Лекція №7 (друга частина).

Границя функції. Три означення границі функції, їхня еквівалентність. Критерій Коші існування границі функції. Односторонні границі. Нескінченно великі і нескінченно малі. Властивості нескінченно малих.

1. Два означення границі функції (Гейне і Коші), їхня еквівалентність. Критерій Коші існування границі функції.

Нехай $y = f(x)$ – деяка числова функція, визначена на підмножині X множини дійсних чисел та x_0 – деяка гранична точка множини X. Нагадаємо важливу особливість будь-якої **граничної точки:** в довільному її ε – околі $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ міститься нескінченне число точок множини X, проте сама точка x_0 може і не належати множині X.

Перше Означення границі функції (Гейне). Число A називається **границею функції** $y = f(x)$ **у точці** x_0, якщо для довільної, збіжної до x_0, послідовності $\{x_n\}$, де $x_n \in X$, $x_n \neq x_0$, послідовність зі значень функції $\{f(x_n)\}$ має границю, яка дорівнює числу $\boldsymbol{A}$.

Це означення границі **належить Гейне** і його називають **означенням границі на мові послідовностей**. Стисло воно записується так: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A.$

Отже, якщо для **довільних**, збіжних до x_0, послідовностей $\{x_n\}$ існує одна і та сама границя $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, то ця границя і буде границею функції $f(x)$ в точці x_0. Якщо ж для деякої хоча б однієї послідовності $\{x'_n\} \subset X$, $x'_n \neq x_0$, збіжної до x_0, послідовність зі значень функції $\{f(x'_n)\}$ границі не має, то функція $f(x)$ не має границі в точці x_0.

Аналогічно функція $f(x)$ також не має границі в точці x_0, якщо для двох різних, але збіжних до x_0, послідовностей $\{x'_n\}$ і $\{x''_n\}$ відповідні послідовності зі значень функції $\{f(x'_n)\}$ і $\{f(x''_n)\}$ мають різні границі.

Теорема. *Якщо функція $f(x)$ має границю $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, то ця границя одна-єдина.*

Доведення. Зробимо протилежне припущення. Нехай у функції $f(x)$ в точці x_0 існують дві різні границі A і A' ($A \neq A'$). Виберемо будь-яку послідовність $\{x_n\} \subset X, x_n \neq x_0$, яка є збіжною до числа x_0. В силу **Першого Означення границі (за Гейне)** відповідна послідовність значень функції $\{f(x_n)\}$, з одного боку, має бути збіжною до числа A, а з іншого – до числа A', причому $A \neq A'$. А це неможливо через те, що будь-яка збіжна числова послідовність може мати тільки одну границю. **Теорему доведено**.

Наслідок. Функція $f(x)$ може мати в точці x_0 тільки одну границю. Це випливає з того, що кожна змінна величина x може мати лише одну границю. Але одну і ту саму границю A в точці $x = x_0$ може мати нескінченна множина функцій.

Геометричний зміст границі функції: співвідношення $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ означає, що для всіх точок x, досить близьких до точки x_0, відповідні значення функції будуть як завгодно мало відрізнятися від точки A.

Дамо **друге**, рівносильне, **означення границі** функції в точці x_0. Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякому околі X точки x_0, крім, можливо, самої точки x_0.

Друге Означення границі функції (Коші). Число A **називається границею функції $y = f(x)$ в точці** x_0, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що для всіх $x \in X$, які задовольняють нерівність $0 < |x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. За допомогою кванторів друге означення границі функції в точці x_0 можна записати так:

$$\left(\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\right) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

Це означення границі належить **Коші** і його називають **означенням границі на мові "$\varepsilon - \delta$".**

Суть цих двох означень **границі функції** одна: як тільки незалежна змінна x наближається до своєї границі x_0 (тобто стає дуже «**близькою**» до точки x_0), так одразу і відповідне значення функції $f(x)$ стає як завгодно «**близьким**» до своєї границі – числа A.

Теорема. *Два Означення границі функції за Гейне і за Коші* ***є еквівалентними***.

Доведення. Еквівалентність двох тверджень Т1 і Т2 означає наступне: якщо має силу твердження Т1, то вірним є твердження Т2, і навпаки, якщо має силу твердження Т2, то вірним є твердження Т1.

