

Завдання для розрахункової роботи №1.

Варіант №1 (Андрієнко Ф.)

1. Послідовність $\{x_n\}$ набуває значень:

$$x_n = -\frac{1}{7} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2^{n+1} - 11}.$$

Довести, що послідовність $\{x_n\}$ має певну границю при $n \rightarrow \infty$.

2. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2 \left(\pi \sqrt{n^2 + n + 5} \right).$

3. Довести збіжність і знайти границю послідовності:

$$x_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{8} + \dots + \frac{2n-1}{2^n}.$$

4. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\sqrt[n]{2} - 1 \right).$

5. Задане рекурентне співвідношення: $x_{n+1} = 2x_n(1 - 5 \cdot x_n), 0 < x_1 < 1/10$.

Довести, що $\{x_n\}$ має певну границю за Теоремою про існування границі у монотонній і обмеженій послідовності, і обчислити її.

6. Користуючись критерієм Коші довести збіжність послідовності

$$x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$$

7. Знайти границю $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, якщо $x_n = \frac{1^{10} + 2^{10} + 3^{10} + \dots + n^{10}}{n^{10}} - \frac{n}{11}$.

8. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\left(x + \frac{a}{n} \right)^4 + \left(x + \frac{2a}{n} \right)^4 + \dots + \left(x + \frac{(n-1)a}{n} \right)^4 \right].$

9. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[x]{\cos \sqrt{x}}$

10. Знайти границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2^{x+1} + 3^{x+1} + 4^{x+1}}{9} \right)^{\frac{1}{x}}.$

11. Знайти границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2}, m, n - \text{натуральні числа}.$

12. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\cos \frac{2x}{n} + 3 \sin \left(\frac{x}{n} \right)^2 \right)^{n^2}, x - \text{дійсне число}.$

13. Знайти границю: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[k]{(x+a_1) \cdot (x+a_2) \cdot \dots \cdot (x+a_k)} - x \right).$

14. Знайти границю $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ комплексної послідовності: $z_n = \frac{n^2 - (1+n) \cdot i}{n + (1+n^2) \cdot i}.$

Варіант №2 (Бабенко В.)

1. Послідовність $\{x_n\}$ набуває значень:

$$x_n = -\frac{1}{5} - \frac{1}{3} + \frac{1}{1} + \dots + \frac{1}{2^n - 7}.$$

Довести, що послідовність $\{x_n\}$ має певну границю при $n \rightarrow \infty$.

2. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\pi\sqrt{4n^2 + 2n + 9}\right)$.

3. Довести збіжність і знайти границю послідовності:

$$x_n = 0 + \frac{3}{2^2} + \frac{8}{2^3} + \dots + \frac{n^2 - 1}{2^n}.$$

4. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(\sqrt[n]{2} - \sqrt[n+1]{2} \right)$.

5. Задане рекурентне співвідношення: $x_{n+1} = x_n(2 - 5 \cdot x_n)$, $0 < x_1 < 1/5$. Довести, що $\{x_n\}$ має певну границю за Теоремою про існування границі у монотонної і обмеженої послідовності, і обчислити її.

6. Довести, що послідовності x_n і y_n ($n = 1, 2, 3, \dots$), які визначаються формулами: $x_1 = 2$, $y_1 = 8$, $x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$, $y_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n}$, мають спільну границю $c = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$, та знайти її.

7. Користуючись критерієм Коші довести збіжність послідовності

$$x_n = \frac{\sin 1}{3} + \frac{\sin 2}{3^2} + \frac{\sin 3}{3^3} + \dots + \frac{\sin n}{3^n}.$$

8. Знайти границю $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, якщо $x_n = \frac{1^{100} + 2^{100} + 3^{100} + \dots + n^{100}}{n^{100}} - \frac{n}{101}$.

9. Знайти границю: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^n - 2^n) - n2^{n-1}(x - 2)}{(x - 2)^2}$, n – натуральне число.

10. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{3} + \sqrt[n]{5}}{2} \right)^n$.

11. Знайти границю: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1} - 2\sqrt{x}}{x^{-3/2}}$.

12. Знайти границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x \cos 3x}{1 - \cos x}$.

13. Знайти границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{5^{x+1} + 6^{x+1} + 7^{x+1}}{18} \right)^{\frac{1}{x}}$.

14. Знайти $\sqrt[7]{\frac{4-3i}{3+4i}}$.

Варіант №3 (Бехванді Бехранг)

1. Послідовність $\{x_n\}$ набуває значень:

$$x_n = -\frac{1}{12} - \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{3^n - 15}.$$

Довести, що послідовність $\{x_n\}$ має певну границю при $n \rightarrow \infty$.

2. Визначити $l = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ і $L = \overline{\lim}_{x \rightarrow 0} f(x)$ для $f(x) = \left[\sin^2\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) \right]$.

3. Довести збіжність і знайти границю послідовності:

$$x_n = \frac{2}{2^1} + \frac{5}{2^2} + \frac{10}{2^3} + \dots + \frac{n^2 + 1}{2^n}.$$

4. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(\sqrt[n]{3} - \sqrt[n+1]{3} \right)$.

5. Задане рекурентне співвідношення: $x_{n+1} = x_n(2 - 11 \cdot x_n)$, $0 < x_1 < \frac{1}{11}$.

Довести, що $\{x_n\}$ має певну границю за Теоремою про існування границі у монотонній і обмеженій послідовності, і обчислити її.

6. Довести, що послідовності x_n і y_n ($n = 1, 2, 3, \dots$), які визначаються формулами: $x_1 = 9$, $y_1 = 4$, $x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$, $y_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n}$, мають спільну границю: $c = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$, та знайти її.

7. Користуючись критерієм Коші довести збіжність послідовності

$$x_n = \frac{\cos 1!}{1 \cdot 2} + \frac{\cos 2!}{2 \cdot 3} + \frac{\cos 3!}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{\cos n!}{n \cdot (n+1)}$$

8. Знайти границю $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, якщо $x_n = \frac{1^{50} + 2^{50} + 3^{50} + \dots + n^{50}}{n^{50}} - \frac{n}{51}$.

9. Знайти границю: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^n - 3^n) - n3^{n-1}(x - 3)}{(x - 3)^2}$, n – натуральне число.

10. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{7} + \sqrt[n]{11}}{2} \right)^n$.

11. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\cos \frac{x}{n} + \frac{3}{2} \sin \left(\frac{x}{n} \right)^2 \right)^{n^2}$, x – дійсне число.

12. Знайти границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\sqrt{1 + 2x^2 + 4x^3} + x \right)^n - \left(\sqrt{1 + 2x^2 - 2x^3} + x \right)^n}{3x^3}$, n – натуральне число.

13. Знайти границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3^x + 5^x + 7^x + 9^x}{4} \right)^{\frac{1}{x}}$.

14. Знайти $\sqrt[6]{\frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}i}{\sqrt{3} - i}}$.

Варіант №4 (Борзих В.)

1. Послідовність $\{x_n\}$ набуває значень:

$$x_n = -\frac{1}{7} - \frac{1}{1} + \frac{1}{17} + \dots + \frac{1}{3^n - 10}$$

Довести, що послідовність $\{x_n\}$ має певну границю при $n \rightarrow \infty$.

2. Визначити $l = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ і $L = \overline{\lim}_{x \rightarrow 0} f(x)$ для $f(x) = \left[\sin^2\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) \right]$.

3. Теоретично довести збіжність і знайти границю послідовності:

$$x_n = \frac{1}{2^1} + \frac{7}{2^2} + \frac{15}{2^3} + \dots + \frac{2n^2 - 1}{2^n}.$$

4. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(\sqrt[n]{4} - \sqrt[n+1]{4} \right)$.

5. Задане рекурентне співвідношення: $x_{n+1} = x_n(2 - 7 \cdot x_n)$, $0 < x_1 < \frac{1}{7}$. Довести, що $\{x_n\}$ має певну границю за Теоремою про існування границі у монотонної і обмеженої послідовності, і обчислити її.

