Лекція №7 (перша частина – для СРС).
Функція однієї дійсної змінної. Границя функції. Неперервні функції.

1. Функція однієї дійсної змінної: основні поняття і означення. Способи задання функцій.

Величина – є одне з основних понять математики. Якщо в деякому процесі величина набуває однакових числових значень, її називають **сталою**, а якщо різних значень, то ця величина називається **змінною**.

Деякі величини пов'язані між собою таким чином, що зміна одних приводить до зміни інших. Такий взаємозв'язок виражається за допомогою функцій.

В першій лекції було введене поняття функції як відображення f певної множини A у (на) множину B. В цій лекції ми будемо розглядати функції $y = f(x)$, у яких $B-$це множина всіх дійсних чисел R_1, а $A-$деяка підмножина множини дійсних чисел R_1. Такі функції називаються числовими функціями дійсної змінної x. Як множина A часто буде виступати проміжок P. Нагадаємо, які числові проміжки використовуються в математичному аналізі.

Нехай a і b – дійсні числа і виконується умова $a < b$. Множини $(a;b)$,, $[a;b]$, $(a;b]$, $(-\infty;b]$, $[a;b)$, $[a;+\infty)$, $(-\infty;+\infty)$, $(-\infty;b)$, $(a;+\infty)$ – називаються **числовими проміжками** P, причому:

- $[a;b]$ – *відрізок;*
- $(-\infty;+\infty)$, $(-\infty;b)$, $(a;+\infty)$ – *інтервали*;
- $(a;b]$, $(-\infty;b]$, $[a;b)$, $[a;+\infty)$, – *півінтервали.*

Означення функції однієї змінної. Якщо кожному числу x з деякої множини D дійсних чисел за певним правилом поставлене у відповідність єдине число y, то кажуть, **що** y **є функцією від** x і пишуть $y = f(x)$. Змінна x називається незалежною змінною або аргументом. Під символом f розуміють ті операції, які треба виконати над аргументом x, щоб дістати відповідне значення функції. Множина D називається **областю визначення** функції. Множина E усіх чисел y таких, що $y = f(x)$ для $\forall\, x \in D,$ називається **множиною значень** функції.

Графіком функції $y = f(x)$ є множина точок $M(x, f(x))$ на площині OXY, а $x \in D$.

Основні способи задання функції такі: **аналітичний, графічний, табличний**.

При **аналітичному** способі задання функції відповідність між аргументом і функцією задається формулою (аналітичним виразом), де зазначено, які дії потрібно виконати над значенням аргументу та сталими числами, щоб дістати відповідне значення функції. Якщо при цьому область визначення не вказується, то під останньою розуміють область існування функції – множину всіх дійсних значень аргументу, для яких аналітичний вираз має зміст.

При **графічному способі** задання функції $y = f(x)$ відповідність між x та y задається графіком – множиною точок $M(x; y)$ площини, прямокутні координати яких задовольняють рівність $y = f(x)$. Залежно від того, яку функцію задано, її графік може складатись з однієї суцільної лінії, кількох ліній, дискретної множини точок площини тощо. Графічним способом задання функції широко користуються при дослідженнях, пов'язаних з використанням таких самописних приладів, як барограф (для запису атмосферного тиску), осцилограф (для запису зміни електричного струму або напруги), електрокардіограф (для запису характеристик діяльності серця), термограф (для запису зміни температури повітря) тощо. Криві (їх називають відповідно барограма, осцилограма, електрокардіограма, термограма), що їх виписують прилади, задають цілком певну функцію, властивості якої характеризують перебіг того чи іншого процесу. Зазначені графіки функцій можна спостерігати на моніторах комп'ютерів. У математиці графіками широко користуються для геометричного зображення функцій, навіть тоді, коли ці функції задані аналітично.

Табличний спосіб задання функції $y = f(x)$ полягає в тому, що відповідність між змінними x та y задається у вигляді таблиці.

