Лекція №4. Монотонні послідовності: означення, властивості, умови збіжності. Теорема про збіжність монотонної обмеженої послідовності. Лема про вкладені відрізки. Число e. Теорема Штольця.

1. Означення і властивості монотонних послідовностей. Приклади монотонних послідовностей.

Означення. Послідовність $\{x_n\}$ називається **неспадною (незростаючою),** якщо $x_{n+1} \geq x_n (x_{n+1} \leq x_n)$ при $n = 1,2,\ldots$

Неспадні і незростаючі послідовності називаються **монотонними**.

Означення. Послідовність $\{x_n\}$ називається **зростаючою (спадною),** якщо $x_{n+1} > x_n (x_{n+1} < x_n)$ при $n = 1,2,\ldots$

Спадні і зростаючі послідовності називаються **строго монотонними**

Приклади монотонних послідовностей.

1. Послідовність $\{x_n\} = \left\{1,1,\frac{1}{2},\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{n},\frac{1}{n},\ldots\right\}$ є незростаючою. Вона обмежена зверху своїм першим членом, який дорівнює одиниці, а знизу числом нуль.

2. Послідовність $\{x_n\} = \{1,1,2,2,\ldots,n,n,\ldots\}$ є неспадною. Вона обмежена знизу своїм першим членом, рівним одиниці, а зверху необмежена.

3. Послідовність $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4}\ldots,\frac{n}{n+1},\ldots\right\}$ є зростаючою. Вона обмежена з обох сторін: знизу своїм першим членом $\frac{1}{2}$, а зверху, наприклад, числом одиниця.

Вище (в Лекції №3) було показано, що із збіжності будь-якої послідовності $\{x_n\}$ з необхідністю слідує її обмеженість. Тому обмеженість є необхідною умовою збіжності. В цій лекції ми з'ясуємо **достатні умови** збіжності **монотонної** послідовності.

2. Достатні умови збіжності монотонної послідовності.

Основна Теорема 5. *Якщо неспадна (незростаюча) послідовність $\{x_n\}$ обмежена зверху (знизу), то вона є **збіжною**.*

У відповідності з умовою цієї Теореми послідовність $\{x_n\}$ є обмеженою. Тому **Теорему 5** можна сформулювати так:

Якщо ***монотонна*** *послідовність* $\{x_n\}$ ***обмежена з обох сторін****, то вона є* ***збіжною***.

Доведення. Через те, що послідовність $\{x_n\}$ обмежена, то множина її елементів X має точні верхню і нижню грані $\overline{x} = \sup X$ і $\underline{x} = \inf X$ (**Лекція 2**). Доведемо, що якщо $\{x_n\}-$неспадна послідовність, то її границею буде згадана точна верхня грань $\overline{x}$ множини X; якщо ж $\{x_n\}-$ незростаюча послідовність, то її границею буде зазначена точна нижня грань $\underline{x}$ множини X. Не втрачаючи загальності, обмежимося випадком неспадної послідовності, оскільки для незростаючої послідовності міркування аналогічні.

Отже, оскільки $\overline{x}$ – точна верхня грань множини X, то для довільного $\varepsilon > 0$ можна знайти такий елемент x_N, що $x_N > \overline{x} - \varepsilon$ і $x_N \leq \overline{x}$ (за означенням $\overline{x}$ будь-який елемент x_n з множини X не більше її точної верхньої грані $x_n \leq \overline{x}$). Співвідносячи записані нерівності, дістанемо: $0 \leq \overline{x} - x_N < \varepsilon$. Тепер згадаємо про те, що послідовність $\{x_n\}$ є неспадною. Тому при $n \geq N(\varepsilon)$ справедливі нерівності $x_N \leq x_n \leq \overline{x}$. Звідси випливає, що при $n \geq N(\varepsilon)$ виконуються нерівності $0 \leq \overline{x} - x_n \leq \overline{x} - x_N$. Вище ми вже зазначили, що $\overline{x} - x_N < \varepsilon$, тому при $n \geq N(\varepsilon)$ справедливі нерівності $0 \leq \overline{x} - x_n < \varepsilon$, з яких випливає, що $\left|\overline{x} - x_n\right| < \varepsilon$. Отже, встановлено, що $\overline{x}-$це границя неспадної послідовності $\{x_n\}$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \overline{x} = \sup X$. Аналогічний результат отримаємо для випадку незростаючої послідовності, тільки вже в цьому разі буде: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \underline{x} = \inf X$. **Теорему 5 доведено**.

