ЛЕКЦІЯ №6.
Фундаментальні послідовності. Критерій Коші та приклади його використання. Комплексні числа. Дії над комплексними числами. Послідовності с комплексними членами.

Частина I. ФУНДАМЕНТАЛЬНІ ПОСЛІДОВНОСТІ. КРИТЕРІЙ КОШІ.

1. Фундаментальні послідовності: означення, властивості.

Означення збіжності послідовності $\{x_n\}$ пов'язане з границею x_0 цієї послідовності, яка, зазвичай, **наперед невідома**. Це означення не дозволяє безпосередньо перевіряти факт збіжності послідовностей, якщо нам невідомі їхні границі.

Тому дуже важливе значення має «**внутрішня**» ознака збіжності послідовності (**критерій або ознака Коші**), яка буде доведена в цій лекції.

Означення 1. *Послідовність* $\{x_n\}$ *називається* ***фундаментальною****, якщо для довільного числа* $\varepsilon > 0$ *існує такий номер* $N(\varepsilon)$*, що при всіх* $n,m > N$ *виконується нерівність*

$$|x_m - x_n| < \varepsilon . \qquad \textbf{(К)}$$

Наведемо **друге означення** фундаментальної послідовності, яке є еквівалентним першому.

Означення 2. *Послідовність* $\{x_n\}$ *називається* ***фундаментальною****, якщо для довільного числа* $\varepsilon > 0$ *існує такий номер* $N(\varepsilon)$*, що для всіх номерів* $n > N$ *і для всіх натуральних чисел* $p\ (p = 1, 2, \ldots)$ *виконується нерівність*

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon . \qquad \textbf{(К}^{*}\textbf{)}$$

Встановимо **важливу властивість** фундаментальної послідовності, яка безпосередньо випливає з її означення.

Для довільного числа $\varepsilon > 0$ *можна вказати такий елемент* x_N *фундаментальної послідовності, в* $\varepsilon -$*околі якого містяться всі елементи послідовності, починаючи з деякого номера* N*. Іншими словами, поза межами інтервалу* $(x_N - \varepsilon, x_N + \varepsilon)$ *знаходиться не більше, ніж* ***скінченне число елементів*** *послідовності.*

Дійсно, з другого означення фундаментальної послідовності випливає: для довільного $\varepsilon > 0$ можна вказати такий номер N, що для всіх натуральних $p\,(p = 1, 2, 3\ldots)$ справедлива нерівність $\left|x_{N+p} - x_N\right| < \varepsilon$. Вона і означає, що в $\varepsilon -$околі елемента x_N знаходяться всі елементи послідовності, починаючи з номера N.

Зазначимо, що ця властивість **еквівалентна** означенню фундаментальної послідовності.

До важливих властивостей фундаментальних послідовностей можна віднести їх **обмеженість**.

Теорема 9 (про обмеженість фундаментальної послідовності). *Якщо послідовність $\{x_n\}$ є фундаментальною, то вона є* ***обмеженою****.*

Доведення. Нехай довільно обране певне число $\varepsilon > 0$, тоді існує такий номер N, що при $m, n > N$ виконується нерівність **(К)**. Виберемо число $m = N + 1$, тоді $\left|x_n - x_{N+1}\right| < \varepsilon$ і

$$\left|x_n\right| = \left|x_{N+1} + (x_n - x_{N+1})\right| \le \left|x_{N+1}\right| + \left|x_n - x_{N+1}\right| < \left|x_{N+1}\right| + \varepsilon \text{ при } n > N,$$

тобто члени послідовності $\{x_n\}$ при $n > N$ обмежені числом $\left|x_{N+1}\right| + \varepsilon$. Покладемо $M = \max\left\{\left|x_1\right|, \left|x_2\right|, \left|x_3\right|, \ldots, \left|x_N\right|, \left|x_{N+1}\right| + \varepsilon\right\}$. Очевидно, що нерівність $\left|x_n\right| \le M$ виконується для всіх номерів $n = 1, 2, 3, \ldots$; отже, послідовність $\{x_n\}$ обмежена. **Теорему доведено**.

