Année 2022

QCM DE MATHÉMATIQUES - LILLE

Répondre en cochant la ou les cases correspondant à des assertions vraies (et seulement celles-ci).

Ces questions ont été écrites par Arnaud Bodin, Barnabé Croizat et Christine Sacré de l'université de Lille. Relecture de Abdelkader Necer.

Ce travail a été effectué en 2021-2022 dans le cadre d'un projet Hilisit porté par Unisciel.

Ce document est diffusé sous la licence *Creative Commons – BY-NC-SA – 4.0 FR*.
Sur le site Exo7 vous pouvez récupérer les fichiers sources.

Logique

Arnaud Bodin, Barnabé Croizat, Christine Sacré

1 Logique, ensembles et raisonnements

1.1 Logique | Facile

Question 1
Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ Il existe des triangles rectangles.
- ☐ Tout triangle est un triangle rectangle.
- ☐ Tout triangle équilatéral est isocèle.
- ☐ Il existe un triangle équilatéral qui est rectangle.

Question 2
Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ Si $\cos\theta = 0$ alors $\theta = \frac{\pi}{2}$.
- ☐ Si $\theta \in [0, \pi]$ alors $0 \leqslant \cos\theta \leqslant 1$.
- ☐ Si $\theta = 0$ alors $\sin\theta = 0$.
- ☐ Si $\theta \in [0, \pi]$ et $\sin\theta = 0$ alors $(\theta = 0$ ou $\theta = \pi)$.

Question 3
Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ Le chiffre des unités de tout entier pair est 0, 2, 4, 6 ou 8.
- ☐ Le chiffre des unités de tout entier multiple de 3 est 3, 6 ou 9.
- ☐ Le chiffre des unités de tout entier multiple de 4 est 4 ou 8.
- ☐ Le chiffre des unités de tout entier multiple de 5 est 0 ou 5.

Question 4
Soient x, y des nombres réels. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ Si $x = -5$ alors $x^2 = 25$.
- ☐ Si $x^2 = 25$ alors $x = 5$.
- ☐ Si $xy = 0$ alors $x = 0$ ou $y = 0$.
- ☐ Si $xy = 0$ alors $x = 0$ et $y = 0$.

1.2 Logique | Moyen

Question 5
Soit $\mathscr{P}$ une assertion vraie et $\mathscr{Q}$ une assertion fausse. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\mathscr{P}$ ou $\mathscr{Q}$
- ☐ $\mathscr{Q}$ et $\mathscr{P}$
- ☐ $\mathscr{P}$ ou non($\mathscr{Q}$)
- ☐ $\mathscr{Q}$ ou non($\mathscr{P}$)

Question 6
On considère l'assertion "non($\mathscr{P}$) et $\mathscr{Q}$". Quand est-ce que cette assertion est vraie ?

- ☐ Si $\mathscr{P}$ vraie et $\mathscr{Q}$ vraie.
- ☐ Si $\mathscr{P}$ vraie et $\mathscr{Q}$ fausse.
- ☐ Si $\mathscr{P}$ fausse et $\mathscr{Q}$ vraie.
- ☐ Si $\mathscr{P}$ fausse et $\mathscr{Q}$ fausse.

Question 7
Soit $n \geqslant 3$ un entier. On considère l'implication :

$$\text{"}n \text{ nombre premier} \implies n \text{ est impair".}$$

Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ L'implication réciproque est "n est pair $\implies$ n est un nombre premier".
- ☐ La contraposée est "n est pair $\implies$ n n'est pas nombre premier".
- ☐ Si l'implication est vraie alors l'implication réciproque l'est aussi.
- ☐ Si l'implication est vraie alors sa contraposée l'est aussi.

Question 8
Soit x un réel. On considère l'implication :

$$\text{"}x^2 > 0 \implies x > 0\text{".}$$

Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ L'implication réciproque est "$x > 0 \implies x^2 > 0$".
- ☐ La contraposée est "$x > 0 \implies x^2 > 0$".
- ☐ Si l'implication est fausse alors l'implication réciproque l'est aussi.
- ☐ Si l'implication est fausse alors sa contraposée l'est aussi.