Зауваження 1. ***Умова обмеженості*** *монотонної послідовності представляє собою* ***необхідну і достатню умову*** *її збіжності.*

Дійсно, якщо монотонна послідовність обмежена, то вона є збіжною в силу попередньої **Теореми 5**; якщо ж будь-яка послідовність (в тому числі і монотонна) є збіжною, то вона є обмеженою (в силу **Теореми про обмеженість збіжної послідовності**).

Зауваження 2. Збіжна послідовність може і не бути монотонною. Наприклад, послідовність $x_n = {(-1)^n}/{n}$ є збіжною і її границя дорівнює нулю. Проте вона не є монотонною.

Зауваження 3. Якщо послідовність $\{x_n\}$ є неспадною і обмеженою та величина $\overline{x}$ – її границя, то для всіх номерів n справедлива нерівність $x_n \le \overline{x}$. Елементи незростаючої та обмеженої послідовності $\{x_n\}$, збіжної до $\underline{x}$, задовольняють нерівність $x_n \ge \underline{x}$. Справедливість цих нерівностей була встановлена в процесі доведення попередньої Теореми.

3. Лема (допоміжна Теорема) про вкладені відрізки.

Лема. *Нехай задано нескінченну систему відрізків* $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, $[a_3, b_3], \ldots,$ $[a_n, b_n], \ldots,$ *кожен наступний з яких міститься в попередньому (* $a_{n-1} \le a_n \le b_n \le b_{n-1}$*), і нехай різниця* $\Delta_n = b_n - a_n$ *прямує до нуля при* $n \to \infty$. *Тоді існує і при тому одна-єдина точка* c*, яка належить* ***одразу всім відрізкам зазначеної системи***.

Цю **Лему** можна розглядати як наслідок **Теореми 5**. Величину $\Delta_n = b_n - a_n$ будемо називати **довжиною відрізка** $[a_n, b_n]$, а систему відрізків, наділену такими властивостями, будемо називати такою, що «**стягується**».

Доведення. Спочатку зазначимо, що точка c, яка належить одразу всім відрізкам зазначеної системи, може бути тільки одна. Дійсно, якщо б знайшлась ще одна точка d (для визначеності тут вважаємо, що $d > c$), яка належить одразу всім відрізкам, то весь відрізок $[c, d]$ повинен належати всім відрізкам $[a_n, b_n]$. Але тоді для довільного номера n виконувалися б нерівності $b_n - a_n \ge d - c > 0$, а це неможливо, бо $\Delta_n = b_n - a_n \to 0$, якщо $n \to \infty$.

Доведемо тепер, що існує точка c, яка належить одразу всім відрізкам. Через те, що система відрізків $[a_1, b_1], [a_2, b_2], [a_3, b_3], \ldots, [a_n, b_n], \ldots$ є такою, що стягується, то послідовність лівих кінців $\{a_n\}$ є неспадною, а послідовність правих кінців $\{b_n\}$ є незростаючою. Оскільки обидві ці послідовності **монотонні і обмежені** (бо всі елементи послідовностей $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$ знаходяться на відрізку $[a_1, b_1]$), то за попередньою **Теоремою 5** обидві вони є збіжними. Через те, що різниця

$\Delta_n = b_n - a_n \to 0$ є нескінченно малою, то зазначені послідовності мають **спільну границю**. Позначимо її літерою c. Із **Зауваження 3** випливає, що для довільного номера n справедливі нерівності $a_n \le c \le b_n$, тобто точка c належить одразу всім відрізкам $[a_n, b_n]$.

4. Число e. Застосування Теореми 5 до доведення існування границі послідовності $\{x_n\} = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

Використаємо граничний перехід для визначення нового, дуже важливого в математиці, числа.

Доведемо, що послідовність $\{x_n\}$: а) **зростає і б) є обмеженою**.

