

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
"КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ"

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
З НАРИСНОЇ ГЕОМЕТРІЇ
"ПРОЕКЦІЮВАННЯ ПЛОЩИН"

Методичні вказівки з нарисної геометрії "Проекціювання площин". / Укл. К.В.Сарнацька, Н.С.Дьяченко, Г.Г.Допіра, О.О.Голова. - К.: НТУУ "КПІ", 2008. - 45 с.

Укладачі,
Катерина Василівна Сарнацька
Неллі Сергіївна Дьяченко
Ганна Георгіївна Допіра
Ольга Олександрівна Голова

Відповідальний редактор В.В.Ванін

Рецензент О.Г.Гетьман

Площини в просторі безмежні. Обмежена частина площини називається відсіком. Площина на рисунку може бути задана проєкціями геометричних елементів, які визначають її положення в просторі. Визначником площини називається сукупність елементів /параметрів, які виділяють дану площину з всього класу площин, якому вона належить.

Площини на рисунку позначають великими буквами грецького алфавіту:

A - альфа	K - капта
B - бета	Λ - лямбда
Γ - гема	Σ - сігма
Δ - дельта	N - ета
E - епсілон	ρ - ро
Z - дзета	T - тау
θ - тета	

При запису визначника площини вказується її позначення /букву грецького алфавіту/ і позначення геометричних образів, які визначають площину /підрозділ 3.1/.

За положенням площини відносно площин проєкцій площини розділяються:

- 1/ на площини загального положення;
- 2/ на площини окремого положення.

Площинами загального положення називаються площини, довільно розміщені до площин проєкцій.

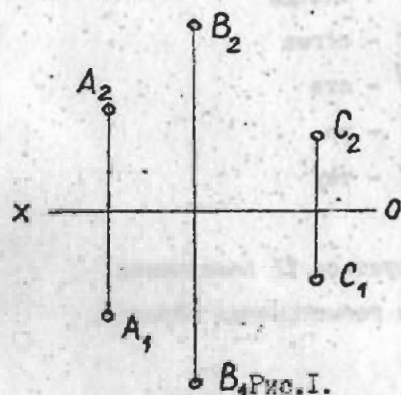
Відсік площин загального положення проєктується на всі три площини проєкцій спотворено. Спотворено проєктується і кути нахилу до площин загального положення і площин проєкцій Π_1 , Π_2 , Π_3 . Основна задача даної теми є побудова різних

геометричних образів, які належать площині. Найпростішими є точка і пряма. Майже кожна технічна деталь, машина має множини площин, в яких розміщені різні геометричні образи. Навчитись зображувати різного роду площини на рисунку і ознайомитись з закономірностями побудови геометричних образів на площині – першочергова інженерна задача.

3.1. ВИЗНАЧНИКИ ПЛОЩИНИ

3.1.1. Основний визначник площини – 3 точки, які не лежать в одній площині /рис.1/.

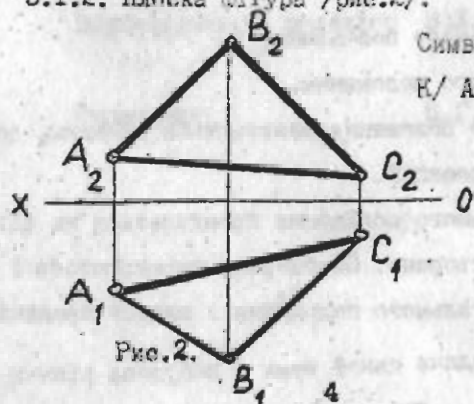
Символічні позначення площини
в /А, В, С/.



Крім основного визначника площини, існує такий різновид визначників:

3.1.2. Плоска фігура /рис.2/.

Символічні позначення:
Н/ ABC /.



3.1.3. Пряма і точка, яка не належить до прямої /рис.3/.

Символічне позначення:

$\Delta / A, l /$.

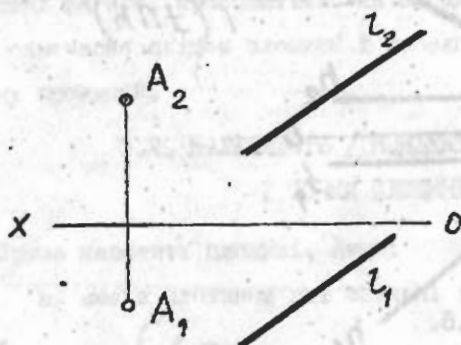


Рис.3.

3.1.4. Дві паралельні прямі /рис.4/.

Символічне позначення:

$A / m \parallel n /$.

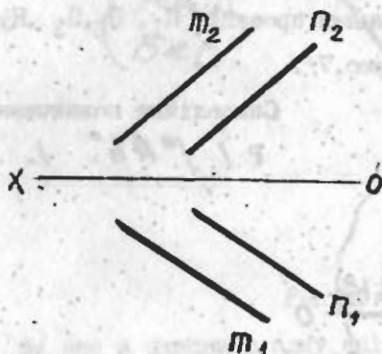


Рис.4.

3.1.5. Дві прямі, які перетинаються *β1 for 1.*

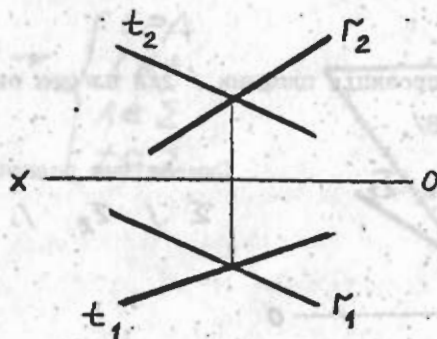
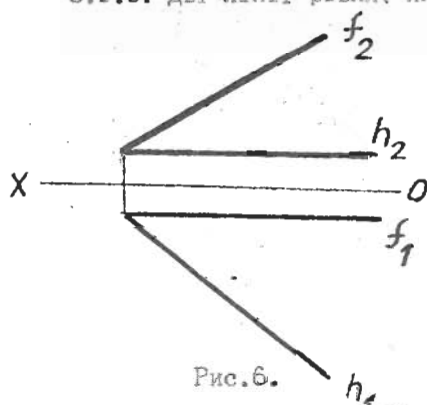


Рис.5.

3.1.6. Дві лінії рівня, які перетинаються /рис.6/.

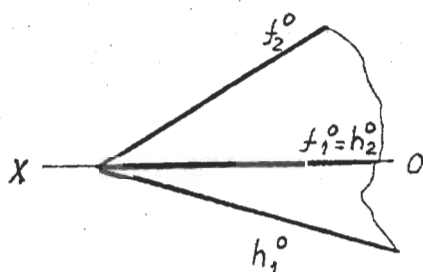


Символічне позначення:
 $\Gamma(f \cap h)$

Рис.6.

3.1.7. Дві нульові лінії рівня, які перетинаються.

Слідами площин загального положення називаються лінії перетину площин з площинами проєкції Π_1, Π_2, Π_3 . Нульові лінії є сліди площин /рис.7/.

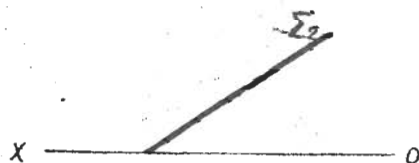


Символічне позначення:

$P / f^0 \cap h^0 /$.

Рис.7.

3.1.8. Слід-проєкція площини / для площин окремого положення/. /Рис.8/.



Символічне позначення:

$\Sigma / \Sigma_2 /$.

Всі площини Σ , а також всі геометричні образи, які розміщені на ній, проєціюються на площину проєкцій Π_2 прямою, яка є одночасно слідом площини і проєкцією всієї площини на площину проєкцій.

3.2. НАЛЕЖНІСТЬ /ІНДИДЕНТНІСТЬ/ ПРЯМОЇ І ТОЧКИ ПЛОЩИНІ

Пряма належить площині, якщо:

а/ має з площиною дві спільні точки /рис.9/;

$$l \subset \Delta \rightarrow \begin{cases} l \supset A \\ l \supset B \\ A \in \Delta \\ B \in \Delta \end{cases}$$

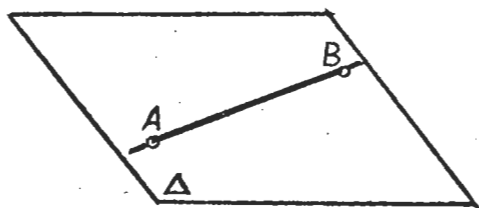


Рис.9.

б/ має з площиною одну спільну точку і паралельна якій-небудь прямій, яка лежить в площині /рис.10/.

$$l \subset \Sigma \rightarrow \begin{cases} l \supset A \\ l \parallel t \\ A \in \Sigma \\ t \subset \Sigma \end{cases}$$

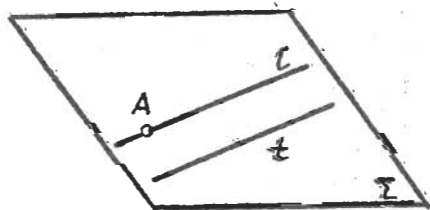


Рис.10.

Точка належить площині, якщо вона належить будь-якій прямій площини /рис.II/.

$$A \in \sigma \Rightarrow \begin{cases} A \in l \\ l \subset \sigma \end{cases}$$

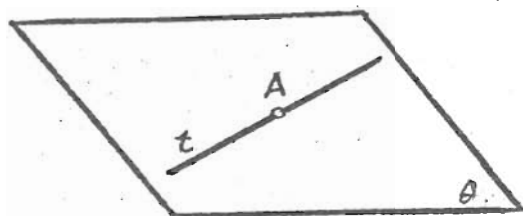
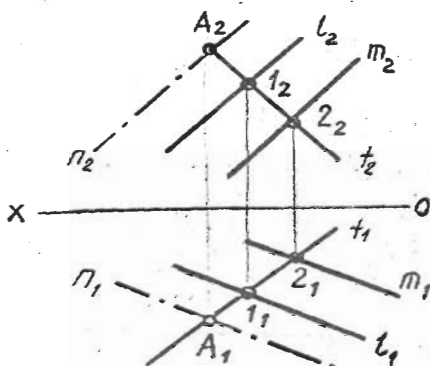


Рис.II.

ПРИКЛАД I.

Дана площина Σ загального положення, визначником якої є дві паралельні прямі /рис.I2/. Треба побудувати довільну пряму t , яка належить площині, довільну точку A в площині і пряму n , яка належить площині і паралельну прямій l і m .



ДАНО: $\Sigma(l \parallel m)$

? $t \subset \Sigma$

$A \in \Sigma$

$n \subset \Sigma$

$n \parallel l$

Рис.I2.

