REGRESYON {6. hafta}

$$\begin{bmatrix} n & \Sigma x_i \\ \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma y_i \\ \Sigma x_i \cdot y_i \end{bmatrix}$$

$$y = a + bx$$

örnek: x, y noktalarından geçen doğru denklemini küçük kareler metodu ile belirleyiniz.

x	y
-5	-2
2	4
7	3.5

$n=3$, $\Sigma x_i = (-5) + (2) + (7) = 4$

$\Sigma x_i^2 = (-5)^2 + (2)^2 + (7)^2 = 78$

$\Sigma y = (-2) + (4) + (3.5) = 5.5$

$\Sigma x_i y_i = (-5).(-2) + (2)(4) + (7).(3.5) = 42.5$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 78 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.5 \\ 42.5 \end{bmatrix}$$

$|A| = (78.3) - (4.4) = 218 \neq 0$

$3a + 4b = 5.5$

$4a + 78b = 42.5$

$a = 1.188$

$b = 0.484$

$$\boxed{y = 1.188 + 0.484x}$$

Polinom Regresyon

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i . y_i \\ \sum x_i^2 . y_i \end{bmatrix}$$

Denklem Lineerleştirme

① $y = a_1 . e^{b_1 . x}$ denklemini lineerleştiriniz.

$\ln y = \ln (a_1 \, e^{b_1 . x})$

$\ln y = \ln a_1 . \ln e^{b_1 . x}$

$\Rightarrow y^* = a^* + b_1 . x$

② $y = a_2 . x^{b_2}$ denklemini lineerleştiriniz.

$\log(y) = \log(a_2 . x^{b_2})$

$\log(y) = \log(a_2) + \log(x^{b_2})$

$\log(y) = \log(a_2) + b_2 . \log(x)$

$y^* = a_2^* + b_2 . x^*$

③ $y = a_3 . \dfrac{x}{b_3 + x}$ denklemini lineerleştiriniz.

$\dfrac{1}{y} = \dfrac{b_3}{a_3} . x + \dfrac{1}{a_3}$

?

$y^* = a_3 . x^* + a_3^*$

örnek: $y = a_2 \cdot x^{b_2}$ doğru denklemini bulunuz.

$$y^* = a_2^* + b_2 x^*$$

x	y
1	0.5
2	1.7
3	3.4
4	5.7
5	5.4

Yeni tablo

log(x)	log(y)
0	-0.301
0.301	0.230
0.477	0.531
0.602	0.755
0.657	0.924

$n=5$, $\Sigma_x = 2.075$, $\Sigma_y = 2.141$

$\Sigma x^2 = 1.169$, $\Sigma x \cdot y = 1.421$

$$\begin{bmatrix} 5 & 2.075 \\ 2.075 & 1.165 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.141 \\ 1.424 \end{bmatrix}$$

$$5 \cdot a_0 + 2.075 a_1 = 2.141$$

$$2{,}075 \cdot a_0 + 1.165 \cdot a_1 = 1.424$$

$$a_0 = -0.303 \quad , \quad b = 1.762$$

$$\boxed{y = -0.303 + 1.762 x}$$

Çoklu Eşitlikler (Regresyon Modeli)

y lineer fonksiyonun 2 veya daha fazla bağımsız değişkenler mevcut

$$y = a_0 + a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2$$

$$\begin{bmatrix} n & \Sigma x_i & \Sigma x_{2i} \\ \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 & \Sigma x_{1i} x_{2i} \\ \Sigma x_{2i} & \Sigma x_{2i} & \Sigma x_{2i}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma y_i \\ \Sigma x_1 y_i \\ \Sigma x_{2i} y \end{bmatrix}$$

Örnek:

x	x_2	y
0	0	5
2	1	10
2.5	2	9
7	3	0
4	6	3
5	2	27

$n = 6$, $\sum x_1 = 20.5$

$\sum x_2 = 14$, $\sum x_1^2 = 100.25$

$\sum x_2^2 = 54$, $\sum x_1 . x_2 = 62$

$\sum y = 54$, $\sum x_1 . y = 189.5$

$\sum x_2 . y = 100$

$$\begin{bmatrix} 6 & 20.5 & 14 \\ 20.5 & 100.25 & 62 \\ 14 & 62 & 54 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 54 \\ 189.5 \\ 100 \end{bmatrix}$$