Question 9
On considère l'implication :

$$\text{"tu prépares un repas} \implies \text{je viens chez toi".}$$

Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ L'implication réciproque est "je viens chez toi $\Longrightarrow$ tu ne prépares pas de repas".
- ☐ La contraposée est "je ne viens pas chez toi $\Longrightarrow$ tu ne prépares pas de repas".
- ☐ Si l'implication est vraie alors l'implication réciproque l'est aussi.
- ☐ Si l'implication est vraie alors sa contraposée l'est aussi.

Question 10
Quelles sont les assertions vraies, quel que soit $x > 0$, un réel strictement positif ?

- ☐ $\exists y > 0 \quad \ln(x) = y$
- ☐ $\exists y > 0 \quad e^x = y$
- ☐ $\exists y > 0 \quad \ln(y) = x$
- ☐ $\exists y > 0 \quad e^y = x$

1.3 Logique | Difficile

Question 11
Pour quelles phrases, l'assertion est vraie si on remplace "??" par "$\exists$", mais est fausse si on remplace "?? " par "$\forall$" ?

- ☐ ?? $n \in \mathbb{N}^* \quad n$ est pair
- ☐ ?? $n \in \mathbb{N}^* \quad n(n+1)$ est pair
- ☐ ?? $n \in \mathbb{N}^* \quad n$ et $n+2$ sont des nombres premiers
- ☐ ?? $n \in \mathbb{N}^*$ si n n'est pas premier alors n admet au moins deux facteurs premiers distincts

Question 12
Soit $x \in \mathbb{R}$. Quelles sont les assertions vraies si on remplace "......" par " $\Longleftrightarrow$ " ?

- ☐ $x^2 = 0 \quad \ldots\ldots \quad x = 0$
- ☐ $x^2 = 1 \quad \ldots\ldots \quad x = 1$
- ☐ $x < 0 \quad \ldots\ldots \quad \frac{1}{x} > 0$
- ☐ $0 < x < 1 \quad \ldots\ldots \quad \frac{1}{x} > 1$

Question 13
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ désigne une fonction. Pour les phrases suivantes dire si la négation proposée est correcte.

- ☐ La négation de "Il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = 0$" est "Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) \neq 0$".
- ☐ La négation de "Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) = 0$" est "Il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \neq 0$".
- ☐ La négation de "Il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \geqslant 0$" est "Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) < 0$".
- ☐ La négation de "Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) > 0$" est "Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) \leqslant 0$".

Question 14
Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour quelles phrases, l'assertion est vraie si on remplace "??" par "$\exists$", mais est fausse si on remplace "?? " par "$\forall$" ?

- ☐ ?? $x \in \mathbb{R} \quad x^2 > 0$

- ☐ ?? $x \in \mathbb{R} \quad x^2 - 2x + 1 \geqslant 0$
- ☐ ?? $x \in \mathbb{R} \quad x^2 - 2x + 1 = 0$
- ☐ ?? $x \in \mathbb{R} \quad x^2 \leqslant 0$

Question 15
Soit $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ deux assertions telles que "$\mathscr{P} \implies \mathscr{Q}$" soit vraie, et "non($\mathscr{P}$) $\implies$ non($\mathscr{Q}$)" soit aussi vraie. On a alors :

- ☐ "$\mathscr{Q} \implies \mathscr{P}$" est vraie.
- ☐ "$\mathscr{P} \iff \mathscr{Q}$" est vraie.
- ☐ "$\mathscr{Q} \implies$ non($\mathscr{P}$)" est vraie.
- ☐ "$\mathscr{P} \implies$ non($\mathscr{Q}$)" est vraie.

Question 16
En 1761, le mathématicien suisse Lambert, ami d'Euler, démontre l'implication $\mathscr{I}$: "$x \in \mathbb{Q} \implies \tan(x) \notin \mathbb{Q}$". Il remarque ensuite que $1 = \tan(\frac{\pi}{4})$. Qu'en conclut-il ?

- ☐ D'après $\mathscr{I}$, $\tan(\frac{\pi}{4}) \notin \mathbb{Q}$.
- ☐ D'après la contraposée de $\mathscr{I}$, $\tan(\frac{\pi}{4}) \notin \mathbb{Q}$.
- ☐ D'après la contraposée de $\mathscr{I}$, $\frac{\pi}{4} \in \mathbb{Q}$.
- ☐ D'après la contraposée de $\mathscr{I}$, $\frac{\pi}{4} \notin \mathbb{Q}$.

