1 自然数

1.1 Peano公理

我们使用符号 0 表示零（zero），使用符号 $n\#$ 表示 n 的**后继**（successor），并定义集合 $\mathbb{N}$ 表示**自然数**（natural number）。如下是体系比较完善的Peano公理体系：

$$0 \in \mathbb{N} \tag{公理1.1.1 A1}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, n\# \in \mathbb{N} \tag{公理1.1.2 A2}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, n\# \neq 0 \tag{公理1.1.3 A3}$$

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, n\# = m\# \Rightarrow n = m \tag{公理1.1.4 A4}$$

$$\forall a \in \mathbb{N}, P(0) \wedge (P(a) \Rightarrow P(a\#)) \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}, P(n)) \tag{公理1.1.5 A5}$$

另外，对于**等式**（equation），我们用 $a = b$ 表示 a 与 b 相等，并且也给出四条性质，你也可以将它们看成公理，或者看成等式的定义。

$$\forall a, b, c \in \mathbb{N}, a = a,$$

$$a = b \Leftrightarrow b = a,$$

$$a = b \wedge b = c \Rightarrow a = c,$$

$$a = b \Rightarrow f(a) = f(b), a = b \Rightarrow P(a) = P(b) \tag{公理1.1.6 ED}$$

公理“A5”有另一种表达形式，它的正确形式应当是

$$\forall a_0, a \in \mathbb{N}, P(a_0) \wedge (P(a) \Rightarrow P(a\#)) \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N} \cap [a0, \infty), P(n)) \tag{公理1.1.7 A5.W}$$

而不是我们在前文中给出的“A5”。但是，由于我们没有引入序与**区间**（integral）的概念，暂时没有办法使用这种形式。

1.2 自然数的加法

1.2.1 加法的定义

我们引入的第一个算法是**加法**（addition）。对于自然数而言，其定义如下：

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, 0 + m := m, n\# + m := (n + m)\# \tag{定义1.2.1}$$

上述定义，翻译过来的意思就是，n 与 m 的和就是把 n 的第 m 次后继，被称为 a 与 b 的**和**（sum）。

引入一个算法以后，需要证明它的封闭性。对于加法运算而言，即证明自然数之间的和仍然是自然数。证明的方式就像自然数的后续其他定理一样，并不是强行证明的，而是利用公理“A5”进行逐步推导的。

$$\forall a, b \in \mathbb{N}, a + b \in \mathbb{N} \tag{定理1.2.2}$$

证明： 固定 b 对 a 进行归纳，
当 $a = 0$ 时，
$a + b = 0 + b$ （ED）
$= b$ （定义1.2.1）
$\because b \in \mathbb{N}$ （已知）
$\therefore a + b \in \mathbb{N}$ （ED）
归纳假设 $a + b \in \mathbb{N}$，
$a\# + b = (a + b)\#$ （定义1.2.1）

$\because a+b\in\mathbb{N}$ （归纳假设）
$\therefore (a+b)\#\in\mathbb{N}$ （A2）
$\therefore a\#+b\in\mathbb{N}$ （ED）
$\therefore \forall a,b\in\mathbb{N}, a+b\in\mathbb{N}$ （A5）
综上，QED。

上文的QED表示“原命题得证”，后文中，我们都使用这种表达方式。

1.2.2 加法中的特殊计算

在自然数加法中，有一些重要的数值，如 0 和 1 等，这些数值的计算方便了后续定理的推导。

$$\forall n\in\mathbb{N}, n+0=n \tag{定理1.2.3}$$

证明： 对 n 进行归纳，
当 $n=0$ 时，
$n+0=0+0$ （ED）
$=0$ （定义1.2.1）
$=n$ （ED）
归纳假设 $n+0=n$ ，
$n\#+0=(n+0)\#$ （定义1.2.1）
$=n\#$ （归纳假设）
$\therefore \forall n\in\mathbb{N}, n+0=n$ （A5）
综上，QED。

