Лекція 3. Теорія числових послідовностей.

§ 1. Границя числової послідовності.

1. Поняття послідовності.

В першій лекції ми назвали послідовністю функцію, визначену на множині N натурального ряду чисел. Тому значення цієї функції можуть бути пронумеровані, і послідовність – це змінна величина із пронумерованими значеннями. Будемо позначати послідовність літерами з індексами $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$, або стисло $\{x_n\}$. Символом x_n позначено **загальний член послідовності**, натуральне число n вказує номер цього члена.

У відповідності до означень послідовності і функції члени послідовності $\{x_n\}$ можуть бути об’єктами довільної множини. Наприклад, це можуть бути $n-$вимірні вектори $x \in E_n$, функції певної змінної (змінних), дійсні і комплексні числа тощо.

Послідовність **вважається заданою**, якщо вказано спосіб знаходження загального члена послідовності. Найчастіше послідовність задають формулою її загального члена. Проте числові послідовності можна задати і так званим **рекурентним** (зворотним) **способом.** Його суть полягає в тому, що задають кілька членів послідовності і далі вказують правило, за яким можна знайти наступний його член (див. приклад чисел Фібоначчі). Крім того, до послідовностей також можна віднести нескінченні арифметичну і геометричну прогресії.

В цій лекції ми будемо розглядати лише випадок, коли члени послідовності $\{x_n\}$ – це дійсні числа. В цьому випадку множина значень послідовності $\{x_n\}$ є підмножиною множини дійсних чисел. Такі послідовності називають **числовими**.

Означення. *Послідовність* $\{x_n\}$ *називається* ***сталою****, якщо вона складається з однакових елементів* $a, a, a, \ldots, a, \ldots$: $\{x_n\} = \{a, a, a, \ldots, a, \ldots\}$.

Зауваження. Різні члени числової послідовності – це числа (елементи), які можуть бути однаковими, проте обов’язково займають різні місця (номери) в послідовності.

Приклади числових послідовностей.

а). $x_n = \dfrac{1}{n}$; $\{x_n\} = \left\{\dfrac{1}{n}\right\}$, тобто послідовність має вигляд: $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \ldots, \dfrac{1}{n}, \ldots$

Множина значень цієї послідовності $\{x_n\}$ складається з раціональних чисел виду $\dfrac{1}{n}$, де $n-$цілі додатні числа.

б). $x_n = 1-(-1)^n$; $\{x_n\} = 2, 0, 2, 0, \ldots, \left[1-(-1)^n\right], \ldots$

В цьому випадку множина значень послідовності $\{x_n\}$ складається лише з двох чисел: 0 і 2. Тут ми бачимо, що різні члени послідовності (члени з різними номерами) можуть приймати однакові значення.

в). Числа Фібоначчі. Числа (або ряд) Фібоначчі описують кількість кролів, які утримуються і розмножуються в замкненому просторі без врахування їхньої смертності. Записується цей ряд у вигляді рекурентного співвідношення:

$$x_{n+1} = x_n + x_{n-1}; \quad x_1 = x_2 = 1.$$

Якщо розгорнути це співвідношення у список елементів послідовності, то дістанемо таку числову послідовність:

$$\{x_n\} = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots\}.$$

Кожен член цієї послідовності, починаючи з третього, дорівнює сумі двох попередніх. Перші два члени вважаються заданими.

2. Границя послідовності.

Перше Означення границі. *Послідовність* $\{x_n\}$ *називається* ***збіжною до числа*** x_0, *якщо для довільного числа* $\varepsilon > 0$ *існує такий номер* $N = N(\varepsilon)$, *що для всіх* $n > N(\varepsilon)$ *має місце нерівність*

$$|x_n - x_0| < \varepsilon. \tag{1}$$

В цьому випадку число x_0 називається **границею послідовності** $\{x_n\}$. Збіжність послідовності $\{x_n\}$ до числа x_0 позначається такими символами:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

або $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$.

Іншими словами, встановити, що послідовність $\{x_n\}$ є збіжною до числа x_0 – це означає вказати додатну функцію $N(\varepsilon)$, визначену для всіх $\varepsilon > 0$, яка задовольняє означення границі послідовності.