Question 17
Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} \quad y = e^x$
- ☐ $\forall y \in \mathbb{R}\ \exists x \in \mathbb{R} \quad y = e^x$
- ☐ $\forall y \in \mathbb{R}\ \exists x > 0 \quad y = e^x$
- ☐ $\forall y > 0\ \exists x \in \mathbb{R} \quad y = e^x$

1.4 Ensembles | Facile

Question 18
Quels sont les ensembles ayant au moins 4 éléments ?

- ☐ $\varnothing$
- ☐ $[0,2] \cap [1,3]$
- ☐ $\{0,3\} \cap \{1,3\}$
- ☐ $\mathbb{N} \setminus \{0,1,2,3\}$

Question 19
Quels sont les ensembles qui contiennent l'intervalle $[0,2]$?

- ☐ $[-3,3] \cap]-1,5]$
- ☐ $\mathbb{R} \setminus]1,3[$

- ☐ $]0,1[\cup]1,2]$
- ☐ $\{0,1,2\}$

Question 20
Soit la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x^2+2$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ L'image de -2 est 6.
- ☐ Un antécédent de 18 est -5.
- ☐ La valeur 2 admet plusieurs images.
- ☐ La valeur 18 admet plusieurs antécédents.

Question 21
Soient $A=\{1,2,3,4\}$ et $B=\{0,1,2\}$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ $A\cup B$ a 7 éléments.
- ☐ $A\cap B=\{1,2\}$
- ☐ $A\setminus B=\{0,3,4\}$
- ☐ $B\setminus A=\{0\}$

Question 22
Quels sont les ensembles qui contiennent l'intervalle $[-1,1]$?

- ☐ $[-3,1]\cap]-2,5]$
- ☐ $\mathbb{R}\setminus]1,3[$
- ☐ $[-1,0[\cup]0,2]$
- ☐ $\{-1,0,1\}$

Question 23
Soit la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x^2-2$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ L'image de -2 est -6.
- ☐ Un antécédent de 7 est -3.
- ☐ La valeur -2 admet plusieurs images.
- ☐ La valeur 7 admet plusieurs antécédents.

Question 24
Soit la fonction réelle définie par $f(x)=2x$. Soit $x\in\mathbb{R}$. On a :

- ☐ $(f\circ f)(x)=4x^2$
- ☐ $(f\circ f)(x)=4x$
- ☐ $(f\circ f)\circ f(x)=6x$
- ☐ $(f\circ f\circ f)(x)=8x^3$

Question 25
Soient les ensembles $A = [1,3]$ et $B = \{0,1,2,3\}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $B \subset A$
- ☐ $A \subset B$
- ☐ $A \setminus B =]1,3[$
- ☐ $A \cap B = \{1,2,3\}$

1.5 Ensembles | Moyen

Question 26
Soient A, B deux parties d'un ensemble E. Quelles sont les affirmations vraies (quel que soit le choix de A et B) ?

- ☐ $A \cup B \ \subset\ A \cap B$
- ☐ $A \cap B \ \subset\ A \cup B$
- ☐ $A \setminus B \ \subset\ A$
- ☐ $A \setminus B \ \subset\ B$

Question 27
Les fonctions suivantes sont-elles définies sur l'ensemble associé ?

- ☐ $x \mapsto \ln(|x-3|)$ sur $\mathbb{R}$
- ☐ $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ sur $[-1,1]$
- ☐ $x \mapsto \frac{1}{x^2-4}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$
- ☐ $x \mapsto \frac{1}{\sin(\pi x)}$ sur $\mathbb{R}^*$

Question 28
Soient f, g, h des fonctions définies par

$$f(x) = x^2 - 3x \qquad g(x) = 2x+1 \qquad h(x) = \frac{x}{x-1}.$$

Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ $(f \circ g)(x) = 4x^2 - 2x + 4$
- ☐ $(g \circ f)(x) = 2x^2 + 5$
- ☐ $(h \circ f)(x) = \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 - \frac{3x}{x-1}$
- ☐ $(g \circ h)(x) = \frac{3x-1}{x-1}$

Question 29
Les fonctions suivantes sont-elles définies sur l'ensemble associé ?

