Лекція №8.
Основні теореми про границі. Перша та друга важливі границі. Порівняння нескінченно малих. Еквівалентні нескінченно малі. Розкриття деяких невизначеностей.

1. Основні теореми про границі.

Наведемо (**без доведення**) теореми, які значно полегшують знаходження границі функції. Формулювання цих теорем для випадків, коли $x \to \infty$ і $x \to x_0$ аналогічні.

Теорема 1. (**про границю суми, добутку, частки**). Якщо кожна з функцій $f(x)$ та $\phi(x)$ має скінченну границю в точці x_0, то в цій точці існують границі функцій $f(x) \pm \phi(x)$, $f(x) \cdot \phi(x)$, $\dfrac{f(x)}{\phi(x)}$ (остання за умови, що $\lim\limits_{x \to x_0} \phi(x) \neq 0$) і справедливі формули:

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) \pm \phi(x) \right) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} \phi(x);$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \phi(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} \phi(x); \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\phi(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} \phi(x)}.$$

Зауваження. Сформульована **Теорема 1** справджується для алгебраїчної суми та добутку будь-якого скінченного числа функцій, які мають відповідні границі в точці x_0.

Наслідки. Якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ існує, то виконуються такі рівності:

1. $\lim\limits_{x \to x_0} Cf(x) = C \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$; $C -$стала;

2. $\lim\limits_{x \to x_0} \left[f(x) \right]^n = \left[\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \right]^n$; зокрема, $\lim\limits_{x \to x_0} x^n = x_0^n$.

Теорема 2. (**про границю проміжної функції** або «***про двох поліцейських***»).

Нехай в деякому околі точки x_0, крім, можливо, самої точки x_0, визначені функції $\phi(x)$, $f(x)$ і $\psi(x)$ та виконуються нерівності:

$$\phi(x) \le f(x) \le \psi(x).$$

Тоді, якщо функції $\phi(x)$ і $\psi(x)$ мають в точці x_0 одну і ту саму границю

$$\lim_{x \to x_0} \phi(x) = \lim_{x \to x_0} \psi(x) = A,$$

то таку саму границю має функція $f(x)$: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

Теорема 3. (про граничний перехід у нерівностях). Якщо в деякому околі точки x_0, крім, можливо, самої точки x_0, виконується нерівність $f(x) \ge 0$ і існує границя $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = B$, то $B \ge 0$.

Наслідок з теореми 3. Якщо в деякому околі точки x_0, крім, можливо, самої точки x_0, виконується нерівність $f(x) \ge \phi(x)$ і існують границі $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = B$ і $\lim\limits_{x\to x_0} \phi(x) = A$, то $B \ge A$.

Теорема 4. (**про границю монотонної функції**). Якщо функція $f(x)$ монотонна і обмежена при $x < x_0$ або при $x > x_0$, то існує відповідно її ліва границя $\lim\limits_{x\to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)$ або її права границя $\lim\limits_{x\to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$.

Доведення цих теорем проводиться на основі **Означення границі функції за Гейне** і **Теореми порівняння** для числових послідовностей.

2. Перша важлива границя.

Теорема (про першу важливу границю). ***Граничне значення функції*** $\frac{\sin x}{x}$ ***у точці*** $x = 0$ ***існує і дорівнює одиниці:***

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{1}$$

Доведення. Візьмемо круг одиничного радіуса (рис. 1) і позначимо радіанну міру кута AOD через x, $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

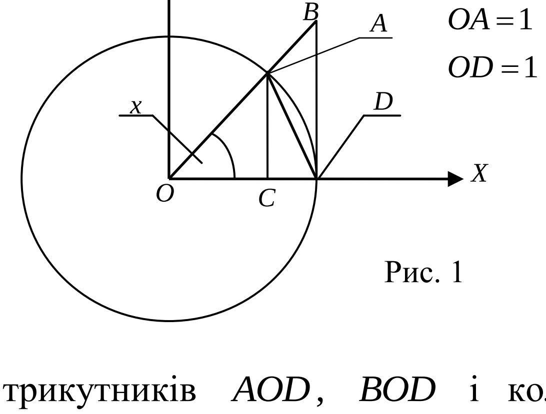

Рис. 1

Порівнюючи площі трикутників AOD, BOD і колового сектора AOD, дістанемо: $S_{\Delta AOD} < S_{сект\,\mathrm{AOD}} < S_{\Delta BOD}$, звідки випливає така нерівність

$$\frac{1}{2}AC\cdot OD<\frac{1}{2}OD^2\cdot x<\frac{1}{2}OD\cdot BD, \text{ або } \sin x<x<\operatorname{tg}x.$$