В площині Σ проводимо довільну пряму t , провівши її фронтальну проекцію t_2 в будь-якому місці на полі рисунку. Нахил t_2 довільний. Відмічаємо точки t_2 і 2_2 , в яких

фронтальна проекція прямої f_2^0 перетинає фронтальні проекції прямих l_2 і m_2 , потім визначимо 1_1 і 2_1 , горизонтальні проекції цих точок. З'єднавши 1_1 і 2_1 , одержимо горизонтальну проекцію прямої f_1^0 . Для побудови точки А, яка належить площині на побудованій прямій f , в будь-якому місці задамо дві проекції точки А- A_2 і A_1 /рис.12/. Одну з проекцій A_2 чи A_1 виберем довільно, а другу проекцію будуюмо за належністю прямій f .

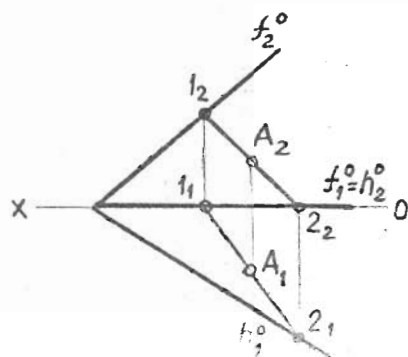
Побудова прямої n , яка належить площині і паралельна прямій m .

Згідно ознаці інцидентності, пряма n буде належати площині, якщо пройде через будь-яку точку, яка належить площині, і буде паралельна будь-якій прямій, яка належить площині. Для побудови прямої n використаємо точку А, через яку проведемо пряму n паралельно заданим прямим l і m /рис.12/.

ПРИКЛАД 2.

Побудова точки, яка належить площині, якщо відома одна з її проекцій.

Згідно ознаці інцидентності точки площин, точка належить площині, якщо належить будь-якій прямій площині.



ДАНО: $\Sigma(h \cap f); A_2$

? $A_1 \in \Sigma$

В площині Σ будемо фронтальну проекцію довільної прямої $1_2 2_2$, яка проходить через фронтальну проекцію точки A_2 . Потім визначаємо горизонтальну проекцію прямої $1_1 2_1$ за умовою належності точок 1_1 і 2_1 слідам площини h_1^o і f_1^o . Горизонтальну проекцію точки A_1 визначаємо на горизонтальній проекції прямої $1_1 2_1$.

3.3. ЛІНІЯ РІВНЯ В ПЛОЩИНАХ ЗАГАЛЬНОГО ПОЛОЖЕННЯ

3.3.1. Горизонталь площини.

Горизонталю площини загального положення є пряма, яка належить площині загального положення і паралельна горизонтальній площині проекцій. Побудова горизонталі в площині починаємо з побудови її фронтальної проекції, яка паралельна осі OX /рис.14/.

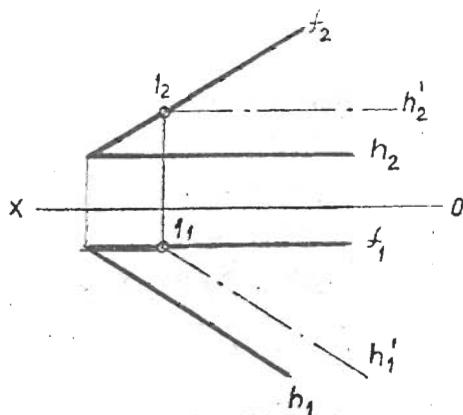


Рис.14

Порядок побудови

І. В будь-якому місці на полі рисунку /якщо не задані допоміжні умови/ проводимо фронтальну проекцію горизонталі h_2' паралельну до осі OX . При цьому визначаємо точку 1_2 перетину

$$\begin{array}{l} \text{ДАНО: } \Sigma (f \cap h) \\ \hline ? \quad h' \subset \Sigma \end{array}$$

з фронтальною площини f_2 .

2. Визначаємо горизонтальну проекцію точки 1_2 за умовою належності горизонтальній проекції фронталі f_1 .

3. Будемо горизонтальну проекцію горизонталі площини h_1' паралельно h_1 . Проекції h_1' і h_2 будуть паралельні, так як h належить будуть паралельні, так як h належить площині і паралельна Π_1 згідно підрозд. 3.2/.

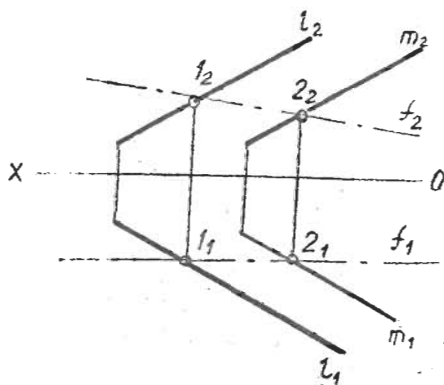
Символічний запис побудови / найпростіший алгоритм розв'язку/:

1. $h_2' \parallel h_2$
2. $1_2 = h_2' \cap f_2$
3. $h_1' \parallel h_1$; $h_1' \ni 1_1$

Всі горизонталі однієї площини паралельні між собою.

3.3.2. Фронталь площини

Фронтальною площини загального положення є пряма, яка належить площині і паралельна фронтальній площині проєкцій. Побудову фронталі площини починаємо з побудови її горизонтальної проєкції, яка паралельна осі Ox /рис.15/.



ДАНО: $\Sigma (l \parallel m)$

? $f \subset \Sigma$

Рис.15

Порядок побудови.

1. В будь-якому місці на полі рисунка проводимо горизонтальну проєкцію фронталі паралельно осі OX .

2. Визначаємо горизонтальну проєкцію точок 1_I і 2_I перетину f_1 з проєкціями прямих l_1 і m_1 .

3. Будуємо фронтальні проєкції точок 1_2 і 2_2 за умовою належності їх фронтальним проєкціям прямих l_2 і m_2 .

4. З'єднавши фронтальні проєкції точок 1_2 і 2_2 , одержуємо фронтальну проєкцію фронталі f_2 .

Алгоритм розв'язку.

1. $f_1 \parallel OX$
2. $1_1 = f_1 \cap l_1$;
 $2_1 = f_1 \cap m_1$;
3. $1_2 = 1_1 l_2 \cap l_2$;
 $2_2 = 2_1 m_2 \cap m_2$.
4. $f_2 = 1_2 \cup 2_2$.

Всі фронталі однієї площини паралельні між собою.

ПРИКЛАД 3.

Побудувати в площині θ /ABC/ фронталь f на відстані 15 мм від площини проєкцій Π_2 і фронталь f' на відстані 25 мм від площини проєкцій Π_2 /рис.16/.

ДАНО: θ ($\triangle ABC$)

? f ; f'

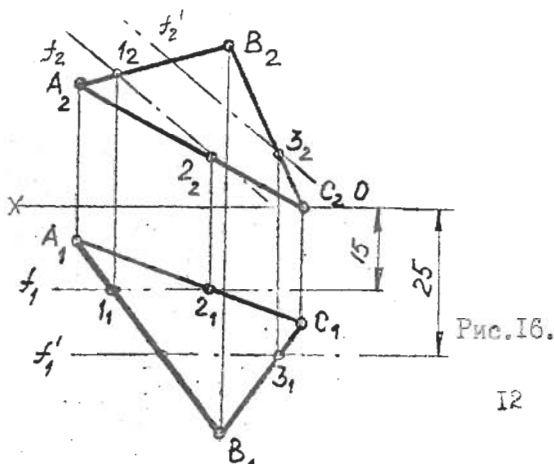


Рис.16.

Порядок побудови

1. Будемо горизонтальну проекцію фронталі f_1 на відстані 15 мм від осі OX . /Відстань від фронтальної площини проєкцій визначається координатою y всіх точок фронталі/.

2. Визначаємо горизонтальні проєкції точок I_1 і 2_1 перетину фронталі f_1 з сторонами трикутника A_1B_1 і A_1C_1 .

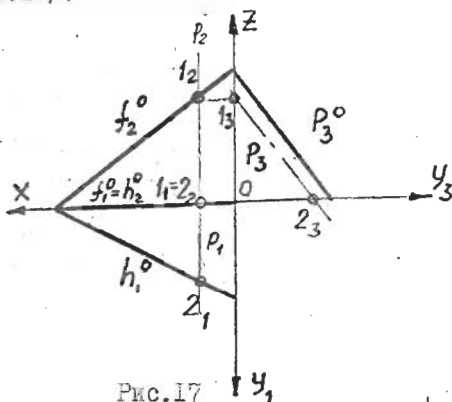
3. Визначаємо фронтальні проєкції точок $I_2 2_2$.

4. З'єднуємо фронтальні проєкції точок $I_2 2_2$ і одержуємо фронтальну проєкцію фронталі f_2 . Побудова фронталі площини ΔABC на відстані 25 мм від фронтальної площини проєкцій, відрізняється тільки положенням її проєкцій. Горизонтальна проєкція f_1' віддалена від осі OX на відстані 25 мм. Фронтальну проєкцію f_2' , будемо, побудовувати фронтальну проєкцію точки $3-3_2$ паралельно фронталі f_2 згідно ознаці інцидентності прямої площині /підрозд. 3.2, п. 6/.

3.3.3. Профільна пряма площини

Профільною прямою даної площини називається пряма, яка належить площині і паралельна фронтальній площині проєкцій.

Побудову профільної прямої починаємо з побудови її горизонтальної і фронтальної проєкції, які перпендикулярні до осі OX /рис.17/.



ДАНО: $\Sigma (f'' \parallel h'')$

? $p \subset \Sigma$

1. Будемо фронтальну проекцію $I_2 2_2$ відрізка профільної прямої p провівши в будь-якому місці площини Σ пряму перпендикулярну до осі OX . I_2 - точка перетину прямої p_2 - з фронтальним слідом площини f_2° , 2_2 - фронтальна проекція точки перетину профільної прямої з фронтальною проекцією горизонтального сліду площини h_2° .

2. Проведемо p_1 перпендикулярно до осі OX . Визначимо I_1 і 2_1 - горизонтальні проекції точок перетину горизонтальної проекції профільної прямої з горизонтальними проекціями f_1° і h_1° .

3. Будемо профільні проекції точок - I_3 і 2_3 , одержуем

p_3 .

Найпростіший алгоритм розв'язку:

1. $p_2 \perp OX \begin{cases} I_2 = f_2^\circ \cap p_2; \\ 2_2 = h_2^\circ \cap p_2. \end{cases}$
2. $p_1 \perp OX \begin{cases} I_1 = f_1^\circ \cap p_1; \\ 2_1 = h_1^\circ \cap p_1. \end{cases}$
3. $p_3 \begin{cases} I_3 = I_2 - I_3 \cap OZ; \\ 2_3 = 2_2 - 2_3 \cap OY. \end{cases}$

З побудови видно, що профільна проекція профільної прямої паралельна профільному сліду площини p_3° .