- ☐ $x \mapsto \ln(|x+1|)$ sur $\mathbb{R}$
- ☐ $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$
- ☐ $x \mapsto \frac{x}{1-x^2}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
- ☐ $x \mapsto \tan(x)$ sur $]\frac{\pi}{2}, \pi[$

Question 30
Soient f, g, h des fonctions définies par

$$f(x) = x^2 + x \qquad g(x) = 2x - 1 \qquad h(x) = \frac{1}{x+1}.$$

Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ $(f \circ g)(x) = 4x^2 - 2x$
- ☐ $(g \circ f)(x) = 2x^2 + 2x$
- ☐ $(h \circ f)(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$
- ☐ $(g \circ h)(x) = \frac{1}{2x}$

Question 31
Parmi ces ensembles, quels sont ceux qui sont inclus dans $\{0, 1, 2\}$?

- ☐ $\{x \in \mathbb{R} \mid x(x-2) = 0\}$
- ☐ $\{x \in \mathbb{R} \mid e^x = 1\}$
- ☐ $\{x > 0 \mid \ln(x) = 1\}$
- ☐ $[0, 3] \cap \{x \in \mathbb{R} \mid (x+2)^2 = 4\}$

Question 32
Soit l'ensemble $A = \{-1, 0, 1\}$ et la fonction réelle donnée par $f(x) = x^2 - 1$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\forall x \in A \quad f(x) = 0$
- ☐ $\exists x \in A \quad f(x) = 0$
- ☐ f est bijective de A dans son image $f(A)$.
- ☐ $\forall x \in A \quad f(x) \in A$

Question 33
Soient les fonctions réelle définies par $f(x) = 3x + 2$ et $g(x) = ax + b$. Pour quelle(s) valeur(s) des réels a et b a-t-on $g \circ f(x) = 6x + 7$?

- ☐ $a = 1$ et $b = 3$
- ☐ $a = 1$ et $b = 5$
- ☐ $a = 2$ et $b = 3$
- ☐ $a = 2$ et $b = 5$

1.6 Ensembles | Difficile

Question 34
Soit E un ensemble. Pour A et B deux parties de E, on définit l'ensemble

$$\Delta(A, B) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ $\Delta(A,B)=\Delta(B,A)$
- ☐ Si $B=\varnothing$ alors $\Delta(A,B)=\varnothing$.
- ☐ Si A et B sont disjoints alors $\Delta(A,B)=A\cup B$.
- ☐ Si $B\subset A$ alors $\Delta(A,B)=A\setminus B$.

Question 35
Les fonctions f et g définies par les expressions suivantes sont-elles bijections réciproques l'une de l'autre ? (On ne se préoccupera pas des ensembles de départ et d'arrivée.)

- ☐ $f(x)=\exp(2x)$ et $g(x)=\ln(\frac{1}{2}x)$
- ☐ $f(x)=\cos(x-1)$ et $g(x)=\sin(x+1)$
- ☐ $f(x)=\frac{1}{1+x}$ et $g(x)=\frac{1-x}{x}$
- ☐ $f(x)=\sqrt{2x+1}$ et $g(x)=\frac{1}{2}x^2-1$

Question 36
Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Quelles sont les affirmations vraies (quel que soit le choix de A et B) ?

- ☐ $(A\cap B)\cup(A\setminus B)=A$
- ☐ $(A\cap B)\cup(A\setminus B)=B$
- ☐ $(A\cap B)\cup(A\setminus B)=A\cup B$
- ☐ $(A\cap B)\cup(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=A\cup B$

Question 37
Soit E un ensemble. Pour deux parties A et B de E, on définit $\Delta(A,B)=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$. Quelles sont les affirmations vraies (quel que soit le choix de A et B) ?

- ☐ Si $A=B$, $\Delta(A,B)=\varnothing$.
- ☐ $A\cup B\subset\Delta(A,B)$
- ☐ $A\cap B\subset\Delta(A,B)$
- ☐ $\Delta(A,B)=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$

Question 38
Les fonctions f et g définies par les expressions suivantes sont-elles bijections réciproques l'une de l'autre ? (On ne se préoccupera pas des ensembles de départ et d'arrivée.)

