ЛЕКЦІЯ №5.
Підпослідовності. Частинні границі. Теорема Больцано-Вейєрштраса. Теорема про частинні границі. Верхня і нижня границя послідовності.

1. Підпослідовності: основні поняття та означення.

Означення підпослідовності. Нехай задано числову послідовність $\{x_n\}$ та ряд натуральних чисел $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n, \ldots$, які утворюють зростаючу послідовність $k_1 < k_2 < \ldots < k_n < \ldots$. Тоді нова послідовність $\{y_n\}$, побудована з елементів основної послідовності $\{x_n\}$ за таким правилом $\{y_n\} = \{x_{k_n}\} = \{x_{k_1}, x_{k_2}, x_{k_3}, \ldots, x_{k_n}, \ldots\}$, називається **підпослідовністю** послідовності $\{x_n\}$. Якщо підпослідовність $\{x_{k_n}\}$ є **збіжною**, то її границя x_0 називається **частинною границею** основної послідовності $\{x_n\}$. До речі, сама послідовність $\{x_n\}$ може розглядатись як власна підпослідовність (в цьому випадку $k_n = n$). Але взагалі має місце така нерівність: $k_n \geq n$.

Зауваження. Існування частинних границь підпослідовностей $\{x_{k_n}\}$ основної послідовності $\{x_n\}$ не означає, що безумовно існує границя основної послідовності.

Отже, дамо **два** еквівалентних означення **частинної границі** послідовності $\{x_n\}$, які характеризують певні її **властивості**.

Перше Означення частинної границі. *Точка x_0 називається* ***частинною границею*** *послідовності $\{x_n\}$, якщо з цієї послідовності* ***можна виділити збіжну до точки x_0 підпослідовність.***

Друге Означення частинної границі. *Точка x_0 називається* ***частинною границею*** *послідовності $\{x_n\}$, якщо у будь-якому $\varepsilon-$околі точки x_0 міститься* ***нескінченне число членів*** *цієї послідовності*[*)]**.**

[*)]**Зауваження**. Для довільного числа $\varepsilon > 0$ нерівність $|x_0 - x_n| < \varepsilon$ має виконуватись для нескінченного числа членів з різними номерами $n \in N$. Разом з тим число різних по величині членів x_n послідовності $\{x_n\}$, які належать $\varepsilon-$околу точки x_0, може бути і скінченним.

Приклад. Послідовність $\left\{x_n\right\}=\left\{1,2,\frac{1}{2},2,\frac{1}{3},2,\frac{1}{4},\ldots,\frac{1}{n},2,\cdots\right\}$ має тільки дві частинні границі. Позначимо їх відповідно до змісту: $\underline{x}=0$ і $\overline{x}=2$. Суть позначень з'ясуємо нижче. В будь-якому околі частинної границі $\overline{x}=2$ міститься нескінченне число рівних за величиною, але з різними номерами, членів послідовності $\left\{x_n\right\}$.

Розглянемо дві невеличкі Теореми про зв'язок між границею основної послідовності $\left\{x_n\right\}$ і частинними границями її підпослідовностей $\left\{x_{k_n}\right\}$.

Теорема 6$^{1)}$. *Якщо послідовність $\left\{x_n\right\}$ є збіжною до числа x_0, то кожна її підпослідовність $\left\{x_{k_n}\right\}$ також є* ***збіжною*** *і має ту ж саму границю x_0, що і вихідна послідовність $\left\{x_n\right\}$.*

Доведення цієї Теореми є очевидним. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$; це означає, що

$$\left|x_0 - x_n\right| < \varepsilon \text{ при } n \ge N(\varepsilon).$$

Нехай $\left\{x_{k_n}\right\}$ – підпослідовність послідовності $\left\{x_n\right\}$, тоді $k_n \ge n$ і, відповідно,

$$\left|x_0 - x_{k_n}\right| < \varepsilon \text{ при } k_n \ge n > N(\varepsilon).$$

Це означає, що підпослідовність $\left\{x_{k_n}\right\}$ є збіжною і її границя дорівнює x_0. **Теорему доведено**.

Справедливе і **обернене твердження**.

Теорема 6$^{2)}$. *Якщо* ***всі*** *підпослідовності вихідної послідовності $\left\{x_n\right\}$ є збіжними, то частинні границі* ***всіх підпослідовностей*** *дорівнюють* ***одному і тому самому числу*** *x_0. При цьому вихідна послідовність $\left\{x_n\right\}$ також має границею число x_0.*

Доведення. Дійсно, через те, що сама послідовність $\left\{x_n\right\}$ є власною підпослідовністю, то вона є збіжною і її границя дорівнює певному числу x_0. Але тоді і будь-яка інша підпослідовність (за **Теоремою 6$^{1)}$**) теж є збіжною і має границею також число x_0.