$6a_0 + 20.5 a_1 + 14 a_2 = 54$ $\qquad a_0 = 9.845$

$20.5 a_0 + 100.25 a_1 + 62 a_2 = 189.5$ $\qquad a_1 = 1.070$

$14 a_0 + 62 a_1 + 54 a_2 = 100$ $\qquad a_2 = -1.930$

$$y = 9.845 + 1.070 x_1 - 1.930 x_2$$

Sayısal Türev

7. hafta

$$\text{ileri fark} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + O(h)$$

$$\text{geri fark} = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + O(h)$$

$$\text{merkezi fark} = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2)$$

örnek: $f(x) = \ln(x)$ olsun ve $x_0 = 1{,}8$ 'de türevini ve $h = 0.1$, $h = 0{,}001$, $h = 0{,}01$ değerlerini ileri fark formülü kullanarak bulunuz.

h	$f(1{,}8$	$f(1{,}8+h)$	$(f(1{,}8+h) - f(x))/h$
0,1			
0,01			
0,001			

h azaldıkça hata miktarı azalır.

örnek: $f(x) = -0.1x^4 + (-0.15)x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2$

$x = 0.5$ noktasındaki türevini $h = 0.25$ ve $h = 0.5$ alarak bağıl hatalarını bütün yöntemlerle bulunuz

$f'(0.5) = -0.9125$ gerçek değer

ⓐ ileri fark ile $h = 0.5$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{f(1) - f(0.5)}{0.5} = -1.45$$

$$r_e = \frac{-0.9125 + 1.45}{-0.9125} \cdot 100 = \% \, 58.44$$

ⓑ geri fark ile

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} = \frac{f(0{,}5) - f(0)}{0.5} = -0.55$$

$$r_e = \frac{-0.9125 + 0.55}{-0.9125} \cdot 100 = \% \, 39{,}72$$

ⓒ merkezi fark ile

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = \frac{f(1) - f(0)}{1} = -1$$

$$r_e = \frac{-0.9125 + 1}{-0.9125} \cdot 100 = \% \, 9.58$$

İki noktada ikinci türev

$$\text{ileri fark} = \frac{f(x_{i+1}) - 2 \cdot f(x_{i-1}) + f(x_i)}{h^2}$$

$$\text{geri fark} = \frac{f(x_i) - 2f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{h^2}$$

$$\text{merkezi fark} = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2}$$

örnek: $f(x) = x - \tan x$, $x \in (4, 4.5)$ ikiye bölme yöntemi ile iterasyon tablosunu oluşturunuz.

i	a	$f(a)$	b	$f(b)$	kök	$m = (a+b)/2$	$f(m)$	r_a
0	4	2.84	4.5	-0.14	VAR	4.25	2.24	-
1	4.25	2.24	4.5	-0.14	VAR	4.38	1.48	% 2.85
2	4.38	1.48	4.5	-0.14	VAR	4.44	0.86	% 1.35

$f(a) \cdot f(b) > 0$ ise kök yok

$f(a) \cdot f(b) < 0$ ise kök VAR

a = alt değer , b = üst değer

$$\text{bağıl hata} = \frac{m_i - m_{i-1}}{m_i} \cdot 100$$

Açık Yöntemler 9. hafta

Newton Raphson (teğet) tek değerli

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

örnek: $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$, $x_0 = 1$

$f'(x) = 3x^2 + 8x$ $f(x_0) = -5$, $f'(x_0) = 11$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 + \frac{5}{11} = 1.455$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1.369$$

Sekant (kiriş) yöntemi çift değerli

$$x_{i+1} = x_i - f(x_i) \cdot \frac{(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$$

örnek: $f(x) = e^x - x$ için $x_0 = 1$, $x_1 = 0$

$$x_2 = 0 - f(0) \cdot \frac{(0 - 1)}{f(0) - f(1)} = 0.61270$$

İntegrasyon 10. Hafta

Dikdörtgen Yöntemi

$a \leq x \leq b$

$$\text{Alan} = I = \int_a^b f(x)\,dx = \Delta x \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$\underbrace{\Delta x}_{\text{dilim kalınlığı}} = \frac{b-a}{n}$$