2. **Критерій Коші. Необхідні і достатні умови збіжності довільної послідовності.**

Теорема 10 (Критерій Коші). *Для того, щоб послідовність $\{x_n\}$ була збіжною,* ***необхідно і достатньо,*** *щоб вона була* ***фундаментальною****.*

Доведення. 1). Спочатку **доведемо необхідність**. Тобто будемо вважати, що послідовність $\{x_n\}$ є збіжною та $x_0 -$ її границя; покажемо, що **зі збіжності послідовності випливає її фундаментальність.**

Через те, що послідовність є збіжною до числа x_0, то для довільного заданого числа $\varepsilon > 0$ знайдеться такий номер N, що при всіх $n > N$ і $m > N$ виконуються нерівності $\left|x_n - x_0\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ і $\left|x_m - x_0\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Тоді при $m, n > N$ мають місце такі нерівності:

$$\left|x_n - x_m\right| = \left|x_n - x_0 + x_0 - x_m\right| \le \left|x_n - x_0\right| + \left|x_m - x_0\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

тобто нами доведено, що послідовність $\{x_n\}$ є фундаментальною. **Необхідність доведено.**

2). Доведення достатності. Тепер нам потрібно показати, що із **фундаментальності послідовності $\{x_n\}$ випливає її збіжність**.

З умови попередньої **Теореми 9** випливає, що будь-яка **фундаментальна** послідовність $\{x_n\}$ є **обмеженою**, а з обмеженої послідовності (за **Теоремою Больцано-Вейєрштраса**) завжди можна виділити збіжну підпослідовність $\{x_{k_n}\}$, яка прямує до певного числа x_0. Покажемо, що до цього ж числа прямує загальний член фундаментальності послідовності $\{x_n\}$, тобто: $x_n \to x_0$.

Нехай $\varepsilon > 0$ – довільне додатне число. Виходячи з того, що підпослідовність $\{x_{k_n}\}$ є збіжною до певного числа x_0, то існує такий номер $N_1(\varepsilon)$, що при всіх $n > N_1(\varepsilon)$ виконуються нерівності

$$\left|x_{k_n} - x_0\right| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ при } n > N_1.$$

Оскільки послідовність $\{x_n\}$ є фундаментальною, то за означенням (**К**) для довільного $\varepsilon > 0$ завжди знайдеться такий номер $N_2(\varepsilon)$, що при $m,n > N_2(\varepsilon)$ будуть мати місце нерівності

$$\left|x_n - x_m\right| < \frac{\varepsilon}{2}\ .$$

Через те, що для номерів членів підпослідовності $\{x_{k_n}\}$ має місце нерівність $k_n \ge n$, то з останньої нерівності при $m = k_n$ та $n > N_2(\varepsilon)$ дістанемо $\left|x_n - x_{k_n}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Виберемо номер $N = \max\{N_1, N_2\}$; тоді при всіх $n > N$ маємо:

$$\left|x_n - x_0\right| \le \left|x_n - x_{k_n}\right| + \left|x_{k_n} - x_0\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\ .$$

Отже, ми показали, що $x_n \to x_0$, або $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Таким чином, нами доведено, що з **фундаментальності послідовності $\{x_n\}$ випливає її збіжність**. **Достатність**, а разом з нею і **всю Теорему 10** доведено в цілому.

3. Приклади на застосування Критерію Коші.

Приклад 1. Застосуємо критерій Коші (**К***) для встановлення факту збіжності наступної послідовності $\{x_n\}$: $x_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$, де a_k $(k = 1,2,3,\ldots)$ - довільні дійсні числа, які задовольняють умову $|a_k| \le q^k$, а $q -$ деяке число з інтервалу $(0,1)$.

