

1997 Examen Final - Solutions

Problème 1

Pour trouver la réponse impulsionnelle de ce circuit on détermine la réponse fréquentielle puis on effectue une transformée de Fourier inverse.

Pour trouver la réponse en fréquence, on remplace le condensateur avec une impédance complexe $1/j2\omega$; ensuite, on utilise les équations de Kirchoff pour calculer le courant et la tension. Le rapport des tensions dans ce circuit est donné par un simple diviseur de tension, donc

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \frac{V_{out}(\omega)}{V_{in}(\omega)} = \frac{1 + 1/2j\omega}{1 + 1 + 1/2j\omega} = \frac{1 + 2j\omega}{4j\omega + 1} \\ &= \frac{1 + 4j\omega - 2j\omega}{4j\omega + 1} = 1 - \frac{2j\omega}{4j\omega + 1} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{j\omega}{j\omega + 1/4} \end{aligned}$$

On remarque à partir de la table que

$$\frac{1}{j\omega + \beta} \Leftrightarrow e^{-\beta t} U(t)$$

Une multiplication de la transformée par $j\omega$ correspond à une dérivation de la transformée inverse

$$\frac{j\omega}{j\omega + \beta} \Leftrightarrow \frac{d}{dt} e^{-\beta t} U(t)$$

puis on évalue la dérivée soit graphiquement soit directement par calcul:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [e^{-\beta t} U(t)] &= \frac{d}{dt} [e^{-\beta t}] \cdot U(t) + e^{-\beta t} \cdot \frac{d}{dt} [U(t)] \\ &= -\beta e^{-\beta t} U(t) + e^{-\beta t} \delta(t) \\ &= -\beta e^{-\beta t} U(t) + e^{-\beta \cdot 0} \delta(t) \\ &= -\beta e^{-\beta t} U(t) + \delta(t) \end{aligned}$$

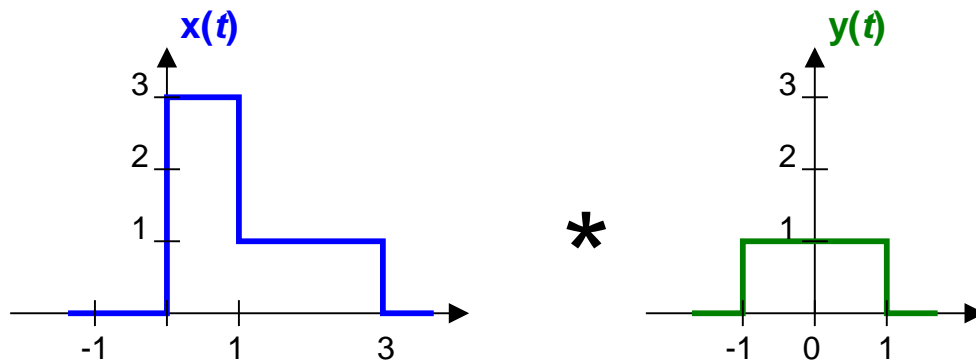
La transformée inverse de la fonction de transfert $H(j\omega)$ est donc

$$\begin{aligned} TF^{-1} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{j\omega}{j\omega + 1/4} \right\} &= \delta(t) - \frac{1}{2} TF^{-1} \left\{ \frac{j\omega}{j\omega + 1/4} \right\} \\ &= \delta(t) - \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{4} e^{-t/4} U(t) + \delta(t) \right] \\ &= \frac{1}{2} \delta(t) + \frac{1}{8} e^{-t/4} U(t) \end{aligned}$$

