2016 Minitest1, Pr1

September 18, 2016 2:07 PM

Problème 1 (24 point sur 100)

Soit la fonction périodique $f(t) = 3 + 5\cos\left(\frac{3}{2}\pi t\right) - \sin(\pi t)$.

a. Quelle est la fréquence fondamentale ?

Nous avons $\frac{3}{2}\pi$ et π comme possibilité. En choisissant $w_0 = \pi$ nous ne pourrons pas avoir $\frac{3}{2}\pi$ comme multiple de w_0. Donc nous essayons $w_0 = \pi/2$. Nous pouvons écrire $\pi = 2 \cdot w_0 = 2 \cdot \pi/2$ ✓

Nous pouvons écrire $\frac{3}{2}\pi = 3 w_0 = 3 \cdot \pi/2$ ✓

$$w_0 = \pi/2$$

b. Calculez les coefficients F(n) de la série de Fourier de $f_p(t)$.

$\cos \frac{3}{2}\pi t = \cos 3w_0 t = \frac{1}{2}\left(e^{j3w_0t} + e^{-3jw_0t}\right)$ $\quad \sin \pi t = \sin 2w_0 t = \frac{1}{2j}\left(e^{j2w_0t} - e^{-j2w_0t}\right)$

$$= \frac{-j}{2} e^{j2w_0t} + \frac{j}{2} e^{-j2w_0t}$$

$$f_p(t) = \underbrace{3}_{F(0)} + \underbrace{\frac{5}{2} e^{j3w_0t}}_{F(3)} + \underbrace{\frac{5}{2} e^{-j3w_0t}}_{F(-3)} + \underbrace{\frac{j}{2} e^{j2w_0t}}_{F(2)} - \underbrace{\frac{j}{2} e^{-j2w_0t}}_{F(-2)}$$

$F(0) = 3 \quad F(2) = \frac{j}{2} \quad F(-2) = \frac{-j}{2} \quad F(3) = 5/2 \quad F(-3) = 5/2$

c. Quelle est le pourcentage de puissance totale dans la bande de fréquence $\cancel{-4} \leq \omega \leq \cancel{4}$?

$P(n) = |F(n)|^2$

$w_0 = \pi/2 \approx 1.57$

$2w_0 = 3.14$

$3w_0 = 4.61$

$$P_{total} = 3^2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{25}{4} + \frac{25}{4} = \frac{36+52}{4} = \frac{88}{4} = 22$$

$$P(-4 \leq w \leq 4) = |F(0)|^2 + |F(2)|^2 + |F(-2)|^2 = 9 + \frac{1}{2} = \frac{19}{2}$$

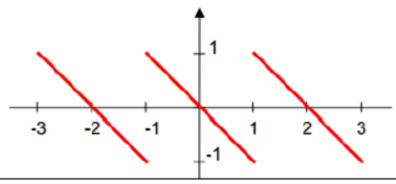
$$P(-4 \leq w \leq 4)\Big|_{\%} = \frac{19/2}{22} = {}^{19}/_{44} = 43\%$$

2016 Minitest1, Pr2a

September 18, 2016 1:59 PM

Problème 2 (24 point sur 100) Encercler les réponses correctes i)-iii)

$F(n) = A(n) + jB(n)$ sont les coefficients de la série de Fourier de $f(t)$

a)	$f(t)$ 	$F(n)$
		i) décroissance : 1/n $1/n^2$
		ii) réel imaginaire pur complexe
		iii) $F(0) = 0$ $F(0) \neq 0$

$f(t)$ est réel et impair

$f(t)$ est discontinu à $t = 2n+1$ $\forall n$

- En sachant que $f(t)$ est discontinu, la décroissance de $F(n)$ va comme $1/n$

- En sachant que $f(t)$ est réel et impair, nous savons que $F(n)$ est imaginaire pur

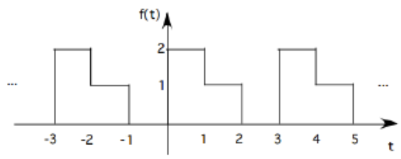
- $F(0) = \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt$ = valeur-moyen $= 0$

