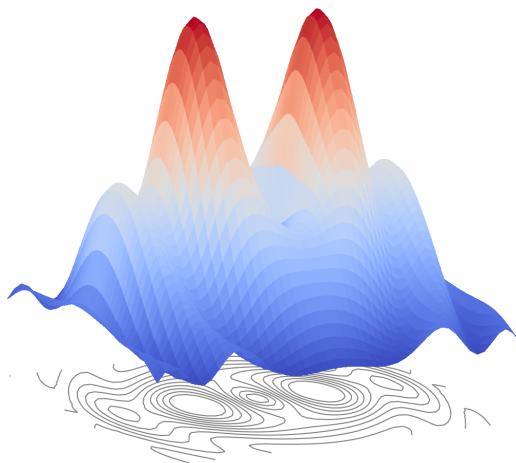


# Fonctions de plusieurs variables

## 1. Introduction

En première année, vous avez étudié les fonctions d'une variable : par exemple, si  $t \mapsto f(t)$  représente l'évolution d'une population en fonction du temps, vous savez déterminer ses caractéristiques (croissance, maximum, limite...). Mais de nombreux phénomènes dépendent de plusieurs paramètres : par exemple, le volume d'un gaz dépend de la température et de la pression, ou bien l'altitude d'un point à la surface de la Terre dépend de la latitude et de la longitude. Le but de ce cours est de faire le même travail que pour les fonctions d'une variable : étudier la croissance, les maximums, les limites... Bien sûr, la situation est plus délicate, mais aussi plus intéressante, du fait qu'il y a plusieurs variables !



### 1.1. Que sont les fonctions de plusieurs variables ?

Dans ce chapitre, nous allons étudier les fonctions de plusieurs variables dans le cadre particulier de  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$ , mais également dans le cadre général de  $\mathbb{R}^n$ . Ces fonctions seront donc de la forme

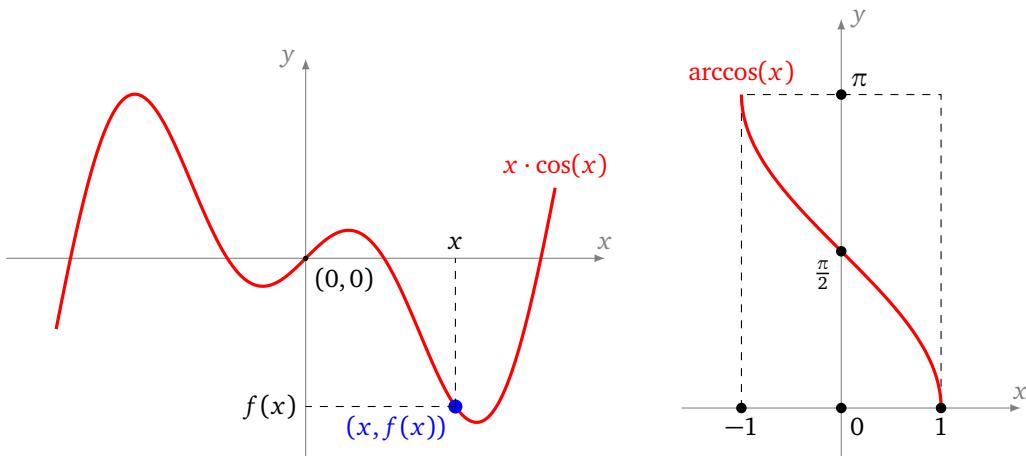
$$f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},$$

où  $n \geq 1$  est un entier naturel.

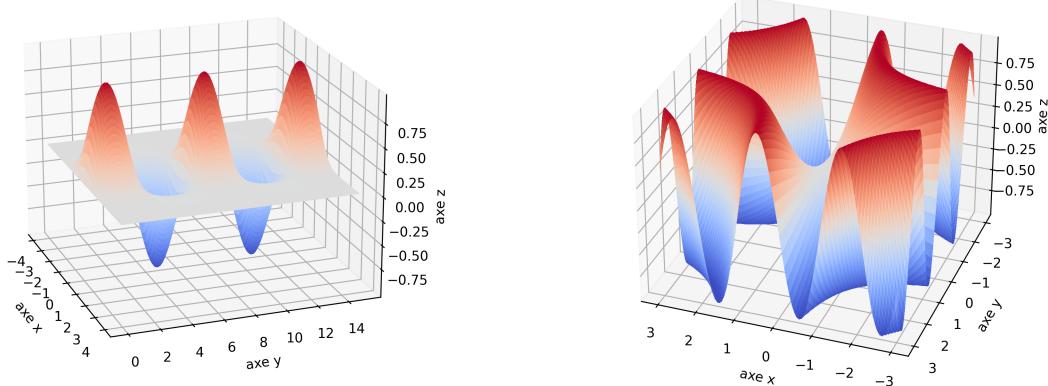
Autrement dit, les éléments de l'ensemble de départ  $E$  seront des  $n$ -uplets du type  $(x_1, \dots, x_n)$  que l'on peut considérer comme des vecteurs, et les éléments de l'ensemble d'arrivée seront des réels.

#### Exemple 1.

1.  $n = 1$ .  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  : c'est le cas le plus simple,  $x \mapsto f(x)$ , celui qui est connu depuis le lycée. Voici les graphes des fonctions  $x \mapsto x \cdot \cos(x)$  et  $x \mapsto \arccos(x)$  :



2.  $n = 2$ .  $f : E \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . On préfère noter les variables par  $(x, y)$  (au lieu de  $(x_1, x_2)$ ). Ces fonctions  $(x, y) \mapsto f(x, y)$  seront notre principal sujet d'étude et sont représentées par des surfaces. À gauche, le graphe de la fonction  $(x, y) \mapsto \sin(y)e^{-x^2}$ . À droite, le graphe de la fonction  $(x, y) \mapsto \sin(xy)$ .



Dès que  $n > 2$ , il est assez difficile d'avoir une vision graphique.

Nous allons aussi étudier des fonctions, dites fonctions vectorielles, dont l'ensemble d'arrivée n'est pas  $\mathbb{R}$ , mais  $\mathbb{R}^p$ , donc de la forme

$$f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p,$$

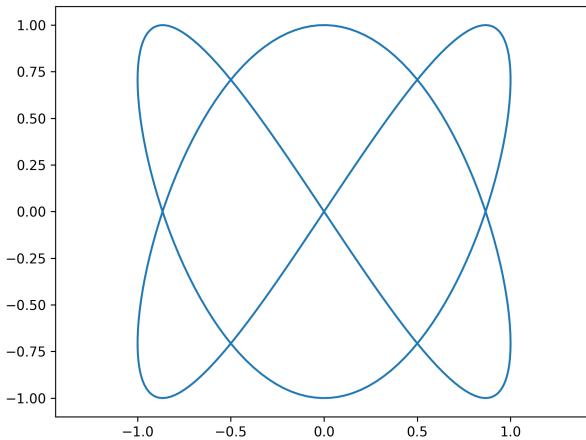
où  $n \geq 1$  et  $p \geq 1$  sont des entiers naturels.

Dans ce cas, si  $x = (x_1, \dots, x_n)$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^n$ , alors  $f(x)$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^p$ , du type  $f(x) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_p(x_1, \dots, x_n))$ . Attention, dans la suite,  $x$  désignera parfois le vecteur  $x = (x_1, \dots, x_n)$  et parfois  $x$  désignera un seul réel (comme par exemple pour une fonction de deux variables  $f(x, y)$ ).

### Exemple 2.

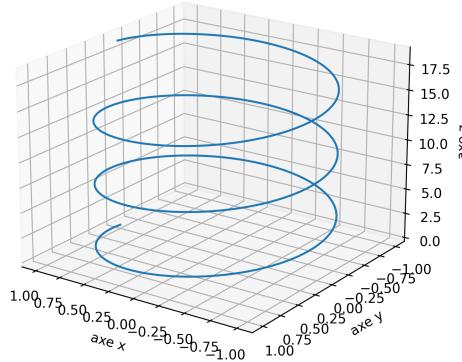
1.  $n = 1, p = 2$ .  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  est représentée par une courbe paramétrée du plan.

Exemple : la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $t \mapsto (\sin(2t), \sin(3t))$ . Cela correspond à la courbe paramétrée définie par  $x(t) = \sin(2t)$  et  $y(t) = \sin(3t)$ .



On peut interpréter le dessin comme l'ensemble des positions  $(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$  que prend une particule dans le plan en fonction du temps  $t \in \mathbb{R}$ .

2.  $n = 1, p = 3$ .  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  est représentée par une courbe paramétrée de l'espace. Exemple : la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par  $t \mapsto (\cos t, \sin t, t)$ . Cela correspond au mouvement dans l'espace d'une particule  $(x(t), y(t), z(t))$ , qui ici parcourt une hélice.

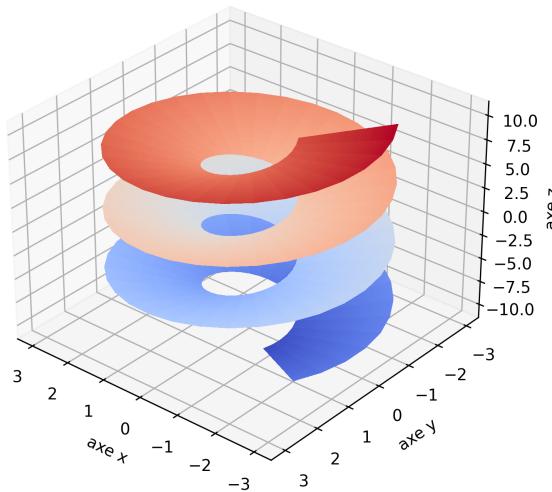


3.  $n = 2, p = 3$ .  $f : E \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  : elles sont représentées par exemple par des surfaces paramétrées.

