Распараллеливание алгоритма вычисления числа e^x

Карцев Вадим

21 марта 2022 г.

Изначально имеем формулу вичисления числа e^x следующего вида:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... \tag{1}$$

Сразу видно, что члены последовательности рекурсивно получаются друг из друга

$$e^x = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + ...$$

$$a_0 = 1 \qquad a_{n+1} = \frac{x}{n+1} a_n$$

Это является основной оптимизацией, которая позволяет решить проблему переполнения в рассчете факториала - будем получать следующий член ряда, используя предыдущий.

Теперь разберемся с распараллеливанием алгоритма. Очевидно, обсчитывать факториал 4 раза будет уже неоптимально, поэтому преобразуем формулу для оптимизации в параллельном алгоритме. Для примера будем рассматривать два процесса, первый из которых будет обсчитывать сумму членов ряда с 0 по n, а второй – с $n+1$ по m, где m – общее число членов ряда.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + \left(\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} + ... + \frac{x^m}{m!} \right) \tag{2}$$

Теперь мы можем вынести из скобки общий множитель $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$. Этот множитель можно оптимально получать из последнего слагаемого первой половины ряда. Так, получим окончательно оптимальную формулу для параллельного рассчета числа e^x.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \left(1 + \frac{x}{n+2} + ... + \frac{x^{m-(n+1)}}{(n+2)(n+3)...(m-1)(m)} \right) \tag{3}$$

Лагко заметить, что сумма до скобок и сумма в скобках вычисляется схожим образом, как было описано для обсчета выражения 1. Именно эти суммы мы и заставим обсчитывать параллельные процессы. Так же легко понять, что сумму внутри скобки в формуле 3 можно тем же образом разбить на две части. Таким образом, такой способ распараллеливания можно распространить и на число процессов, большее двух.

Таким образом, в каждом процессе будем считать свою часть суммы ряда, затем передавать в процесс с номером на единицу меньше текущего, который будет обсчитывать помимо своей части еще и множитель для следующей части суммы.

Таким образом, в процессе с нулевым номером в итоге соберется конечное значение суммы.