6. Довести, що послідовності x_n і y_n ($n = 1, 2, 3, \dots$), які визначаються формулами: $x_1 = 16$, $y_1 = 9$, $x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$, $y_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n}$, мають спільну границю: $c = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$, та знайти її.

7. Користуючись критерієм Коші довести збіжність послідовності

$$x_n = \frac{\sin 1}{1 \cdot 3} + \frac{\sin 3}{3 \cdot 5} + \frac{\sin 5}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{\sin(2n-1)}{(2n-1) \cdot (2n+1)}$$

8. Знайти границю $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, якщо $x_n = \frac{1^{30} + 2^{30} + 3^{30} + \dots + n^{30}}{n^{30}} - \frac{n}{31}$.

9. Знайти границю: $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x^n - 4^n) - n4^{n-1}(x - 4)}{(x - 4)^2}$, n – натуральне число.

10. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{7} + \sqrt[n]{11}}{2} \right)^n$.

11. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\cos \frac{4x}{n} + 6 \sin \left(\frac{x}{n} \right)^2 \right)^{n^2}$, x – дійсне число.

12. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos^n \frac{x}{\sqrt{n}}$.

13. Знайти границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{4^x + 5^x + 6^x + 7^x}{4} \right)^{\frac{1}{x}}$.

14. Виразити через $\cos \varphi$ і $\sin \varphi$ функцію $\sin 5\varphi$.

Варіант №5 (Варущик Д.)

1. Послідовність $\{x_n\}$ набуває значень:

$$x_1 = -\frac{1}{9}, x_2 = -\frac{1}{9} - \frac{1}{8}, x_3 = -\frac{1}{9} - \frac{1}{8} - \frac{1}{6}, \dots, x_n = -\frac{1}{9} - \frac{1}{8} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2^{n-1} - 10}.$$

Довести, що послідовність $\{x_n\}$ має певну границю при $n \rightarrow \infty$.

2. Визначити $l = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ і $L = \overline{\lim}_{x \rightarrow 0} f(x)$ для $f(x) = (2 - x^2) \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

3. Довести збіжність і знайти границю послідовності:

$$x_n = \underbrace{\sqrt{42 + \sqrt{42 + \sqrt{42 + \dots}}}}_n.$$

4. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(\sqrt[n]{13} - \sqrt[n+1]{13} \right)$.

5. Задане рекурентне співвідношення: $x_{n+1} = x_n(2 - 9 \cdot x_n)$, $0 < x_1 < \frac{1}{9}$. Довести, що $\{x_n\}$ має певну границю за Теоремою про існування границі у монотонної і обмеженої послідовності, і обчислити її.

6. Довести, що послідовності x_n і y_n ($n = 1, 2, 3, \dots$), які визначаються формулами: $x_1 = 12$, $y_1 = 3$, $x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$, $y_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n}$, мають спільну границю: $c = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$, та знайти її.

7. Користуючись критерієм Коші довести збіжність послідовності

$$x_n = \frac{\cos 1!}{1^3} + \frac{\cos 2!}{2^3} + \frac{\cos 3!}{3^3} + \dots + \frac{\cos n!}{n^3}$$

8. Знайти границю $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, якщо $x_n = \frac{1^{70} + 2^{70} + 3^{70} + \dots + n^{70}}{n^{70}} - \frac{n}{71}$.

9. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\arctg \frac{1}{2} + \arctg \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \arctg \frac{1}{2 \cdot 3^2} + \dots + \arctg \frac{1}{2 \cdot n^2} \right]$.

10. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{13} + \sqrt[n]{11}}{2} \right)^n$.

11. Знайти границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + 6x + 3x^2 + x^3} - \sqrt[4]{1 + 8x + 4x^2 + 12x^3}}{6x^3}$.

12. Знайти границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + x \cdot 2^x}{1 + x \cdot 3^x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$.

13. Знайти границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2^x + 3^x + 4^x + 5^x}{4} \right)^{\frac{1}{x}}$.

14. Знайти $\sqrt[7]{-1 - \sqrt{3}i}$.

Варіант №6 (Волощенко О.)

1. Послідовність $\{x_n\}$ набуває значень:

$$x_n = -\frac{1}{5} + \frac{1}{1} + \frac{1}{25} + \dots + \frac{1}{2^{2n-1} - 7}.$$

Довести, що послідовність $\{x_n\}$ має певну границю при $n \rightarrow \infty$.

2. Визначити $l = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ і $L = \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} f(x)$ для $f(x) = \frac{x}{1 + x^2 \sin^2 x}$, $x \geq 0$.

3. Довести збіжність і знайти границю послідовності:

$$x_n = \frac{3}{2^1} + \frac{9}{2^2} + \frac{17}{2^3} + \dots + \frac{2n^2 + 1}{2^n}$$

4. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 (\sqrt[n]{6} - \sqrt[n+1]{6})$.

5. Задане рекурентне співвідношення: $x_{n+1} = 2x_n(1 - 2x_n)$, $0 < x_1 < \frac{1}{4}$. Довести, що $\{x_n\}$ має певну границю за Теоремою про існування границі у монотонної і обмеженої послідовності, і обчислити її.

6. Довести, що послідовності x_n і y_n ($n = 1, 2, 3, \dots$), які визначаються формулами: $x_1 = 8$, $y_1 = 9$, $x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$, $y_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n}$, мають спільну границю: $c = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$, та знайти її.

7. Користуючись критерієм Коші довести збіжність послідовності

$$x_n = \frac{\sin 1}{1^2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \frac{\sin 3}{3^2} + \dots + \frac{\sin n}{n^2}$$

8. Знайти границю $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, якщо $x_n = \frac{1^{20} + 2^{20} + 3^{20} + \dots + n^{20}}{n^{20}} - \frac{n}{21}$.

9. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\left(x + \frac{a}{n} \right)^3 + \left(x + \frac{2a}{n} \right)^3 + \dots + \left(x + \frac{(n-1)a}{n} \right)^3 \right]$.

10. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{17} + \sqrt[n]{6}}{2} \right)^n$.

11. Знайти границю: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin^2(\pi \cdot 2^x)}{\ln[\cos(\pi \cdot 2^x)]}$.

12. Знайти границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(xe^x) - \cos(xe^{-x})}{x^3}$.

13. Знайти границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^{x^2} - 3^{x^2}}{(5^x - 3^x)^2}$.

14. Знайти $\sqrt[4]{\frac{-\sqrt{3} - i}{1 - \sqrt{3}i}}$.

Варіант №7 (Гончар М.)

1. Послідовність $\{x_n\}$ набуває значень:

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{11}-13} - \frac{1}{2} + \frac{1}{11\sqrt{11}-13} + \dots + \frac{1}{(\sqrt{11})^n - 13}.$$

Довести, що послідовність $\{x_n\}$ має певну границю при $n \rightarrow \infty$.

2. Визначити $m = \inf x_n$, $M = \sup x_n$, $l = \varliminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ і $L = \varlimsup_{n \rightarrow \infty} x_n$, для послідовності

$$x_n = 1 + \frac{n}{n+1} \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right).$$

3. Довести збіжність і знайти границю послідовності:

$$x_n = \frac{2}{2^1} + \frac{5}{2^2} + \frac{10}{2^3} + \dots + \frac{n^2 + 1}{2^n}.$$

4. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(\sqrt[n]{7} - \sqrt[n+1]{7} \right)$.

5. Задане рекурентне співвідношення: $x_{n+1} = 2x_n(1 - 3x_n)$, $0 < x_1 < 1/6$. Довести, що $\{x_n\}$ має певну границю за Теоремою про існування границі у монотонної і обмеженої послідовності, і обчислити її.

6. Довести, що послідовності x_n і y_n ($n = 1, 2, 3, \dots$), які визначаються формулами: $x_1 = 2$, $y_1 = 72$, $x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$, $y_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n}$, мають спільну границю: $c = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$, та знайти її.

