ЛЕКЦІЯ №2. Поняття дійсних чисел та їхнє порівняння. Топологія числової прямої. Точна верхня і нижня грані множини та Теорема про їхнє існування. Повнота множини дійсних чисел. Теорема Дедекінда.

1. **Вступ. Основні поняття і означення дійсних чисел.**

В цьому курсі лекцій ми припускаємо, що операції над раціональними числами слухачам відомі з курсу математики середньої школи, тому одразу перейдемо до поняття дійсного числа.

Дійсні числа – це узагальнення раціональних чисел. Це означає, що 1) раціональні числа – це є частинний випадок дійсних чисел, тобто множина раціональних чисел є частиною дійсних чисел $Q \subset R$, і що 2) у множині дійсних чисел можна робити всі операції, які можливі у множині раціональних чисел, тобто довільні два дійсних числа можна додавати, віднімати, множити, ділити (якщо знаменник не дорівнює нулю), порівнювати за допомогою рівностей і нерівностей, і всі ці дії підкоряються тим же самим законам, що мають силу і для раціональних чисел.

Крім того, множина дійсних чисел має ще одну властивість, яка відрізняє цю множину від множини раціональних чисел. Це – **властивість неперервності**. Для цієї властивості існує багато різних формулювань; наведемо одне з них.

Нехай множини A і B складаються з дійсних чисел. Тоді якщо для довільних $a \in A$ і $b \in B$ виконується нерівність $a \le b$, то існує таке дійсне число c, що $a \le c \le b$ для будь-яких a і b. Нижче цій властивості буде наведене наочне геометричне тлумачення.

Одразу відмітимо, що множина раціональних чисел цієї властивості не має.

Наведемо **приклад на цю тему.**

Приклад (для СРС). Показати, що число $\sqrt{2}$ – ірраціональне та довести, що у множині A немає найбільшого раціонального числа, де множина A складається з таких раціональних чисел a, що $a > 0$ і $a^2 \le 2$.

Розв'язання. Розіб'ємо множину додатних раціональних чисел на дві непорожніх множини A і B, які не перетинаються, за допомогою співвідношень:

$$\begin{cases} x \in A, \text{ якщо } 0 < x \le \sqrt{2}, \\ x \in B, \text{ якщо } x > \sqrt{2}. \end{cases}$$

Покажемо, що число $\sqrt{2}$ – ірраціональне. Дійсно, у протилежному випадку $\sqrt{2}=\frac{m}{n}$, де m і n – нескоротні натуральні числа, і $m^2=2n^2$. Звідси випливає, що m і n – парні числа. Це входить у протиріччя з тим припущенням, що дріб $\frac{m}{n}$ є нескоротним. Отже число $\sqrt{2}$ – ірраціональне.

Покажемо, що у множині A немає найбільшого числа. Дійсно, нехай $x>0$ і $x\in A$, тоді $x^2<2$ (вище було показано, що для раціонального числа x рівність $x^2=2$ є неможливою).

Підберемо раціональне число $\varepsilon>0$ так, щоби виконувалась нерівність $(x+\varepsilon)^2<2$. Нехай $\varepsilon<1$, тоді: $(x+\varepsilon)^2=x^2+2x\varepsilon+\varepsilon^2<x^2+2x\varepsilon+\varepsilon<2$. Якщо вибрати додатне раціональне число $\varepsilon>0$ так

$$\varepsilon=\min\left\{1,\frac{2-x^2}{2x+1}\right\},$$

то має місце нерівність $(x+\varepsilon)^2<2$. Отже, нами знайдене раціональне число $x'=x+\varepsilon$, яке належить множині A і є більшим за число x. Таким чином, в множині A **нема найбільшого раціонального числа**. Аналогічно можна довести, що в множині B немає найменшого раціонального числа.

Природно виникає питання: а навіщо потрібні дійсні числа, може достатньо мати тільки раціональні? На це питання відповів ще Піфагор, який встановив, що діагональ квадрату несумірна з його стороною, так що якщо обмежитися тільки раціональними числами і взяти квадрат із одиничною стороною, то його діагональ не може бути виміряною за допомогою раціональних чисел. Очевидно, що така ситуація є дуже незручною, - потрібно, щоби кожний відрізок мав певну довжину. Якщо б ми мали у своєму розпорядженні дійсні числа, ми змогли б виміряти будь-який відрізок. Дійсно, довжину довільного відрізку ми можемо виміряти з недостачею з точністю 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3} і т.д.; отримані числа віднесемо до множини A. Цей же відрізок ми можемо виміряти з надлишком з точністю 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3} і т.д.; отримані числа віднесемо до множини B. Ясно, що $a\le b$ для будь-яких чисел $a\in A$ і $b\in B$. Через властивість неперервності множини дійсних чисел існує таке число c (в даному випадку єдине), що $a \le c \le b$ для будь-яких a і b. Це число c і називається довжиною вибраного відрізку.