а). Покажемо, що послідовність $\{x_n\}$ є **зростаючою**. Застосуємо формулу бінома Ньютона до правої частини:

$$x_n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3} + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(n-1)]}{n!}\frac{1}{n^n}.$$

Представимо цей вираз у наступній формі:

$$x_n = 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right).$$

Аналогічно запишемо наступний елемент x_{n+1} послідовності $\{x_n\}$:

$$x_{n+1} = 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{(n+1)!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1 - \frac{n}{n+1}\right).$$

Порівнюючи два записаних вище вирази, безпосередньо пересвідчимося в тому, що $x_n < x_{n+1}$. Дійсно, через те, що $\left(1 - \dfrac{k}{n}\right) < \left(1 - \dfrac{k}{n+1}\right)$ для довільного $0 < k < n$ та, крім того, x_{n+1} містить порівняно із x_n додатковий додатній член з $(n+1)!$ у знаменнику, вказана нерівність має місце. Отже, послідовність $\{x_n\}$ є **зростаючою**.

б). Обмеженість. Очевидно, що послідовність $\{x_n\}$ є обмеженою знизу числом 2, бо $x_1 = 2$. Для доведення **обмеженості** $\{x_n\}$ **зверху** зазначимо, що кожний вираз у круглих дужках у співвідношенні для x_n менше одиниці. Враховуючи те, що $\frac{1}{k!} \le \frac{1}{2^{k-1}}$ (при $k \ge 2$, перевірте за індукцією!) дістанемо:

$$x_n = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

Отже, послідовність $\{x_n\}$ **зростає і обмежена зверху**. За **Теоремою 5** про існування границі монотонної обмеженої послідовності ця послідовність має границю. За пропозицією Ейлера (L.Euler) цю границю називають числом e. Таким чином, за означенням маємо:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Зауваження. В подальшому буде встановлено, що число e відіграє важливу роль в математиці. Тут ми тільки зафіксували факт існування цього числа, проте не вказали способу його обчислення з довільним степенем точності. Це буде зроблено далі. Лише зазначимо, що оскільки $x_n < 3$ і з виразу для x_n безпосередньо випливає, що $x_n > 2$, то число e лежить в наступних межах: $2 \le e \le 3$.

Приклад монотонної обмеженої послідовності. Розглянемо приклад послідовності, для знаходження границі якої буде використана Теорема 5 про існування границі монотонної обмеженої послідовності. Крім того, в цьому пункті ми познайомимося з одним загальним методом знаходження границь послідовностей, заданих **рекурентним способом**.

Означення. **Рекурентна формула** – це формула, яка дозволяє виразити $(n+1)-$й елемент послідовності через значення її перших n елементів.

Приклад 1. Розглянемо послідовність $\{x_n\}$, елемент x_n якої дорівнює

$$x_n = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \ldots + \sqrt{a}}}}, \quad a > 0.$$

Цю ж послідовність можна, очевидно, задати наступною рекурентною формулою:

$$x_1 = \sqrt{a}, \; x_n = \sqrt{a + x_{n-1}}.$$

Для того, щоб встановити існування границі послідовності $\{x_n\}$, доведемо, що ця послідовність є зростаючою і обмеженою. Перше достатньо очевидно. Доведемо, що послідовність $\{x_n\}$ обмежена зверху числом A, де $A = \max(a,2)$ – найбільше з двох чисел: 2 і a. Якщо $x_n \le a$, то потрібне твердження доведене. Якщо ж $x_n > a$, то замінивши у правій частині нерівності $x_n^2 = a + x_{n-1} \le a + x_n$ число a більшим за нього числом x_n, ми отримаємо $x_n^2 < 2x_n$, звідки дістанемо: $x_n < 2$. Отже, ми довели, що послідовність $\{x_n\}$ обмежена зверху. За **Теоремою 5** вона має границю. Позначимо цю границю через c. Очевидно, що $c > 0$. З рекурентної формули маємо таке співвідношення: $x_n^2 = a + x_{n-1}$, яке означає, що послідовності $\{x_n^2\}$ і $\{a + x_{n-1}\}$ тотожні. Тому їхні границі рівні. Через те, що перша послідовність має границю c^2, а друга – $a + c$, то $c^2 = a + c$. Звідси при $c > 0$ маємо: $c = \dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$.