同样地，除了 0 之外，1 在加法中也有一些性质。在此之前，我们先定义自然数 1。

$$1:=0\# \tag{定义1.2.4}$$

$$\forall n\in\mathbb{N}, 1+n=n\# \tag{定理1.2.5}$$

证明： $1+n=0\#+n$ （定义1.2.4）
$=(0+n)\#$ （定义1.2.1）
$=n\#$ （定义1.2.1）
综上，QED。

$$\forall n\in\mathbb{N}, n+1=n\# \tag{定理1.2.6}$$

证明： 对 n 进行归纳，
当 $n=0$ 时，
$n+1=0+1$ （ED）
$=1$ （定义1.2.1）
$=0\#$ （定义1.2.4）
$=n\#$ （ED）
归纳假设 $n+1=n\#$ ，

$n\# + 1 = (n+1)\#$ （定义1.2.1）
$= n\#\#$ （归纳假设）
$\therefore \forall n \in \mathbb{N}, n + 1 = n\#$ （A5）
综上，QED。

关于 1 的问题讨论完毕以后，我们还有另一个关于后继的问题，对加法中对于公理“A5”的使用有很大的影响。

$$\forall a, b \in \mathbb{N}, a + b\# = (a+b)\# \qquad \text{(定理1.2.7)}$$

证明： 固定 b 对 a 进行归纳，
当 $a = 0$ 时，
$a + b\# = 0 + b\#$ （ED）
$= b\#$ （定义1.2.1）
$= (0+b)\#$ （定义1.2.1）
$= (a+b)\#$ （ED）
归纳假设 $a + b\# = (a+b)\#$ ，
$a\# + b\# = (a + b\#)\#$ （定义1.2.1）
$= (a+b)\#\#$ （归纳假设）
$= (a\# + b)\#$ （定义1.2.1）
$\therefore \forall a, b \in \mathbb{N}, a + b\# = (a+b)\#$ （A5）
综上，QED。

如上这些定理，已经足够证明加法的运算定律。

1.2.3 加法的运算定律

公认的加法运算定律有交换律、结合律这两条，此外，还有针对自然数的加法消去律需要讨论。为此，这些定理的证明将会一一列举。我们首先理解一下加法交换律。

我们是从Peano公理的角度讨论自然数的加法交换律，我们证明的方式仍旧是用数学归纳法，也就是归纳公理“A5”。

$$\forall a, b \in \mathbb{N}, a + b = b + a \qquad \text{(定理1.2.8)}$$

证明： 固定 b 对 a 进行归纳，
当 $a = 0$ 时，
$a + b = 0 + b$ （ED）
$= b$ （定义1.2.1）
$= b + 0$ （定理1.2.3）
$= b + a$ （ED）
归纳假设 $a + b = b + a$，
$a\# + b = (a+b)\#$ （定义1.2.1）
$= (b+a)\#$ （归纳假设）
$= b + a\#$ （定理1.2.7）
$\therefore \forall a, b \in \mathbb{N}, a + b = b + a$ （A5）
综上，QED。

注意，数学证明不是直观感受，换句话说，在一个逻辑体系中，不存在所谓的“显然”，所有东西都是通过逻辑体系的公理推导出的。像加法交换律，我们的直观感受是，两个物体，前者加后者与后者加前者是相同的。但是虽然已经如此显然了，我们仍旧用了一次“A5”，才得到它的证明。可见我们的主观体感是没有逻辑效力的。

下面我们来证明的是自然数的加法结合律。

$$\forall a,b,c\in\mathbb{N},(a+b)+c=a+(b+c) \tag{定理1.2.9}$$

证明： 固定 b,c 对 a 进行归纳，
当 $a=0$ 时，
$(a+b)+c=(0+b)+c$ （ED）
$=b+c$ （定义1.2.1）
$\because b,c\in\mathbb{N}$ （已知）
$\therefore b+c\in\mathbb{N}$ （定理1.2.2）
$\therefore$ 上式 $=0+(b+c)$ （定义1.2.1）
$=a+(b+c)$ （ED）
归纳假设 $(a+b)+c=a+(b+c)$，
$(a\#+b)+c=(a+b)\#+c$ （定义1.2.1）
$=((a+b)+c)\#$ （定义1.2.1）
$=(a+(b+c))\#$ （归纳假设）
$=a\#+(b+c)$ （定义1.2.1）
$\therefore \forall a,b,c\in\mathbb{N},(a+b)+c=a+(b+c)$ （A5）
综上，QED。

