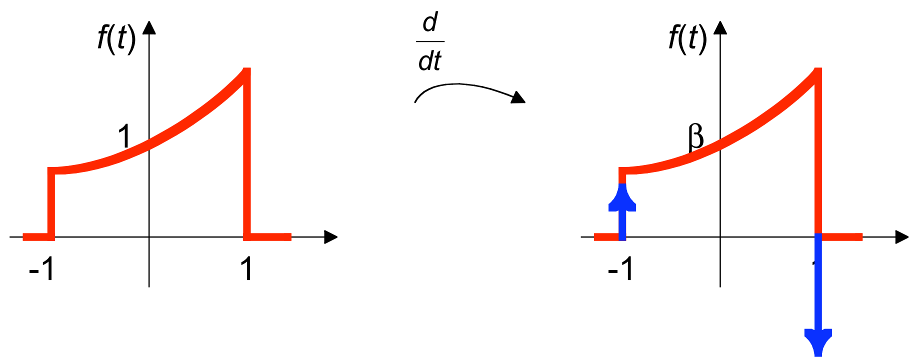
1999 Examen Partiel - *Solutions*

Problème 1

Méthode A

On va utiliser les méthodes de dérivée. Nous commençons avec la première



dérivée de cette fonction pas continue. La première dérivée est égale à β fois la fonction originale, plus deux fonctions delta aux deux points de discontinuité.

$$\frac{d}{dt} f(t) = e^{-\beta}\delta(t+1) - e^{\beta}\delta(t-1) + \beta f(t)$$

La transformée de Fourier des deux côtés de cette équation est

$$j\omega F(\omega) = e^{-\beta}e^{j\omega} - e^{\beta}e^{-j\omega} + \beta F(\omega)$$

En utilisant le théorème de dérivation nous avons que

$$(j\omega - \beta)F(\omega) = e^{-(\beta - j\omega)} - e^{(\beta - j\omega)}$$

Comme *f*(*t*) est une fonction intégrable (elle est bornée et de durée finie) nous avons que sa transformée est

$$F(\omega) = \frac{e^{(\beta - j\omega)} - e^{-(\beta - j\omega)}}{\beta - j\omega}$$

Méthode B

Nous pouvons toujours calculer la transformée directement de l'équation d'analyse,

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-1}^{1} e^{\beta t}e^{-j\omega t}dt$$
$$=\int_{-1}^{1} e^{-t(\beta-j\omega)}dt=-\frac{e^{-t(\beta-j\omega)}}{\beta-j\omega}\Bigg|_{-1}^{1}$$
$$=-\frac{e^{-t(\beta-j\omega)}}{\beta-j\omega}\Bigg|_{-1}^{1}$$
$$=\frac{e^{(\beta-j\omega)}-e^{-(\beta-j\omega)}}{\beta-j\omega}$$

Vérification

La fonction originale $f(t)$ est réelle et ni paire ni impaire. Sa transformée doit avoir une partie réelle et une partie imaginaire. $F(\omega)$ est bien complexe.

B. Pour chercher l'énergie du signal nous utilisons l'équation

$$E(\omega)=\frac{1}{2\pi}\left|F(\omega)\right|^2$$

Il manque un carré ici autour de la fraction

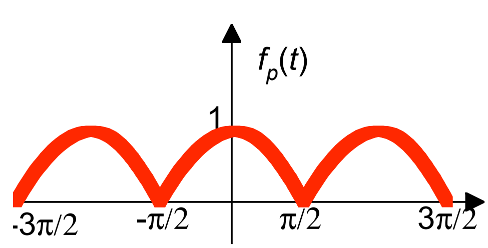
Donc l'énergie DC sera

$$E(0)=\frac{1}{2\pi}\left|F(0)\right|^2=\frac{1}{2\pi}\boxed{\frac{e^{(\beta-j0)}-e^{-(\beta-j0)}}{\beta-j0}}=\frac{e^{\beta}-e^{-\beta}}{2\pi\beta}$$

Nous pouvons également utiliser

$$F(0)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j0t}dt=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$$
$$=\int_{-1}^{1} e^{\beta t}dt=\frac{e^{\beta t}}{\beta}\Bigg|_{-1}^{1}=\frac{e^{\beta}-e^{-\beta}}{\beta}$$

Problème 2



A) (12 pts) La fonction est périodique, donc nous savons de départ que la transformée aura la forme suivante

$$F(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_{Série}(n)\,\delta(\omega - n\omega_0)$$

