Université Laval
Professeur: Leslie A. Rusch

Département de génie électrique
et de génie informatique

GEL10280: Communications numériques
2009 Examen Partiel

Vendredi le 27 février 2008; Durée: 10h30 à 12h20
Deux feuilles de documentation fournies; une calculatrice permise

---

Problème 1 (10 points)

Supposons que nous utilisons OOK et qu'il y a de l'interférence inter-symbole. Les taux d'erreur binaire pour les quatre patrons 00, 01, 10 et 11 sont:
P_{00} P_{01} P_{10} P_{11}.

A. (5 points) Laquelle(s) des quatre probabilités risque d'être la(les) plus grande(s)? Pourquoi?

B. (5 points) Laquelle(s) des quatre probabilités risque d'être la(les) plus petite(s)? Pourquoi?

Indice : Vous devrez focaliser votre attention aux erreurs lors de la détection de deuxième bit dans le patron, c.-à-d. la probabilité **que le deuxième bit excédera le seuil de détection**.

Problème 2 (20 points)

Dans tout système de communications numériques un compromis est fait entre BER vs. E_b/N_0 , efficacité spectrale, et complexité (coûts).

A. (10 points) En choisissent entre DPSK et BPSK, quels sont les compromis?

B. (10 points) En choisissent entre 16PSK et 16QAM, quels sont les compromis?

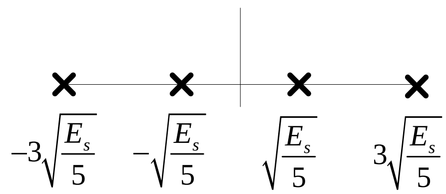
Pour les deux modulations proposées pour chaque énoncé, discuter leurs performances relatives vis-à-vis 1) BER vs. E_b/N_0, 2) efficacité spectrale, et 3) complexité (coûts) pour démontre votre compréhension en profondeur de ces modulations.

Problème 3 (20 points)

A. (10 points) Pour la détection cohérente et les impulsions de Nyquist idéales, donnez l'efficacité spectrale (en b/s/Hz) pour les deux constellations suivantes en supposant un taux binaire de 800 kb/s.

$$s_1 = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]\sqrt{E_s}$$
$$s_2 = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]\sqrt{E_s}$$
$$s_3 = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]\sqrt{E_s}$$
$$s_4 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]\sqrt{E_s}$$

4FSK



4PAM

B. (10 points) Donnez la plage de fréquence pour 4FSK, en supposant que le premier canal est centre à 120 MHz, soit les valeurs de f_1 et f_2.

Problème 4 (20 points)

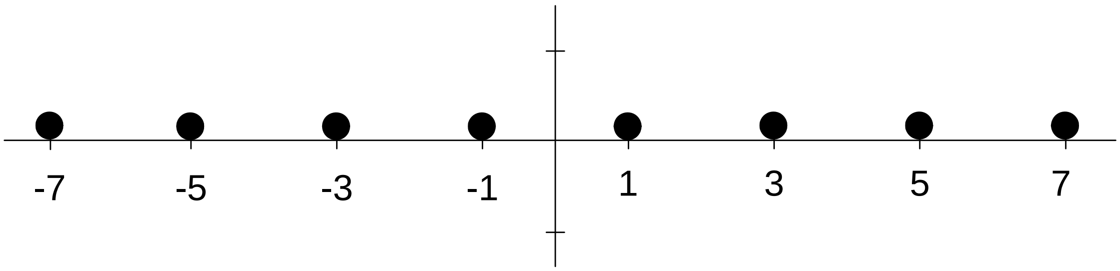
Considérez le graphique du « Plan de l'efficacité spectrale ».

J'ai créé un nouveau système de modulation LAR qui est aussi efficace spatialement que le QAM. La perte de 8LAR par rapport à QPSK est 4 dB, et la perte de 16LAR par rapport à QPSK est 9 dB.

Trouvez les coordonnées de 8LAR et 16LAR pour le graphique du « Plan de l'efficacité spectrale ».

Problème 5 (30 points)

Voice un graphique de l'espace I/Q pour 8PAM.