有了加法结合律，我们进行一些书写上的定义。原则上，所有的 $(a+b)+c$ 都可以表示为与之值相等的 $a+(b+c)$，如果没有特殊强调的需求，我们将前者简记为 $a+b+c$。

上述的这些定律还不够，我们在自然数当中，由公理1.1.6得，$a=b$ 可以得出 $a+c=b+c$。（具体方法是，假设函数 $f(x)=x+c$，因为 $a=b$，根据“ED”的第四条得到，$f(a)=f(b)$，即 $a+c=b+c$）但是，反过来由 $a+c=b+c$ 能否得到 $a=b$ 呢？直觉告诉我们是可以的，但是我们需要严谨的逻辑证明。

这条性质称为自然数的加法消去律。

$$\forall a,b,c\in\mathbb{N},a+c=b+c\Rightarrow a=b \tag{定理1.2.10}$$

证明： 固定 a,b 对 c 进行归纳，
当 $c=0$ 时，
$a=a+0$ （定理1.2.3）
$=a+c$ （ED）
$=b+c$ （已知）
$=b+0$ （ED）
$=b$ （定理1.2.3）
归纳假设 $a+c=b+c\Rightarrow a=b$，
当 $a+c\#=b+c\#$ 时，
$a+c\#=(a+c)\#$，
$b+c\#=(b+c)\#$ （定理1.2.7）
$\therefore (a+c)\#=(b+c)\#$ （ED）
$\therefore a+c=b+c$ （A4）
$\therefore a=b$ （归纳假设）
$\therefore \forall a,b,c\in\mathbb{N},a+c=b+c\Rightarrow a=b$ （A5）

综上，QED。

根据上述所说的这些内容，我们已经证明了自然数加法中的常用定理。

1.2.4 总和符号的定义

加法还有一个有关自然数的重要概念，就是求和符号（读作sigma）。我在这里仅仅列出它的定义，注意，我们这里定义的求和符号的上下限都是有理数，所以这个符号用在无穷级数上是没有意义的。

$$\forall a,b\in\mathbb{N},\sum_{i=a}^{a}s_i:=s_a,\sum_{i=a}^{b\#}s_i:=\sum_{i=a}^{b}s_i+s_{b\#} \tag{定义1.2.11}$$

关于这个符号的具体内容，后文会用用处，简单来说，这个符号可以将我们习惯上连加时写的省略号替换得更严谨。

1.3 自然数的乘法

1.3.1 乘法的定义

有了加法运算以后，我们可以进一步定义**乘法**（multiplication）。乘法 ab 的本质是 b 个 a 的和，我们称其为 a 与 b 的**积**（product）。

$$\forall n,m\in\mathbb{N},0m:=0,(n\#)m:=nm+m \tag{定义1.3.1}$$

定义一个运算，若这个运算是符合这个逻辑体系的，在这个逻辑体系中有效的，则这个运算必须满足封闭性。自然数的乘法是满足封闭性的。

$$\forall a,b\in\mathbb{N},ab\in\mathbb{N} \tag{定理1.3.2}$$

证明： 固定 b 对 a 进行归纳，
当 $a=0$ 时，
$ab=0b$ （ED）
$=0$ （定义1.3.1）
$\because 0\in\mathbb{N}$ （A1）
$\therefore ab\in\mathbb{N}$ （ED）
归纳假设 $ab\in\mathbb{N}$，
$(a\#)b=ab+b$ （定义1.3.1）
$\because ab\in\mathbb{N}$ （归纳假设）
又 $\because b\in\mathbb{N}$ （已知）
$\therefore ab+b\in\mathbb{N}$ （定理1.2.2）
$\therefore (a\#)b\in\mathbb{N}$ （ED）
$\therefore \forall a,b\in\mathbb{N},ab\in\mathbb{N}$ （A5）
综上，QED。