Отже, у відповідності із означенням, число x_0 є границею послідовності $\{x_n\}$, якщо при $n > N(\varepsilon)$ має місце нерівність (1), або, що є тим же самим,

$$x_0 - \varepsilon < x_n < x_0 + \varepsilon \tag{2}$$

Геометрично означення границі послідовності означає, що починаючи з номера $n > N(\varepsilon)$ всі члени послідовності $\{x_n\}$ належатимуть інтервалу (2), який називається $\varepsilon -$околом граничної точки x_0.

Друге Означення границі. Послідовність $\{x_n\}$ називають **збіжною до числа** x_0, якщо у **довільному** його $\varepsilon -$околі $|x' - x_0| < \varepsilon$, починаючи з деякого номера $n > N(\varepsilon)$, містяться **всі члени послідовності**, за виключенням **скінченного** їх числа. Тут число x_0 також називається **границею послідовності** $\{x_n\}$. Члени послідовності $\{x_n\}$, так би мовити, накопичуються у нескінченній кількості у зазначеному $\varepsilon -$околі (2).

Зауваження. Звертаємо увагу на те, що якщо означенню збіжності послідовності $\{x_n\}$ до числа x_0 задовольняє деяка функція $N(\varepsilon)$, то йому також задовольняє і будь-яка інша функція $N_1(\varepsilon)$ при умові, що $N_1(\varepsilon) > N(\varepsilon)$.

Приклади застосування означення збіжної послідовності.

а) Нехай $x_n = \dfrac{1}{n}$. Очевидно, що із зростанням номера n число x_n стає все меншим і меншим. Покладемо $x_0 = 0$ і перевіримо виконання означення збіжності.

Отже, нехай $x_0 = 0$ і $\varepsilon > 0$ – довільне дійсне додатне число. Розглянемо нерівність $|x_n - x_0| = |x_n - 0| = |x_n| = \dfrac{1}{n} < \varepsilon$. Ця нерівність буде виконуватись для всіх $n > \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$. Тому $N(\varepsilon) = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, і число $x_0 = 0$ є границею даної послідовності.

Зауваження. Тут символом $[y]$ позначено «цілу частину» числа y, тобто найбільше ціле число n, що задовольняє $n \le y$. Читається цей символ так: антьє «ігрек».

б) Нехай $x_n = (-1)^n$. Перевіримо цю послідовність на збіжність за означенням. Якщо x_0 – можлива границя цієї послідовності, то має існувати функція $N(\varepsilon)$, яка задовольняє означенню границі:

$$|x_n - x_0| < \varepsilon \text{ для довільних } n \ge N(\varepsilon) \tag{3}$$

Виберемо $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, тоді при парних n нерівність (3) буде мати вигляд:

$$|1 - x_0| < \frac{1}{2}, \text{ або } \frac{1}{2} < x_0 < \frac{3}{2},$$

а при непарних n – $|-1 - x_0| < \dfrac{1}{2}$, або $-\dfrac{3}{2} < x_0 < -\dfrac{1}{2}$.

Не існує жодного значення x_0, при якому ці дві нерівності одночасно мають силу. Тим самим ми довели, що не існує такого числа x_0 і функції $N(\varepsilon)$, які б задовольняли означення збіжності, тому задана послідовність не є збіжною.

в) (**Для СРС**). Нехай $x_n = \sin\left(\dfrac{\pi n}{2}\right), n = 0,1,2,\ldots$ Перевірити цю послідовність на збіжність за означенням.

Означення. *Послідовність, яка не є збіжною, називається **розбіжною**.*

З цього означення випливає, що для розбіжної послідовності $\{x_n\}$ не існує числа x_0 і функції $N(\varepsilon)$, визначеної при $\varepsilon > 0$, які б задовольняли означення збіжності послідовності $\{x_n\}$.

3. Деякі властивості збіжних послідовностей.

Спочатку наведемо декілька означень.

Означення 1. *Послідовність $\{x_n\}$ називається **обмеженою**, якщо множина її значень обмежена, тобто існує таке число $M > 0$, яке не залежить від n, що $|x_n| \le M$. В протилежному випадку послідовність називається **необмеженою**.*

Для необмеженої послідовності має силу твердження: для будь-якого числа $M > 0$, знайдеться такий номер n, для якого $|x_n| > M$.

