GEL19962 : Analyse des signaux

Examen 2 A2006 : Solutions

Département de génie électrique et de génie informatique

Question 1 (15 points):

On demande de calculer la convolution entre la fonction $Tri(t)$ et la dérivée temporelle du filtre illustré par la figure. On donne les valeurs numériques suivantes : R = 1 et C = 1.

On peut d'abord identifier la fonction de transfert du filtre à partir de la figure :

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

Connaissant la transformée suivante :

$$e^{-\beta t} U(t) \longleftrightarrow \frac{1}{\beta + j\omega}$$

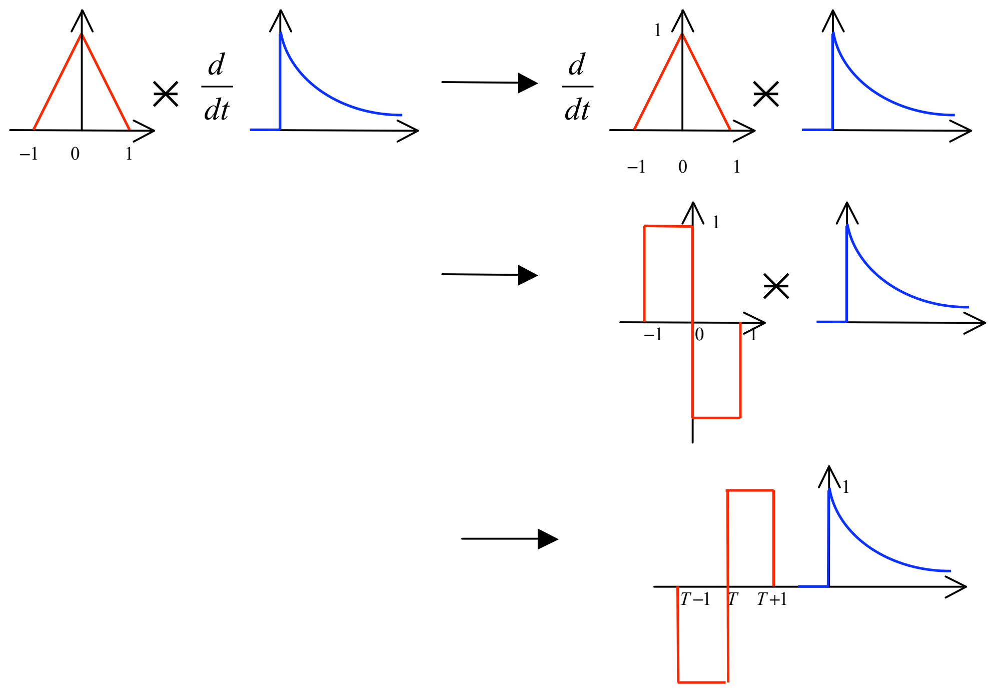
Et tenant compte du fait que $RC = \beta = 1$, on peut déduire la réponse impulsionnelle h(t) :

$$h(t) = e^{-t} U(t)$$

On considérant la propriété suivante de la dérivation en convolution :

$$\left\{ Tri * \left(\frac{d}{dt} h \right) \right\}(t) = \left\{ \left(\frac{d}{dt} Tri \right) * h \right\}(t)$$

On obtient ce qui suit :



Pour $T<-1$ $\left\{\left(\frac{d}{dt}Tri\right)*h\right\}(t)=0$

Pour $-1<T<0$ $\int_0^{T+1} e^{-t}dt=\left[1-e^{-(T+1)}\right]$

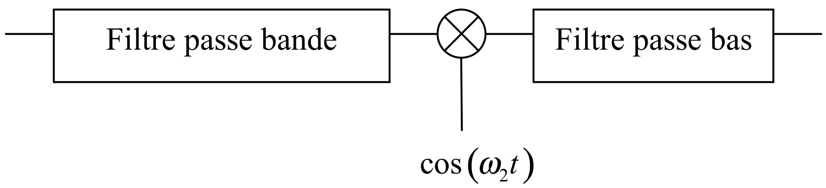
Pour $0<T<1$ $-\int_0^{T} e^{-t}dt0+\int_T^{T+1} e^{-t}dt=-\left[e^{-(T+1)}+1\right]$

Pour $1<T$ $-\int_{T-1}^{T} e^{-t}dt0+\int_T^{T+1} e^{-t}dt=\left[2e^{-T}-e^{-(T+1)}-e^{-(T-1)}\right]$

Question 2 (15 points):

a) Il s'agit d'une modulation à bande latérale unique. Ce type de modulation, s'applique dans le cas où le spectre d'amplitude du signal est pair et le spectre de phase est impair. On exploite ces deux propriétés on transmettant juste la partie positive du spectre (puisqu'on peut retrouver la partie négative).

b) Pour démoduler le message transmis sur la porteuse ω_2 on commence par éliminer les autres porteuses on utilisant un filtre permettant l'élimination des fréquences se trouvant à l’extérieur de la bande [112.5, 127.5] Khz. Par la suite il faut multiplier le signal par $\cos(\omega_2 t)$ où $\omega_2 = 2\pi f_2$ et effectuer un filtrage passe bas pour éliminer le bruit.