У такий же спосіб в результаті довільного вимірювання ми отримуємо дійсне число. Грубо кажучи, якщо знайти одиницю вимірювання, яку можна нескінченно ділити, то за допомогою дійсних чисел можна виміряти довільну величину.

Будемо казати, що кожен нескінченний десятковий дріб відображає певне **дійсне число**.

Якщо визначити арифметичні операції над невід’ємними дійсними числами, то вони легко переносяться на випадок від’ємних дійсних чисел. Тому зараз ми будемо розглядати **тільки невід’ємні** дійсні числа та операції над ними.

Будемо вважати, що десятковий дріб

$$x = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \ldots \tag{2.1}$$

($a_i \in [0,9]$; $i = 1,2,\ldots$; a_0 – довільне ціле невід’ємне число) є **скінченним**, якщо, починаючи з деякого номера $n+1$, усі числа a_i дорівнюють нулю, тобто $a_i = 0$ при $i \ge n+1$. Отже, скінченний десятковий дріб x_n записуємо у такому вигляді:

$$x_n = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_n, \ (0 = a_{n+1} = a_{n+2} = a_{n+3} = \ldots\ ). \tag{2.2}$$

Згідно із прийнятими правилами десяткового запису дріб (2.2) записують як певне раціональне число так:

$$x_n = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot 10^{-i} = \frac{\sum_{j=0}^{n} a_j \cdot 10^{n-j}}{10^n}. \tag{2.3}$$

Означення. Раціональне число x_n, яке задане формулою (2.2), будемо називати нижнім $n-$значним наближенням дійсного числа x (2.1), а раціональне число

$$\overline{x}_n = x_n + 10^{-n} \tag{2.4}$$

будемо називати верхнім $n-$значним наближенням дійсного числа x (2.1). Отже, за цим означенням для дійсного числа x (2.1) маємо такі нерівності з раціональних чисел: $x_n < x < \overline{x}_n$.

Для від’ємних дійсних чисел $x = -y (y \ge 0)$ маємо

$$x_n = -\overline{y}_n, \quad \overline{x}_n = -y_n.$$

2. Порівняння дійсних чисел через раціональні.

Введемо операцію порівняння дійсних чисел x і y.

Означення 1. Будемо вважати, що дійсне число $x = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots$ більше дійсного числа $y = b_0, b_1 b_2 b_3 \dots b_n \dots$, якщо існує такий номер $n \geq 0$, що

$$x_n > \overline{y}_n \tag{2.5}$$

В такому випадку будемо писати, що $x > y$.

Очевидно, що раціональні числа x_n та y_n **не зменшуються** разом із збільшенням номера n, так що має місце ланцюжок таких нерівностей

$$x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots; \quad y_0 \leq y_1 \leq y_2 \leq \dots \tag{2.6}$$

Навпаки, верхні наближення $\overline{x}_n$ і $\overline{y}_n$ **не збільшуються** разом зі збільшенням номера n:

$$\overline{x}_0 \geq \overline{x}_1 \geq \overline{x}_2 \geq \dots \quad \overline{y}_0 \geq \overline{y}_1 \geq \overline{y}_2 \geq \dots \tag{2.7}$$

Звідси випливає, що якщо нерівність (2.5) виконана для $n = n_0$, то вона має силу також і для $n > n_0$. Тому одночасне виконання нерівностей $x > y$ і $x < y$ неможливе і вони взаємно виключені. Це означає, що операція порівняння дійсних чисел через раціональні введена **коректно** (правильно).

Означення 2. *Якщо для двох дійсних чисел x і y не виконана жодна з двох умов: 1) $x > y$ та 2) $x < y$, то числа x і y називаються рівними, і записується це так: $x = y$.*

Ці два означення **впорядковують множину дійсних чисел**, встановлюючи між довільними двома числами x і y одне з трьох взаємно виключених співвідношень:

$$x > y, \quad x < y, \quad x = y.$$

Задача для СРС. Довести **властивість транзитивності** правил порівняння, тобто довести, що із співвідношень $x > y$, $y > z$ випливає, що $x > z$.

