Corrigé Final H2014

Question 1)

$$\begin{cases} y''(t) = \left(1+\frac{2}{t}\right)y(t) - (t+2) \\ y(0) = 0 \qquad y'(0) = 2 \end{cases}$$

Posons

$$u_0(t) = y(t), \quad u_1(t) = y'(t)$$

Alors on a le système d'EDO

$$\begin{cases} u_o'(t) = \boldsymbol{u_1}(t) \\ u_1'(t) = \left(1+\frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{t}}\right)\boldsymbol{u_0}(\boldsymbol{t}) - (t+2) \\ u_0(0) = 0 \qquad u_1(0) = 2 \end{cases}$$

Question 2)

$$\begin{cases} y'(t) = y(t) + e^{2t} \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

a) Soit $y(t) = e^t + e^{2t}$ alors

$$y'(t) = e^t + 2e^{2t}$$

Et on a bien que

$$y'(t) = y(t) + e^{2t}$$

De plus,

$$y(0) = e^0 + e^{2(0)} = 2$$

On peut conclure que $y(t) = e^t + e^{2t}$ est la solution de l'EDO.

b) La méthode s'écrit

$$k_1 = hf(t_n, y_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right)$$

Ici $y_0 = 2, t_0 = 0, f(t, y) = y + e^{2t}$ pour $h = 0.1$

$$k_1 = h(f(t_0, y_0) = 0.1(y_0 + e^{2t_0}) = 0.1(2+1) = 0.3$$

$$y_1 = y_0 + hf\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right) = 2 + 0.1\big(f(0.05, 2.15)\big) = 2 + 0.1(2.15 + e^{2*0.05}) \approx 2.325517$$

c) On nous dit qu'en utilisant $h = 0.05$ on obtient 2.326298 comme approximation de $y(0.1)$. La vraie valeur est

$$y(0.1) = e^{0.1} + e^{0.2} \approx 2.326574$$

L'ordre p de la méthode s'approxime de la manière suivante :

$$\frac{|y(0.1) - 2.325517|}{|y(0.1) - 2.326298|} = \frac{e(h)}{e\left(\frac{h}{2}\right)} \approx \frac{Ch^p}{C\left(\frac{h}{2}\right)^p} = 2^p$$

On obtient

$$3.833 = \frac{e(h)}{e\left(\frac{h}{2}\right)} \approx 4 = 2^2$$

Et on en conclut que la méthode est d'ordre 2.

Question 3)

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = a + bx^3 & -1 \leq x \leq 0 \\ S_1(x) = cx^2 + dx^3 & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

a) Trouver a, b, c et d pour que S soit une spline passant par les points $(-1,-1)$, $(0,0)$ et $(1,1)$

i) Continuité de S en $x = 0$:

$$S_0(0) = a + b(0)^3 = a$$
$$S_1(0) = c(0)^2 + d(0)^3 = 0$$

Et S est continue en $x = 0$ si $a = 0$

ii) Continuité de S' en $x = 0$

$$S_0'(0) = 3(0)^2 = 0$$
$$S_1'(0) = 2c(0) + 3d(0)^2 = 0$$

Et S'est continue en $x = 0$.

iii) Continuité de S'' en $x = 0$

$$S_0''(0) = 6(0) = 0$$
$$S_1''(1) = 2c + 6d(0) = 2c$$

Et S''est continue en $x = 0$ si $c = 0$

iv) $S(x)$ doit satisfaire

$$S(-1) = b(-1)^3 = -1$$
$$S(1) = d(1)^3 = 1$$

Alors $b = 1$ et $d = 1$ et $S(x) = x^3$ sur $[-1,1]$

Alternative : on aurait pu remarquer que x^3 interpole les trois points. Étant une fonction infiniment dérivable la fonction, de même que toutes ses dérivées sont forcément continue en $x = 0$ et x^3est une spline. Il ne restait plus qu'à prendre $a = 0 = c$ et $b = 1 = d$ et on répondait à la question.

b) Pour que la spline soit naturelle, il faut que $S''(-1) = 0$ et $S''(1) = 0$ dans notre cas :

$$S''(-1) = 6(-1) \neq 0$$

Et la spline n'est pas naturelle.

c)

$$T(x) = \begin{cases} T_0(x) = x & -1 \leq x \leq 0 \\ \\ T_1(x) = x & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$T(x) = x$ est interpolation passant par les 3 points. De plus c'est une fonction continue de même que ses dérivée en $x = 0$. C'est donc une spline cubique (dont les termes cubiques sont nuls). Puisque

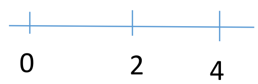
$$T''(-1) = 0 = T''(1)$$

Cette spline est naturelle.