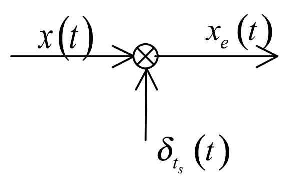
c) La réalisation pratique peut se faire par une diode, un circuit RLC pour le filtre passe bande et un circuit RC pour le filtre passe bas.

d) Le signal $S(\omega)$ est à puissance finie et énergie infinie. Le message démodulé est à puissance finie nulle et énergie finie.

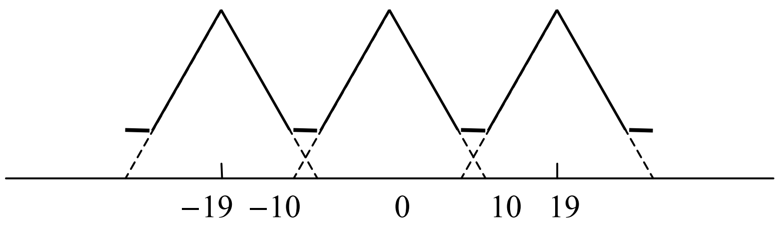
Question 3 (15 points):

Le spectre $X(\omega) = Tri\left(\frac{\omega}{10}\right)$ est échantillonné à la fréquence $\omega_s = 19\ rad/s$.

a) L’opération réaliser sur le signal temporel peut être représenté par le diagramme suivant :

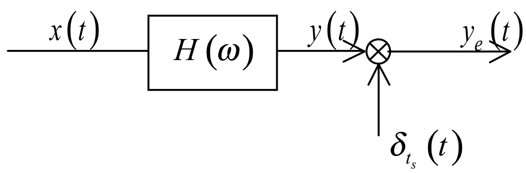


b) L’échantillonnage du signal dans le temps correspond à la périodisation de sont spectre. Pour retrouver un signal à partir de ses échantillons il faut absolument que le spectre du signal soit à support limité et que la fréquence d’échantillonnage soit au moins égale à la largeur de sont support. Dans notre cas la fréquence d’échantillonnage $\omega_s = 19\ rad/s$ est inférieur à la largeur de sont support $(2B = 20 rad/s)$. Cela implique un phénomène de recouvrement du spectre appelé aussi repliement du spectre ou encore aliasing.

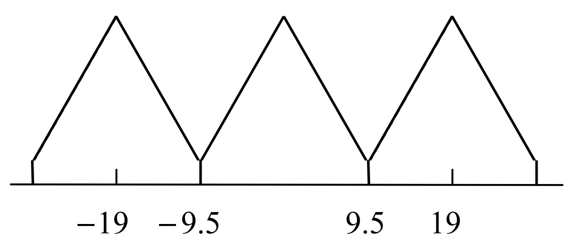


c) Pour remédier au problème, on corrige le bloc diagramme en ajoutant **un filtre anti-repliement** (filtrage de garde). Il s'agit de définir une bande utile. Cette bande nous la définissant dans notre cas dans l'intervalle [-9.5, 9.5] rad/s. Par un filtrage passe-bas idéal ayant **une fréquence de coupure de 9.5 rad/s** sur cette bande utile, on élimine les fréquences indésirables ([-10, -9.5] et [9.5, 10]) qui seront de toute façon replié par l'échantillonnage. Le filtre $H(\omega)$ ainsi obtenu est **non causale**.

On peut ainsi échantillonner en gardant la même fréquence en étant assuré qu'il n'y aura pas de recouvrement spectral.



d)

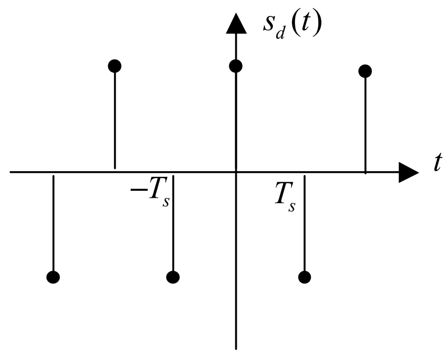


Question 4 (15 points):

$\omega_s = 2\pi$, $T_s = 1$

On considérant que la fréquence d'échantillonnage est celle Nyquist, on peut déduire intuitivement que le signal original est $\cos\left(\frac{\omega_s}{2}t\right)$.

a) La séquence discrète à reconstruire est la suivante :



b) À la sortie du générateur triangulaire, le signal analytique sera obtenu par la convolution du signal échantillonné et le signal généré par le générateur triangulaire :

$$s_r(t) = \left[s(t) * \delta_{T_s}(t)\right] * Tri\left(\frac{t - T_s/2}{T_s/2}\right)$$