Дійсно, з нерівності $x > y$ слідує, що існує такий номер n_1, що при $n \geq n_1$ маємо нерівності $x_n > \overline{y}_n$. З другої нерівності ($y > z$) випливає, що при $n \geq n_2$ виконуються нерівності $y_n > \overline{z}_n$. Тому при $n \geq \max(n_1, n_2)$ одночасно мають силу нерівності $x_n > \overline{y}_n > y_n > \overline{z}_n$, тобто $x_n > \overline{z}_n$. А це і означає, що $x > z$.

Зрозуміло, що згідно із означенням операції порівняння два числа

$$x = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_k (9)$$

та $$y = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_k (0) + 10^{-k} \text{ або } y = a_0, a_1 a_2 \ldots a_k + 1(0)$$

дорівнюють одне одному ($x = y$), хоча і представлені у вигляді різних нескінченних десяткових дробів. Наприклад, десяткові дроби $3,5(0)$ та $3,4(9)$ є рівними.

Отже, деякі раціональні числа можуть мати два рівноправних представлення у вигляді нескінченного десяткового дробу.

У відповідності до наших означень для довільного дійсного числа x маємо нерівності $x_n < x < \overline{x}_n$, які є справедливими для всіх $n = 0, 1, 2, \ldots$

Оскільки $\overline{x}_n - x_n = 10^{-n}$, то кожне із двох раціональних чисел $x_n, \overline{x}_n$ є наближеним значенням числа x з точністю до $\varepsilon = 10^{-n}$ (перше з недостачею, а друге з надлишком).

Висновок. Збільшуючи номер n, можна з будь якою наперед заданою точністю апроксимувати знизу і зверху дійсне число x за допомогою раціональних чисел $x_n, \overline{x}_n$ відповідно.

Теорема. *Нехай x і y – дійсні числа, причому $x < y$. Тоді існує таке раціональне число r, що $x < r < y$.*

Доведення. Оскільки $x < y$, то існує таке число $n \geq 0$, що $\overline{x}_n < y_n$, де $\overline{x}_n, y_n$ – верхнє і нижнє n – значні наближення чисел x і y відповідно. Нагадаємо, що $x_n < x < \overline{x}_n$ і $y_n < y < \overline{y}_n$. Виберемо за раціональне число r, про яке йдеться в умові Теореми, число $r = \dfrac{\overline{x}_n + y_n}{2}$. Для числа r мають місце очевидні нерівності: $x \leq \overline{x}_n < r < y_n \leq y$. Отже, $x < r < y$ і **Теорему доведено**.

Теорема (про незліченність множини дійсних чисел). *Множина дійсних чисел незліченна*.

Доведення. Раніше вже було доведено, що множина нескінченних десяткових дробів є **незліченною**. Проте деякі раціональні числа допускають два різних представлення у вигляді нескінченного десяткового дробу. Якщо для кожного з таких раціональних чисел обрати одне з можливих представлень у вигляді десяткового дробу, а друге («дублера») відкинути, то виявиться, що кожне дійсне число записується у вигляді нескінченного десяткового дробу однозначно. Множина відкинутих десяткових дробів не більше, ніж **злічення** (через те, що множина раціональних чисел є зліченною). Тому множина дійсних чисел є **незліченною**, тобто потужність множини дійсних чисел – $\aleph_1$. Нагадаємо, що потужність множини натуральних і раціональних чисел – $\aleph_0$. Теорему доведено.

3. Топологія прямої. Відповідність між дійсними числами і точками нескінченної прямої.

Розглянемо нескінченну пряму, на якій вказані дві точки O і E (рис. 2.1). Точка O називається початком відліку, відрізок OE – масштабним відрізком. Точці O поставимо у відповідність дійсне число $0,(0)$, яке називатимемо нулем. Довільній точці M прямої OE (числової прямої) поставимо у відповідність певне дійсне число, зазначивши, яким чином записується нескінченний десятковий дріб

$$x = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots,$$

який відповідає точці M.