Розділивши останні нерівності на $\sin x>0$, дістанемо:

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}, \text{ або } 1>\frac{\sin x}{x}>\cos x.$$

Знайдемо правосторонні границі для кожної частини цих нерівностей при $x\to+0$. Оскільки $\lim\limits_{x\to+0}1=1$ і $\lim\limits_{x\to+0}\cos x=1$, то за **Теоремою 2** (див. попередню лекцію)

$$\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}=1. \qquad (2)$$

Нехай тепер $x\to-0$. Розглянемо функцію $f\left(x\right)=\dfrac{\sin x}{x}$. Оскільки ця функція парна, тобто $f\left(-x\right)=f\left(x\right)$, то

$$\lim_{x\to-0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to+0}\frac{\sin\left(-x\right)}{\left(-x\right)}=\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}=1. \qquad (3)$$

З рівностей (2) і (3) дістанемо формулу (1), яка досить часто використовується при розкритті невизначеності $\left\{0/0\right\}$. Тому її називають **першою важливою границею**.

Приклади. Знайти границі: **1).** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\beta x}{x}$, $\beta\neq0$. Зведемо задану границю до першої важливої границі, поділивши та помноживши дріб на β:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin\beta x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\beta\sin\beta x}{\beta x}=\beta\lim_{x\to0}\frac{\sin\beta x}{\beta x}=\beta\cdot1=\beta.$$

2). $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos7x-\cos5x}{x^2}$. Користуючись тригонометричними формулами зведення, дістанемо: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos7x-\cos5x}{x^2}=-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin6x\cdot\sin x}{x^2}=-2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin6x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=-12.$

3). $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\operatorname{tg}x$. Зробимо заміну змінної: $y=x-\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow x=y+\dfrac{\pi}{2}$. Якщо $x\to\dfrac{\pi}{2}$, то $y\to0$. Отже, маємо: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\operatorname{tg}x=\lim\limits_{y\to0}y\cdot\operatorname{tg}\left(y+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\lim\limits_{y\to0}y\cdot\operatorname{ctg}y=$

$$=-\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}\cdot\cos y=-\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}\cdot\lim_{y\to 0}\cos y=-1.$$

3. Друга важлива границя.

Раніше в Лекції №4 було доведено, що послідовність

$$\{x_n\}=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \mid n\geq 1, n\in N\right\}$$

має границю при $n\to\infty$, яка дорівнює числу e, тобто

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e. \tag{4}$$

Нагадаємо, що число e називають числом Ейлера, воно є трансцендентним і наближено дорівнює $e\approx 2{,}7184\ldots$.

Теорема. (**Про другу важливу границю**). ***Граничне значення функції*** $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ ***при*** $x\to\infty$ ***існує і також дорівнює числу Ейлера*** e***:***

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e. \tag{5}$$

Доведення. Спочатку розглянемо випадок, коли $x\to+\infty$. Нехай $x\geq 1$ і $n<x\leq n+1$, тому $\frac{1}{n+1}<\frac{1}{x}<\frac{1}{n}$, тоді

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \tag{6}$$

Знайдемо границі крайніх послідовностей:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1}=e\cdot 1=e.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^1=e\cdot 1=e.$$

Застосовуючи до нерівності (6) **Теорему 2 («про двох поліцейських»)** з попереднього параграфа, дістанемо:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

Якщо $x \to -\infty$, то доведення формули (5) проводиться за допомогою заміни змінної $y = -x$. Покажемо це.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \left|\begin{array}{l} y=-x;\ y\to+\infty, \\ якщо\ x\to-\infty \end{array}\right| = \lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y} =$$

$$= \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y}{y-1}\right)^{y} = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\cdot\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right) = e\cdot 1 = e\,.$$

Зауваження 1. Друга важлива границя використовується при розкритті невизначеності $\left\{1^{\infty}\right\}$.

Зауваження 2. Із доведеної **Теореми** випливає, що $\lim\limits_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}} = e$. (Довести самостійно!).