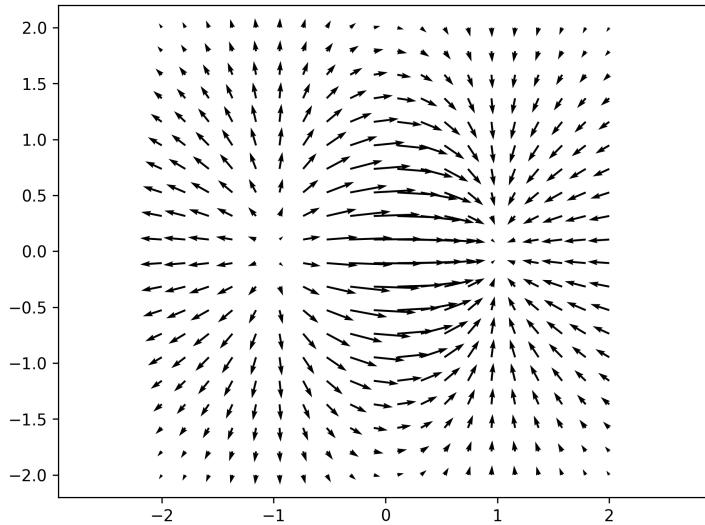
Voici l'exemple de la fonction

$$(u, v) \mapsto ((2 + \sin v) \cos u, (2 + \sin v) \sin u, u + \cos v).$$

Chaque paramètre  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$  correspond à un point  $(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in \mathbb{R}^3$  de la surface hélicoïdale.



4.  $n = 2, p = 2. f : E \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  : elles sont représentées par exemple par des champs de vecteurs. À chaque point du plan  $(x, y)$  on associe le vecteur  $\vec{v} = f(x, y)$ . (Sur la figure ci-dessous, seuls certains vecteurs sont représentés.)



Dans ce chapitre, nous étudions surtout les fonctions  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , et plus particulièrement les fonctions  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ou  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ . Nous reviendrons plus tard sur les fonctions vectorielles  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ .

## 1.2. Topologie de $\mathbb{R}^n$ (rappels/compléments)

Voici quelques rappels de topologie dans l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^n$ .

- Le **produit scalaire** usuel de  $x = (x_1, \dots, x_n)$  et  $y = (y_1, \dots, y_n)$ , noté  $\langle x | y \rangle$  (ou bien parfois  $x \cdot y$ ), est défini par

$$\langle x | y \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

- La **norme euclidienne** sur  $\mathbb{R}^n$  est la norme associée à ce produit scalaire. Pour  $x \in \mathbb{R}^n$ , la norme euclidienne de  $x$ , notée  $\|x\|$ , est définie par

$$\|x\| = \sqrt{\langle x | x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

- La **distance** entre le point  $A = (a_1, \dots, a_n)$  et le point  $M = (x_1, \dots, x_n)$  est

$$\|M - A\| = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2}.$$

- La **boule ouverte** de centre  $A = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  et de rayon  $r > 0$ , notée  $B_r(A)$ , est l'ensemble suivant :

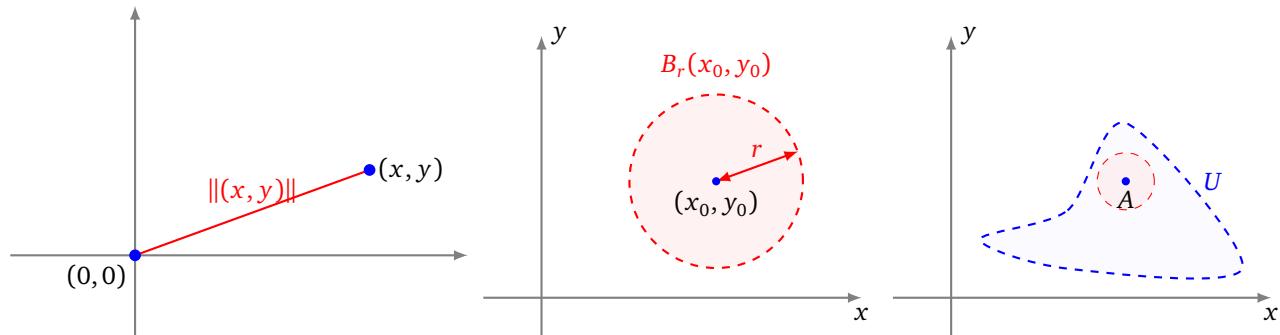
$$B_r(A) = \{M \in \mathbb{R}^n \mid \|M - A\| < r\}.$$

- Soient  $U$  une partie de  $\mathbb{R}^n$  et  $A \in U$ . On dit que  $U$  est un **voisinage** de  $A$  si  $U$  contient une boule ouverte centrée en  $A$ .

On dit que  $U$  est un **ouvert** de  $\mathbb{R}^n$  si, pour tout point  $A \in U$ ,  $U$  contient une boule ouverte centrée en  $A$ . Dans le cas de  $\mathbb{R}^2$ , on note plutôt les coordonnées d'un point par  $(x, y)$ . Alors :

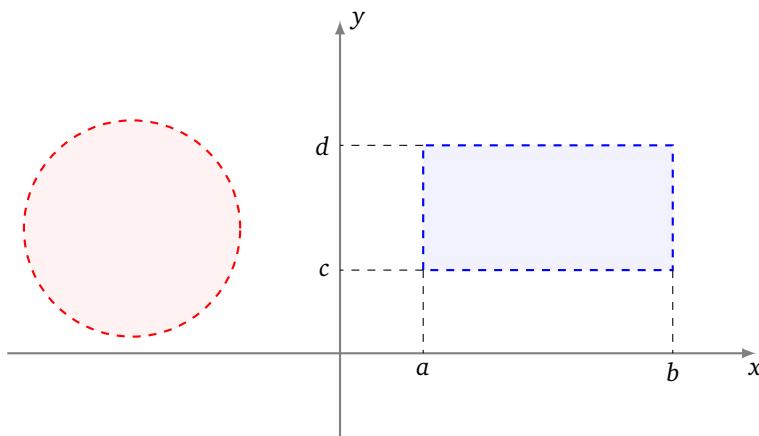
- $\langle(x, y) | (x', y')\rangle = xx' + yy'$
- $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $B_r(x_0, y_0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2\}$  (on parle de **disque** plutôt que de boule).

De gauche à droite : la norme euclidienne, un disque ouvert, un ouvert  $U$ .



Exemples :

- tout rectangle ouvert  $[a, b] \times [c, d]$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  (à droite sur la figure),
- tout disque ouvert de  $\mathbb{R}^2$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  (à gauche sur la figure).



## 2. Graphe

### 2.1. Fonctions

#### Définition 1.

Soit  $E$  une partie de  $\mathbb{R}^n$ . Une **fonction**  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  associe à tout  $(x_1, \dots, x_n)$  de  $E$  un seul nombre réel  $f(x_1, \dots, x_n)$ .

#### Exemple 3.

- Distance d'un point à l'origine en fonction de ses coordonnées :

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \sqrt{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

2. Aire d'un rectangle en fonction de sa longueur et sa largeur :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto xy. \end{aligned}$$

3. Aire d'un parallélépipède en fonction de ses trois dimensions :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\mapsto 2(xy + yz + xz). \end{aligned}$$

### Définition 2.

Si on nous donne d'abord une expression pour  $f(x_1, \dots, x_n)$ , alors le **domaine de définition** de  $f$  est le plus grand sous-ensemble  $D_f \subset \mathbb{R}^n$  tel que, pour chaque  $(x_1, \dots, x_n)$  de  $D_f$ ,  $f(x_1, \dots, x_n)$  soit bien définie. La fonction est alors  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ .

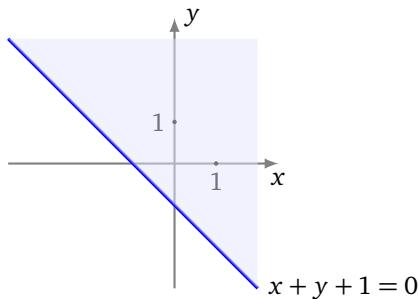
### Exemple 4.

1.  $f(x, y) = \ln(1 + x + y)$

Il faut que  $1 + x + y$  soit strictement positif, afin de pouvoir calculer son logarithme. Donc :

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 + x + y > 0\}$$

Pour tracer cet ensemble, on trace d'abord la droite d'équation  $1 + x + y = 0$ . On détermine ensuite de quel côté de la droite est l'ensemble  $1 + x + y > 0$ . Ici, c'est au-dessus de la droite.

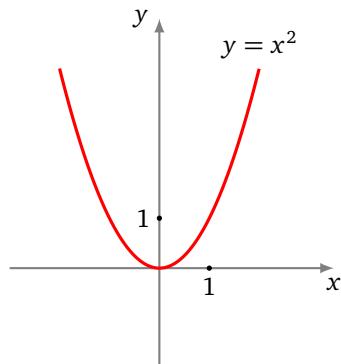


2.  $f(x, y) = \exp\left(\frac{x+y}{x^2-y}\right)$

Le dénominateur ne doit pas s'annuler :

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y \neq 0\}$$

Les points de l'ensemble de définition sont tous les points du plan qui ne sont pas sur la parabole d'équation ( $y = x^2$ ).

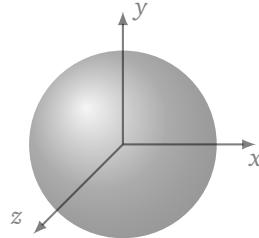


3.  $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-2}}$

L'expression sous la racine doit être positive (pour pouvoir prendre la racine carrée) et ne doit pas s'annuler (pour pouvoir prendre l'inverse). Donc :

$$D_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 > 2\}$$

Autrement dit, ce sont tous les points en dehors de la boule fermée centrée en  $(0, 0, 0)$  et de rayon  $\sqrt{2}$ .



### Définition 3.

L'**image** d'une fonction  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  est l'ensemble des valeurs  $f(x_1, \dots, x_n)$  prises par  $f$  lorsque  $(x_1, \dots, x_n)$  parcourt  $E$  :

$$\text{Im } f = \{f(x_1, \dots, x_n) \mid (x_1, \dots, x_n) \in E\} \subset \mathbb{R}$$

### Exemple 5.

1.  $f(x, y) = \ln(1 + x + y)$

L'image de  $f$  est  $\mathbb{R}$  tout entier :  $\text{Im } f = \mathbb{R}$ .

Preuve : soit  $z \in \mathbb{R}$ . Alors, pour  $(x, y) = (e^z, -1) \in D_f$ , on a

$$f(x, y) = f(e^z, -1) = \ln(e^z) = z.$$

Donc tout  $z \in \mathbb{R}$  est dans l'image de  $f$ .

