Prueba de Ji-Cuadrada

Se trata de una prueba de hipótesis a partir de datos, basada en un cálculo de valor llamado estadístico de prueba, al que se compara con un valor conocido como valor crítico (obtenido de tablas estadísticas).

$$\lambda^2 = \sum_{1}^{k} \frac{(f_0 - f_e)^2}{f_e}$$

$$v = k - 1 - m$$

f_o: frecuencia observada
f_e: frecuencia esperada
k: cantidad de clases o intervalos
m: cantidad de datos empíricos
v: grados de libertad

Para llevar a cabo la prueba de Ji-cuadrada se debe tener en cuenta:

- Las frecuencias esperadas para cada intervalo de clase deben ser de 5 o más. De no alcanzar esta cifra, se deberá agrupar clases o intervalos adyacentes.
- La cantidad de datos empíricos m se refiere a la cantidad de datos obtenidos en base a la observación, que fueron utilizados para calcular las frecuencias esperadas.
- El método es más adecuado para muestras mayores o iguales a 30 elementos.

Si el λ^2 calculado es menor o igual al λ^2 tabulado, entonces no se rechaza la hipótesis planteada.

El método en pasos:

1. Obtener al menos 30 datos de la variable aleatoria a analizar.
2. Calcular la media y la varianza de los datos (cuando corresponda).
3. Crear un histograma de k intervalos (se sugiere $k = \sqrt{n}$), y obtener la frecuencia observada en cada intervalo fo_i.
4. **Establecer la hipótesis nula, proponiendo una distribución de probabilidad que se ajuste a la forma obtenida en el histograma**.
5. Calcular la frecuencia esperada fe_i, a partir de la función de densidad de la distribución estadística propuesta.
6. Calcular el *estadístico de prueba*:
$$c = \sum_{i=1}^{k} \frac{(fe_i - fo_i)^2}{fe_i}$$
7. Definir el nivel de significancia de la prueba, α, y los grados de libertad v=k-1-m (m es la cantidad de parámetros o datos empíricos estimados en la distribución propuesta), para determinar el valor crítico de la prueba $\chi^2_{\alpha,v}$.
8. Comparar el *estadístico de prueba* con el *valor crítico*. Si el *estadístico de prueba* es menor o igual que el *valor crítico*, no se puede rechazar la hipótesis nula.

Ejercicio:

Dada la siguiente serie numérica, efectuar una prueba de bondad de ajuste para aceptar o rechazar la hipótesis nula.

0,15 – 0,22 – 0,41 – 0,65 – 0,84 – 0,81 – 0,62 – 0,45 – 0,32 – 0,07 – 0,11 – 0,29 – 0,58 – 0,73 – 0,93 – 0,97 – 0,79 – 0,55 – 0,35 – 0,09 – 0,99 – 0,51 – 0,35 – 0,02 – 0,19 – 0,24 – 0,98 – 0,10 – 0,31 – 0,17

Se confecciona un histograma. Mediante el mismo se puede percibir la tendencia de la serie numérica, en este caso resultará en una aparente distribución uniforme.
Se establece la hipótesis nula: "**la serie de datos corresponde a una distribución uniforme entre 0 y 1**".
Se procede a efectuar una tabla de frecuencia, donde se divide el espectro (0-1) en cinco intervalos. En este caso la elección de la cantidad de intervalos no es arbitraria, ya que si bien no es mandatorio, se recomienda un número de intervalos igual a la raíz cuadrada del tamaño de muestra.
Luego se procede a efectuar un conteo de frecuencia, para especificar cuántos números de la serie caen en cada intervalo (fo). A continuación se calculan las frecuencias esperadas, que en el caso de la distribución uniforme es el mismo valor para cada intervalo, ya que se espera que los números de la serie se distribuyan de manera equitativa en cada intervalo (fe). Es decir, cada intervalo tiene la misma probabilidad que los otros intervalos de que un número de la serie caiga en él.

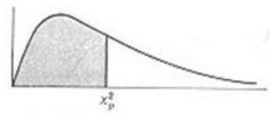
A continuación se calcula el estadístico de prueba para cada intervalo (C) y por último se efectúa una acumulación de cada estadístico. El valor de estadístico de prueba resultante es de 1,67.