Зауваження 3. При знаходженні конкретних границь доцільно застосовувати першу і другу важливі границі у такому вигляді:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\sin\alpha(x)} = 1;\ \lim_{x\to x_0}\left(1+\alpha(x)\right)^{1/\alpha(x)} = e,\ \text{ де } \lim_{x\to x_0}\alpha(x) = 0.$$

Зауваження 4. При обчисленні границь, пов'язаних з числом e, часто застосовують таке **твердження**: якщо існують границі $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ і $\lim\limits_{x\to x_0}\psi(x)$, причому $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > 0$, то існує також границя $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{\psi(x)}$, яка обчислюється за формулою:

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)^{\psi(x)}\right] = \left[\lim_{x\to x_0} f(x)\right]^{\lim\limits_{x\to x_0}\psi(x)}$$

Наслідки. **1).** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x} = e$; **2).** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^{x} = e^{k}$; **3).** $\lim\limits_{y\to 0}(1+ky)^{\frac{1}{y}} = e^{k}$.

Приклади. Знайти границі: **1).** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{3x}\right)^{x}$; **2).** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-2}{3x+1}\right)^{2x+1}$.

Розв'язання. **1).** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{3x}\right)^{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2/3}{x}\right)^{x} = e^{2/3}$;

$$\textbf{2).}\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-2}{3x+1}\right)^{2x+1} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1-3}{3x+1}\right)^{2x+1} = \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{3x+1}\right)^{\left(-\frac{3x+1}{3}\right)\left(-\frac{3}{3x+1}\right)(2x+1)} =$$

$$=\lim_{x\to\infty} e^{\left(-\frac{3}{3x+1}\right)(2x+1)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\frac{3}{3x+1}\right)(2x+1)} = e^{-3\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{3x+1}\right)} = e^{(-3)\cdot\frac{2}{3}} = e^{-2}.$$

4. Порівняння нескінченно малих.

Дві нескінченно малі функції порівнюються між собою за допомогою дослідження їхнього відношення. Нехай $\alpha_1(x)$ і $\alpha_2(x)$ − нескінченно малі функції при $x \to x_0$, тобто

$$\lim_{x\to x_0}\alpha_1(x)=0,\ \lim_{x\to x_0}\alpha_2(x)=0.$$

Введемо такі **означення**:

1). функції $\alpha_1(x)$ і $\alpha_2(x)$ називаються **нескінченно малими одного порядку** при $x \to x_0$, якщо

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = A \neq 0, \infty;$$

2). функція $\alpha_1(x)$ називається **нескінченно малою вищого порядку, ніж** $\alpha_2(x)$ при $x \to x_0$, якщо

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = 0;$$

3). функція $\alpha_1(x)$ називається **нескінченно малою нижчого порядку, ніж** $\alpha_2(x)$ при $x \to x_0$, якщо

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = \infty;$$

4). функція $\alpha_1(x)$ називається **нескінченно малою** $k-го$ **порядку відносно** $\alpha_2(x)$ при $x \to x_0$, якщо

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2^k(x)} = A \neq 0, \infty;$$

5). нескінченно малі функції $\alpha_1(x)$ і $\alpha_2(x)$ називаються **непорівнянними** при $x \to x_0$, якщо в точці x_0 не існує границі їхнього відношення.

Приклади. 1). Функції $\alpha_1(x)=x$ і $\alpha_2(x)=\operatorname{tg}2x$ є нескінченно малими одного порядку при $x \to 0$, тому що

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{tg}2x}=\frac{1}{2}\neq 0.$$

2). Функція $\alpha_1(x)=x^2$ при $x\to 0$ є нескінченно малою вищого порядку, ніж функція $\alpha_2(x)=\sin x$ тому, що

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin x}=\lim_{x\to 0}x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=0.$$

Звідси випливає також, що функція $\alpha_2(x)=\sin x$ при $x\to 0$ є нескінченно малою нижчого порядку, ніж $\alpha_1(x)=x^2$.

3). Функція $\alpha_1(x)=1-\cos 6x$ при $x\to 0$ є нескінченно малою другого порядку відносно функції $\alpha_2(x)=x$, тому, що

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 3x}{x^2}=18.$$

4). Нескінченно малі функції $\alpha_1(x)=x^2$ і $\alpha_2(x)=x^2\sin\left(x^{-1}\right)$ є непорівнянними при $x\to 0$, тому що

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\left(x^{-1}\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\sin\left(x^{-1}\right)$$

не існує (доведіть!).

Серед нескінченно малих функцій одного порядку **особливу роль відіграють** так звані **еквівалентні нескінченно малі**.