ВИСНОВОК. Оскільки сліди площини це крайнє положення ліній рівня, тобто таке положення лінії рівня, коли вона належить площині проекцій, значить, сліди площини:

1. Паралельні однойменним лініям рівня.

2. Є лініями перетину площини загального положення з площинами проекцій Π_1, Π_2, Π_3 .

3. Мають збиральні властивості по відношенню до слідів всіх прямих, розміщених в одній площині, тобто сліди всіх прямих, розміщених в одній площині, розміщуються на її слідах /рис.18/.

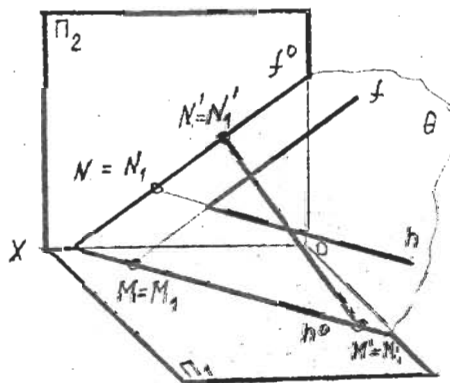


Рис.18

3.4. Побудова слідів площини

Побудова слідів площини заснована на побудові слідів будь-яких двох прямих, які належать площині. Фронтальний слід площини включає фронтальні сліди прямих, горизонтальний – горизонтальні /рис.19/.

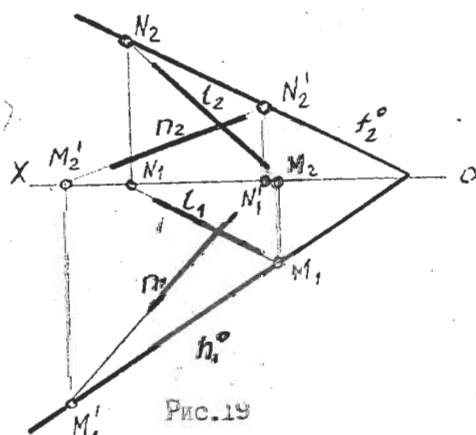


Рис.19

Порядок побудови слідів площини

I. Визначаем фронтальний слід прямої l , для чого продовжуем горизонтальну проєкцію прямої $l - l^0$ до перетину з віссю OX , одержимо N_1 – горизонтальну проєкцію фронтального сліду. Потім

ДАНО: $\Delta(l, n)$

? f^0 ; h^0

з одержаної точки проводимо вертикальну лінію зв'язку до перетину її з продовженням фронтальної проекції прямої l_2 в точці N_2 . Аналогічно виконуємо побудову фронтального сліду N_2' прямої n .

2. З'єднуємо N_2 і N_2' , одержуємо фронтальний слід площини f_2^0 . Горизонтальна проекція f_2^0 співпадає з віссю OX , тому що f^0 належить фронтальній площині проекцій. Точка перетину f_2^0 з віссю OX є точкою збігу слідів Δ_x .

3. Визначаємо горизонтальну проекцію M_1 горизонтального сліду прямої l , для чого продовжуємо фронтальну проекцію прямої l_2 до перетину з віссю OX в точці M_2 , з якої проводимо вертикальну лінію зв'язку до перетину з горизонтальною проекцією прямої $l - l_1$. Аналогічно виконуємо побудову горизонтального сліду M_1' прямої n .

4. З'єднуємо M_1 і M_1' одержуємо проекцію горизонтального сліду площини h_1^0 .

Побудову точки M_1' можна не виконувати, тому що вже є друга точка, яка визначає горизонтальний слід площини, h^0 - точка збігу слідів площини Δ_x .

Побудувавши горизонтальний слід прямої l - точку M_1 , з'єднуємо її з точкою збігу слідів площини Δ_x і одержимо h_1^0 . Фронтальна проекція h^0 знаходиться на осі OX , тому що h^0 належить площині проекцій Π_1 .

2.4.1. Побудова слідів площини у випадку, якщо площина задана лініями рівня

$$\frac{\text{ДАНО: } \Sigma (f \cap h)}{? f^0 ; h^0}$$

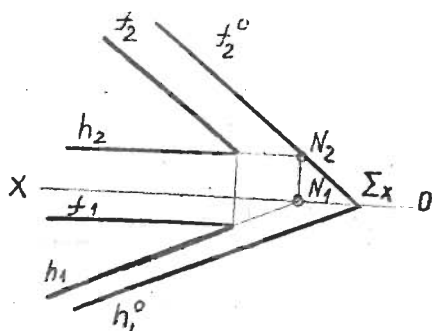


Рис.20

У випадку, коли площина задана двома прямими лініями рівня, які перетинаються, відомо напрямок слідів – вони будуть паралельні своїм лініям рівня. Для побудови проєкцій слідів площини визначимо проєкції фронтального сліду горизонталі – N_1 і N_2 чи горизонтального сліду фронталі /на рисунку не показано/. Потім через фронтальну проєкцію фронтального сліду горизонталі проводимо f_2^0 паралельно f_2 в перетині з віссю OX одержимо точку збігу слідів площини Σ_x через яку проводимо горизонтальну проєкцію горизонтального сліду h_1^0 паралельно h_1 . Всі останні випадки побудови слідів площини загального положення при різних способах її задання зводяться до цих двох.

Крім показаних на рис.19,20 площинах загального положення, в яких сліди перетинаються, зустрічаються площини загального положення, у яких сліди розміщуються на одній прямій, вони називаються площинами в яких сліди зливаються. Приклад задання площини і розміщення в просторі показаний на рис. 21,22.

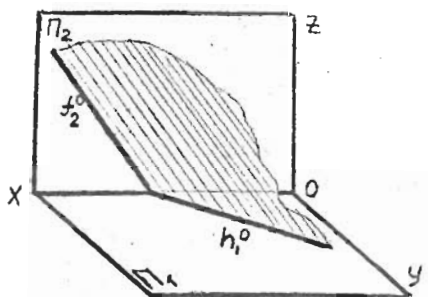


Рис.21

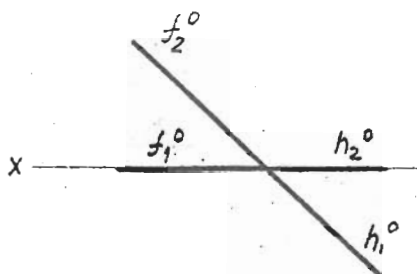


Рис.22

Побудова слідів площини /рис.22/.

Сліди площини будуюмо по одному сліду прямої і відомому напрямку слідів площини. Визначаємо горизонтальний слід N фронталі площини і через одержану точку горизонтального сліду фронталі проводимо горизонтальний слід h_1^0 площини паралельно h_1 .

Фронтальна проекція фронтального сліду площини пройде через точку збігу слідів площини Ox паралельно f_2 /рис.23/.

Побудова профільних проекцій слідів площини загального положення показана на рис.24-26. Профільний слід площини на рис.24 будуюмо за координатою y , точку θ_y - точку перетину h_1^0 з віссю y_1 .

$$\frac{\text{ДАНЕ: } \theta(fnh)}{? f^0; h^0}$$

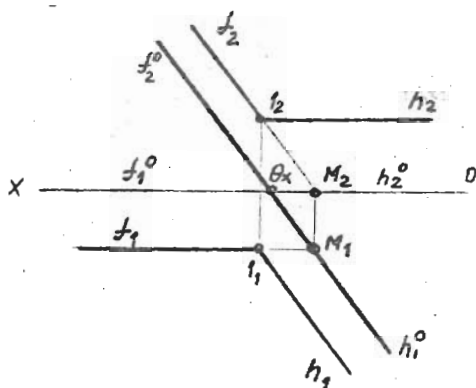


Рис.23

ДАНО: $\theta(f^0 \cap h^0)$

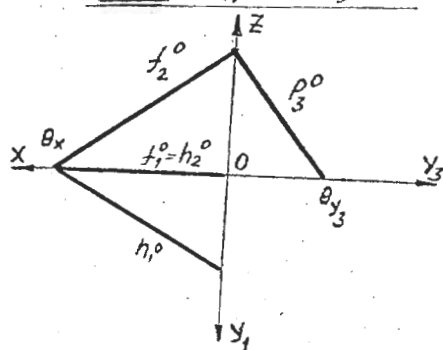
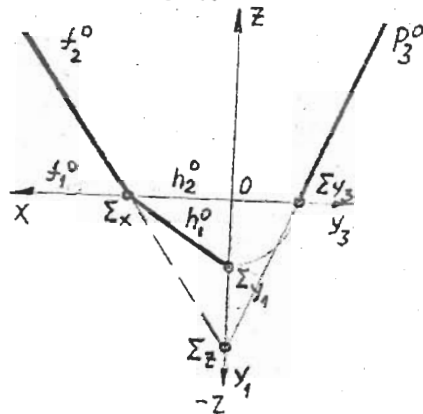


Рис.24



ДАНО: $\Sigma(f^0 \cap h^0)$

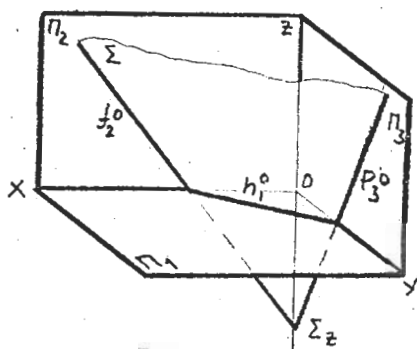


Рис.25

Для побудови профільного сліду площини Σ /рис.25,26/ необхідно побудувати точку Σ_z збігу фронтального і профільного слідів на осі . З'єднавши точку Σ_z з точкою Σ_{y2} , яку одержимо переносом точки Σ_{y1} на вісь Oy_3 , одержимо напрямок профільного сліду площини $\Sigma - p_3^0$.

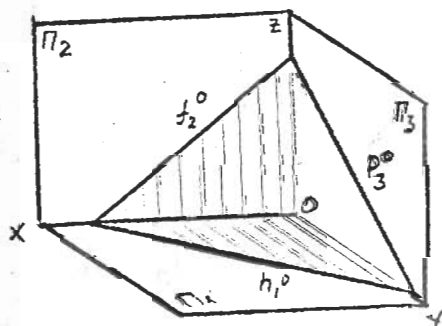
3.5. Про проєкції кутів нахилу площин загального положення до площин проєкцій.