7. Користуючись критерієм Коші довести збіжність послідовності

$$x_n = \frac{\sin 1!}{1 \cdot 4} + \frac{\sin 4!}{4 \cdot 7} + \frac{\sin 7!}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{\sin(3n-2)!}{(3n-2)(3n+1)}$$

8. Знайти границю $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, якщо $x_n = \frac{1^{40} + 2^{40} + 3^{40} + \dots + n^{40}}{n^{40}} - \frac{n}{41}$.

9. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{7}{2} \cdot \cos \frac{7}{2^2} \cdot \cos \frac{7}{2^3} \cdot \dots \cdot \cos \frac{7}{2^n} \right)$.

10. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{7} + \sqrt[n]{14}}{2} \right)^n$.

11. Знайти границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \sin x \cdot \cos \alpha x}{1 + \sin x \cdot \cos \beta x} \right)^{\operatorname{ctg} x^3}$.

12. Знайти границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^{p+x} + 7^{p-x} - 2 \cdot 7^p}{x^2}$, p – дійсне число.

13. Знайти границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{7^{x+1} + 8^{x+1} + 9^{x+1}}{24} \right)^{\frac{1}{x}}$.

14. Знайти суму: $S(n) = \sin \varphi + \sin 3\varphi + \sin 5\varphi + \dots + \sin(2n-1)\varphi$.

Варіант №8 (Граділь А.)

1. Послідовність $\{x_n\}$ набуває значень:

$$x_n = -\frac{1}{3} + \frac{1}{1} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{2^{n+1} - 7}$$

Довести, що послідовність $\{x_n\}$ має певну границю при $n \rightarrow \infty$.

2. Визначити $m = \inf x_n$, $M = \sup x_n$, $l = \lim_{x \rightarrow \infty} x_n$ і $L = \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} x_n$, для послідовності

$$x_n = \frac{n-1}{n+1} \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right).$$

3. Довести збіжність і знайти границю послідовності:

$$x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n}$$

4. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(\sqrt[n]{8} - \sqrt[n+1]{8} \right)$.

5. Задане рекурентне співвідношення: $x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n}$, $x_1 = 1$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Знайти послідовності $\{x_n\}$.

6. Довести, що послідовності x_n і y_n ($n = 1, 2, 3, \dots$), які визначаються формулами: $x_1 = 2$, $y_1 = 72$, $x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$, $y_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n}$, мають спільну границю: $c = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$, та знайти її.

7. Користуючись критерієм Коші довести збіжність послідовності

$$x_n = \frac{\sin 1!}{1 \cdot 4} + \frac{\sin 4!}{4 \cdot 7} + \frac{\sin 7!}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{\sin(3n-2)!}{(3n-2)(3n+1)}$$

8. Знайти границю $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, якщо $x_n = \frac{1^{90} + 2^{90} + 3^{90} + \dots + n^{90}}{n^{90}} - \frac{n}{91}$.

9. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{e}{2} \cdot \cos \frac{e}{2^2} \cdot \cos \frac{e}{2^3} \cdot \dots \cdot \cos \frac{e}{2^n} \right)$.

10. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{8} + \sqrt[n]{16}}{2} \right)^n$.

11. Знайти границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \sin x \cdot \cos \alpha x}{1 + \sin x \cdot \cos \beta x} \right)^{\operatorname{ctg} x^3}$.

12. Знайти границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{8^{p+x} + 8^{p-x} - 2 \cdot 8^p}{x^2}$, p – дійсне число.

13. Знайти границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{7^{x+1} + 8^{x+1} + 9^{x+1}}{24} \right)^{\frac{1}{x}}$.

14. Знайти $\sqrt[5]{\frac{-\sqrt{3} + i}{1 + \sqrt{3}i}}$.

Варіант №9 (Довганюк Л.)

1. Послідовність $\{x_n\}$ набуває значень:

$$x_n = -\frac{1}{8} - \frac{1}{7} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2^{n-1} - 9}.$$

Довести, що послідовність $\{x_n\}$ має певну границю при $n \rightarrow \infty$.

2. Визначити $m = \inf x_n$, $M = \sup x_n$, $l = \varliminf_{x \rightarrow \infty} x_n$ і $L = \varlimsup_{x \rightarrow \infty} x_n$, для послідовності

$$x_n = 1 + n \sin \frac{\pi n}{2}.$$

3. Довести збіжність послідовності:

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$$

4. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 (\sqrt[n]{9} - \sqrt[n+1]{9})$.

5. Задане рекурентне співвідношення: $x_{n+1} = \frac{2}{1+x_n}$, $x_1 = 3$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Знайти границю послідовності $\{x_n\}$.

6. Довести, що послідовності x_n і y_n ($n = 1, 2, 3, \dots$), які визначаються формулами: $x_1 = 4$, $y_1 = 36$, $x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$, $y_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n}$, мають спільну границю: $c = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$, та знайти її.

7. Користуючись критерієм Коші довести збіжність послідовності

$$x_n = \frac{\cos 1}{1 \cdot 6} + \frac{\cos 6}{6 \cdot 11} + \frac{\cos 11}{11 \cdot 16} + \dots + \frac{\cos(5n-4)}{(5n-4)(5n+1)}$$

8. Знайти границю $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, якщо $x_n = \frac{1^{45} + 2^{45} + 3^{45} + \dots + n^{45}}{n^{45}} - \frac{n}{46}$.

9. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{9}{2} \cdot \cos \frac{9}{2^2} \cdot \cos \frac{9}{2^3} \cdot \dots \cdot \cos \frac{9}{2^n} \right)$.

10. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{3} + \sqrt[n]{9}}{2} \right)^n$.

11. Знайти границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{9^{x^2} - 2^{x^2}}{(9^x - 2^x)^2}$.

12. Знайти границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{9^{p+x} + 9^{p-x} - 2 \cdot 9^p}{x^2}$, p – дійсне число.

13. Знайти границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2^{x+1} + 5^{x+1} + 8^{x+1}}{15} \right)^{\frac{1}{x}}$.

14. Знайти $\sqrt[4]{\frac{-1 - \sqrt{3}i}{\sqrt{2} - \sqrt{2}i}}$.

Варіант №10 (Дячук Д.)

1. Послідовність $\{x_n\}$ набуває значень:

$$x_n = -\frac{1}{7} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2^{n+1} - 11}.$$

Довести, що послідовність $\{x_n\}$ має певну границю при $n \rightarrow \infty$.

2. Визначити $m = \inf x_n$, $M = \sup x_n$, $l = \varliminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ і $L = \varlimsup_{n \rightarrow \infty} x_n$, для послідовності

$$x_n = (-1)^{n-1} \left(2 + \frac{3}{n} \right).$$

3. Довести рівність, пов'язану з обчисленням числа e :

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n!n}, 0 < \theta_n < 1$$

4. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(\sqrt[n]{10} - \sqrt[n+1]{10} \right)$.

5. Задане рекурентне співвідношення: $x_{n+1} = \frac{3}{2 + x_n}$, $x_1 = -10$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Знайти границю послідовності $\{x_n\}$.

6. Довести, що послідовності x_n і y_n ($n = 1, 2, 3, \dots$), які визначаються формулами: $x_1 = 25$, $y_1 = 1$, $x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$, $y_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n}$, мають спільну границю: $c = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$, та знайти її.

7. Користуючись критерієм Коші довести збіжність послідовності

$$x_n = \frac{\sin 1}{1 \cdot 2} + \frac{\sin 2}{2 \cdot 3} + \frac{\sin 3}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{\sin n}{n(n+1)}$$

8. Знайти границю $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, якщо $x_n = \frac{1^{27} + 2^{27} + 3^{27} + \dots + n^{27}}{n^{27}} - \frac{n}{28}$

9. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{10}{2} \cdot \cos \frac{10}{2^2} \cdot \cos \frac{10}{2^3} \cdot \dots \cdot \cos \frac{10}{2^n} \right)$.

10. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{5} + \sqrt[n]{10}}{2} \right)^n$.