6). Нескінченно малі функції $\alpha_1(x)$ і $\alpha_2(x)$ називаються **еквівалентними нескінченно малими** при $x\to x_0$, якщо

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}=1.$$

Еквівалентність функцій $\alpha_1(x)$ і $\alpha_2(x)$ позначається так: $\alpha_1(x)\sim\alpha_2(x),\ x\to x_0$. Розглянемо деякі властивості еквівалентних нескінченно малих функцій.

Теорема 1. *Нескінченно малі функції* $\alpha_1(x)$ *і* $\alpha_2(x)$ *еквівалентні при* $x\to x_0$. *тоді і тільки тоді, коли різниця* $\alpha_1(x)-\alpha_2(x)$ *є нескінченно малою функцією вищого порядку, ніж кожна з функцій* $\alpha_1(x)$ *та* $\alpha_2(x)$.

Доведення. Нехай $\alpha_1(x)\sim\alpha_2(x)$ при $x\to x_0$, тобто

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_2(x)}{\alpha_1(x)}=1, \text{ тоді}$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)-\alpha_2(x)}{\alpha_1(x)}=\lim_{x\to x_0}\left(1-\frac{\alpha_2(x)}{\alpha_1(x)}\right)=1-\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_2(x)}{\alpha_1(x)}=0.$$

Аналогічно, $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1(x)-\alpha_2(x)}{\alpha_2(x)}=0$. Отже, різниця $\alpha_1(x)-\alpha_2(x)$ при $x\to x_0$ є нескінченно малою вищого порядку, ніж $\alpha_1(x)$ та $\alpha_2(x)$.

Нехай тепер, навпаки, відомо, що різниця $\alpha_1(x)-\alpha_2(x)$ при $x\to x_0$ є нескінченно малою вищого порядку, ніж $\alpha_1(x)$ і ніж $\alpha_2(x)$, тобто

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)-\alpha_2(x)}{\alpha_1(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)-\alpha_2(x)}{\alpha_2(x)}=0.$$

Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1(x)-\alpha_2(x)}{\alpha_1(x)}=0$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\left(1-\dfrac{\alpha_2(x)}{\alpha_1(x)}\right)=1-\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_2(x)}{\alpha_1(x)}=0$, звідки $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_2(x)}{\alpha_1(x)}=1$, тобто $\alpha_1(x)\sim\alpha_2(x)$ при $x\to x_0$.

Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1(x)-\alpha_2(x)}{\alpha_2(x)}=0$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}-1\right)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}-1=0$, звідки $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}=1$, тобто $\alpha_1(x)\sim\alpha_2(x)$ при $x\to x_0$.

Теорема 2. *Нехай* $\alpha_1(x)\sim\alpha_1^*(x)$, $\alpha_2(x)\sim\alpha_2^*(x)$ *при* $x\to x_0$. *Якщо існує* $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}$*, то існує і* $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1^*(x)}{\alpha_2^*(x)}$ *і ці границі рівні між собою*.

Доведення. Маємо: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\left[\dfrac{\alpha_1(x)}{\alpha_1^*(x)}\dfrac{\alpha_1^*(x)}{\alpha_2^*(x)}\dfrac{\alpha_2^*(x)}{\alpha_2(x)}\right]=$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_1^*(x)}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1^*(x)}{\alpha_2^*(x)}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_2^*(x)}{\alpha_2(x)}=1\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1^*(x)}{\alpha_2^*(x)}\cdot1=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1^*(x)}{\alpha_2^*(x)}.$$

Наслідок. Результати цієї теореми дозволяють при знаходженні границі у вигляді відношення двох заданих нескінченно малих функцій кожну з них (або тільки одну) заміняти іншою нескінченно малою, яка еквівалентна заданій.

5. Еквівалентні нескінченно малі величини.

Нехай $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$, тобто $\alpha(x)$ є нескінченно малою функцією при $x\to x_0$. Тоді мають місце наступні еквівалентності в околі точки $x=x_0$, які тут записані з точністю до величин порядку α в першому степені (крім функції $\cos\alpha$):

1). $\sin\alpha\sim\alpha$;

2). $\operatorname{tg}\alpha\sim\alpha$;

3). $\arcsin\alpha\sim\alpha$;

4). $\operatorname{arctg}\alpha\sim\alpha$;

5). $e^{\alpha}-1\sim\alpha$;

6). $a^{\alpha}-1\sim\alpha\ln a$;

7). $\log_a(1+\alpha)\sim\alpha\log_a e$;

8). $\ln(1+\alpha)\sim\alpha$;

9). $(1+\alpha)^k-1\sim k\alpha$; $k>0$;

10). $1-\cos\alpha\sim\dfrac{\alpha^2}{2}$.