Enfin, la réponse impulsionnelle du circuit est

$$h(t) = \frac{1}{2} \cdot \delta(t) + \frac{1}{8} e^{-t/4} U(t)$$

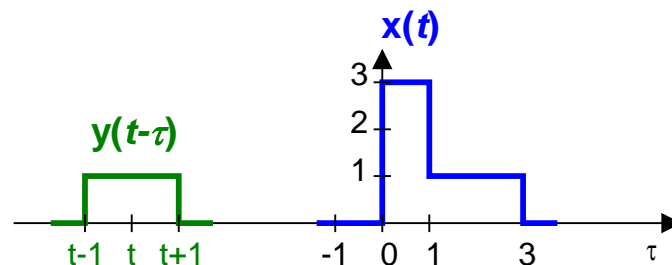
Problème 2



$$x(t) = 3\text{Rect}(t - 1/2) + \text{Rect}\left(\frac{t-4}{2}\right)$$

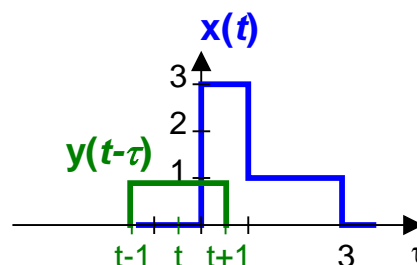
$$y(t) = \text{Rect}(t/2)$$

la convolution $x(t)*y(t)=y(t)*x(t)$, on a le choix de déplacer n'importe quelle fonction par rapport à l'autre. Il est plus évident de déplacer $y(t)$ par rapport à $x(t)$. Le produit $y(t-\tau)x(\tau)$ est nul pour $t < -1$, donc le produit de convolution est nul sur cet intervalle.



Pour $-1 < t < 0$, le chevauchement se produit dans l'intervalle 0 à $t+1$. Dans cet intervalle la fonction $y(t-\tau)=1$ et la fonction $x(\tau)=3$, le produit simple est $y(t-\tau).x(\tau)=3$. Le produit de convolution est

$$y(t) * x(t) = \int_0^{t+1} 3 d\tau = 3 \int_0^{t+1} d\tau = 3[t]_0^{t+1} = 3(t+1) - 3.0 = 3(t+1)$$



Pour $0 < t < 1$, le chevauchement se produit aussi dans l'intervalle 0 à $t+1$. Dans cet intervalle la fonction $y(t-\tau)=1$, mais la fonction $x(\tau)$ est définie différemment sur deux parties de l'intervalle de chevauchement:

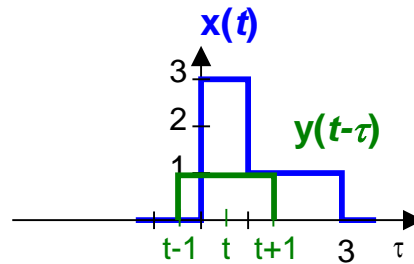
$$x(\tau) = \begin{cases} 3 & 0 < \tau < 1 \\ 1 & 1 < \tau < t+1 \end{cases}$$

donc le produit simple doit être évalué aussi par intervalle

$$y(t-\tau) \cdot x(\tau) = \begin{cases} 1 \cdot 3 & 0 < \tau < 1 \\ 1 \cdot 1 & 1 < \tau < t+1 \end{cases} = \begin{cases} 3 & 0 < \tau < 1 \\ 1 & 1 < \tau < t+1 \end{cases}$$

Le produit de convolution est par conséquent somme de deux intégrales

$$y(t) * x(t) = \int_0^1 3 \cdot d\tau + \int_1^{t+1} 1 \cdot d\tau = 3 \cdot [\tau]_0^1 + [\tau]_1^{t+1} = 3 + (t+1-1) = 3+t$$



Pour $1 < t < 2$ le chevauchement se produit dans l'intervalle $t-1$ à $t+1$. Dans cet intervalle la fonction $y(t-\tau)=1$, mais la fonction $x(\tau)$ est définie différemment sur deux parties de l'intervalle de chevauchement:

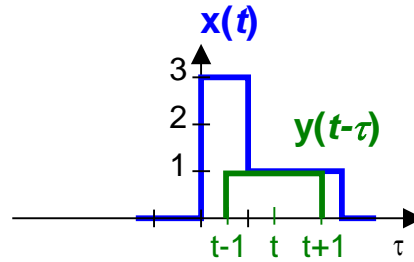
$$x(\tau) = \begin{cases} 3 & t-1 < \tau < 1 \\ 1 & 1 < \tau < t+1 \end{cases}$$

donc le produit simple doit être évalué aussi par intervalle

$$y(t-\tau) \cdot x(\tau) = \begin{cases} 1 \cdot 3 & t-1 < \tau < 1 \\ 1 \cdot 1 & 1 < \tau < t+1 \end{cases} = \begin{cases} 3 & t-1 < \tau < 1 \\ 1 & 1 < \tau < t+1 \end{cases}$$

Le produit de convolution est par conséquent somme de deux intégrales

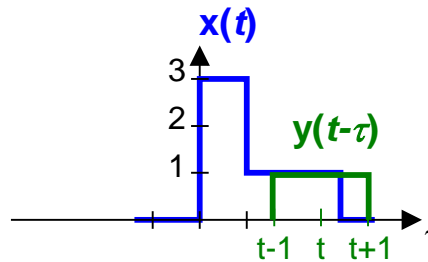
$$\begin{aligned} y(t) * x(t) &= \int_{t-1}^1 3 \cdot d\tau + \int_1^{t+1} 1 \cdot d\tau = 3 \cdot [\tau]_{t-1}^1 + [\tau]_1^{t+1} \\ &= 3(1 - (t-1)) + (t+1-1) = 3(2-t) + t = 6-2t \end{aligned}$$



Pour $2 < t < 4$, le chevauchement se produit dans l'intervalle $t-1$ à 3. Dans cet intervalle la fonction $y(t-\tau)=1$ et la fonction $x(\tau)=1$.

Le produit de convolution est

$$y(t) * x(t) = \int_{t-1}^3 1 \cdot 1 \cdot d\tau = [\tau]_{t-1}^3 = (3 - (t-1)) = 4 - t$$

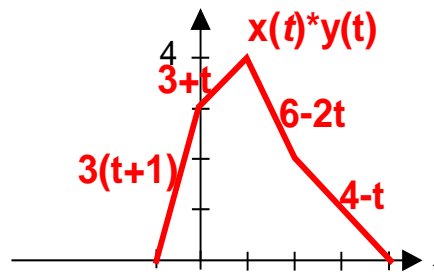


Le produit $y(t-\tau) \cdot x(\tau)$ est nul pour $t < -1$, donc le produit de convolution est nul sur cet intervalle.

Enfin le produit de convolution est

$$y(t) * x(t) = \begin{cases} 0 & t < -1 \\ 3(t+1) & -1 < t < 0 \\ 3+t & 0 < t < 1 \\ 6-2t & 1 < t < 2 \\ 4-t & 2 < t < 4 \\ 0 & t > 4 \end{cases}$$

La représentation graphique de la convolution est la suivante



Problème 3

$$z(t) = x(t) + \cos(\omega_c t)$$

a) A partir de la table, on a $\text{Rect}(t/\tau) \Leftrightarrow \tau \text{Sa}(\omega\tau/2)$ donc en utilisant la propriété de la dualité on trouve $2\pi \text{Rect}(-\omega/\tau) \Leftrightarrow \tau \text{Sa}(t\tau/2)$; puis $\frac{2\pi}{\tau} \text{Rect}(\omega/\tau) \Leftrightarrow \text{Sa}(t\tau/2)$ en prenant $t = 2$, on obtient $\text{Sa}(t) \Leftrightarrow \pi \text{Rect}(\omega/2)$

Il est connu que $\cos(\omega_c t) \Leftrightarrow \pi [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)]$