11. Знайти границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{10^{x^2} - 5^{x^2}}{(10^x - 5^x)^2}$.

12. Знайти границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{10^{p+x} + 10^{p-x} - 2 \cdot 10^p}{x^2}$, p – дійсне число.

13. Знайти границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{5^{x+1} + 10^{x+1} + 15^{x+1}}{30} \right)^{\frac{1}{x}}$.

14. Виразити через $\sin \varphi$ і $\cos \varphi$ функцію $\sin 6\varphi$.

Варіант №11 (Захарченко В.)

1. Послідовність $\{x_n\}$ набуває значень:

$$x_n = -\frac{1}{3} - \frac{1}{1} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{3^{n-1} - 4}.$$

Довести, що послідовність $\{x_n\}$ має певну границю при $n \rightarrow \infty$.

2. Визначити $m = \inf x_n$, $M = \sup x_n$, $l = \lim_{x \rightarrow \infty} x_n$ і $L = \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} x_n$, для послідовності

$$x_n = (-n)(2 + (-1)^n).$$

3. Довести збіжність послідовності і знайти її границю $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$:

$$x_n = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots + n(n+1)(n+2)}{n^4 + 4n^3 + n + 11}.$$

4. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(\sqrt[n]{11} - \sqrt[n+1]{11} \right).$

5. Задане рекурентне співвідношення: $x_{n+1} = \frac{11}{10 + x_n}$, $x_1 = -5$, $n = 1, 2, 3, \dots$.

Знайти границю послідовності $\{x_n\}$.

6. Довести, що послідовності x_n і y_n ($n = 1, 2, 3, \dots$), які визначаються формулами: $x_1 = 9$, $y_1 = 11$, $x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$, $y_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n}$, мають спільну границю: $c = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$, та знайти її.

7. Користуючись критерієм Коші довести збіжність послідовності

$$x_n = \frac{\sin 11}{1 \cdot 2} + \frac{\sin 12}{2 \cdot 3} + \frac{\sin 13}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{\sin(10+n)}{n(n+1)}$$

8. Знайти границю $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, якщо $x_n = \frac{1^{11} + 2^{11} + 3^{11} + \dots + n^{11}}{n^{11}} - \frac{n}{12}$.

9. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{11}{2} \cdot \cos \frac{11}{2^2} \cdot \cos \frac{11}{2^3} \cdot \dots \cdot \cos \frac{11}{2^n} \right).$

10. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{22} + \sqrt[n]{11}}{2} \right)^n.$

11. Знайти границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{22^{x^2} - 11^{x^2}}{(22^x - 11^x)^2}.$

12. Знайти границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{11^{p+x} + 11^{p-x} - 2 \cdot 11^p}{x^2}$, p – дійсне число.

13. Знайти границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{11^{x+1} + 22^{x+1} + 33^{x+1}}{66} \right)^{\frac{1}{x}}.$

14. Знайти $\sqrt[5]{\frac{-2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i}{1 - \sqrt{3}i}}.$

Варіант №12 (Іванов М.)

1. Послідовність $\{x_n\}$ набуває значень:

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{2}-3} - \frac{1}{1} + \frac{1}{2\sqrt{2}-3} + \dots + \frac{1}{(\sqrt{2})^n - 3}.$$

Довести, що послідовність $\{x_n\}$ має певну границю при $n \rightarrow \infty$.

2. Визначити $m = \inf x_n$, $M = \sup x_n$, $l = \lim_{x \rightarrow \infty} x_n$ і $L = \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} x_n$, для послідовності

$$x_n = n^{(-1)^n}.$$

3. Довести збіжність послідовності і знайти її границю $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$:

$$x_n = \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[4]{4} + \dots + \sqrt[n]{n}}{12n + 11}.$$

4. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(\sqrt[n]{12} - \sqrt[n+1]{12} \right)$.

5. Задане рекурентне співвідношення: $x_{n+1} = \frac{12}{11 + x_n}$, $x_1 = -13$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Знайти границю послідовності $\{x_n\}$.

6. Довести, що послідовності x_n і y_n ($n = 1, 2, 3, \dots$), які визначаються формулами: $x_1 = 27$, $y_1 = 12$, $x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$, $y_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n}$, мають спільну

границю: $c = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$, та знайти її.

7. Користуючись критерієм Коші довести збіжність послідовності

$$x_n = \frac{\cos 12}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 13}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 14}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{\cos(11+n)}{(2n-1)(2n+1)}$$

8. Знайти границю $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, якщо $x_n = \frac{1^{12} + 2^{12} + 3^{12} + \dots + n^{12}}{n^{12}} - \frac{n}{13}$.

9. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{12}{2} \cdot \cos \frac{12}{2^2} \cdot \cos \frac{12}{2^3} \cdot \dots \cdot \cos \frac{12}{2^n} \right)$.

10. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{24} + \sqrt[n]{12}}{2} \right)^n$.

11. Знайти границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{24^{x^2} - 12^{x^2}}{(24^x - 12^x)^2}$.

12. Знайти границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{12^{p+x} + 12^{p-x} - 2 \cdot 12^p}{x^2}$, p – дійсне число.

13. Знайти границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{12^{x+1} + 24^{x+1} + 36^{x+1}}{72} \right)^{\frac{1}{x}}$.

14. Знайти $\sqrt[5]{\frac{-2 + 2\sqrt{3}i}{\sqrt{3} + i}}$.

Варіант №13 (Кривенко П.)

1. Послідовність $\{x_n\}$ набуває значень:

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{3}-4} - \frac{1}{1} + \frac{1}{3\sqrt{3}-4} + \dots + \frac{1}{(\sqrt{3})^n - 4}.$$

Довести, що послідовність $\{x_n\}$ має певну границю при $n \rightarrow \infty$.

2. Визначити $m = \inf x_n$, $M = \sup x_n$, $l = \varliminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ і $L = \varlimsup_{n \rightarrow \infty} x_n$, для послідовності

$$x_n = \cos^n \frac{2n\pi}{3}.$$

3. Довести збіжність послідовності і знайти її границю $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$:

$$x_n = \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[4]{4} + \dots + \sqrt[n]{n}}{13n + 12}.$$

4. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(\sqrt[n]{13} - \sqrt[n+1]{13} \right)$.

5. Задане рекурентне співвідношення: $x_{n+1} = \frac{13}{12 + x_n}$, $x_1 = -10$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Знайти границю послідовності $\{x_n\}$.

6. Довести, що послідовності x_n і y_n ($n = 1, 2, 3, \dots$), які визначаються формулами: $x_1 = 52$, $y_1 = 13$, $x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$, $y_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n}$, мають спільну границю: $c = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$, та знайти її.

7. Користуючись критерієм Коші довести збіжність послідовності

$$x_n = \frac{\cos 13}{1 \cdot 4} + \frac{\cos 14}{4 \cdot 7} + \frac{\cos 15}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{\cos(n+12)}{(3n-2)(3n+1)}$$

8. Знайти границю $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, якщо $x_n = \frac{1^{13} + 2^{13} + 3^{13} + \dots + n^{13}}{n^{13}} - \frac{n}{14}$.

9. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{13}{2} \cdot \cos \frac{13}{2^2} \cdot \cos \frac{13}{2^3} \cdot \dots \cdot \cos \frac{13}{2^n} \right)$.

10. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{26} + \sqrt[n]{13}}{2} \right)^n$.

11. Знайти границю: $\lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{\sin^2(\pi \cdot 8^x)}{\ln[\cos(\pi \cdot 8^x)]}$.

12. Знайти границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{13^{p+x} + 13^{p-x} - 2 \cdot 13^p}{x^2}$, p – дійсне число.

13. Знайти границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{13^{x+1} + 26^{x+1} + 39^{x+1}}{78} \right)^{\frac{1}{x}}$.

14. Знайти $\sqrt[6]{\frac{-2+2i}{\sqrt{3}-i}}$.

Варіант №14 (Лемешко Б.)