$n \rightarrow$ dilim sayısı

Örnek: $I = \int_0^1 (3x^2 - 4x^3) \, dx$ $n=10$

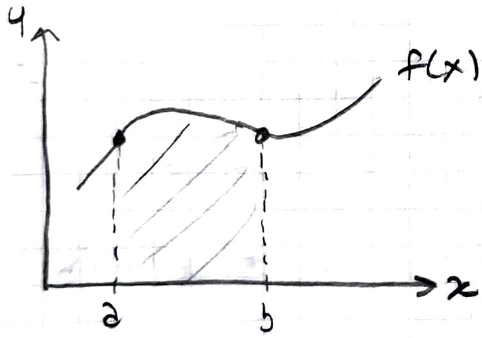
$n=10$ ise $\Delta x = \frac{1-0}{10} = 0.1$, $a=0$, $b=1$

iterasyon	x	$f(x)$
0	$0 \to a$	0
1	$+\Delta x$ 0.1	0.026
2	0.2	0.088
3	0.3	0.162
4	0.4	0.224
5	0.5	0.250
6	0.6	0.216
7	0.7	0.098
8	0.8	-0.128
9	0.9	-0.486
10	$1 \to b$	-1

$$\sum f(x_i) = -0.55$$

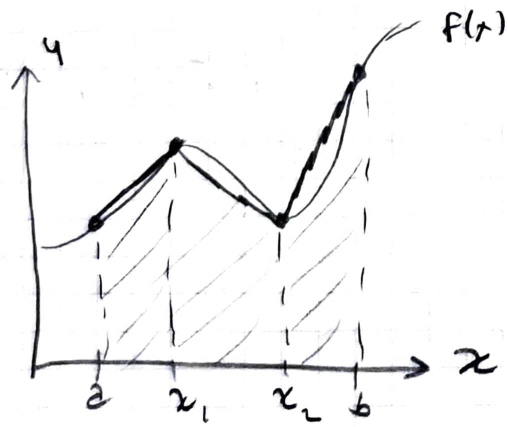
Alan için $= \sum f(x_i) \cdot \Delta x = -0.65 \times 0.1 = -0.055$

Trapez (yamuk) Yöntemi



tek dilim için

$$\text{Alan} = (b-a) \cdot \frac{f(a)+f(b)}{2}$$



Çoklu dilim;

$$\text{Alan} = \Delta x \cdot \left[\frac{f_0 + f_n}{2} + f_1 + f_2 + \ldots + f_{n-1} \right]$$

örnek $\int_0^{0.8} (0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5)\,dx$

gerçek değer $\int_0^{0.8} f(x) = 1.64053$

$$I = (b-a) \cdot \frac{f(a)+f(b)}{2} \Rightarrow 0.8 \cdot \frac{(0.2 + 0.232)}{2} = 0.17280$$

örnek $\int_1^3 \frac{\cos x}{1+e^x} \cdot x^2\,dx$ $\qquad I_{\text{gerçek}} = -0.346078$

$\Delta x = 1 \qquad n = 2 \qquad a = 1 \qquad b = 3$

i	x	$f(x)$
0	1	0.145310
1	2	-0.19842
2	3	-0.422561

$$\Delta x \cdot \left[\frac{f_0 + f_n}{2} + f_1 + f_2 + \dots + f_{n-1} \right]$$

$$1 \cdot \left[\frac{0.145310 + (-0.422561)}{2} + (-0.19842) \right]$$

$$I \cong -0.337050$$

Gauss - Legendre Yöntemi

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \sum_{i=0}^{n} c_i \cdot f(x_i)$$

c = ağırlık merkezi

x_i = noktalar

$\Rightarrow$ 4 bilinmeyen (c_1, c_2, x_1, x_2), -1 ve 1 aralığı

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \Rightarrow c_1 \cdot f(x_1) + c_2 \cdot f(x_2)$$

Kordinat değişimi

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} . t$$

$$dx = \frac{b-a}{2} . dt$$

Aralığın değiştirilmesi

$$I = \int_a^b f(x) . dx \cong \left(\frac{b-a}{2}\right) \cdot \int_{-1}^{1} f\left(\frac{b-a}{2} . t + \frac{a+b}{2}\right) \cdot dt$$