La période est $T_0=\pi$ et la fréquence fondamentale est $\omega_0=2$. Il faut trouver les coefficients de la série de Fourier, et nous avons deux méthodes pour le faire. Nous pouvons calculer les coefficients à partir de l'équation d'analyse, ou nous pouvons utiliser la restriction de la fonction $f_r(t)$ et la relation suivante

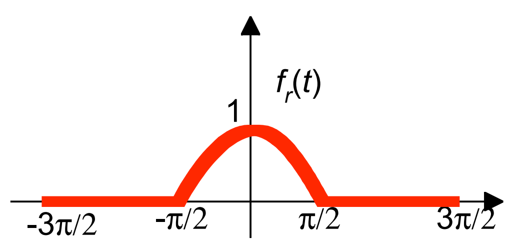
$$F_{Série}(n) = \frac{F_{Restriction}(n\omega_0)}{T_0}$$

où $f_r(t) \Leftrightarrow F_{Restriction}(\omega)$. Nous commencerons avec cette deuxième méthode. Avant que nous commençons, nous calculons $F_{Série}(n=0)$. Ça doit être calculé directement pour toutes les méthodes.

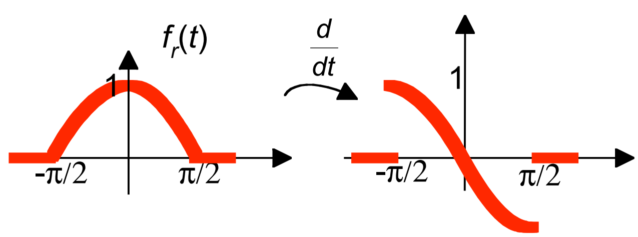
$$F(0) = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left|\cos t\right| dt$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t dt = \left.\frac{\sin t}{\pi}\right|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{2}{\pi}$$

Méthode A

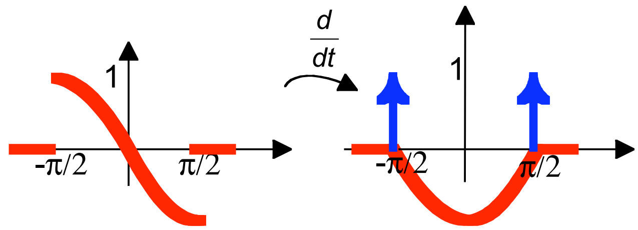
Nous allons utiliser le méthode de dérivées pour chercher les coefficients de la série de Fourier. La restriction de la fonction $f(t)$ est



Nous commençons avec la première dérivée de cette fonction continue



La deuxième dérivée aura des fonctions delta aux points de discontinuité de la première dérivée.



Maintenant nous avons la relation suivante

$$\frac{d^2}{dt^2} f_r(t) = -f_r(t) + \delta\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + \delta\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$$

En cherchant la transformée de Fourier des deux côtés nous arrivons à

$$\begin{aligned}(j\omega)^2 F_r(\omega) &= -F_r(\omega) + e^{-j\omega\frac{\pi}{2}} + e^{j\omega\frac{\pi}{2}} \\ &= -F_r(\omega) + 2\left[\frac{e^{-j\omega\frac{\pi}{2}} + e^{j\omega\frac{\pi}{2}}}{2}\right] \\ &= -F_r(\omega) + 2\cos\omega\pi/2\end{aligned}$$

Comme $f(t)$ est une fonction intégrable (elle est bornée et de durée finie) nous avons que sa transformée est

$$F_r(\omega) = \frac{2\cos\omega\pi/2}{1-\omega^2}$$

Le coefficients de la série de Fourier est donc

$$\begin{aligned}F(n) &= \frac{F_r(n\omega_0)}{T_0} = \frac{1}{\pi}\left.\frac{2\cos\omega\pi/2}{1-\omega^2}\right|_{2n} \\ &= \frac{1}{\pi}\frac{2\cos n\pi}{1-4n^2} = \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}\end{aligned}$$

Nous voyons que l'équation est aussi valide pour n=0. Maintenant nous sommes capables d'écrire la transformée de cette fonction périodique

$$\begin{aligned}F(\omega) &= 2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_{Série}(n)\delta(\omega - n\omega_0) \\ &= 4\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}\delta(\omega - 2n)\end{aligned}$$