1. Послідовність $\{x_n\}$ набуває значень:

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}-6} - \frac{1}{1} + \frac{1}{5\sqrt{5}-6} + \dots + \frac{1}{(\sqrt{5})^n - 6}.$$

Довести, що послідовність $\{x_n\}$ має певну границю при $n \rightarrow \infty$.

2. Визначити $m = \inf x_n$, $M = \sup x_n$, $l = \lim_{x \rightarrow \infty} x_n$ і $L = \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} x_n$, для послідовності

$$x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^n + 1}{2}.$$

3. Довести збіжність послідовності і знайти її границю $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$:

$$x_n = \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[4]{4} + \dots + \sqrt[n]{n}}{14n + 13}.$$

4. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(\sqrt[n]{14} - \sqrt[n+1]{14} \right)$.

5. Задане рекурентне співвідношення: $x_{n+1} = \frac{14}{13 + x_n}$, $x_1 = -9$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Знайти границю послідовності $\{x_n\}$.

6. Довести, що послідовності x_n і y_n ($n = 1, 2, 3, \dots$), які визначаються формулами: $x_1 = 7$, $y_1 = 14$, $x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$, $y_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n}$, мають спільну границю: $c = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$, та знайти її.

7. Користуючись критерієм Коші довести збіжність послідовності

$$x_n = \frac{\sin 14}{2 \cdot 5} + \frac{\sin 15}{5 \cdot 8} + \frac{\sin 16}{8 \cdot 11} + \dots + \frac{\sin(n+13)}{(3n-1)(3n+2)}$$

8. Знайти границю $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, якщо $x_n = \frac{1^{14} + 2^{14} + 3^{14} + \dots + n^{14}}{n^{14}} - \frac{n}{15}$.

9. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{14}{2} \cdot \cos \frac{14}{2^2} \cdot \cos \frac{14}{2^3} \cdot \dots \cdot \cos \frac{14}{2^n} \right)$.

10. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{28} + \sqrt[n]{14}}{2} \right)^n$.

11. Знайти границю: $\lim_{x \rightarrow 1/4} \frac{\sin^2(\pi \cdot 16^x)}{\ln[\cos(\pi \cdot 16^x)]}$.

12. Знайти границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{14^{p+x} + 14^{p-x} - 2 \cdot 14^p}{x^2}$, p – дійсне число.

13. Знайти границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{14^{x+1} + 28^{x+1} + 42^{x+1}}{84} \right)^{\frac{1}{x}}$.

14. Знайти $\sqrt[8]{\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}}$.

Варіант №15 (Лобов В.)

1. Послідовність $\{x_n\}$ набуває значень:

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{6}-7} - \frac{1}{1} + \frac{1}{6\sqrt{6}-7} + \dots + \frac{1}{(\sqrt{6})^n - 7}.$$

Довести, що послідовність $\{x_n\}$ має певну границю при $n \rightarrow \infty$.

2. Визначити $m = \inf x_n$, $M = \sup x_n$, $l = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ і $L = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$, для послідовності

$$x_n = \frac{n}{n+1} \sin^2 \frac{\pi n}{4}.$$

3. Довести збіжність послідовності і знайти її границю $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$:

$$x_n = \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[4]{4} + \dots + \sqrt[n]{n}}{15n + 14}.$$

4. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 (\sqrt[n]{15} - \sqrt[n+1]{15})$.

5. Задане рекурентне співвідношення: $x_{n+1} = \frac{15}{16 + x_n}$, $x_1 = -14$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Знайти границю послідовності $\{x_n\}$.

6. Довести, що послідовності x_n і y_n ($n = 1, 2, 3, \dots$), які визначаються формулами: $x_1 = 5$, $y_1 = 15$, $x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$, $y_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n}$, мають спільну границю: $c = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$, та знайти її.

7. Користуючись критерієм Коші довести збіжність послідовності

$$x_n = \frac{\cos 15}{1 \cdot 4} + \frac{\cos 16}{4 \cdot 7} + \frac{\cos 17}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{\cos(n+14)}{(3n-2)(3n+1)}$$

8. Знайти границю $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, якщо $x_n = \frac{1^{15} + 2^{15} + 3^{15} + \dots + n^{15}}{n^{15}} - \frac{n}{16}$.

9. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{15}{2} \cdot \cos \frac{15}{2^2} \cdot \cos \frac{15}{2^3} \cdot \dots \cdot \cos \frac{15}{2^n} \right)$.

10. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{30} + \sqrt[n]{15}}{2} \right)^n$.

11. Знайти границю: $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{5}} \frac{\sin^2(\pi \cdot 32^x)}{\ln [\cos(\pi \cdot 32^x)]}$.

12. Знайти границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{15^{p+x} + 15^{p-x} - 2 \cdot 15^p}{x^2}$, p – дійсне число.

13. Знайти границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{15^{x+1} + 30^{x+1} + 45^{x+1}}{90} \right)^{\frac{1}{x}}$.

14. Знайти границю $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ послідовності комплексних чисел: $z_n = \frac{n^3 - (1 + n^2)i}{n^2 - (n^3 + 1)i}$.

Варіант №16 (Мазун А.)

1. Послідовність $\{x_n\}$ набуває значень:

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{7}-8} - \frac{1}{1} + \frac{1}{7\sqrt{7}-8} + \dots + \frac{1}{(\sqrt{7})^n - 8}.$$

Довести, що послідовність $\{x_n\}$ має певну границю при $n \rightarrow \infty$.

2. Визначити $m = \inf x_n$, $M = \sup x_n$, $l = \lim_{x \rightarrow \infty} x_n$ і $L = \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} x_n$, для послідовності

$$x_n = \frac{n^2}{n^2 + 1} \cos^2 \frac{2\pi n}{3}.$$

3. Довести збіжність послідовності і знайти її границю $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$:

$$x_n = \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[4]{4} + \dots + \sqrt[n]{n}}{16n + 15}.$$

4. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 (\sqrt[n]{16} - \sqrt[n+1]{16})$.

5. Задане рекурентне співвідношення: $x_{n+1} = \frac{16}{15 + x_n}$, $x_1 = -13$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Знайти границю послідовності $\{x_n\}$.

6. Довести, що послідовності x_n і y_n ($n = 1, 2, 3, \dots$), які визначаються формулами: $x_1 = 2$, $y_1 = 16$, $x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$, $y_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n}$, мають спільну границю: $c = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$, та знайти її.

7. Користуючись критерієм Коші довести збіжність послідовності

$$x_n = \frac{\sin 16}{2 \cdot 4} + \frac{\sin 17}{4 \cdot 6} + \frac{\sin 18}{6 \cdot 8} + \dots + \frac{\sin(n+15)}{2n(2n+2)}.$$

8. Знайти границю $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, якщо $x_n = \frac{1^{16} + 2^{16} + 3^{16} + \dots + n^{16}}{n^{16}} - \frac{n}{17}$.

9. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{16}{2} \cdot \cos \frac{16}{2^2} \cdot \cos \frac{16}{2^3} \cdot \dots \cdot \cos \frac{16}{2^n} \right)$.

10. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{32} + \sqrt[n]{16}}{2} \right)^n$.

11. Знайти границю: $\lim_{x \rightarrow 1/6} \frac{\sin^2(\pi \cdot 64^x)}{\ln [\cos(\pi \cdot 64^x)]}$.

12. Знайти границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{16^{p+x} + 16^{p-x} - 2 \cdot 16^p}{x^2}$, p – дійсне число.

13. Знайти границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{16^{x+1} + 32^{x+1} + 48^{x+1}}{96} \right)^{\frac{1}{x}}$.

14. Знайти границю $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ послідовності комплексних чисел: $z_n = \frac{n^2 + (1 - n^3)i}{n^3 + (n^2 + 1)i}$.

Варіант №17 (Медведський Д.)

1. Послідовність $\{x_n\}$ набуває значень:

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}-6} - \frac{1}{1} + \frac{1}{5\sqrt{5}-6} + \dots + \frac{1}{(\sqrt{5})^n - 6}.$$

Довести, що послідовність $\{x_n\}$ має певну границю при $n \rightarrow \infty$.

