B419111 이윤성 HW5

5.1 (a)

$y'' + y' + \cos(y) = 0$, $y(3)=0$, $y(0)=0$ 에서 $y(t)=0$ 이라면

$0+0+1 \neq 0$ 으로 미분방정식이 성립하지 않는다. 따라서 자명해를 가지지 않는다.

5.2

(a) 먼저 $T(x, x_0)$ 에 대해서 정리해보도록하자.

$$T(x,x_0) = \sin(x_0) + \sum_{n=1}^{4} \left.\frac{d^n \sin x}{dx^n}\right|_{x=x_0} \frac{(x-x_0)^n}{n!}$$

$$= \sin(x_0) + \frac{\cos(x_0)}{1!}(x-x_0) - \frac{\sin(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 - \frac{\cos(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \frac{\sin(x_0)}{4!}(x-x_0)^4$$

위식과 표에 주어진 사인함수값을 이용하여, x_0에따른 $T(x,x_0)$를 구한다.

1) $T(x,0) = 0 + x - \frac{1}{6}x^3$

2) $T(x,\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}(x-\frac{\pi}{4}) - \frac{1}{2\sqrt{2}}(x-\frac{\pi}{4})^2 - \frac{1}{6\sqrt{2}}(x-\frac{\pi}{4})^3 + \frac{1}{24\sqrt{2}}(x-\frac{\pi}{4})^3$

3) $T(x,\frac{\pi}{2}) = 1 - \frac{1}{2}(x-\frac{\pi}{2})^2 + \frac{1}{24}(x-\frac{\pi}{2})^4$

단, $\frac{\pi}{2}$, $\sqrt{2}$, $\frac{\pi}{4}$ 값은 충분히 알려져있음으로 소수점표현을 하지않았다.

5.2 (b) $\sin x$에 가장 잘 근사한 $T(x, x_0^*)$의 x_0^*는 $\frac{\pi}{4}$이다.

$0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ 범위에서 $(T(x, x_0) - \sin x) = F(x)$ 함수에서 x_0가 $\frac{\pi}{4}$일때, 다른 x_0일때보다 $F(x)$가 0값에 근접한 값을 갖기 때문이다.

5.3

(a) 보간다항식 $P_4(x)$를 엑셀로 구해본다.

$$P_4(x) = 0 + 0.95493x - 0.20861\left(x\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right) - 0.13649\left(x\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right) + 0.028797\left(x\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

소수점 셋째자리까지 반올림하여 표현하고 π값을 소수점으로 바꾸어 표현하면,

$$P_4(x) = 0 + 0.955x - 0.209(x(x-0.524)) - 0.136(x(x-0.524)(x-0.785)) + 0.029(x(x-0.524)(x-0.785)(x-1.0472))$$

5.3 (b) 자연스플라인으로 구한 구간별 $S_i(x)$는 엑셀에서 구한것처럼 다음과 같다.
(소수점 둘째자리까지 반올림하여 표현하도록한다.)

$0 \le x \le \frac{\pi}{6}$ $\quad S_0(x) = 0 + 1.00x - 0.17x^3$

$\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{4}$ $\quad S_1(x) = 0.5 + 0.86\left(x-\frac{\pi}{6}\right) - 0.26\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^2 - 0.06\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^3$

$\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{3}$ $\quad S_2(x) = 0.71 + 0.71\left(x-\frac{\pi}{4}\right) - 0.31\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2 - 0.40\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3$

$\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{2}$ $\quad S_3(x) = 0.87 + 0.47\left(x-\frac{\pi}{3}\right) - 0.62\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2 + 0.39\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3$

5.3 (c)

5.2(b)에서 판단했던것과 마찬가지로 $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ 범위에서 0에 근접하게 그래프를 가장 잘 그리고있는 함수는 뉴턴의 분할차분을 이용한 보간다항식이다.

*추가로 과제를 수행하면서, 파이썬에서 자연스플라인 보간을 이용하기위해, 책에 언급된 interp1d 함수가 아닌 Cubic spline 함수를 이용하였고, bc_type 을 'natural'로 주어 자연스플라인 보간을이용하였다.

아래 이미지는 Sinx의 표1 데이터로 not a knot 과 natural로 스플라인보간을 추가로 진행하여, 값을 비교 해보았다.
natural 보다 not a knot 스플라인보간이 더 좋은 근사함수이지만 보간다항식보다는 좋지않은 근사함수로 보여진다.

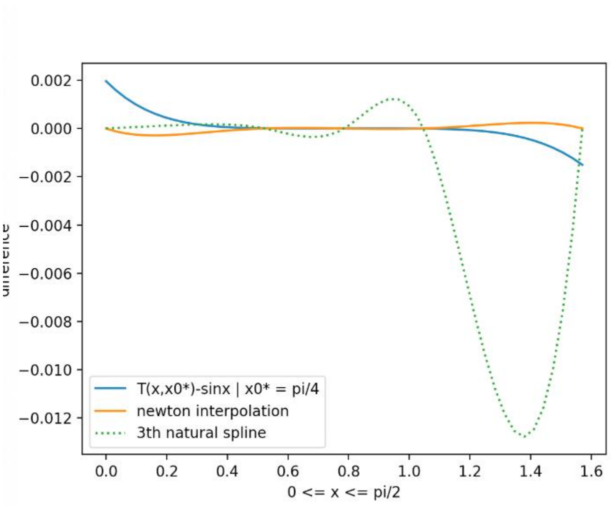

Fig1. 5.3 (c) 비교 이미지

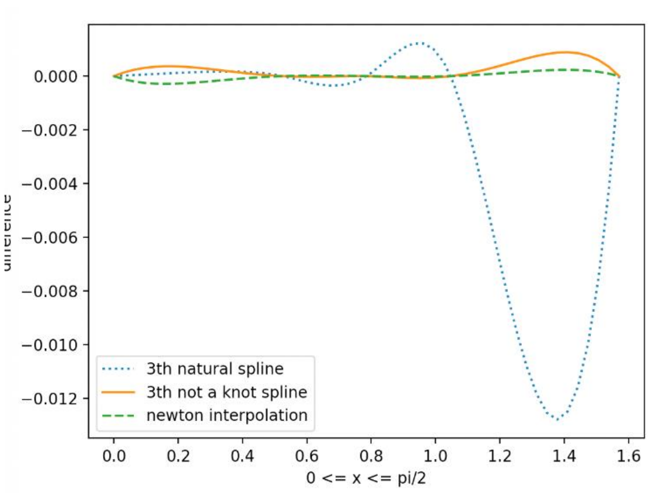

Fig2. Sin(x)에 대해 자연스플라인, not a knot 스플라인 비교