2.  $f(x, y) = \exp\left(\frac{x+y}{x^2-y}\right)$

$$\text{Im } f = ]0, +\infty[.$$

Preuve : On a bien sûr  $f(x, y) > 0$  pour tout  $(x, y) \in D_f$ . Réciproquement, soit  $z \in ]0, +\infty[$ . Si  $z \neq 1$  alors, pour  $(x, y) = (\frac{1}{\ln z}, 0) \in D_f$ , on a

$$f(x, y) = f\left(\frac{1}{\ln z}, 0\right) = \exp\left(\frac{\frac{1}{\ln z}}{\left(\frac{1}{\ln z}\right)^2}\right) = \exp(\ln z) = z.$$

Si  $z = 1$  alors, pour  $(x, y) = (1, -1) \in D_f$ , on a  $f(x, y) = f(1, -1) = \exp(0) = 1$ .

3. Pour  $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-2}}$ , on a  $\text{Im } f = ]0, +\infty[$ . À vous de faire la preuve !

### Définition 4.

Soit  $E$  une partie de  $\mathbb{R}^n$ . Une **fonction vectorielle**  $f : E \rightarrow \mathbb{R}^p$  associe à tout  $(x_1, \dots, x_n)$  de  $E$  un  $p$ -uplet de nombres réels. On la note

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p \\ x &\longmapsto (f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x)). \end{aligned}$$

Nous nous limiterons souvent aux dimensions inférieures ou égales à 3 pour  $n$  et  $p$ , la généralisation aux dimensions supérieures ne posant pas de problème particulier, sauf pour faire des dessins. Voici quelques exemples simples.

### Exemple 6.

1. Aire et volume d'un parallélépipède rectangle en fonction de ses trois dimensions :

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto (2(xy + yz + xz), xyz). \end{aligned}$$

2. Coordonnées polaires d'un point du plan :

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi[ \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (r, \theta) &\longmapsto (r \cos \theta, r \sin \theta). \end{aligned}$$

## 2.2. Graphe et lignes de niveau

### Définition 5.

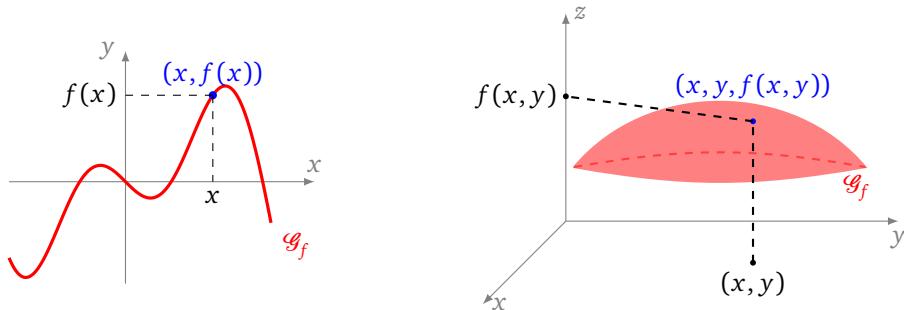
Soit  $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de 2 variables. Le **graphe**  $\mathcal{G}_f$  de  $f$  est le sous-ensemble de  $\mathbb{R}^3$  formé des points de coordonnées  $(x, y, f(x, y))$  avec  $(x, y)$  dans l'ensemble de définition. Le graphe est donc :

$$\mathcal{G}_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D_f \text{ et } z = f(x, y)\}.$$

Représenter graphiquement le graphe n'est possible que pour les fonctions d'une seule variable ou de deux variables. Pour les fonctions d'une variable  $f : D_f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , on rappelle que le graphe est

$$\mathcal{G}_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in D_f \text{ et } y = f(x)\}.$$

Dans le cas d'une variable (à gauche), le graphe est une courbe ; dans le cas de deux variables qui nous intéresse ici, c'est une surface.



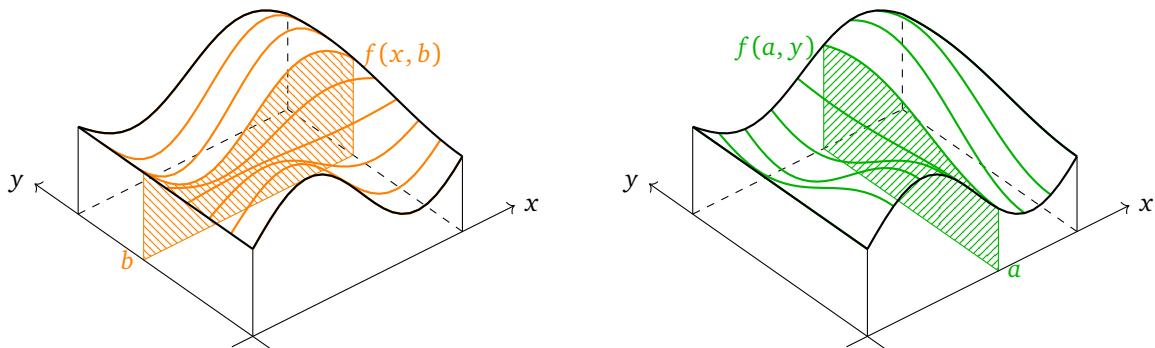
Afin de tracer le graphe d'une fonction de deux variables, on découpe la surface en morceaux.

### Tranches.

Une première façon de faire : tracer, pour quelques valeurs de  $a$  et  $b$ , les graphes des fonctions partielles

$$f_1 : x \mapsto f(x, b) \quad \text{et} \quad f_2 : y \mapsto f(a, y).$$

La première représente l'intersection du graphe  $\mathcal{G}_f$  avec le plan  $(y = b)$  (en orange) et la seconde représente l'intersection du graphe avec le plan  $(x = a)$  (en vert).



### Lignes de niveau.

On va aussi s'intéresser à d'autres courbes tracées sur la surface : les courbes de niveau.

### Définition 6.

Soit  $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de deux variables.

- La **ligne de niveau**  $z = c \in \mathbb{R}$  est

$$L_c = \{(x, y) \in D_f \mid f(x, y) = c\}.$$

- La **courbe de niveau**  $z = c$  est la trace de  $\mathcal{G}_f$  dans le plan  $(z = c)$  :

$$\mathcal{G}_f \cap (z = c) = \{(x, y, c) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y) = c\}.$$

La ligne de niveau  $c$  est une courbe du plan  $\mathbb{R}^2$ , la courbe de niveau  $c$  est une courbe de l'espace  $\mathbb{R}^3$ . On obtient la courbe de niveau  $c$  en partant de la ligne de niveau  $c$  et en remontant à l'altitude  $c$ .

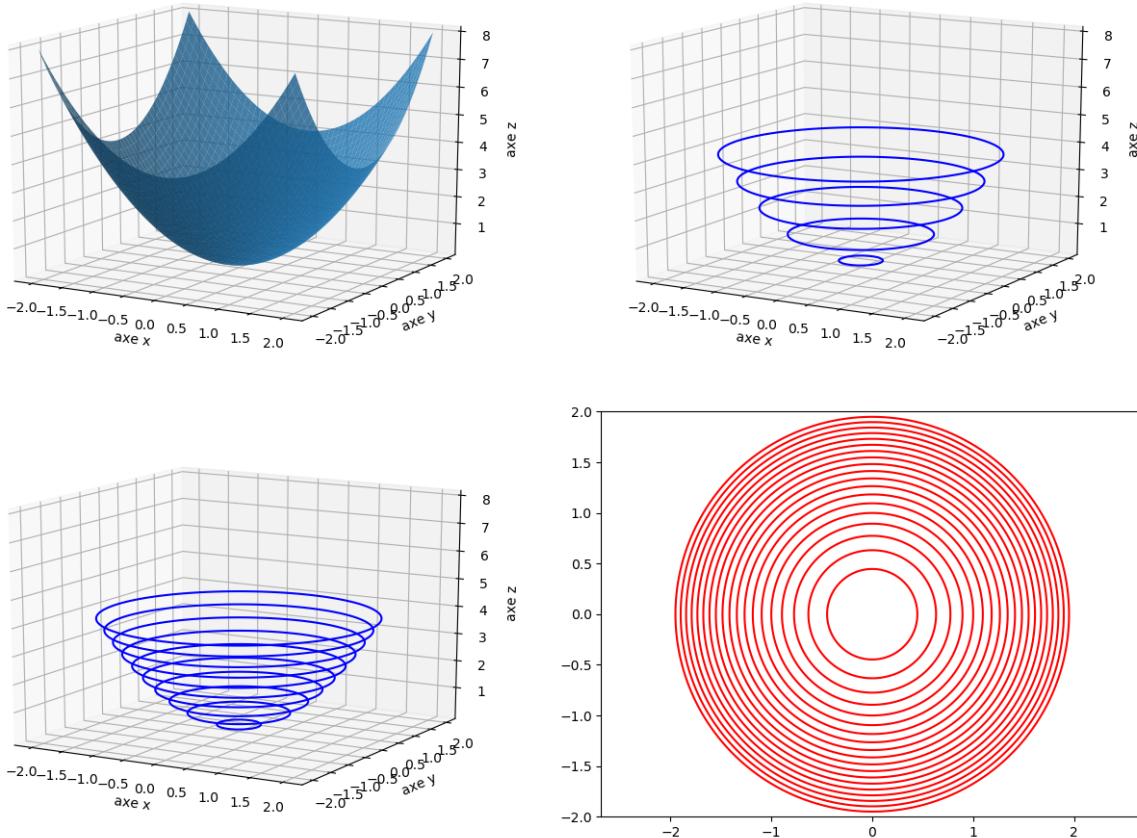
### Exemple 7.

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x, y) = x^2 + y^2$ .

- Si  $c < 0$ , la ligne de niveau  $L_c$  est vide (aucun point n'a d'altitude négative).
- Si  $c = 0$ , la ligne de niveau  $L_0$  se réduit à  $\{(0, 0)\}$ .
- Si  $c > 0$ , la ligne de niveau  $L_c$  est le cercle du plan de centre  $(0, 0)$  et de rayon  $\sqrt{c}$ . On remonte  $L_c$  à l'altitude  $z = c$  : la courbe de niveau est alors le cercle horizontal de l'espace de centre  $(0, 0, c)$  et de rayon  $\sqrt{c}$ .