2. Визначити $m = \inf x_n$, $M = \sup x_n$, $l = \lim_{x \rightarrow \infty} x_n$ і $L = \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} x_n$, для послідовності

$$x_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + \sin \frac{\pi n}{4}.$$

3. Довести збіжність послідовності і знайти її границю $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$:

$$x_n = \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[4]{4} + \dots + \sqrt[n]{n}}{17n + 16}.$$

4. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(\sqrt[n]{17} - \sqrt[n+1]{17} \right)$.

5. Задане рекурентне співвідношення: $x_{n+1} = \frac{17}{16 + x_n}$, $x_1 = -13$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Знайти границю послідовності $\{x_n\}$.

6. Довести, що послідовності x_n і y_n ($n = 1, 2, 3, \dots$), які визначаються формулами: $x_1 = 16$, $y_1 = 18$, $x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$, $y_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n}$, мають спільну границю: $c = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$, та знайти її.

7. Користуючись критерієм Коші довести збіжність послідовності

$$x_n = \frac{\sin^2 17}{3 \cdot 4} + \frac{\sin^2 18}{4 \cdot 5} + \frac{\sin^2 19}{5 \cdot 6} + \dots + \frac{\sin^2(n+16)}{(n+2)(n+3)}$$

8. Знайти границю $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, якщо $x_n = \frac{1^{17} + 2^{17} + 3^{17} + \dots + n^{17}}{n^{17}} - \frac{n}{18}$.

9. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{17}{2} \cdot \cos \frac{17}{2^2} \cdot \cos \frac{17}{2^3} \cdot \dots \cdot \cos \frac{17}{2^n} \right)$.

10. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{34} + \sqrt[n]{17}}{2} \right)^n$.

11. Знайти границю: $\lim_{x \rightarrow 17} \frac{(x^n - 17^n) - n \cdot 17^{n-1}(x - 17)}{(x - 17)^2}$, n – натуральне число.

12. Знайти границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{17^{p+x} + 17^{p-x} - 2 \cdot 17^p}{x^2}$, p – дійсне число.

13. Знайти границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{17^{x+1} + 34^{x+1} + 51^{x+1}}{102} \right)^{\frac{1}{x}}$.

14. Знайти границю $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ послідовності комплексних чисел: $z_n = \frac{n + (1 + n^2)i}{n^2 - (n+1)i}$.

Варіант №18 (Павлюк О.)

1. Послідовність $\{x_n\}$ набуває значень:

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{3}-4} - \frac{1}{1} + \frac{1}{3\sqrt{3}-4} + \dots + \frac{1}{(\sqrt{3})^n - 4}.$$

Довести, що послідовність $\{x_n\}$ має певну границю при $n \rightarrow \infty$.

2. Визначити $m = \inf x_n$, $M = \sup x_n$, $l = \lim_{x \rightarrow \infty} x_n$ і $L = \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} x_n$, для послідовності

$$x_n = 1 + 2 \cdot (-1)^{n+1} + 3 \cdot (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

3. Довести збіжність послідовності і знайти її границю $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$:

$$x_n = \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[4]{4} + \dots + \sqrt[n]{n}}{18n + 17}.$$

4. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 (\sqrt[n]{18} - \sqrt[n+1]{18})$.

5. Задане рекурентне співвідношення: $x_{n+1} = \frac{18}{17 + x_n}$, $x_1 = -14$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Знайти границю послідовності $\{x_n\}$.

6. Довести, що послідовності x_n і y_n ($n = 1, 2, 3, \dots$), які визначаються формулами: $x_1 = 6$, $y_1 = 18$, $x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$, $y_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n}$, мають спільну границю: $c = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$, та знайти її.

7. Користуючись критерієм Коші довести збіжність послідовності

$$x_n = \frac{\cos^2 18}{5 \cdot 8} + \frac{\cos^2 19}{8 \cdot 11} + \frac{\cos^2 20}{11 \cdot 14} + \dots + \frac{\cos^2 (n+17)}{(3n+2)(3n+5)}$$

8. Знайти границю $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, якщо $x_n = \frac{1^{18} + 2^{18} + 3^{18} + \dots + n^{18}}{n^{18}} - \frac{n}{19}$.

9. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{18}{2} \cdot \cos \frac{18}{2^2} \cdot \cos \frac{18}{2^3} \cdot \dots \cdot \cos \frac{18}{2^n} \right)$.

10. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{36} + \sqrt[n]{18}}{2} \right)^n$.

11. Знайти границю: $\lim_{x \rightarrow 18} \frac{(x^n - 18^n) - n \cdot 18^{n-1}(x - 18)}{(x - 18)^2}$, n – натуральне число.

12. Знайти границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{18^{p+x} + 18^{p-x} - 2 \cdot 18^p}{x^2}$, p – дійсне число.

13. Знайти границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{18^{x+1} + 36^{x+1} + 54^{x+1}}{108} \right)^{\frac{1}{x}}$.

14. Знайти границю $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ послідовності комплексних чисел: $z_n = \frac{1 - n^2 i}{n(1 + ni)}$.

Варіант №19 (Пивоварчук О.)

1. Послідовність $\{x_n\}$ набуває значень:

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{2}-3} - \frac{1}{1} + \frac{1}{2\sqrt{2}-3} + \dots + \frac{1}{(\sqrt{2})^n - 3}.$$

Довести, що послідовність $\{x_n\}$ має певну границю при $n \rightarrow \infty$.

2. Визначити $m = \inf x_n$, $M = \sup x_n$, $l = \lim_{x \rightarrow \infty} x_n$ і $L = \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} x_n$, для послідовності

$$x_n = 1 + 2 \cdot (-1)^{n+1} + 3 \cdot (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

3. Довести збіжність послідовності і знайти її границю $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$:

$$x_n = \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[4]{4} + \dots + \sqrt[n]{n}}{19n + 17}.$$

4. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 (\sqrt[n]{19} - \sqrt[n+1]{19})$.

5. Задане рекурентне співвідношення: $x_{n+1} = \frac{19}{18 + x_n}$, $x_1 = -15$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Знайти границю послідовності $\{x_n\}$.

6. Довести, що послідовності x_n і y_n ($n = 1, 2, 3, \dots$), які визначаються формулами: $x_1 = 9$, $y_1 = 19$, $x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$, $y_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n}$, мають спільну границю: $c = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$, та знайти її.

7. Користуючись критерієм Коші довести збіжність послідовності

$$x_n = \frac{\cos^2 19}{4 \cdot 5} + \frac{\cos^2 20}{5 \cdot 6} + \frac{\cos^2 21}{6 \cdot 7} + \dots + \frac{\cos^2 (n+18)}{(n+3)(n+4)}$$

8. Знайти границю $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, якщо $x_n = \frac{1^{19} + 2^{19} + 3^{19} + \dots + n^{19}}{n^{19}} - \frac{n}{20}$.

9. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{19}{2} \cdot \cos \frac{19}{2^2} \cdot \cos \frac{19}{2^3} \cdot \dots \cdot \cos \frac{19}{2^n} \right)$.

10. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{38} + \sqrt[n]{19}}{2} \right)^n$.

11. Знайти границю: $\lim_{x \rightarrow 19} \frac{(x^n - 19^n) - n \cdot 19^{n-1}(x - 19)}{(x - 19)^2}$, n – натуральне число.

12. Знайти границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{19^{p+x} + 19^{p-x} - 2 \cdot 19^p}{x^2}$, p – дійсне число.

13. Знайти границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{19^{x+1} + 38^{x+1} + 57^{x+1}}{114} \right)^{\frac{1}{x}}$.

14. Знайти границю $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ послідовності комплексних чисел $z_n = \frac{n^3 + 2 - (n^3 + 1)i}{n^2(n - 1 + ni)}$.

Варіант №20 (Романюк С.)