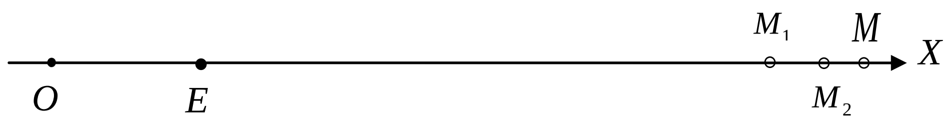

Рис. 2.1

Нехай точка E лежить справа від точки O. Будемо розглядати лише ті точки M, які лежать справа від точки O, через те, що точкам, які лежать зліва від точки O, відповідатимуть від'ємні дійсні числа, десяткові знаки $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots a_n, \dots$ яких визначаються у такий же спосіб, що і для точок справа від точки O. Число a_0 вважатимемо рівним максимальному числу відрізків OE, які укладаються всередині відрізка OM. Якщо при цьому не виникає остача, то ми вважаємо, що

$$x = a_0,(0), \text{ або } x = a_0 - 1,(9),$$

що є одним і тим же через те, що обидва цих дійсних числа рівні між собою. Отже, точці M відповідає число $x = a_0,(0)$, або $x = a_0 - 1,(9)$.

Якщо відрізок OE укладається всередині відрізка OM a_0 разів і залишається остача M_1M, яка за довжиною є меншою, ніж відрізок OE, то цифру a_1 знаходимо як найбільше число відрізків $OE_1 = \frac{1}{10} \cdot OE$, які повністю укладаються всередині відрізка M_1M. Якщо при цьому остача не виникає, то покладемо $x = a_0, a_1(0)$, або $x = a_0, a_1 - 1(9)$. Якщо ж виникає остача M_2M, то переходимо до аналогічного визначення цифри a_2, порівнюючи M_2M з відрізком $OE_2 = \frac{1}{10} \cdot OE_1 = \frac{1}{100} \cdot OE$. Отже, точці M відповідає число $x = a_0, a_1(0)$, або $x = a_0, a_1 - 1(9)$.

Продовжуючи цей процес, ми отримали можливість визначити будь-яку цифру a_k нескінченного десяткового дробу $x = a_0, a_1a_2a_3\ldots a_n\ldots$, який відповідає точці M числової прямої.

Зазначеною побудовою числової послідовності $a_0, a_1a_2a_3\ldots a_n\ldots$ кожній точці M прямої ми ставимо у відповідність цілком визначене дійсне число x. Очевидно, що різним точкам M' і M'' прямої відповідають різні (не рівні одне одному) дійсні числа x' і x''.

Тепер встановимо обернену відповідність, тобто кожному дійсному числу

$$x = a_0, a_1a_2a_3\ldots a_n\ldots$$

потрібно поставити у відповідність певну точку M прямої OE. Для цього скористаємося «**властивістю неперервності**» дійсної прямої у сенсі **Кантора,** яку ми приймемо як аксіому. Ця властивість формулюється так: **для довільної послідовності «вкладених» відрізків $\{M_nM'_n\}$ існує хоча би одна точка M, яка належить довільному з відрізків $M_nM'_n$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$).**

Термін «**послідовність вкладених відрізків»** означає, що кожна точка M_{n+1} лежить не лівіше, ніж точка M_n, а кожна точка M'_{n+1} лежить не правіше точки M'_n при всіх $n = 1, 2, 3, \ldots$ Іншими словами, $[M_{n+1}, M'_{n+1}] \subset [M_n, M'_n] \quad \forall n \in N$.

Тут ми припускаємо, що кожне раціональне число має свій геометричний образ на числовій осі. Тоді довільному **раціональному числу** $x_n = a_0, a_1a_2a_3\ldots a_n(0)$ відповідає певна точка M_n числової прямої OE, така, що

$$x_n \to OM_n = a_0 \cdot OE + a_1 \cdot \frac{1}{10} \cdot OE + \ldots + a_n \cdot \frac{1}{10^n} \cdot OE;$$

аналогічно, раціональному числу $\bar{x}_n$ відповідає точка $\bar{M}_n$:

$$\bar{x}_n \to O\bar{M}_n = OM_n + OE \cdot 10^{-n}.$$

Тому згідно із властивістю упорядкованості дійсних чисел маємо: $x_n < x < \bar{x}_n$. Точка M, яка відповідає дійсному числу x, має належати відрізку $M_n\bar{M}_n$ для довільного $n = 1, 2, 3, \ldots$ Через те, що $x_{n+1} \geq x_n$, $\bar{x}_{n+1} \leq \bar{x}_n$, то послідовність $\{M_n\bar{M}_n\}$ є послідовністю вкладених відрізків. Всі ці вкладені відрізки утворені раціональними числами x_n і $\bar{x}_n$ при $n = 1, 2, 3, \ldots$ За властивістю **неперервності дійсної прямої** існує точка M, яка належить одночасно всім відрізкам $M_n\bar{M}_n (n = 1, 2, 3, \ldots)$. Не існує двох різних точок M і M', які належать одночасно усім відрізкам $M_n\bar{M}_n$ через те, що довжина відрізка $M_n\bar{M}_n$ дорівнює $\frac{1}{10^n}$ частини довжини OE та при достатньо великому номері n може бути зробленою як завгодно малою. Іншими словами, маємо: $M_n\bar{M}_n = O\bar{M}_n - OM_n = OE \cdot 10^{-n} \to 0$, якщо $n \to \infty$.