上述证明仍旧使用了公理“A5”。

1.3.2 乘法中的特殊计算

在乘法中，仍旧有一些特殊的数值方便计算，主要也还是 0 和 1，我们对这两种情况，以及乘法中的后继运算进行讨论。

首先，是乘法的零元。证明过程中出现的 0×0 表示的也是乘法运算，这种叉乘符号用来在已经有确定数值的数之间的运算。

$$\forall n \in \mathbb{N}, n0 = 0 \tag{定理1.3.3}$$

证明： 对 n 进行归纳，
当 $n = 0$ 时，
$n0 = 0 \times 0$ （ED）
$= 0$ （定义1.3.1）
归纳假设 $n0 = 0$，
$(n\#)0 = n0 + 0$ （定义1.3.1）
$= 0 + 0$ （归纳假设）
$= 0$ （定义1.2.1）
$\therefore \forall n \in \mathbb{N}, n0 = 0$ （A5）
综上，QED。

我们定义，常数 $c \in S$ 使得 $\forall n \in S, f(c, n) = f(n, c) = c$ 时，c 为在集合 S 范围内运算 f 的零元。很明显，0 是乘法的零元。在自然数中，加法运算不存在零元。

同样地，乘法当中的单位元也可用类似的方法证明。

$$\forall n \in \mathbb{N}, 1n = n \tag{定理1.3.4}$$

证明： $1n = (0\#)n$ （定义1.2.4）
$= 0n + n$ （定义1.3.1）
$= 0 + n$ （定义1.3.1）
$= n$ （定义1.2.1）
综上，QED。

$$\forall n \in \mathbb{N}, n1 = n \tag{定理1.3.5}$$

证明： 对 n 进行归纳，
当 $n = 0$ 时，
$n1 = 0 \times 1$ （ED）
$= 0$ （定义1.3.1）
$= n$ （ED）
归纳假设 $n1 = n$，
$(n\#)1 = n1 + 1$ （定义1.3.1）
$= n + 1$ （归纳假设）
$= n\#$ （定理1.2.6）
$\therefore \forall n \in \mathbb{N}, n1 = n$ （A5）
综上，QED。

同样地，常数 $c \in S$ 使得 $\forall n \in \mathbb{N}, f(c, n) = f(n, c) = n$ 时，c 为在集合 S 范围内运算 f 的单位元。上述推理已经论证了 1 是乘法的零元，而定理1.2.3也证明了 0 是加法的单位元。

此外，乘法与加法一样，也有一个后继定理。

$$\forall a, b \in \mathbb{N}, a(b\#) = ab + a \tag{定理1.3.6}$$

证明： 固定 b 对 a 进行归纳，
当 $a = 0$ 时，
$a(b\#) = 0(b\#)$ （ED）
$= 0$ （定义1.3.1）
$= 0b$ （定义1.3.1）
$= 0b + 0$ （定理1.2.3）
$= ab + a$ （ED）
归纳假设 $a(b\#) = ab + a$，
$(a\#)(b\#) = a(b\#) + b\#$ （定义1.3.1）
$= (ab + a) + b\#$ （归纳假设）
$= (ab + a) + (b + 1)$ （定理1.2.6）
$= ((ab + a) + b) + 1$ （定理1.2.9）
$= (b + (ab + a)) + 1$ （定理1.2.8）
$= ((b + ab) + a) + 1$ （定理1.2.9）
$= ((ab + b) + a) + 1$ （定理1.2.8）
$= (ab + b) + (a + 1)$ （定理1.2.9）
$= (a\#)b + (a + 1)$ （定义1.3.1）
$= (a\#)b + a\#$ （定理1.2.6）
$\therefore \forall a, b \in \mathbb{N}, a(b\#) = ab + a$ （A5）
综上，QED。

