1. Suppose Y_1, Y_2, Y_3 are from Exp(β). Let $X_1 = Y(1)$, $X_2 = Y(2) - Y(1)$, $X_3 = Y(3) - Y(2)$.

   Where $Y(i)$: i th order statistic.

   (a) Find joint pdf of X_1, X_2, X_3

$$f_Y(y) = \frac{1}{\beta} e^{-\frac{y}{\beta}}, \quad (y \geq 0) \text{ 이다.}$$

Y_1, Y_2, Y_3 가 모두 iid exponential random variables 로, X_1, X_2, X_3 를 구하기 전 먼저

Y_1, Y_2, Y_3 의 관점에서 보자.

일반적인 order statistics 에서 joint distribution 은. $f(y_1, \cdots, y_n) = n! \prod\limits_{i=1}^{n} f(y_i)$, $(y_1 \leq \cdots \leq y_n)$ 이다.

이를 적용하면, $f_{Y_{(1)}, Y_{(2)}, Y_{(3)}}(y_1, y_2, y_3) = 3! \left(\frac{1}{\beta} e^{-\frac{y_1}{\beta}} \right) \left(\frac{1}{\beta} e^{-\frac{y_2 - y_1}{\beta}} \right) \left(\frac{1}{\beta} e^{-\frac{y_3 - y_2}{\beta}} \right) = \frac{6}{\beta^3} e^{-\frac{y_3}{\beta}}$, $(0 \leq y_1 \leq y_2 \leq y_3)$ 가 된다.

이제, X_1, X_2, X_3 로 바꾸자. $X_1 = Y_{(1)}$, $X_2 = Y_{(2)} - Y_{(1)}$, $X_3 = Y_{(3)} - Y_{(2)}$ 이므로, $x_1 = y_1$, $y_2 = x_1 + x_2$, $y_3 = x_1 + x_2 + x_3$ 로 얻을 수 있다. 변환을 위한 Jacobian 은.

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y_3}{\partial x_1} & \frac{\partial y_3}{\partial x_2} & \frac{\partial y_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \text{ 이며. 즉, } f_{X_1, X_2, X_3}(x_1, x_2, x_3) = f_{Y_{(1)}, Y_{(2)}, Y_{(3)}}(x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3) \times J \text{ 로,}$$

$$\underline{f_{X_1, X_2, X_3}(x_1, x_2, x_3)} = \left(\frac{1}{\beta} \right)^3 \cdot 6 \cdot e^{-\frac{3x_1 + 2x_2 + x_3}{\beta}} = \underline{6\beta^{-3} e^{-\frac{3x_1 + 2x_2 + x_3}{\beta}}}, \qquad (x_1, x_2, x_3 \geq 0) \text{ 이다.}$$