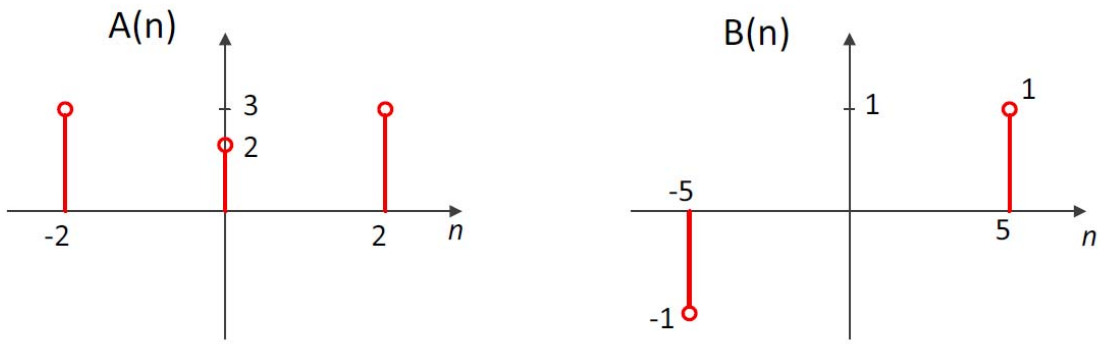
2014 Quiz1 Pr1

September 18, 2014 1:08 PM



On lisant les graphiques nous avons

$F(0)=2 \quad F(2)=3 \quad F(-2)=3 \quad F(5)=j \quad F(-5)=-j$

Donc l'equation de synthèse donne

a) $$f(t) = 2 + \underbrace{3e^{j2\pi t} + 3e^{-j2\pi t}} \underbrace{+ je^{j5\pi t} - je^{-j5\pi t}}$$

$$f(t) = 2 + 3\left(e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t}\right) + j\left(e^{j5\pi t} - e^{-j5\pi t}\right)$$

$$= 2 + 6\left(\frac{e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t}}{2}\right) - 2\left(\frac{e^{j5\pi t} - e^{-j5\pi t}}{2j}\right)$$

$$= 2 + 6\cos 2\pi t - 2\sin 5\pi t$$

b)

Puissance moyenne total $= \sum_{n=-\infty}^{\infty} P(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F(n)|^2$

$$= 4 + 9 + 9 + 1 + 1 = 24$$

Puissance moyenne dans $\underbrace{|\omega| < 3\pi}$ ...

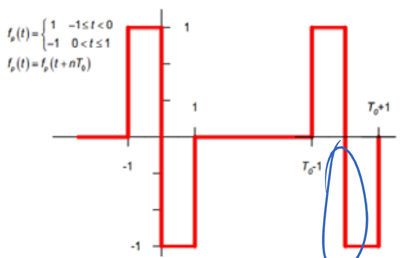
$|n\omega_0| < 3\pi$ ou $|n\pi| < 3\pi$

$$\Rightarrow |F(0)|^2 + |F(2)|^2 + |F(-2)|^2$$
$$= 4 + 9 + 9 = 22$$

Donc $\frac{22}{24} = \frac{11}{12}$ de la puissance moyenne est concentré dans $|\omega| < 3\pi$

2014 Quiz1 Pr2

September 18, 2014 1:26 PM



PAIR IMPAIR ni pair, ni impair

$1/n$ $1/n^2$

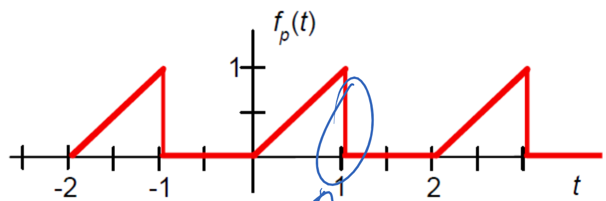
I II III IV

symmetrie négative autour de $t=0 \Rightarrow$ impair

discontinuités $\Rightarrow$ decroissance comme $1/n$

Une fonction impaire ~~sera~~ peurement imaginaire,
donc spectre II

b)