Кут між слідами площин на рисунку не дорівнює куту між слідами площин в просторі. Якщо розглянути трьохгранний кут, утворений площиною загального положення з площинами проєкцій Π_1 і Π_2 з вершиною в точці збігу слідів Σ_x /рис.25/, тоді сума двох плоских кутів $f^\circ \Sigma_x O$ і $h^\circ \Sigma_x O$ буде більшим третього плоского кута $f^\circ \Sigma_x h^\circ$. Таким чином, кут, утворений слідами f° і h° на комплексному рисунку, завжди більше кута між слідами f° і h° в просторі. Натуральна величина кута між слідами площини легко визначається за допомогою методів перетворення, які розглядаються в другому розділі курсу.

Рівнонахилені площини загального положення.

Якщо площина загального положення однаково нахилена до площин проєкцій, тоді на рисунку сліди такої площини нахилені до осей проєкцій під рівними кутами. Це твердження випливає з порівняння величин плоских кутів трьохгранного кута $f^\circ \Sigma_x h^\circ$ /рис.27/.

Якщо в трьохгранному куті, який площина Σ утворює з площинами проєкцій Π_1 і Π_2 , рівні двогранні кути, які площина загального положення утворює з площинами проєкцій, тоді рівні і плоскі кути нахилу слідів площини до осей проєкцій.



Площини, зображені на рис.28,29, які мають однакові кути нахилу до осей проєкцій, рівнонахилені. Це одним

Рис.27

типом рівнонахилених площин загального положення будуть площини, сліди яких зливаються.

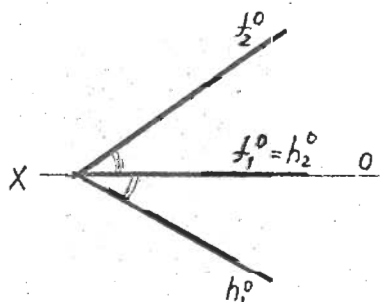


Рис.28

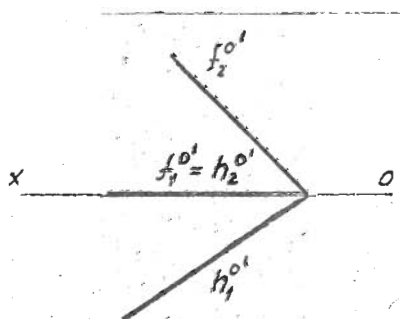


Рис.29

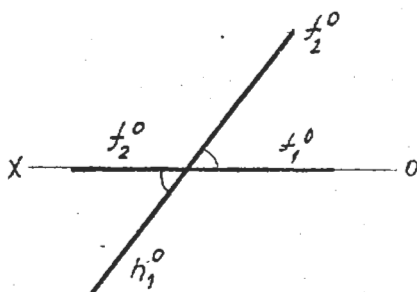


Рис.30

3.6. Площини окремих положень

Площини окремих положень поділяються:

1/ на проєкціючі площини;

2/ на площини рівня.

1.Проекціючі площини - це площини, перпендикулярні до однієї з площин проєкцій. Їх називають так само як і ту площину, до якої вони перпендикулярні.

3.6.1. Горизонтально-проєкціючі площини

Ці площини перпендикулярні до горизонтальної площини проєк-

цій.

На рис.31,32 зображені горизонтально-проектційні площини в просторі і на комплексному рисунку. Її фронтальний і профільний сліди паралельні осі Oz . Горизонтальний слід площини складає з віссю Ox довільний кут, цей кут є лінійним кутом β двогранного кута, який горизонтально-проектуюча площина складає з площиною проєкцій Π_2 і проєктується на Π_1 в натуральну величину. Двогранний кут між площинами Δ_1 і Π_3 також дорівнює лінійному куту γ між Δ_1 і віссю Oy . Проекції точок, прямих і плоских фігур, розміщених в горизонтально-проектційній площині, на горизонтальну площину проєкцій проєктуються на слід площини Δ_1 . Фронтальний і профільний сліди площини мають інформацію про положення фронталі і профільної прямої площини. На рисунку, як правило, їх не зображують.

Горизонтально-проектуючу площину прийнято задавати на рисунку одним горизонтальним слідом /рис.33/. При цьому його називають слідом-проекцією площини, так як це не тільки горизонтальний слід площини, але й її проєкція. Слід-проекція площини має збіральні властивості: проєкції всіх геометричних образів, які належать площині, розміщуються на її сліді-проекції.

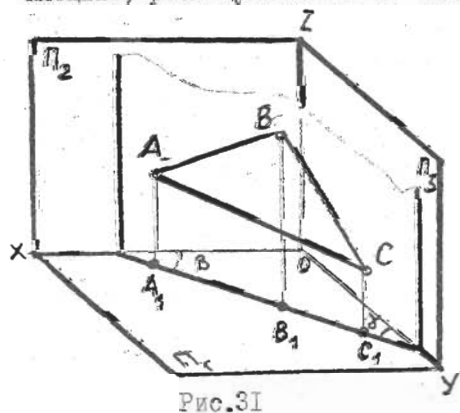


Рис.31

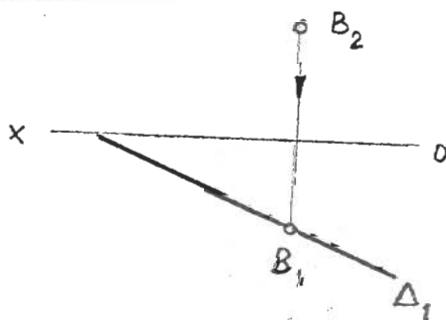


Рис.32

Якщо на сліді-проекції площини Δ_1 , /рис.34/ задати проєкцію довільної точки A_1 , тоді всі точки, які належать проєкційному променю, будуть її фронтальними проєкціями, тобто горизонтальній проєкції точки A_1 відповідає вся множина точок вертикального проєкційного променя $A_2 A_2'$ і т.д.

Якщо задати фронтальну проєкцію точки, яка належить площині $\Delta - B_2$ /рис.35/, тоді їй буде відповідати тільки одне положення горизонтальної проєкції - B_1 .

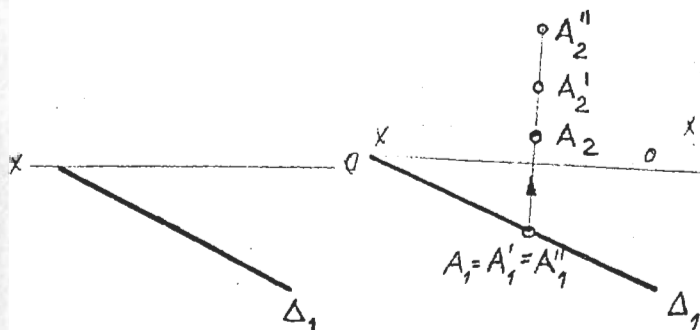


Рис.33

Рис.34

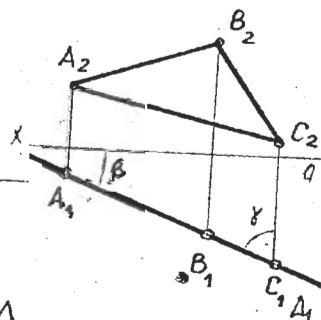


Рис.35

Звідси, як висновок, є умова належності точки і прямих проєкційній площині.

Точка лежить в проєкційній площині, якщо її проєкції лежать на однойменному сліді-проекції площини.

3.6.1.1. Лінії рівня горизонтально-проєкційної площини

а/ Горизонталь. Горизонталь в горизонтально-проєкційній площині займає своє звичайне положення /рис.36,37/. Її фронтальна проєкція паралельна осі ОХ, її горизонтальна проєкція співпадає з слідом-проекцією площини. Горизонталь в будь-якій площині, в тому числі і горизонтально-проєкційній, є геометричною множиною точок, віддалених на задану відстань від заданої площини проєкцій,

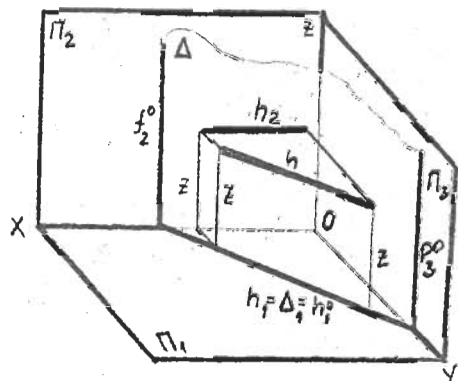


Рис.36

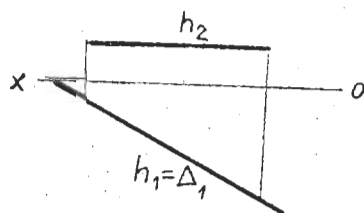


Рис.37

тому побудова горизонталі, віддаленої, наприклад, від площини проєкцій на відстані 15 мм /рис.38/, починають з побудови фронтальної проєкції горизонталі паралельно осі OX , її координата дорівнює 15 мм, а h , співпадає з слідом-проєкцією.

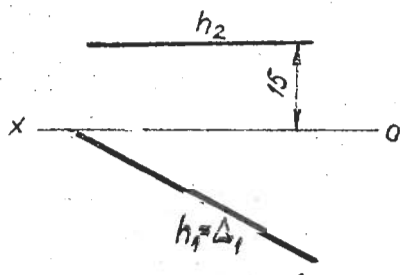


Рис.38

ПАНО: $\Delta(\Delta_1) \perp \Pi_1$

? $h < \Delta$

$2h = 15 \text{ мм}$

б/ Фронталь, профільна пряма. В горизонтально-проєкційній площині фронтальний і профільний сліди паралельні між собою, а також паралельні осі OZ , тому фронталь площини буде одночасно і профільною прямою. Вона також буде паралельна осі OZ і перпендикулярна до горизонтальної площини проєкцій /рис.39/.

Фронталь площини є геометричною множиною точок /Г.М.Т./, від-

віддалених на задану відстань від фронтальної площини проєкцій. Ця відстань вимірюється координатою y . Профільна пряма - т.м.т., віддалених на задану відстань від профільної площини проєкцій. Ця відстань вимірюється координатою x .

Для побудови в горизонтально-проекційній площині фронталі, віддаленої від Π_2 на відстань 10 мм, визначаємо спочатку горизонтальну проекцію фронталі f_1 /рис.40/. Це буде точка на сліди-проекції площини Δ , в яку проєктується фронталь на Π_1 , координата в цій точці дорівнює 10 мм. Потім проводимо вертикальну лінію зв'язку і задаємо f_2 ; f_2 розміщуємо вздовж лінії зв'язку перпендикулярно до осі OX .