Означення 2. *Послідовність* $\{x_n\}$ *називається* ***нескінченно малою****, якщо вона є збіжною і її границя дорівнює нулю, тобто* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Із цього означення випливає, що існує така функція $N(\varepsilon)$, визначена при $\varepsilon > 0$, що нерівність $|x_n| < \varepsilon$ виконується для всіх $n \geq N(\varepsilon)$.

Означення 3. *Послідовність* $\{x_n\}$ *називається* ***нескінченно великою****, якщо для довільного числа* $M > 0$ *існує такий номер* $N(M)$*, що нерівність* $|x_n| > M$ *виконується для всіх* $n > N(M)$.

Зауваження. Відмітимо, що **необмежена** послідовність не обов'язково є **нескінченно великою**. Дійсно, для нескінченно великої послідовності нерівність $|x_n| > M$ виконується для **всіх номерів** n, починаючи з деякого номера $N(M)$. Для необмеженої послідовності ця нерівність має виконуватись лише для **деяких номерів** $n \geq N(M)$. Наприклад, послідовність $\{x_n\} = \{1, 0, 2, 0, 3, 0, \ldots, n, 0, n+1, 0, \ldots\}$ є необмеженою, проте не є нескінченно великою.

Приклади: а) $x_n = \dfrac{1}{n^2}$ – обмежена нескінченно мала послідовність; б) $x_n = n$ – необмежена нескінченно велика послідовність.

Теорема 1. *Довільна збіжна послідовність* ***має тільки одну границю****.*

Доведення. Припустимо протилежне: нехай x_1, x_0 – границі одної і тої ж послідовності $\{x_n\}$ та $x_1 \neq x_0$. Отже, існують такі функції $N_0(\varepsilon)$ і $N_1(\varepsilon)$, що $|x_n - x_0| < \varepsilon$ для довільних $n \geq N_0(\varepsilon)$ і $|x_n - x_1| < \varepsilon$ при $n \geq N_1(\varepsilon)$. Виберемо $\varepsilon = \dfrac{|x_1 - x_0|}{2}$; проте одночасне виконання нерівностей $|x_n - x_0| < \dfrac{|x_1 - x_0|}{2}$ та $|x_n - x_1| < \dfrac{|x_1 - x_0|}{2}$ при $n \geq \bar{N}(\varepsilon)$, де $\bar{N}(\varepsilon) = \max\{N_0(\varepsilon), N_1(\varepsilon)\}$ неможливе через те, що

$$|x_1 - x_0| = |x_1 - x_n + x_n - x_0| \leq |x_1 - x_n| + |x_n - x_0| < |x_1 - x_0|.$$

Дійшли протиріччя, звідки випливає, що $x_1 = x_0$, і **Теорему** доведено.

Сформулюємо **необхідну умову збіжності послідовності** у вигляді Теореми.

Теорема 2. ***Збіжна послідовність*** $\{x_n\}$ ***обмежена****.*

Доведення. Нехай x_0 – границя послідовності $\{x_n\}$. Вибираємо $\varepsilon > 0$ довільним чином. В силу означення границі послідовності існує такий номер $N(\varepsilon)$, що при всіх $n > N(\varepsilon)$ має місце нерівність $|x_n - x_0| < \varepsilon$, звідки при $n > N(\varepsilon)$ отримаємо нерівність: $|x_n| \le |x_0| + |x_n - x_0| < |x_0| + \varepsilon$.

Покладемо $M = \max\{|x_0| + \varepsilon, |x_1|, |x_2|, \ldots, |x_N|\}$. Очевидно, що при всіх $n > N(\varepsilon)$ маємо обмеження: $|x_n| \le M$. Отже, послідовність $\{x_n\}$ обмежена, що і потрібно було довести.

Зауваження 1. Обернене твердження цієї Теореми **не має сили**, тобто з обмеженості послідовності не випливає її збіжність. Наприклад, послідовність $x_n = \sin\left(\dfrac{\pi n}{2}\right)$, $n = 0,1,2,\ldots$ є обмеженою, проте розбіжною.

Зауваження 2. Обмеженість послідовності $\{x_n\}$ – це **необхідна, але не достатня** умова для її збіжності.

Теорема 3 (про границю суми, різниці, добутку і частки).