Нехай $n -$ довільний номер, $p -$ довільне натуральне число. Тоді, очевидно,

$$|x_{n+p} - x_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| \le |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots |a_{n+p}| \le$$

$$\le q^{n+1} + q^{n+2} + \ldots + q^{n+p} = \frac{q^{n+1} - q^{n+1+p}}{1-q} < \frac{q^{n+1}}{1-q}.$$

Враховуючи, що послідовність $\{q^n\}$ є нескінченно малою, можна стверджувати, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує такий номер N, що $q^{n+1} \le \varepsilon(1-q)$ при $n \ge N$. Отже, при $n \ge N$ і для довільного натурального p має місце нерівність:

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon,$$

тобто послідовність $\{x_n\}$ є фундаментальною і є збіжною за Теоремою 11.

Приклад 2. Користуючись критерієм Коші довести розбіжність послідовності

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

В теорії рядів ця послідовність $\{x_n\}$ представляє собою послідовність частинних сум $S(n) = x_n$ нескінченного **гармонічного ряду**:

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots.$$

В нашому випадку $S(n) = x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$. Запишемо критерій Коші (**К**) для послідовності $\{x_n\}$. Отже, для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться такий номер N, що для довільних $n, m \ge N$ має виконуватись така нерівність $|x_m - x_n| < \varepsilon$. Візьмемо $\varepsilon = \frac{1}{2}$, а $m = 2n$. Тоді маємо:

$$|x_{2n} - x_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{n+n} > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

В правій частині цього виразу ми замінили всі n членів суми на найменший член $1/2n$, в результаті отримали відповідну нерівність: $\left|x_{2n}-x_n\right|>\varepsilon$. Тобто зазначений модуль $\left|x_{2n}-x_n\right|$ не може бути зроблений меншим, ніж $\varepsilon=\frac{1}{2}$, ні при яких номерах $N(\varepsilon)$ членів послідовності, якими б великими вони не були

Таким чином, критерій Коші не виконується і ця послідовність $\{x_n\}$ (а разом з нею і **гармонічний ряд)** є **розбіжними**.

Приклад 3. Користуючись критерієм Коші довести збіжність послідовності

$$x_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}.$$

Для встановлення фундаментальності послідовності $\{x_n\}$ застосуємо критерій Коші у формі (**К***). Для цього скористаємось такою нерівністю: $\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$, $n=2,3,\ldots$ Отже, запишемо:

$$\left|x_{n+p}-x_n\right|=\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{1}{(n+p)^2}<$$

$$<\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}=\frac{p}{n(n+p)}.$$

Знайдемо номер $N(p,\varepsilon)$, про який йдеться у критерії Коші. Запишемо потрібну нерівність: $\left|x_{N+p}-x_N\right|=\frac{p}{N(N+p)}<\varepsilon$. Звідси після певних перетворень дістанемо:

$$N(p,\varepsilon)>\frac{-p+\sqrt{p^2+\frac{4p}{\varepsilon}}}{2}\ ,\quad p=1,2,3,\ldots \qquad \textbf{(A)}$$

Отже, для будь-якого натурального числа $p=1,2,3,\ldots$ та довільного числа $\varepsilon>0$ існує такий номер $N(p,\varepsilon)$, що для заданої послідовності буде виконуватись нерівність (**А**). Покажемо, що існує такий номер $N(\varepsilon)$, залежний тільки від ε, що зазначена нерівність (**А**) буде справедливою для будь-яких за величиною чисел $p=1,2,3,\ldots$. Знайдемо границю правої частини виразу (**А**) при $p\to\infty$. Вона дорівнює:

$$\lim_{p\to\infty} N(p,\varepsilon) = N(\varepsilon) > \lim_{p\to\infty}\left(\frac{-p+\sqrt{p^2+\dfrac{4p}{\varepsilon}}}{2}\right) = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Отже, такий номер існує і дорівнює $N(\varepsilon) > 1/\varepsilon$. Тому задана послідовність є збіжною за Критерієм Коші.

Частина II. ЕЛЕМЕНТИ КОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ.

1. Комплексні числа: загальні поняття і означення. Різні форми представлення комплексних чисел. Дії над ними в різних формах.

Означення. Одне з двох чисел, що задовольняє рівняння $x^2+1=0$, називають **уявною одиницею** та позначають символом i. Отже, $i^2=-1$.