Méthode B

Nous pouvons aussi calculer les coefficients de la série de Fourier en utilisant le calcul direct à partir de l'équation d'analyse

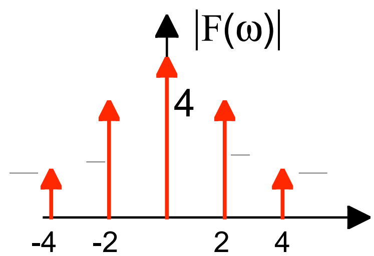
$$
\begin{aligned}
F(n) &= \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left|\cos t\right| e^{-jn\pi t}dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos t e^{-jn2t}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(e^{jt}+e^{-jt}\right)e^{-jn2t}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-jt(n2-1)}dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-jt(n2+1)}dt \\
&= -\left.\frac{e^{-jt(n2-1)}}{j(n2-1)}\right|_{-\pi/2}^{\pi/2} - \left.\frac{e^{-jt(n2+1)}}{j(n2+1)}\right|_{-\pi/2}^{\pi/2}
\end{aligned}
$$

Etcetera…

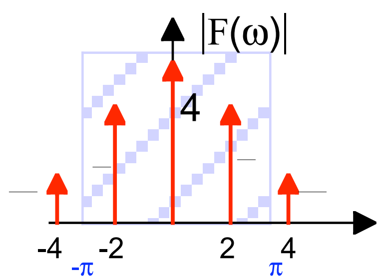
Vérification

La fonction originale $f(t)$ est réelle et paire. Sa transformée doit être entièrement réelle et paire. $F(\omega)$ est bien réelle et, en plus, elle est une fonction paire, comme nous voyons dans le spectre d'amplitude

B) (2 pts) Le spectre d'amplitude est



C) (2 pts) Dans la bande de fréquence $-\pi<\omega<\pi$, nous avons juste trois fonctions delta, ça veut dire il y en a juste trois coefficients de la série de Fourier.



La puissance moyenne dans cette bande de fréquence est donc

$$P=\sum_{n=-1}^{1}\left|F(n)\right|^2=\left|F(-1)\right|^2+\left|F(0)\right|^2+\left|F(1)\right|^2$$

$$=\left(\frac{2}{3\pi}\right)^2+\left(\frac{2}{\pi}\right)^2+\left(\frac{2}{3\pi}\right)^2=\frac{4}{\pi^2}+\frac{8}{9\pi^2}=\frac{44}{9\pi^2}$$

Problème 3

Méthode A

Pour chercher la transformée inverse de

$$F(\omega)=\frac{\cos^2(\omega)}{\omega}$$

nous devons simplifier le dénominateur en écrivant

$$F(\omega)=\frac{1-\sin^2(\omega)}{\omega}=\frac{1}{\omega}-\frac{\sin^2(\omega)}{\omega}$$

Nous pouvons facilement trouver la transformée du premier terme. Pour le deuxième nous allons utiliser que

$$\mathrm{Tri}(t/\tau)\Leftrightarrow\tau\,\mathrm{Sa}^2(\omega\tau/2)=\tau\frac{\sin^2(\omega\tau/2)}{(\omega\tau/2)^2}$$

Pour τ=2, ça donne

$$\mathrm{Tri}(t/2)\Leftrightarrow 2\frac{\sin^2(\omega)}{\omega^2}$$

En appliquant la propriété que

$$\frac{d}{dt}f(t)\Leftrightarrow j\omega F(\omega)$$

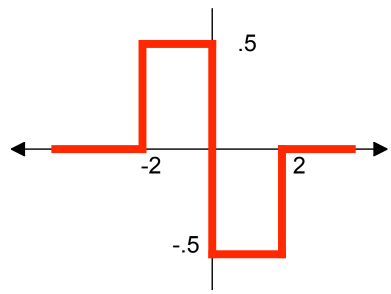
Nous avons que

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Tri}(t/2)\Leftrightarrow 2j\omega\frac{\sin^2(\omega)}{\omega^2}=2j\frac{\sin^2(\omega)}{\omega}$$

Donc

$$-\frac{j}{2}\frac{d}{dt}\mathrm{Tri}\left(t/2\right) \Leftrightarrow \frac{\sin^2(\omega)}{\omega}$$

La dérivée d'une triangle de longueur 4, centre sur zéro et d'hauteur un est la suivante



