Technische Universität München

Department of Mathematics

Bachelor's Thesis

Bachelor thesis: The 27 lines on the cubic

Long Huynh Huu

Supervisor: ...

Advisor: ...

Submission Date: ...

I assure the single handed composition of this bachelor's thesis only supported by declared resources.

Garching,

Zusammenfassung

xxxxxxxxxxxx deutsche Zusammenfassung xxxxxxxxxx
In this Bachelor thesis I will prove in full detail the existence of 27 lines on an arbitrary smooth cubic in projective n-space over an algebraically closed field k.

Contents

1 (7.1) bis Step 2

$S = \mathrm{V}^+(f) \subset \mathbb{P}^3$ sei eine nicht-singuläre Kubik mit $f \in k[x,y,z,t]$.

Behauptung: $l = T_P(l) \subset T_P(S)$

Wir erinnern uns an die Definition des Tangentialraumes $T_P(\mathrm{V}^+(I)) = \cap_{f \in I} \mathrm{V}^+(f_P)$. Weiters sei $l = \mathrm{V}^+(H_1, H_2) \subset S := \mathrm{V}^+(f)$ die Gerade auf der Kubik. Dann erhalten wir $l = \mathrm{V}^+(H_1) \cap \mathrm{V}^+(H_2) = \cap_{\alpha,\beta} \mathrm{V}^+(\alpha H_1 + \beta H_2) \overset{\text{def}}{=} T_P(l)$. Die zweite Gleichung folgt aus der Tatsache, dass $\mathrm{I}^+(l) \supset \mathrm{I}^+(S)$, der Schnitt also über eine größere Menge stattfindet.

Behauptung: Sei $\mathrm{V}^+(H) \subset \mathbb{P}^3$ eine Ebene. (Diese Ebene soll nicht in der Kubik enthalten sein). Es gibt eine 3-Form $h \in k[x,y,z]$ und eine Inklusion $\iota : \mathbb{P}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^3$ sodass $\mathrm{V}^+(H) = \mathbb{P}^2$ und $S \cap \mathbb{P}^2 = \mathrm{V}^+(h) \subset \mathbb{P}^2$.

oBdA sei $H = t - \alpha x - \beta y - \gamma z$ mit $\beta, \gamma \in k$.
Mit homogenen Koordinaten:

(1) $\mathrm{V}^+(H)$ **ist isomorph zu** $\mathbb{P}^2$. Ein Punkt $[x_0 : x_1 : x_2 : x_3]$ liegt auf $\mathrm{V}^+(H)$ genau dann, wenn $x_3 = \alpha x_0 + \beta x_1 + \gamma x_2$. Hier kann man auch anmerken, dass x_0, x_1, x_2 nie gleichzeitig verschwinden können, da sonst auch $x_3 = 0$ folgen würde. Damit ist die Projektion $\pi : [x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \mapsto [x_0 : x_1 : x_2]$ wohldefiniert. Es liegt nahe, eine Inverse $\mathbb{P}^2 \to \mathrm{V}^+(H)$ wie folgt zu definieren: $\pi^{-1} : [x_0 : x_1 : x_2] \mapsto [x_0 : x_1 : x_2 : \alpha x_0 + \beta x_1 + \gamma x_2]$. Die Abbildung ist wohldefiniert, denn x_1, x_2 verschwinden nicht simultan und $H(\pi^{-1}([x_0 : x_1 : x_2])) = 0$.

(2) varDer Schnitt $\mathrm{V}^+(H) \cap S$ **wird via** π **auf eine Varietät** $\mathrm{V}^+(h) \subset \mathbb{P}^2$ **transportiert, wobei** h **eine 3-Form ist.** Sei $[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2$ ein Punkt. $[x_0 : x_1 : x_2] \in \pi(\mathrm{V}^+(H) \cap S) \Leftrightarrow f(\pi^{-1}([x_0 : x_1 : x_2])) = 0 \Leftrightarrow f(x_0, x_1, x_2, \alpha x_0 + \beta x_1 + \gamma x_3) = 0$, d.h. $\pi(\mathrm{V}^+(H) \cap S) = \mathrm{V}^+(g)$ mit $g = f(x,y,z,\alpha x + \beta y + \gamma z) = \mathrm{eval}(—, (x,y,z,\alpha x + \beta y + \gamma z))(f)$ eine 3-Form.