1). Отже, нехай число A є границею функції $f(x)$ при $x \to x_0$ за **Означенням Коші**. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що для всіх $x \in X$, які задовольняють нерівність $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. Нехай $\{x_n\} \subset X, x_n \neq x_0$ – будь-яка числова послідовність, яка є збіжною до числа x_0. Із означення границі послідовності випливає, що для $\delta = \delta(\varepsilon)$ можна знайти такий номер $N(\delta)$, що при всіх $n > N$ матимуть місце нерівності $0 < |x_n - x_0| < \delta(\varepsilon)$. Але тоді в силу умови $|f(x) - A| < \varepsilon$ для послідовності $\{f(x_n)\}$ мають виконуватись нерівності $|f(x_n) - A| < \varepsilon$ при всіх номерах $n > N$, тобто $f(x_n) \to A$. Отже, число A є границею функції $f(x)$ при $x \to x_0$ і в сенсі **Означення границі за Гейне**.

2). Нехай тепер число A є границею функції $f(x)$ при $x \to x_0$ в сенсі **Означення границі за Гейне**. Покажемо, що число A є границею функції $f(x)$ при $x \to x_0$ в сенсі **Означення границі за Коші.**

Зробимо протилежне припущення, а саме, нехай число A не є границею функції $f(x)$ при $x \to x_0$ в сенсі **Означення границі за Коші**. Це означає, що існує таке число $\varepsilon > 0$, що для $\delta > 0$ довільного можна знайти таке число $x \in X$, яке задовольняє нерівність $0 < |x - x_0| < \delta$, що $|f(x) - A| \geq \varepsilon$.

Виберемо послідовність $\{\delta_n\}$, ($\delta_n > 0$), яка є збіжною до нуля. Для кожного δ_n існує таке $x_n \in X$, що $0 < |x_n - x_0| < \delta_n$, тим не менше, $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon$. Із нерівності $0 < |x_n - x_0| < \delta_n$ випливає, що $x_n \to x_0$ (через те, що $\delta_n \to 0$), а з $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon$ випливає, що послідовність $\{f(x_n)\}$ не збігається до числа A, тобто $f(x_n) \not\to A$. Це вступає у протиріччя з тим, що число A є границею функції $f\left(x\right)$ при $x \to x_0$ в сенсі **Означення границі за Гейне**. **Теорему доведено**.

Теорема (Критерій Коші). *Для того, щоби існувала границя функції* $f\left(x\right)$ *при* $x \to x_0$, ***необхідно і достатньо****, щоби для довільного числа* $\varepsilon > 0$ *знайшлося таке число* $\delta = \delta\left(\varepsilon\right) > 0$*, що для будь-яких* $x, x' \in X$*, які задовольняють нерівності* $0 < \left|x - x_0\right| < \delta(\varepsilon)$ *та* $0 < \left|x' - x_0\right| < \delta(\varepsilon)$*, виконувалась би нерівність* $\left|f\left(x\right) - f(x')\right| < \varepsilon$.

Доведення. **1) Необхідність.** Нехай існує границя функції $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$. З цього твердження нам потрібно вивести умову Коші.

Отже, за **Другим Означенням границі (за Коші)** для довільно обраного числа $\varepsilon > 0$ можна знайти таке число $\delta(\varepsilon) > 0$, що для будь-яких $x, x' \in X$, які задовольняють нерівності $0 < \left|x - x_0\right| < \delta(\varepsilon)$ та $0 < \left|x' - x_0\right| < \delta(\varepsilon)$ для аргументів, одразу виконуються нерівності $\left|f\left(x\right) - A\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ та $\left|f(x') - A\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ для функції. Але з останніх нерівностей випливає, що

$$\left|f\left(x\right) - f(x')\right| = \left|\left(f(x) - A\right) + \left(A - f(x')\right)\right| \le \left|f(x) - A\right| + \left|f(x') - A\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Необхідність доведено.

