Logique, ensembles et raisonnements – Partie 3

Exercice 1 - Preuve au cas par cas.

1. Montrer, en utilisant une disjonction de cas, que pour tout entier n, le produit $n(n+1)(2n+1)$ est divisible par 6.
2. Montrer que tout nombre premier supérieur à 5 s'écrit soit sous la forme $6k+1$, soit sous la forme $6k-1$ ($k \in \mathbb{N}$).

Indications 1.

1. Distinguer les cas $n = 3k$, $n = 3k+1$ ou $n = 3k+2$. Il faut montrer que $n(n+1)(2n+1)$ est divisible par 2 et par 3.
2. Distinguer les cas $n = 6k$, $n = 6k+1$, $n = 6k+2$, $n = 6k+3$, $n = 6k+4$ ou $n = 6k+5$ (ce dernier cas s'écrit aussi $n = 6k'-1$).

Correction 1.

1. On distingue les cas selon le reste de la division de n par 3 (c'est-à-dire qu'on regarde n modulo 3). Au préalable, remarquons que n ou $n+1$ est un nombre pair donc $n(n+1)(2n+1)$ est déjà divisible par 2. Il reste à montrer qu'il est aussi divisible par 3.
   - Si $n = 3k$ (pour un certain $k \in \mathbb{Z}$), alors n est divisible par 3 donc $n(n+1)(2n+1)$ aussi.
   - Si $n = 3k+1$, alors $2n+1 = 2(3k+1)+1 = 6k+3$ est divisible par 3 donc $n(n+1)(2n+1)$ aussi.
   - Si $n = 3k+2$, alors $n+1 = 3k+3$ est divisible par 3 donc $n(n+1)(2n+1)$ aussi.

   Dans tous les cas $n(n+1)(2n+1)$ est divisible par 2 et par 3 donc par 6.
2. Distinguons les cas selon le reste de la division de n par 6 (c'est-à-dire qu'on regarde n modulo 6).
   - Si $n = 6k$, alors n ne peut pas être premier car divisible par 6.
   - Si $n = 6k+1$, rien ne permet d'exclure ce cas a priori.
   - Si $n = 6k+2$, alors n est pair, donc ne peut pas être premier.
   - Si $n = 6k+3$, alors n est divisible par 3, donc ne peut pas être premier.
   - Si $n = 6k+4$, alors n est pair, donc ne peut pas être premier.
   - Si $n = 6k+5$, rien ne permet d'exclure ce cas a priori.

   Les seuls cas où n peut être un nombre premier sont les n de la forme $6k+1$ et $6k+5$ (qui s'écrit aussi $6k'-1$ en posant $k' = k+1$).

Exercice 2 - Raisonnement par l'absurde.

1. Soient n, a, b trois entiers naturels tels que $n = ab$. Montrer que a ou b est inférieur ou égal à $\sqrt{n}$.
2. Soit $a \in \mathbb{R}^+$ un réel positif. Montrer :

$$\text{Si "}\forall \varepsilon > 0 \;\; a \leqslant \varepsilon\text{" alors } a = 0.$$

Indications 2.

1. Soit $n = ab$. Par l'absurde si a et b sont plus grand que $\sqrt{n}$ alors...
2. Soit $a \geqslant 0$ tel que "$\forall \varepsilon > 0,\ a \leqslant \varepsilon$". Par l'absurde si $a \neq 0$ alors...

Correction 2.

1. Supposons par l'absurde que "$a > \sqrt{n}$ **et** $b > \sqrt{n}$", alors $ab > \sqrt{n} \times \sqrt{n} = n$. On a d'une part $ab = n$ mais aussi $ab > n$ ce qui fournit une contradiction. Conclusion : notre hypothèse de départ est fausse. Ainsi, on a "$a \leqslant \sqrt{n}$ **ou** $b \leqslant \sqrt{n}$".
2. Soit $a \in \mathbb{R}^+$ tel que :
$$\forall \varepsilon > 0 \quad a \leqslant \varepsilon.$$
Par l'absurde supposons "$a \neq 0$". On aura ainsi $a > 0$.
Choisissons $\varepsilon = \frac{a}{2}$. Alors d'une part $0 < \varepsilon < a$, mais d'autre part pour cet ε on a $a \leqslant \varepsilon$ (vu que c'est vrai pour tout ε). On obtient une contradiction. Notre hypothèse "$a \neq 0$" est donc fausse. Ce qui prouve $a = 0$.

Exercice 3 - Raisonnement par contraposition.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ un entier naturel non nul. Montrer par contraposition :
$$n^2 - 1 \text{ n'est pas divisible par } 8 \quad \Longrightarrow \quad n \text{ est pair}$$
2. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ deux nombres réels. Montrer par contraposition :
$$x \neq y \quad \Longrightarrow \quad (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$$

Indications 3.

