Équations différentielles – Partie 2 : Notion d'équation différentielle

Exercice 1.

Vérifier que les fonctions f suivantes sont solutions de l'équation différentielle donnée.

1. $f(x) = -e^{2x}$, $y' = 2y$.
2. $f(x) = \frac{1}{2-x}$, $y' = y^2$.
3. $f(x) = (3+2x)e^x$, $y'' - 2y' + y = 0$.
4. $f(x) = Ce^{-x} + \sin(x) - \cos(x)$ (quelle que soit la constante C), $y' + y = 2\sin(x)$

Indications 1.

Il faut calculer la dérivée $f'(x)$ (et si besoin la dérivée seconde $f''(x)$) et vérifier que f et f' (et éventuellement f'') satisfont la relation donnée par l'équation différentielle (en remplaçant y par f, y' par f'...).

Correction 1.

1. $f(x) = -e^{2x}$, $f'(x) = -2e^{2x}$ donc on a bien $f'(x) = 2f(x)$.
2. $f(x) = \frac{1}{2-x}$, $f'(x) = \frac{1}{(2-x)^2}$ donc on a bien $f'(x) = f(x)^2$.
3. $f(x) = (3+2x)e^x$, $f'(x) = (5+2x)e^x$, $f''(x) = (7+2x)e^x$ donc on a bien $f''(x) - 2f'(x) + f(x) = ((3+2x) - 2(5+2x) + (7+2x))e^x = 0 \cdot e^x = 0$.
4. $f(x) = Ce^{-x} + \sin(x) - \cos(x)$, $f'(x) = -Ce^{-x} + \cos(x) + \sin(x)$, donc on a bien $f'(x) + f(x) = 2\sin(x)$.

Exercice 2.

Déterminer toutes les solutions constantes des équations différentielles suivantes.

1. $y' + y = 5$
2. $y' = y^2 - y$
3. $y' = y^2 - 4y + 1$
4. $y' = y + x$

Indications 2.

Si $f(x) = k$ est une fonction constante, alors $f'(x) = 0$ pour tout x. Une des équations n'admet aucune solution constante !