2). Достатність. Тепер нам потрібно з **умови Коші довести**, що існує границя функції $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Отже, нехай виконується **умова Коші**: за довільно обраним $\varepsilon > 0$ знайдено таке число $\delta(\varepsilon) > 0$, що для будь-яких $x, x' \in X$, які задовольняють нерівності

$$0 < \left|x - x_0\right| < \delta(\varepsilon) \text{ та } 0 < \left|x' - x_0\right| < \delta(\varepsilon), \tag{1}$$

має місце нерівність

$$\left|f\left(x\right) - f(x')\right| < \varepsilon . \tag{2}$$

Нехай $\left\{x_n\right\} \subset X, x_n \ne x_0$ – **довільна** послідовність, яка є збіжною до x_0. Покажемо, що $\left\{f(x_n)\right\}$ – **фундаментальна послідовність**. Дійсно, через те, що $x_n \to x_0$, то для знайденого вище по $\varepsilon > 0$ числа $\delta(\varepsilon) > 0$ існує такий номер N, що при всіх $n > N$ і $m > N$ виконуються нерівності

$$0<|x_n-x_0|<\delta(\varepsilon) \text{ та } 0<|x_m-x_0|<\delta(\varepsilon). \qquad (3)$$

Тобто роль $x\in X$ і $x'\in X$ відіграють елементи $x_n\in X$ і $x_m\in X$ послідовності $\{x_n\}$ відповідно. Тому в силу (1) і (3) з нерівності (2) випливає, що при $n,m>N$ виконується нерівність: $|f(x_n)-f(x_m)|<\varepsilon$.

Отже, послідовність $\{f(x_n)\}$ є фундаментальною і, як наслідок, є збіжною за **Теоремою про збіжність фундаментальної послідовності**.

Тепер покажемо, що границя послідовності $\{f(x_n)\}$ не залежить від вибору послідовності $\{x_n\}$. Дійсно, припустимо, що існують дві послідовності

$$\{x_n\}\subset X, \{\bar{x}_n\}\subset X, (x_n\neq x_0, \bar{x}_n\neq x_0),$$

які є збіжними до x_0 і є такими, що $f(x_n)\to A$, $f(\bar{x}_n)\to \bar{A}$, причому $A\neq\bar{A}$. Розглянемо послідовність з аргументів $x_1,\bar{x}_1,x_2,\bar{x}_2,\ldots,x_n,\bar{x}_n,\ldots$, яка є збіжною до числа x_0. Проте відповідна їй послідовність із значень функцій $f(x_1), f(\bar{x}_1)$, $f(x_2), f(\bar{x}_2),\ldots, f(x_n), f(\bar{x}_n),\ldots$ очевидно є розбіжною, бо містить дві підпослідовності, які є збіжними до різних границь A і $\bar{A}$. А це вступає у протиріччя з попереднім твердженням про збіжність фундаментальної послідовності $\{f(x_n)\}$. Тому в силу **Першого Означення границі (за Гейне)** існує спільна границя (тобто єдине число $A=\bar{A}$) для всіх послідовностей $\{f(x_n)\}$: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

Теорему доведено.

2. Односторонні границі. Необхідна і достатня умова існування границі функції з використанням її односторонніх границь.

У наведених вище означеннях границі $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ вважалось, що x прямує до x_0 **довільним способом**: залишаючись меншим від x_0 (зліва від x_0), більшим від x_0 (справа від x_0) чи коливаючись навколо x_0, тобто $x\to x_0$, набуваючи значень то менших, то більших від x_0 (то зліва то справа від x_0), як амплітуда затухаючих коливань маятника. Проте трапляється, що спосіб наближення аргументу x до x_0 суттєво впливає на значення границі функції. Тому доцільно ввести поняття **односторонніх границь**.

Нехай функція $y=f\left(x\right)$(рис. 1) визначена в деякому околі X точки x_0.

Означення. Число A називається **границею функції** $y=f\left(x\right)$ **зліва** (або **лівою границею**) в точці x_0, якщо для будь-якого числа $\varepsilon>0$ існує таке число $\delta=\delta\left(\varepsilon\right)>0$, що при всіх $x\in\left(x_0-\delta;x_0\right)$ виконується нерівність $\left|f\left(x\right)-A\right|<\varepsilon$.

