



주의

- 모든 문제의 풀이 과정/프로그래밍의 설명과 답안을 B123456hw50.pdf에 정리하시오.
- 전체 36점 만점이고 각 문제 동일 배점. 문제 별 부문제 동일 배점.
- 풀이의 타당성과 설득력 > 답의 정확성
- 제출할 파일은 B123456hw50.pdf 1 개와 .py 3 개, .xlsx 1 개이다.

문제

5.1 $y(t)$ 에 대한 경계값 문제 (1)의 해를 구하자.

$$y'' + y' + \cos(y) = 0 \quad y(0) = 0 \quad y(3) = 0 \quad (1)$$

- (a) 이 문제는 자명해를 갖지 않는다는 것을 — $y(t) = 0$ 은 (1)식의 해가 될 수 없음을 — 보이시오.
- (b) 슈팅법으로 경계값 문제의 해를 구하는 파이썬 스크립트를 작성하시오. (B123456hw51.py)
- (c) 슈팅법 과정에서 k (반복 계산 회수), $y'(0)$, $y(3)$ 을 출력하고, 경계값 문제의 해 $y(t)$ 를 그래프로 그리시오.

다음 사항을 적용하시오.

- $y(3) = 0$ 대신 $y'(0) = 1$ 과 $y'(0) = 2$ 의 초기 추정치와 할선법을 사용하는 스크립트를 작성하시오.
- $\bar{e}_1 = 10^{-6}$, $\bar{e}_2 = 10^{-6}$, $k_{\max} = 20$
- `math`, `numpy`, `scipy`에서 각각 하나의 모듈만 사용하고 `matplotlib`에서는 필요한 만큼 사용하시오.

컴퓨터에서 사인 (sine) 함수를 계산하려면 실수 전 구간에서 x 에 대한 $\sin x$ 를 직접 계산하는 것보다 $0 \leq x \leq \pi/2$ 구간에서 $\sin x$ 를 계산하고, 나머지 구간에서는 주기성을 비롯한 사인 함수의 성질을 이용하여 구하는 것이 좋은 방법이다. 표 1에는 잘 알려진 사인 값을 보였다. π 값은 충분한 정밀도로 알려져있고, 제곱근을 구하는 방법은 중학 시절에 이미 배운 것이며

표 1: 사인 함수의 값		
i	x_i	$y_i = \sin x_i$
0	0	0
1	$\pi/6$	$1/2$
2	$\pi/4$	$1/\sqrt{2}$
3	$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$
4	$\pi/2$	1

조선시대부터 알려진 방법도 있다. 따라서 표 1의 y_i 는 충분한 정밀도로 계산할 수 있다. 물론 우리는 파이선의 `math.pi`와 `math.sqrt()` 또는 엑셀의 `PI()`와 `SQRT()`로 구하면 된다. $\sin x$ 는 Taylor 급수를 이용하여 계산할 수도 있지만, 표 1의 자료를 이용한 다항식 보간이나 스플라인 보간을 이용하여 계산할 수도 있다.

5.2 $T(x, x_0)$ 는 x_0 에서 구한 $\sin x$ 의 4차 Taylor 급수이다.

$$T(x, x_0) = \sin x_0 + \sum_{n=1}^4 \left. \frac{d^n \sin x}{dx^n} \right|_{x=x_0} \frac{(x - x_0)^n}{n!}$$

- (a) $x_0 = 0, \pi/4, \pi/2$ 일 때 $T(x, x_0)$ 를 구하시오.
- (b) $x_0 = 0, \pi/4, \pi/2$ 일 때 $0 \leq x \leq \pi/2$ 구간에서 $T(x, x_0) - \sin x$ 의 그래프를 모아서 그리되, 실선과 각종 점선 등을 사용하고 `legend()`로 구분하시오. (B123456hw52.py) 이 그래프를 보고 $\sin x$ 를 가장 잘 근사하 $T(x, x_0)$ 를 선택하여 그 x_0 를 x_0^* 라 하자. x_0^* 는?

5.3 표 1의 자료를 이용하여 $0 \leq x \leq \pi/2$ 구간에서 $\sin x$ 를 보간법으로 근사하자.

- (a) 보간 다항식 $p_4(x)$ 를 구하시오. (B123456hw50.xlsx)
- (b) 3차 자연 스플라인 보간식 $S(x)$ 를 구하시오. (B123456hw50.xlsx)
- (c) $0 \leq x \leq \pi/2$ 구간에서 $T(x, x_0^*) - \sin x, p_4(x) - \sin x, S(x) - \sin x$ 의 그래프를 모아서 그리되, 실선과 각종 점선 등을 사용하고 `legend()`로 구분하시오. (B123456hw53.py) 어떤 함수가 가장 좋은 근사 함수인가?