Intervalo	**fo**	**fe**	**C**	**C (AC)**
0,0 - 0,2	8	6	0,67	0,67
0,2 - 0,4	7	6	0,17	0,83
0,4 - 0,6	5	6	0,17	1,00
0,6 - 0,8	4	6	0,67	1,67
0,8 - 1,0	6	6	0,00	1,67

Tabla 1 – Cálculo del estadístico de prueba

Como último paso se debe comparar el estadístico de prueba con el valor crítico. Este último se puede obtener de la siguiente tabla:

Valores percentiles (χ^2_p) para la distribución ji-cuadrado con ν grados de libertad (área en sombra = p)



ν	$\chi^2_{.995}$	$\chi^2_{.99}$	$\chi^2_{.975}$	$\chi^2_{.95}$	$\chi^2_{.90}$	$\chi^2_{.75}$	$\chi^2_{.50}$	$\chi^2_{.25}$	$\chi^2_{.10}$	$\chi^2_{.05}$	$\chi^2_{.025}$	$\chi^2_{.01}$	$\chi^2_{.005}$
1	7.88	6.63	5.02	3.84	2.71	1.32	.455	.102	.0158	.0039	.0010	.0002	.0000
2	10.6	9.21	7.38	5.99	4.61	2.77	1.39	.575	.211	.103	.0506	.0201	.0100
3	12.8	11.3	9.35	7.81	6.25	4.11	2.37	1.21	.584	.352	.216	.115	.072
4	14.9	13.3	11.1	9.49	7.78	5.39	3.36	1.92	1.06	.711	.484	.297	.207
5	16.7	15.1	12.8	11.1	9.24	6.63	4.35	2.67	1.61	1.15	.831	.554	.412
6	18.5	16.8	14.4	12.6	10.6	7.84	5.35	3.45	2.20	1.64	1.24	.872	.676
7	20.3	18.5	16.0	14.1	12.0	9.04	6.35	4.25	2.83	2.17	1.69	1.24	.989
8	22.0	20.1	17.5	15.5	13.4	10.2	7.34	5.07	3.49	2.73	2.18	1.65	1.34
9	23.6	21.7	19.0	16.9	14.7	11.4	8.34	5.90	4.17	3.33	2.70	2.09	1.73
10	25.2	23.2	20.5	18.3	16.0	12.5	9.34	6.74	4.87	3.94	3.25	2.56	2.16
11	26.8	24.7	21.9	19.7	17.3	13.7	10.3	7.58	5.58	4.57	3.82	3.05	2.60
12	28.3	26.2	23.3	21.0	18.5	14.8	11.3	8.44	6.30	5.23	4.40	3.57	3.07
13	29.8	27.7	24.7	22.4	19.8	16.0	12.3	9.30	7.04	5.89	5.01	4.11	3.57
14	31.3	29.1	26.1	23.7	21.1	17.1	13.3	10.2	7.79	6.57	5.63	4.66	4.07
15	32.8	30.6	27.5	25.0	22.3	18.2	14.3	11.0	8.55	7.26	6.26	5.23	4.60
16	34.3	32.0	28.8	26.3	23.5	19.4	15.3	11.9	9.31	7.96	6.91	5.81	5.14
17	35.7	33.4	30.2	27.6	24.8	20.5	16.3	12.8	10.1	8.67	7.56	6.41	5.70
18	37.2	34.8	31.5	28.9	26.0	21.6	17.3	13.7	10.9	9.39	8.23	7.01	6.26
19	38.6	36.2	32.9	30.1	27.2	22.7	18.3	14.6	11.7	10.1	8.91	7.63	6.84
20	40.0	37.6	34.2	31.4	28.4	23.8	19.3	15.5	12.4	10.9	9.59	8.26	7.43
21	41.4	38.9	35.5	32.7	29.6	24.9	20.3	16.3	13.2	11.6	10.3	8.90	8.03
22	42.8	40.3	36.8	33.9	30.8	26.0	21.3	17.2	14.0	12.3	11.0	9.54	8.64
23	44.2	41.6	38.1	35.2	32.0	27.1	22.3	18.1	14.8	13.1	11.7	10.2	9.26
24	45.6	43.0	39.4	36.4	33.2	28.2	23.3	19.0	15.7	13.8	12.4	10.9	9.89
25	46.9	44.3	40.6	37.7	34.4	29.3	24.3	19.9	16.5	14.6	13.1	11.5	10.5
26	48.3	45.6	41.9	38.9	35.6	30.4	25.3	20.8	17.3	15.4	13.8	12.2	11.2
27	49.6	47.0	43.2	40.1	36.7	31.5	26.3	21.7	18.1	16.2	14.6	12.9	11.8
28	51.0	48.3	44.5	41.3	37.9	32.6	27.3	22.7	18.9	16.9	15.3	13.6	12.5
29	52.3	49.6	45.7	42.6	39.1	33.7	28.3	23.6	19.8	17.7	16.0	14.3	13.1
30	53.7	50.9	47.0	43.8	40.3	34.8	29.3	24.5	20.6	18.5	16.8	15.0	13.8
40	66.8	63.7	59.3	55.8	51.8	45.6	39.3	33.7	29.1	26.5	24.4	22.2	20.7
50	79.5	76.2	71.4	67.5	63.2	56.3	49.3	42.9	37.7	34.8	32.4	29.7	28.0
60	92.0	88.4	83.3	79.1	74.4	67.0	59.3	52.3	46.5	43.2	40.5	37.5	35.5
70	104.2	100.4	95.0	90.5	85.5	77.6	69.3	61.7	55.3	51.7	48.8	45.4	43.3
80	116.3	112.3	106.6	101.9	96.6	88.1	79.3	71.1	64.3	60.4	57.2	53.5	51.2
90	128.3	124.1	118.1	113.1	107.6	98.6	89.3	80.6	73.3	69.1	65.6	61.8	59.2
100	140.2	135.8	129.6	124.3	118.5	109.1	99.3	90.1	82.4	77.9	74.2	70.1	67.3