Припустимо, що послідовності $\{x_n\}$ *і* $\{y_n\}$ *є збіжними, тобто* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ *і* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$. *Тоді збіжними є такі послідовності:*

$$\{Cx_n\},\ \{x_n \pm y_n\},\ \{x_n \cdot y_n\},\ \left\{\frac{x_n}{y_n}\right\},\ \text{де } C - \text{стала величина,}$$

причому остання послідовність розглядається при $y_0 \ne 0$, $y_n \ne 0$ *при* $n = 1,2,3,\ldots$ *Тоді їхні границі обчислюються за формулами*:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} Cx_n = C\lim\limits_{n\to\infty} x_n = Cx_0$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n = x_0 \pm y_0$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n = x_0 \cdot y_0$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right) = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \dfrac{x_0}{y_0}$, ($y_0 \ne 0$, $y_n \ne 0$).

Довести справедливість кожної з цих формул – означає встановити функцію $N(\varepsilon)$, яка міститься в означенні границі цих послідовностей.

Доведення. Нехай $N_1(\varepsilon)$ і $N_2(\varepsilon)$ є такими, що

$$|x_n - x_0| < \varepsilon \text{ при } n \geq N_1(\varepsilon) \text{ і } |y_n - y_0| < \varepsilon \text{ при } n \geq N_2(\varepsilon).$$

Для доведення справедливості **твердження а)** потрібно показати, що існує така функція $N(\varepsilon)$, що при $\varepsilon > 0$ і $n \geq N_1(\varepsilon)$

$$|Cx_n - Cx_0| = |C| \cdot |x_n - x_0| = |C| \cdot \varepsilon .$$

Покладемо $N(\varepsilon) = N_1\left(\dfrac{\varepsilon}{|C|}\right)$, звідки дістанемо доведення правила а).

Доведемо справедливість **твердження б).** Покладемо

$$N(\varepsilon) = \max\left\{N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right); N_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right\}.$$

Нехай $n \geq N(\varepsilon)$. Тоді

$$\left|(x_n \pm y_n) - (x_0 \pm y_0)\right| \leq |x_n - x_0| + |y_n - y_0| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon ,$$

і **твердження б) доведено**.

Доведемо справедливість твердження в). Отже, маємо:

$$|x_n y_n - x_0 y_0| = \left|(x_n - x_0) y_n - x_0 (y_0 - y_n)\right| \leq \left|(x_n - x_0) y_n\right| + \left|x_0 (y_n - y_0)\right|.$$

Через те, що послідовність $\{y_n\}$ є збіжною, то за **Теоремою 2 вона є обмеженою**, тобто існує таке число M, що $|y_n| < M$ при $n = 1, 2, 3, \ldots$ Збільшуючи, якщо потрібно, число M, доб'ємося, щоби $|x_0| \leq M$. Тоді, поклавши

$$N(\varepsilon) = \max\left\{N_1\left(\frac{\varepsilon}{2M}\right); N_2\left(\frac{\varepsilon}{2M}\right)\right\},$$

дістанемо при $n \geq N(\varepsilon)$ наступні нерівності $|x_n - x_0| < \dfrac{\varepsilon}{2M}$, $|y_n - y_0| < \dfrac{\varepsilon}{2M}$; тому

$$|x_n y_n - x_0 y_0| \leq |y_n||x_n - x_0| + |x_0||y_n - y_0| < M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon$$

для всіх $n \geq N(\varepsilon)$, і **твердження в) доведене**.

Доведемо останнє **твердження г).** Спочатку покажемо, що $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{y_n} = \dfrac{1}{y_0}$. За означенням границі довільно виберемо число $\varepsilon = \dfrac{|y_0|}{2}$ і за ним знайдемо такий номер

$N_1(\varepsilon)$, що при $n \ge N_1(\varepsilon)$ має місце нерівність: $|y_n - y_0| < \frac{|y_0|}{2}$. Звідси випливає, що при $n \ge N_1(\varepsilon)$ справедливі такі нерівності:

$$|y_n| = |y_0 + (y_n - y_0)| \ge |y_0| - |y_n - y_0| > |y_0| - \frac{|y_0|}{2} = \frac{|y_0|}{2}.$$

Для довільного числа $\varepsilon > 0$ знайдемо такий номер $N_2(\varepsilon)$, що при $n > N_2(\varepsilon)$ $|y_n - y_0| < \varepsilon \frac{|y_0|^2}{2}$. Покладемо $N(\varepsilon) = \max\{N_1, N_2\}$ і при $n > N(\varepsilon)$ маємо:

$$\left| \frac{1}{y_n} - \frac{1}{y_0} \right| = \frac{|y_n - y_0|}{|y_n||y_0|} < \frac{2}{|y_0|^2} \cdot \varepsilon \cdot \frac{|y_0|^2}{2} = \varepsilon.$$

Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = \frac{1}{y_0}$. І остаточно формула **г)** випливає з формули **в)** у такий спосіб: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = \frac{x_0}{y_0}$. **Теорему доведено**.

