Chargé de cours : Mihai Cristian Florea
Automne 2006
MAT 19961 - Calcul Matriciel
Examen 1 - Corrigé
Vendredi 27 octobre
19h00 - 21h00
Aucun document autorisé
Calculatrice non autorisée

# 1	/ 15
# 2	/ 15
# 3	/ 25
# 4	/ 20
# 5	/ 25
Total	/ 100

DÉPARTEMENT D'INFORMATIQUE et de GÉNIE LOGICIEL

gel-gif Département de génie électrique et de génie informatique

UNIVERSITÉ LAVAL

Problème 1 (/ 15)

Soit un carré défini par les sommets de coordonnées $(1,1)$, $(1,4)$, $(4,4)$ et $(4,1)$ et qui possède une aire égale à 9cm^2. On effectue successivement les transformations suivantes sur le l'ensemble des points définissant le carré :

– Une rotation d'angle $+30^\circ$ appelée T_1
– Un cisaillement horizontal de facteur $k=2$ appelée T_2
– Une dilatation verticale de facteur $k=2$ appelée T_3
– Une réflexion par rapport à la droite $y=x$ appelée T_4

1. (8 points) Donner les matrices de chacune des transformations T_1, T_2, T_3 et T_4. Spécifier le type de coordonnées utilisé (coordonnées classiques ou homogènes).
2. (7 points) Calculer l'aire du losange obtenu après que toutes les transformations aient été appliquées au carré initial.

Solution :

1. Les matrices des transformées sont :

$$T_1 : \qquad A_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$T_2 : \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_3 : \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$T_4 : \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. L'aire du carré initial est égale à Aire(carré) $= 9$.

$$\text{Aire(losange)} = \text{Aire(carré)} \times |\det A|$$

où $A = A_4A_3A_2A_1$ est la matrice de la transformation totale. Cependant

$$\det A = (\det A_1)(\det A_2)(\det A_3)(\det A_4)$$

et donc :

$$\text{Aire(losange)} = \text{Aire(carré)} \times |(\det A_1)(\det A_2)(\det A_3)(\det A_4)| = 18$$

car $|\det A_1| = 1$, $|\det A_2| = 1$, $|\det A_3| = 2$ et $|\det A_4| = 1$

Problème 2 (/ 15)

Soit une transformation $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ donnée par :

$$T(\mathbf{x}) = T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 + x_3 - 2 \\ -x_1 + 3x_2 - 2 \end{pmatrix}$$

1. (5 points) Donnez la (les) condition(s) nécessaire(s) et suffisante(s) pour qu'une transformation $T(\mathbf{x})$ soit linéaire ?
2. (5 points) Montrez que la transformation T n'est pas une transformation linéaire ?
3. (5 points) Trouvez l'image du vecteur $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ à travers T ?

Solution :

1. On peut avoir une seule condition : $T(\mathbf{x})$ peut s'écrire comme le produit entre une matrice A et le vecteur $\mathbf{x}$:
$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \qquad \forall \mathbf{x}$$
On peut avoir aussi 2 conditions :
$$T(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = T(\mathbf{x}_1) + T(\mathbf{x}_2) \qquad \forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$$
$$T(\alpha\mathbf{x}) = \alpha T(\mathbf{x}) \qquad \forall \alpha \in \mathbf{R}, \forall \mathbf{x}$$
2. Il suffit de montrer que : $T(2\mathbf{x}) \neq 2T(\mathbf{x})$ pour un certain $\mathbf{x}$.
Choisissons $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$:
$$T(2\mathbf{x}) = T(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$T(\mathbf{x}) = T(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$
Il est évident que $T(2\mathbf{x}) \neq 2T(\mathbf{x})$ et donc la transformation n'est pas linéaire.
3. (5 points) Trouvez l'image du vecteur $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ à travers T ?
$$T(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Problème 3 (/ 25)

Considérons le système d'équations $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ donné par la matrice A et le vecteur $\mathbf{b}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. (4 points) Trouver une partition de la matrice A en blocs pour qu'elle soit triangulaire inférieure de dimension 2×2.
2. (4 points) Quelle est l'expression générale de l'inverse d'une matrice B de dimension 2×2 ? (Vous n'êtes pas obligés de faire des calculs - vous pouvez donner directement la formule).