由此，我们进一步可以推导乘法的运算定律。

1.3.3 乘法的运算定律

乘法与加法一样，满足交换律与结合律，消去律是有条件成立的，不属于本节的讨论范围。乘法与加法结合还可以构成乘法分配律。

$$\forall a, b \in \mathbb{N}, ab = ba \tag{定理1.3.7}$$

证明： 固定 b 对 a 进行归纳，
当 $a = 0$ 时，
$ab = 0b$ （ED）
$= 0$ （定义1.3.1）
$= b0$ （定理1.3.3）
$= ba$ （ED）
归纳假设 $ab = ba$，
$(a\#)b = ab + b$ （定义1.3.1）
$= ba + b$ （归纳假设）
$= b(a\#)$ （定理1.3.6）
$\therefore \forall a, b \in \mathbb{N}, ab = ba$ （A5）
综上，QED。

自然数的乘法交换律运用了与加法交换律证明相似的方式，使用了特殊数值 0 的计算以及后继定理进行解决。另外，注意自然数的加乘并不构成交换群，它们并不满足一般的群公理，没有逆元。

但是，结合律仍然对于乘法有效。为了证明结合律，我们先证明另一条运算定律，即乘法分配律。

$$\forall a,b\in\mathbb{N},(a+b)c=c(a+b)=ac+bc \qquad \text{(定理1.3.8)}$$

证明： 固定 b,c 对 a 进行归纳，
当 $a=0$ 时，
$(a+b)c=(0+b)c$ （ED）
$=bc$ （定义1.2.1）
$=0+bc$ （定义1.2.1）
$=0c+bc$ （定义1.3.1）
$=ac+bc$ （ED）
归纳假设 $(a+b)c=ac+bc$，
$(a\#+b)c=((a+b)\#)c$ （定义1.2.1）
$=(a+b)c+c\#$ （定义1.3.1）
$=(ac+bc)+c\#$ （归纳假设）
$=c\#+(ac+bc)$ （定理1.2.8）
$=(c\#+ac)+bc$ （定理1.2.9）
$=(ac+c\#)+bc$ （定理1.2.8）
$=(a\#)c+bc$ （定义1.3.1）
$\therefore\forall a,b,c\in\mathbb{N},(a+b)c=ac+bc$ （A5）
$\therefore c(a+b)=ac+bc$ （定理1.3.7）
$\therefore (a+b)c=c(a+b)=ac+bc$ （ED）
综上，QED。

利用分配律结合归纳公理“A5”，可以进一步推导乘法的结合律定理。

$$\forall a,b,c\in\mathbb{N},(ab)c=a(bc) \qquad \text{(定理1.3.9)}$$

证明： 固定 b,c 对 a 进行归纳，
当 $a=0$ 时，
$(ab)c=(0b)c$ （定义1.3.1）
$=0c$ （定义1.3.1）
$=0$ （定义1.3.1）
$\because b,c\in\mathbb{N}$ （已知）
$\therefore bc\in\mathbb{N}$ （定理1.3.2）
$\therefore$ 上式 $=0(bc)$ （定义1.3.1）
归纳假设 $(ab)c=a(bc)$，
$((a\#)b)c=(ab+b)c$ （定义1.3.1）
$=(ab)c+bc$ （定理1.3.8）
$=a(bc)+bc$ （归纳假设）
$=(a\#)(bc)$ （定义1.3.1）
$\therefore\forall a,b,c\in\mathbb{N},(ab)c=a(bc)$ （A5）
综上，QED。

与加法一样，由结合律，我们可以简化书写，将 $(ab)c$ 简记为 abc。后文的书写普遍采用这种方式。

1.3.4 总积符号的定义

乘法与加法一样，为了避免不严谨的省略号，采用了特殊的符号求积符号（读作pi）来表示。我们也列出其定义。

$$\forall a,b\in\mathbb{N},\prod_{i=a}^{a}s_i:=s_a,\prod_{i=a}^{b\#}s_i:=(\prod_{i=a}^{b}s_i)s_{b\#} \tag{定义1.3.10}$$