Nous le pouvons é

crire comme

$$-\frac{j}{4}\left[\mathrm{Rect}\left(\frac{t+1}{2}\right)-\mathrm{Rect}\left(\frac{t-1}{2}\right)\right] \Leftrightarrow \frac{\sin^2(\omega)}{\omega}$$

La solution finale est donc

$$f(t) = TF^{-1}\left\{\frac{1}{\omega}-\frac{\sin^2(\omega)}{\omega}\right\}$$
$$=\frac{j}{2}\mathrm{sgn}(t)+\frac{j}{4}\left[\mathrm{Rect}\left(\frac{t+1}{2}\right)-\mathrm{Rect}\left(\frac{t-1}{2}\right)\right]$$

Méthode B

Pour chercher la transformée inverse de

$$F(\omega) = \frac{\cos^2(\omega)}{\omega}$$

nous utilisons la formule d'Euler $\cos(\omega) = \frac{e^{j\omega}+e^{-j\omega}}{2}$

qui nous donne

$$\begin{aligned}F(\omega) &= \frac{\cos^2(\omega)}{\omega} = \frac{\cos(2\omega)+1}{2\omega} \\ &= \frac{e^{2j\omega}+e^{-2j\omega}+2}{4\omega} = \frac{1}{2\omega}+\frac{e^{2j\omega}}{4\omega}+\frac{e^{-2j\omega}}{4\omega} \\ &= \frac{2}{j\omega}\frac{j}{4}+e^{2j\omega}\frac{2}{j\omega}\frac{j}{8}+e^{-2j\omega}\frac{2}{j\omega}\frac{j}{8}\end{aligned}$$

Nous pouvons facilement trouver la transformée du premier terme. Pour le deuxième et le troisième nous allons appliquer la propriété que

$$f(t+a) \Leftrightarrow e^{ja\omega}F(\omega)$$

Nous avons que

$$Sgn(t) \Leftrightarrow 2/j\omega$$

$$Sgn(t+2) \Leftrightarrow e^{2j\omega}\frac{2}{j\omega}$$

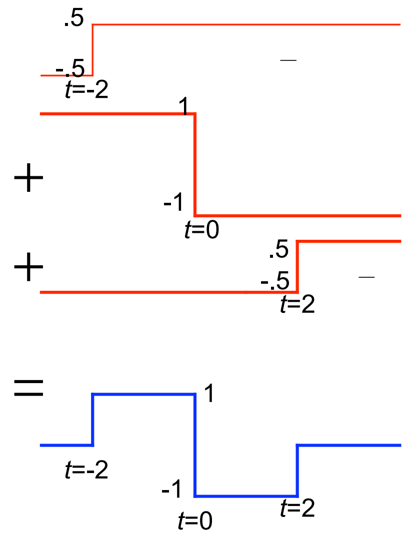
$$Sgn(t-2) \Leftrightarrow e^{-2j\omega}\frac{2}{j\omega}$$

La solution finale est donc

$$\begin{aligned}f(t) &= TF^{-1}\left\{\frac{2}{j\omega}\frac{j}{4}+e^{2j\omega}\frac{2}{j\omega}\frac{j}{8}+e^{-2j\omega}\frac{2}{j\omega}\frac{j}{8}\right\} \\ &= \frac{j}{4}\operatorname{sgn}(t)+\frac{j}{8}\operatorname{sgn}(t+2)+\frac{j}{8}\operatorname{sgn}(t-2)\end{aligned}$$

Nous pouvons vérifier que les deux résultats (méthode A et méthode B) sont équivalents. Par methode B nous avons

$$\begin{aligned}f(t) &= \frac{j}{2}\operatorname{sgn}(t)-\frac{j}{4}\operatorname{sgn}(t)+\frac{j}{8}\operatorname{sgn}(t+2)+\frac{j}{8}\operatorname{sgn}(t-2) \\ &= \frac{j}{2}\operatorname{sgn}(t)+\frac{j}{4}\left[\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(t+2)+\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(t-2)-\operatorname{sgn}(t)\right]\end{aligned}$$



Donc nous voyons l'équivalence des résultats.

Méthode C

Nous savons que $\operatorname{sgn}(x) = 2U(x) - 1$ donc nous pouvons aussi écrire

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{j}{4}\operatorname{sgn}(t) + \frac{j}{8}\operatorname{sgn}(t+2) + \frac{j}{8}\operatorname{sgn}(t-2) \\ &= \frac{j}{4}\left[2U(t) + U(t+2) + U(t+2) - 2\right] \end{aligned}$$