Tabla 2 – Valores percentiles para distribución Chi-cuadrado

La tabla 2 indica en la primera columna los grados de libertad, y en la primera fila la probabilidad asociada a valores mayores a un determinado valor. Los grados de libertad se calculan según la fórmula indicada previamente, para este caso $v = 5 - 1 - 0$, lo cual nos da un resultado de 4 grados de libertad.

A continuación se debe elegir el nivel de significancia, el cual nos indica la probabilidad de rechazar la hipótesis nula cuando es verdadera. Por ejemplo, el nivel que se seleccionará es $1 - \propto = 0.95$, el cual indica que existe un riesgo de 5% de concluir que la muestra no se ajusta a la distribución propuesta, cuando en realidad si lo hace.

Para los grados de libertad calculados y el nivel de significancia seleccionado el valor crítico es 9,49. Como el estadístico de prueba calculado (1,67) es menor al valor crítico, se concluye que no se puede rechazar la hipótesis nula.

Prueba de Kolmogorov-Smirnov

Esta prueba también permite determinar la distribución de probabilidad de una serie de datos. Una limitante de la prueba es que solamente puede ser aplicada al análisis de variables continuas.

$$KS = \max_{1-K}(|P(f_o)_{AC} - P(f_e)_{AC}|)$$

f_o: frecuencia observada
f_e: frecuencia esperada
k: cantidad de clases o intervalos
$P()_{AC}$: probabilidad acumulada

Para llevar a cabo esta prueba se debe tener en cuenta:

- En esta prueba los grados de libertad están dados por el tamaño de muestra.
- La prueba es más adecuada para muestras pequeñas, entre 10 y 30 elementos.
- Es aplicable solamente a variables aleatorias continuas. [1]

Si el KS calculado es menor al KS tabulado, entonces no se rechaza la hipótesis planteada.