求积符号用的没有求和符号那么多，主要采用的是求积符号的一种特殊形式，即更通用的阶乘。

$$\forall n\in\mathbb{N},n!:=\prod_{i=1}^{n}i \tag{定义1.3.11}$$

这个符号表示，n 的阶乘是由 1 到 n 的全体自然数的乘积。

1.4 自然数的乘方

1.4.1 乘方的定义

我们将 a 的 n 次后继记作 $a+n$，即 a 与 n 的和；将 a 的 n 次和记为 an，即 a 与 n 的积。类比看来，我们也可进一步记 n 个 a 的积为 a^n，这种运算称为**乘方**（power），乘方的结果称为**幂**（power）。数学的语言所示的定义如下。

$$\forall n,m\in\mathbb{N},m^0:=1,m^{n\#}:=m^nm \tag{定义1.4.1}$$

这里的原数，也就是上述定义中的 m，称为**底数**（base number），上标 n 一般称为**指数**（exponent）。

按照这个运算的定义，0^0 的值应该是 1，但是许多人存在的误区是认为 0^0 是一定没有意义的，原因是后文的一个定理 $a^{b-c}=\frac{a^b}{a^c}$（关于这些符号的具体意思详见后文），得 $0^0=0^{1-1}=\frac{0^1}{0^1}=\frac{0}{0}$ 从而原式无意义。上述定义所规定，0^0 的值就是 1。第一，有理数的乘方与自然数的乘方是有区别的；第二，你可以将它仅仅看作一个定义，定理是有适用范围的，如果给定义以范围上的限制，会出现其他特殊的情况。因此是无法通过定理的完备性去否定定义的完备性，即使出错，错误的也是定理而非定义。

另外，乘方的封闭性仍旧是有必要证明的。

$$\forall a,b\in\mathbb{N},a^b\in\mathbb{N} \tag{定理1.4.2}$$

证明： 固定 a 对 b 进行归纳，
当 $b=0$ 时，
$a^b=a^0$ （ED）
$=1$ （定义1.4.1）
$\because 0\in\mathbb{N}$ （A1）
$\therefore 0\#\in\mathbb{N}$ （A2）
$\because 1=0\#$ （定义1.2.4）
$\therefore 1\in\mathbb{N}$ （ED）
$\therefore a^b\in\mathbb{N}$ （ED）
归纳假设 $a^b\in\mathbb{N}$，
$a^{b\#}=a^ba$ （定义1.4.1）
$\because a^b\in\mathbb{N}$ （归纳假设）
又 $\because a\in\mathbb{N}$ （已知）
$\therefore a^ba\in\mathbb{N}$ （定理1.3.2）

$\therefore a^{b\#} \in \mathbb{N}$ （ED）
$\therefore \forall a, b \in \mathbb{N}, a^b \in \mathbb{N}$ （A5）
综上，QED。

如上是乘方封闭性定理的证明。定义完乘方运算，接下来就可以进行乘方的运算性质的定义了。

1.4.2 乘方中的特殊计算

根据前面的经验，我们发现 0 和 1 这两个自然数最为“特殊”，可以构成各种计算的特殊式。同样地，这种规律也适用于乘方运算。我们这里主要讨论的是 1，因为自然数 0 有一些限制。

$$\forall n \in \mathbb{N}, n^1 = n \tag{定理1.4.3}$$

证明： $n^1 = n^{0\#}$ （定义1.2.3）
$= n^0 n$ （定义1.4.1）
$= 1n$ （定义1.4.1）
$= n$ （定理1.3.4）
综上，QED。

这种情况下， 1 出现在指数的位置上，同样，1 也可以出现在底数的位置上。

$$\forall n \in \mathbb{N}, 1^n = 1 \tag{定理1.4.4}$$

证明： 对 n 进行归纳，
当 $n = 0$ 时，
$1^n = 1^0$ （ED）
$= 1$ （定义1.4.1）
归纳假设 $1^n = 1$，
$1^{n\#} = 1^n 1$ （定义1.4.1）
$= 1 \times 1$ （归纳假设）
$= 1$ （定理1.3.4）
$\therefore \forall n \in \mathbb{N}, 1^n = 1$ （A5）
综上，QED。