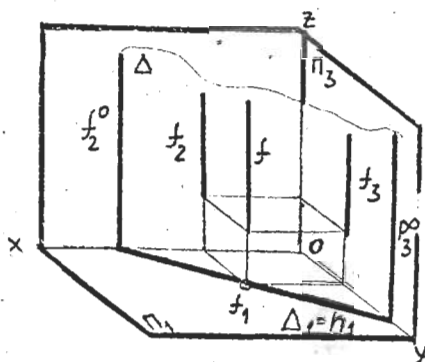


Рис. 39

Дано: $\Delta (\Delta_1) \perp \Pi_1$

7 f; $y_f = 10\text{mm}$

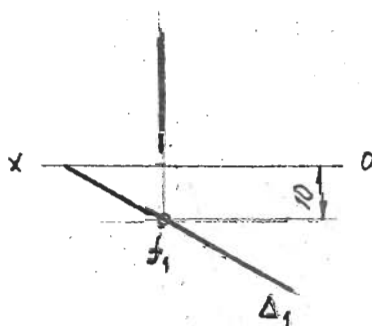


Рис. 40

Побудова профільної прямої в горизонтально-проєкційній площині, віддаленій від Π_3 на відстані 20 мм аналогічна попередньому /рис.41/.

ДАНО: $\Delta (\Delta_1) \perp \Pi_1$

? $P' \in \Delta$; $X_P = 20 \text{ мм}$

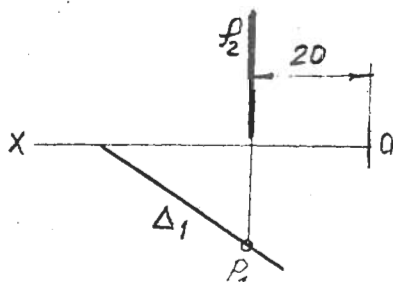


Рис.41

3.6.2. Фронтально-проєкційна площина

Ця площина, перпендикулярна до фронтальної площини проєкцій. Її горизонтальний і профільний сліди паралельні осі OY і паралельні між собою. Фронтальний слід площини може складати з віссю OX будь-який кут /рис.42/. Лінійний кут між фронтальним слідом площини і віссю OX дорівнює натуральній величині двогранного кута, який фронтально-проєкційна площина складає з площиною проєкцій Π_1 . Лінійний кут α між фронтальним слідом площини і віссю Ox дорівнює натуральній величині кута, який площина складає з площиною проєкцій Π_3 . Кут нахилу фронтально-проєкційної площини до площини проєкцій Π_2 дорівнює 90° /рис.43/.

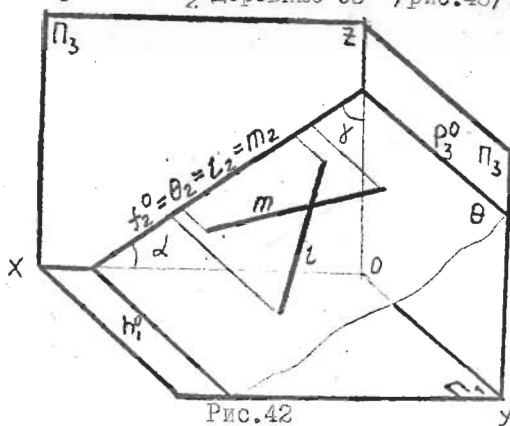


Рис.42

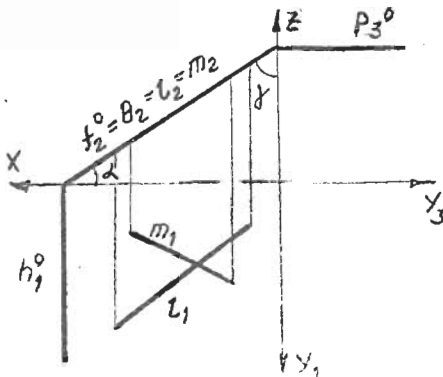


Рис.43

Проекції будь-яких геометричних образів розміщених у фронтально-проєкційній площині, на фронтальній площині проєкцій співпадають з фронтальним слідом площини, тому фронтальний слід є одночасно і проєкцією всієї площини θ на Π_2 . Він називається слідом-проєкцією площини. Горизонтальний і профільний сліди площини несуть інформацію про розміщення її горизонталей і профільних прямих. Фронтально-проєкцію площину прийнято задавати на рисунку тільки одним фронтальним слідом-проєкцією /рис.44/.

Фронтальній проєкції точки A_2 , заданої на сліді-проєкції площини, відповідає в горизонтальній площині вся множина точок вертикального проєкційного променя, який проходить через A_2 /рис.45,46/. Так як слід-проєкція є геометричною множиною точок

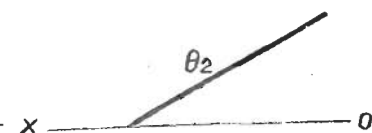


Рис.44

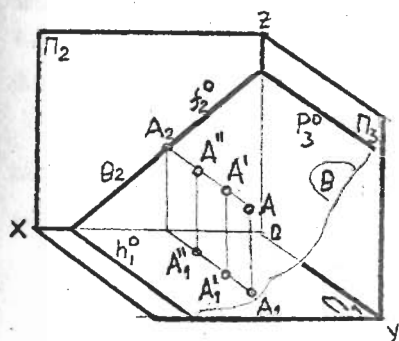


Рис.45

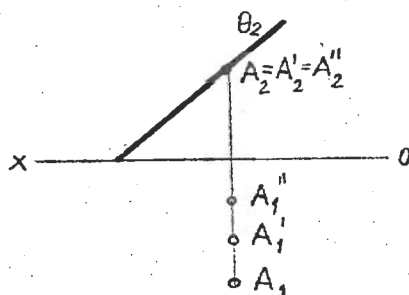


Рис.46

площини, тоді A_2 – геометрична множина точок площини, розміщених на одному проєкційному промені /рис.46/.

3.6.2.І. Лінії рівня фронтально-проєкційної площини

а/Горизонталь. Горизонталь у фронтально-проєкційній площині паралельна горизонтальному сліду, і, тоді, перпендикулярна до площини проєкцій Π_2 /рис.47,48/.

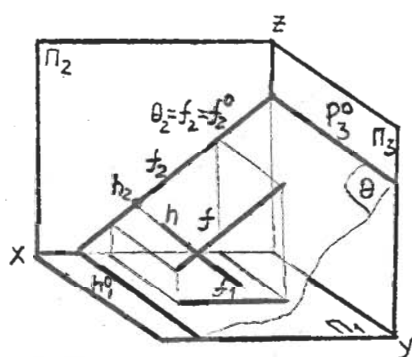


Рис.47

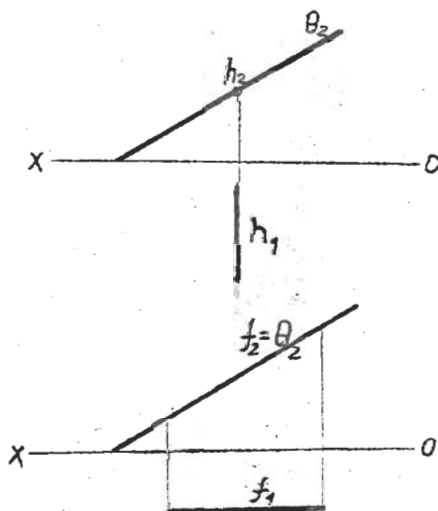


Рис.48

б/ Фронталь. Фронталь площини паралельна сліду-проекції площини /рис.47,48/.

в/ Профільна пряма. Прямі, паралельні профільній площині проєкцій і які належать до фронтально-проєкційної площини, займають таке ж положення, як і горизонтальна, тобто вони перпендикулярні до фронтальної площини проєкцій /рис.49/.

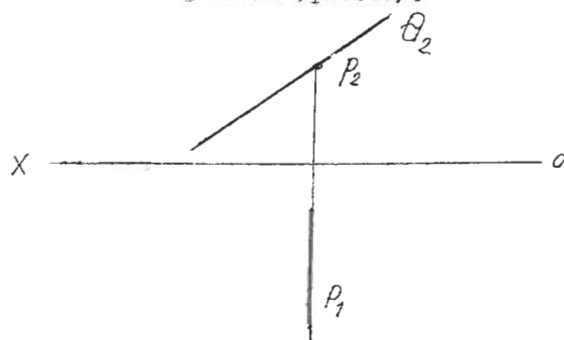


Рис.49

3.6.3. Профільно-проєкційні площини

Це площини, перпендикулярні до профільної площини проєкцій. Горизонтальні і фронтальні сліди площин паралельні до осі OX . Профільний слід складає з осями OZ і OY довільні кути /рис.50/.

Кути нахилу профільно-проєкційної площини α і β до площини проєкцій Π_1 і Π_2 дорівнюють лінійним кутам, які P^0_3 складає з осями OY_3 і OZ . Кути α і β проєктуються в натуральну величину в профільній площині проєкцій на комплексному рисунку /рис.51/.

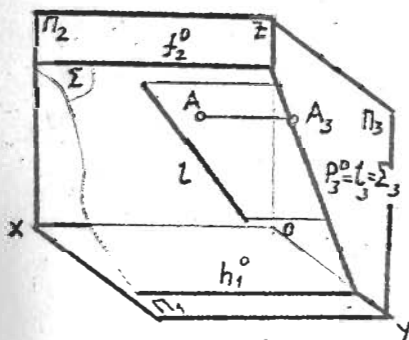


Рис.50

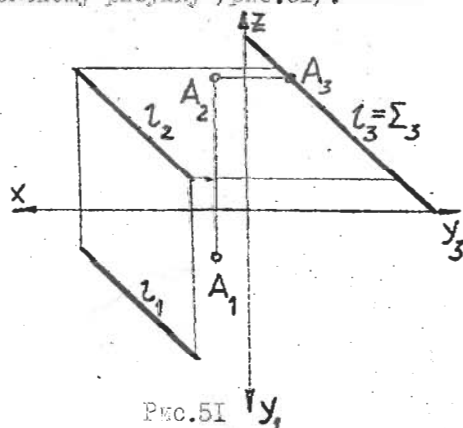


Рис.51

Кут нахилу площини Σ до профільної площини проєкцій Π_3 дорівнює 90° . Профільно-проєкційну площину можна задавати одним слідом-проєкцією Σ_3 . Слід-проєкція площини має збіральні властивості, тобто проєкції всіх геометричних образів, розміщених в площині, розміщуються на сліді-проєкції площини /рис.52/.

Точка C_3 /рис.53/, яка задана на профільному сліді-проєкції площини, є геометричною множиною точок площини, розміщених на горизонтальній лінії зв'язку, яка проходить через цю точку.