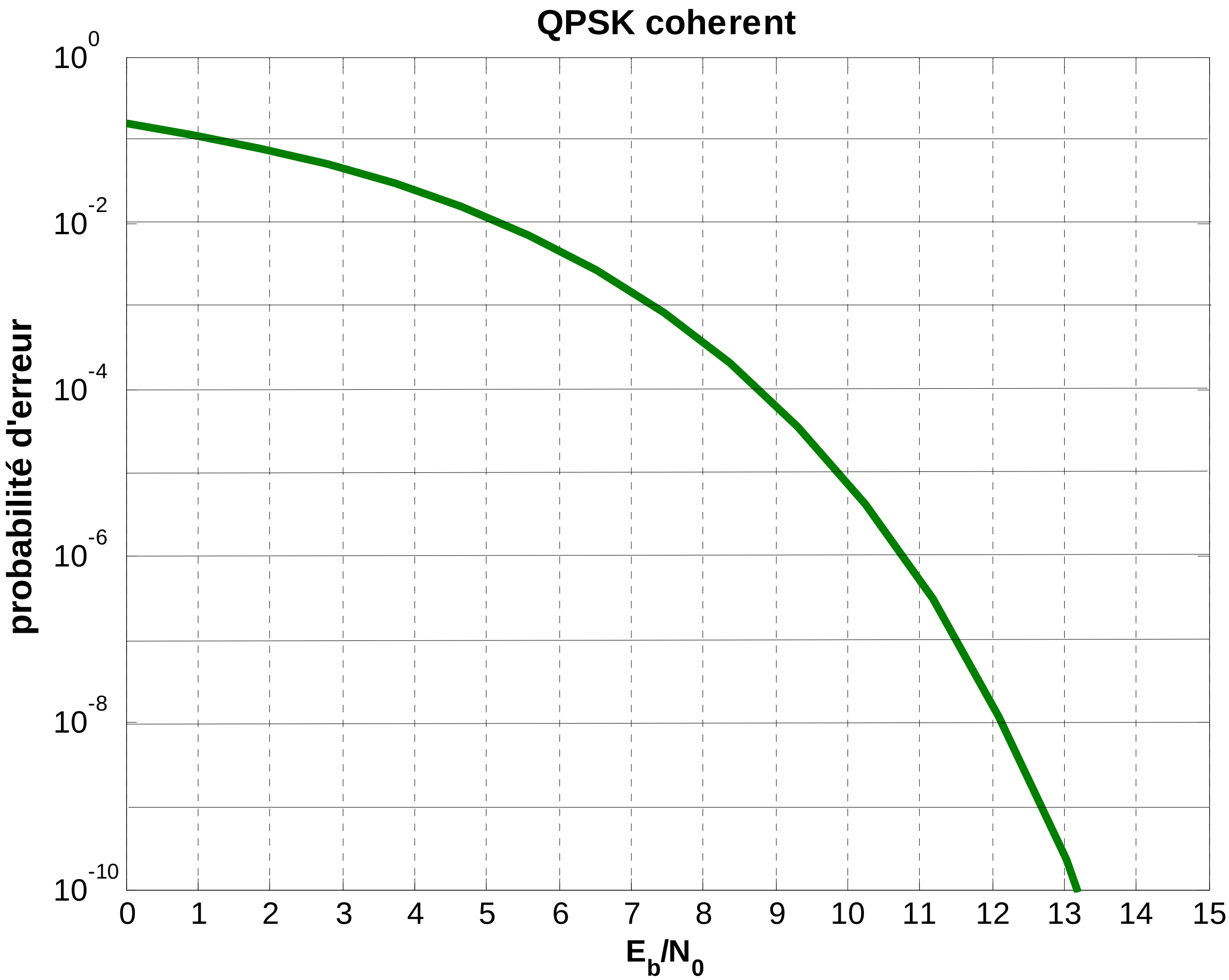


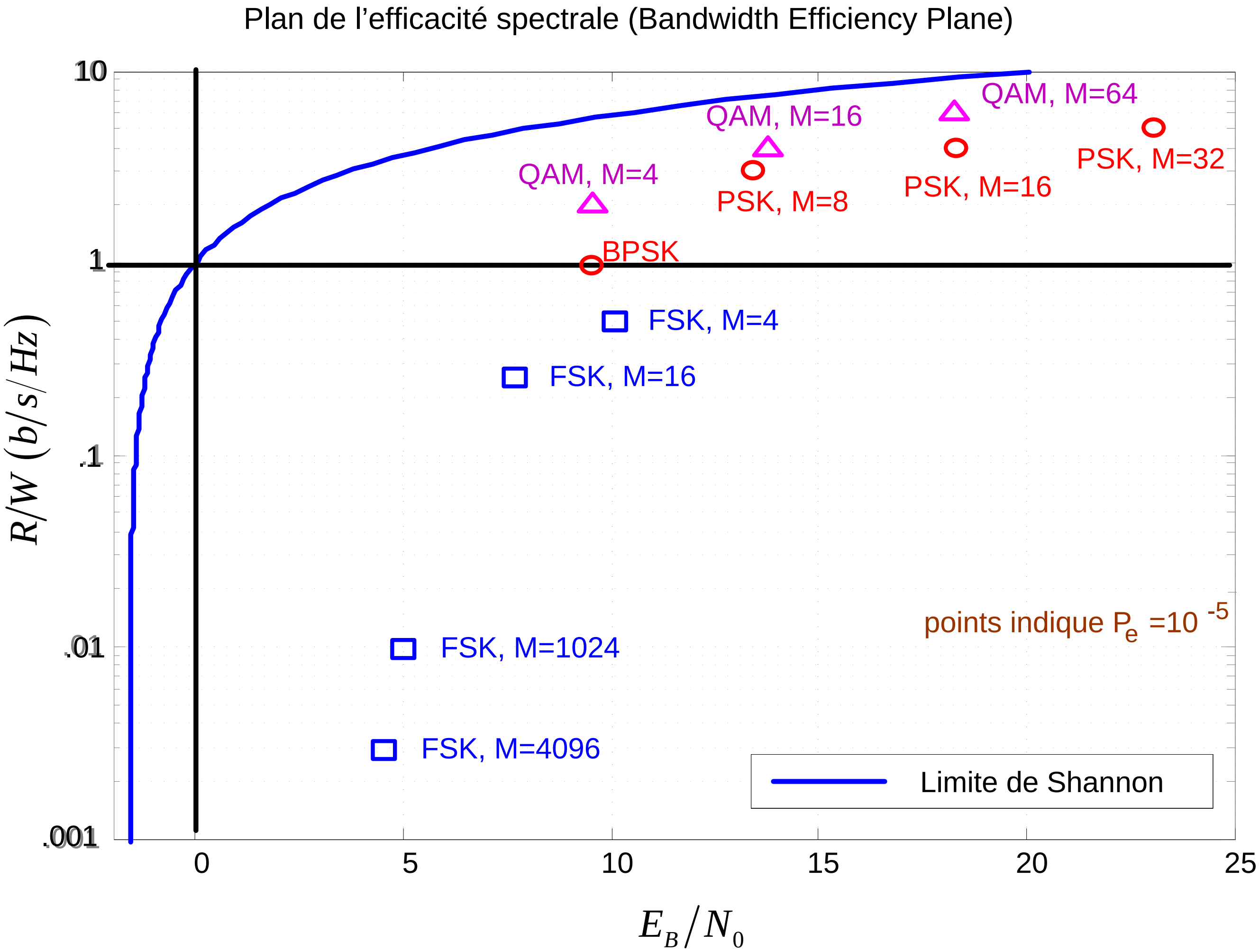
A. (10 points) Quelles sont les coordonnées (en fonction de E_s, l'énergie moyenne par symbole) de 8PAM dans l'espace du signal?

B. (10 points) Trouvez la distance minimale (D_{min}) pour 8PAM en fonction de E_s, l'énergie moyenne par symbole.

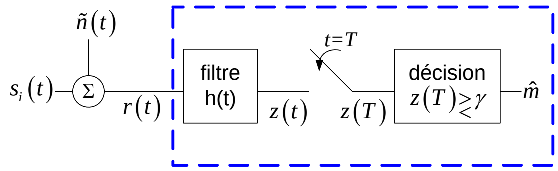
C. (5 points) Trouvez la probabilité d'erreur en fonction de E_b/N_0 pour 8PAM en utilisant l'estimé provenant de la borne de l'union.