Enfin $\text{Sa}(t) + \cos(\omega_c t) \Leftrightarrow \pi \text{Rect}(\omega/2) + \pi [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)]$

b) on commence par simplifier $z^2(t)$ sous forme de fonctions dont les transformées sont plus évidentes comme suit

$$\begin{aligned} z^2(t) &= (x(t) + \cos(\omega_c t))^2 \\ &= x^2(t) + 2x(t)\cos(\omega_c t) + \cos^2(\omega_c t) \\ &= x^2(t) + 2x(t)\cos(\omega_c t) + \frac{1}{2}(1 + \cos(2\omega_c t)) \end{aligned}$$

pour le premier terme $x^2(t) = \text{Sa}^2(t)$

A partir de la table, on a $\text{Tri}(t/\tau) \Leftrightarrow \tau \text{Sa}^2(\omega\tau/2)$ donc en utilisant la propriété de la dualité on a $\text{Sa}^2(t\tau/2) \Leftrightarrow \frac{2\pi}{\tau} \text{Tri}(-\omega/\tau) = \frac{2\pi}{\tau} \text{Tri}(\omega/\tau)$; en choisissant $t = 2$ on trouve $\text{Sa}^2(t) \Leftrightarrow \pi \text{Tri}(\omega/2)$

Pour le deuxième terme

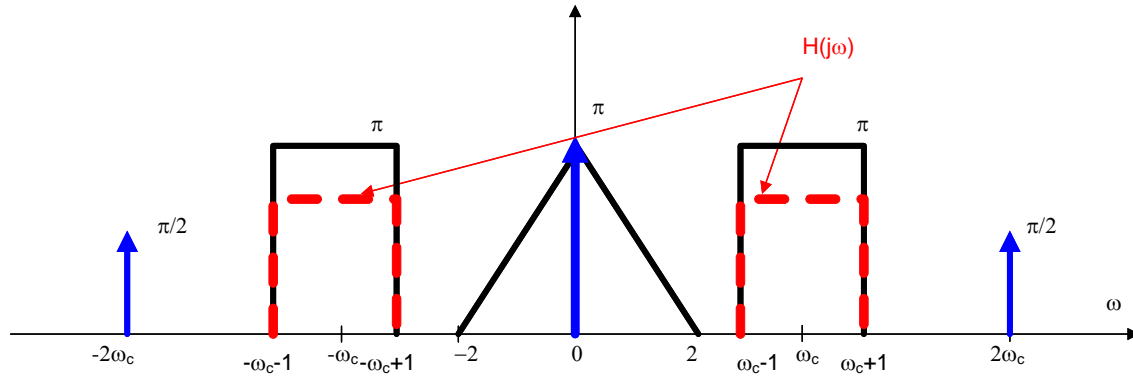
$$\begin{aligned} 2x(t)\cos(\omega_c t) &\Leftrightarrow 2 \frac{1}{2\pi} \{ X(\omega) * \pi [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)] \} \\ &\Leftrightarrow X(\omega) * [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)] \\ &\Leftrightarrow X(\omega - \omega_c) + X(\omega + \omega_c) \\ &\Leftrightarrow \pi \left[\text{Rect}\left(\frac{\omega - \omega_c}{2}\right) + \text{Rect}\left(\frac{\omega + \omega_c}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

Pour le troisième terme $\frac{1}{2} \Leftrightarrow \pi \delta(\omega)$

Pour le quatrième terme $\frac{1}{2} \cos(2\omega_c t) \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} [\delta(\omega - 2\omega_c) + \delta(\omega + 2\omega_c)]$

Enfin la transformée cherchée est

$$TF(z^2(t)) = \pi \text{Tri}(\omega/2) + \pi \text{Rect}\left(\frac{\omega - \omega_c}{2}\right) + \pi \text{Rect}\left(\frac{\omega + \omega_c}{2}\right) + \pi \delta(\omega) + \frac{\pi}{2} [\delta(\omega - 2\omega_c) + \delta(\omega + 2\omega_c)]$$