Має місце **важлива Теорема**.

2. Теорема Больцано-Вейєрштраса (Про існування у обмеженої послідовності збіжної підпослідовності).

Теорема 7. *Із будь-якої* ***обмеженої*** *послідовності* $\{x_n\}$ *завжди можна вибрати* ***збіжну підпослідовність****.*

Доведення. **1).** Оскільки послідовність $\{x_n\}$ **обмежена**, то існує таке число $M > 0$, що $|x_n| \le M$ при $n = 1, 2, 3, \ldots$, тобто усі члени послідовності лежать на відрізку $[-M, M]$, який для зручності позначимо $[a_1, b_1]$. Розділимо відрізок $[a_1, b_1]$ навпіл. Якнайменше один з отриманих відрізків містить нескінченне число членів послідовності $\{x_n\}$ $^{*)}$(див. **Зауваження** після **Теореми**). Далі обираємо ту його половину, яка містить нескінченне число членів послідовності $\{x_n\}$. Якщо обидві частини відрізка містять нескінченне число членів послідовності $\{x_n\}$, то обираємо будь-яку з цих половин. Позначимо її $[a_2, b_2]$. Відрізок $[a_2, b_2]$ знову ділимо навпіл і обираємо ту його половину, яка містить нескінченне число членів послідовності $\{x_n\}$, і позначимо її $[a_3, b_3]$ і так далі. В результаті отримаємо послідовність **вкладених відрізків** $\{[a_n, b_n]\}$, причому довжина $n-$го відрізка $[a_n, b_n]$ дорівнює

$$b_n - a_n = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

В силу **Леми про вкладені відрізки (Лекція №4)** існує одна-єдина точка c, яка належить всім відрізкам одночасно:

$$a_n \le c \le b_n, \ n = 1, 2, 3, \ldots \tag{1}$$

2). Побудуємо підпослідовність $\{x_{k_n}\}$, яка є збіжною до точки c, у такий спосіб. Як перший член x_{k_1} підпослідовності $\{x_{k_n}\}$ оберемо довільний член послідовності $\{x_n\}$. За другий член x_{k_2} підпослідовності $\{x_{k_n}\}$ оберемо елемент послідовності $\{x_n\}$, який лежить на відрізку $[a_2, b_2]$ і у якого номер $k_2 > k_1$. Оскільки на відрізку $[a_2, b_2]$ лежить нескінченне число членів послідовності $\{x_n\}$, то такий вибір завжди можливий. Продовжуємо цей процес далі аналогічно і на $n-$му кроці за член x_{k_n} обираємо елемент послідовності $\{x_n\}$, який лежить на відрізку $[a_n, b_n]$ і у якого

$k_n > k_{n-1}$. Отже, в результаті такої побудови підпослідовності отримали наступні нерівності:

$$a_n \le x_{k_n} \le b_n. \qquad (2)$$

Покажемо, що отримана у такий спосіб підпослідовність $\{x_{k_n}\}$ є збіжною до числа c, тобто: $x_{k_n} \to c$. Дійсно, з нерівностей (1) і (2) випливає, що

$$0 \le \left|c - x_{k_n}\right| \le b_n - a_n = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}} \to 0, n \to \infty.$$

Після здійснення граничного переходу в останній нерівності дістанемо $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = c$.

Th доведено.

Приклад. Нехай задано **обмежену** послідовність $\{x_n\} = 1 + (-1)^n \dfrac{n}{n+1}$, $0 < x_n < 2$.

Одразу скажемо, що вона розбіжна, але у неї є збіжні підпослідовності. Покажемо, як з неї можна їх **виділити**. Запишемо декілька членів послідовності $\{x_n\}$:

$$\{x_n\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{5}{3}, \frac{1}{4}, \frac{9}{5}, \frac{1}{6}, \frac{13}{7}, \frac{1}{8}, \frac{17}{9}, \dots\right\}.$$

З цієї послідовності можна вибрати дві збіжні підпослідовності: одну з номерами $k_n = 2n - 1$, тобто $\{y_n\} = \{x_{2n-1}\} = \left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{8}, \dots\right\}$, і другу з номерами $p_n = 2n$, тобто $\{z_n\} = \{x_{2n}\} = \left\{\dfrac{5}{3}, \dfrac{9}{5}, \dfrac{13}{7}, \dfrac{17}{9}, \dots\right\}$.