Табличний спосіб використовується при проведенні експериментів, коли задають певну сукупність $x_1, x_2, \ldots, x_n$ значень аргументу і дослідним шляхом знаходять відповідні значення функції $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Якщо функція задана аналітично, то для неї можна побудувати таблицю, тобто табулювати функцію. Табулюються, як правило, функції, які виражаються складною формулою, але часто зустрічаються в практиці. Виникає закономірне питання: чи завжди можна від табличного задання функції перейти до аналітичного, тобто чи можна функцію, задану таблично, задати формулою? Щоб відповісти на нього, зауважимо, що таблиця дає не всі значення функції. Проміжні її значення, які не входять у задану таблицю, можна знайти наближено за допомогою так званої операції **інтерполювання функції**. Тому в загальному випадку знайти точний аналітичний вираз функції за таблицею неможливо. Проте можна побудувати формулу, причому не одну, яка для значень x_i, що є в таблиці, буде давати відповідні значення y_i функції. Такі формули називаються **інтерполяційними**.

2. Класифікація елементарних функцій. Суперпозиція функцій.

Основними **елементарними функціями** є степенева, показникова, логарифмічна, тригонометричні та обернені тригонометричні функції.

1. *Степенева функція*: $y = x^{\alpha}$, $\alpha \in R_1$ (рис. 1, а) – функція $y = x^2$; б) – функція $y = x^3$).
2. *Показникова функція*: $y = a^x$, $a > 0, a \neq 1$ (рис. 2).
3. *Логарифмічна функція*: $y = \log_a x$ (рис. 3).
4. *Тригонометричні функції*: $y = \sin x, y = \cos x, y = tgx, y = ctgx$.
5. *Обернені тригонометричні функції*:

$$y = \arcsin x, y = \arccos x, y = arctgx, y = arcctgx.$$

Графіки основних елементарних функцій треба пам’ятати. Перетворюючи їх, можна дістати графіки багатьох інших функцій.

Нехай графік функції $y = f(x)$ відомий. Тоді графік функції $y = f(x) + b$ отримаємо з графіка функції $y = f(x)$ паралельним перенесенням останнього вздовж осі OY вверх (вниз) на b одиниць при $b > 0 (b < 0)$, а графік функції $y = f(x - a)$ – вздовж осі OX вправо (вліво) на a одиниць при $a > 0 (a < 0)$. Графік функції $y = cf(x)$, ($c \neq 0$) дістанемо з графіка функції $y = f(x)$ за допомогою стискування в $\frac{1}{c}$ разів $(0 < c < 1)$ ординат графіка, а при $c > 1$ – розтягування в c разів його ординат, причому значення відповідних абсцис зберігаються. Графік функції $y = f(kx)$, $(k \neq 0)$ отримаємо з графіка функції $y = f(x)$ збільшенням в $\frac{1}{k}$ разів $(0 < k < 1)$ абсцис його точок, а при $k > 1$ – зменшенням в k разів абсцис графіка функції $y = f(x)$.