Örnek: $\int_{0.2}^{2.6} e^{-x^2} . dx$ → Gauss-Legendre ile çözünüz

$$x = \frac{(b-a)}{2} . t + \frac{b+a}{2}$$

$$I = \int_{0.2}^{2.6} e^{-x^2} dx = 1.2 \int_{-1}^{1} e^{-(1.2t + 1.4)^2} . dt$$

$$= c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3$$

1/3 Simpson Yöntemi (Üç nokta yaklaşımı)

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} , \quad \int_{x_1}^{x_3} f(x) dx = \frac{h}{3}\left[f(x_1) + 4 f(x_2) + f(x_3)\right]$$

$$I = \frac{h}{3}\left[f_0 + 4 f_1 + 2 f_2 + 4 f_3 + 2 f_4 + \ldots + 4 f_{n-1} + f_n\right]$$

örnek: $\int_1^3 \frac{\cos(x)}{1+e^x} \cdot x^2$ 0,2 ve 0,5 ve 1 için

$\Delta x = \frac{3-1}{2} = 1$ (b = 3, a = 1, 2 → n)

$\frac{2}{n} = 0.5$

$\boxed{n = 4}$

$\frac{2-1}{3}\left[0.145310 + 4.(-0.19824) - 0.422561\right]$

$I \cong -0.356982$

örnek: $\int_1^5 [1+4x-x^2]\,dx$ $n=4$ ise $\Delta x = \frac{5-1}{4} = 1$

x	f(x)
1	4
2	5
3	4
4	-1
5	4

$\frac{1}{3}$ için [1 4 1]

$\frac{3}{8}$ için [1 3 3 1]

$\frac{1}{3}\cdot\left[1.(4) + 4(5) + 4 + (-1).4 + 4\right] = 10,6667$

$4 + 20 + 4 - 4 + 4$

11. Hafta

örnek: $\int_0^4 x.e^{2x}$ simpson 3/8 e göre bulunuz $(n=3)$

$\frac{3\Delta x}{8}[1\ 3\ 3\ 1]$

$n=3$ ise $\Delta x = \frac{4}{3}$ $f(x) = x.e^{2x}$

i	x	f(x)
0	0	0 (f_0)
1	1.33333	19.18905 (f_1)
2	2.66667	552.34370 (f_2)
3	4	11923.83195 (f_3)

$\frac{3.\frac{4}{3}}{8}\cdot\left[1.0 + 3.f_1 + 3.f_2 + 1.f_3\right]$

$\cong 6819.21510$

Birinci dereceden diferansiyel eşitlik

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) = y'$$

Bir değişkenli fonksiyonlar ADİ DİF. DE.

$$\frac{dv}{du} = g - \frac{c_d}{m} v^2$$

Çok değişkenli fonksiyonlar KISMİ DİF. DE

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{d\phi}{dy} = 0$$

$\frac{dy}{dx}$ → dy: Bağımlı değişken; dx: Bağımsız değişken

not: n'inci mertebeden bir diferansiyel denklem herzaman n adet birinci mertebeden denklemden oluşan bir sisteme dönüştürülebilir.

örnek $3 \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 5y = e^x$, $y(0)=5$ $y'(0)=7$

1. mertebeye çeviriniz

$$\frac{dy}{dx} = z \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = z' \Rightarrow \boxed{\text{1. EŞİTLİK}}$$

$$3z' + 2z + 5y = e^x$$

$$3\frac{dz}{dx} + 2z + 5y = e^x \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{1}{3}(e^x - 2z - 5y)$$

$\boxed{\text{2. EŞİTLİK}}$

örnek $u''(t) + 16u'(t) + 192u(t) = 0$
1. dereceden ADİ DİF indirgemesi yapınız.

$\frac{du}{dt} = z \quad \Rightarrow \quad m' + 16z + 192u = 0$

$\frac{dz}{dt} = m$

örnek $\frac{d^3y}{dx^3} + 2 \cdot \frac{d^2y}{dx^2} - x^2 \frac{dy}{dx} = 5x$

1. mertebeden indirgeme yapınız.