Behauptung: Es gibt eine Darstellung von $f = h + HB$ mit h die obige "Restriktion" von f auf $\mathrm{V}^+(H)$ sowie B eine 2-Form.

Wir können die Auswertung an $\theta := (x,y,z,\alpha x + \beta y + \gamma z)$ ergänzen zu einem varHomomorphismus $k[x,y,z,t] \to k[x,y,z] \hookrightarrow k[x,y,z,t]$ mit Kern H. Weiters gilt $\mathrm{eval}(—,\theta)(f) = \mathrm{eval}(—,\theta).(\mathrm{eval}(—,\theta))($
also $f = \mathrm{eval}(f,\theta) + p = g + p$ wobei $p \in \ker(\mathrm{eval}(—,\theta)) = (H)$. Es gibt also eine Darstellung $p = HB$ für ein Polynom B. Nun nutzen wir aus, dass f eine $3 - Form$ ist und erhalten $f = g + HB$ wobei B eine quadratische Form ist.

Behauptung: Für $f = h + HB$ wie oben hat h nicht die Form $g^2 A$ mit g, A 1-Formen.

Angenommen dies wäre der Fall, also $f = g^2 A + HB$. Wir wollen zeigen, dass dann ein singulärer Punkt auf S existiert. Dieser erfüllt genau $f_x = f_y = f_z = f_t = 0$ (vgl. Shafarevich, BAG1). Wir brauchen eine verallgemeinerte Aussage.

LEMMA 1: Sei R eine k-Algebra erzeugt durch $y_0, ..y_n$

algebraisch unabhängig. Dann gibt es varDerivationen $D_i : R \to k$ sodass $D_i(y_i) = 1$ und $D_i(y_j) = 0$ für $j \neq i$. Bezeichne diese varDerivationen als "partielle Ableitungen".
LEMMA 1b: Angenommen $V = \mathrm{span}(y_i) = \mathrm{span}(y'_i)$ als k-Vektorräume, dann gibt es eine Basiswechselmatrix M mit $(\vec{y}') = M(\vec{y})$ und $\vec{D}f = M\vec{D}f'$.
LEMMA 2: Sei f eine d-Form und $S = \mathrm{V}^+(f)$ eine Hyperfläche. Die singulären Punkte von S sind gegeben durch $S^{sing} = \mathrm{V}^+(f_{y_0}, ..f_{y_n})$. Hier bezeichnet f_{y_i} die Ableitung von f nach y_i, also $f_{y_i} := D_i(f)$.

(1) Siehe (Matsumura, 26.F).

(1b) Ich behaupte es gibt einen Iso von k-Vektorräumen $\mathrm{Hom}_k(V,k) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_k(R,k)$. Weiters induziert M als lineare Abbildung $V \to V$ einen Basiswechsel der Dualbasen: $\vec{y}'^* = M(\vec{y}^*)$.

(2) Sei $R = k[x_0, ..x_n]$ ein Polynomring über einem Körper k und d eine natürliche Zahl mit $char(k)$ teilt nicht d. Seien weiters $y_0, ..y_n \in R$ eine Basis der 1-Formen (notwendigerweise sind die y_i linear). Seien weiters $y'_0, ..y'_n \in R$ eine Basis der 1-Formen (notwendigerweise sind die y'_i linear). Anwendung von LEMMA 1 gibt und partielle Ableitungen D_i, D'_i. Ich behaupte, dass ein Punkt ist singulär bzgl der D_i, genau dann, wenn er singulär bzgl der D'_i ist. Dies folgt direkt aus LEMMA 1b. LEMMA 2 folgt dann aus (Shafarevich, BAG1) mit $y'_i = x_i$.