Зауваження 1. Ці еквівалентності дуже просто довести за допомогою правила Лопіталя (див. нижче у Розділі «Диференціальне числення ФОЗ»).

Зауваження 2. Наведені вище формули 1)−10) застосовують при знаходженні еквівалентностей більш складних функцій. Наприклад, в околі точки $x=0$ функція $f(x)=\sin\left[\ln\left(1+\sqrt[3]{\operatorname{tg}x^2}\right)\right]$ є еквівалентною такій: $f(x)\sim\sin\left[\ln\left(1+x^{2/3}\right)\right]\sim\sin x^{2/3}\sim x^{2/3}$.

Зауваження 3. Наведені вище еквівалентності слід використовувати дуже «обережно» з точки зору математичної коректності, а саме враховувати контекст кожної конкретної задачі.

Теорема 3. *Сума скінченного числа нескінченно малих функцій різних порядків еквівалентна доданку нижчого порядку*.

Доведення проведемо для суми двох функцій. Нехай $\alpha_1(x)\to 0$ і $\alpha_2(x)\to 0$ при $x\to x_0$, причому $\alpha_1(x)$ − є нескінченно малою вищого порядку, ніж $\alpha_2(x)$, при $x\to x_0$, тобто $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}=0$. Тоді маємо:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)+\alpha_2(x)}{\alpha_2(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}+1=0+1=1.$$

Отже, $\alpha_1(x)+\alpha_2(x)\sim\alpha_2(x)$ при $x\to x_0$.

Приклади. Знайти границі: **1).** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\operatorname{arctg}(x-2)}{x^2-5x+6}$.

Розв'язання. $\arcsin(x-2)\sim(x-2)$ при $x\to 2$, тому

$$\lim_{x\to 2}\frac{\operatorname{arctg}(x-2)}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-3)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-3}=-1.$$

2). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos 2x}{x^2}$.

Розв'язання. Оскільки $\ln\cos 2x=\ln(1+\cos 2x-1)\sim\cos 2x-1$ при $x\to 0$, то:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos 2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2 x}{x^2}=-2.$$

3). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}3x-2x^2+4x^3}{6x+4x^5}$.

Розв'язання. За **Теоремою 3** при $x\to 0$ маємо: $\operatorname{tg}3x-2x^2+4x^3\sim\operatorname{tg}3x$; $6x+4x^5\sim 6x$. Тому шукана границя дорівнює:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}3x-2x^2+4x^3}{6x+4x^5}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}3x}{6x}=\frac{1}{2}.$$

6. Розкриття деяких невизначеностей.

У найпростіших випадках знаходження границі $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ зводиться до підстановки у функцію $f(x)$ граничного значення аргументу x_0. Але часто така підстановка приводить до невизначених виразів. Це такі вирази:

1). відношення двох нескінченних величин – невизначеність виду $\left\{\infty/\infty\right\}$;

2). різниця двох нескінченно великих величин – невизначеність виду $\{\infty-\infty\}$;

3). добуток нескінченно малої функції на нескінченно велику – невизначеність виду $\{0\cdot\infty\}$;

4). відношення двох нескінченно малих величин – невизначеність виду $\left\{0/0\right\}$;

5). якщо $\alpha_1(x)\to 0$ і $\alpha_2(x)\to 0$ при $x\to x_0$, то вираз x_0 – невизначеність виду $\{\ 0^0\ \}$;

6). якщо $\alpha(x)\to 0$ і $\beta(x)\to\infty$ при $x\to x_0$, то вираз $\beta(x)^{\alpha(x)}$ – невизначеність виду $\{\ \infty^0\ \}$;

7). якщо $f(x)\to 1$ і $\beta(x)\to\infty$ при $x\to x_0$, то вираз $f(x)^{\beta(x)}$ – невизначеність виду $\{\ 1^\infty\ \}$.

Означення. Операцію знаходження границі у цих випадках називають **розкриттям невизначеності.**

Розглянемо деякі окремі випадки вищезазначених невизначеностей.

1. Невизначеність виду $\left\{{}^{\infty}\!/\!{}_{\infty}\right\}$, що задана відношенням двох многочленів.