Зауваження 1. В розглянутому прикладі використовувався наступний метод знаходження границі послідовностей. Спочатку встановлюють існування границі, а потім знаходять його числове значення з рівняння, яке дістають з рекурентної формули шляхом заміни в ній x_n і x_{n+1} шуканим значенням c границі послідовності.

Зауваження 2. Рекурентні формули часто використовують у сучасній обчислювальній математиці, оскільки їхнє застосування зводиться до багаторазового повторювання однотипних обчислювальних операцій, що особливо зручно при проведенні обчислень на ПК.

5. Теорема Штольця.

В багатьох випадках для дослідження збіжності відношення $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ двох послідовностей $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ (яке породжує класичну невизначеність $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$), буває корисним таке твердження, сформульоване Штольцем (O.Stolz). Для частинного випадку при $y_n = n$ його довів ще Коші (A.L.Cauchy).

Теорема Штольця. *Нехай $\{y_n\}$ – зростаюча нескінченно велика послідовність, і нехай послідовність $\left\{\dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}\right\}$ є збіжною та має границею число a. Тоді* *послідовність* $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ *є також збіжною і має границею число* a. *Отже, має місце така рівність:*

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}\right\}.$$

Доведення. Оскільки послідовність $\left\{\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}\right\}$ є збіжною та має границею число a, то послідовність $\{\alpha_n\}$, де $\alpha_n=\left\{\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}-a\right\}$, буде нескінченно малою (Доведіть!). Нехай $\bar{N}$ – довільний фіксований номер і $n>\bar{N}$. Використовуючи вираз для α_n, розглянемо низку рівностей:

$$x_{\bar{N}+1}-x_{\bar{N}}=a(y_{\bar{N}+1}-y_{\bar{N}})+\alpha_{\bar{N}+1}(y_{\bar{N}+1}-y_{\bar{N}});$$

$$x_{\bar{N}+2}-x_{\bar{N}+1}=a(y_{\bar{N}+2}-y_{\bar{N}+1})+\alpha_{\bar{N}+2}(y_{\bar{N}+2}-y_{\bar{N}+1});$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_{n-1}-x_{n-2}=a(y_{n-1}-y_{n-2})+\alpha_{n-1}(y_{n-1}-y_{n-2});$$

$$x_n-x_{n-1}=a(y_n-y_{n-1})+\alpha_n(y_n-y_{n-1}).$$

Додамо вищенаведені рівності. В результаті дістанемо:

$$x_n-x_{\bar{N}}=ay_n-ay_{\bar{N}}+\alpha_{\bar{N}+1}(y_{\bar{N}+1}-y_{\bar{N}})+\alpha_{\bar{N}+2}(y_{\bar{N}+2}-y_{\bar{N}+1})+\ldots$$

$$\ldots+\alpha_{n-1}(y_{n-1}-y_{n-2})+\alpha_n(y_n-y_{n-1}).$$

Через те, що $\{y_n\}$ – зростаюча нескінченно велика послідовність, то починаючи з певного номера її елементи будуть додатними. Будемо вважати, що при $n\ge\bar{N}$ $y_n>0$. Тоді з останньої рівності маємо:

$$\frac{x_n}{y_n}-a=\frac{x_{\bar{N}}-ay_{\bar{N}}}{y_n}+\frac{\alpha_{\bar{N}+1}(y_{\bar{N}+1}-y_{\bar{N}})+\alpha_{\bar{N}+2}(y_{\bar{N}+2}-y_{\bar{N}+1})+\ldots+\alpha_n(y_n-y_{n-1})}{y_n}.$$

Оскільки послідовність $\{y_n\}$ є зростаючою, то всі різниці $y_{k+1}-y_k$, $k=\bar{N},\bar{N}+1,\ldots,n-1$, є додатними. Тому з останнього співвідношення маємо:

$$\left|\frac{x_n}{y_n}-a\right|\le\left|\frac{x_{\bar{N}}-ay_{\bar{N}}}{y_n}\right|+\frac{|\alpha_{\bar{N}+1}|(y_{\bar{N}+1}-y_{\bar{N}})+|\alpha_{\bar{N}+2}|(y_{\bar{N}+2}-y_{\bar{N}+1})+\ldots+|\alpha_n|(y_n-y_{n-1})}{y_n}. \quad (1)$$