Означення. Комплексним числом називається вираз $z=a+bi$, де a і b − довільні дійсні числа, а символ i − уявна одиниця. Числа a і b називаються відповідно **дійсною** та **уявною** частинами комплексного числа z і позначають так: $a=\operatorname{Re}z$ і $b=\operatorname{Im}z$. Комплексні числа утворюють множину, яку позначають символом C.

Комплексні числа можна представити у **трьох формах**: **алгебраїчній**, **тригонометричній і експоненціальній**.

А). Алгебраїчна форма комплексного числа. Геометричне представлення комплексних чисел і дії над ними у цій формі.

Означення. Вираз $z=a+bi$ називається **алгебраїчною формою запису** комплексного числа.

Означення. Два числа $z=a+bi$ і $\overline{z}=a-bi$, які відрізняються лише знаком уявної частини, називаються **комплексно-спряженими**.

Два комплексні числа $z_1=a_1+b_1i$ та $z_2=a_2+b_2i$ вважаються **рівними** $(z_1=z_2)$ тоді і тільки тоді, якщо рівні їхні дійсні частини ($a_1=a_2$) і рівні їхні уявні частини ($b_1=b_2$). Комплексне число $z=a+bi$ дорівнює нулю ($z=a+bi=0$) тоді і тільки тоді, коли $a=b=0$.

Геометричне представлення комплексних чисел.

Комплексні числа зручно зображати на площині XOY. Якщо користуватись декартовою прямокутною системою координат, то кожному комплексному числу $z = a + bi$ відповідає точка $M(a;b)$ цієї площини (рис.1). Така площина умовно називається комплексною площиною змінної z, вісь OX − **дійсною віссю**, а OY − **уявною**.

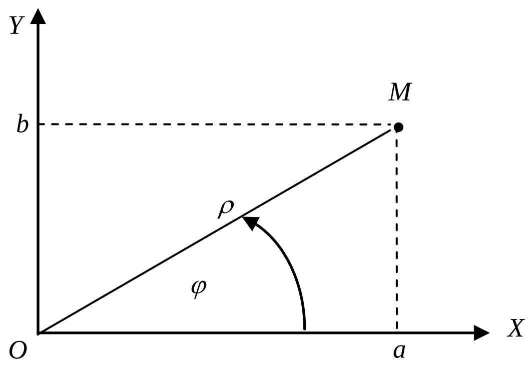

Рис. 1

Комплексне число $z = a + bi$ при $b = 0$ збігається з дійсним числом $z = a$. Тому дійсні числа є окремим випадком комплексних ($R \subset C$), вони зображуються точками на осі OX. Комплексні числа $z = a + bi$, у яких дійсна частина $a = 0$, називаються **суто уявними**; такі числа зображуються точками на осі OY.

Дії над комплексними числами, заданими в алгебраїчній формі.

Основні арифметичні дії над комплексними числами $z_1 = a_1 + b_1 i$ та $z_2 = a_2 + b_2 i$, **заданими** в **алгебраїчній формі**, визначаються такими рівностями:

1) $z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)\, i$;

2) $z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (b_1 a_2 + a_1 b_2)\, i$;

3) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \overline{z}_2}{z_2 \overline{z}_2} = \dfrac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \dfrac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}\, i$.

Таким чином, арифметичні дії над комплексними числами виконуються за звичайними правилами дій над двочленами з урахуванням того, що $i^2 = -1$. Неважко самостійно перевірити, що коли в рівностях 1) – 3) кожне комплексне число z замінити комплексно-спряженим числом $\overline{z}$, то і результати вказаних дій заміняться спряженими числами.

Піднесення числа $z = a + bi$ до цілого натурального степеня n виконується за формулою бінома Ньютона з урахуванням того, що для довільного $n \in N$ справедливі рівності: $i^{4n} = 1$, $i^{4n+1} = i$, $i^{4n+2} = -1$, $i^{4n+3} = -i$.

Приклад. $(2+3i)^3 = 8+36i-54-27i = -46+9i$.

Б). Тригонометрична форма комплексних чисел. Геометричне представлення комплексних чисел і дії над ними у цій формі.