D. (5 points) Trouvez la perte en dB par rapport au QPSK pour 8PAM.


QPSK coherent
probabilité d'erreur
10^{0}
10^{-2}
10^{-4}
10^{-6}
10^{-8}
10^{-10}
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
E_b/N_0


Plan de l'efficacité spectrale (Bandwidth Efficiency Plane)
10
1
.1
.01
.001
0
5
10
15
20
25
R/W (b/s/Hz)
E_B/N_0
QAM, M=4
QAM, M=16
QAM, M=64
PSK, M=8
PSK, M=16
PSK, M=32
BPSK
FSK, M=4
FSK, M=16
FSK, M=1024
FSK, M=4096
points indique P_e =10^-5
Limite de Shannon

Récepteur d'échantillonnage



MAP: i qui maximise $p(z|s_i)\, p(s_i)$

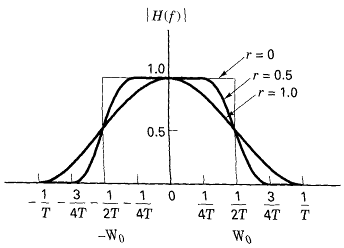
i qui minimise $\left\|\mathbf{r}-\mathbf{s}_i\right\|^2 - N_0 \ln P(\mathbf{s}_i)$

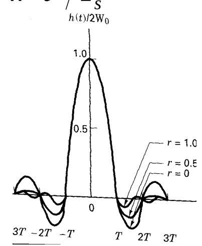
$P(\mathbf{s}_i) =$ probabilité a priori de symbole $\mathbf{s}_i$

ML: i qui maximise $p(z|s_i)$

i qui minimise $\left\|\mathbf{r}-\mathbf{s}_i\right\|^2$

Raised cosine $v(t) = \dfrac{\sin(\pi t/T_s)}{\pi t/T_s} \dfrac{\cos(r\pi t/T_s)}{1-4r^2t^2/T_s^2}$





Énergie moyenne

$$E_{moy} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\left\|\mathbf{s}_i\right\|^2$$

$$= \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\left[\text{énergie du signal } i\right]$$

Énergie par bit v. énergie par symbole

$$E_b \log_2 M = E_s$$

QAM $\eta = \log_2 M$ †

Conversion de l'espace I/Q vers espace du signal

$$\left(\tilde{a}_n^I, \tilde{a}_n^Q\right) = \sqrt{\frac{M \cdot E_s}{\sum_{i=1}^{M}\left[\left(a_n^I\right)^2 + \left(a_n^Q\right)^2\right]}}\left(a_n^I, a_n^Q\right)$$

coordonnées, espace du signal

coordonnées, espace I/Q

cas rectangulaire (carrée) $M=L^2$

$$P_e = 2\left(1-\frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q\left(\sqrt{\frac{3\log_2 M}{(M-1)}\frac{E_b}{N_0}}\right) \qquad d_{\min} = \sqrt{\frac{6\log_2 L}{L^2-1}}$$

Borne d'union

$$P_e \approx \frac{2K}{M} Q\left(\frac{D_{\min}}{\sqrt{2N_0}}\right) = \frac{2K}{M} Q\left(d_{\min}\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

K est le nombre des paires des signaux séparés par la distance minimale D_{min}

Distance minimale dans l'espace du signal

$$D_{\min} = \min_{i \neq k}\left\|\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_k\right\| \text{ et } d_{\min} = \frac{D_{\min}}{\sqrt{2E_b}}$$

$$P_e(BPSK) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

$$P_e(OOK) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

$$P_e(QPSK) \approx 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

Perte par rapport à QPSK

$d_{\min} = \sqrt{x}\sqrt{2}$ perte $= -10\log_{10} x$

Pour une modulation orthogonale

$$P_e(bit) = P_b = P_e(symbol)\frac{M/2}{M-1}$$

Pour une modulation non-orthogonale avec codage de gray

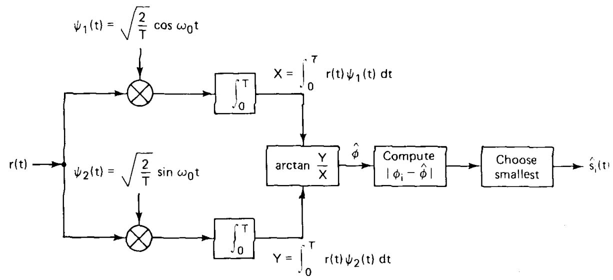
$$P_e(bit) = P_b = \frac{P_e(symbol)}{\log_2 M}$$