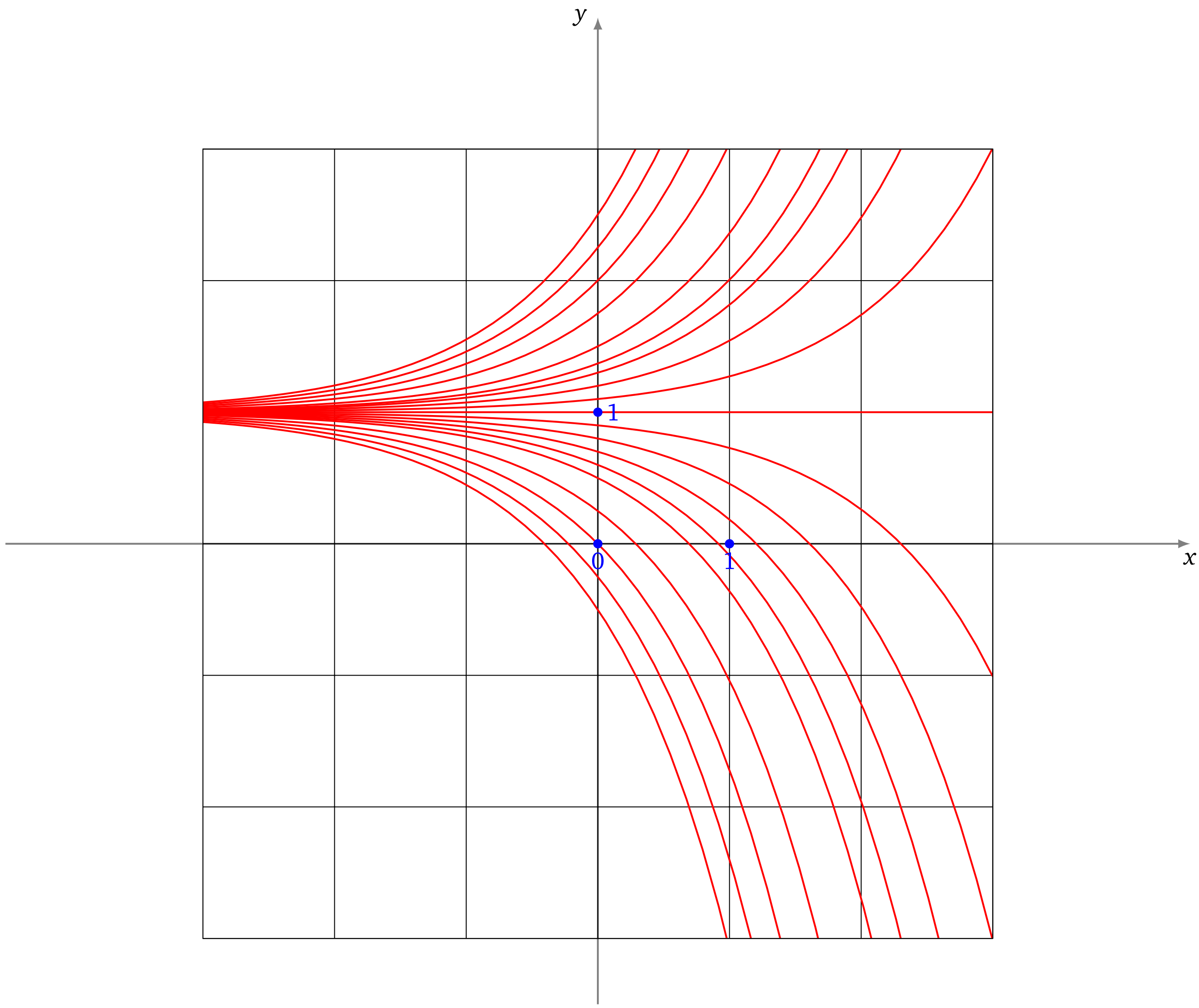
Correction 2.

1. Si f est une fonction constante, alors $f(x) = k$ pour tout x, donc $f'(x) = 0$ pour tout x. Si f est solution de l'équation différentielle $y' + y = 5$, alors $f'(x) + f(x) = 5$ pour tout x, donc $0 + k = 5$, donc $k = 5$. La seule solution constante est la solution $f(x) = 5$ pour tout x.

2. Si $f(x) = k$ est solution de l'équation différentielle $y' = y^2 - y$, alors $f'(x) = f(x)^2 - f(x)$ pour tout x, donc $0 = k^2 - k$, donc $k(k-1) = 0$, donc $k = 0$ ou $k = 1$. Il y a deux solutions constantes $f(x) = 0$ pour tout x (la fonction nulle) et $f(x) = 1$ pour tout x.
3. Si $f(x) = k$ est solution de l'équation différentielle $y' = y^2 - 4y + 1$, alors $f'(x) = f(x)^2 - 4f(x) + 1$, donc $0 = k^2 - 4k + 1$. Les solutions de $k^2 - 4k + 1 = 0$ sont $k_1 = 2 - \sqrt{3}$ et $k_2 = 2 + \sqrt{3}$ qui définissent les deux solutions constantes.
4. Si $f(x) = k$ est solution de l'équation différentielle $y' = y + x$, alors $f'(x) = f(x) + x$ donc $0 = k + x$ et alors $k = -x$. Ceci est une contradiction car k doit être une constante (un nombre fixé !). Ainsi cette équation différentielle n'admet aucune solution constante.

Exercice 3.

Le dessin représente quelques solutions de l'équation différentielle $y' = y - 1$.



1. Répondre graphiquement aux questions suivantes :
   (a) Quelle est la limite d'une solution en $-\infty$?
   (b) Quelle est la solution constante ?
   (c) En fonction de la valeur $f(0)$ d'une solution f, discuter si f est croissante ou décroissante et déterminer la limite en $+\infty$.