Приклад. Знайти границю: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5+3x^2+6}{2-3x^3+10x^2+4x^5}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність виду $\left\{{}^{\infty}\!/\!{}_{\infty}\right\}$. Поділимо чисельник і знаменник на x^5:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^5+3x^2+6}{2-3x^3+10x^2+4x^5}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^5\left(1+\dfrac{3}{x^3}+\dfrac{6}{x^5}\right)}{x^5\left(\dfrac{2}{x^5}-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{10}{x^3}+4\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{3}{x^3}+\dfrac{6}{x^5}}{\dfrac{2}{x^5}-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{10}{x^3}+4}=\frac{1}{4}.$$

Застосований підхід є загальним: щоб розкрити невизначеність виду $\left\{{}^{\infty}\!/\!{}_{\infty}\right\}$, задану відношенням двох многочленів, треба чисельник і знаменник розділити на x^β, де β дорівнює найвищому порядку многочленів дробу.

2. Невизначеність виду $\left\{{}^{0}\!/\!{}_{0}\right\}$, що задана відношенням двох многочленів.

Приклад. Знайти границю: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-3x^2+x-3}{x^2-5x+6}$.

Розв'язання. Оскільки $\lim\limits_{x\to 3}\left(x^3-3x^2+x-3\right)=0$ і $\lim\limits_{x\to 3}\left(x^2-5x+6\right)=0$, то маємо невизначеність виду $\left\{{}^{0}\!/\!{}_{0}\right\}$. Щоб розкрити цю невизначеність, розкладемо чисельник і знаменник на множники:

$$\left(x^3-3x^2+x-3\right)=\left(x-3\right)\left(x^2+1\right);\ \left(x^2-5x+6\right)=\left(x-3\right)\left(x-2\right).$$

В результаті маємо:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-3x^2+x-3}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x^2+1)}{(x-3)(x-2)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+1}{x-2}=10.$$

Це теж загальний підхід. Множник (в даному прикладі це $x-3$), через який чисельник і знаменник прямують до нуля, іноді називають **критичним множником**.

Отже, щоб розкрити невизначеність $\left\{0\big/0\right\}$, задану відношенням двох многочленів, треба в чисельнику і в знаменнику виділити критичний множник і скоротити на нього дріб. Якщо при цьому розкладання на множники виявиться утрудненим, то треба розділити чисельник і знаменник на критичний множник «у стовпчик». При цьому підказка, яким є критичний множник, міститься в самому завданні під значком $\lim\limits_{x\to a}$ ($x\to a\Rightarrow x-a=0$).

3. Невизначеність $\left\{0\big/0\right\}$, що задана ірраціональними виразами.

Приклад. Знайти границю: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2+7}-4}{x-3}$.

Розв'язання. Тут невизначеність виду $\left\{0\big/0\right\}$, і $(x-3)$ − критичний множник. Позбудемось від ірраціональності в чисельнику. Маємо:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2+7}-4}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x^2+7}-4\right)\left(\sqrt{x^2+7}+4\right)}{(x-3)\left(\sqrt{x^2+7}+4\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{(x-3)\left(\sqrt{x^2+7}+4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)\left(\sqrt{x^2+7}+4\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+3}{\sqrt{x^2+7}+4}=\frac{3}{4}.$$

4. Невизначеність $\{\infty-\infty\}$, що задана ірраціональними виразами.

Приклад. Знайти границю: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2-5x+7}\right)$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2-5x+7}\right)=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2-5x+7}\right)\left(\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2-5x+7}\right)}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2-5x+7}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x-x^2+5x-7}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2-5x+7}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{8x-7}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2-5x+7}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{8-\frac{7}{x}}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}+\sqrt{1-\frac{5}{x}+\frac{7}{x^2}}}=4\cdot$$

5. Невизначеності виду $\left\{0/0\right\}$ задані виразами, що містять тригонометричні функції, часто розкриваються за допомогою першої важливої границі.

Приклад. Знайти границю: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin x-\sin 2x}{x^3}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin x-\sin 2x}{x^3}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin x\cdot\left(1-\cos x\right)}{x^3}=$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot 2\sin^2\frac{x}{2}}{x^3}=4\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{x^2}=4\cdot 1\cdot\frac{1}{4}=1.$$

6. При розкритті невизначеності виду $\left\{1^\infty\right\}$ використовують другу важливу границю.

Приклад. Знайти границю: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x\right)^{x^{-2}}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 0}\left(\cos x\right)^{x^{-2}}=\left\{1^\infty\right\}=\lim_{x\to 0}\left(1+\cos x-1\right)^{\frac{1}{\cos x-1}\frac{\cos x-1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos x-1}{x^2}\right)}=e^{-\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{2x^2}\right)}=\frac{1}{\sqrt{e}}.$$