

## Solutionnaire

$$1. A) \quad \Theta_1(t) = s_1(t) \quad E_1 = \int s_1^2(t) dt = \int_0^1 2^2 dt = 4$$

$$\Phi_1(t) = \Theta_1(t)/\sqrt{E_1} = \frac{1}{2} s_1(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\Theta_2(t) = s_2(t) - \langle s_2, \Phi_1 \rangle \Phi_1(t)$$

$$\langle s_2, \Phi_1 \rangle = \int_0^1 (1)(-4) dt = -4$$

$$\Theta_2(t) = s_2(t) + 4\Phi_1(t) = s_2(t) + 2s_1(t) = \begin{cases} -4 & 1 < t < 2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$E_2 = \int \Theta_2^2(t) dt = \int_1^2 (-4)^2 dt = 16$$

$$\Phi_2(t) = \frac{1}{4} \Theta_2(t) = \frac{1}{4} s_2(t) + \frac{1}{2} s_1(t) = \begin{cases} -1 & 1 < t < 2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\Theta_3(t) = s_3(t) - \langle s_3, \Phi_1 \rangle \Phi_1(t) - \langle s_3, \Phi_2 \rangle \Phi_2(t)$$

$$\langle s_3, \Phi_1 \rangle = \int_0^1 (1)(2) dt = 2 \quad \langle s_3, \Phi_2 \rangle = \int_1^2 (-1)(2) dt = -2$$

$$\begin{aligned} \Theta_3(t) &= s_3(t) - 2\Phi_1(t) + 2\Phi_2(t) = s_3(t) - s_1(t) + \frac{1}{2} s_2(t) + s_1(t) \\ &= s_3(t) + \frac{1}{2} s_2(t) = \begin{cases} 2 & 2 < t < 3 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \end{aligned}$$

$$E_3 = \int_2^3 2^2 dt = 4$$

$$\Phi_3(t) = \frac{s_3(t)}{2} + \frac{s_2(t)}{4} = \begin{cases} 1 & 2 < t < 3 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$1. B) \langle s_1, q_1 \rangle = \frac{1}{2} \int s_1^2(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^2 4 dt = 2$$

$$s_1 = [2 \ 0 \ 0]$$

$$\langle s_2, q_2 \rangle = \int_1^2 (-1)(-4) dt = 4 \quad \langle s_2, q_1 \rangle = -4$$

$$s_2 = [-4 \ 4 \ 0]$$

$$\langle s_3, q_3 \rangle = \int_2^3 (1)(2) dt = 2 \quad \langle s_3, q_2 \rangle = -2 \quad \langle s_3, q_1 \rangle = 2$$

$$s_3 = [2 \ -2 \ 2]$$

Vérification

$$s_1(t) = 2 \cdot q_1(t) = 2 \cdot \frac{1}{2} s_1(t) \quad \checkmark$$

$$s_2(t) = -4 q_1(t) + 4 q_2(t) = -4 \cdot \frac{1}{2} s_1(t) + 4 \cdot \frac{1}{4} s_2(t) + 4 \cdot \frac{1}{2} s_2(t) = s_2(t) \quad \checkmark$$

$$s_3(t) = 2 q_1(t) - 2 q_2(t) + 2 q_3(t)$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} s_1(t) - 2 \cdot \frac{1}{4} s_2(t) - 2 \cdot \frac{1}{2} s_1(t) + 2 \cdot \frac{s_2(t)}{2} + 2 \cdot \frac{s_2(t)}{4}$$

$$= s_1(t) - \frac{1}{2} s_2(t) - s_1(t) + s_2(t) + \frac{1}{2} s_2(t)$$

$$= s_3(t) \quad \checkmark$$

$$1. C) \|s_1 - s_2\|^2 = \sum_{i=1}^3 (s_{1,i} - s_{2,i})^2 = (2+4)^2 + 4^2 = 36 + 16 = 52$$

$$\|s_1 - s_3\|^2 = (2-2)^2 + (-2)^2 + (2)^2 = 4 + 4 = 8$$

$$\|s_2 - s_3\|^2 = (-4-2)^2 + (4+2)^2 + 2^2 = 36 + 36 + 4 = 76$$

La distance minimale est  $\sqrt{8}$ .