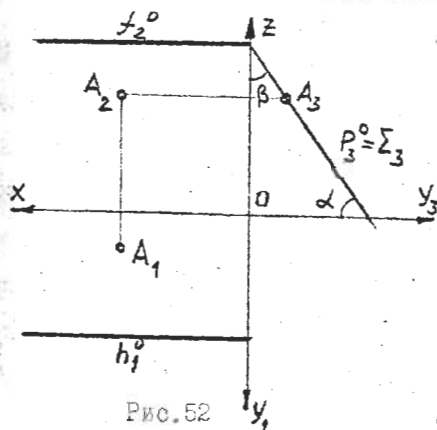


Рис.52

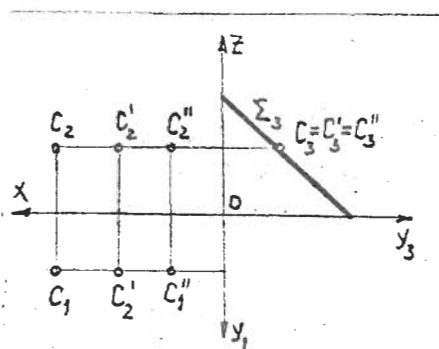


Рис.53

3.6.3.1. Лінії рівня профільно-проєкційної площини

Горизонталь. Горизонталь профільно-проєкційної площини паралельна горизонтальному сліду профільно-проєкційної площини, і тому, перпендикулярна до профільної площини проєкцій /рис.54/.

Побудова довільної горизонталі площини Σ показана на рис.55. Будемо фронтальну проєкцію горизонталі в довільному місці рисунка паралельно осі Ox , потім визначаємо її профільну проєкцію h_3 з умови належності площин Σ .

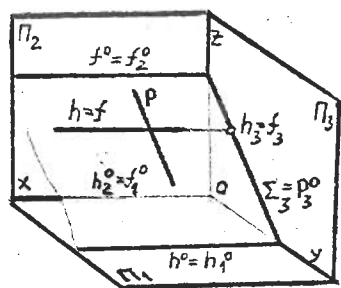


Рис.54

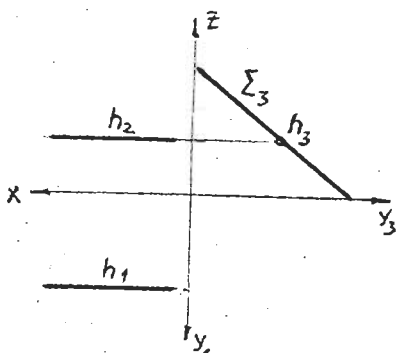


Рис.55

б/ Фронталь. Фронталь профільно-проєкційної площини паралельна фронтальному сліду f° /рис.52/, тому що горизонтальний і фронтальний сліди площини паралельні між собою, а фронталь займе таке ж положення, як і горизонталь /рис.55/.

в/ Профільна пряма. Проєкція профільної прямої в профільній площині проєкцій співпадає з слідом-проєкцією площини Σ_3 . Для побудови її фронтальної і горизонтальної проєкції необхідно її задати деяким відрізком, наприклад, A_3B_3 , побудувавши $A_I B_I$, перенісши координати точок A і B . Напрямок горизонтальної і фронтальної проєкції профільної прямої перпендикулярний до осі Ox , потім за лінією зв'язку визначити A_2B_2 /рис.56/.

ДАНО: $\Sigma (\Sigma_3)$
 $? AB \subset \Sigma; AB \parallel \Pi_3$

координата X , якщо не дано
 додаткових умов, вибирається
 довільно.

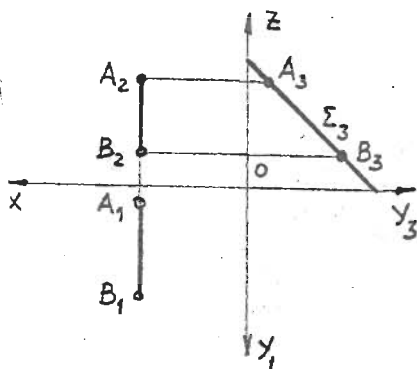


Рис.56

3.6.3.2. Профільно-проектуючі площини рівнонахилені до площин проекцій Π_1 і Π_2

До рівнонахилених площин окремого положення відносяться бісекторна площина I-II двогранного кута /рис.57,58/.

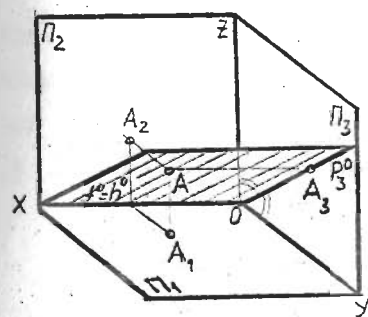


Рис.57

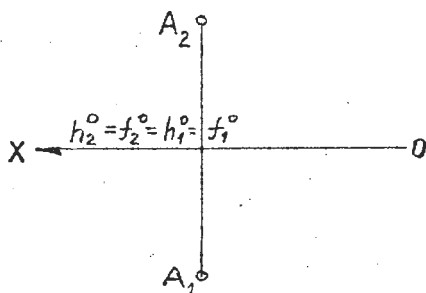


Рис.58

Це профільно-проектуюча площина, нахилена до Π_1 і Π_2 під кутом 45° , яка проходить через вісь OX . Горизонтальний і профільний сліди площини співпадають з віссю OX , тому на комплексному рисунку в системі $\frac{\Pi_1}{\Pi_2}$ визначником такої площини є її сліди і точка, яка має однакові координати Y і Z . Прямі загального положення, які розміщені в такій площині, будуть рівнонахилені до Π_1 і Π_2 /рис.59/.

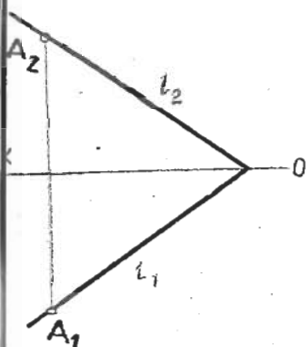


Рис.59

Прямі загального положення, які розміщені в такій площині будуть рівнонахиленими до Π_1 і Π_2 . Їх проекції - паралельні /рис.61/.

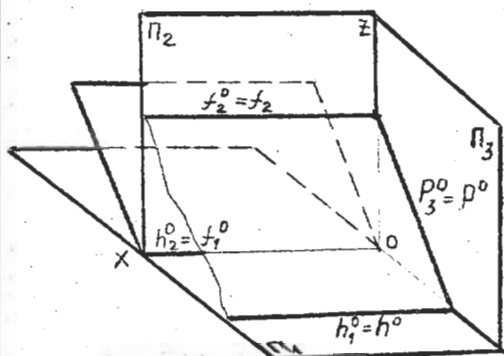


Рис.60

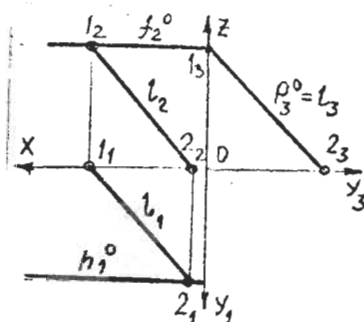


Рис.61

3.7. Площини рівня

Площинами рівня називають площини, паралельні будь-якій площині проєкцій. Площини рівня називаються за іменем тієї площини, якій вони паралельні. Існують такі площини рівня:

1. Горизонтальна,
2. Фронтальна.
3. Профільна.

3.7.1. Горизонтальна площина рівня

Горизонтальна площина рівня складає з площини проєкції Π_1 і Π_2 .

кути β і γ , що дорівнюють 90° .
 Кут нахилу площини до площини проєкцій $\Pi_1 - \alpha$ дорівнює 0° . Проєкції всіх геометричних образів, які розміщені в площині, проєктуються на горизонтальну площину проєкцій в натуральну величину /рис.62/.

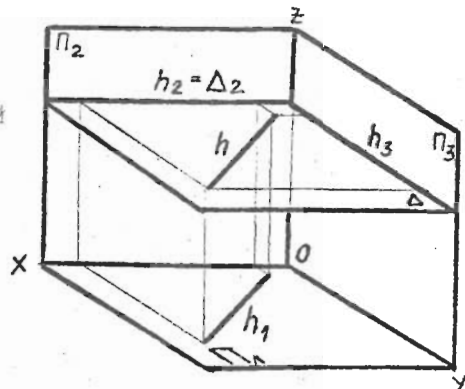


Рис.62

Горизонтальну площину рівня на рисунку можна задати одним слідом-проєкцією Δ_2 /рис.63/. Визначник площини розширюється за допомогою точок і прямих, які належать площині; точки, які розширюють визначник площини, будують аналогічно побудовам в проєкційних площинах /рис.64/.

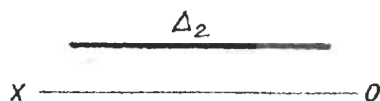


Рис.63

Необхідна умова належності прямих, точок до горизонтальної площини рівня - належність їх фронтальної проєкції сліду-проєкції площини $\Delta - \Delta_2$ /рис.62,64 /.

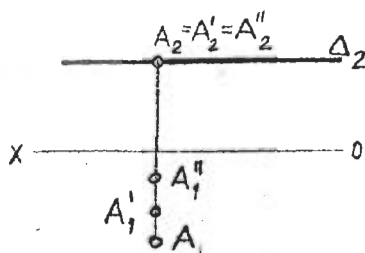


Рис.64

3.7.1.1. Лінії рівня горизонтальної площини рівня

а/Горизонталь. При побудові горизонтальної площини необхідно відмітити, що її фронтальна проекція h_2 співпадає з слідом-проекцією площини $\Delta - \Delta_2$, а горизонтальна проекція h_1 розміщується під довільним кутом до осі OX , якщо не дано додаткових умов /рис.65/.

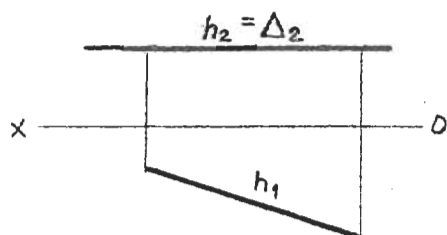


Рис.65

б/ Фронталь. Фронтальна проекція будь-якої фронталі площини співпадає з слідом-проекцією Δ_2 площини. Горизонтальна проекція фронталі паралельна осі OX /рис.66,67/ і розміщується на полі рисунку.