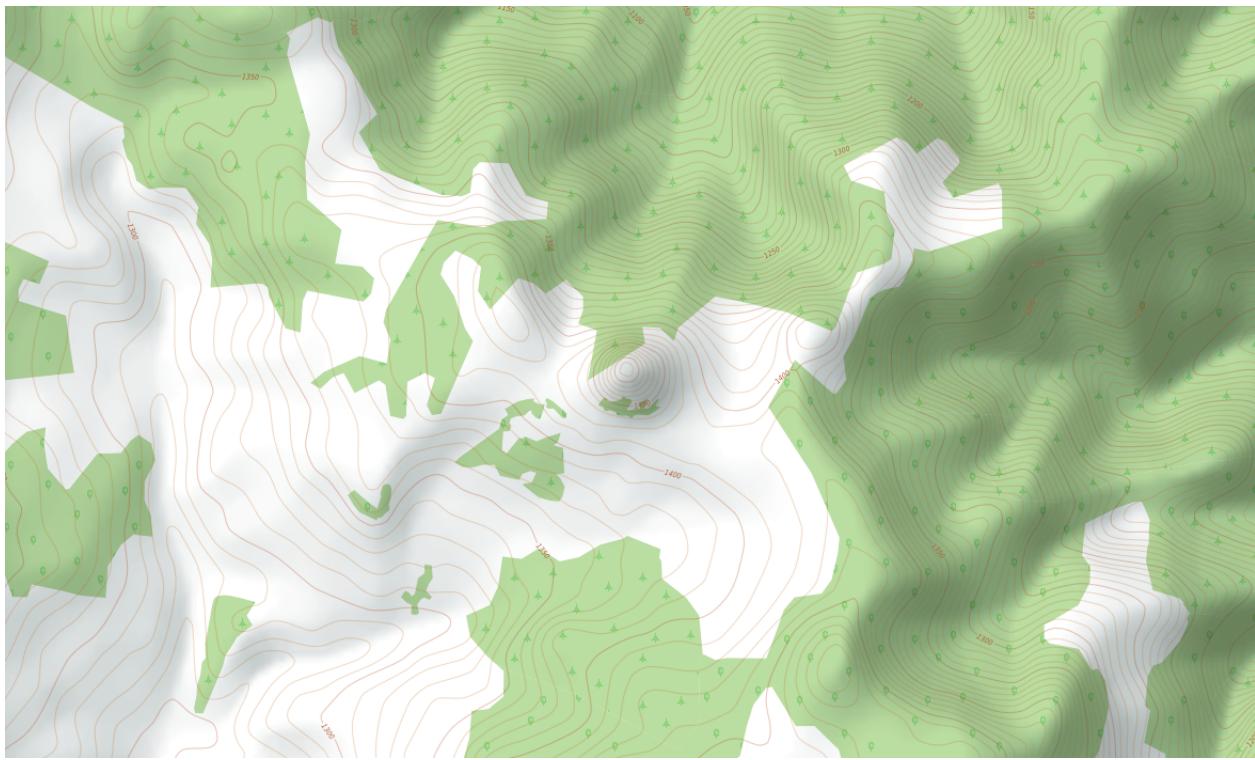
Le graphe est alors une superposition de cercles horizontaux de l'espace de centre  $(0, 0, c)$  et de rayon  $\sqrt{c}$  avec  $c \geq 0$ .

Ci-dessous : (a) le graphe, appelé paraboloïde de révolution, (b) 5 courbes de niveau, (c) 10 courbes de niveau, (d) des lignes de niveau dans le plan.



### Exemple 8.

Sur une carte topographique, les lignes de niveau représentent les courbes ayant la même altitude.

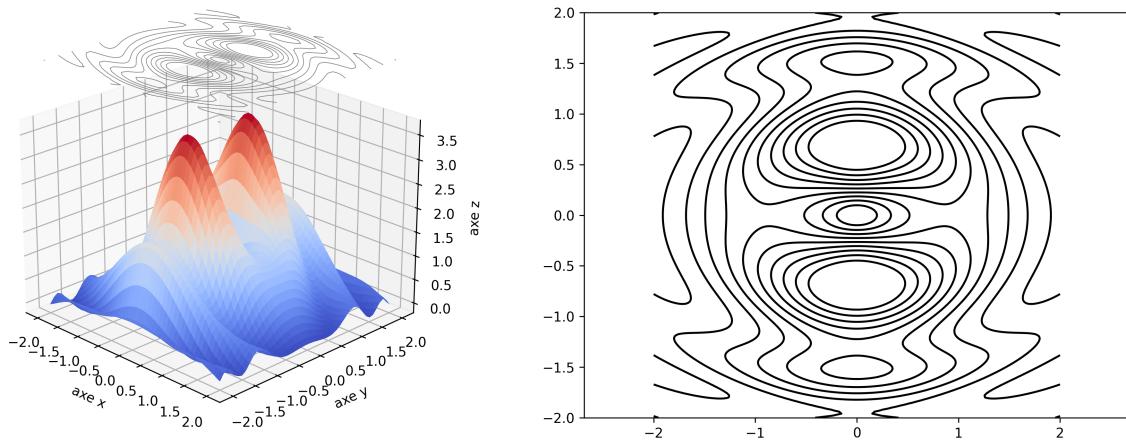


- Ici, une carte *Open Street Map* avec, au centre, le mont Gerbier-de-Jonc (source de la Loire, 1551 m).
- Les lignes de niveau correspondent à des altitudes par cran de 10 m (par exemple, pour  $c = 1400$ ,  $c = 1410$ ,  $c = 1420\dots$ ).
- Lorsque les lignes de niveau sont très espacées, le terrain est plutôt plat ; lorsque les lignes sont rapprochées, le terrain est pentu.
- Par définition, si on se promène en suivant une ligne de niveau, on reste toujours à la même altitude !

### Exemple 9.

L'image qui a servi lors de l'introduction est le graphe et les lignes de niveau de la fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$(x, y) \mapsto z = \frac{\sin(x^2 + 3y^2)}{\frac{1}{10} + r^2} + (x^2 + 5y^2) \cdot \frac{\exp(1 - r^2)}{2} \quad \text{avec} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$



### Surfaces de niveau.

Pour les fonctions de 3 variables, le graphe étant dans  $\mathbb{R}^4$ , on ne peut le dessiner. La notion analogue à la ligne de niveau est celle de **surface de niveau**, donnée par l'équation  $f(x, y, z) = c$ .

**Exemple 10.**

$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ . Les surfaces de niveau sont données par l'équation  $x^2 + y^2 + z^2 = c$ . Pour  $c \geq 0$ , ces surfaces sont des sphères, centrées à l'origine et de rayon  $\sqrt{c}$ . Voici ces surfaces pour  $c = 1, 3, 5$ . Elles ont été découpées pour laisser entrevoir les surfaces des différents niveaux.

**2.3. Exemples de surfaces quadratiques**

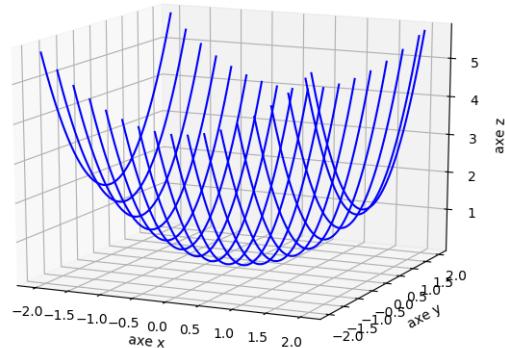
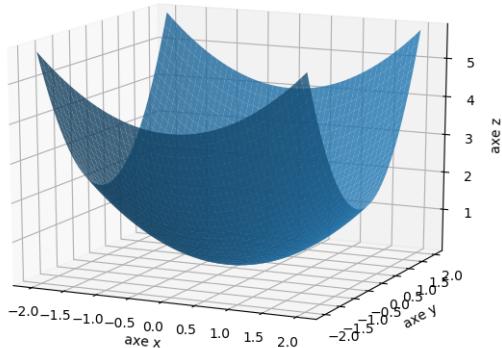
Ce sont des exemples à connaître, car ils seront fondamentaux pour la suite du cours.

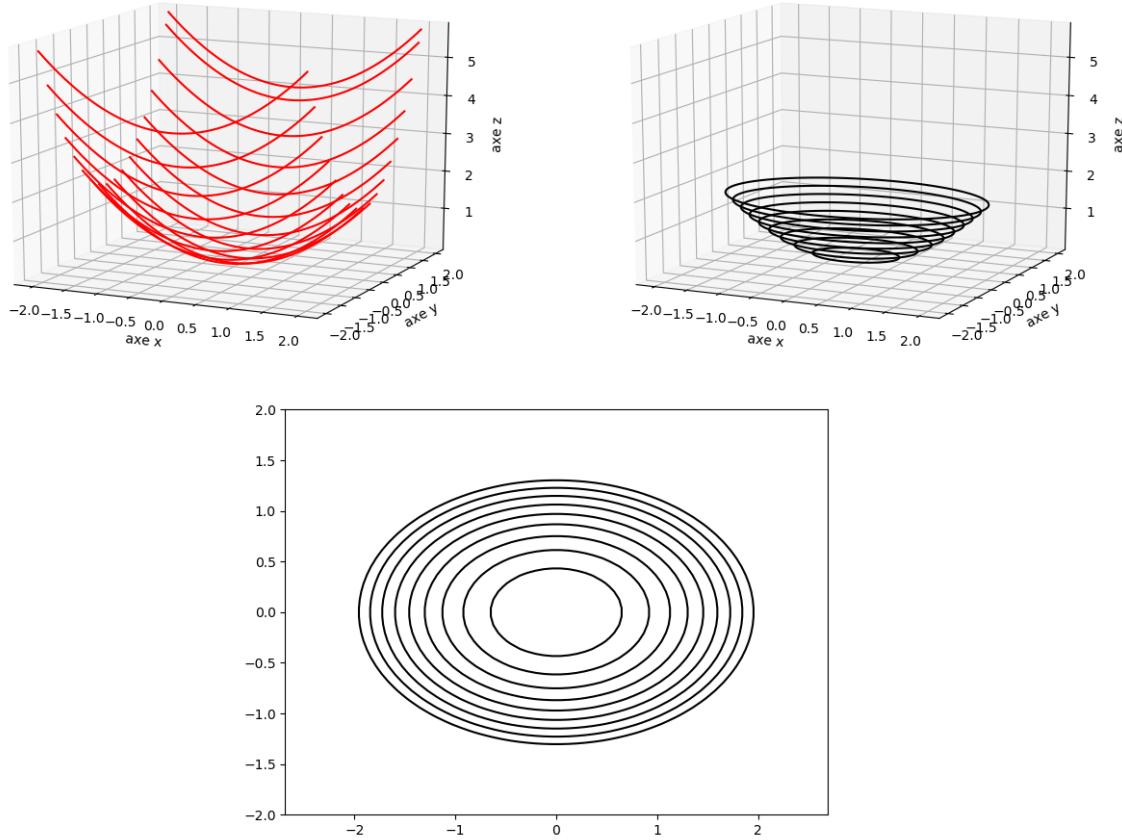
**Exemple 11.**

$$f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$$

- Les tranches sont des paraboles.
- Les lignes de niveau sont des ellipses.
- Le graphe est donc un **parabolôde elliptique**.