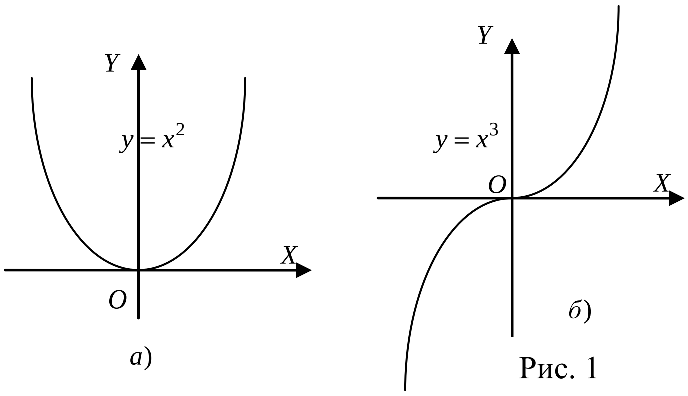

Рис. 1

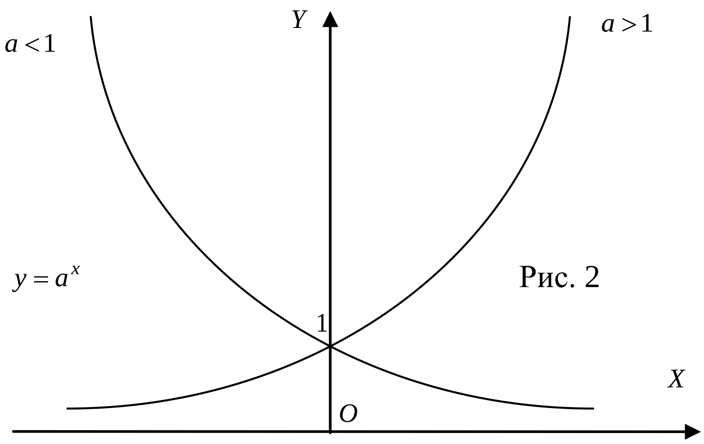

Рис. 2

Над функціями виконують і так звану операцію **суперпозиції**, або **накладання**. Нехай функція $y = f(u)$ визначена на множині A, а функція $u = \phi(x)$ – на множині B, причому для кожного значення $x \in B$ існує відповідне значення $u = \phi(x) \in A$. Тоді на множині B визначена функція $y = f(\phi(x))$, яку називають **складеною функцією** від x, або **суперпозицією заданих функцій**, або **функцією від функції**.

Змінну x називають **кінцевим аргументом**, змінну $u=\phi(x)$ – **проміжним аргументом**, або **внутрішньою функцією**, а змінну $y=f(u)$ **зовнішньою функцією**.

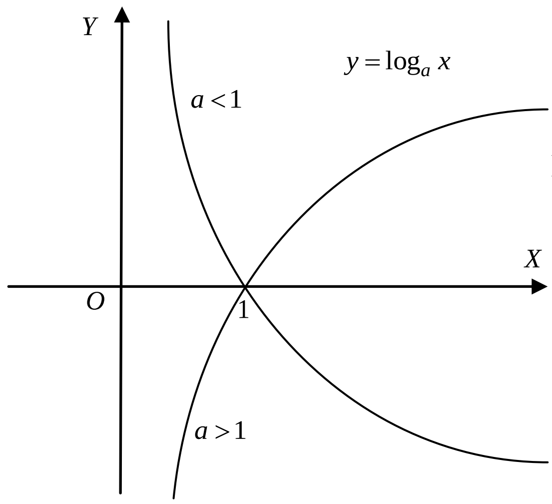

Рис. 3

3. Основні властивості функцій.

а). *Обмежені функції*. Функцію $y=f(x)$, визначену на множині X, називають **обмеженою** на цій множині, якщо існує таке число $M>0$, що для всіх $x\in X$ виконується нерівність $|f(x)|<M$. Графік функції $y=f(x)$ лежить між прямими $y=-M$ і $y=M$.

б). *Монотонні функції*. Нехай функція $y=f(x)$ визначена на множині X і задано точки $x_1, x_2\in X$, причому $x_1<x_2$.

Означення. Функція називається **зростаючою**, якщо $f(x_1)<f(x_2)$, і **спадною,** якщо $f(x_1)>f(x_2)$. Якщо $f(x_1)\le f(x_2)$, то функція називається **неспадною**, а при $f(x_1)\ge f(x_2)$ – **незростаючою**.

Зростаючі, незростаючі, спадні, неспадні функції на множині X називаються **монотонними** на цій множині, а зростаючі і спадні – **строго монотонними**.

Означення. Проміжки, які не перетинаються і на яких функція $y=f(x)$ монотонна, називаються **проміжками монотонності**.

в). ***Парні і непарні функції***. Нехай функція $y=f(x)$ визначена на множині X точок осі OX, розміщених симетрично відносно точки $x=0$, тобто якщо $x\in X$, то і $-x\in X$.

Функцію $y = f(x)$ називають **парною**, якщо $f(-x) = f(x)$, $x \in X$, і **непарною**, якщо $f(-x) = -f(x)$, $x \in X$. Графік парної функції є симетричним відносно осі OY, а непарної – відносно початку координат. Наприклад, функція $y = \dfrac{x^2+1}{x^4+4}$ є парною функцією, а функція $y = \operatorname{tg} x$ – непарною.

г). ***Періодичні функції***. Функція $y = f(x)$, визначена на всій числовій прямій (осі), називається **періодичною**, якщо існує таке число T, що $f(x+T) = f(x)$. Число T називається **періодом** функції. Якщо T – період функції, то її періодами також є числа kT, де $k = \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$. **Найменший** з додатних періодів функції, якщо такий існує, називається **основним періодом** функції.