Question 4)

$$I = \int_0^4 e^{-x^2} dx$$

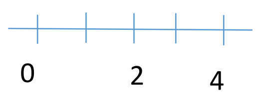
a) Trapèze avec 2 intervalles



$h = 2, x_0 = 0, x_1 = 2, x_2 = 4$ la formule donne

$$I \approx \frac{h}{2}\big(f(x_0) + 2f(x_1) + f(x_2)\big) = \frac{2}{2}\left(e^0 + 2e^{-2^2} + e^{-4^2}\right) = (e^0 + 2e^{-4} + e^{-16}) \approx 1.0366314$$

b) Trapèze avec 4 intervalles



$h = 1, x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4$ la formule donne

$$I \approx \frac{h}{2}\big(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + f(x_4)\big) = \frac{1}{2}\left(e^0 + 2e^{-1^2} + 2e^{-2^2} + 2e^{-3^2} + e^{-4^2}\right)$$

$$\approx \frac{1}{2}(e^0 + 2e^{-1} + 2e^{-4} + 2e^{-9} + e^{-16}) \approx 0.8863185$$

c) Le trapèze est une méthode d'ordre 2, en a) et b) on a obtenue :

$$Q(h) = 1.0366314 \qquad Q\left(\frac{h}{2}\right) = 0.8863185$$

L'extrapolation de Richardson donne alors

$$Q_{ex} = \frac{4Q\left(\frac{h}{2}\right) - Q(h)}{3} \approx 0.836124$$

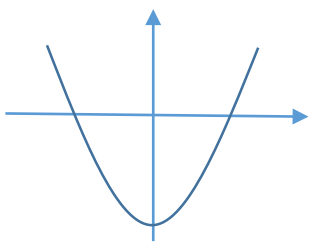
d) L'erreur absolue sur le trapèze est

$$e(h) = \left|\frac{b-a}{12} h^2 f''(\eta)\right| \qquad \eta \in [a, b]$$

Ici $a=0, b=4$ et $f(x)=e^{-x^2}$ alors

$$f'(x)= -2x\,e^{-x^2} \quad f''(x)= 4x^2e^{-x^2}-2e^{-x^2}=(4x^2-2)f(x)$$

La fonction atteint son maximum en $x=0$ (voir le graphe de f) et $(4x\text{^}2\ -2)$ atteint son maximum au extrémités de l'intevalle, on aura :



$$|f''(\eta)|=|4\eta^2-2|\left|e^{-\eta^2}\right| \leq |4\eta^2-2| \leq 4(4)^2-2=62$$

et

$$e(h) \leq \frac{62h^2}{3}$$

e) Pour garantir que $e(h)<10^{-5}$ on impose

$$e(h) \leq \frac{62h^2}{3} < 10^{-5} \quad \Longrightarrow \quad h < \frac{(3\times 10^{-5})}{62} \approx 0.0007$$

Puisque

$$h=\frac{b-a}{n}=\frac{4}{n} \quad \Longrightarrow \quad h<0.0007 \quad \Longrightarrow \quad n>5715$$

f) Pour Gauss-Legendre, la fonction à intégrer, après changement de variable est

$$g(t)=2e^{-4(t+1)^2}>0\ \forall t \in \mathbb{R}$$

Pour une intégration exacte il faudrait qu'une dérivée de $g(t)$ s'annule en un point, ce qui n'est pas possible. On ne peut donc pas intégrer exactement f (ou g).

Question 5)

x_i	-1	0	1	3
$f(x_i)$	-1	0	1	1.442

a) il y a 3 formules possibles

i) formule avant avec $x_0=0, x_1=1$ et $h=1$

$$f'(0) \approx \frac{f(1)-f(0)}{1}=1$$

ii) formule avant avec $x_0=0, x_1=3$ et $h=3$

$$f'(0) \approx \frac{f(3)-f(0)}{3}=0.4807$$

iii) formule arrière avec $x_0=-1, x_1=0$ et $h=1$

$$f'(0) \approx \frac{f(-1)-f(0)}{1}=1$$

b) Pour une approximation d'ordre 2 de $f'(0)$ il nous faut des points équidistants : donc on ne peut prendre que (-1,-1) (0,0) et (1,1). La seule formule disponible est la formule centrée

$$f'(0) \approx \frac{f(1)-f(-1)}{2(1)}=1$$

c) On fait les dev. De Taylor de $f(x+h)$ et de $f(x-h)$

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \mathcal{O}(h^3)$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \mathcal{O}(h^3)$$

En recombinant :

$$f(x+h) - f(x-h) = 2hf'(x) + \mathcal{O}(h^3)$$

Et en divisant par $2h$, on obtient la formule

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x) + \mathcal{O}(h^2)$$

Et la formule à gauche est une approximation d'ordre 2 de $f'(x)$.