1. Послідовність $\{x_n\}$ набуває значень:

$$x_n = \frac{1}{\sqrt[3]{4}-5} + \frac{1}{(\sqrt[3]{4})^2-5} - \frac{1}{1} + \dots + \frac{1}{(\sqrt[3]{4})^n-5}.$$

Довести, що послідовність $\{x_n\}$ має певну границю при $n \rightarrow \infty$.

2. Визначити $m = \inf x_n$, $M = \sup x_n$, $l = \varliminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ і $L = \varlimsup_{n \rightarrow \infty} x_n$, для послідовності

$$x_n = 1 + 3 \cdot (-1)^{n+1} + 2 \cdot (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

3. Довести збіжність послідовності і знайти її границю $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$:

$$x_n = \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[4]{4} + \dots + \sqrt[n]{n}}{20n + 19}.$$

4. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(\sqrt[n]{20} - \sqrt[n+1]{20} \right)$.

5. Задане рекурентне співвідношення: $x_{n+1} = \frac{20}{1 + x_n}$, $x_1 = -5$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Знайти границю послідовності $\{x_n\}$.

6. Довести, що послідовності x_n і y_n ($n = 1, 2, 3, \dots$), які визначаються формулами: $x_1 = 5$, $y_1 = 20$, $x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$, $y_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n}$, мають спільну границю: $c = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$, та знайти її.

7. Користуючись критерієм Коші довести збіжність послідовності

$$x_n = \frac{\cos^2 20}{2 \cdot 3} + \frac{\cos^2 21}{3 \cdot 4} + \frac{\cos^2 22}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{\cos^2(n+19)}{(n+1)(n+2)}$$

8. Знайти границю $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, якщо $x_n = \frac{1^{20} + 2^{20} + 3^{20} + \dots + n^{20}}{n^{20}} - \frac{n}{21}$.

9. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{20}{2} \cdot \cos \frac{20}{2^2} \cdot \cos \frac{20}{2^3} \cdot \dots \cdot \cos \frac{20}{2^n} \right)$.

10. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{40} + \sqrt[n]{20}}{2} \right)^n$.

11. Знайти границю: $\lim_{x \rightarrow 20} \frac{(x^n - 20^n) - n \cdot 20^{n-1}(x - 20)}{(x - 20)^2}$, n – натуральне число.

12. Знайти границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{20^{p+x} + 20^{p-x} - 2 \cdot 20^p}{x^2}$, p – дійсне число.

13. Знайти границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{20^{x+1} + 40^{x+1} + 60^{x+1}}{120} \right)^{\frac{1}{x}}$.

14. Знайти границю $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ послідовності комплексних чисел: $z_n = \frac{n^4 + (1 - n^4)i}{n^3 + 1 + (n^4 + 1)i}$.

Варіант №21 (Тертишний В.)

1. Послідовність $\{x_n\}$ набуває значень:

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}-7} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5\sqrt{5}-7} + \dots + \frac{1}{(\sqrt{5})^n - 7}.$$

Довести, що послідовність $\{x_n\}$ має певну границю при $n \rightarrow \infty$.

2. Визначити $m = \inf x_n$, $M = \sup x_n$, $l = \varliminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ і $L = \varlimsup_{n \rightarrow \infty} x_n$, для послідовності

$$x_n = \frac{n-2}{n+2} \cos \frac{2n\pi}{3}.$$

3. Довести збіжність послідовності і знайти її границю $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$:

$$x_n = \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[4]{4} + \dots + \sqrt[n]{n}}{21n + 20}.$$

4. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(\sqrt[n]{21} - \sqrt[n+1]{21} \right)$.

5. Задане рекурентне співвідношення: $x_{n+1} = \frac{21}{4 + x_n}$, $x_1 = 1$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Знайти границю послідовності $\{x_n\}$.

6. Довести, що послідовності x_n і y_n ($n = 1, 2, 3, \dots$), які визначаються формулами: $x_1 = 7$, $y_1 = 21$, $x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$, $y_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n}$, мають спільну границю: $c = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$, та знайти її.

7. Користуючись критерієм Коші довести збіжність послідовності

$$x_n = \frac{\cos^3 21}{1 \cdot 2} + \frac{\cos^3 22}{2 \cdot 3} + \frac{\cos^3 23}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{\cos^3(n+20)}{n(n+1)}$$

8. Знайти границю $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, якщо $x_n = \frac{1^{21} + 2^{21} + 3^{21} + \dots + n^{21}}{n^{21}} - \frac{n}{22}$.

9. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{21}{2} \cdot \cos \frac{21}{2^2} \cdot \cos \frac{21}{2^3} \cdot \dots \cdot \cos \frac{21}{2^n} \right)$.

10. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{42} + \sqrt[n]{21}}{2} \right)^n$.

11. Знайти границю: $\lim_{x \rightarrow 21} \frac{(x^n - 21^n) - n \cdot 21^{n-1}(x - 21)}{(x - 21)^2}$, n – натуральне число.

12. Знайти границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{21^{p+x} + 21^{p-x} - 2 \cdot 21^p}{x^2}$, p – дійсне число.

13. Знайти границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{21^{x+1} + 42^{x+1} + 63^{x+1}}{126} \right)^{\frac{1}{x}}$.

14. Виразити $\sin^6 \varphi$ через тригонометричні функції кратних кутів.

Варіант №22 (Тимошенко В.)

1. Задано послідовність $\{x_n\}$:

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{7}-9} - \frac{1}{2} + \frac{1}{7\sqrt{7}-9} + \dots + \frac{1}{(\sqrt{7})^n - 9}$$

Довести, що послідовність $\{x_n\}$ має певну границю при $n \rightarrow \infty$.

2. Визначити $m = \inf x_n$, $M = \sup x_n$, $l = \lim_{x \rightarrow \infty} x_n$ і $L = \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} x_n$, для послідовності

$$x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^n + 1}{2}.$$

3. Довести збіжність послідовності і знайти її границю $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$:

$$x_n = \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[4]{4} + \dots + \sqrt[n]{n}}{22n + 21}.$$

4. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(\sqrt[n]{22} - \sqrt[n+1]{22} \right)$.

5. Задане рекурентне співвідношення: $x_{n+1} = \frac{22}{9 + x_n}$, $x_1 = -5$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Знайти границю послідовності $\{x_n\}$.

6. Довести, що послідовності x_n і y_n ($n = 1, 2, 3, \dots$), які визначаються формулами: $x_1 = 2$, $y_1 = 22$, $x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$, $y_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n}$, мають спільну границю: $c = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$, та знайти її.

7. Користуючись критерієм Коші довести збіжність послідовності

$$x_n = \frac{\sin^3 22}{1 \cdot 4} + \frac{\sin^3 23}{4 \cdot 7} + \frac{\sin^3 24}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{\sin^3 (n+21)}{(3n-2)(3n+1)}$$

8. Знайти границю $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, якщо $x_n = \frac{1^{22} + 2^{22} + 3^{22} + \dots + n^{22}}{n^{22}} - \frac{n}{23}$.

9. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{22}{2} \cdot \cos \frac{22}{2^2} \cdot \cos \frac{22}{2^3} \cdot \dots \cdot \cos \frac{22}{2^n} \right)$.

10. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{44} + \sqrt[n]{22}}{2} \right)^n$.

11. Знайти границю: $\lim_{x \rightarrow 22} \frac{(x^n - 22^n) - n \cdot 22^{n-1}(x - 22)}{(x - 22)^2}$, n – натуральне число.

12. Знайти границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{22^{p+x} + 22^{p-x} - 2 \cdot 22^p}{x^2}$, p – дійсне число.

13. Знайти границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{22^{x+1} + 44^{x+1} + 66^{x+1}}{132} \right)^{\frac{1}{x}}$.

14. Виразити $\cos^6 \varphi$ через тригонометричні функції кратних кутів.

Варіант №23 (Чумак К.)