Означення. Функція $y = f(x)$, визначена на множині X, називається **періодичною на цій множині**, якщо існує таке число $T \neq 0$, що $x + T \in X$, $f(x+T) = f(x)$, $x \in X$.

З цього означення випливає, що для побудови графіка періодичної функції із періодом $T \neq 0$ досить побудувати її графік на довільному проміжку довжини T, а потім продовжити цей графік на всю область визначення, повторюючи його через кожний проміжок довжини T. Наприклад, функція $y = \sin x$ є періодичною з періодом $T = 2\pi$.

Періодичні функції відіграють важливу роль для математичного опису періодичних явищ, що спостерігаються в природі. Характерною особливістю цих явищ є періодичне повторення їх через певні проміжки часу. Прикладами можуть бути рух маятника навколо осі, рух небесних тіл (планети рухаються по еліптичних орбітах), робота майже всіх машин і механізмів пов’язана з періодичним рухом їхніх елементів (рух поршнів, шатунів тощо).

д). ***Неявно задані функції.*** Якщо функція задана рівнянням $y = f(x)$, розв’язаним відносно залежної змінної y, то кажуть, що **функція задана у явній формі** або є явною.

Під неявним заданням функції розуміють задання функції у вигляді рівняння $F(x, y) = 0$, не розв’язаного відносно залежної змінної y. Довільну явно задану функцію $y = f(x)$ можна записати як неявно задану рівнянням $y - f(x) = 0$, але не навпаки. Наприклад, функцію $e^y - \ln x + \sin y = 0$ явно записати не можна, бо це рівняння не можна розв'язати відносно y. Тому неявна форма запису функції більш загальна, ніж явна. Неявно задану функцію називають **неявною**.

Зауваження 1. Терміни **«явна функція» і «неявна функція»** характеризують не природу функції, а аналітичний спосіб її задання.

е). ***Обернені функції***. Нехай задана функція $y = f(x)$ з областю визначення X і множиною значень Y. Функція $y = f(x)$ називається **однозначною**, якщо кожному значенню $x_0 \in X$ ставиться у відповідність єдине значення $y_0 \in Y$. Додатково вимагатимемо, щоб функція $y = f(x)$ різним значенням x ставила у відповідність різні значення y. Тоді кожному значенню $y \in Y$ відповідатиме єдине значення $x \in X$, тобто можна визначити функцію $x = \phi(y)$ з областю визначення Y і множиною значень X. Ця функція називається **оберненою функцією** до даної.

Отже, функція $x = \phi(y)$ є оберненою до функції $y = f(x)$, якщо:

1) областю визначення функції ϕ є множина значень функції f;
2) множина значень функції ϕ є областю визначення функції f;
3) кожному значенню змінної $y \in Y$ відповідає єдине значення змінної $x \in X$.

З цього випливає, що кожна з двох функцій $y = f(x)$ і $x = \phi(y)$ може бути названа прямою або оберненою, тобто ці функції **взаємно обернені**.

Графіки взаємно обернених функцій $y = f(x)$ і $y = \phi(x)$ симетричні відносно бісектриси першого і третього координатних кутів. Щоб знайти функцію $x = \phi(y)$, обернену до $y = f(x)$, достатньо розв'язати рівняння $f(x) = y$ відносно змінної x, і зробити заміну $x \Leftrightarrow y$. Наприклад, для функції $y = 2x + 5$ оберненою є функція $y = \dfrac{x-5}{2}$, а для функції $y = x^2$ оберненою є функція $y = \sqrt{x}$.

є). **Параметрично задані функції**. Нехай задано дві функції

$$x = \phi(t),\ y = \psi(t) \tag{1}$$

однієї незалежної змінної t, які визначені на одному й тому самому проміжку. Якщо функція $x=\phi(t)$ строго монотонна, то вона має обернену функцію $t=\Phi(x)$. Тому змінну y можна розглядати як складену функцію від x: $y=\psi\left(\Phi(x)\right)$.

Задання функціональної залежності між x і y у вигляді двох функцій (1) називають **параметричним заданням** функцій. Допоміжна змінна t при цьому називається **параметром**.

Зауваження 2. Всяка параметрично задана функція (1) визначає на площині OXY деяку криву. Обернене твердження не має сили.