Доведемо тепер, що послідовність $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ є збіжною та має границею a. Для цього потрібно довести, що для довільного $\varepsilon > 0$ можна вказати такий номер $N(\varepsilon)$, що при $n \ge N$ виконується нерівність

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - a\right| < \varepsilon .$$

По-перше, для довільного $\varepsilon > 0$ виберемо номер $N_1 > \bar{N}$ так, щоби при $n > N_1$ виконувалась би нерівність $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ (це можливо, оскільки послідовність $\{\alpha_n\}$ є **нескінченно малою**). Далі виберемо номер $N_2 \ge \bar{N}$ так, щоби при $n \ge N_2$ мала місце нерівність: $\left|\frac{x_{\bar{N}} - a y_{\bar{N}}}{y_n}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Такий вибір номера N_2 можливий, оскільки число $x_{\bar{N}} - a y_{\bar{N}}$ є фіксованим, а послідовність $\{y_n\}$ є нескінченно великою, а тому послідовність $\left\{\frac{x_{\bar{N}} - a y_{\bar{N}}}{y_n}\right\}$ є нескінченно малою. Нехай тепер $n \ge N$, де $N = \max(N_1, N_2)$. Тоді із нерівності (1) маємо:

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - a\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{(y_{\bar{N}+1} - y_{\bar{N}}) + (y_{\bar{N}+2} - y_{\bar{N}+1}) + \ldots + (y_n - y_{n-1})}{y_n},$$

або $\left|\frac{x_n}{y_n} - a\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{(y_n - y_{\bar{N}})}{y_n}$. Через те, що при $n \ge N$ має місце нерівність $y_n - y_{\bar{N}} \le y_n$ і $y_n > 0$, то $\frac{y_n - y_{\bar{N}}}{y_n} \le 1$. Тому при $n \ge N$ з останньої нерівності маємо:

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - a\right| < \varepsilon .$$

Теорему доведено.

Зауваження. *Якщо* $\{y_n\}$ *– зростаюча нескінченно велика послідовність, а послідовність* $\left\{\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}\right\}$ *також* ***нескінченно велика*** *і прямує до нескінченності визначеного знаку, то послідовність* $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ ***нескінченно велика***.

Дійсно, нехай $\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = A_n$. Послідовність $\{A_n\}$ є нескінченно великою за умовою Теореми. Нехай $\bar{N}$ – певний фіксований номер. Тоді при $n \geq \bar{N}$ маємо:

$$x_{\bar{N}+1} - x_{\bar{N}} = A_{\bar{N}+1}(y_{\bar{N}+1} - y_{\bar{N}}),$$

$$x_{\bar{N}+2} - x_{\bar{N}+1} = A_{\bar{N}+2}(y_{\bar{N}+2} - y_{\bar{N}+1}),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_{n-1} - x_{n-2} = A_{n-1}(y_{n-1} - y_{n-2}),$$

$$x_n - x_{n-1} = A_n(y_n - y_{n-1}).$$

Додамо вищенаведені рівності. В результаті маємо:

$$x_n - x_{\bar{N}} = A_{\bar{N}+1}(y_{\bar{N}+1} - y_{\bar{N}}) + A_{\bar{N}+2}(y_{\bar{N}+2} - y_{\bar{N}+1}) + \ldots + A_n(y_n - y_{n-1}).$$

Звідси дістанемо:

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{A_{\bar{N}+1}(y_{\bar{N}+1} - y_{\bar{N}}) + A_{\bar{N}+2}(y_{\bar{N}+2} - y_{\bar{N}+1}) + \ldots + A_n(y_n - y_{n-1})}{y_n} + \frac{x_{\bar{N}}}{y_n}.$$