Ci-dessous : (a) la surface, (b) des tranches avec  $x$  constant, (c) des tranches avec  $y$  constant, (d) des courbes de niveau, (e) des lignes de niveau dans le plan.



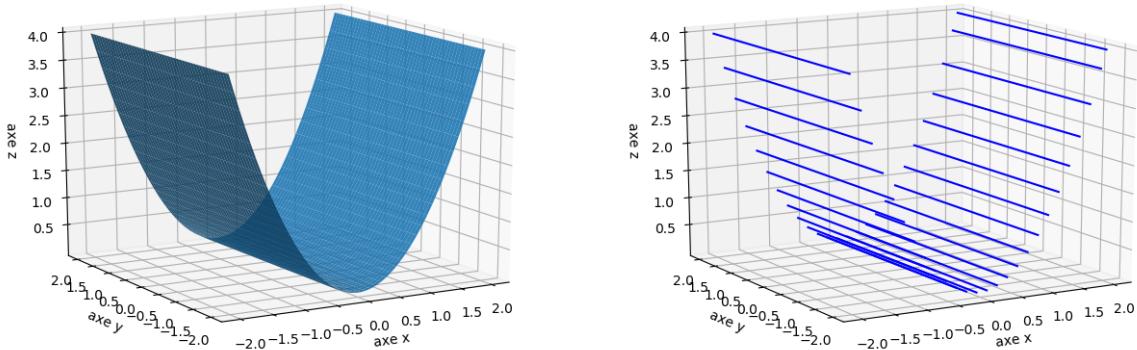


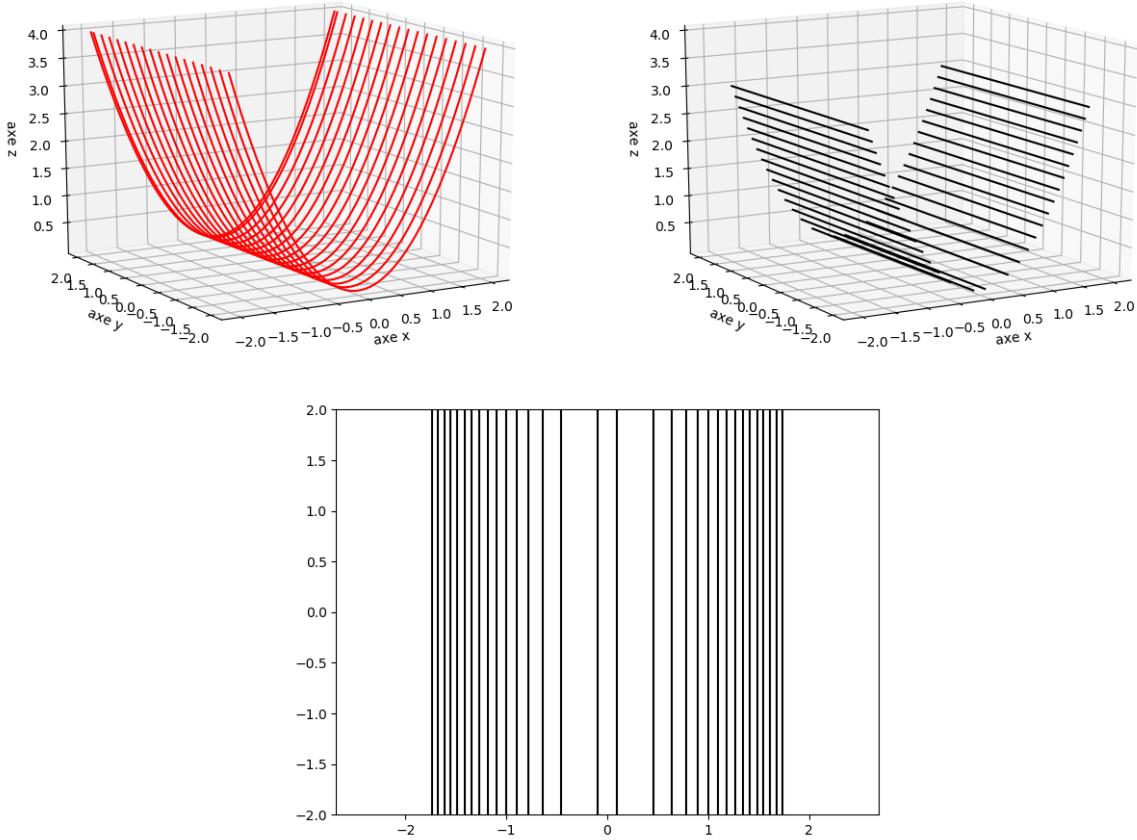
### Exemple 12.

$$f(x, y) = x^2$$

- Les tranches (à  $y$  constant) sont des paraboles.
- Les lignes de niveau sont des paires de droites.
- Le graphe est donc un **cylindre parabolique**.

Ci-dessous : (a) la surface, (b) des tranches avec  $x$  constant, (c) des tranches avec  $y$  constant, (d) des courbes de niveau, (e) des lignes de niveau dans le plan.



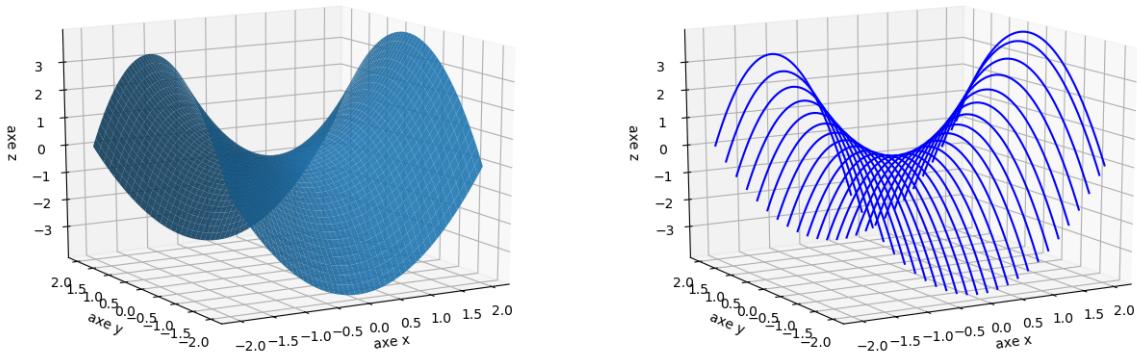


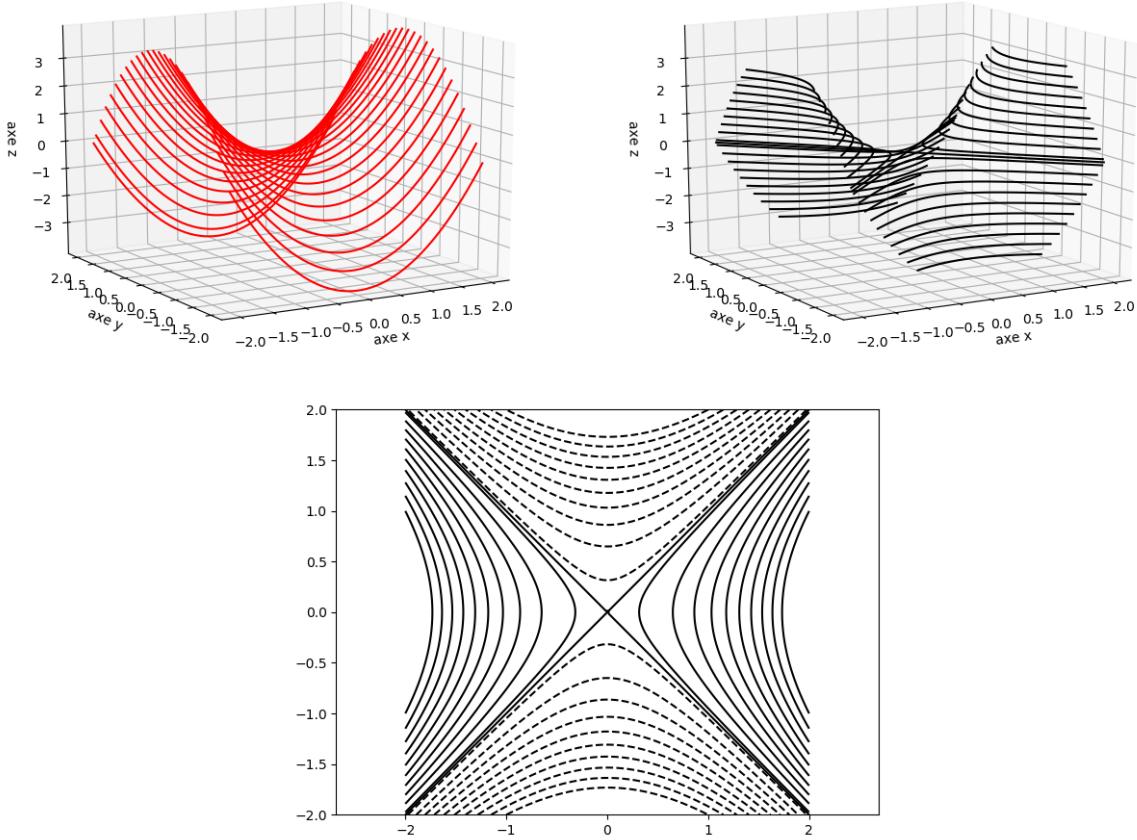
### Exemple 13.

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

- Les tranches sont des paraboles.
- Les lignes de niveau sont des hyperboles.
- Le graphe est donc un *paraboloïde hyperbolique*, que l'on appelle aussi la *selle de cheval*.
- Un autre nom pour cette surface est un *col* (du nom d'un col de montagne). En effet, le point  $(0, 0, 0)$  est le point de passage le moins haut pour passer d'un versant à l'autre de la montagne.