关于 0，当它作底数的时候，并不一定是 0，这类情况在后文中详述；作指数时，由定义得，结果一定为 1。

1.4.3 乘方的性质

乘方的主要性质主要有三条，且主要针对的是乘法和乘方，一般讨论的也是同底数或同指数的情况。

$$\forall a, b, c \in \mathbb{N}, a^b a^c = a^{b+c} \tag{定理1.4.5}$$

证明： 固定 a, b 对 c 进行归纳，
当 $c = 0$ 时，
$a^b a^c = a^b a^0$ （ED）
$= a^b 1$ （定义1.4.1）
$= a^b$ （定理1.3.5）

$= a^{b+0}$ （定理1.2.3）
$= a^{b+c}$ （ED）
归纳假设 $a^b a^c = a^{b+c}$，
$a^b a^{c\#} = a^b(a^c a)$ （定义1.4.1）
$= (a^b a^c)a$ （定理1.3.9）
$= a^{b+c}a$ （归纳假设）
$= a^{(b+c)\#}$ （定义1.4.1）
$= a^{b+c\#}$ （定理1.2.7）
$\therefore \forall a,b,c \in \mathbb{N}, a^b a^c = a^{b+c}$ （A5）
综上，QED。

上述定理一般被称为同底数幂的乘法法则。

同底数幂的乘法是有规律的，同样，同指数幂也可以找到一些规律。如下是乘方中同指数幂的乘法法则，与同底数幂乘法法则不同的是，同底数幂的指数是相加，而同指数幂的底数是相乘。

$$\forall a,b,c \in \mathbb{N}, a^c b^c = (ab)^c \qquad (定理1.4.6)$$

证明： 固定 a,b 对 c 进行归纳，
当 $c = 0$ 时，
$a^c b^c = a^0 b^0$ （ED）
$= 1 \times 1$ （定义1.4.1）
$= 1$ （定理1.3.4）
$\because a,b \in \mathbb{N}$ （已知）
$\therefore ab \in \mathbb{N}$ （定理1.3.2）
$\therefore$ 上式 $= (ab)^0$ （定义1.4.1）
$= (ab)^c$ （ED）
归纳假设 $a^c b^c = (ab)^c$，
$a^{c\#} b^{c\#} = (a^c a)(b^c b)$ （定义1.4.1）
$= ((a^c a)b^c)b$ （定理1.3.9）
$= (b^c(a^c a))b$ （定理1.3.7）
$= ((b^c a^c)a)b$ （定理1.3.9）
$= ((a^c b^c)a)b$ （定理1.3.7）
$= ((ab)^c a)b$ （归纳假设）
$= (ab)^c(ab)$ （定理1.3.9）
$= (ab)^{c\#}$ （定义1.4.1）
$\therefore \forall a,b,c \in \mathbb{N}, a^c b^c = (ab)^c$ （A5）
综上，QED。

研究完幂的乘法，幂的乘方同样是很重要的。这种情况下，幂的乘方的结果为幂的指数相乘，底数不变。

$$\forall a,b,c \in \mathbb{N}, (a^b)^c = a^{bc} \qquad (定理1.4.7)$$

证明： 固定 a,b 对 c 进行归纳，
当 $c = 0$ 时，
$(a^b)^c = (a^b)^0$ （ED）
$\because a,b \in \mathbb{N}$ （已知）

$\therefore a^b \in \mathbb{N}$ （定理1.4.2）
$\therefore$ 上式 $= 1$ （定义1.4.1）
$= a^0$ （定义1.4.1）
$= a^{b0}$ （定理1.3.3）
$= a^{bc}$ （ED）
归纳假设 $(a^b)^c = a^{bc}$，
$(a^b)^{c\#} = (a^b)^c(a^b)$ （定义1.4.1）
$= a^{bc}a^b$ （归纳假设）
$= a^{bc+b}$ （定理1.4.5）
$= a^{b(c\#)}$ （定理1.3.6）
$\therefore \forall a, b, c \in \mathbb{N}, (a^b)^c = a^{bc}$ （A5）
综上，QED。