Полярні координати (ρ, φ) точки $M(a;b)$ на комплексній площині називаються **модулем і аргументом** комплексного числа і позначаються так (рис. 2):

$$OM = \rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \ \varphi = Argz.$$

Оскільки $a = \rho\cos\varphi$, $b = \rho\sin\varphi$ (рис. 2), то $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

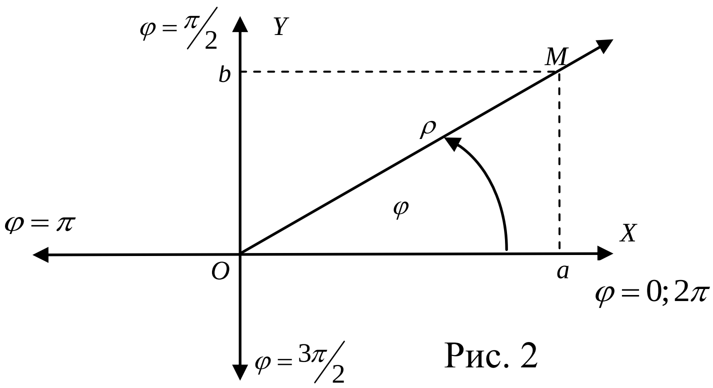

Рис. 2

Означення. Вираз $\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, що стоїть справа у попередній формулі, називається **тригонометричною формою** комплексного числа $z = a + bi$.

Зауваження 1. Модуль $\rho = |z|$ комплексного числа визначається однозначно, а аргумент φ − з точністю до $2\pi k$: $Argz = \arg z + 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$.. Тут під $Argz$ розуміють **загальне значення** аргументу; на відміну від нього, $\arg z = arctg\left(b/a\right)$− це **головне значення** аргументу, воно знаходиться на проміжку $[0, 2\pi)$ і відраховується від полярної осі при $\varphi = 0$ (або від додатного напрямку осі OX в декартовій системі координат) проти годинникової стрілки.

Якщо $z = 0$, то вважають, що $|z| = 0$, а аргумент $\arg z$ − невизначений.

Основні дії над комплексними числами $z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ та $z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, **заданими в тригонометричній формі.**

Додавання комплексних чисел в цій формі виконувати не зручно, зручніше цю дію виконувати з комплексними числами у алгебраїчній формі. Тому розглянемо такі дії – множення, ділення, піднесення до n-го степеня та добування кореня з комплексного числа.

Нехай задані два комплексні числа у тригонометричній формі: $z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ та $z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Тоді добуток $z_1 z_2$ має вигляд (довести самостійно)

$$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2\left(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right).$$

Отже, при перемноженні комплексних чисел їхні модулі перемножуються, а аргументи додаються. Це правило поширюється на довільне скінченне число множників у добутку. Тобто $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$, а $Arg(z_1 z_2) = Arg(z_1) + Arg(z_2)$.

Зокрема, якщо задано n рівних комплексних множників $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то z^n обчислюється так: $z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$. Ця формула називається **формулою Муавра.**

При діленні комплексних чисел маємо (перевірити самостійно):

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\left(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right).$$

Отже модуль частки двох комплексних чисел дорівнює частці модулів діленого і дільника; аргумент частки дорівнює різниці аргументів діленого і дільника. Тобто $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, а $Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = Arg(z_1) - Arg(z_2)$.

Зауваження 2. Добування кореня з комплексного числа $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ має певні **особливості**. Якщо для заданого числа $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ треба знайти число $w = \sqrt[n]{z} = r(\cos\psi + i\sin\psi)$, то за означенням кореня і формулою Муавра маємо:

$$z = w^n = r^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Звідси дістанемо: $r^n = \rho$, $n\psi = \varphi + 2\pi k$, $k \in Z$. Оскільки $r > 0$ і $\rho > 0$, то $r = \sqrt[n]{\rho}$, де під коренем потрібно розуміти його арифметичне значення; тому

$$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)\right).$$

Надаючи параметру k значень $k = 0,1,2,...,n-1$, дістанемо n різних значень кореня. Для інших значень k аргументи відрізнятимуться від знайдених на число, кратне 2π, тому значення кореня збігатимуться з уже знайденими.