Наведемо **три простих** але **важливих твердження**, доведення яких читач легко проведе самостійно (**Для СРС**!).

а) Якщо послідовності $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ мають спільну границю $x_0 = y_0$, то послідовність $\{z_n\} = \{x_n - y_n\}$ є нескінченно малою.

б) Якщо послідовність $\{x_n\}$ є нескінченно малою, а $\{y_n\}$ – довільна обмежена послідовність, то послідовність $\{z_n\} = \{x_n \cdot y_n\}$ також є нескінченно малою послідовністю. В частинному випадку, нескінченно малою послідовністю буде $\{z_n\} = \{Cx_n\}$, де $C -$ стала величина.

в) Якщо послідовність $\{x_n\}$ є збіжною до числа x_0, то послідовність $\{\alpha_n\} = \{x_n - x_0\}$ є нескінченно малою.

Теорема 4. (**Теорема порівняння**). Нехай задані послідовності $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$.

а) Тоді, якщо $x_n \le y_n$ ($x_n \ge y_n$) при $n \ge N_0$ і послідовності $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ є збіжними, то

$$\lim_{n\to\infty} x_n \le \lim_{n\to\infty} y_n \quad (\lim_{n\to\infty} x_n \ge \lim_{n\to\infty} y_n).$$

б) Якщо послідовності $\{x_n\}$ і $\{z_n\}$ є збіжними, мають спільну границю $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$, і $x_n \le y_n \le z_n$ при $n \ge N_0$, то послідовність $\{y_n\}$ також є збіжною; при цьому границі всіх трьох послідовностей співпадають:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n$$ (**теорема про двох поліцейських**).

Доведення. а) Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$. Припустимо протилежне, тобто $x_0 > y_0$. В силу збіжності послідовностей $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ для довільно вибраного $\varepsilon = (x_0 - y_0)/2$ можна знайти такі номери $N_1(\varepsilon)$ і $N_2(\varepsilon)$, що при $n > N_1(\varepsilon)$ виконується нерівність $|x_n - x_0| < (x_0 - y_0)/2$, а при $n > N_2(\varepsilon)$ виконується нерівність $|y_n - y_0| < (x_0 - y_0)/2$. Оберемо

$$N = \max\left\{N_1\left(\frac{(x_0 - y_0)}{2}\right), N_2\left(\frac{(x_0 - y_0)}{2}\right)\right\},$$

тоді при $n > N$ дістанемо:

$$x_n - y_n = (x_n - x_0) - (y_n - y_0) + (x_0 - y_0) \ge -|x_n - x_0| - |y_n - y_0| + (x_0 - y_0) >$$

$$> -\frac{(x_0 - y_0)}{2} - \frac{(x_0 - y_0)}{2} + (x_0 - y_0) = 0,$$

тобто $x_n > y_n$, що входить у протиріччя з умовами **Теореми**, і твердження а) доведене.

б) Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = x_0$. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ знайдуться такі номери $N_1(\varepsilon)$ і $N_2(\varepsilon)$, що $|x_n - x_0| < \varepsilon$ при $n \ge N_1(\varepsilon)$ і $|z_n - x_0| < \varepsilon$ при $n \ge N_2(\varepsilon)$.

Звідси, зокрема, випливає, що $x_0 - \varepsilon < x_n$ і $z_n < x_0 + \varepsilon$ при $n > N_3(\varepsilon) = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$. В силу умов **Теореми** виконуються нерівності

$$x_0 - \varepsilon < x_n \le y_n \le z_n < x_0 + \varepsilon \text{ або } |y_n - x_0| < \varepsilon \text{ при } n > N = \max\{N_0, N_3\}.$$

Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x_0$. Теорему доведено.