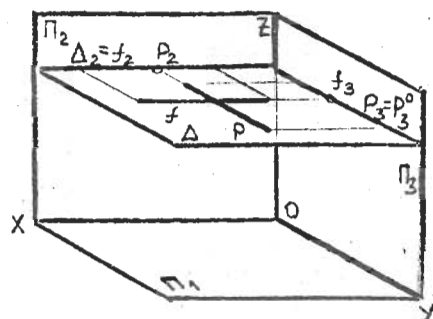


Рис.66

ДАНО: $\Delta (\Delta_2) \parallel \Pi_2$
 $? h \subset \Delta$

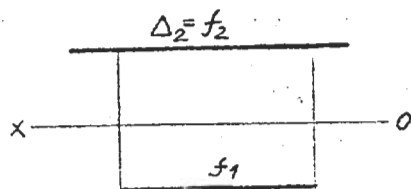


Рис.67

в/ Профільна пряма. Будь-яка пряма, яка паралельна профільній площині рівня /рис.66/, буде проєціюватися на фронтальну площину проєкцій в вигляді точки, а на горизонтальну площину проєкцій - у вигляді прямої, перпендикулярної до осі OX і розміщеної в довільному місці на полі рисунку, якщо не дано допоміжних умов /рис.66,68/.

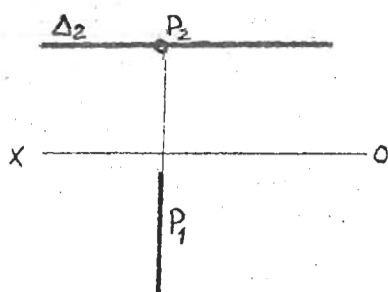


Рис.68

3.7.2. Фронтальні площини рівня

Фронтальна площина рівня складає з площинами проєкцій Π_1 і Π_3 кути α і γ , сума яких дорівнює 90° . Кут нахилу до площини проєкцій $\Pi_2 - \beta = 0$. Проєкції всіх геометричних образів, розміщених в площині, яка проєкується на фронтальну площину проєкцій в натуральну величину /рис.69/.

Фронтальну площину рівня можна зобразити на рисунку одним слідом-проєкцією - Σ_1 /рис.70/.

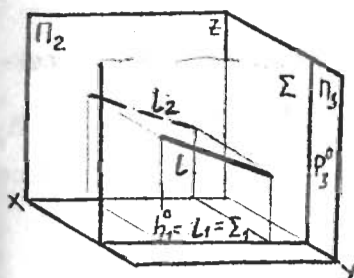


Рис.69



Рис.70

Необхідна умова належності точок і прямих фронтальній площині рівня – належність горизонтальної проекції точки, прямої чи плоскої фігури сліду-проекції площини /рис.71/.

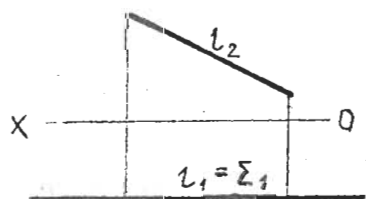


Рис.71

3.7.2.I. Лінії рівня фронтальної площини рівня

I.Горизонталь. Фронтальна проекція горизонталі фронтальної площини рівня паралельна осі OX, горизонтальна проекція співпадає з слідом-проекцією площини /рис.72/,73/.

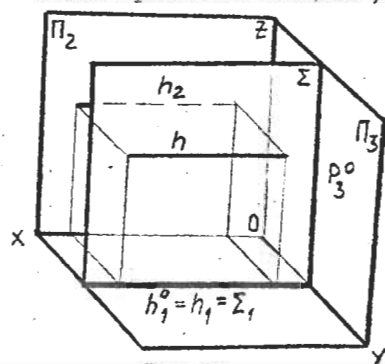


Рис.72

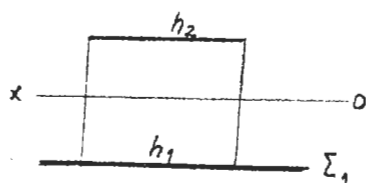


Рис.73

2. Фронталь. Горизонтальна проекція фронтальної площини паралельна фронтальній площині проекції, паралельні осі OX, її фронтальна проекція розміщується під довільним кутом до осі проекції OX, якщо не задані допоміжні умови /рис.74,75/.

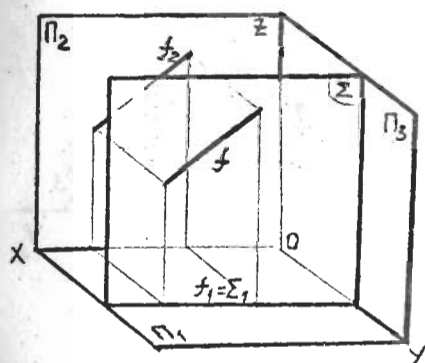


Рис. 74

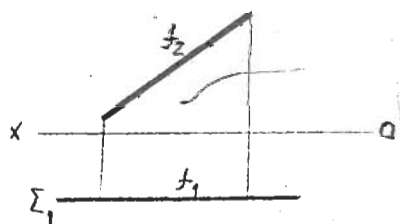


Рис. 75

3. Профільна пряма. Пряма, яка паралельна профільній площині проєкцій і розташована в фронтальній площині, є горизонтально-проєкційною прямою / фронтальна проєкція такої прямої перпендикулярна осі OX , горизонтальна проєкція – точка / (рис. 76, 77) /.

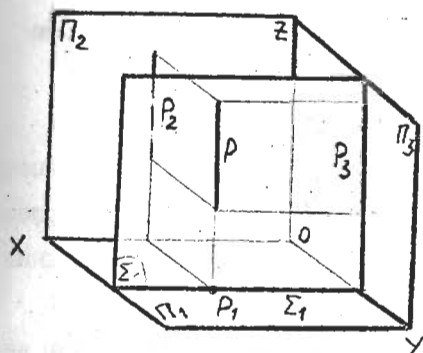


Рис. 76

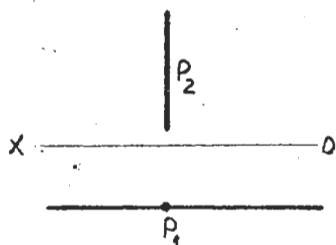


Рис. 77

3.7.3. Профільна площина рівня

Профільна площина рівня складає з площинами Π_1 і Π_2 кути α і β , сума яких 90° , кут нахилу до площини проєкцій Π_3 – γ дорівнює 0. Проєкції всіх геометричних образів, розміщених в площині, проєкціються на профільну площину проєкцій в натуральну величину, а на площини

проекцій Π_1 і Π_2 - в вигляді прямих ліній - слідів - проекцій /рис.78,79/.

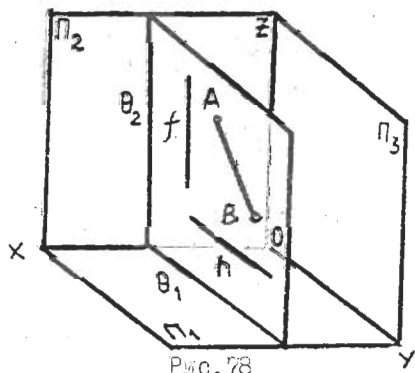


Рис.78

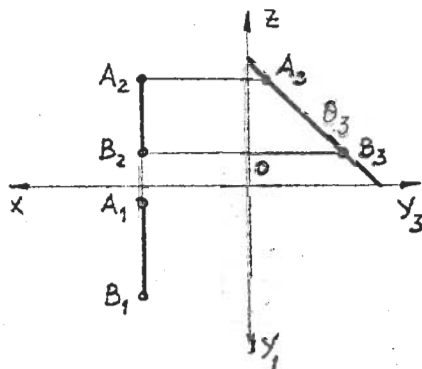


Рис.79

3.7.4. Лінії рівня профільної площини

1. Горизонталь. Горизонталь профільної площини рівня паралельна її горизонтальному сліду h^o /рис.78/. В той же час вона буде перпендикулярна до фронтальної площини проекцій і спрощається на площину проекцій Π_2 - точкою, на Π_1 і Π_3 - натуральною величиною /рис.80/.

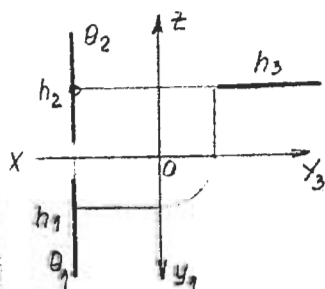


Рис.80

2. Фронталь. Фронталь профільної площини рівня паралельна фронтальному сліду f^o /рис.78/ і є прямою, перпендикулярною до горизонтальної площини проекцій. На Π_1 вона проєктується точкою, на Π_2 і Π_3 - натуральною величиною /рис.81/.

3. Профільна пряма площини θ показана на рис.78,79 у вигляді відрізка АВ. На горизонтальну і фронтальну площини проекцій вона проєктується в вигляді відрізків спотвореної величини, які співпадають з слідами-проекціями площин θ_1 і θ_2 , а на профільну площину проекцій - натураль-

ною величиною.

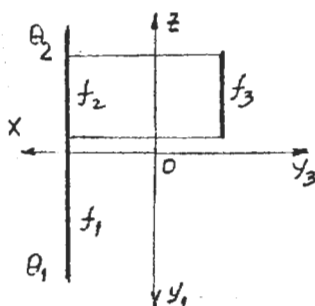


Рис.81

3.8. Обернена задача інцидентності прямої і точки площині

1. Провести площину через пряму.

2. Провести площину через точку.

Побудова площини, яка проходить через пряму

І. Площина загального положення

Задача має безліч розв'язків, тому що через пряму загального положення можна провести безліч площин загального положення і проєкційних. На рис.82 через пряму L загального положення проведена площина загального положення, яка задається прямою n , яка перетинає пряму L в точці A і довільно розміщеної. Площину загального положення яка проходить через будь-яку пряму загального положення, можна задати будь-яким визначником який задає площину /див. підрозділ 3.1/.

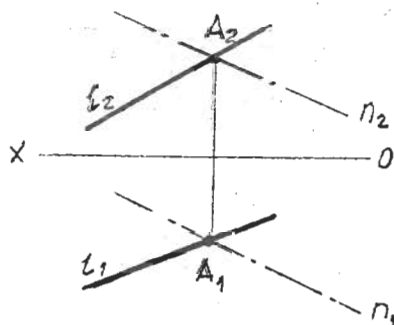


Рис.82

3. Площина проєкюча

Через пряму загального положення можна провести будь-яку проєкючу, площину. Необхідна і достатня умова належності прямої загального положення проєкціончій площині – належність однієї з проєкцій сліду-проєкції проєкціончої площини ;

а/ побудова горизонтально-проєкціончої площини, яка проходить через пряму загального положення / рис.83,84/.