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

3. (5 points) Quelle est l'expression générale de l'inverse d'une matrice **BLOC** triangulaire inférieure C de dimension 2×2 ? (Vous n'êtes pas obligés de faire des calculs - vous pouvez donner directement la formule).
4. (8 points) Trouver l'inverse de la matrice A en utilisant seulement les inverses des matrices 2×2 et le concept de matrices blocs. **VOUS N'AVEZ PAS LE DROIT DE CALCULER L'INVERSE À L'AIDE DE LA MÉTHODE DE LA RÉDUCTION DES LIGNES OU LA MÉTHODE DES COFFACTEURS.**
5. (4 points) Trouver la solution du système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ à partir de la matrice inverse retrouvée au point précédent ?

Solution :

1. Trouver une partition de la matrice A en blocs pour qu'elle soit triangulaire inférieure.

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

2. Quelle est l'expression générale de l'inverse d'une matrice B de dimension 2×2 ?

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}} \begin{pmatrix} b_{22} & -b_{12} \\ -b_{21} & b_{11} \end{pmatrix}$$

3. Quelle est l'expression générale de l'inverse d'une matrice bloc triangulaire inférieure C de dimension 2×2 ?

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & 0 \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} C_{11}^{-1} & 0 \\ -C_{22}^{-1}C_{21}C_{11}^{-1} & C_{22}^{-1} \end{pmatrix}$$

4. Trouver l'inverse de la matrice A en utilisant seulement les inverses des matrices 2×2 et le concept de matrices blocs.

On calcule les blocs de dimensions 2×2 dans la matrice inverse :

$$A_{11}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_{22}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
-A_{22}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} &= -\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= -\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \\
&= -\begin{pmatrix} 11 & -8 \\ 7 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & 8 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

La matrice A^{-1} est :

$$
A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ -A_{22}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & A_{22}^{-1} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{rr|rr} 3 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline -11 & 8 & 2 & 3 \\ -7 & 5 & 1 & 2 \end{array}\right)
$$

5. Trouver la solution du système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ à partir de la matrice inverse retrouvée au point précédent ?

   La solution du système est donnée par :

$$
\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -11 & 8 & 2 & 3 \\ -7 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

Problème 4 (/ 20)

La matrice augmentée d'un système est amenée avec l'algorithme de réduction de lignes à la forme suivante :

$$
(A \ \mathbf{b}) \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 & \beta \\ 0 & 1 & \alpha & -2 & \beta+2 \\ 0 & 0 & 2-\alpha & 1 & 3+\beta \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-1 & 5-\beta \end{pmatrix}
$$

1. (5 points) Pour quelle valeur de α et β le système possède une solution unique ?
2. (10 points) Pour quelle valeur de α et β le système possède une infinité de solutions ?
3. (5 points) Pour quelle valeur de α et β le système ne possède aucune solution ?

Solution :

1. Il faut que les 4 premières colonnes de la matrice augmentée soient des colonnes pivot. Alors, $2-\alpha \neq 0$ et $\alpha - 1 \neq 0$. Ce qui implique que le système possède une solution unique pour tout $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{1, 2\}$ et pour tout $\beta \in \mathbf{R}$.
2. Le système possède une infinité de solutions si et seulement si le parmi les 4 premières colonnes de la matrice augmentée on retrouve des colonnes qui ne sont pas pivot et que la 5ème colonne n'est pas une colonne pivot. Les 2 premières colonnes sont toujours des colonnes pivot. Ainsi on se concentre que sur les colonnes 3 et 4.

