

Обработка результатов измерений

Карцев Вадим, Б01-904

6 декабря 2020 г.

1 Измерения и погрешности

1.1 Результат измерения

Очевидно, что когда мы измеряем некоторую величину, имеет место быть некоторая неточность измерений. Например, измеряя длину тела линейкой, мы можем столкнуться с тем, что линейка может быть неточно положена, иметь неточные деления. Даже если добиться точности расположения линейки, все равно имеет место быть округление, так как деления линейки имеют некоторую цену. У устройств без шкалы на дисплее все равно может быть отображено только конечное число цифр после запятой. Таким образом, то, что мы называем измерением - это некоторое *идеализированное значение*, только приближенное к реальному.

Назовем погрешностью измерения разницу между измеренным и «истинным» значениями

$$\delta x = x_{\text{изм}} - x_{\text{ист}}$$

Однако величину δx невозможно точно определить ввиду невозможности узнать истинное значения некоторой величины.

О каких-либо величинах принято говорить не как о точных значениях, а скорее как о некотором промежутке

$$x = x_{\text{изм}} \pm \delta x$$

Кроме этого часто для наглядности используют относительную погрешность

$$\varepsilon_x = \frac{\delta x}{x_{\text{изм}}}$$

1.2 Многократные измерения

Если мы несколько раз измерим одну и ту же величину, вероятно мы получим расходящиеся по значению результаты.

$$\mathbf{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

В таком случае результат измерений является случайной величиной, которую можно будет описать некоторым *вероятностным законом* - *распределением*. Вычислим среднее значение величины по набору \mathbf{X}

$$\langle x \rangle = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (1)$$

Так же мы будем орудовать понятием отклонения. Так, отклонение каждого значения от среднего это

$$\Delta x_i = x_i - \langle x \rangle, \quad i = 1 \dots n$$

Разброс совокупности данных x_i относительно среднего принято характеризовать *среднеквадратичным отклонением*

$$s = \sqrt{\frac{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \dots + \Delta x_n^2}{n}} \equiv \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta x_i^2} \quad (2)$$

или кратко

$$s = \sqrt{\langle \Delta x^2 \rangle} \equiv \sqrt{\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle} \quad (3)$$

При устремлении n к бесконечности и достаточном качестве метода измерений почти все отклонения δx_i скомпенсируются и можно ожидать что среднее значение устремится к некоторому пределу

$$\bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Тогда полученное значение \bar{x} можно считать «истинным» средним для исследуемой величины. Предельную величину среднеквадратичного отклонения обозначим как

$$\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta x_i^2}$$

Итак, если набор значений имеет не слишком большой разброс, то можно с некоторой натяжкой считать, что $\langle x \rangle \approx \bar{x}$

1.3 Классификация погрешностей

Всегда нужно проводить несколько замеров величины в одинаковых условиях, чтобы убедиться в стабильности величины и правильности выбранного метода измерений. Иногда во время измерений возникают грубые

ошибки - «промахи». Естественно, промахи не нужно учитывать при обработке данных. Однако, это может привести к потере данных или помешать открытию некоторого нового явления. Поэтому необходимо тщательно анализировать причины появления аномалий в данных.

Погрешности можно разделить на *систематические*, которые одинаково проявляются при множественных проведениях опыта и на *случайные*, которые хаотичны как по величине так и по знаку.

Так же можно разделить погрешности на

- *инструментальные погрешности*, связанные с несовершенством конструкции или ошибками калибровки измерительных приборов;
- *методические погрешности*, связанные с несовершенством теоретической модели явления или неточностью метода измерения;
- *естественные погрешности*, которые связаны со случайным характером изменения физической величины. Зачастую они показывают природу некоторого явления, поэтому ими нельзя пренебрегать.

1.3.1 Случайные погрешности

Большинству физических явлений присущ случайный характер. Случайную погрешность можно обнаружить при многократном повторении некоторого опыта. Если случайные отклонения с разными знаками приблизительно равновероятны, то можно считать, что погрешность среднего значения $\langle x \rangle$ будет меньше, чем погрешность одного измерения.

Случайные погрешности могут быть связаны с *особенностями приборов, особенностями или несовершенством методики измерения, несовершенством объекта измерений или случайным характером явления*.

В последних двух случаях мы сами заменяем отдельные измерения средним значением. Таким образом мы можем потерять много информации о объекте исследования и прежде чем отбрасывать случайную погрешность, необходимо убедиться, что погрешность вызвана приборами, а не характером объекта.

1.3.2 Систематические погрешности

Систематические погрешности в отличие от случайных практически невозможно обнаружить и исключить многократным повторением экспери-

мента. Примерами систематических погрешностей может быть, например, износ деталей устройства или неточность метода исследования.

Систематические погрешности можно условно разделить на

- известные погрешности;
- погрешности известной природы, но неизвестной величины. Такие погрешности необходимо свести к минимуму, совершенствуя методы исследований;
- погрешности известной природы, которые достаточно сложно оценить;
- неизвестные погрешности. Такие погрешности можно исключить только повторением эксперимента с использованием другой методики и/или другого оборудования.

2 Элементы теории ошибок

2.1 Случайная величина

2.2 Нормальное распределение

2.3 Независимые величины

2.4 Погрешность среднего

2.5 Результирующая погрешность опыта

2.6 Обработка косвенных измерений

2.6.1 Случай одной переменной

2.6.2 Случай многих переменных

3 Рекомендации по выполнению и представлению результатов работы

3.1 Проведение измерений

3.1.1 Правила ведения лабораторного журнала

3.1.2 Подготовка к работе

3.1.3 Начало работы

3.1.4 Выбор количества измерений

3.1.5 Измерения

3.1.6 Рассчёты, анализ и представление результатов

3.2 Анализ инструментальных погрешностей

3.3 Отчёт о работе

3.3.1 Требования к содержанию разделов

3.3.2 Правила округления

3.4 Построение графиков

3.4.1 Рекомендации по оформлению графиков

3.5 Некоторые типичные ошибки обработки данных

4 Оценка параметров

4.1 Метод минимума хи-квадрат

4.2 Метод максимального правдоподобия

4.3 Метод наименьших квадратов