Ci-dessous : (a) la surface, (b) des tranches avec  $x$  constant, (c) des tranches avec  $y$  constant, (d) des courbes de niveau, (e) des lignes de niveau dans le plan (en pointillé les lignes de niveau négatif).





### Mini-exercices.

1. Déterminer et dessiner le domaine de définition de la fonction définie par  $f(x, y) = \ln(xy)$ . Même question avec  $g(x, y) = \sqrt{2x - y^2 + 1}$  et  $h(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ .
2. Déterminer l'image des fonctions de la question précédente.
3. Soit  $f(x, y) = xy$ . Dessiner le graphe de  $f$ , les tranches et les lignes de niveau. Quelle surface reconnaissiez-vous ? Vous pouvez vous aider d'un ordinateur. Mêmes questions avec  $g(x, y) = -x^2 - y^2$ .

## 3. Limites

Les notions de limite et de continuité des fonctions d'une seule variable se généralisent en plusieurs variables sans complexité supplémentaire : il suffit de remplacer la valeur absolue par la norme euclidienne.

### 3.1. Définition

Soit  $f$  une fonction  $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  définie au voisinage de  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , sauf peut-être en  $x_0$ .

#### Définition 7.

La fonction  $f$  admet pour **limite** le nombre réel  $\ell$  lorsque  $x$  tend vers  $x_0$  si :

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in E \quad 0 < \|x - x_0\| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \epsilon$$

On écrit alors

$$\lim_{x_0} f = \ell \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell.$$

On définirait de même  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  par :

$$\forall A > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in E \quad 0 < \|x - x_0\| < \delta \implies |f(x)| > A$$

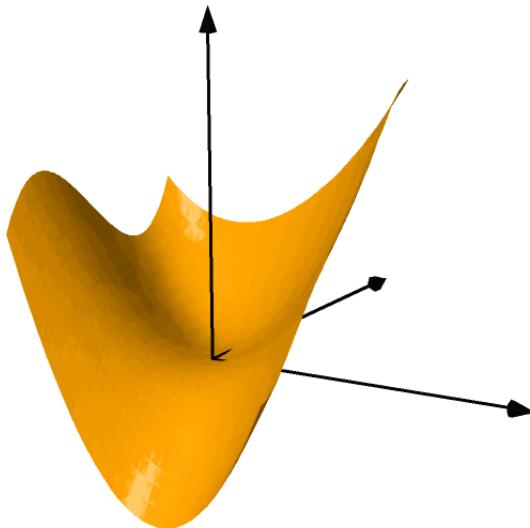
**Remarque.**

- La notion de limite ne dépend pas ici des normes utilisées.
- Si elle existe, la limite est unique.

**Exemple 14.**

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x, y) = x^2 + y \sin(x + y^2)$ .

1. Montrer que  $f(x, y)$  tend vers 0 lorsque  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ .
2. Trouver un ouvert  $U$  contenant l'origine tel que, pour tout  $(x, y) \in U$ , on ait  $|f(x, y)| < \frac{1}{100}$ .



*Solution.*

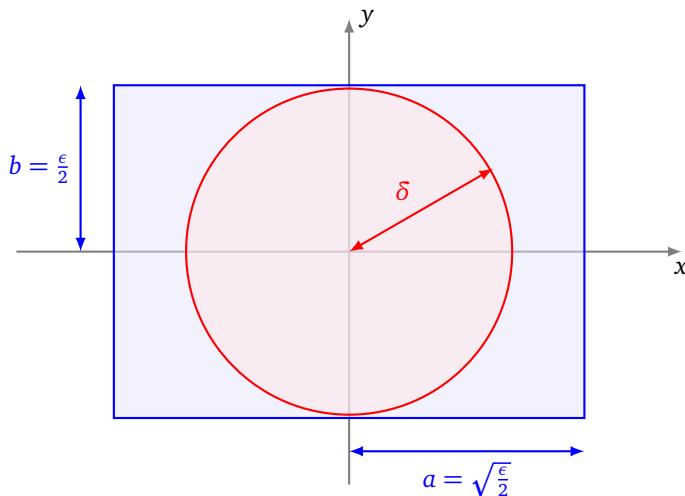
1. On majore  $|f(x, y)|$  en utilisant l'inégalité triangulaire et  $|\sin(t)| \leq 1$  :

$$|f(x, y)| = |x^2 + y \sin(x + y^2)| \leq x^2 + |y| |\sin(x + y^2)| \leq x^2 + |y|$$

Fixons  $0 < \epsilon < 1$ . Fixons  $a = \sqrt{\frac{\epsilon}{2}}$  et  $b = \frac{\epsilon}{2}$ . Alors, pour  $x \in ]-a, a[$ , on a  $x^2 < \frac{\epsilon}{2}$  et, pour  $y \in ]-b, b[$ , on a  $|y| < \frac{\epsilon}{2}$ . Pour  $(x, y) \in ]-a, a[ \times ]-b, b[$ , on a donc

$$|f(x, y)| \leq x^2 + |y| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Une valeur  $\delta$  qui convient est donc  $\delta = \frac{\epsilon}{2}$ . En effet, si  $\|(x, y)\| < \delta$  alors  $|x| < \delta = \frac{\epsilon}{2} \leq \sqrt{\frac{\epsilon}{2}}$  et  $|y| < \delta = \frac{\epsilon}{2}$  donc  $|f(x, y)| < \epsilon$ . Conclusion :  $f$  admet pour limite 0 lorsque  $(x, y)$  tend vers  $(0, 0)$ .



2. Pour  $\epsilon = \frac{1}{100}$ , on a  $a = \frac{1}{\sqrt{200}}$  et  $b = \frac{1}{200}$ . Pour chaque  $(x, y)$  de l'ouvert  $] -a, a[ \times ] -b, b[$ , on a  $|f(x, y)| < \frac{1}{100}$ .

### 3.2. Opérations sur les limites

Pour calculer les limites, on ne recourt que rarement à cette définition. On utilise plutôt les théorèmes généraux : opérations sur les limites et encadrement. Ce sont les mêmes énoncés que pour les fonctions d'une variable : il n'y a aucune difficulté ni nouveauté.

**Proposition 1** (Opérations sur les limites).

Soient  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  définies au voisinage de  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  et telles que  $f$  et  $g$  admettent des limites en  $x_0$ . Alors :

$$\lim_{x_0} (f + g) = \lim_{x_0} f + \lim_{x_0} g \quad \lim_{x_0} (f \cdot g) = \lim_{x_0} f \times \lim_{x_0} g$$

Et si  $g$  ne s'annule pas dans un voisinage de  $x_0$  :

$$\lim_{x_0} \frac{1}{g} = \frac{1}{\lim_{x_0} g} \quad \lim_{x_0} \frac{f}{g} = \frac{\lim_{x_0} f}{\lim_{x_0} g}$$

**Remarque.**

- Les résultats ci-dessus sont aussi valables pour des limites infinies avec les conventions usuelles :

$$\ell + \infty = +\infty, \quad \ell - \infty = -\infty, \quad \frac{1}{0^+} = +\infty, \quad \frac{1}{0^-} = -\infty, \quad \frac{1}{\pm\infty} = 0,$$

$\ell \times \infty = \infty$  ( $\ell \neq 0$ ),  $\infty \times \infty = \infty$  (avec règle de multiplication des signes).

- Les formes indéterminées sont :  $+\infty - \infty$ ,  $\frac{0}{0}$ ,  $\frac{\infty}{\infty}$ ,  $0 \times \infty$ ,  $\infty^0$ ,  $1^\infty$  et  $0^0$ .

La composition est aussi souvent utile :

- soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de plusieurs variables, telle que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ ,
- soit  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction d'une seule variable, telle que  $\lim_{t \rightarrow \ell} g(t) = \ell'$ ,
- alors la fonction de plusieurs variables  $g \circ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$  vérifie  $\lim_{x \rightarrow x_0} (g \circ f)(x) = \ell'$ .

Application : grâce à l'exemple 14, et comme  $e^t \rightarrow 1$  lorsque  $t \rightarrow 0$ , on en déduit :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} e^{x^2 + y \sin(x+y^2)} = 1$$

Il existe aussi un théorème « des gendarmes ».

**Théorème 1** (Théorème d'encadrement).

Soient  $f, g, h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  trois fonctions définies dans un voisinage  $U$  de  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ .

- Si, pour tout  $x \in U$ , on a  $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ ,

- et si  $\lim_{x_0} f = \lim_{x_0} g = \ell$ ,  
alors  $h$  admet une limite au point  $x_0$  et  $\lim_{x_0} h = \ell$ .

**Exemple 15.**

Soit  $h$  définie par  $h(x, y) = \cos(x + y^2)(x^2 + y \sin(x + y^2))$ . On majore la valeur absolue du cosinus par 1 :

$$|h(x, y)| \leq |x^2 + y \sin(x + y^2)|.$$

On a vu lors de l'exemple 14 que la fonction définie par  $f(x, y) = x^2 + y \sin(x + y^2)$  tend vers 0 en  $(0, 0)$ . Donc, par le théorème des gendarmes,  $h(x, y)$  tend aussi vers 0 lorsque  $(x, y)$  tend vers  $(0, 0)$ .

**3.3. Limite le long d'un chemin**

L'unicité de la limite implique que, quelle que soit la façon dont on arrive au point  $x_0$ , la valeur limite est toujours la même.

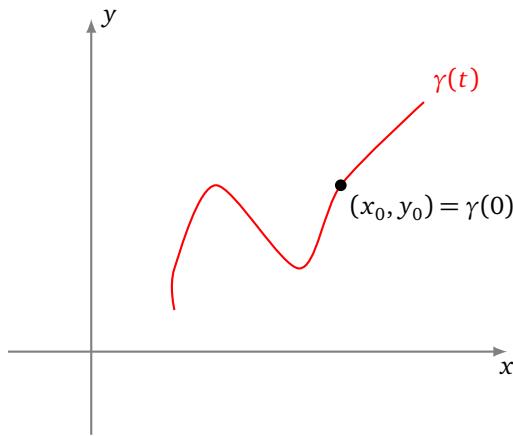
**Proposition 2.**

Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie au voisinage de  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , sauf peut-être en  $x_0$ .