PAIR IMPAIR ni pair, ni impair

$1/n$ $1/n^2$

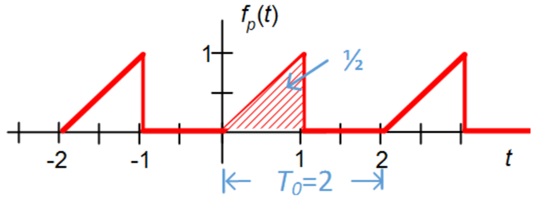
I II III IV

pas de symmetrie par rapport
à l'axe $t=0 \Rightarrow$ ni pair, ni impair

discontinuités $\Rightarrow$ décroissance comme $1/n$

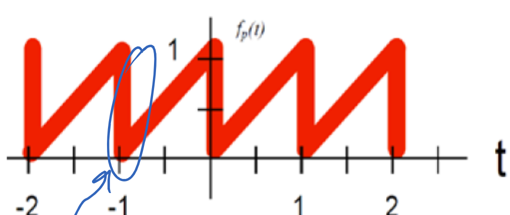
La fonction est ni paire, ni impaire, donc nous
eliminons spectre II qui est imaginaire pur et
Spectre III qui est réel. Il faut choisir entre
spectre I et IV. Notons que pour spectre IV
$A(n)=0\ \forall n\neq 0$. Donc nous attendons une fonction $f(t)$

qui sera impair en enlevant la partie DC. Pour le f(t) ici, la fonction ne sera pas impaire en éliminant la partie DC, donc nous éliminons spectre IV, qui laisse spectre I. Nous pouvons chercher la valeur moyen de f(t)



$F(0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1/4$ qui est le valeur dans spectre I

c)



PAIR	IMPAIR	ni pair, ni impair	
$1/n$	$1/n^2$		
I	II	III	IV

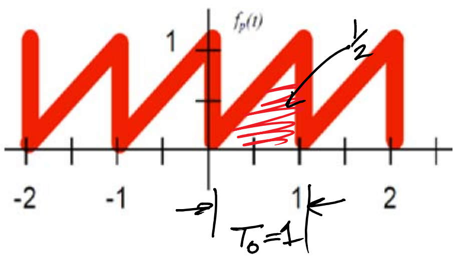
pas de symmetrie par rapport à l'axe $t=0$ ⇒ ni pair, ni impair

discontinuités ⇒ décroissance comme $1/n$

La fonction est ni paire, ni impaire, donc nous éliminons spectre II qui est imaginaire pur et spectre III qui est réel. Il faut choisir entre spectre I et IV. Notons que pour spectre IV

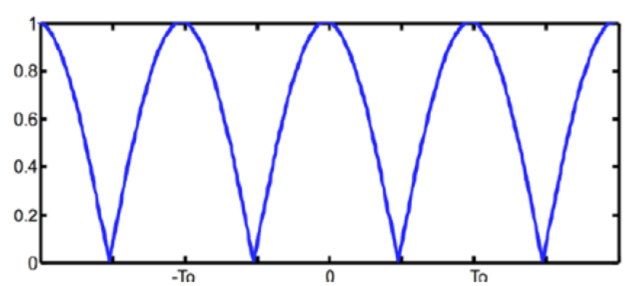
$A(n)=0\ \forall n\neq 0$. Donc nous attendons une fonction $f(t)$ qui sera impair en enlevant la partie DC. Pour le $f(t)$ ici, la fonction sera impair si nous formulons $f_p(t)-\frac{1}{2}$. Pour spectre I nous aurons $A(n)\neq 0$ pour quelques $n\neq 0$, donc nous éliminons spectre I.

Nous pouvons chercher la valeur moyen de $f(t)$



$F(0) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1} = \frac{1}{2}$ qui est le valeur dans spectre IV

d)



PAIR　IMPAIR　ni pair, ni impair

$1/n$　$1/n^2$

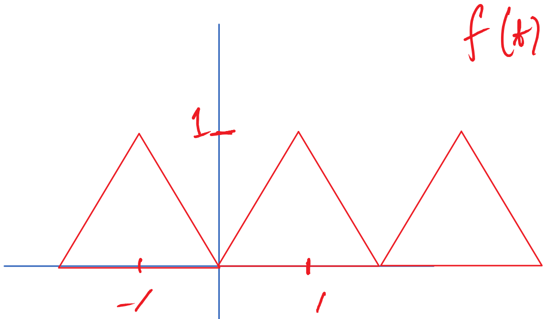
I　II　III　IV

la fonction a une symmetrie positive par rapport à l'axe $t=0$, donc $f(t)$ est pair. La fonction n'a pas de discontinuité, mais nous observons des discontinuités dans le tangent à $f(t)$, donc il y a des discontinuités au niveau de la derivé $\Rightarrow$ décroissance comme $1/n^2$

Pour une fonction paire nous attendons une série de Fourier réel $\Rightarrow$ spectre II où $B(n)=0 \; \forall n$.