Висновок. Отже, кожному дійсному числу x відповідає певна точка M числової прямої і кожній точці числової прямої відповідає певне дійсне число x. Таким чином, ми встановили взаємно однозначну відповідність між множиною дійсних чисел і множиною точок числової прямої.

Очевидно, що точці O відповідає число $0,(0)$, а точці E - число $1,(0)$, або рівне йому число $0,(9)$.

Тепер можна просто геометрично проілюструвати **властивість неперервності** множини дійсних чисел. Розглянемо деяку числову напівпряму L (рис.2.2), на якій зображені числові множини A і B. Кожна точка $a \in A$ розташована лівіше, ніж кожна точка $b \in B$. Тому множина A (як множина точок на прямій, що зображують числа цієї множини) розташована цілком лівіше точок множини B. **Властивість неперервності дійсних чисел стверджує**, що між цими множинами A і B **існує така точка** c**,** яка «відділяє одну множину від іншої» (рис.2.2, де точку c можна вибрати багатьма різними способами), – факт геометрично цілком очевидний.

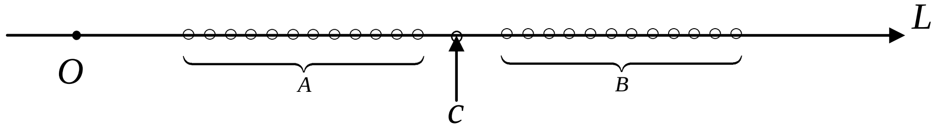

Рис. 2.2

4. Упорядковані і обмежені множини.

Означення. *Непорожня множина* A *елементів* $\{a_i\}$ *називається* ***упорядкованою**, якщо задано закон порівняння її елементів, який задовольняє наступні умови (аксіоми порядку):*

а) для довільних елементів a_i, $a_j \in A$ *має місце тільки одна з трьох можливостей: 1)* $a_i > a_j$*, 2)* $a_i < a_j$*, 3)* $a_i = a_j$ *(в останньому випадку елементи* a_i *і* a_j *вважаються тотожними.*

б) якщо $a_i > a_j$ *та* $a_j > a_k$*, то* $a_i > a_k$.

Означення верхньої і нижньої граней множини. *Нехай* $B-$ *упорядкована множина і* $A \subset B$*. Множина* A *називається* ***обмеженою зверху (знизу),*** *якщо існує такий елемент* $b_M \in B$ *(*$b_m \in B$*), що для всіх елементів* $x \in A$ *виконується умова* $x \le b_M$ *(*$b_m \le x$*). В цьому випадку елементи* b_m *і* b_M *називаються відповідно* ***нижньою і верхньою гранями*** *множини* A.

Означення. *Множина називається* ***обмеженою**, якщо вона є обмеженою знизу і зверху.*

Наведемо приклади обмежених множин.

Нехай $B-$множина усіх дійсних чисел, яка є упорядкованою. Розглянемо деякі обмежені підмножини множини B.

1. Нехай $A = \{1, 2, \ldots, n\} \subset N \subset R$. За b_m можна взяти довільне дійсне число, яке не перевищує 1, а за b_M – довільне число, яке не менше, ніж n.

2. Нехай $A-$множина усіх дійсних чисел, $A \subset R$, які задовольняють умову $a < x < b$. Така множина називається **інтервалом** і позначається так: $A = (a, b)$. В цьому випадку $b_m \le a$, $b_M \ge b$.

3. Множину A дійсних чисел, $A \subset R$, задану умовою $a \le x \le b$, називають **відрізком** або **сегментом** і позначають $[a,b]$. В цьому випадку також $b_m \le a$, $b_M \ge b$.

4. Якщо множину $A \subset R$ дійсних чисел задано умовою $a \le x < b$, то її називають **напівінтервалом** і позначають $[a,b)$; якщо ж множину A задано умовою $a < x \le b$, то її позначаємо у такий спосіб $(a,b]$. У цих випадках також $b_m \le a$, $b_M \ge b$.

5. Точні грані множини.