1. Si  $f$  admet une limite  $\ell$  au point  $x_0$ , alors la restriction de  $f$  à toute courbe passant par  $x_0$  admet une limite en  $x_0$  et cette limite est  $\ell$ .
2. Par contraposée, si les restrictions de  $f$  à deux courbes passant par  $x_0$  ont des limites différentes au point  $x_0$ , alors  $f$  n'admet pas de limite au point  $x_0$ .

Détaillons dans les cas des fonctions de deux variables :

- Une courbe passant par le point  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  est une fonction continue  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $t \mapsto (\gamma(t), \gamma(t))$ , telle que  $\gamma(0) = (x_0, y_0)$ .
- La restriction de  $f$  le long de  $\gamma$  est la fonction d'une variable  $f \circ \gamma : t \mapsto f(\gamma(t), \gamma(t))$ .
- Si  $f$  a pour limite  $\ell$  en  $(x_0, y_0)$  alors la première partie de la proposition affirme que  $f(\gamma(t), \gamma(t)) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} \ell$ .

**Exemple 16.**

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \quad \text{et} \quad f(0, 0) = 0.$$

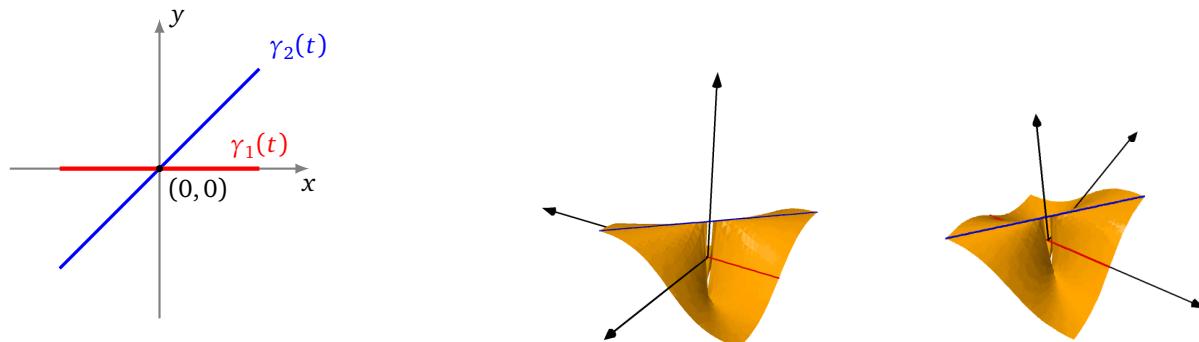
La fonction  $f$  admet-elle une limite en  $(0, 0)$  ?

*Solution.*

- Si on prend le chemin  $\gamma_1(t) = (t, 0)$ , alors  $(f \circ \gamma_1)(t) = f(t, 0) = 0$ . Donc, lorsque  $t \rightarrow 0$ ,  $(f \circ \gamma_1)(t) \rightarrow 0$ .

- Si on prend le chemin  $\gamma_2(t) = (t, t)$ , alors  $(f \circ \gamma_2)(t) = f(t, t) = \frac{t^2}{2t^2} = \frac{1}{2}$ . Donc, lorsque  $t \rightarrow 0$ ,  $(f \circ \gamma_2)(t) \rightarrow \frac{1}{2}$ .

Ci-dessous, sur la figure de gauche, les deux chemins du plan ; sur les deux figures de droite, deux vues différentes des valeurs prises par  $f$  le long de ces chemins.



- Si  $f$  admettait une limite  $\ell$  alors, quel que soit le chemin  $\gamma(t)$  tel que  $\gamma(t) \rightarrow (0, 0)$  lorsque  $t \rightarrow 0$ , on aurait  $(f \circ \gamma)(t) \rightarrow \ell$ . On aurait donc  $\ell = 0$  et  $\ell = \frac{1}{2}$ , ce qui contredirait l'unicité de la limite. Ainsi,  $f$  n'a pas de limite en  $(0, 0)$ .

Une autre formulation possible :

Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  a pour limite  $\ell$  en  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  alors, pour toute suite  $(u_n)$  d'éléments de  $\mathbb{R}^n$  telle que  $u_n \rightarrow x_0$ , on a  $f(u_n) \rightarrow \ell$ . Pour les fonctions de deux variables, cela s'écrit ainsi : si  $f$  a pour limite  $\ell$  en  $(a, b)$  alors, pour toute suite  $(a_n, b_n) \rightarrow (a, b)$ , on a  $f(a_n, b_n) \rightarrow \ell$ .

### 3.4. Fonctions continues

#### Définition 8.

- $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est **continue en  $x_0 \in E$**  si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .
- $f$  est **continue sur  $E$**  si elle est continue en tout point de  $E$ .

Par les propriétés des limites, si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions continues en  $x_0$ , alors :

- la fonction  $f + g$  est continue en  $x_0$ ,
- de même  $f g$  et  $f/g$  (avec  $g(x) \neq 0$  sur un voisinage de  $x_0$ ) sont continues en  $x_0$ ,
- si  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est continue, alors  $h \circ f$  est continue en  $x_0$ .

#### Exemple 17.

- Les applications définies par  $(x, y) \mapsto x + y$ ,  $(x, y) \mapsto xy$ , puis toutes les fonctions polynômes en deux variables  $x$  et  $y$  sont continues sur  $\mathbb{R}^2$  (par exemple  $(x, y) \mapsto x^2 + 3xy$ ). De la même façon, toutes les fractions rationnelles en deux variables sont continues là où elles sont définies.
- Comme l'exponentielle est une fonction continue, alors  $(x, y) \mapsto e^{xy}$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .
- La fonction définie par  $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$  est continue sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

#### Définition 9 (Prolongement par continuité).

Soit  $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Soit  $x_0$  un point adhérent à  $E$  n'appartenant pas à  $E$ . Si  $f(x)$  a une limite  $\ell$  lorsque  $x \rightarrow x_0$ , on peut étendre le domaine de définition de  $f$  à  $E \cup \{x_0\}$  en posant  $f(x_0) = \ell$ . La fonction étendue est continue en  $x_0$ . On dit que l'on a obtenu un **prolongement de  $f$  par continuité** au point  $x_0$ .

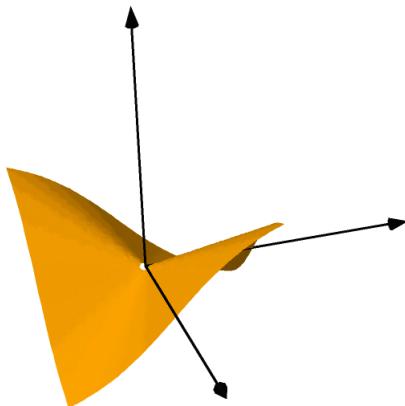
#### Exemple 18.

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  définie par

$$f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Est-il possible de prolonger  $f$  par continuité en  $(0, 0)$ ?

Sur la figure ci-dessous, la question devient simplement : est-il possible de boucher le trou au milieu de la surface en rajoutant juste un point ?



*Solution.*

- **Limite à l'origine.**

On utilise que  $|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$  et  $|y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ . Donc

$$|f(x, y)| = \frac{|x| \cdot |y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0.$$

- **Prolongement.**

Pour prolonger  $f$  en  $(0, 0)$ , on choisit comme valeur la limite obtenue. On pose donc  $f(0, 0) = 0$ . (On note encore  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction prolongée.)

- **Continuité.**

Par notre choix de  $f(0, 0)$ ,  $f$  est continue en  $(0, 0)$ . En dehors de l'origine,  $f$  est continue comme somme, produit, composition, inverse de fonctions continues. Conclusion : la fonction prolongée est continue sur  $\mathbb{R}^2$  tout entier.

### Mini-exercices.

1. Soit  $f(x, y) = \frac{1+x}{1+y}$ . Trouver un ouvert  $U$  contenant l'origine tel que  $0.999 < f(x, y) < 1.001$  pour tout  $(x, y) \in U$ .
2. Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue au point  $(x_1, \dots, x_n)$ . Montrer que la fonction partielle  $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f_i(t) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n)$  est continue en  $x_i$ .
3. Sachant que la limite de  $f(x, y) = \frac{1+x}{1+y}$  en  $(0, 0)$  est 1, calculer la limite des fonctions suivantes en  $(0, 0)$  :  $\frac{1+x}{1+y} + x^2 + y^2$ ;  $\frac{1+y}{1+x}$ ;  $\sin(xy) \frac{1+x}{1+y}$ ;  $\ln\left(\frac{1+x}{1+y}\right)$ .
4. Sachant que  $\ln(t) \leq t - 1$  pour tout  $t > 0$ , calculer la limite de  $\frac{\ln(1+xy)}{1+x^2+y^4}$  en  $(0, 0)$ .
5. Soit  $f(x, y) = \frac{\sin(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ . Soit  $\gamma(t) = (at, bt)$  où  $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  est fixé. Calculer la limite de  $(f \circ \gamma)(t)$  lorsque  $t \rightarrow 0$  en fonction de  $(a, b)$ .  $f$  admet-elle une limite en  $(0, 0)$ ?  $f$  est-elle prolongeable par continuité en  $(0, 0)$ ?
6. Soit  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  par  $f(x, y) = \frac{xy^3}{x^2+2y^2}$ .  $f$  admet-elle une limite en  $(0, 0)$ ?  $f$  est-elle prolongeable par continuité en  $(0, 0)$ ? Mêmes questions avec  $f(x, y) = \frac{xy^3}{x^4+2y^4}$ .

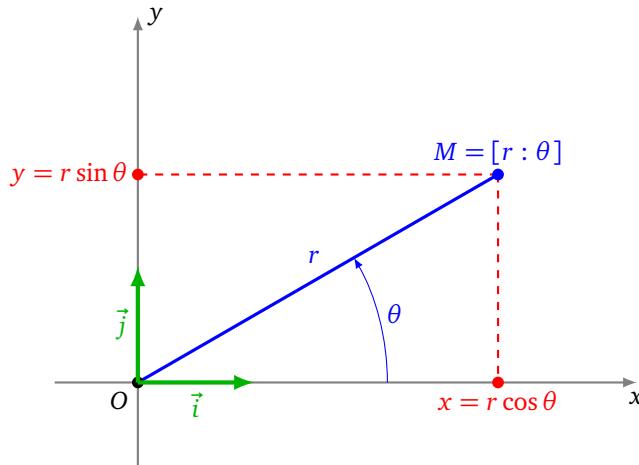
## 4. Coordonnées polaires

Plutôt que de repérer un point du plan  $\mathbb{R}^2$  par ses coordonnées cartésiennes  $(x, y)$ , on peut le faire au moyen de sa distance à l'origine et de l'angle formé avec l'horizontale : ce sont les coordonnées polaires.