Приклад. Знайдемо корінь четвертого степеня з одиниці, тобто $\sqrt[4]{-1}$. Для початку представимо підкореневе число -1 у такому вигляді: $z = \cos(\pi) + i \cdot \sin\pi = -1$. Тут модуль комплексного числа z дорівнює 1, тобто $\rho = 1$. Підставимо всі ці вирази у попередню формулу:

$$w_n = \sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{\cos\pi + i \cdot \sin\pi} = \sqrt[4]{1} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi + 2\pi n}{4}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi + 2\pi n}{4}\right)\right).$$

Надаючи послідовно значень $n = 0,1,2,3$, дістанемо всі чотири корені:

$$w_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2};\ w_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2};\ w_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2};\ w_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

В). Експоненціальна форма комплексних чисел. Дії над ними у цій формі.

За Ейлером запишемо комплексне число у **експоненціальній формі** з переходом до **тригонометричної форми:**

$z = e^{c+\varphi i} = e^c(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi) = \rho(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$, де $c-$ дійсне число, $\rho = e^c$.

Якщо модуль комплексного числа дорівнює одиниці (тобто $c = 0$), то маємо **відому формулу Ейлера**: $e^{\varphi i} = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Ця формула встановлює **глибинний зв'язок** між експонентою та тригонометричними функціями. При $\varphi = \pi$ формула Ейлера пов'язує між собою **п'ять великих сталих** $(0,1,e,\pi,i)$: $e^{\pi i} + 1 = 0$.

Основні дії над комплексними числами $z_1 = e^{x_1+iy_1}$ та $z_2 = e^{x_2+iy_2}$**, заданими в експоненціальній формі.**

Додавання комплексних чисел в цій формі виконувати не зручно, зручніше цю дію виконувати з комплексними числами у алгебраїчній формі. Тому розглянемо такі дії – множення, ділення, піднесення до степеня, добування кореня.

1). Добуток двох чисел $z_1 = e^{x_1+iy_1}$ та $z_2 = e^{x_2+iy_2}$ визначається за правилами множення двох експонент: $z_1 z_2 = e^{x_1+iy_1} \cdot e^{x_2+iy_2} = e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)}$.

2). Частка двох чисел $z_1 = e^{x_1+iy_1}$ та $z_2 = e^{x_2+iy_2}$ визначається за правилами ділення двох експонент: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{e^{x_1+iy_1}}{e^{x_2+iy_2}} \cdot = e^{(x_1-x_2)+i(y_1-y_2)} = e^{x_1-x_2} \cdot \left(\cos(y_1-y_2) + i\cdot\sin(y_1-y_2)\right)$.

3). Піднесення комплексного числа до $m-$го степеня зводиться до збільшення показника експоненти в m разів: $(z)^m = \left(e^{x+iy}\right)^m = e^{mx+imy} = e^{mx}\cdot(\cos my + i\sin my)$.

4). **Добування кореня** $n-$степеня з комплексного числа має **свої особливості**:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{e^{x+iy}} = \sqrt[n]{\rho\left(\cos y + i\sin y\right)} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{y+2\pi k}{n} + i\sin\frac{y+2\pi k}{n}\right),$$

де $\rho = e^x$ і $k = 0,1,2,\ldots,n-1$.

2. Послідовності з комплексними членами.

Означення. Послідовність комплексних чисел $\{z_n\}$ представляє собою комплексно-значну функцію натурального аргументу $n \in N$.

Отже, $z_n = x_n + i\cdot y_n$, де x_n, y_n $-$дійсні числа.

Означення. *Кажуть, що послідовність комплексних чисел* $\{z_n\}$ *(*$z_n = x_n + i\cdot y_n$*), є* ***збіжною до комплексного числа*** $z_0 = x_0 + i\cdot y_0$, *якщо дійсна послідовність з модулів* $|z_n - z_0|$ *прямує до нуля (*$|z_n - z_0| \to 0$*) при* $n\to\infty$*; іншими словами, для довільного числа* $\varepsilon > 0$ *існує (знайдеться) такий номер* $N = N(\varepsilon)$*, що для всіх номерів* $n > N(\varepsilon)$ *буде виконуватись така нерівність з дійсних чисел:* $|z_n - z_0| < \varepsilon$.