Означення. Число B називається **границею функції** $y=f\left(x\right)$ **справа** (або **правою границею**) в точці x_0,якщо для будь-якого числа $\varepsilon>0$ існує таке число $\delta=\delta\left(\varepsilon\right)>0$, що при $x\in\left(x_0;x_0+\delta\right)$ виконується нерівність $\left|f\left(x\right)-B\right|<\varepsilon$.

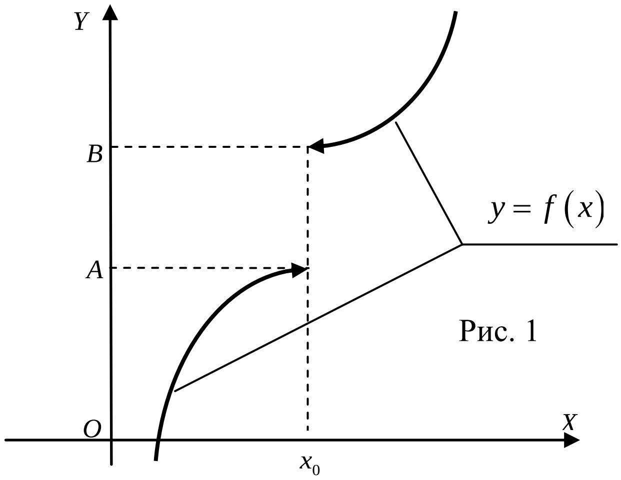

Рис. 1

Ліву і праву границі функції (рис. 1) називають **односторонніми** границями і позначають символічно так:

$$\lim_{x\to x_0-0}f\left(x\right)=f\left(x_0-0\right)=A;\ \lim_{x\to x_0+0}f\left(x\right)=f\left(x_0+0\right)=B.$$

Якщо $x_0=0$, то записують

$$\lim_{x\to -0}f\left(x\right)=f\left(-0\right)=A;\ \lim_{x\to +0}f\left(x\right)=f\left(+0\right)=B.$$

Якщо функція $y=f\left(x\right)$ визначена на проміжку $\left\langle x_1;x_2\right\rangle$, то в точці x_1 може мати зміст лише число $f\left(x_1+0\right)$, а в точці x_2 – лише число $f\left(x_2-0\right)$.

Теорема. Нехай функція $y=f\left(x\right)$ визначена в деякому околі X точки x_0 (крім, можливо, самої точки x_0). Тоді для того, щоб функція $y=f\left(x\right)$ мала границю $\lim\limits_{x\to x_0}f\left(x\right)=A$ в точці x_0, **необхідно і достатньо**, щоби існували **права** $\lim\limits_{x\to x_0+0}f\left(x\right)$ і **ліва** $\lim\limits_{x\to x_0-0}f\left(x\right)$ її границі та ці **границі співпали**, тобто

$$(\lim_{x\to x_0+0}f\left(x\right)=\lim_{x\to x_0-0}f\left(x\right)=A)\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0}f\left(x\right)=A.$$

Доведення. **1). Необхідність**. Нехай функція $y=f\left(x\right)$ має границю $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=A$ в точці x_0. Тоді безпосередньо із **Означення границі за Коші** випливає, що це число буде одночасно як правою, так і лівою границею функції при $x\to x_0$.

2). Достатність. Доведемо Теорему в іншу сторону. Нехай тепер існують рівні одна одній права і ліва границі функції $y=f\left(x\right)$, спільне значення яких позначимо через A. Доведемо, що функція $y=f\left(x\right)$ має границю $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=A$.

Отже, згідно із означеннями правої і лівої границі за вибраним довільно $\varepsilon>0$ знайдуться такі числа $\delta_1(\varepsilon)>0$ і $\delta_2(\varepsilon)>0$, що при $0<x-x_0<\delta_1(\varepsilon)$ або при $0<x_0-x<\delta_2(\varepsilon)$ буде виконуватись нерівність $\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$. Вибираючи $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$, дістанемо, що при $0<\left|x-x_0\right|<\delta(\varepsilon)$ має силу нерівність $\left|f(x)-A\right|<\varepsilon.$ А це і означає, що $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=A$. **Теорему доведено**.