$\frac{dy}{dx} = m \qquad \frac{d^2y}{dx} = m'$

$\frac{dm}{dx} = n$

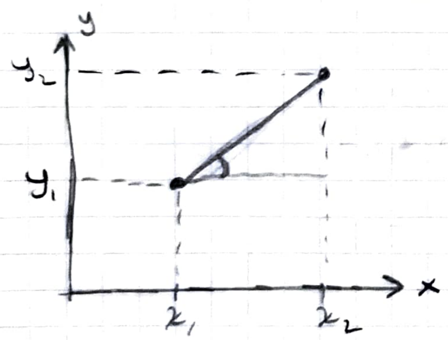
$\Rightarrow n' + 2m' - x^2 m = 5x$

örnek $y''' - y'' - 5y' - 3y = e^{-x}$

$y' = z, \quad y'' = z', \quad z' = m, \quad y''' = m'$

$\Rightarrow m' - z' - 5z - 3y = e^{-x}$

Euler Yöntemi



$y_2 = h \cdot f(x, y) + y_1$

örnek: $y_{n+1} \approx y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$

$y' = y - x, \quad y(0) = 0.5$ ve $h = 0.1$

$x_0 = 0$
$x_1 = 0.1$
$x_2 = 0.2$
$+ \Delta x = h$

$y_1 = 0.1 \times (0.5 - 0) + 0.5 = 0.55$

$y_2 = 0.1 \times (0.55 - 0.1) + 0.55 = 0.595$

$\boxed{\text{2. Mertebeden Runge kutta}}$ $\boxed{\text{12. hafta}}$

12.12.2022

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) = f'(x)$$

tanım: $y_{i+1} = y_i + \phi \cdot h \quad , \quad \phi = \frac{1}{3} k_1 + \frac{2}{3} k_2$

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + \frac{h}{3} \cdot (k_1 + 2k_2)}$$

$$k_1 = f(x_0, y_0)$$

$$k_2 = f(x_0 + \tfrac{3}{4} h \ , \ y_0 + \tfrac{3}{4} \cdot k_1 \cdot h)$$

Örnek: $\frac{dy}{dx} - 1.3xe^{-x} = -2y$ her zaman y' i yalnız bırak

$\frac{dy}{dx} = 1.3xe^{-x} - 2y$ $y(0) = 5$ ve $h = 0.2$

$x = 0$ ve $y = 5$ için

$$\boxed{y_1 = y_0 + \frac{h}{3} \cdot (k_1 + 2k_2)}$$

- $k_1 = f(x_0, y_0) = f(0, 5) = -8.7$
- $k_2 = f(x_0 + \frac{3h}{4} \ , \ y_0 + \frac{3}{4} k_1 \cdot h) = -6.28$

$y_1 = 5 + \frac{0.2}{3} \times (-8.7 + 2 \times (-6.28)) = 3.58$

$f(0.2) = 3.58$

$\boxed{\text{4. Mertebeden Runge kutta}}$

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6} \times (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)}$$

$k_1 = f(x_0, y_0)$

$k_2 = f(x_0 + \frac{h}{2} \ , \ y_0 + \frac{h \times k_1}{2})$

$k_3 = f(x_0 + \frac{h}{2} \ , \ y_0 + \frac{h \times k_2}{2})$

$k_4 = f(x_0 + h \ , \ y_0 + k_3 \cdot h)$

örnek: $f(x,y) = 1 + y + x^2$, $y(0) = 0.5$, $h = 0.2$ $\quad y(0.2) = ?$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = f(0, 0.5) = 1.5$$

$$k_2 = f\left(0 + \frac{0.2}{2}, 0.5 + \frac{0.2 \times 1.5}{2}\right) = f(0.1, 0.65) = 1.66$$

$$k_3 = f\left(0.1, 0.5 + \frac{0.2 \times 1.66}{2}\right) = f(0.1, 0.67) = 1.68$$

$$k_4 = f(0 + 0.2, 0.5 + 1.68 \times 0.2) = f(0.2, 0.84) = 1.88$$

$$y_{0.2} = 0.5 + \frac{0.2}{6} \times (1.5 + 2 \times (1.66) + 2 \times (1.68) + 1.88)$$

$$y_{0.2} = 0.84$$

$$y(0.2) = 0.84$$