З цього співвідношення отримаємо таку нерівність:

$$\left|\frac{x_n}{y_n}\right| \geq \left|\frac{A_{\bar{N}+1}(y_{\bar{N}+1} - y_{\bar{N}}) + A_{\bar{N}+2}(y_{\bar{N}+2} - y_{\bar{N}+1}) + \ldots + A_n(y_n - y_{n-1})}{y_n}\right| - \left|\frac{x_{\bar{N}}}{y_n}\right|. \qquad (2)$$

Будемо для визначеності вважати, що при $n \geq \bar{N}$ елементи послідовностей $\{A_n\}$, $\{y_n\}$ додатні. Оберемо за заданим додатним числом A такий номер $\bar{N}$, щоб при $n \geq \bar{N}$ виконувалась нерівність $A_n > 4A$, потім такий номер $N \geq \bar{N}$, що при $n \geq N$

$$\left|\frac{x_{\bar{N}}}{y_n}\right| < A, \quad \frac{y_{\bar{N}}}{y_n} < \frac{1}{2}.$$

Можливість вибору такого номеру N забезпечується тим, що послідовності $\{A_n\}$, $\{y_n\}$ нескінченно великі і їхні члени, починаючи з певного номера, додатні. Очевидно, що при $n \geq N$ з нерівності (2) маємо

$$\left|\frac{x_n}{y_n}\right| > 4A\frac{(y_{\bar{N}+1} - y_{\bar{N}}) + (y_{\bar{N}+2} - y_{\bar{N}+1}) + \ldots + (y_n - y_{n-1})}{y_n} - \left|\frac{x_{\bar{N}}}{y_n}\right|, \text{ або}$$

$$\left|\frac{x_n}{y_n}\right| > 4A\left(1 - \frac{y_{\bar{N}}}{y_n}\right) - A > 4A\left(1 - \frac{1}{2}\right) - A > A.$$

Таким чином, послідовність $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ є нескінченно великою.

Розглянемо декілька прикладів **на застосування Теореми Штольця**.

Приклад 1. Довести такий факт (**Коші**): якщо послідовність $\{a_n\}$ є збіжною до числа a, то послідовність $\left\{\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right\}$ середніх арифметичних значень елементів послідовності $\{a_n\}$ також є збіжною і її границя дорівнює a.

Дійсно, якщо покласти $x_n = a_1+a_2+\ldots+a_n$, а $y_n = n$, то $\dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a_n$. Через те, що $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ існує, то за Теоремою Штольця

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Приклад 2. Розглянемо послідовність $\{a_n\}$, де

$$a_n = \frac{1^k+2^k+3^k+\ldots+n^k}{n^{k+1}}, k \in \mathrm{N}.$$

Позначимо вираз $1^k+2^k+3^k+\ldots+n^k$ через x_n, а n^{k+1} через y_n. Тоді послідовність $\{a_n\}$ набуває вигляду $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$. Дослідимо збіжність послідовності $\left\{\dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}\right\}$. Використовуючи біном Ньютона, отримаємо:

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \frac{n^k}{n^{k+1}-(n-1)^{k+1}} = \frac{n^k}{(k+1)n^k - \dfrac{(k+1)k}{2}n^{k-1} + \ldots + (-1)^{k+1}}.$$

Поділимо чисельник і знаменник останнього виразу на n^k, в результаті дістанемо:

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \frac{1}{k+1+\dfrac{1}{n}[\ldots]},$$

де в знаменнику в квадратних дужках крапками позначено вираз, границя якого при $n\to\infty$ дорівнює $\left[-\dfrac{(k+1)k}{2}\right]$. З останньої формули знаходимо

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}\right) = \frac{1}{k+1}.$$

Отже,за Теоремою Штольця маємо:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1}.$$

Приклад 3. Розглянемо послідовність $\left\{\frac{a^n}{n}\right\}, a > 1$. Покладемо $x_n = a^n$ і $y_n = n$ та дослідимо послідовність $\left\{\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}\right\}$. Маємо

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(a^n - a^{n-1}\right) = \lim_{n\to\infty} a^n\left(1 - \frac{1}{a}\right) = +\infty.$$

Тому в силу **Зауваження** до Теореми Штольця маємо

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a^n}{n}\right) = +\infty.$$