Означення. *Якщо серед верхніх граней множини $A, A \subseteq B$, існує найменша верхня грань b_M, то цей елемент $b_M \in B$ називають **точною верхньою гранню** множини A і позначають символом $b_M = \sup A$ (супремум A). Аналогічно, найбільша серед всіх нижніх граней множини A, нижня грань b_m, називається **точною нижньою гранню** множини A і позначається символом $b_m = \inf A$ (інфімум A).*

Зауваження 1. Нехай $\bar{a} = \sup A$, $A \subseteq B$. Тоді, якщо $b' \in B$ та $b' < \bar{a} = \sup A$, то обов'язково знайдеться хоча би один такий елемент $a \in A$, що $a > b'$.

Дійсно, якщо б такого елемента $a \in A$, що $a > b'$, не існувало, то елемент b' за означенням був би верхньою гранню множини A, що вступає у протиріччя з тим, що $\bar{a} = \sup A$ – найменша серед усіх верхніх граней.

Зауваження 2. *Нехай $\bar{a} \in B$ і $A \subseteq B$. Нехай елемент $\bar{a}$ задовольняє такі умови: 1) для всіх $a \in A$ виконується нерівність $a \le \bar{a}$; 2) якщо $b' \in B$ і $b' < \bar{a}$, то знайдеться такий елемент $a \in A$, що $a > b'$.*

Тоді $\bar{a}$ є точною верхньою гранню множини A.

Насправді, умова 1) означає, що $\bar{a}$ – верхня грань множини A, а умова 2) – що це найменша серед усіх верхніх граней.

Отже, **умови 1) і 2) повністю виражають властивості точної верхньої грані**. Ці умови можна було би прийняти за означення точної верхньої грані.

Іноді точні верхню і нижню грані множини A називають **границями множини** A.

Зауваження. Точні грані множини A можуть як належати, так і не належати множині A. Наприклад, нехай $B -$множина усіх дійсних чисел, а множина $A -$ інтервал (a,b). Тоді $\inf A = a \notin A$, $\sup A = b \notin A$. Якщо множина A представляє собою напівінтервал $[a,b)$, то $\inf A = a \in A$, $\sup A = b \notin A$.

Існування у довільної обмеженої зверху (знизу) множини $X = \{x\}$ точної верхньої (нижньої) грані **не є очевидним фактом** і потребує доведення.

6. Теорема 5 про існування точних граней обмеженої множини (І.-П.).

Якщо множина $X=\{x\}$ дійсних чисел містить хоча б один елемент (тобто є непорожньою) і обмежена зверху (знизу), то існує дійсне число $\overline{x}$ ($\underline{x}$), яке є точною верхньою (точною нижньою) гранню множини $X=\{x\}$.

Доведення. Ми зупинимося лише на доведенні існування точної верхньої грані у довільної обмеженої зверху множини, бо існування точної нижньої грані у довільної обмеженої знизу множини доводиться аналогічно.

Отже, нехай множина $X=\{x\}$ є обмеженою зверху, тобто існує таке дійсне число M, що кожен елемент x з множини $X=\{x\}$ задовольняє нерівність

$$x\le M \tag{2.8}$$

Тут можуть виникнути два випадки.

1^0. Серед елементів множини $X=\{x\}$ є хоча б одне невід'ємне дійсне число.

2^0. Всі елементи множини $X=\{x\}$ є від'ємними дійсними числами. Ці два випадки розглянемо окремо.

1^0. Розглянемо лише невід'ємні дійсні числа, що входять до складу множини $X=\{x\}$. Кожне з цих чисел представимо у вигляді нескінченного десяткового дробу і розглянемо цілі частини цих десяткових дробів. В силу (2.8) всі цілі частини не перевищують числа M, і тому знайдеться найбільша з цілих частин, яку ми позначимо через $\overline{x}_0$. Збережемо серед невід'ємних чисел множини $X=\{x\}$ ті, у яких ціла частина дорівнює $\overline{x}_0$, і відкинемо всі інші числа. У збережених чисел розглянемо перші десяткові знаки після коми. Найбільший серед цих знаків позначимо через $\overline{x}_1$. Збережемо серед невід'ємних чисел множини $X=\{x\}$ ті, у яких ціла частина дорівнює $\overline{x}_0$, а перший десятковий знак після коми дорівнює $\overline{x}_1$, і відкинемо всі інші числа. У збережених чисел розглянемо другі десяткові знаки після коми. Найбільший серед цих знаків позначимо через $\overline{x}_2$. Продовжуючи аналогічні міркування далі, ми послідовно визначимо десяткові знаки певного десяткового числа $\overline{x}$: $\overline{x}=\overline{x}_0,\overline{x}_1\overline{x}_2\ldots\overline{x}_n\ldots$. Це є претендент на $\sup X$.