Les signaux  $s_1(t)$  et  $s_3(t)$  sont les plus proches

$$2. A) \quad \frac{2400 \text{ symboles}}{\text{Sec}} \times \log_2 M \frac{\text{symboles}}{\text{bit}} = 9600 \text{ b/s}$$

$$\Rightarrow \log_2 M = \frac{9600}{2400} = 4 \quad \Rightarrow M = 2^4 = 16$$

16 QAM  $a_n^I, a_n^Q \in \{\pm 1, \pm 3\}$

B) Largeur de bande disponible =  $3300 - 300 = 3000 \text{ Hz}$

Largeur de bande minimale =  $2400 \text{ Hz}$   
(sinc(4))

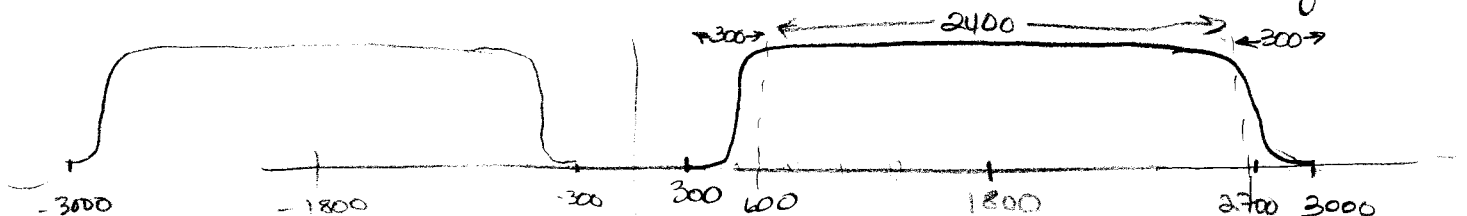
Largeur de bande en excès =  $3000 - 2400 = 600 \text{ Hz}$

$\alpha$  correspond à la largeur de bande additionnelle

$$(1+\alpha)2400 = 3000 \quad \alpha = \frac{3000-2400}{2400} = \frac{600}{2400} = \frac{1}{4} = .25 = 25\%$$

comme  $\alpha$  indique toujours le pourcentage de la largeur de bande minimale ajoutée au spectre

C) La transmission sera centrée sur la bande de fréquence disponible, soit  $300 \rightarrow 3300$   
donc  $f_c = \frac{3300-300}{2} + 300 = 1500 + 300 = 1800 \text{ Hz}$

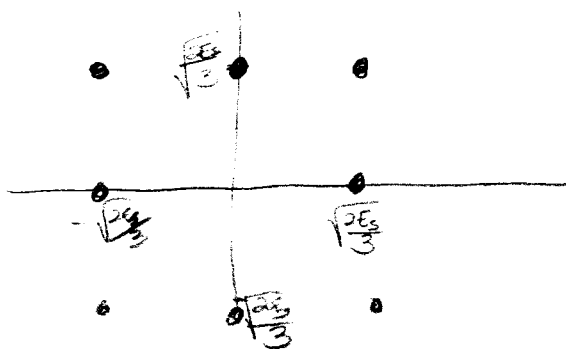


3. A) constellation a)

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} &= \frac{1}{8} \sum [(a_n^I)^2 + (a_n^Q)^2] = \frac{1}{8} [4 \times [1^2 + 0^2] + 4 \times [(1)^2 + (1)^2]] \\ &= \frac{1}{8} [4 + 4 \times 2] = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

coefficients des symboles:

$$[\sqrt{E_s} c_0 a_n^I, \sqrt{E_s} c_0 a_n^Q] = \left[ \sqrt{\frac{2E_s}{3}} a_n^I, \sqrt{\frac{2E_s}{3}} a_n^Q \right]$$

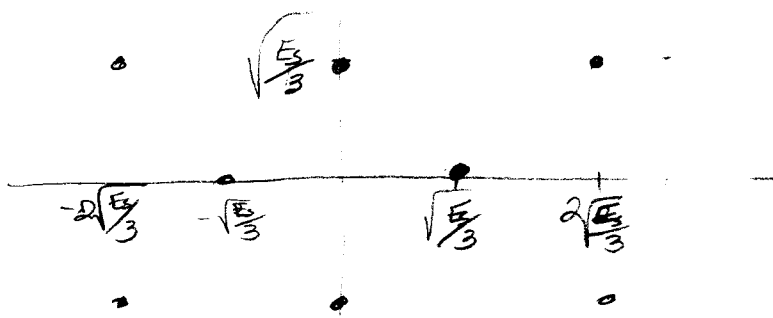


Constellation b)