(d) Tracer la tangente à la courbe solution qui passe par le point $(0,2)$; en déduire une équation approchée de cette tangente.

(e) Tracer la tangente à la courbe solution qui passe par le point $(1,-1)$; en déduire une équation approchée de cette tangente.

2. Répondre par le calcul aux questions suivantes (il n'y a pas besoin de résoudre l'équation) :

   (a) Soit f la solution dont le graphe passe par le point $(0,0)$. Combien vaut $f(0)$? Combien vaut $f'(0)$? En déduire la pente de la tangente en ce point, puis l'équation de cette tangente.

   (b) Soit g la solution dont le graphe passe par le point $(1,2)$. Combien vaut $g(1)$? Combien vaut $g'(1)$? En déduire l'équation de la tangente en ce point.

Indications 3.

La pente de la tangente en x_0 est $f'(x_0)$.

Correction 3.

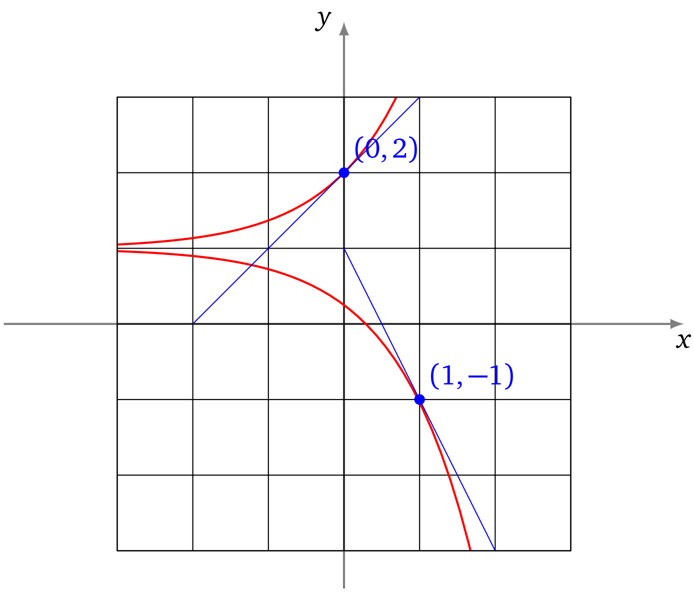
1. (a) Graphiquement on note que toutes les solutions tendent vers 1 en $-\infty$. (Cela s'explique par le calcul, mais ce n'est pas ce qui est demandé ici.)

   (b) La fonction égale à 1 est la seule solution constante.

   (c) Si $f(0)=1$, la fonction est constante égale à 1. Si $f(0)>1$, la fonction est croissante et tend vers $+\infty$ en $+\infty$. Si $f(0)<1$, la fonction est décroissante et tend vers $-\infty$ en $+\infty$.

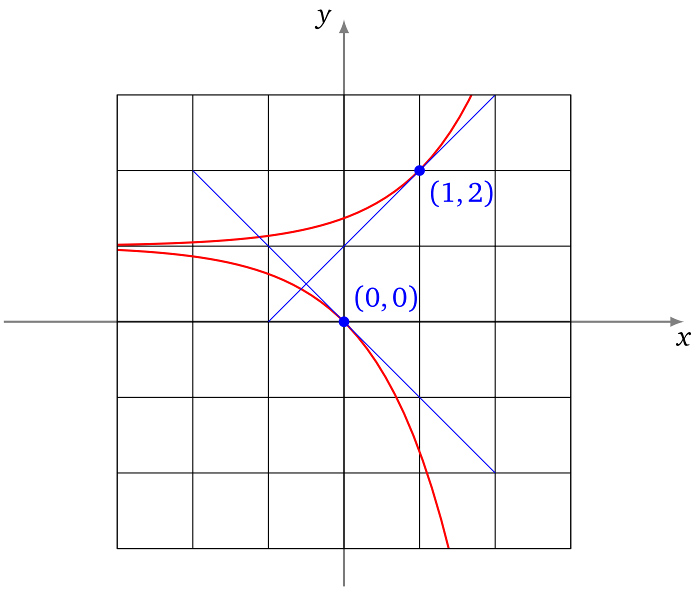
   (d) La tangente est tracée ci-dessous, par lecture graphique elle a pour équation $y=x+2$.