1. Il s'agit donc de prouver :
$$n \text{ impair} \quad \Longrightarrow \quad n^2 - 1 \text{ est divisible par } 8$$
2. Il s'agit donc de prouver :
$$(x+1)(y-1) = (x-1)(y+1) \quad \Longrightarrow \quad x = y$$

Correction 3.

1. La contraposition de :
$$n^2 - 1 \text{ n'est pas divisible par } 8 \quad \Longrightarrow \quad n \text{ est pair}$$
est
$$n \text{ impair} \quad \Longrightarrow \quad n^2 - 1 \text{ est divisible par } 8$$
Prouvons cette dernière assertion : Soit n un entier impair, il s'écrit donc $n = 2k+1$ (pour un certain entier k), alors $n^2 - 1 = (2k+1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k = 4k(k+1)$. Or $k(k+1)$ est toujours divisible par 2, donc $n^2 - 1 = 4k(k+1)$ est divisible par 8.
Comme la contraposée est prouvée alors l'assertion initiale est aussi vraie.
2. La contraposition de :
$$x \neq y \quad \Longrightarrow \quad (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$$
est
$$(x+1)(y-1) = (x-1)(y+1) \quad \Longrightarrow \quad x = y$$
Prouvons cette dernière assertion : soient x et y tels que $(x+1)(y-1) = (x-1)(y+1)$ alors
$$\begin{aligned}(x+1)(y-1) = (x-1)(y+1) &\Longrightarrow xy - x + y - 1 = xy + x - y - 1 \\ &\Longrightarrow 2y = 2x \\ &\Longrightarrow x = y\end{aligned}$$

Comme la contraposée est vraie alors l'assertion initiale est aussi vraie.

Exercice 4 - Preuve par récurrence.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Démontrer par récurrence l'inégalité $2^n > n$.
2. Montrer que l'on a, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

3. On définit par récurrence la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme ceci :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \text{et } u_{n+1} = 2u_n + 1 \quad \text{pour } n \geqslant 0. \end{cases}$$

   (a) Calculer les premiers termes de la suite (u_n), et émettre une conjecture quant à l'expression de son terme général.

   (b) Montrer par récurrence que $u_n = 2^n - 1$.

Correction 4.

1. Pour $n \geqslant 1$, on note $\mathscr{P}_n$ l'assertion $2^n > n$.
   - **Initialisation.** $\mathscr{P}_1$ est vraie car pour $n = 1$, $2^1 > 1$.
   - **Hérédité.** Fixons $n \geqslant 1$. Supposons que pour ce rang n, $\mathscr{P}(n)$ soit vraie, c'est-à-dire $2^n > n$. On veut montrer que $\mathscr{P}(n + 1)$ est vraie, c'est-à-dire $2^{n+1} > n + 1$.
     Écrivons :
     $$2^{n+1} = 2 \times 2^n > 2 \times n \geqslant n + 1.$$
     On a utilisé l'hypothèse de récurrence $2^n > n$ (et aussi que $2n \geqslant n + 1$). La propriété est donc héréditaire.
   - **Conclusion.** Par le principe de récurrence, quel que soit $n \geqslant 1$, on a $2^n > n$.
2. Pour $n \geqslant 1$, on note $\mathscr{P}_n$ l'assertion $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$.
   - **Initialisation.** $\mathscr{P}_1$ est vraie car pour $n = 1$, $1 = 1^2$.
   - **Hérédité.** Fixons $n \geqslant 1$. Supposons que pour ce rang n, $\mathscr{P}(n)$ soit vraie, c'est-à-dire $1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1 = n^2$. On veut montrer que $\mathscr{P}(n + 1)$ est vraie, c'est-à-dire
     $$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) + (2(n + 1) - 1) = (n + 1)^2.$$
     Écrivons :
     $$\underbrace{1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)}_{=n^2 \text{ par hyp. de rec.}} + (2n + 1) = n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2$$
     Ainsi $\mathscr{P}(n + 1)$ est vraie. La propriété est donc héréditaire.
   - **Conclusion.** Par le principe de récurrence, quel que soit $n \geqslant 1$, on a $1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$.
3. $u_0 = 0$, $u_1 = 2u_0 + 1 = 1$, $u_2 = 2u_1 + 1 = 3$, $u_3 = 2u_2 + 1 = 7$, $u_4 = 2u_3 + 1 = 15$,...
   Montrons par récurrence que $u_n = 2^n - 1$ pour tout $n \geqslant 0$.
   - **Initialisation.** Pour $n = 0$, on a bien $u_0 = 0 = 2^0 - 1$.
   - **Hérédité.** Fixons $n \geqslant 0$ et supposons $u_n = 2^n - 1$. Alors
     $$u_{n+1} = 2u_n + 1 = 2 \times (2^n - 1) + 1 = 2 \times 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1.$$
     Ainsi la propriété est vraie au rang $n + 1$.
   - **Conclusion.** Par le principe de récurrence, $u_n = 2^n - 1$ quel que soit $n \geqslant 0$.