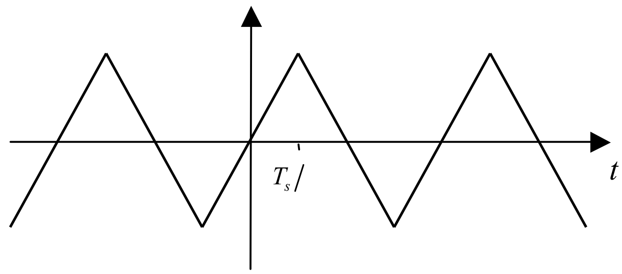
$$s_r(t) = \left[s_d(t) * \delta_{T_s}(t)\right] * Tri\left(\frac{t - T_s/2}{T_s/2}\right)$$

Le spectre du signal à la sortie du générateur est le suivant :

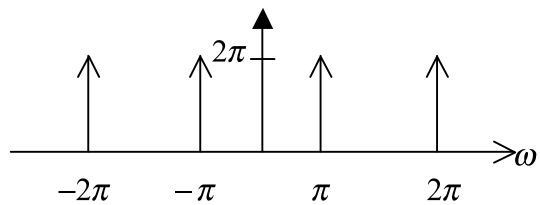
$$S_r(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left[S(\omega) * \delta_{\omega_s}(\omega)\right] * \frac{T_s}{2} Sa^2\left(\frac{\omega T_s}{4}\right) e^{-j\omega T_s/2}$$

$$S_r(\omega) = \left[S(\omega) * \delta_{\omega_s}(\omega)\right] * \frac{1}{2} Sa^2\left(\frac{\omega}{4}\right) e^{-j\omega T_s/2}$$

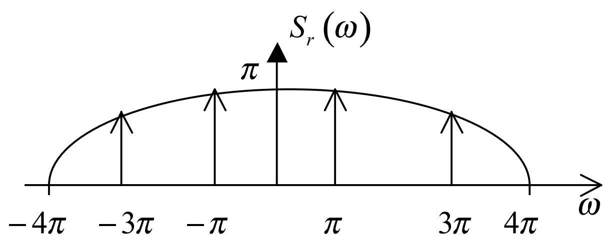
c) Le signal analogique sera décalé d'une demis période et aura la forme suivante :

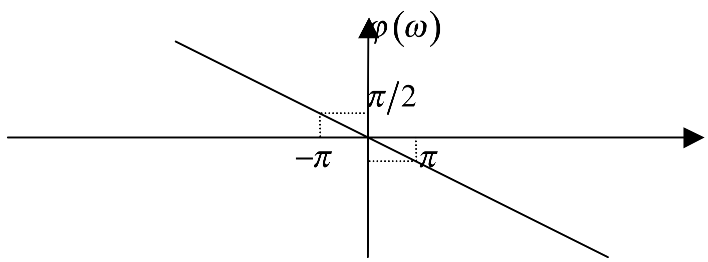


La partie $\left[S(\omega)*\delta_{\omega_s}(\omega)\right]$ représente la partie périodisée du spectre, elle est donnée par la séquence suivante où la hauteur est de 2π car elle résulte de deux impulsions d'aire π .

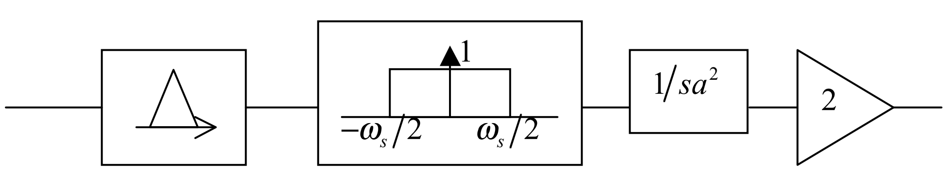


Le spectre du signal s'annule pour $Sa^2\left(\frac{\omega}{4}\right)=0$ ce qui correspond à $\frac{\omega}{4}=\pi$

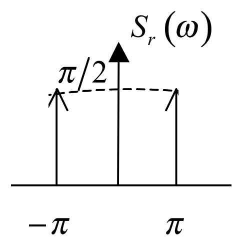


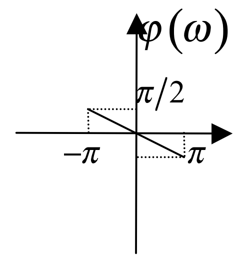


d) Le diagramme proposé est le suivant :



À la sortie du générateur triangulaire on introduit un filtre passe bas ayant une fréquence de coupure égale à $\omega_s/2$ permettant ainsi le passage de la bande utile du signale. L'amplitude est réduite par un facteur $1/2$ pour dédoubler les impulsions à $\omega_s/2$





Par la suite un filtre $1/Sa^2$ est introduit entre $-\pi$ et π suivit par un gain de 2 afin de contrer le gain de $\frac{1}{2}$ du générateur triangulaire.

e) Le signal analogique un cosinue décalé d'une demis période :

$$s(t) = \cos\left(\pi\left(t + \frac{1}{2}\right)\right)$$

Le spectre du signal est donné par : $S(\omega) = \pi\left[\delta(\omega - \pi) + \delta(\omega + \pi)\right]$