Кожна з них є збіжною до відповідних **частинних границь** $y_0 = 0$ і $z_0 = 2$. Якщо розглядати послідовність $\{x_n\}$ як власну підпослідовність (тобто $k_n = n$), то вона є **розбіжною**, хоча і обмеженою.

*) **Зауваження**. Вираз «**відрізок** $[a,b]$ **містить нескінченне число членів послідовності**» означає, що нерівність $a \le x_n \le b$ виконується для нескінченного числа номерів n. Так, наприклад, якщо $\{x_n\}$ − стала послідовність: $x_n = c$, $c \in [a,b]$, то відрізок $[a,b]$ містить нескінченне число однакових за величиною, але різних за номерами, членів послідовності $\{x_n\}$.

Наприклад, для послідовності $\{x_n\}=\left\{1,2,\frac{1}{2},2,\frac{1}{3},2,\frac{1}{4},\ldots,\frac{1}{n},2,\cdots\right\}$, у якої є дві частинні границі $\underline{x}=0$ і $\overline{x}=2$, можна виділити дві підпослідовності

$$\{y_n\}=\{x_{2n-1}\}=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ldots,\frac{1}{n},\ldots\right\} \text{ і } \{z_n\}=\{x_{2n}\}=\{2,2,2,\ldots,2,\ldots\},$$

які є збіжними до зазначених частинних границь.

3. Теорема про частинні границі $\overline{x}=\sup A$ і $\underline{x}=\inf A$.

Нехай $\{x_n\}$ задано **обмежену** послідовність: $|x_n|\le M$ при $n=1,2,3,\ldots$. Позначимо через A **множину частинних границь послідовності** $\{x_n\}$. В силу попередньої **Теореми 7** множина A є **непорожньою**. Крім того очевидно, що множина A є **обмеженою** через те, що якщо підпослідовність $x_{k_n}\to a$ ($a\in A$), то із нерівності $|x_{k_n}|\le M$ випливає, що $|a|\le M$ (за **Теоремою порівняння**).

Оскільки множина A обмежена, то існують **точна верхня і точна нижня грані** цієї множини: $\overline{x}=\sup A,\ \underline{x}=\inf A$.

Теорема 8. *Числа* $\overline{x}=\sup A,\ \underline{x}=\inf A$ *одночасно є* ***частинними границями обмеженої*** *послідовності* $\{x_n\}$, *тобто* $\overline{x}\in A,\ \underline{x}\in A$.

Доведення. Доведення проведемо для першої половини твердження Теореми 8, тобто покажемо, що одночасно з тим, що $\overline{x}=\sup A$, точна верхня межа $\overline{x}$ множини A є частинною границею послідовності $\{x_n\}$, тобто $\overline{x}\in A$. Нагадаємо, що A – це множина **частинних границь** послідовності $\{x_n\}$.

1). Спочатку доведемо, що при будь-якому $\varepsilon>0$ в інтервалі $(\overline{x}-\varepsilon,\overline{x}+\varepsilon)$ міститься **нескінченне число членів послідовності** $\{x_n\}$. Дійсно, оскільки $\overline{x}=\sup A$, то за означенням точної верхньої межі існує таке число $x'\in A$ (а це одна з частинних границь послідовності $\{x_n\}$), що $\overline{x}-\varepsilon<x'\le\overline{x}$, звідки випливає, що $x'\in(\overline{x}-\varepsilon,\overline{x}+\varepsilon)$. Оберемо ε_1-окіл $(x'-\varepsilon_1,x'+\varepsilon_1)$ точки x' так, щоб цей окіл належав попередньому $\varepsilon-$околу: $(x'-\varepsilon_1,x'+\varepsilon_1)\subset(\overline{x}-\varepsilon,\overline{x}+\varepsilon)$ (див. Рис.1). Це можна зробити за рахунок довільного вибору ε_1-околу точки x'. За означенням множини A існує збіжна до частинної границі x' підпослідовність: $x_{m_n}\to x'$.

Починаючи з певного номера всі члени підпослідовності $\{x_{m_n}\}$ лежатимуть в інтервалі $(x'-\varepsilon_1, x'+\varepsilon_1)$, і, відповідно, в інтервалі $(\overline{x}-\varepsilon, \overline{x}+\varepsilon)$. Отже, ми довели, що в інтервалі $(\overline{x}-\varepsilon, \overline{x}+\varepsilon)$ міститься **нескінченне число членів послідовності** $\{x_n\}$.