Efficacité spectrale

$$\eta = \frac{R_b}{W} = \frac{1}{T_b}\frac{1}{W} \text{ bits/s}$$

MPSK cohérent

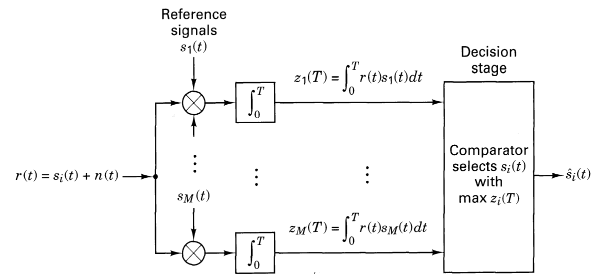
$\eta = \log_2 M$ †



$$P_e(M) \approx 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}} \sin\frac{\pi}{M}\right)$$
$$= 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_b \log_2 M}{N_0}} \sin\frac{\pi}{M}\right)$$

MFSK cohérent

$\eta = \dfrac{2\log_2 M}{M+1}$ †

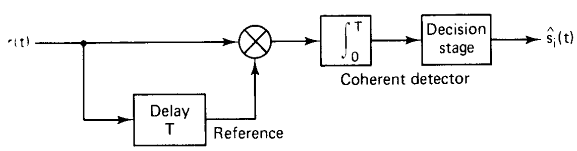


$$P_e = (M-1)Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) = (M-1)Q\left(\sqrt{\frac{E_b \log_2 M}{N_0}}\right)$$

Séparation minimale $1/2T_s$

DPSK incohérent

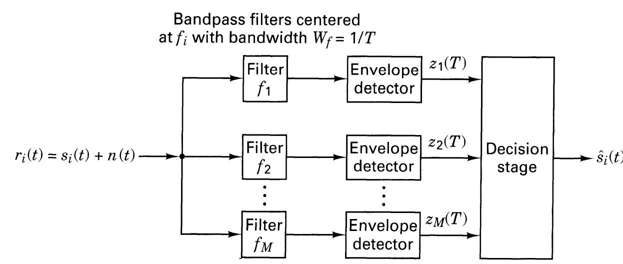
$P_e = \dfrac{1}{2}e^{-E_b/N_0}$



~1 dB de perte entre DPSK et BPSK

MFSK incohérent

$\eta = \dfrac{\log_2 M}{M}$ †



$$P_e(BFSK) = \frac{1}{2}e^{-E_b/2N_0}$$

~1 dB de perte entre BFSK cohérente et incohérente

Séparation minimale $1/T_s$

Loi de Shannon

$$C = W\log_2(1+SNR) \qquad SNR = \frac{E_b}{N_0}\eta$$

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{W}{C}\left(2^{C/W}-1\right) \qquad \frac{C}{W} \to 0 \;\Rightarrow\; \frac{E_b}{N_0} \to -1.6dB$$

Relations trigonométriques

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - \sin^2\theta$$
$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

Processus Gram Schmidt

$$\psi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{E_1}} s_1(t) \text{ où } E_1 \triangleq \int_0^T s_1^2(t)\,dt$$

$$\theta_2(t) \triangleq s_2(t) - \langle s_2(t), \psi_1(t)\rangle \psi_1(t)$$

$$E_2 \triangleq \int_0^T \theta_2^2(t)\,dt \qquad \psi_2(t) = \frac{\theta_2(t)}{\sqrt{E_2}}$$

$$i. \qquad \theta_i(t) = s_i(t) - \sum_{k=1}^{i-1} \langle s_i(t), \psi_k(t)\rangle \psi_k(t)$$

$$E_i \triangleq \int_0^T \theta_i^2(t)\,dt \qquad \psi_i(t) = \frac{\theta_i(t)}{\sqrt{E_i}}$$

† en supposant une impulsion Nyquist idéale