Mat-10364 – Mathématiques de l'ingénieur II
Examen du 28 avril 2003

Question 1

(20 points)

Une surface fermée S est constituée d'un disque $D = \{x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\}$ surmonté d'une surface cônique C de sommet $(0, 0, 1)$.
Calculer le flux $\Phi := \iint_S \vec{v} \cdot \vec{n}_{\text{ext}} dA$ du champ vectoriel $\vec{v} := (3ye^z, x, y + \sin x + z^2)$ à travers S de l'intérieur vers l'extérieur.

Question 2

(20 points)

Soit S le morceau de surface d'équation $z^3 = 1 - (x^2 + y^2)$, $z > 0$.
Soit le champ vectoriel $\vec{v} := (x^2 y \cos z, \sin(xyz), e^{xyz})$.
Calculer le flux de rot$\vec{v}$ à travers S en choisissant la normale $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ avec $n_3 > 0$.

Suggestion : Utiliser le théorème de Stokes.

Question 3

(20 points)

Soit T le tore de représentation paramétrique

$$T := \vec{r}(\theta, \phi) = \Big((R+\rho\cos\phi)\cos\theta, (R+\rho\cos\phi)\sin\theta, \rho\sin\phi\Big) \quad , \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi \quad , \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

où R, ρ sont des constantes telles que $R > \rho > 0$.

a) Calculer le flux du champ vectoriel $\vec{v} := (x, 0, 0)$ à travers la surface du tore de l'intérieur vers l'extérieur.

$$\Phi := \iint_T \vec{v} \cdot \vec{n}_{\text{ext}} dA.$$

b) Donner une interprétation géométrique de Φ à l'aide du théorème de la divergence.

Question 4

(20 points)

a) Pour quelle valeur du paramètre α le travail du champ $\vec{v} := (x^3, \alpha y z^2, 3y^2 z)$ le long d'un chemin fermé quelconque situé dans le plan $x = 1$ est-il nul ?

b) Calculer le flux de $\vec{v}$ de l'intérieur vers l'extérieur d'une sphère de rayon 1 centrée à l'origine, en choisissant α selon a).

Question 5

(20 points)

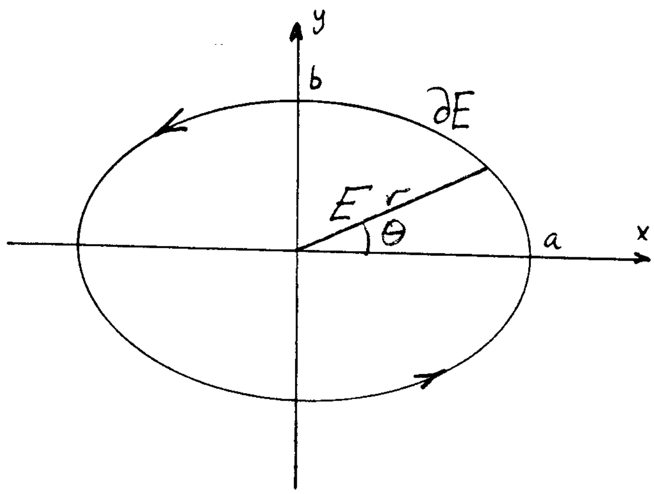
Soit E l'ellipse $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \leq 1$.

a) Parmi les champs vectoriels suivants

$$\text{(i)} \quad \vec{v} := \left(0, \frac{x^3}{3}\right) \quad , \quad \text{(ii)} \quad \vec{v} := \left(-\frac{y^3}{3}, \frac{x^3}{3}\right) \quad , \quad \text{(iii)} \quad \vec{v} := \left(-\frac{y^3}{3}, 0\right)$$

lequel faut-il choisir pour avoir l'identité

$$(*) \qquad \int_{\partial E} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \iint_E y^2 dx dy.$$



b) Évaluer l'intégrale curviligne $(*)$.