**Deuxième méthode pour b):**

Dans a) nous avons calculé la transformée $Z(\omega)$; en utilisant celle-ci on peut directement écrire

$$\begin{aligned}
 TF\{z^2(t)\} &= \frac{1}{2\pi} \{Z(\omega) * Z(\omega)\} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \left[X(\omega) + \pi [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)] \right] * \left[X(\omega) + \pi [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)] \right] \right\} \\
 &= \frac{1}{2\pi} X(\omega) * X(\omega) + \frac{2\pi}{2\pi} [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)] * X(\omega) \\
 &\quad + \frac{\pi^2}{2\pi} [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)] * [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 TF\{z^2(t)\} &= \frac{1}{2\pi} X(\omega) * X(\omega) + [X(\omega - \omega_c) + X(\omega + \omega_c)] + \frac{\pi}{2} [\delta(\omega - 2\omega_c) + \delta(\omega + 2\omega_c) + 2\delta(\omega)] \\
 &= \frac{1}{2\pi} [\pi \text{Rect}(\omega/2) * \pi \text{Rect}(\omega/2)] + \pi \text{Rect}\left(\frac{\omega - \omega_c}{2}\right) + \pi \text{Rect}\left(\frac{\omega + \omega_c}{2}\right) \\
 &\quad + \frac{\pi}{2} [\delta(\omega - 2\omega_c) + \delta(\omega + 2\omega_c) + 2\delta(\omega)] \\
 &= \frac{2\pi^2}{2\pi} \text{Tri}(\omega/2) + \pi \left[\text{Rect}\left(\frac{\omega - \omega_c}{2}\right) + \text{Rect}\left(\frac{\omega + \omega_c}{2}\right) \right] + \pi \delta(\omega) + \frac{\pi}{2} [\delta(\omega - 2\omega_c) + \delta(\omega + 2\omega_c)]
 \end{aligned}$$

c) Pour que le filtre soit capable d'extraire $2x(t)\cos(\omega_c t)$, il doit être capable de filtrer les deux rectangles centrées à ω_c et $-\omega_c$. Ceci est possible seulement si $\omega_c \geq 3$. Nous avons aussi besoin d'éliminer le DC, soit la fonction delta à DC.

Problème 4

$$x(t) = \text{Sa}\left(\frac{t}{4}\right)$$

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Rect}\left(\frac{t - n2\pi}{\pi/2}\right)$$

a) À partir de la table, on a $\text{Rect}(t/\tau) \Leftrightarrow \tau \text{Sa}(\omega\tau/2)$. En utilisant la propriété de la dualité on trouve $\tau \text{Sa}(t\tau/2) \Leftrightarrow 2\pi \text{Rect}(-\omega/\tau)$; puis $\text{Sa}(t\tau/2) \Leftrightarrow \frac{2\pi}{\tau} \text{Rect}(\omega/\tau)$

En prenant $t = 1/2$, on obtient

$$x(t) = \text{Sa}(t/4) \Leftrightarrow X(\omega) = \frac{2\pi}{1/2} \text{Rect}(\omega/(1/2)) = 4\pi \text{Rect}(2\omega)$$

b) $p(t)$ est une fonction périodique de période $T_0 = 2\pi$, donc $\omega_0 = 2\pi/T_0 = 1$, donc pour calculer sa transformée on commence par calculer la transformée de sa restriction dans la période centrale.

$$p_r(t) = \text{Rect}\left(\frac{t}{\pi/2}\right)$$

À partir de la table, on a $\text{Rect}(t/t) \Leftrightarrow t \text{Sa}(\omega t/2)$ donc

$$p_r(t) = \text{Rect}\left(\frac{t}{\pi/2}\right) \Leftrightarrow P_r(\omega) = \frac{\pi}{2} \text{Sa}\left(\omega \cdot \frac{\pi/2}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \text{Sa}\left(\frac{\pi\omega}{4}\right)$$