El método en pasos:

1. Obtener hasta 30 datos de la variable aleatoria a analizar (esta prueba es más adecuada para muestras pequeñas, de 10 a 30 datos).
2. Calcular la media y la varianza de los datos (cuando corresponda).
3. Crear un histograma de k intervalos (se sugiere k= $\sqrt{n}$), y obtener la frecuencia observada en cada intervalo fo_i.
4. Calcular la probabilidad observada Po_i en cada intervalo. Esto es, dividir la frecuencia observada fo_i entre el número total de datos de la muestra n. ($Po_i = fo_i/n$).
5. Acumular las probabilidades Po_i para obtener la probabilidad observada hasta el i-ésimo intervalo (POA_i).
6. Establecer la hipótesis nula, proponiendo una distribución de probabilidad que se ajuste a la forma obtenida en el histograma.
7. Calcular la probabilidad esperada acumulada para cada intervalo, PEA_i, a partir de la función de densidad de la distribución estadística propuesta.
8. Calcular el estadístico de prueba: $c = máx|PEA_i - POA_i|$ con i=1,2,3,…,k
9. Definir el nivel de significancia de la prueba, α, y determinar el valor crítico de la prueba, $D_{\alpha,n}$.
10. Comparar el *estadístico de prueba* con el *valor crítico*. Si el *estadístico de prueba* es menor o igual que el *valor crítico*, no se puede rechazar la hipótesis nula.

Ejercicio:

0,15 – 0,22 – 0,41 – 0,65 – 0,84 – 0,81 – 0,62 – 0,45 – 0,32 – 0,07 – 0,11 – 0,29 – 0,58 – 0,73 – 0,93 – 0,97 – 0,79 – 0,55 – 0,35 – 0,09 – 0,99 – 0,51 – 0,35 – 0,02 – 0,19 – 0,24 – 0,98 – 0,10 – 0,31 – 0,17

Se procede a dividir en una cantidad específica de intervalos, en este caso 5. Se contabilizan las frecuencias observadas (fo) en cada uno de los intervalos. Luego se calcula la frecuencia esperada (fe) para cada caso, en base a la probabilidad esperada para cada intervalo. En base a las frecuencias observadas, se calculan las probabilidades observadas. Luego se efectúa un acumulado de cada una de las probabilidades. A continuación se calcula la diferencia absoluta entre las probabilidades, y finalmente se busca el máximo entre los valores calculados.

Intervalo	fo	fe	Po	Pe	Po_{AC}	Pe_{AC}	$\| Po_{AC} - Pe_{AC} \|$	$\max(\| Po_{AC} - Pe_{AC} \|)$
0,0 - 0,2	8	6	0,27	0,20	0,27	0,20	0,0667	0,0067
0,2 - 0,4	7	6	0,23	0,20	0,50	0,40	0,1000	0,1000
0,4 - 0,6	5	6	0,17	0,20	0,67	0,60	0,0667	0,1000
0,6 - 0,8	4	6	0,13	0,20	0,80	0,80	0,0000	0,1000
0,8 - 1,0	6	6	0,20	0,20	1,00	1,00	0,0000	0,1000

Tabla 3 – Cálculo del estadístico de prueba

Como último paso se debe comparar el estadístico de prueba con el valor crítico. Este último se puede obtener de la siguiente tabla:

	Nivel de significación α							
n	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.005	0.002	0.001
1	0.90000	0.95000	0.97500	0.99000	0.99500	0.99750	0.99900	0.99950
2	0.68337	0.77639	0.84189	0.90000	0.92929	0.95000	0.96838	0.97764
3	0.56481	0.63604	0.70760	0.78456	0.82900	0.86428	0.90000	0.92065
4	0.49265	0.56522	0.62394	0.68887	0.73424	0.77639	0.82217	0.85047
5	0.44698	0.50945	0.56328	0.62718	0.66853	0.70543	0.75000	0.78137
6	0.41037	0.46799	0.51926	0.5774 1	0.61661	0.65287	0.69571	0.72479
7	0.38148	0.43607	0.48342	0.53844	0.57581	0.60975	0.65071	0.67930
8	0.35831	0.40962	0.45427	0.50654	0.54179	0.57429	0.61368	0.64098
9	0.33910	0.38746	0.43001	0.47960	0.51332	0.54443	0.58210	0.60846
10	0.32260	0.36866	0.40925	0.45562	0.48893	0.51872	0.55500	0.58042
11	0.30829	0.35242	0.39122	0.43670	0.46770	0.49539	0.53135	0-55588
12	0.29577	0.33815	0.37543	0.41918	0.44905	0.47672	0.51047	0.53422
13	0.28470	0.32549	0.36143	0.40362	0.43247	0.45921	0.49189	0.51490
14	0.27481	0.31417	0.34890	0.38970	0.41762	0.44352	0.47520	0.49753
15	0.26589	0.30397	0.33750	0.37713	0.40420	0.42934	0.4561 1	0.48182
16	0.25778	0.29472	0.32733	0.36571	0.39201	0.41644	0.44637	0.46750
17	0.25039	0.28627	0.31796	0.35528	0.38086	0.40464	0.43380	0.45540
18	0.24360	0.27851	0.30936	0.34569	0.37062	0.39380	0.42224	0.44234
19	0.23735	0.27136	0..30143	0.33685	0.36117	0.38379	0.41156	0.43119
20	0.23156	0.26473	0.29408	0.32866	0.35241	0.37451	0.40165	0.42085
21	0.22517	0.25858	0.28724	0.32104	0.34426	0.36588	0.39243	0.41122
22	0.221I5	0.25283	0.28087	0.31394	0.33666	0.35782	0.38382	0.40223
23	0.21646	0.24746	0.2749tl	0.30728	0.32954	0.35027	0.37575	0.39380
24	0.21205	0.24242	0.26931	0.30104	0.32286	0.34318	0.36787	0.38588
25	0.20790	0.23768	0.26404	0.29518	0.31657	0.33651	0.36104	0.37743
26	0.20399	0.23320	0.25908	0.28962	0.30963	0.33022	0.35431	0.37139
27	0.20030	0.22898	0.25438	0.28438	0.30502	0.32425	0.34794	0.36473
28	0.19680	0.22497	0.24993	0.27942	0.29971	0.31862	0.34190	0.35842
29	0.19348	0.22117	0.2457 1	0.27471	0.29466	0.31327	0.33617	0.35242
30	0.19032	0.21756	0.24170	0.27023	0.28986	0.30818	0.33072	0.34672
31	0.18732	0.21412	0.23788	0.26596	0.28529	0.30333	0.32553	0.34129
32	0.18445	0.21085	0.23424	0.26189	0.28094	0.29870	0.32058	0.33611
33	0.1817 1	0.20771	0.23076	0.25801	0.27577	0.29428	0.31584	0.33115
34	0.17909	0.21472	0.22743	0.25429	0.27271	0.29005	0.31131	0.32641
35	0.17659	0.20185	0.22425	0.25073	0.26897	0.28600	0.30597	0.32187
n > 35	$\frac{1.07}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.22}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.36}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.52}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.63}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.73}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.85}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.95}{\sqrt{n}}$

Tabla 4 – Test de Kolmogorov Smirnov sobre Bondad de Ajuste

La tabla 2 indica en la primera columna los grados de libertad, y en la primera fila la probabilidad asociada a valores mayores a un determinado valor. Los grados de libertad en este caso hacen referencia al tamaño de muestra, que para el ejemplo utilizado, es de 30 elementos.
A continuación se debe elegir el nivel de significancia, el cual nos indica la probabilidad de rechazar la hipótesis nula cuando es verdadera. Por ejemplo, el nivel que se seleccionará es $\propto = 0.05$, el cual indica que existe un riesgo de 5% de concluir que la muestra no se ajusta a la distribución propuesta, cuando en realidad si lo hace.

Para los grados de libertad especificados y el nivel de significancia seleccionado, el valor crítico es 0,24170. Como el estadístico de prueba calculado (0,1) es menor al valor crítico, se concluye que no se puede rechazar la hipótesis nula.

[1] Simulación y Análisis de Sistemas con ProModel – García Dunna / García Reyes – Editorial Prentice Hall