Наслідок Теореми. Результат цієї Теореми можна розглядати як **Третє Означення границі функції** $y=f\left(x\right)$ в точці x_0 через односторонні границі.

Приклад 1. Знайти ліву і праву границі для функції $y=6\left(1+5^{\frac{1}{x-1}}\right)^{-1}$ та побудувати її графік.

Розв'язання. Знайдемо односторонні границі в точці $x=1$:

$$\lim_{x\to 1-0} y\left(x\right)=\lim_{x\to 1-0}\frac{6}{1+5^{\frac{1}{x-1}}}=6;\quad \lim_{x\to 1+0} y\left(x\right)=\lim_{x\to 1+0}\frac{6}{1+5^{\frac{1}{x-1}}}=0.$$

Через те, що $\lim\limits_{x\to 1-0} y\left(x\right)\neq\lim\limits_{x\to 1+0} y\left(x\right)$, то границя заданої функції в точці $x=1$ не існує. Побудуємо графік цієї розривної функції (рис.2).

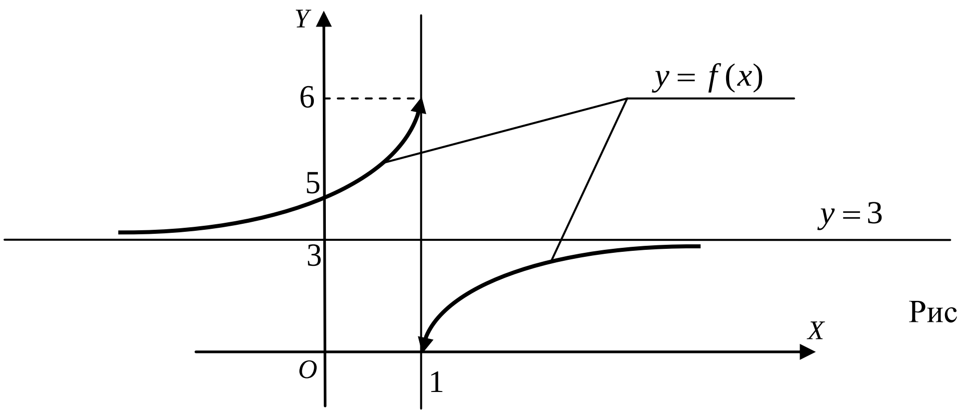

Рис. 2

Приклад 2 (Для СРС). Дослідити праву і ліву границі функції $y = \left(1 + {}^{1}\!/_{x}\right)^{x}$ та побудувати її ескізний графік. В яких точках слід шукати зазначені границі?

Підказка. Область визначення цієї функції: $x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$.

3. Границя функції при $x \to \infty$. Нескінченно велика функція. Нескінченно малі функції та їхні властивості.

При дослідженні функцій, які визначені на нескінченних проміжках, часто доводиться вивчати їхню поведінку при як завгодно великих за модулем значеннях аргументу x, тобто при $x \to \infty$.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на проміжку $(-\infty; +\infty)$.

Означення. **Число** A **називається границею функції** $y = f(x)$ **при** $x \to \infty$, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $M = M(\varepsilon) > 0$, що при $|x| > M$ виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. Позначається це так:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A.$$

На мові кванторів це означення можна записати таким чином:

$$\left(\forall \varepsilon > 0\, \exists\, M = M(\varepsilon) > 0 : |x| > M \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\right) \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = A.$$

Досі розглядались випадки, коли функція мала границею деяке число. Розглянемо тепер випадок, коли границею функції є нескінченність.

Означення. Функція $y = f(x)$ при $x \to x_0$ називається **нескінченно великою** (тобто має границею ∞), якщо вона визначена в деякому околі точки x_0, крім, можливо, самої точки x_0 і для довільного числа $M > 0$ існує таке число $\delta = \delta(M) > 0$, що для всіх x, які задовольняють нерівності $0 < |x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x)| > M$. Позначається це так: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ або $f(x) \to \infty$ при $x \to x_0$.