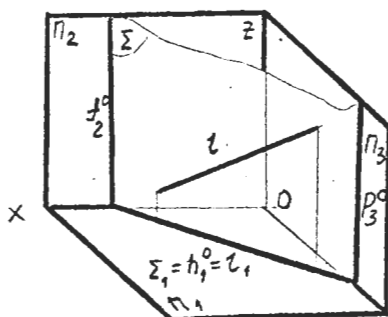


Рис.83

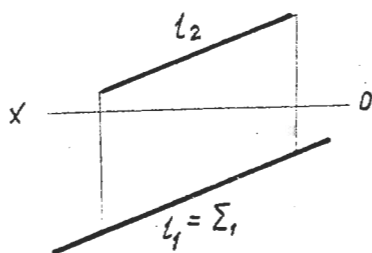


Рис.84

Слід-проєкція Σ_1 горизонтально-проєкціончої площини Σ співпадає з горизонтальною проєкцією прямої $l - l_1$;

б/ побудова фронтально-проєкціончої площини, яка проходить через пряму загального положення /рис.85,86/.

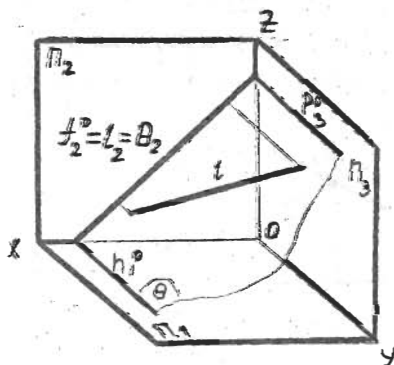


Рис.85

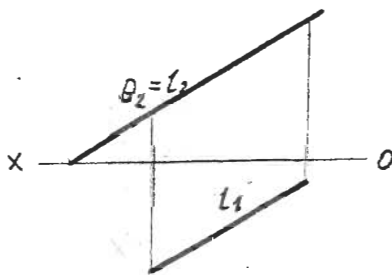


Рис.86

Слід-проекція θ_2 фронтально-проекційної площини θ співпадає з фронтальною проекцією прямої $L - L_2$;

в/ побудова профільно-проекційної площини, яка проходить через пряму загального положення /рис.87,88/.

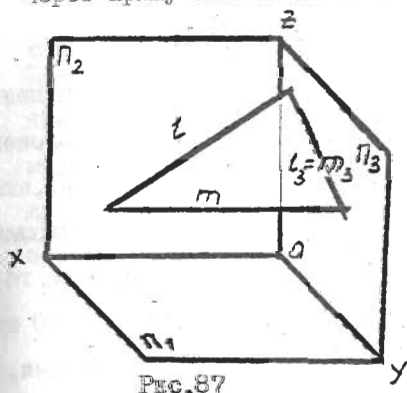


Рис.87

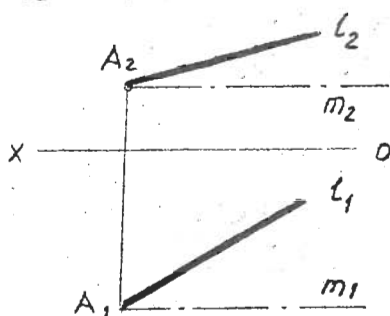


Рис.88

Для побудови профільно-проекційної площини, яка проходить через пряму L , достатньо задати ще одну пряму, яка перетинається з прямою L і перпендикулярна до площини проєкцій Π_3 .

Порядок побудови: на прямій L вибираємо довільну точку A /рис.88/, через яку проводимо пряму m перпендикулярно до площини проєкцій Π_3 . Таким чином, через пряму загального положення можна провести площини загального положення і проєкційні. Через проєктувальну пряму можна провести площину рівня і проєкційні площини.

Через пряму рівня можна провести площини загального положення, проєкційні площини і площини рівня.

3.9. Побудова плоских фігур в площинах загального положення

Побудова плоских фігур в площинах загального положення базується на використанні інцидентності прямої і точки площини загального положення.

Приклади

Дана площина загального положення $\Sigma(f^\circ \cap h^\circ)$. Побудувати горизонтальну проекцію ΔABC , яка належить площині Σ /рис.89/.

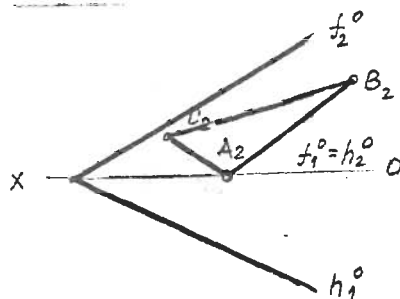


Рис.89

Через фронтальну проекцію точки $C-C_2$ проводимо фронтальну проекцію горизонталі h_2' , побудувавши горизонтальну проекцію горизонталі h_1' паралельно h_1° , визначимо горизонтальну проекцію точки C_1 /рис.90/. Побудова точки B аналогічна.

Горизонтальну проекцію точки A_1 визначаємо з умови належності її горизонтальному сліду площини h° . Так як фронтальна проекція точки A_2 належить фронтальній проекції горизонтального сліду h_2° , тоді горизонтальна проекція точки A_1 буде належати h_1° /рис.90/.

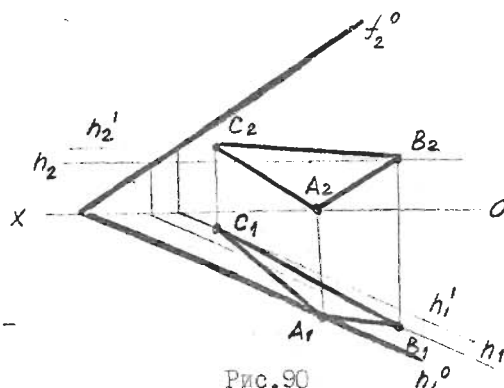


Рис.90

При побудові проекцій будь-якого многокутника необхідно звернути увагу на те, щоб не порушилась умова знаходження всіх точок даної фігури в одній площині.

На рис.91 показана горизонтальна проекція деякого п'ятикутника $ABCDE$ і фронтальні проекції A_2 трьох його вершин A, B, E .

На рис.92 показана побудова решти його вершин. Щоб точки C і D лежали в площині яка визначається точками A, B і E необхідно, щоб вони знаходились на прямих, які належать цій площині. Цими прямими є діагоналі AC, AD і BE , горизонтальні проекції яких ми можемо побудувати. На фронтальній проекції п'ятикутника можна провести тільки одну діагональ – BE . Але в площині п'ятикутника лежать і точки перетину діагоналей 1 і 2 , горизонтальні проекції яких I_1 і 2_1 , є, а фронтальні проекції маємо зразу, так як вони повинні лежати на діагоналі B_2E_2 .

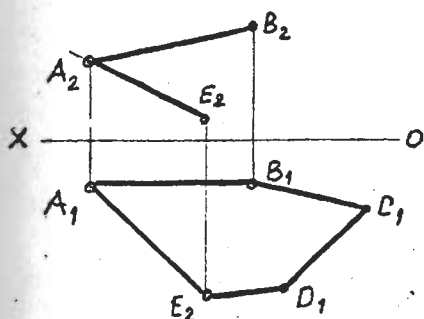


Рис.91

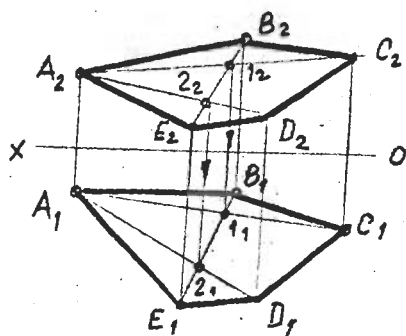


Рис.92

За двома точками будемо фронтальні проекції і інших двох діагоналей A_2I_2 і A_22_2 , на них повинні лежати точки C_2 і D_2 , які визначають за їх горизонтальними проекціями.

3.10. Про проекції плоских кутів

Якщо сторони плоского кута не паралельні площинам проєкцій, тоді плоский кут проєктується: спотворено. Якщо сторони плоского кута не однаково нахилені до площин проєкцій тоді і поділ проєкції кута навпіл не відповідає поділові прямого кута в просторі. Тому побудова бісектриси плоского кута поділом навпіл його проєкцій неможлива в загальному випадку.

Для побудови бісектриси плоского кута використовують властивість бісектриси кута рівнобедреного трикутника, згідно якому бісектриса є одночасно медіаною і висотою. Побудова медіани рівнобедреного трикутника можлива, так як пропорціональний поділ відрізка при паралельному проєкціонуванні зберігається.

3.II. Побудова бісектриси плоского кута.

Плоский кут заданий двома прямими b і h , які перетинаються. Треба побудувати бісектрису кута /рис.93/.

Для побудови бісектриси плоского кута між прямими b і h на сторонах кута будемо рівнобедрений трикутник ABC відклавши на прямих l і h рівні відрізки. На горизонтальній проєкції горизонталі h_1 від точки A_1 відкладемо відрізок довільної величини, наприклад 30 мм /рис.94/.

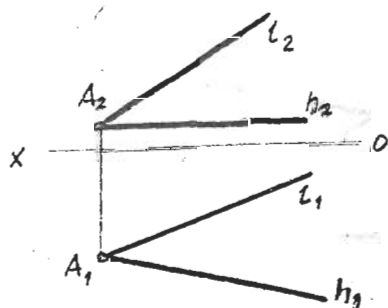


Рис.93

Маємо точку B_1 , потім будемо фронтальну проєкцію B_2 .

Для побудови на прямій l відрізка AC , довжина якого 30 мм, на прямій l виберемо довільну точку K і визначимо натуральну величину відрізка AK способом прямокутного трикутника. A_2K_0 – натуральна величина AK . Потім на A_2K_0 відкладаємо від точки A_2 відрізок, який дорівнює – 30 мм, одержуємо точку C_0 , після чого визначаємо C_2 і C_1 /рис.94/.

З'єднавши C_1 і B_1 , C_2 і B_2 , одержимо основу рівнобедреного трикутника BC . Поділивши BC навпіл точкою S і з'єднавши точку O з точкою A , одержимо медіану рівнобедреного трикутника AO і бісектрису плоского кута ABC .

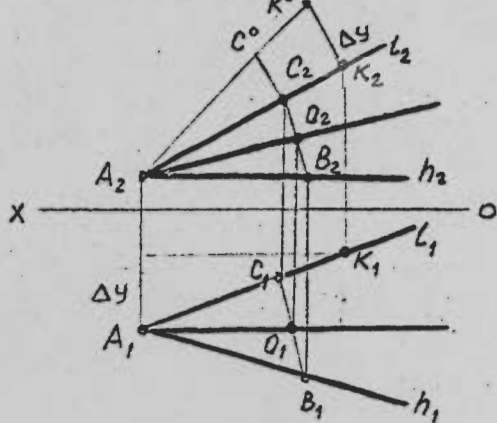


Рис. 94