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} &= \frac{1}{8} [4 \times [1^2 + 0^2] + 4 \times [(1)^2 + (2)^2]] \\ &= \frac{1}{8} [4 + 4 \times 5] = 3 \end{aligned}$$

coefficients

$$\left( \sqrt{\frac{E_s}{3}} a_n^I, \sqrt{\frac{E_s}{3}} a_n^Q \right)$$



3 B) distance minimale, constellation a)

$$D_{\min} = \sqrt{\frac{2E_s}{3}} \quad K=8 \text{ pairs à cette distance}$$

$$d_{\min}^2 = \frac{D_{\min}^2}{2E_s} = \frac{D_{\min}^2}{2E_s / \log_2 M} = \frac{D_{\min}^2}{2E_s / \log_2 8} = \frac{3}{2} \frac{D_{\min}^2}{E_s}$$

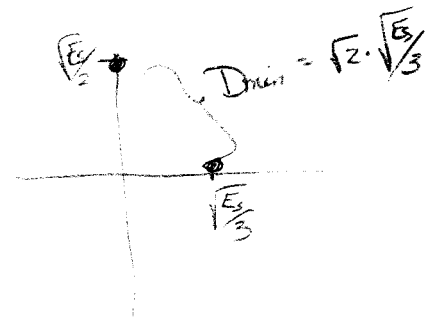
$$= \frac{3}{2} \frac{2E_s}{3E_s} = 1$$

$$P_e \leq \frac{2K}{M} Q \sqrt{\frac{d_{\min}^2 E_s}{N_0}} = \frac{2 \cdot 8}{8} Q \sqrt{\frac{E_s}{N_0}} = 2Q(E_s/N_0)$$

constellation b)

$$D_{\min} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{E_s}{3}} = \sqrt{\frac{2E_s}{3}} \quad K=8$$

$$d_{\min}^2 = \frac{3}{2} \frac{D_{\min}^2}{E_s} = 1$$



Donc les deux systèmes ont la même efficacité en puissance étant donné qu'ils ont la même distance minimale normalisée.

c) QPSK:  $P_e \approx 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}\right)$

La perte asymptotique =  $10 \log_{10} \frac{2}{1} = 10 \log_{10} 2 = 3 \text{ dB}$ .

$d_{\min}^2$  QPSK  
↓  
 $d_{\min}^2$  8 QAM

4.A) Les trois aspects les plus importants sont

- i) largeur de bande
- ii) probabilité d'erreur / efficacité en puissance
- iii) complexité du récepteur.

B) Le QPSK est supérieur au BPSK dans l'item i), soit la largeur de bande. QPSK utilise la moitié de la largeur de bande par bit, mais la probabilité d'erreur est légèrement plus grande pour la même énergie par bit.

C) QPSK est supérieur au 16QAM dans l'item ii), soit l'efficacité en puissance. 16QAM peut mettre plus des symboles dans la même largeur de bande, mais il prend 3dB (asymptotiquement) de plus pour arriver à la même probabilité d'erreur que QPSK.

D) DPSK est supérieur au BPSK dans l'item iii), soit la complexité du récepteur. Le BPSK avec détection cohérente prend une connaissance exacte de la phase du signal reçu. Le DPSK peut éviter le PLL pour suivre la phase, donc le récepteur est moins complexe.

4 E) L'interférence entre-symbole (ISI) ajoutée par un système duo-binaire peut rendre la forme du signal plus réalisable, plus pratique. L'ISI peut être introduit dans un système à réponse partielle pour améliorer la largeur de bande aussi.

5.

$$\begin{aligned} E n_1 n_2 &= E \left[ \int_0^T n(t) s_1(t) dt \cdot \int_0^T n(z) s_2(z) dz \right] \\ &= \int_0^T \int_0^T E \{ n(t) s_1(t) n(z) s_2(z) \} dt dz \\ &= \int_0^T \int_0^T s_1(t) s_2(z) E n(t) n(z) dt dz \end{aligned}$$

Le bruit AWGN a un spectre plat,  
donc une corrélation qui est la  
fonction delta

$$S(\pi) \Leftrightarrow 1 \quad \text{transformée de Fourier}$$

$$\text{donc } E n(t) n(z) = \begin{cases} 1 & t=z \\ 0 & t \neq z \end{cases}$$

$$E n_1 n_2 = \int_0^T s_1(t) s_2(t) dt$$

$$= 0 \quad \text{par orthogonalité} \quad \checkmark$$