(a) Si $\alpha - 1 = 0$ qui est équivalent à $\alpha = 1$, la quatrième colonne n'est pas une colonne pivot et la 3ème colonne est une colonne pivot. Ainsi, pour avoir un système consistant il faut que le dernier élément de la dernière colonne soit nul (car la dernière colonne ne doit pas être une colonne pivot). Ainsi $5 - \beta = 0$ ou encore $\beta = 5$.

(b) Si $2 - \alpha = 0$ qui est équivalent à $\alpha = 2$ troisième colonne n'est pas une colonne pivot. Cependant pour que le système ait une infinité de solutions, il faut que la dernière colonne ne soit pas une colonne pivot. Avec $\alpha = 2$ la matrice équivalente du système est :

$$(A\ \mathbf{b}) \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 & \beta \\ 0 & 1 & 2 & -2 & \beta+2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3+\beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5-\beta \end{pmatrix}$$

Ensuite, pour amener cette matrice à la forme échelon il faut faire une opération élémentaire sur la 4ème ligne $L_4 - L_3 \rightarrow L_4$ et on obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 & \beta \\ 0 & 1 & 2 & -2 & \beta+2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3+\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2-2\beta \end{pmatrix}$$

Le système admet une infinité de solutions si et seulement si la dernière colonne n'est pas une colonne pivot, ce qui implique que $2 - 2\beta = 0$ ou encore $\beta = 1$.

En conclusion, le système admet une infinité de solutions si et seulement si $\alpha = 1$ et $\beta = 5$ ou si $\alpha = 2$ et $\beta = 1$.

3. Le système ne possède aucune solution si $\alpha = 1$ et $\beta \neq 5$ ou si $\alpha = 2$ et $\beta \neq 1$.

Problème 5 (/ 25)

1. (10 points) Si A, B, C sont trois matrices de dimension $n \times n$ et inversibles. Montrez que la matrice ABC est aussi inversible et calculez son inverse en fonction de A^{-1}, B^{-1} et C^{-1}.
2. (10 points) Soit une matrice A de dimension $m \times n$. Le système $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ possède une solution unique. Que pouvez vous dire de la matrice A et de la relation entre m et n ? Expliquer votre réponse.
3. (5 points) Soit une matrice A de dimension 4×4. Quel est le déterminant de la matrice $4A$ (chaque élément de A est multiplié par 4) ? Expliquer pourquoi.

Solution :

1. Si A, B, C sont trois matrices de dimension $n \times n$ et inversibles, alors $\det A \neq 0$, $\det B \neq 0$ et $\det C \neq 0$. La matrice ABC est inversible car son déterminant $\det ABC = \det A \det B \det C \neq 0$.

   On considère aussi que la matrice BC est une matrice inversible car son déterminant est non nul.

   L'inverse du produit de deux matrices inversibles X et Y est : $(XY)^{-1} = Y^{-1}X^{-1}$.

Étant donné que la matrice ABC peut s'écrire comme le produit de deux matrices inversibles A et (BC) son inverse est :

$$(ABC)^{-1} = [A(BC)]^{-1} = (BC)^{-1}A^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$$

.

2. Si le système $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ possède une solution unique, alors cette solution est la solution triviale. On peut conclure que les vecteurs colonnes de la matrice A sont linéairement indépendants. Ainsi il ne faut pas que le nombres de colonnes de la matrice A soit supérieur au nombre de lignes car autrement les colonnes seraient linéairement dépendantes. Ainsi $m \geq n$. Si $m = n$, le déterminant de A est nul est donc la matrice n'est pas inversible.
3. $\det 4A = 4^4 \det A = 256 \det A$. Si on multiplie une ligne d'une matrice par une constante, son déterminant est multiplié par cette constante. Dans notre cas, chacune des lignes est multipliée par une constante : 4. Alors, le déterminant de la matrice $4A$ est obtenu en multipliant le déterminant de A par 4 fois par 4.