最后，在书写上，如果不加括号，一般采取先乘方、再乘法、最后加法，同样运算从左到右的运算法则。有括号的情况下，采取由内到外的运算法则。

1.5 数值定义

本章的最后，我们讨论另一件事情，就是数值的定义。

自然数中，最基本的数是 0，这个值没有定义，它是皮亚诺公理系统中最基本的量。在1.2.2中，我们讨论了自然数 1 的定义，其定义为 $1 := 0\#$ （定理1.2.4）。众所周知，现在我们并没有指定所有的自然数一个符号，我们要表示“1 的后一个自然数”只能表示为 $0\#\#$ 或者 $1\#$。

为了解决这个问题，我们可以简单地使用一个符号，如 2，来表示这个数，即

$$2 := 0\#\#$$

但是我们不只这个困难，如 2 的后一个自然数，我们有没有办法表示，我们可以再定义一个符号。

$$3 := 0\#\#\#$$

我们依照这个方法，顺次定义了十个数，符号分别是：$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$。

但是，符号是枚举不完的，很难枚举很大的数，比如 9×9。这时，我们用到一种新的计数方式：**十进制**（decimal）。

首先，我们先定义一个“复合数”（一般称为“多位数”）10。

$$10 := 0\#\#\#\#\#\#\#\#\#\# \qquad \text{(定义1.5.1)}$$

故此，更多的“符合数”可以表示为：

$$a := \sum_{i=0}^{n} a_i 10^n \qquad \text{(定义1.5.2)}$$

上述的 a_i 表示自然数 a 从右往左数的第 i 位（由 0 开始）。比如，数 12 的第 0 位是 2，第 1 位是 1。因此，$12 := 2 \times 10^0 + 1 \times 10^1 = 2 \times 1 + 1 \times 10 = 2 + 10$。

理论上，所有的自然数都可以写成这种形式。就此而言，后文中的自然数的定义（目前有定义1.2.3、定义1.5.1、定义1.5.2）统一简称为“数值定义”，用代号ND表示。

公理、定义、定理用名称（有代号一般使用代号所表示的意义）

代号的意义：A（Axiom）表示公理、W（Whole）表示推广、ED（Definitions of Equation）表示等量代换、ET（Theorems of Equation）表示等式性质、ND（Definitions of Numbers）表示数值定义

公理1.1.1 A1：零是自然数

公理1.1.2 A2：任意自然数的后继是自然数

公理1.1.3 A3：自然数的后继不为零

公理1.1.4 A4：后继相等的自然数彼此相等

公理1.1.5 A5：归纳公理

公理1.1.6 ED：等式的定义

公理1.1.7 A5.W：广归纳公理

定义1.2.1 ET：自然数加法的定义

定理1.2.2：自然数加法的封闭性

定理1.2.3 ET：零是自然数加法的右单位元

定义1.2.4 ND：自然数1的意义

定理1.2.5 ET：加一与后继等价

定理1.2.6 ET：被加一与后继等价

定理1.2.7 ET：自然数加法的后继定理

定理1.2.8 ET：自然数的加法交换律

定理1.2.9 ET：自然数的加法结合律

定理1.2.10 ET：自然数的加法消去律

定义1.2.11 ET：求和符号的定义

定义1.3.1 ET：自然数乘法的定义

定理1.3.2：自然数乘法的封闭性

定理1.3.3 ET：零是自然数乘法的右零元

定理1.3.4 ET：一是自然数乘法的左单位元

定理1.3.5 ET：一是自然数乘法的右单位元

定理1.3.6 ET：自然数乘法的后继定理

定理1.3.7 ET：自然数的乘法交换律

定理1.3.8 ET：自然数的乘法分配律

定理1.3.9 ET：自然数的乘法结合律

定义1.3.10 ET：求积符号的定义

定义1.3.11 ET：阶乘的定义

定义1.4.1 ET：自然数乘方的定义

定理1.4.2 ：自然数乘方的封闭性

定理1.4.3 ET：一为指数的乘方值不变

定理1.4.4 ET：一为底数的乘方值为一

定理1.4.5 ET：同底数幂的乘法法则

定理1.4.6 ET：同指数幂的乘法法则

定理1.4.7 ET：幂的乘方法则

定义1.5.1 ND：自然数10的定义

定义1.5.2 ND：自然数十进制表示