Département de génie électrique et de génie informatique André Zaccarin
Université Laval

GEL-19964 – Signaux et systèmes discrets

Examen partiel #2 : Solutions

Vendredi le 17 novembre 2006 Durée: 8h30-10h20

Question 1 (25 points)

a) Le signal $y[n]$ a (1000+50-1) 1049 points. Il faut donc calculer les DFT de $x[n]$ et de $h[n]$ sur 1049 points, faire le produit de ces deux DFT et calculez la DFT inverse du produit pour obtenir $y[n]$. Donc :

$$X[k]=\sum_{n=0}^{999} x[n]e^{-j2\pi kn/1049} \quad \text{pour} \quad k=0,1,\ldots,1048$$

$$H[k]=\sum_{n=0}^{49} h[n]e^{-j2\pi kn/1049} \quad \text{pour} \quad k=0,1,\ldots,1048$$

$$Y[k]=X[k]H[k]$$

$$y[n]=\frac{1}{1049}\sum_{k=0}^{1048} Y[k]e^{j2\pi kn/1049} \quad \text{pour} \quad n=0,1,\ldots,1048$$

b) Le signal $g[n]$ est la convolution circulaire sur 1000 points entre $x[n]$ et $h[n]$. C'est un signal périodique (période de 1000 points) et est l'extension périodique de $y[n]$ sur 1000 points, i.e.,

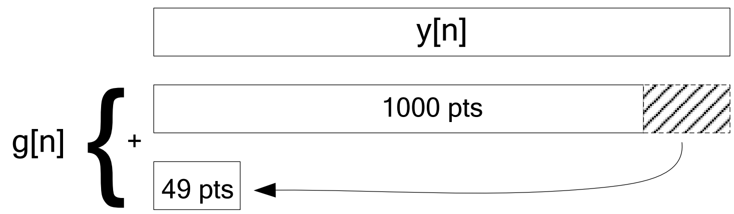
$$g[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} y[n-1000k]$$

Dans l'intervalle qui nous intéresse, soit $0 \le n \le 999$, seulement $y[n]$ et $y[n+1000]$ ne sont pas nuls pour tous les points. Et comme le signal $y[n]$ est nul pour $n \ge 1049$, on a

$$g[n]=\begin{cases} y[n]+y[n+1000] & 0 \le n \le 48 \\ y[n] & 49 \le n \le 999 \end{cases}$$

On ne retrouve donc pas dans le signal $g[n]$ les 49 premiers points ($0 \le n \le 48$) et les 49 derniers points de $y[n]$ ($1000 \le n \le 1048$).

Graphiquement, on a



Comme le système est causal, le calcul de $y[n]$ pour $0 \le n \le 48$ ne nécessite que $x[n]$ pour $0 \le n \le 48$.

Pour calculer le point $y[1000]$, l'équation de la convolution linéaire nous donne que

$$y[1000] = \sum_{k=0}^{49} h[k]x[1000-k]$$

Il faut donc avoir les points de $x[n]$ pour $951 \le n \le 999$. Pour calculer $y[1001]$, il faut $x[n]$ pour $952 \le n \le 999$ et ainsi de suite. Donc, il faut $x[n]$ pour $951 \le n \le 999$ pour calculer $y[n]$ pour $1000 \le n \le 1048$

Question 2 (20 pts)

a) La résolution en fréquence est donnée par la largeur du demi-lobe de la fenêtre utilisée. Pour une fenêtre rectangulaire, le demi-lobe est $2\pi / M$ où M est le nombre de points du signal $x[n]$. Donc, il faut que $2\pi / M \le 0.01$, donc que $M \ge 2\pi / 0.01 = 200\pi = 628.3$.

Une DFT sur N points nous donne un point sur l'axe des fréquences à tous les $2\pi / N$. La précision est donc $\pm \pi / N$. On veut donc que $\pi / N \le 0.001$, ce qui donne $N \ge \pi / 0.001 = 1000\pi = 3141.6$

La DFT qu'il faut calculer est donc : $X[k] = \sum_{n=0}^{628} x[n] e^{j2\pi kn/3142}$ pour $0 \le k \le 3141$

b) Il faut doubler le nombre de points du signal $x[n]$, soit avoir $M \ge 2 \times 628.3 = 1256.6$, parce que lobe principale de la transformée Fourier de cette fenêtre est 2 fois plus large que celui de la fenêtre rectangulaire. Le nombre de points N de la DFT demeure inchangé.