Weiter im Beweis Da f nicht komplett auf der Ebene $\mathrm{V}^+(H)$ verschwindet, sind g und H teilerfremd, bzw. k-linear unabhängig. Wir ergänzen zu einer Basis von $\mathrm{span}_k(x,y,z,t) = \mathrm{span}(H, g, r_1, r_2)$. Dann gelten

$$
\begin{aligned}
D_{r_i}(f) &= g^2 D_{r_i}(A) + HD_{r_i}(B) \\
D_H(f) &= g^2 D_H(A) + HD_H(B) + B \\
D_g(f) &= 2gA + g^2 D_g(A) + HD_g(B)
\end{aligned}
$$

Wir schränken die Ebene $\mathrm{V}^+(H)$ weiter ein auf die Gerade $\mathrm{V}^+(H,g)$, sodass die singulären Punkte von S auf der Geraden definiert sind durch $B = 0$. Da B aber entweder auf der geraden verschwindet oder eine 2-Form auf ihr ist, hat sie für k algebraisch abgeschlossen Nullstellen und es existieren somit singuläre Punkte, konträr zur Behauptung.
Behauptung: Sei C der Schnitt von $P \in S$ nicht-singulär mit der Tangentialebene $T_P(S)$, $S = \mathrm{V}^+(f)$ irreduzibel

und nicht die Ebene C selbst, dann ist C singulär bei P.

Sei $H = f_x(P)x + f_y(P)y + f_z(P)z + f_t(P)t$ die Gleichung der Tangentialebene und oBdA $f_t(P) \neq 0$ (P war als nicht-singulär angenommen). Wir restringieren H via eval(—) := eval(—, $(x, y, z, -\frac{f_x(P)}{f_t(P)}x - \frac{f_y(P)}{f_t(P)}y - \frac{f_z(P)}{f_t(P)}z)$) und erhalten $f' = \mathrm{eval}(f)$. Demonstrativ leite ich nach x ab, aber dieselbe Rechnung funktioniert aus Symmetriegründen natürlich auch mit y, z:

$$f'_x = f_x D_x x + f_y D_x y + f_z D_x z + f_t D_x\left(-\frac{f_x(P)}{f_t(P)}x - \frac{f_y(P)}{f_t(P)}y - \frac{f_z(P)}{f_t(P)}z\right) = f_x - \frac{f_x(P)}{f_t(P)} f_t \qquad (1)$$

Offensichtlich verschwindet f'_x in P: $f'_x(P) = f_x(P) - \frac{f_x(P)}{f_t(P)} f_t(P) = 0$.

2 (7.1) bis (7.2) Step 2

.

3 (7.2) Step 3

.

4 (7.2) Step 4

Behauptung: Sei $M \in R^{n\times n}$ eine Matrix über dem Polynomring R. Es gilt $\det(\mathrm{lt}(M)) = \mathrm{lt}(\det(M))$ g.d.w. $\det(\mathrm{lt}(M)) = \mathrm{lt}(\det(\mathrm{lt}(M)))$.

Das bedeutet natürlich, dass wir nur $\mathrm{lt}(\det(\mathrm{lt}(M))) = \mathrm{lt}(\det(M))$ zeigen brauchen. Fakt: Summen $x + y$ und Produkte xy in R vertauschen im Folgenden Sinne mit der lt-Operation: $\mathrm{lt}(x + y) = \mathrm{lt}(\mathrm{lt}(x) + \mathrm{lt}(y))$ und $\mathrm{lt}(xy) = \mathrm{lt}(\mathrm{lt}(x)\mathrm{lt}(y))$. Die Leibnitzformel liefert nun:

$$\begin{aligned}\mathrm{lt}(\det(M)) = \quad & \mathrm{lt}\left(\sum_\sigma (-1)^\sigma \prod_i M_{i,\sigma(i)}\right) = \mathrm{lt}\left(\sum_\sigma \mathrm{lt}\left((-1)^\sigma \prod_i M_{i,\sigma(i)}\right)\right) \\ = \mathrm{lt}\left(\sum_\sigma \mathrm{lt}\left((-1)^\sigma \prod_i \mathrm{lt}(M_{i,\sigma(i)})\right)\right) = \quad & \mathrm{lt}\left(\sum_\sigma (-1)^\sigma \prod_i \mathrm{lt}(M_{i,\sigma(i)})\right) = \mathrm{lt}\left(\det(\mathrm{lt}(M))\right)\end{aligned}$$