# Обработка результатов измерений

Карцев Вадим, Б01-904

6 декабря 2020 г.

# 1 Измерения и погрешности

## 1.1 Результат измерения

Очевидно, что когда мы измеряем некоторую величину, имеет место быть некоторая неточность измерений. Например, измеряя длину тела линейкой, мы можем столкнуться с тем, что линейка может быть неточно положена, иметь неточные деления. Даже если добиться точности расположения линейки, все равно имеет место быть округление, так как деления линейки имеют некоторую цену. У устройств без шкалы на дисплее все равно может быть отображено только конечное число цифр после запятой. Таким образом, то, что мы называем измерением - это некоторое *идеализированное значение*, только приближенное к реальному.

Назовем погрешностью измерения разницу между измеренным и «истинным» значениями

$$\delta x = x_{\text{изм}} - x_{\text{ист}}$$

Однако величину $\delta x$ невозможно точно определить ввиду невозможности узнать истинное значения некоторой величины.

О каких-либо величинах принято говорить не как о точных значениях, а скорее как о некотором промежутке

$$x = x_{\text{изм}} \pm \delta x$$

Кроме этого часто для наглядности используют относительную погрешность

$$\varepsilon_x = \frac{\delta x}{x_{\text{изм}}}$$

## 1.2 Многократные измерения

Если мы несколько раз измерим одну и ту же величину, вероятно мы получим расходящиеся по значению результаты.

$$\mathbf{X} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$$

В таком случае результат измерений является случайной величиной, которую можно будет описать некоторым *вероятностным законом* - *распределением.* Вычислим среднее значение величины по набору $\mathbf{X}$

$$\langle x\rangle = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \equiv \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{1}$$

Так же мы будем орудовать понятием отклонения. Так, отклонение каждого значения от среднего это

$$\Delta x_i = x_i - \langle x\rangle, \qquad i = 1...n$$

Разброс совокупности данных $x_i$ относительно среднего принято характеризовать *среднеквадратичным отклонением*

$$s = \sqrt{\frac{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + ... + \Delta x_n^2}{n}} \equiv \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2} \tag{2}$$

или кратко

$$s = \sqrt{\langle \Delta x^2\rangle} \equiv \sqrt{\langle (x - \langle x\rangle)^2\rangle} \tag{3}$$

При устремлении $n$ к бесконечности и достаточном качестве метода измерений почти все отлонения $\delta x_i$ скомпенсируются и можно ожидать что среднее значение устремится к некоторому пределу

$$\overline{x} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Тогда полученное значение $\overline{x}$ можно считать «истиным» средним для исследуемой величины Предельную величину среднеквадратичного отклонения обозначим как

$$\sigma = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2}$$

Итак, если набор значений имеет не слишком большой разброс, то можно с некоторой натяжкой считать, что $\langle x\rangle \approx \overline{x}$

## 1.3 Классификация погрешностей

Всегда нужно проводить несколько замеров величины в одинаковых условиях, чтобы убедиться в стабильности величины и правильности выбранного метода измерений. Иногда во время измерений возникают грубые ошибки - «промахи». Естественно, промахи не нужно учитывать при обработке данных. Однако, это может привести к потере данных или помешать открытию некоторого нового явления. Поэтому необходимо тщательно анализировать причины появления аномалий в данных.

Погрешности можно разделить на *систематические*, которые одинаково проявляются при множественных проведениях опыта и на *случайные*, которые хаотичны как по величине так и по знаку.

Так же можно разделить погрешности на

- *инструментальные погрешности*, связанные с насовершенством конструкции или ошибками калибровки измерительных приборов;
- *методические погрешности*, связанные с несовершенством теоретической модели явления или неточностью метода измерения;
- *естественные погрешности*, которые связаны со случайным характером изменения физической величины. Зачастую они показывают природу некоторого явления, поэтому ими нельзя пренебрегать.

### 1.3.1 Случайные погрешности

Большинству физических явлений присущ случайный характер. Случайную погрешность можно обнаружить при многократном повторении некоторого опыта. Если случайные отклонения с разными знаками прибилизительно равновероятны, то можно считать, что погрешность среднего значение $\langle x \rangle$ будет меньше, чем погрешность одного измерения.

Случайные погрешности могут быть связаны с *особенностями приборов*, *особенностями или несовершенством методики измерения*, *несовершенством объекта измерений* или *случайным характером явления*.

В последних двух случаях мы сами заменяем отдельные измерения средним значением. Таким образом мы можем потерять много иформации о объекте исследования и прежде чем отбрасывать случайную погрешность, необходимо убедиться, что погрешность вызвана приборами, а не характером объекта.

#### 1.3.2 Систематические погрешности

## 2 Элементы теории ошибок

### 2.1 Случаная величина

### 2.2 Нормальное рапределение

### 2.3 Независимые величины

### 2.4 Погрешность среднего

### 2.5 Результирующая погрешность опыта

### 2.6 Обработка косвенных измерений

#### 2.6.1 Случай одной переменной

#### 2.6.2 Случай многих переменных

## 3 Рекомендации по выполнению и представлению результатов работы

### 3.1 Проведение измерений

#### 3.1.1 Правила ведения лабораторного журнала

#### 3.1.2 Подготовка к работе

#### 3.1.3 Начало работы

#### 3.1.4 Выбор количества измерений

#### 3.1.5 Измерения

#### 3.1.6 Рассчёты, анализ и представление результатов

### 3.2 Анализ инструментальных погрешностей

### 3.3 Отчёт о работе

#### 3.3.1 Требования к содержанию разделов

#### 3.3.2 Правила округления

### 3.4 Построение графиков[5]

#### 3.4.1 Рекомендации по оформлению графиков

### 3.5 Некоторые типичные ошибки обработки данных

## 4 Оценка параметров

### 4.1 Метод минимума хи-квадрат

### 4.2 Метод максимального правдоподобия