2023이이 김민석

1.11

정의에 의해

$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$ 이다. 전개하면,

$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i^2 - 2y_i\bar{y} + \bar{y}^2)$

$= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}y_i^2 + \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(-2y_i\bar{y}) + \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\bar{y}^2$ ((c)에 의해)

$= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}y_i^2 - \frac{2\bar{y}}{n-1}\sum_{i=1}^{n}y_i + \frac{n}{n-1}\bar{y}^2$ ((a),(b)에 의해)

이때, $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i$ 라는 점에 착안하여,

$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}y_i^2 + \left\{-\frac{2}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)^2 + \frac{n}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)^2\right\} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}y_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)^2\right]$ 이 된다.

1.22

정의에 의해, $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i$ 이다. 정리하면 $n\bar{y} = \sum_{i=1}^{n}y_i$ 이다.

$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^{n}y_i - \sum_{i=1}^{n}\bar{y} = n\bar{y} - n\bar{y} = 0$ 으로, $\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y}) = 0$ 이다.

1.27

Bell shape의 분포를 지니고, $\bar{y}$ 와 s 값이 주어진 형태이다.

$\bar{y} \pm s$ 의 범위에 68%의 data가 속하고, $\bar{y} \pm 2s$에 95%가 속한다.

64~80은 $\bar{y} \pm s$의 유형이니 $340 \times 0.68 = 231.2$ 라 약 231명이 해당되며,

56~88은 $\bar{y} \pm 2s$의 유형이니 $340 \times 0.95 = 323$ 이라 약 323명이 해당된다.

1.32

$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$ 이니 $(n-1)s^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$ 이다. $S_k = \{i \mid |y_i - \bar{y}| \geq ks\}$ 라 두면,

$(n-1)s^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = \underbrace{\sum_{i\in S_k}(y_i - \bar{y})^2}_{\geq 0} + \underbrace{\sum_{i\notin S_k}(y_i - \bar{y})^2}_{\geq 0} \geq \sum_{i\in S_k}(y_i - \bar{y})^2$ 이다.

$\sum_{i\in S_k}(y_i - \bar{y})^2 \geq \sum_{i\in S_k}(ks)^2 = |S_k|k^2s^2$ 이다. ($|S_k| \Rightarrow S_k$의 원소의 수)

즉, $(n-1)^2 s^2 \geq |S_k|k^2s^2$ 이고, 정리하면, $1 \geq \frac{|S_k|}{n-1}k^2 \geq \frac{|S_k|}{n}k^2$ 이다.

따라서! $\frac{1}{k^2} \geq \frac{|S_k|}{n}$ 또는 $\frac{(n-|S_k|)}{n} \geq 1 - \frac{1}{k^2}$ 로, 문제의 제시된 바를 충족한다.

20230101 김민석

1.37

주어진 데이터의 평균과 표준편차를 보았을때, 평균이 0.033mg/L 인 반면, 표준편차는 0.1mg/L 이다. 따라서, 평균과 표준편차의 수치적 차이로 인해 분포가 skewed 하게 됩니다.

2.18

a) {HH, HT, TH, TT} (H: Head, T: Tail)

b) 만약 공정한 동전이면, 각 사건의 확률이 $\frac{1}{4}$로 동일하다.

c) $A = \{HT, TH\}$ $B = \{HH, HT, TH\}$ 이다.

d) $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{3}{4}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{2}$, $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$, $P(\bar{A} \cup B) = 1$ 이다.

2.20

a) $P(G) = P(D_1) = P(D_2) = \frac{1}{3}$ 로 동일하다.

b) I. Good prize 를 선택할 확률은 1/3 입니다.

II. 다른 Dud를 선택하게 될 것이다.

III. Dud가 아닌, good prize를 선택하게 된다.

IV. $\frac{2}{3}$의 확률이 된다.

V. 바꾸는 것이 더 확률을 높히는 길이다.

2.28

a) 사람: (M_1, M_2, M_3, P)

$\Rightarrow \{M_1M_2, M_1M_3, M_1P, M_2M_3, M_2P, M_3P\}$

b) 각 사람이 선택될 확률이 동등하다면 $\frac{1}{6}$로 모두 같다.

c) $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \boxed{\frac{1}{2}}$ 이 된다.

2.48

x^5y^3의 계수와 x^3y^5의 계수 모두 ${}_8C_3 = \binom{8}{3} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56$ 이다.

2.64

1, 2, 3, 4, 5, 6 으로 구성되어지면 되므로,

$6! \times \left(\frac{1}{6}\right)^6 = \frac{120}{6^5} = \boxed{\frac{5}{324}}$ 이다.

2.68 2023이이 김민석

a) $\binom{n}{n} = {}_nC_n = \frac{n!}{(n-n)!\cdot n!} = \frac{1}{0!} = 1$

(b) $\binom{n}{0} = {}_nC_0 = \frac{n!}{(n-0)!\,0!} = \frac{1}{0!} = 1$

(c) $\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} = \frac{n!}{(n-(n-r))!\,(n-r)!} = \boxed{\binom{n}{n-r}}$

d) $(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$ 이다. $x=y=1$ 대입하게 되면,

$\boxed{2^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}}$ 가 된다

2.72

a)

independent 함을 확인하려면, $P(A|M) = P(A)$ 인지를 보이면 된다.

자료에 의하여, $P(A) = \frac{6}{10}$, $P(M) = \frac{4}{10}$, $P(A \cap M) = \frac{24}{100}$ 이다.

$P(A|M) = \frac{P(A\cap M)}{P(M)} = \frac{\frac{24}{100}}{\frac{4}{10}} = \frac{6}{10} = P(A)$ 이다.

따라서, A와 M의 경우, 서로 independent 하다.

(b)

$\bar{A}$ 와 F가 independent 함을 보이려면, $P(\bar{A}|F) = P(\bar{A})$ 임을 보이면 된다.

$P(\bar{A}) = \frac{4}{10}$, $P(F) = \frac{6}{10}$, $P(\bar{A} \cap F) = \frac{24}{100}$ 이므로,

$P(\bar{A}|F) = \frac{P(\bar{A}\cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{24}{100}}{\frac{6}{10}} = \frac{24}{6} = \frac{4}{10} = P(\bar{A})$ 이다.

따라서, $\bar{A}$와 F의 경우 independent 하다.