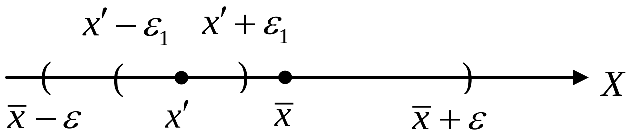

Рис. 1

2). Тепер **побудуємо підпослідовність** $\{x_{k_n}\}$, яка є збіжною до $\overline{x}$. Виберемо число ε рівним $\varepsilon = 1/n$ ($n=1,2,3,\ldots$). За рахунок цього ми забезпечуємо зазначену вище умову про те, що кожен з інтервалів $\left(\overline{x}-\frac{1}{n}, \overline{x}+\frac{1}{n}\right)$ для будь-якого числа n буде містити нескінченне число членів послідовності $\{x_n\}$.

Отже, за елемент x_{k_1} підпослідовності $\{x_{k_n}\}$ обираємо елемент послідовності $\{x_n\}$, який міститься в інтервалі $(\overline{x}-1, \overline{x}+1)$ при $n=1$. За елемент x_{k_2} обираємо елемент послідовності $\{x_n\}$, який міститься в інтервалі $\left(\overline{x}-\frac{1}{2}, \overline{x}+\frac{1}{2}\right)$ при $n=2$, у якого номер $k_2 > k_1$. Далі наступні елементи підпослідовності $\{x_{k_n}\}$ обираємо аналогічно попереднім. В результаті цього вибору дістанемо підпослідовність $\{x_{k_n}\}$, для якої мають силу такі нерівності:

$$\overline{x}-\frac{1}{n} \le x_{k_n} \le \overline{x}+\frac{1}{n}, \text{ або } \left|\overline{x}-x_{k_n}\right| \le \frac{1}{n}.$$

Далі після виконання граничного переходу у цих нерівностях отримаємо:

$$x_{k_n} \to \overline{x} \text{ при } n \to \infty, \text{ або } \lim_{n\to\infty} x_{k_n} = \overline{x}.$$

Тим самим ми довели, що $\overline{x} \in A$. Аналогічно можна довести, що $\underline{x} \in A$. **Теорему доведено**.

Означення. **а). Найменша частинна границя** (число $\underline{x} = \inf A$) послідовності $\{x_n\}$ називається **нижньою границею** послідовності $\{x_n\}$ і позначається так: $\underline{x} = \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$.

б). Найбільша частинна границя (число $\underline{x} = \sup A$) послідовності $\{x_n\}$ називається **верхньою границею** послідовності $\{x_n\}$ і позначається так: $\overline{x} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$.

Приклад. Нехай задано послідовність $\{x_n\} = \left\{2, 1, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{k+1}{k}, \frac{1}{k}, \ldots\right\}$.

Пропонуємо читачу встановити, що $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = 1,\ \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = 0$.

Принцип Больцано-Вейєрштраса. *У кожної **обмеженої послідовності** $\{x_n\}$ існує **хоча би одна частинна границя**. Якщо ця частинна границя одна-єдина, то вона і є границею даної послідовності.*

Відмітимо **два основних наслідки** цього принципу.

Наслідок 1. Якщо (a,b) – інтервал, поза межами якого лежить **лише скінченне число членів** обмеженої послідовності $\{x_n\}$, а $\underline{x}$ і $\overline{x}$ – нижня і верхня границі цієї послідовності, то інтервал $(\underline{x}, \overline{x})$ міститься в інтервалі (a,b) і тому $\overline{x} - \underline{x} \le b - a$.

Наслідок 2. Для довільного додатного числа $\varepsilon > 0$ інтервал $(\underline{x} - \varepsilon, \overline{x} + \varepsilon)$ містить всі члени послідовності $\{x_n\}$, починаючи з деякого номера $N(\varepsilon)$, залежного від числа ε.

Має місце наступне твердження.

Твердження. *У будь-якої обмеженої послідовності $\{x_n\}$ існують **верхня і нижня її границі.***

Зауваження 1. Зазначимо, що рівність $\underline{x} = \overline{x}$ і умова обмеженості елементів послідовності $\{x_n\}$ є **необхідними і достатніми умовами її збіжності**.

Зауваження 2. З'ясуємо питання про те, скільки частинних границь може мати **обмежена** послідовність $\{x_n\}$. Позначимо через $\underline{x}$ і $\overline{x}$ відповідно нижню і верхню границі цієї послідовності. Очевидно, що всі частинні границі послідовності $\{x_n\}$ (скільки б їх не було), лежатимуть на відрізку $[\underline{x}, \overline{x}]$.

Якщо $\underline{x} = \overline{x}$, то послідовність має тільки одну-єдину частинну границю. Якщо ж $\underline{x} < \overline{x}$, то послідовність має якнайменше дві частинні границі $\underline{x}$ і $\overline{x}$. Зазначимо, що обмежена послідовність може мати будь-яке **скінченне і навіть нескінченне число частинних границь**.