Означення. Задану на всій числовій прямій функцію $y = f(x)$ називають **нескінченно великою** при $x \to \infty$, якщо для довільного числа $M > 0$ можна знайти таке число $N = N(M) > 0$, що для всіх x, які задовольняють нерівність $|x| > N$, виконується нерівність $|f(x)| > M$. Позначається це так: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

Очевидно, що будь-яка нескінченно велика функція в околі точки x_0 є необмеженою в цьому околі.

Наприклад, функція $y = x^3$ прямує до $-\infty$ при $x \to -\infty$ і до $+\infty$ при $x \to +\infty$.

Нескінченно малою величиною називається змінна величина, границя якої дорівнює нулю. Зокрема, функція $\alpha(x)$ називається **нескінченно малою величиною (або нескінченно малою функцією)** при $x \to x_0$ або $x \to \infty$, якщо

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0; \ \lim_{x \to \infty} \alpha(x) = 0.$$

Дамо означення **нескінченно малої величини** на мові "$\varepsilon - \delta$": функція $\alpha(x)$ називається **нескінченно малою** при $x \to x_0$ ($x \to \infty$), якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0\,(M > 0)$, що для всіх x, що задовольняють нерівність $|x - x_0| < \delta$ ($|x| > M$), виконується нерівність $|\alpha(x)| < \varepsilon$.

Аналогічні означення нескінченно малої величини $\alpha(x)$ можна сформулювати при $x \to x_0 + 0$, $x \to x_0 - 0$ і при $x \to -\infty$, $x \to +\infty$: у всіх цих випадках $\alpha(x) \to 0$.

Приклад 1. Функція $y = (x-3)^3$ є нескінченно малою при $x \to 3$, бо $\lim_{x \to 3}(x-3)^3 = 0$ і нескінченно великою при $x \to \infty$, бо $\lim_{x \to \infty}(x-3)^3 = \infty$.

Приклад 2. Функція $y = (x+2)^{-1}$ є нескінченно малою при $x \to \infty$, бо $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x+2} = 0$, і нескінченно великою при $x \to -2 \pm 0$, бо $\lim_{x \to -2 \pm 0} \frac{1}{x+2} = \pm\infty$.

Зауваження. Одна і та сама функція може бути в околі однієї точки нескінченно малою, а в околі іншої точки нескінченно великою. Наприклад, функція $f(x) = \frac{(x-1)^2}{\sin(x-1)}$ є нескінченно малою в точці $x = 1$ і нескінченно великою в точках $x = 1 + \pi k,\ k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

Розглянемо **основні властивості нескінченно малих величин**.

1^0. Для того, щоб число A було границею функції $f(x)$ при $x \to x_0$, **необхідно і достатньо**, щоб різниця $f(x) - A$ була нескінченно малою величиною, тобто

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x), \text{ де } \lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0.$$

2^0. Якщо функція $\alpha(x)$ − нескінченно мала величина при $x \to x_0$ ($\alpha(x) \neq 0$), то функція $\alpha^{-1}(x)$ є нескінченно великою величиною при $x \to x_0$, і навпаки, якщо функція $\beta(x)$ − нескінченно велика величина при $x \to x_0$, то функція $\beta^{-1}(x)$ є нескінченно малою величиною при $x \to x_0$.

3^0. Сума скінченного числа нескінченно малих величин є величина нескінченно мала. Проте це твердження не має сили, якщо утворюється сума нескінченного числа нескінченно малих величин.

4^0. Добуток обмеженої функції на нескінченно малу є величина нескінченно мала. Тобто, якщо при $x \to x_0$ виконується нерівність $\left|f(x)\right| \leq M$ і $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$, то $\lim\limits_{x \to x_0} \left[f(x) \cdot \alpha(x) \right] = 0$.

5^0. Частка від ділення нескінченно малої величини на функцію, яка має відмінну від нуля границю, є величина нескінченно мала.

Зауваження. Частка від ділення двох нескінченно малих величин у загальному випадку не є нескінченно малою величиною. У зв'язку з цим відношення двох нескінченно малих величин називають невизначеністю виду $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$. Те саме стосується добутку нескінченно малої величини на нескінченно велику величину. Такий добуток називають невизначеністю виду $\{0 \cdot \infty\}$.