2016 Minitest1, Pr2b

September 18, 2016 1:59 PM

Problème 2 (24 point sur 100) Encercler les réponses correctes i)-iii)

$F(n) = A(n) + jB(n)$ sont les coefficients de la série de Fourier de $f(t)$

<table>
<tr><td rowspan="4">b)</td><td rowspan="4">f(t)
</td><td>F(n)</td></tr>
<tr><td>i) décroissance : 1/n 1/n²</td></tr>
<tr><td>ii) réel imaginaire pur complexe</td></tr>
<tr><td>iii) F(0) = 0 F(0) ≠ 0</td></tr>
</table>

$f(t)$ est réel et ni paire, ni impaire

$f(t)$ est discontinu à $t = 3n$ et $t = 2+3n$

- En sachant que $f(t)$ est discontinu, la décroissance de $F(n)$ va comme $1/n$

- En sachant que $f(t)$ est réel et ni paire, ni impaire nous savons que $F(n)$ est complexe

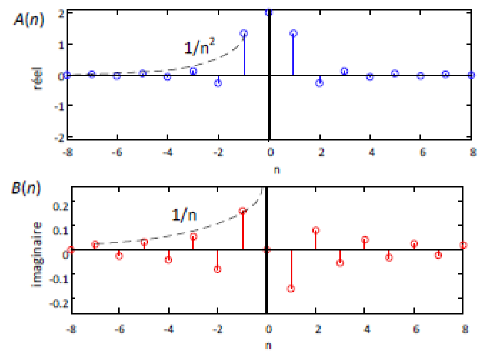
- $F(0) = \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt$ = valeur moyen $= 2+1 = 3 \neq 0$

2016 Minitest1, Pr2c

September 18, 2016 1:59 PM

Problème 2 (24 point sur 100) Encercler les réponses correctes i)-iii)

$F(n) = A(n) + jB(n)$ sont les coefficients de la série de Fourier de $f(t)$

c)	$f(t)$	
	i) PAIR IMPAIR ni pair, ni impair	
	ii) continue pas continue	
	iii) réel complexe	

En sachant que $A(n) \neq 0$ et $B(n) \neq 0$, nous savons que $f_p(t)$ est ni paire, ni impaire.

En sachant que la décroissance la plus lente est $1/n$ (voir $B(n)$) nous savons que $f_p(t)$ est discontinu

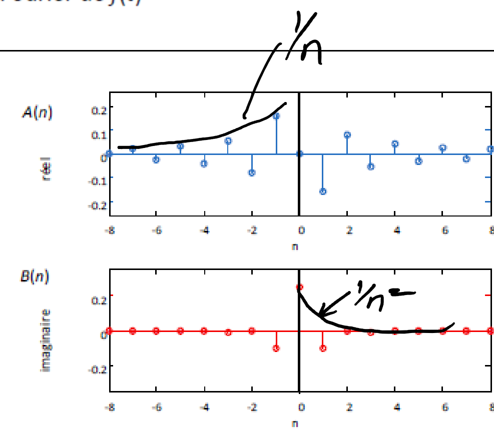
Nous observons que $A(n)$ est paire et $B(n)$ est impaire, donc $F^*(n) = F(-n)$, qui implique que $f(t)$ est reel

2016 Minitest1, Pr2d

September 18, 2016 1:59 PM

Problème 2 (24 point sur 100) Encercler les réponses correctes i)-iii)

$F(n) = A(n) + jB(n)$ sont les coefficients de la série de Fourier de $f(t)$

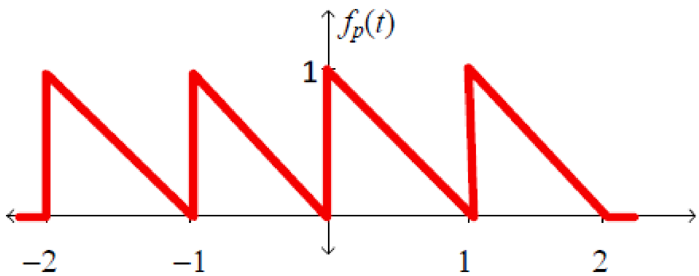
d)	$f(t)$	
	i) PAIR IMPAIR ni pair, ni impair	
	ii) continue pas continue	
	iii) réel complexe	

En sachant que $A(n) \neq 0$ et $B(n) \neq 0$, nous savons que $f_p(t)$ est ni paire, ni impaire.

