

Mat-1910 : Mathématiques de l'ingénieur II
Examen type I

Question 1.

Soit l'intégrale double

$$\int_0^3 \int_{y^2}^9 y \cos(x^2) dx dy.$$

- a) Représenter graphiquement le domaine d'intégration.
- b) Evaluer l'intégrale ci-dessus.

Question 2.

Soit $I = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \frac{x+y}{x^2+y^2} dy dx.$

- (a) Identifier le domaine d'intégration et en donner une représentation graphique.
- (b) Transformer I en une intégrale en coordonnées polaires. (**Ne pas évaluer**)

Question 3.

L'intégrale double $J = \iint_D x dx dy$ se laisse décomposer sous la forme

$$\iint_D x dx dy = \int_1^{\sqrt{2}} \int_{\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y}} x dx dy + \int_{\sqrt{2}}^2 \int_0^{\sqrt{2-y}} x dx dy.$$

- a) Représenter graphiquement le domaine d'intégration D .
- b) Inverser l'ordre d'intégration. Déterminer les nouvelles bornes d'intégration.
- c) Calculer l'intégrale J .

Question 4.

Exprimer en coordonnées polaires le moment d'inertie par rapport à $0x$ de la plaque de masse spécifique (densité) $\sigma = 1$ délimitée par $y = x$ et $y = x^2$. Ne pas évaluer l'intégrale.

Question 5.

Calculer le volume du solide délimité latéralement par la sphère d'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = y$$

et situé à l'intérieur du cône d'équation

$$y^2 = 3(x^2 + z^2) \quad \text{avec} \quad y \geq 0.$$

Question 6.

Calculer le centre de masse du solide homogène D délimité par les cônes

$$z = 2\sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$$

Question 7.

Soit l'intégrale triple

$$I = \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz$$

où $f(x, y, z)$ est une fonction donnée, continue sur D et D est le tétraèdre de sommets $A = (0, 1, 0)$, $B = (0, 2, 0)$, $C = (1, 1, 0)$, $E = (1, 1, 1)$.

Ecrire I sous la forme d'une intégrale itérée.

Question 8.

On désigne par D le solide borné inférieurement par le cône $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$ et supérieurement par la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Exprimer le volume de D en coordonnées sphériques. Ne pas calculer.

Question 9.

Soit h une constante positive, exprimer le volume du solide borné inférieurement par la surface

$$hz = x^2 + y^2$$

et supérieurement par $z = h$, à l'aide d'une intégrale triple puis calculer sa valeur en fonction de h .

Question 10.

Soit R la région extérieure au cercle C_1 d'équation

$$x^2 + y^2 = 1$$

et intérieure au cercle C_2 d'équation

$$x^2 + (y - 1)^2 = 1.$$

- a) Faire une représentation graphique de la région R et calculer les coordonnées polaires des points d'intersection de C_1 et C_2 .
- b) Evaluer l'aire de la région R .

Question 11.

On considère l'intégrale triple itérée en coordonnées cylindriques

$$\int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^1 \int_{z=r^2}^1 f(r, \theta, z) r dz dr d\theta.$$

- (a) Trouver les équations cartésiennes des surfaces qui délimitent le domaine d'intégration et en faire une représentation graphique.
- (b) Récrire l'intégrale triple en intégrant en premier par rapport à la variable r et ensuite par rapport à z et θ , i.e. suivant l'ordre $dr dz d\theta$.

Question 12.

Un solide homogène S de masse M est obtenu en perçant dans le cône tronqué de surface latérale $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z \in [1, 2]$, un trou cylindrique de même axe et de rayon $1/\sqrt{3}$ calculer le moment d'inertie de ce solide par rapport à Oz .

(Suggestion: déterminer d'abord la densité.)