Question 3 (15 pts)

L'équation aux différences de ce système est :

$$y[n]+2y[n-2]=x[n]$$
$$y[n]=x[n]-2y[n-2]$$

La résolution de cette équation pour $x[n]=\delta[n]$ nous donne :

$$y[0]=1;\ y[1]=0;\ y[2]=-2;\ y[3]=0;\ y[4]=4;\ y[5]=0;\ y[6]=-8;\ ,\ \ldots.$$

et on voit bien que les valeurs de la sortie vont tendre vers l'infini avec $n\to\infty$. En fait on a que $y[2n]=(-2)^n$ ce qui diverge pour $n\to\infty$.

Question 4 (20 pts)

La fonction de transfert du filtre de départ est :

$$H(z)=z+2+z^{-1}=z^{-1}\left(z^2+2z+1\right)=\frac{\left(z^2+2z+1\right)}{z}=\frac{(z+1)(z+1)}{z}$$

La composante à 60 Hz correspond à $2\pi\times\left({}^{60}\!/_{360}\right)=\pi/3$.

Pour éliminer cette composante, et conserver un filtre réel, il faut placer des zéros à $z=e^{j\pi/3}$ et $z=e^{-j\pi/3}$.

Pour préserver la réponse en fréquence du filtre de départ et avoir un filtre stable, il faut placer des pôles « derrière » ces zéros à $z=re^{j\pi/3}$ et $z=re^{-j\pi/3}$, où $r<1$ mais très près de 1 (e.g. r=0.99).

Finalement, pour rendre le filtre causal, il faut ajouter un pôle à $z=0$ pour qu'il y ait autant de pôles que de zéros.

On obtient donc :

$$\begin{aligned}H(z)&=\frac{(z+1)(z+1)}{z}\times\frac{\left(z-e^{j\pi/3}\right)\left(z-e^{-j\pi/3}\right)}{\left(z-re^{j\pi/3}\right)\left(z-re^{-j\pi/3}\right)}\times\frac{1}{z}\\&=\frac{(z+1)(z+1)}{z}\times\frac{\left(z^2-2\cos(\pi/3)z+1\right)}{\left(z^2-2r\cos(\pi/3)z+r^2\right)}\times\frac{1}{z}=\frac{\left(z^2+2z+1\right)\left(z^2-z+1\right)}{z^2\left(z^2-rz+r^2\right)}\\&=\frac{z^4+z^3+1}{z^2\left(z^2-rz+r^2\right)}=\frac{z^4\left(1+z^{-1}+z^{-4}\right)}{z^4\left(1-rz^{-1}+r^2z^{-2}\right)}=\frac{1+z^{-1}+z^{-4}}{1-rz^{-1}+r^2z^{-2}}\end{aligned}$$

Question 5 (20 pts)

a) On divise les points de $x[n]$ en deux groupes, le premier contenant les indices pairs, le second les indices impairs. On obtient deux groupes, soit

$$\{x[0], x[2], x[4], x[6]\} \triangleq \{x_1[0], x_1[1], x_1[2], x_1[3]\}$$

$$\{x[1], x[3], x[5], x[7]\} \triangleq \{x_2[0], x_2[1], x_2[2], x_2[3]\}$$

Ces deux signaux sont ensuite eux aussi divisés en deux groupes selon les indices pairs et impairs. On obtient donc $x_1[0], x_1[2]$ et $x_1[1], x_1[3]$, et $x_2[0], x_2[2]$ et $x_2[1], x_2[3]$ ce qui donne comme ordre final des données, en fonction de $x[n]$:

$$x[0], x[4], x[2], x[6], x[1], x[5], x[3], x[7]$$

b) Comme N=8, ce sont des DFT sur deux points. A partir de la définition on

$$X[k] = \sum_{n=0}^{1} x[n] e^{j2\pi kn/2} = x[0] + x[1] e^{j\pi k}$$

et de cette expression on obtient

$$X[0] = x[0] + x[1]$$
$$X[1] = x[0] - x[1]$$

c) Puisque $x[n]$ est réel, on a que $X[k] = X^*[N-k]$, et il est suffisant de conserver $X[k],\ 0 \le k \le 4$. On peut ensuite retrouver les valeurs manquantes ainsi :

$$X[5] = X^*[8-5] = X^*[3]$$
$$X[6] = X^*[8-6] = X^*[2]$$
$$X[7] = X^*[8-7] = X^*[1]$$