1. Задано послідовність:

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{11}-12} - \frac{1}{1} + \frac{1}{11\sqrt{11}-12} + \dots + \frac{1}{(\sqrt{11})^n - 12}$$

Довести, що послідовність $\{x_n\}$ має певну границю при $n \rightarrow \infty$.

2. Визначити $m = \inf x_n$, $M = \sup x_n$, $l = \lim_{x \rightarrow \infty} x_n$ і $L = \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} x_n$, для послідовності

$$x_n = 1 + n \sin \frac{n\pi}{2}.$$

3. Довести збіжність послідовності і знайти її границю $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$:

$$x_n = \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[4]{4} + \dots + \sqrt[n]{n}}{23n + 22}.$$

4. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 (\sqrt[n]{23} - \sqrt[n+1]{23})$.

5. Задане рекурентне співвідношення: $x_{n+1} = \frac{23}{22 + x_n}$, $x_1 = -5$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Знайти границю послідовності $\{x_n\}$.

6. Довести, що послідовності x_n і y_n ($n = 1, 2, 3, \dots$), які визначаються формулами: $x_1 = 9$, $y_1 = 23$, $x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$, $y_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n}$, мають спільну границю: $c = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$, та знайти її.

7. Користуючись критерієм Коші довести збіжність послідовності

$$x_n = \frac{\sin^2 23}{1 \cdot 3} + \frac{\sin^2 24}{3 \cdot 5} + \frac{\sin^2 25}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{\sin^2(n+22)}{(2n-1)(2n+1)}$$

8. Знайти границю $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, якщо $x_n = \frac{1^{23} + 2^{23} + 3^{23} + \dots + n^{23}}{n^{23}} - \frac{n}{24}$.

9. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{23}{2} \cdot \cos \frac{23}{2^2} \cdot \cos \frac{23}{2^3} \cdot \dots \cdot \cos \frac{23}{2^n} \right)$.

10. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{46} + \sqrt[n]{23}}{2} \right)^n$.

11. Знайти границю: $\lim_{x \rightarrow 23} \frac{(x^n - 23^n) - n \cdot 23^{n-1}(x - 23)}{(x - 23)^2}$, n – натуральне число.

12. Знайти границю: $\lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{\sin^2(\pi \cdot 8^x)}{\ln [\cos(\pi \cdot 8^x)]}$.

13. Знайти границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{23^{x+1} + 46^{x+1} + 69^{x+1}}{138} \right)^{\frac{1}{x}}$.

14. Знайти границю $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ послідовності комплексних чисел: $z_n = \frac{n^4 + (1 - n^3)i}{n^4 + 1 + (n^3 + 1)i}$.

Варіант №24 (Шаповалова А.)

1. Задано послідовність $\{x_n\}$:

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{7}-11} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7\sqrt{7}-11} + \dots + \frac{1}{(\sqrt{7})^n - 11}$$

Довести, що послідовність $\{x_n\}$ має певну границю при $n \rightarrow \infty$.

2. Визначити $m = \inf x_n$, $M = \sup x_n$, $l = \lim_{x \rightarrow \infty} x_n$ і $L = \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} x_n$, для послідовності

$$x_n = (-1)^{n-1} \left(2 + \frac{3}{n} \right).$$

3. Довести збіжність послідовності і знайти її границю $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$:

$$x_n = \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[4]{4} + \dots + \sqrt[n]{n}}{24n + 23}.$$

4. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(\sqrt[n]{24} - \sqrt[n+1]{24} \right)$.

5. Задане рекурентне співвідношення: $x_{n+1} = \frac{24}{2 + x_n}$, $x_1 = 1$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Знайти границю послідовності $\{x_n\}$.

6. Довести, що послідовності x_n і y_n ($n = 1, 2, 3, \dots$), які визначаються формулами: $x_1 = 6$, $y_1 = 24$, $x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$, $y_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n}$, мають спільну границю: $c = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$, та знайти її.

7. Користуючись критерієм Коші довести збіжність послідовності

$$x_n = \frac{\sin^3 24}{1 \cdot 5} + \frac{\sin^3 25}{5 \cdot 9} + \frac{\sin^3 26}{9 \cdot 13} + \dots + \frac{\sin^3(n+23)}{(4n-3)(4n+1)}$$

8. Знайти границю $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, якщо $x_n = \frac{1^{24} + 2^{24} + 3^{24} + \dots + n^{24}}{n^{24}} - \frac{n}{25}$.

9. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{24}{2} \cdot \cos \frac{24}{2^2} \cdot \cos \frac{24}{2^3} \cdot \dots \cdot \cos \frac{24}{2^n} \right)$.

10. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{48} + \sqrt[n]{24}}{2} \right)^n$.

11. Знайти границю: $\lim_{x \rightarrow 24} \frac{(x^n - 24^n) - n \cdot 24^{n-1}(x - 24)}{(x - 24)^2}$, n – натуральне число.

12. Знайти границю: $\lim_{x \rightarrow 1/6} \frac{\sin^2(\pi \cdot 64^x)}{\ln [\cos(\pi \cdot 64^x)]}$.

13. Знайти границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{24^{x+1} + 48^{x+1} + 72^{x+1}}{144} \right)^{\frac{1}{x}}$.

14. Знайти границю $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ послідовності комплексних чисел: $z_n = \frac{n^4 + (1 - n^4)i}{n^3 + 1 + (n^4 + 1)i}$.

Варіант №25 (Шерстюк М.)

1. Задано послідовність $\{x_n\}$:

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{3}-100} - \frac{1}{97} + \frac{1}{3\sqrt{3}-100} + \dots + \frac{1}{(\sqrt{3})^n - 100}$$

Довести, що послідовність $\{x_n\}$ має певну границю при $n \rightarrow \infty$.

2. Визначити $m = \inf x_n$, $M = \sup x_n$, $l = \varliminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ і $L = \varlimsup_{n \rightarrow \infty} x_n$, для послідовності

$$x_n = 1 + 2 \cdot (-1)^{n+1} + 3 \cdot (-1)^{\frac{(n-1)n}{2}}.$$

3. Довести збіжність послідовності і знайти її границю $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$:

$$x_n = \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[4]{4} + \dots + \sqrt[n]{n}}{25n + 24}.$$

4. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(\sqrt[n]{25} - \sqrt[n+1]{25} \right)$.

5. Задане рекурентне співвідношення: $x_{n+1} = \frac{3}{x_n - 2}$, $x_1 = 5$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Знайти границю послідовності $\{x_n\}$.

6. Довести, що послідовності x_n і y_n ($n = 1, 2, 3, \dots$), які визначаються формулами: $x_1 = 9$, $y_1 = 25$, $x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$, $y_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n}$, мають спільну границю: $c = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$, та знайти її.

7. Користуючись критерієм Коші довести збіжність послідовності

$$x_n = \frac{\cos^4 25}{2 \cdot 5} + \frac{\cos^4 26}{5 \cdot 8} + \frac{\cos^4 27}{8 \cdot 11} + \dots + \frac{\cos^4 (n+24)}{(3n-1)(3n+2)}$$

8. Знайти границю $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, якщо $x_n = \frac{1^{25} + 2^{25} + 3^{25} + \dots + n^{25}}{n^{25}} - \frac{n}{26}$.

9. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{25}{2} \cdot \cos \frac{25}{2^2} \cdot \cos \frac{25}{2^3} \cdot \dots \cdot \cos \frac{25}{2^n} \right)$.

10. Знайти границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{50} + \sqrt[n]{25}}{2} \right)^n$.

11. Знайти границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(xe^x) - \cos(xe^{-x})}{x^3}$.

12. Знайти границю: $\lim_{x \rightarrow 1/7} \frac{\sin^2(\pi \cdot 128^x)}{\ln[\cos(\pi \cdot 128^x)]}$.

13. Знайти границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{25^{x+1} + 50^{x+1} + 75^{x+1}}{150} \right)^{\frac{1}{x}}$.

14. Знайти суму $S(n) = 1 + 2\cos \varphi + 2\cos 2\varphi + \dots + 2\cos(n\varphi)$.