La transformée de la fonction périodique est par conséquent

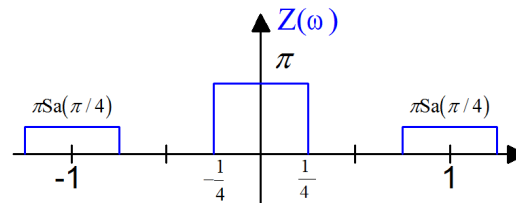
$$\begin{aligned} P(\omega) &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_0} P_r(\omega = n\omega_0) \cdot \delta(\omega - n\omega_0) \\ &= \frac{2\pi}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\pi}{2} \text{Sa}\left(\frac{\pi n\omega_0}{4}\right) \cdot \delta(\omega - n\omega_0) \\ &= \frac{\pi\omega_0}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{Sa}\left(\frac{\pi n\omega_0}{4}\right) \cdot \delta(\omega - n\omega_0) \\ &= \frac{\pi}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{Sa}\left(\frac{\pi n}{4}\right) \cdot \delta(\omega - n) \end{aligned}$$

c) il serait intéressant de passer à la convolution dans le domaine fréquentiel étant donné que les transformées sont disponibles, et leurs formes sont plus simples à manipuler

$$z(t) = x(t) \cdot p(t) \Leftrightarrow Z(\omega) = \frac{1}{2\pi} \{X(\omega) * P(\omega)\}$$

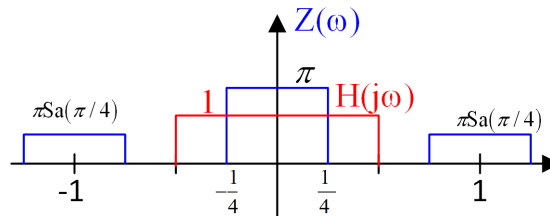
$$\begin{aligned}
 Z(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \{X(\omega) * P(\omega)\} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \cdot 4\pi \text{Rect}(2\omega) * \frac{\pi}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{Sa}\left(\frac{\pi n}{4}\right) \cdot \delta(\omega - n) \\
 &= 2 \cdot \frac{\pi}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{Sa}\left(\frac{\pi n}{4}\right) \cdot \{\text{Rect}(2\omega) * \delta(\omega - n)\} \\
 &= \pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{Sa}\left(\frac{\pi n}{4}\right) \cdot \text{Rect}(2(\omega - n))
 \end{aligned}$$

Le spectre $z(t)$ est donc une fonction périodique modifiée. Elle est modifiée du fait que le rectangle contenu dans chaque période admet une amplitude différente suivant la fonction $\pi \text{Sa}\left(\frac{\pi n}{4}\right)$, comme indiqué dans la figure ci-dessous. Pour la période centrale, $n=0$, l'amplitude assignée au rectangle central est $\pi \text{Sa}\left(\frac{\pi \cdot 0}{4}\right) = \pi$. Pour $n = \pm 1$, l'amplitude assignée aux rectangles correspondant à ces périodes c'est $\pi \text{Sa}\left(\frac{\pi \cdot \pm 1}{4}\right) = \pi \text{Sa}\left(\frac{\pi}{4}\right)$



d)

$$H(j\omega) = \text{Rect}(\omega)$$



$$Y(\omega) = \pi \text{Rect}(2\omega)$$

e) À partir de la table, on a $\text{Rect}(t/t) \Leftrightarrow t \text{Sa}(\omega t/2)$. En utilisant la propriété de la dualité, on trouve $2\pi \text{Rect}(-\omega/\tau) \Leftrightarrow \tau \text{Sa}(t\tau/2)$; puis $\text{Rect}(\omega/\tau) \Leftrightarrow \frac{\tau}{2\pi} \text{Sa}(t\tau/2)$

En prenant $t = 1/2$, on obtient

$$\text{Rect}(2\omega) \Leftrightarrow \frac{1}{4\pi} \text{Sa}(t/4)$$

par la suite

$$\pi \text{Rect}(2\omega) \Leftrightarrow \frac{1}{4} \text{Sa}(t/4)$$