Доведемо, що це дійсне число $\overline{x}$ і є точною верхньою гранню множини X, тобто $\overline{x}=\sup X$.

Для цього достатньо довести **два твердження**: **1)** що кожен елемент x множини $X=\{x\}$ задовольняє нерівність $x \le \bar{x}$; **2)** що, яке б не було дійсне число x' («можливий інший претендент на точну верхню грань»), яке є меншим за число $\bar{x}$, то знайдеться хоча б один елемент x множини $X=\{x\}$, який задовольняє нерівність $x' < x$, тобто $x' < x < \bar{x}$.

Доведемо твердження 1). Через те, що число $\bar{x}$ є невід'ємним, то будь-яке від'ємне число x з множини $X=\{x\}$ тим більше задовольняє нерівність $x \le \bar{x}.$

Нехай тепер $x = x_0, x_1 x_2 \ldots x_n \ldots -$ довільне невід'ємне дійсне число, яке входить у склад множини $X=\{x\}$. Припустимо, що це число x не задовольняє нерівність $x \le \bar{x}.$ Тоді число x має задовольняти протилежну нерівність $x > \bar{x}$ і за правилом порівняння десяткових дробів знайдеться такий номер k, що

$$x_0 = \bar{x}_0,\, x_1 = \bar{x}_1, \ldots, x_{k-1} = \bar{x}_{k-1},\, x_k > \bar{x}_k\,.$$

Разом з тим останні співвідношення вступають у протиріччя з тим фактом, що за елемент $\bar{x}_k$ ми обирали **найбільший** зі всіх десяткових знаків x_k тих елементів x, у яких ціла частина і перші $(k-1)$ знаків після коми відповідно дорівнюють $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_{k-1}$. Таким чином, твердження 1) доведене.

Доведемо твердження 2). Нехай $x' = x'_0, x'_1 x'_2 \ldots x'_n \ldots -$ довільне дійсне число, яке є меншим за $\bar{x}$. Це число ми будемо вважати невід'ємним, бо якщо би воно було від'ємним, то нерівність $x' < x$ задовольняв будь-який невід'ємний елемент x з множини $X=\{x\}$. Тоді в силу правила порівняння дійсних чисел знайдеться такий номер n, що

$$x'_0 = \bar{x}_0,\, x'_1 = \bar{x}_1, \ldots, x'_{n-1} = \bar{x}_{n-1},\, x'_n < \bar{x}_n \tag{2.9}$$

З іншого боку, число $\bar{x}$ ми будували так, що серед елементів множини $X=\{x\}$ знайдеться таке число $x = x_0, x_1 x_2 \ldots x_n \ldots$, ціла частина і перші n десяткових знаків після коми у якого співпадають з числом $\bar{x}$, тобто

$$\bar{x}_0 = x_0,\, \bar{x}_1 = x_1, \ldots, x_{n-1} = \bar{x}_{n-1},\, \bar{x}_n = x_n \tag{2.10}$$

В силу правила порівняння дійсних чисел, з виразів (2.9) і (2.10) дістанемо, що $x' < x$. **Твердження 2) доведено**. Отже, для випадку $\mathbf{1^0}$ існування точної верхньої грані доведене.

2^0. Аналогічно доводиться існування точної верхньої грані і для другого випадку, якщо **всі елементи множини** $X=\{x\}$ є **від'ємними дійсними числами**. В цьому випадку всі елементи множини $X=\{x\}$ представимо у вигляді від'ємних нескінченних десяткових дробів. Побудову потрібного числа $\overline{x}$ здійснюємо з тою лише різницею, що вибір його цілої частини і десяткових знаків після коми проводиться серед тих дробів, у яких вони «послідовно» мінімальні. Позначимо через $\overline{x}_0$ найменшу із цілих частин цих дробів; через $\overline{x}_1$ – найменший з перших десяткових знаків після коми тих з цих дробів, у яких ціла частина дорівнює $\overline{x}_0$; через $\overline{x}_2$ – найменший з других десяткових знаків після коми тих з цих дробів, у яких ціла частина дорівнює $\overline{x}_0$, а перший десятковий знак після коми дорівнює $\overline{x}_1$; і так далі. Отже, у такий спосіб ми визначимо від'ємне число $\overline{x}=-\overline{x}_0,\overline{x}_1\overline{x}_2\ldots\overline{x}_n\ldots$ Аналогічно до випадку **1^0** можна довести, що число $\overline{x}$ є точною верхньою гранню множини $\{x\}$ (тобто це число задовольняє двом твердженням, сформульованим при розгляді випадку **1^0**). Теорему цілком доведено.

