\frac{1}{2}[1-0]=\frac{1}{2}$$

La série de Fourier à ce point est

$$f(t)\Big|_{t=½}=\frac{1}{2}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(n)e^{jn\omega_0 t}\Big|_{t=½}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(n)e^{jn\pi ½}$$

$$=\sum_{n\text{ impair}}^{\infty}F(n)e^{jn\pi ½}+F(0)e^{j0\pi ½}=\sum_{n\text{ impair}}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{n\pi}e^{jn\pi ½}+F(0)e^{j0\pi ½}$$

$$=\sum_{n\text{ impair}}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{n\pi}e^{jn\pi ½}+\frac{1}{2}$$

Donc

$$\sum_{n=-\infty,\text{ n odd}}^{+\infty}\frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{n}e^{jn\pi\frac{1}{2}}=\pi\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right]=0$$

Pareillement nous pouvons exploiter que pour n impaire

$$e^{jn\frac{\pi}{2}} = \cos n\pi/2 + j\sin n\pi/2 = 0 + j(-1)^{\frac{n+1}{2}} = j(-1)^{\frac{n+1}{2}}$$

Donc la somme est

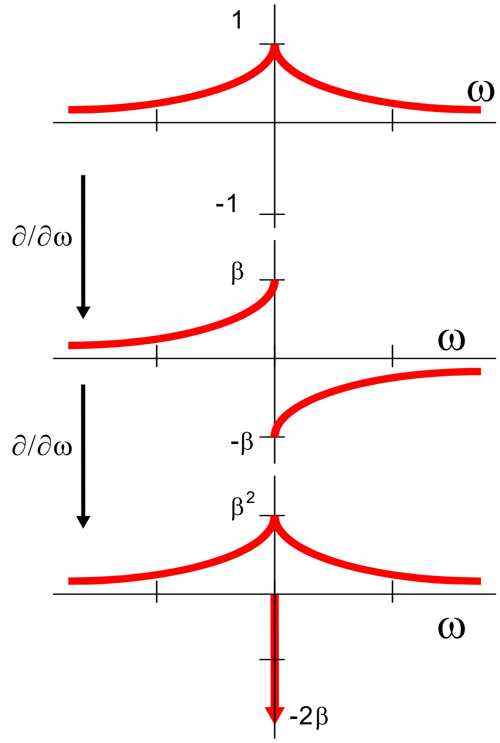
$$\sum_{n=-\infty,\, n \text{ impaire}}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{n} e^{jn\pi\frac{1}{2}} = \sum_{n=-\infty,\, n \text{ impaire}}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{n} j(-1)^{\frac{n+1}{2}} = \sum_{n=-\infty,\, n \text{ impaire}}^{\infty} \frac{j}{n}$$

$$= \sum_{n=-\infty,\, n \text{ impaire}}^{0} \frac{j}{n} + \sum_{n=0,\, n \text{ impaire}}^{\infty} \frac{j}{n} = \sum_{n=-\infty,\, n \text{ impaire}}^{0} \frac{j}{n} + \sum_{n=-\infty,\, n \text{ impaire}}^{0} \frac{j}{-n}$$

$$= \sum_{n=-\infty,\, n \text{ impaire}}^{0} \frac{j}{n} - \sum_{n=-\infty,\, n \text{ impaire}}^{0} \frac{j}{n} = 0$$

Problème 3

A-



$$e^{-\beta|t|} \Leftrightarrow \frac{2\beta}{\beta^2+\omega^2}$$

D'après la dualité on peut avoir

$$\frac{2\beta}{\beta^2+t^2} \Leftrightarrow 2\pi e^{-\beta|\omega|}$$

Pour β=1

$$\frac{1}{1+t^2} \Leftrightarrow \pi e^{-|\omega|}$$

$$t^n f(t) \Leftrightarrow (j)^n \frac{d^n}{d\omega^n} F(\omega)$$

$$tf(t) \Leftrightarrow j\frac{dF(\omega)}{d\omega}$$

$$t^2 f(t) \Leftrightarrow (j)^2 \frac{d^2}{d\omega^2} F(\omega)$$

$$\frac{t}{1+t^2} \Leftrightarrow j\pi\frac{d}{d\omega}e^{-|\omega|} = j\pi e^{\omega}U(-\omega) - j\pi e^{-\omega}U(\omega) = j\pi e^{-|\omega|}\,\mathrm{sgn}(\omega) = \begin{cases} j\pi e^{\omega} & \omega < 0 \\ j\pi e^{-\omega} & \omega > 0 \end{cases}$$

B-

$$\frac{t^2}{1+t^2} \Leftrightarrow -\pi\frac{d^2}{d\omega^2}e^{-|\omega|} = -\pi\frac{d}{d\omega}e^{\omega}U(-\omega) + \pi\frac{d}{d\omega}e^{-\omega}U(\omega)$$

$$\Leftrightarrow -\pi e^{\omega}\frac{d}{d\omega}U(-\omega) - \pi e^{\omega}U(-\omega) - \pi e^{-\omega}U(\omega) + \pi e^{-\omega}\frac{d}{d\omega}U(\omega)$$

$$\Leftrightarrow -\pi e^{\omega}\frac{d}{d\omega}U(-\omega) - \pi e^{\omega}U(-\omega) - \pi e^{-\omega}U(\omega) + \pi e^{-\omega}\frac{d}{d\omega}U(\omega)$$

$$\Leftrightarrow -\pi e^{\omega}\frac{d}{d\omega}U(-\omega) - \pi e^{\omega}U(-\omega) - \pi e^{-\omega}U(\omega) + \pi e^{-\omega}\frac{d}{d\omega}U(\omega)$$

$$\Leftrightarrow -\pi e^{\omega}\frac{d}{d\omega}U(-\omega) - \pi e^{\omega}U(-\omega) - \pi e^{-\omega}U(\omega) + \pi e^{-\omega}\frac{d}{d\omega}U(\omega)$$

$$\Leftrightarrow -\pi e^{\omega}\frac{d}{d\omega}U(-\omega) - \pi e^{\omega}U(-\omega) - \pi e^{-\omega}U(\omega) + \pi e^{-\omega}\frac{d}{d\omega}U(\omega)$$

$$\Leftrightarrow \pi e^{\omega}\delta(\omega) - \pi e^{\omega}U(-\omega) - \pi e^{-\omega}U(\omega) + \pi e^{-\omega}\delta(\omega)$$

$$\Leftrightarrow \pi e^{\omega}\delta(\omega) - \pi e^{-|\omega|} + \pi e^{-\omega}\delta(\omega)$$

$$\Leftrightarrow \pi e^{0}\delta(\omega) - \pi e^{-|\omega|} + \pi e^{-0}\delta(\omega)$$

$$\Leftrightarrow 2\pi\delta(\omega) - \pi e^{-|\omega|}$$

ou

$$\frac{t^2}{1+t^2} = \frac{t^2+1-1}{1+t^2} = 1 - \frac{1}{1+t^2} \Leftrightarrow 2\pi\delta(\omega) - \pi e^{-|\omega|}$$

C- Nous pouvons exploiter le théorème de Parseval. Pour la fonction $\frac{t}{1+t^2}$ nous voyons que $\frac{1}{1+t^2} \Leftrightarrow \pi e^{-|\omega|}$. Nous savons que la fonction exponentielle décroissante de deux côtés a une aire finie. Donc, dans le domaine fréquentiel est de carré intégrable et la fonction en temps est de carré intégrable (dualité).

Pour la fonction $\frac{t^2}{1+t^2}$ la transformées contient une fonction delta, donc une énergie infinie. Cette fonction n'est pas de carré intégrable.