### 4.1. Définition

Soit  $M$  un point du plan  $\mathbb{R}^2$ . Soit  $O = (0, 0)$  l'origine. Soit  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  un repère orthonormé direct.

- On note  $r = \|\overrightarrow{OM}\|$ , la distance de  $M$  à l'origine.
- On note  $\theta$  l'angle entre  $\vec{i}$  et  $\overrightarrow{OM}$ .



On note  $[r : \theta]$  les  **coordonnées polaires** du point  $M$ . Dans ce cours,  $r$  sera toujours positif. L'angle n'est pas déterminé de manière unique, plusieurs choix sont possibles. Pour avoir unicité, on peut limiter  $\theta$  à l'intervalle  $[0, 2\pi[$ , ou bien  $] -\pi, +\pi ]$ . On n'attribue généralement pas de coordonnées polaires au point origine (l'angle n'aurait pas de sens).

#### Coordonnées polaires vers coordonnées cartésiennes.

On retrouve les coordonnées cartésiennes  $(x, y)$  à partir des coordonnées polaires  $[r : \theta]$  par les formules

$$x = r \cos \theta \quad \text{et} \quad y = r \sin \theta.$$

Autrement dit, on a défini une application :

$$]0, +\infty[ \times [0, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

#### Coordonnées cartésiennes vers coordonnées polaires.

On retrouve  $r$  et  $\theta$  à partir de  $(x, y)$  par les formules suivantes :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

et, dans le cas  $x > 0$  et  $y \geq 0$ ,

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

Pour les points dans les autres quadrants, on se ramène au quadrant principal où  $x > 0$  et  $y \geq 0$ .

### 4.2. Limite et continuité

Lorsque l'on considère des applications  $f : E \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , il est quelquefois plus facile de prouver des résultats de limite, continuité, etc., en passant par les coordonnées polaires.

**Proposition 3.**

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie au voisinage de  $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ , sauf peut-être en  $(0, 0)$ . Si

$$\lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \ell \in \mathbb{R}$$

existe indépendamment de  $\theta$ , c'est-à-dire qu'il existe une fonction  $\epsilon(r) \xrightarrow[r \rightarrow 0]{} 0$  telle que, pour tout  $r \geq 0$  et tout  $\theta$ , on a :

$$|f(r \cos \theta, r \sin \theta) - \ell| \leq \epsilon(r),$$

alors  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \ell$ .

Pour clarifier cette proposition et expliquer les différents cas pratiques de la limite, voici comment faire. On exprime  $f(x, y)$  en coordonnées polaires en calculant  $f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ .

1. Si  $\lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos \theta, r \sin \theta)$  existe et si elle ne dépend pas de la variable  $\theta$ , alors cette limite est la limite de  $f$  au point  $(0, 0)$ .
2. Si  $\lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos \theta, r \sin \theta)$  n'existe pas, alors  $f$  n'a pas de limite au point  $(0, 0)$ .
3. Si  $\lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \ell(\theta)$  dépend de  $\theta$ , alors  $f$  n'a pas de limite au point  $(0, 0)$ . Pour le justifier, on donne deux valeurs  $\theta_1$  et  $\theta_2$  telles que  $\ell(\theta_1) \neq \ell(\theta_2)$ .

Voyons un exemple de chaque situation.

**Exemple 19.**

$$1. f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2}$$

$$f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{r^3 \cos^3 \theta}{r^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} = \frac{r^3 \cos^3 \theta}{r^2} = r \cos^3 \theta$$

Comme  $|\cos^3 \theta| \leq 1$  alors  $r |\cos^3 \theta| \leq r$  (pour tout  $r$  mais aussi pour tout  $\theta$ ) avec  $\epsilon(r) := r \xrightarrow[r \rightarrow 0]{} 0$ . Ce qui implique que  $f(r \cos \theta, r \sin \theta) \xrightarrow[r \rightarrow 0]{} 0$ . La limite existe (indépendamment des valeurs prises par  $\theta$ ), donc la fonction  $f$  admet bien une limite en  $(0, 0)$  :  $f(x, y) \xrightarrow[(x,y) \rightarrow (0,0)]{} 0$ .

Pour ceux qui voudraient tout faire à la main avec plus de détails, on peut aussi écrire  $|f(r \cos \theta, r \sin \theta)| \leq r$ , autrement dit  $|f(x, y)| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ . Donc  $f(x, y) \xrightarrow[(x,y) \rightarrow (0,0)]{} 0$ .

$$2. f(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{r \sin \theta}{r^2(\cos^2 \theta + r \sin^3 \theta)} = \frac{1}{r} \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta + r \sin^3 \theta}$$

Fixons  $\theta$  tel que  $\sin \theta \neq 0$  (c'est-à-dire  $\theta \neq 0 \pmod{\pi}$ ). Alors, lorsque  $r \rightarrow 0$ ,  $f(r \cos \theta, r \sin \theta)$  n'a pas de limite. En particulier, la fonction  $(x, y) \mapsto f(x, y)$  n'a pas de limite en  $(0, 0)$ .

$$3. f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

$$f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{r^2 \cos \theta \sin \theta}{r^2} = \cos \theta \sin \theta = \frac{1}{2} \sin(2\theta)$$

Pour  $\theta$  fixé, la fonction  $r \mapsto f(r \cos \theta, r \sin \theta)$  admet bien une limite  $\ell(\theta) = \frac{1}{2} \sin(2\theta)$ , lorsque  $r \rightarrow 0$ . Mais cette limite dépend de l'angle  $\theta$  : si  $\theta = 0$ ,  $\ell(\theta) = 0$  ; par contre, si  $\theta = \frac{\pi}{4}$ ,  $\ell(\theta) = \frac{1}{2}$ . Comme la limite dépend de l'angle, alors la fonction de deux variables  $(x, y) \mapsto f(x, y)$  n'a pas de limite en  $(0, 0)$ .

### 4.3. Un exemple

Cet exemple est assez subtil et peut être passé en première lecture.

**Remarque.**

Soit  $\ell \in \mathbb{R}$ . Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction telle que, pour chaque  $\theta$  fixé,  $\lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \ell$ . Peut-on en conclure que  $f$  admet  $\ell$  pour limite au point  $(0, 0)$ ? La réponse est non!

Autrement dit, regarder la limite de  $f$  le long des rayons ne permet pas de trouver la limite de  $f$  à l'origine.

Attention : la différence entre cette remarque et la proposition 3 est subtile. Dans la proposition 3, on a une hypothèse en terme de limites du type :

$$\forall \epsilon \quad \exists r_0 \quad \forall r < r_0 \quad \forall \theta \quad \dots$$

alors que dans la remarque, on note que l'hypothèse (plus faible) suivante est insuffisante :

$$\forall \theta \quad \forall \epsilon \quad \exists r_0 \quad \forall r < r_0 \quad \dots$$

**Exemple 20.**

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  par

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}.$$

1. Le long de tous les rayons  $f$  tend vers 0, c'est-à-dire, pour  $\theta$  fixé,

$$f(r \cos \theta, r \sin \theta) \xrightarrow[r \rightarrow 0]{} 0.$$

2. Cependant,  $f$  n'a pas de limite en  $(0, 0)$ .

*Solution.*

1. Calculons d'abord :

$$f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{r \cos \theta \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta + r^2 \sin^4 \theta}$$

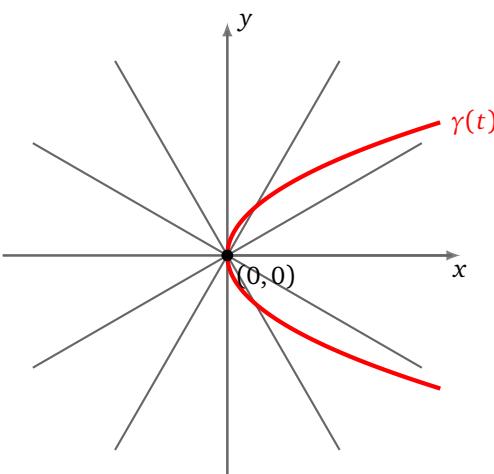
Fixons  $\theta$  et discutons selon sa valeur :

- Si  $\cos \theta \neq 0$ , alors le numérateur tend vers 0, tandis que le dénominateur tend vers  $\cos^2 \theta \neq 0$ . Donc  $f(r \cos \theta, r \sin \theta) \rightarrow 0$  lorsque  $r \rightarrow 0$ .
  - Si  $\cos \theta = 0$ , alors on se trouve sur des points  $(x, y)$  où  $x = 0$  et donc  $f(r \cos \theta, r \sin \theta) = f(0, y) = 0$ .
- Dans tous les cas,  $f$  tend vers 0 sur tous les rayons définis par un angle  $\theta$  fixé.

2. Considérons le chemin  $\gamma(t) = (t^2, t)$ . Alors

$$(f \circ \gamma)(t) = \frac{t^4}{2t^4} = \frac{1}{2}.$$

Mais on a vu que le long des rayons  $f$  tend vers 0. Cela contredit l'existence d'une limite pour  $f(x, y)$  en  $(0, 0)$ .



**Mini-exercices.**

1. Calculer l'angle  $\theta$  des coordonnées polaires  $[r : \theta]$  d'un point  $(x, y)$  dans le cas  $x > 0, y < 0$ . Puis faire les cas où  $x < 0$ .
2. La fonction  $f$  définie par  $f(x, y) = \frac{(2x+3y)^3}{x^2+y^2}$  admet-elle une limite au point  $(0, 0)$ ? Même question avec  $f(x, y) = \frac{(2x+3y)^2}{x^2+y^2}$ , puis  $f(x, y) = \frac{2x+3y}{x^2+y^2}$ .

**Auteurs du chapitre**

Arnaud Bodin. D'après des cours de Abdellah Hanani (Lille), Goulwen Fichou et Stéphane Leborgne (Rennes), Laurent Pujo-Menjouet (Lyon). Relu par Anne Bauval, Vianney Combet et Barbara Tumpach.