Число z_0 називається **границею послідовності** $\{z_n\}$. При цьому пишуть $z_n \to z_0$, або $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$. Оскільки $|z_n - z_0| = \sqrt{(x_n-x_0)^2 + (y_n-y_0)^2}$, то умова $z_n \to z_0$ буде виконуватись тоді і лише тоді, коли одночасно будуть виконані дві умови: $x_n \to x_0$ і $y_n \to y_0$.

Означення. *Послідовність комплексних чисел* $\{z_n\}$ *називається* ***фундаментальною****, якщо для довільного числа* $\varepsilon > 0$ *знайдеться такий номер* $N = N(\varepsilon)$*, що для всіх номерів* $n, m > N(\varepsilon)$ *буде виконуватись нерівність* $|z_n - z_m| < \varepsilon$.

Подібно до того, як це робилося для послідовностей дійсних чисел, можна довести критерій збіжності Коші для послідовностей комплексних чисел $\{z_n\}$. Нагадаємо його формулювання.

Критерій Коші для послідовності комплексних чисел. *Для того, щоб послідовність комплексних чисел* $\{z_n\}$ *була збіжною, необхідно і достатньо, щоб вона була фундаментальною*.

Також для послідовностей комплексних чисел $\{z_n\}$ має місце Теорема про границю суми (різниці), добутку і частки двох послідовностей. Нагадаємо її формулювання.

Теорема (про границю суми (різниці), добутку і частки двох послідовностей). Нехай послідовності комплексних чисел $\{u_n\}$ і $\{v_n\}$ є збіжними і $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u_0$ та $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = v_0$. Тоді будуть збіжними і послідовності

$$\{cu_n\}, (c = const)\,,\ \{u_n \pm v_n\}, \{u_n \cdot v_n\}, \left\{ {u_n}/{v_n} \right\},$$

(причому остання при умові, що $v_0 \neq 0, v_n \neq 0, n = 1, 2, \ldots$) і їх границі визначаються за формулами:

1^0. $\lim\limits_{n\to\infty} cu_n = c\lim\limits_{n\to\infty} u_n = cu_0$;

2^0. $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n \pm v_n) = \lim\limits_{n\to\infty} u_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} v_n = u_0 \pm v_0$;

3^0. $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n \cdot v_n) = \lim\limits_{n\to\infty} u_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} v_n = u_0 \cdot v_0$;

4^0. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} u_n}{\lim\limits_{n\to\infty} v_n} = \dfrac{u_0}{v_0}, v_0 \neq 0, v_n \neq 0$.

Зауваження. Суму (різницю) $\{u_n \pm v_n\}$, добуток $\{u_n \cdot v_n\}$, і частку $\left\{ {u_n}/{v_n} \right\}$ двох послідовностей $\{u_n\}$ і $\{v_n\}$ в цій Теоремі слід розуміти в сенсі дій над комплексними числами, тобто якщо $u_n = u_n^{(r)} + i \cdot u_n^{(i)}$ і $v_n = v_n^{(r)} + i \cdot v_n^{(i)}$, то

а) $u_n \pm v_n = (u_n^{(r)} \pm v_n^{(r)}) + i \cdot (u_n^{(i)} \pm v_n^{(i)})$;

б) $u_n \cdot v_n = (u_n^{(r)} \cdot v_n^{(r)} - u_n^{(i)} \cdot v_n^{(i)}) + i \cdot (u_n^{(r)} \cdot v_n^{(i)} + u_n^{(i)} \cdot v_n^{(r)})$;

в) $\dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{(u_n^{(r)} \cdot v_n^{(r)} + u_n^{(i)} \cdot v_n^{(i)}) + i \cdot (u_n^{(i)} \cdot v_n^{(r)} - u_n^{(r)} \cdot v_n^{(i)})}{\left(v_n^{(r)}\right)^2 + \left(v_n^{(i)}\right)^2}$.