2014 Quiz 1 integral2

September 16, 2014 9:25 PM



$$f(t) = \begin{cases} t & 0<t<1 \\ -t & -1<t<0 \end{cases}$$

$$T_0 = 2$$
$$\omega_0 = \pi$$

$$\int x e^{ax} \, dx = \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2}\right) e^{ax}$$

$$F(n) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} (-t) e^{-jn\pi t} dt + \frac{1}{2}\int_0^1 t e^{-jn\pi t} dt$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{t}{-jn\pi} - \frac{1}{(jn\pi)^2}\right] e^{-jn\pi t}\Big|_{-1}^{0} + \frac{1}{2}\left[\frac{t}{-jn\pi} - \frac{1}{(jn\pi)^2}\right] e^{-jn\pi t}\Big|_0^1$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{0}{-jn\pi} + \frac{1}{n^2\pi^2}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{-jn\pi} + \frac{1}{n^2\pi^2}\right] e^{jn\pi}$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\frac{1}{-jn\pi} + \frac{1}{n^2\pi^2}\right] e^{-jn\pi} - \frac{1}{2}\frac{1}{n^2\pi^2}$$

$$= \frac{-1}{n^2\pi^2} + \frac{1}{2n^2\pi^2}\left[e^{jn\pi} + e^{-jn\pi}\right] + \frac{1}{2jn\pi}\left[e^{jn\pi} - e^{-jn\pi}\right]$$

$$= -\frac{1}{n^2\pi^2} + \frac{1}{n^2\pi^2}\cos n\pi + \frac{1}{n\pi}\cancel{\sin n\pi}^{\,0}$$

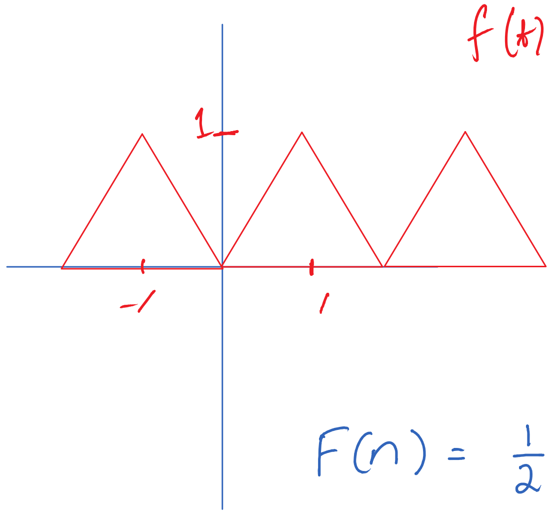
$$= \frac{1}{n^2\pi^2}\left[\cos n\pi - 1\right] = \frac{1}{n^2\pi^2}\begin{cases} 1-1 & n \text{ pair} \\ -1-1 & n \text{ impair} \end{cases}$$

$$= \frac{1}{n^2\pi^2}\begin{cases} 0 & n \text{ pair} \\ -2 & n \text{ impair} \end{cases} = \begin{cases} 0 & n \text{ pair} \\ -2/n^2\pi^2 & n \text{ impair} \end{cases}$$

2014 Quiz 1 integral

September 16, 2014 9:25 PM

$$f(t) = \begin{cases} t & 0<t<1 \\ -t & -1<t<0 \end{cases}$$



$T_0 = 2$

$\omega_0 = \pi$

$$\int x\cos ax \quad dx = \frac{1}{a^2}\cos ax + \frac{x}{a}\sin ax$$

$$F(n) = \frac{1}{2}\int^{0} (-t)e^{-jn\pi t}\,dt + \frac{1}{2}\int_0 t e^{-jn\pi t}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} z\, e^{jn\pi z}(-dz) + \frac{1}{2}\int_0^1 t e^{-jn\pi t}\,dt$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^1 z\, e^{jn\pi z}\,dz + \frac{1}{2}\int_0^1 t\, e^{-jn\pi t}\,dt$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^1 t\left[e^{jn\pi t} + e^{-jn\pi t}\right]dt$$

$$= \int_0^1 t\cos n\pi t \; dt$$

$$= \frac{1}{(n\pi)^2}\cos n\pi t + \frac{t}{n\pi}\sin n\pi t \Big|_0^1$$

$$= \frac{\cos n\pi}{n^2\pi^2} + \frac{\sin n\pi}{n\pi} - \frac{\cos 0}{n^2\pi^2} - 0$$

$$= \frac{[\cos n\pi - 1]}{n^2\pi^2} + 0 = \begin{cases} \frac{-2}{n^2\pi^2} & n \text{ odd} \\ 0 & n \text{ even} \end{cases}$$

$$F(0) = -\int_{-1}^{0} t\,dt + \int_0^1 t\,dt =$$

$$= -\frac{t^2}{2}\Big|_{-1}^{0} + \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 = 0 + \frac{(-1)^2}{2} + \frac{1}{2} = 1$$