Зауваження. При доведенні цієї Теореми для випадку **2^0** у числа $\overline{x}=-\overline{x}_0,\overline{x}_1\overline{x}_2\ldots\overline{x}_n\ldots$ всі десяткові знаки після коми, починаючи з деякого місця, можуть дорівнювати нулю, тобто це число може бути представленим у вигляді $\overline{x}=-\overline{x}_0,\overline{x}_1\overline{x}_2\ldots\overline{x}_{k-1}\overline{x}_k000\ldots$, де $\overline{x}_k\neq 0$.

В цьому випадку залишається в силі наведене вище доведення, але згідно із домовленістю при порівнянні з елементами множини $\{x\}$ число $\overline{x}$ слід записувати у такому вигляді $\overline{x}=-\overline{x}_0,\overline{x}_1\overline{x}_2\ldots\overline{x}_{k-1}(\overline{x}_k-1)999\ldots$ Наприклад, дійсні числа $0,4999\ldots$ і $0,5000\ldots$ вважаються рівними раціональному числу $1/2$.

7. Властивість повноти множини дійсних чисел. Теорема Дедекінда.

Маючи у розпорядженні множину раціональних чисел, ми «**розширили**» її до множини дійсних чисел. При цьому отримали множину більш потужну, ніж множина раціональних чисел.

Дійсно, множина раціональних чисел є **зліченною** (має потужність $\aleph_0$**)**, а множина дійсних чисел є **незліченною** (має потужність $\aleph_1$**)**.

Має місце наступна **Теорема про повноту множини дійсних чисел**, доведена **Дедекіндом**.

Теорема. *Нехай для двох множин дійсних чисел A і B виконуються наступні умови:*

1^0. Довільне дійсне число x належить або A, або B;

2^0. Ні множина A, ні множина B не є порожньою множиною;

3^0. Якщо $a \in A$ і $b \in B$, то $a < b$.

Тоді існує таке одне-єдине дійсне число c, що $a \le c$ для всіх $a \in A$ і $b \ge c$ для всіх $b \in B$. Це число буде або найбільшим у множині A, або найменшим у множині B.

Доведення. Через те, що ні множина A, ні множина B не є порожніми, тому довільний елемент на B є верхньою гранню множини A; в свою чергу будь-який елемент з множини A є нижньою гранню множини B. Згідно із **Теоремою про існування точних граней** непорожньої обмеженої множини дійсних чисел існують відповідні дійсні числа $\sup A$ і $\inf B$.

Покажемо, що $\sup A = \inf B$. Очевидно, що $\sup A \le \inf B$. Якщо ж $\sup A < \inf B$, то знайдеться таке дійсне число x, що $\sup A < x < \inf B$. Це число x не належить ні множині A, ні множині B, що вступає у протиріччя із умовою 1^0 Теореми. Отже, має місце рівність $\sup A = \inf B$. Позначивши $\sup A = \inf B = c$, дістанемо $a \le \sup A = c = \inf B \le b$ для довільного $a \in A$ і довільного $b \in B$.

Таким чином, **існування дійсного числа із потрібними властивостями доведено**.

Зазначимо, що або $c \in A$, або $c \in B$ (за умовою 1^0 Теореми), і одночасно належати обом множинам A і B число c не може. В силу умови 3^0 Теореми множини A і B не перетинаються: $A \cap B = \varnothing$.

Якщо $c \in A$, то число c буде найбільшим в A, оскільки $c = \sup A$. Якщо $c \in B$, то число c буде найменшим в B, оскільки $c = \inf A$.

Доведемо, що існує єдине число c, про яке йде мова в Теоремі. Припустимо протилежне. Тоді існують два числа c і c' ($c < c'$), які задовольняють умови Теореми. Виберемо число x так, щоб виконувались нерівності $c < x < c'$. З умови

$x < c'$ випливає, що $x \in A$, а із умови $c < x$ випливає, що $x \in B$. Отже, виходить, що x належить двом множинам A і B одночасно. Це входить у протиріччя з умовою 1^0 Теореми, і відповідно, існує тільки одне-єдине число c з потрібними властивостями.

Зміст Теореми Дедекінда полягає в тому, що множина дійсних чисел є **повною відносно операцій порівняння**: в цій множині немає «дірок» або незаповнених місць (на числовій прямій).