   (e) La tangente est tracée ci-dessous, par lecture graphique elle a pour équation $y=-2x+1$.



2. (a) Si le graphe de f passe par $(0,0)$, alors $f(0)=0$. Comme f est solution de l'équation différentielle $y'=y-1$ alors pour tout x, $f'(x)=f(x)-1$, donc en particulier pour $x=0$ on obtient $f'(0)=f(0)-1$, donc $f'(0)=-1$. La pente de la tangente au graphe de f en $(0,0)$ est donc -1. L'équation de cette tangente est donc $y=-x$ (cf graphique ci-dessous).

   (b) Si le graphe de g passe par $(1,2)$, alors $g(1)=2$. Comme g vérifie l'équation différentielle alors $g'(x)=g(x)-1$, donc pour $x=1$, $g'(1)=g(1)-1=2-1=1$. La pente de la tangente au graphe de g en $(1,2)$ est donc 1 et comme la droite passe par le point $(1,2)$, l'équation de la tangente est $y=x+1$ (cf graphique ci-dessous).



Exercice 4.

Une tasse de café de température $T_0 = 100$ degrés Celsius est posée dans une pièce de température $T_\infty = 20$ degrés. La loi de Newton affirme que la vitesse de décroissance de la température est proportionnelle à l'écart entre sa température $T(t)$ et la température ambiante T_∞.
Sachant qu'au bout de 3 minutes la température du café est passée à 80 degrés, quelle sera sa température au bout de 5 minutes ?
Les questions détaillent les étapes de la résolution de ce problème :

1. Justifier que la fonction température $T(t)$ satisfait l'équation différentielle $y' = -k(y-20)$ pour une certaine constante $k > 0$.
2. Vérifier que $T(t) = Ce^{-kt} + 20$ est solution de cette équation différentielle pour toute constante C.
3. Calculer C en fonction de $T(0)$.
4. Quelle est la température au bout d'un temps très long ?
5. Déterminer la constante k en utilisant que $T(3) = 80$.
6. Trouver la solution du problème.

Correction 4.

1. y' mesure la vitesse de croissance (ou de décroissance selon le signe) de la température ; $(y-20)$ traduit l'écart entre la température du café et la température ambiante. Le coefficient k exprime la proportionnalité, le signe moins venant de la décroissance de la température (le café refroidit).
2. Pour $T(t) = Ce^{-kt} + 20$, on a $T'(t) = -kCe^{-kt}$. Donc $-k(T(t)-20) = -kCe^{-kt} = T'(t)$ et ainsi $T(t)$ satisfait l'équation différentielle.
3. $T(0) = Ce^{-k \cdot 0} + 20 = C + 20$. Comme $T(0) = 100$, alors $C = 80$.
4. Comme $\lim_{t\to+\infty} Ce^{-kt} = 0$, on a $\lim_{t\to+\infty} T(t) = 20$. La température du café tendra vers 20 degrés (c'est normal, c'est la température de la pièce).
5. Comme $T(3) = 80$ alors $80e^{-k \cdot 3} + 20 = 80$ donc $e^{-3k} = \frac{3}{4}$. On compose par le logarithme des deux côtés : $\ln(e^{-3k}) = \ln(\frac{3}{4})$ donc $-3k = \ln(\frac{3}{4})$ et ainsi $k = -\frac{1}{3}\ln(\frac{3}{4}) = \frac{1}{3}\ln(\frac{4}{3}) \simeq 0,096$.
6. Ainsi $T(t) \simeq 80e^{-0,096 \cdot t} + 20$, donc pour $t = 5$ on obtient $T(5) \simeq 80e^{-0,096 \times 5} + 20 \simeq 69,5$ degrés Celsius.