En sachant que la décroissance la plus lente est $1/n$ (voir $A(n)$) nous savons que $f_p(t)$ est discontinu

Nous observons que $A(n)$ est impaire et $B(n)$ est paire, donc $F^*(n) \neq F(-n)$, qui implique que $f(t)$ n'est pas réel

Problème 3 (52 points sur 100)



La fonction $f_p(t)$ est définie sur une période $f_p(t) = 1 - t \quad 0 \le t \le 1$

La fonction est périodique avec période T=1, soit $f_p(t) = f_p(t+n)$

Calculez les coefficients F(n) de la série de Fourier de $f_p(t)$.

$$T = 1 \Rightarrow \omega_0 = 2\pi$$

$$F(n) = \frac{1}{T_0}\int_{-T/2}^{T/2} f_p(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt = \int_0^1 (1-t)\, e^{-jn2\pi t}\, dt$$

$$= \int_0^1 e^{-jn2\pi t}\, dt - \int_0^1 t e^{-jn2\pi t}$$

$$= \frac{e^{-j2n\pi t}}{-j2n\pi}\Bigg|_0^1 - \left[\left(\frac{t}{-j2\pi n} - \frac{1}{(-j2n\pi)^2}\right) e^{-j2n\pi t}\right]_0^1$$

$a = -j2n\pi$

$$\int x e^{ax}\, dx = \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2}\right) e^{ax}$$

$$= \frac{e^{-j2n\pi} - 1}{-j2n\pi} - \left[\frac{1}{-j2\pi n} - \frac{1}{(-1)4n^2\pi^2}\right] e^{-j2n\pi} + \left[0 - \frac{1}{(-1)4n^2\pi^2}\right] e^{0}$$

$$= \underbrace{\frac{e^{-j2n\pi}}{-j2n\pi} + \frac{1}{j2n\pi} - \frac{e^{-j2n\pi}}{-j2n\pi}}_{\text{s'annule}} - \frac{e^{-j2n\pi}}{4n^2\pi^2} + \frac{1}{4n^2\pi^2}$$

$$e^{-j2n\pi} = \cos 2n\pi - j\sin 2n\pi = 1 - j\cdot 0 = 1$$

$$= \frac{1}{j2n\pi} - \frac{1}{4n^2\pi^2} + \frac{1}{4n^2\pi^2} = \frac{-j}{2n\pi} \qquad \forall n \neq 0$$

Pour $n = 0$

$$F(0) = \int_0^1 f_p(t)\,dt = \int^1 (1-t)\,dt = \int_0^1 dt - \int_0^1 t\,dt$$

$$= \left[t - \frac{t^2}{2}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$F(n) = \begin{cases} \frac{1}{2} & n = 0 \\ \frac{-j}{2n\pi} & n \neq 0 \end{cases}$$

Vérification

$f_p(t)$ est ni paire, ni impaire $\Rightarrow F(n)$ complexe

$A(n) = \frac{1}{2} \quad n=0 \qquad B(n) = 0 \quad n=0$

$= 0 \quad n \neq 0 \qquad \frac{1}{2n\pi} \quad n \neq 0$

$F(n)$ complexe comme prévu

$f_p(t)$ est discontinu à $t=n \quad \forall n$

$\Rightarrow$ decroissance $\propto 1/n$ pour $|F(n)|$

$|F(n)| = \left|\frac{1}{2\pi n}\right| \propto 1/n$ ✓

Notons que $A(n) = 0 \ \forall n \neq 0 \Rightarrow f_p(t)$ PRESQUE impaire

$f_p(t) - A(0) = 1-t-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}-t$

est une fonction impaire ✓