- ☐ $f(x)=\exp(-3x)$ et $g(x)=-\frac{1}{3}\ln(x)$
- ☐ $f(x)=\cos(x+1)$ et $g(x)=\frac{1}{\cos(x)}-1$
- ☐ $f(x)=\frac{x}{1+x}$ et $g(x)=\frac{x}{1-x}$
- ☐ $f(x)=\sqrt{x+1}$ et $g(x)=x^2+1$

Question 39
Soit la fonction réelle définie par $f(x)=x^2-x-2$. Pour quelle fonction u a-t-on $f\circ u(x)=9(x^2+x)$?

- ☐ $u(x)=9x$

- ☐ $u(x) = 3x + 2$
- ☐ $u(x) = -3x$
- ☐ $u(x) = 9x + 2$

1.7 Raisonnements | Facile

Question 40
Pour montrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel une preuve classique utilise :

- ☐ Un raisonnement par contraposition.
- ☐ Un raisonnement par disjonction.
- ☐ Un raisonnement par l'absurde.
- ☐ Un raisonnement par récurrence.

Question 41
Pour montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on a $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$, quelle est la démarche la plus adaptée ?

- ☐ On fixe x, on fait une récurrence sur n.
- ☐ On fixe n, on fait une récurrence sur x.
- ☐ Par l'absurde on suppose $(1+x)^n < 1 + nx$.
- ☐ Par disjonction des cas n pair/n impair.

Question 42
On voudrait montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $2^{n-1} \leqslant n^n$. Quel type de raisonnement vous parait adapté ?

- ☐ Un raisonnement par contraposition.
- ☐ Un raisonnement par disjonction : n pair/n impair.
- ☐ Un raisonnement par l'absurde.
- ☐ Un raisonnement par récurrence.

Question 43
Soit x un réel. On définit une suite par $u_0 = x$ et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = xu_n$.

- ☐ On montre par récurrence sur n que $u_n = x^n$ pour tout entier n.
- ☐ On montre par récurrence sur x que $u_n = x^n$ pour tout entier n.
- ☐ On montre par récurrence sur n que $u_n = x^{n+1}$ pour tout entier n.
- ☐ On montre par récurrence sur x que $u_n = x^{n+1}$ pour tout entier n.

Question 44
On commence une démonstration par l'absurde avec la rédaction suivante : "Supposons que $\log_{10}(3) \in \mathbb{Q}$. Alors on peut écrire $\log_{10}(3) = \frac{p}{q}$ avec ...". Que cherche-t-on à démontrer ?

- ☐ $\log_{10}(3) \in \mathbb{Q}$

- ☐ $\log_{10}(3) \notin \mathbb{Q}$
- ☐ $\log_{10}(3) \in \mathbb{R}$
- ☐ $\log_{10}(3) \notin \mathbb{R}$

1.8 Raisonnements | Moyen

Question 45
On souhaite prouver par récurrence, pour tout $n \geqslant 0$, une proposition $\mathscr{P}_n$. Après avoir prouvé $\mathscr{P}_0$, quelle rédaction du démarrage de l'étape d'hérédité convient ?

- ☐ Soit $n \geqslant 0$. Je prouve $\mathscr{P}_1$.
- ☐ Soit $n \geqslant 0$. Je suppose $\mathscr{P}_n$ vraie et je montre $\mathscr{P}_{n+1}$.
- ☐ Soit $n \geqslant 0$. Je suppose $\mathscr{P}_n$ vraie pour tout n et je montre $\mathscr{P}_{n+1}$.
- ☐ Soit $n \geqslant 0$. Je suppose $\mathscr{P}_{n+1}$ vraie et je montre $\mathscr{P}_n$.

Question 46
Pour montrer que $\sqrt{3}$ est un nombre irrationnel, je commence une démonstration par l'absurde en écrivant :

- ☐ Je suppose $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$ et je cherche une contradiction.
- ☐ Je suppose $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ et je cherche une contradiction.
- ☐ Je suppose $\sqrt{3} \notin \mathbb{R}$ et je cherche une contradiction.
- ☐ Je suppose que $\sqrt{3}$ n'existe pas et je cherche une contradiction.

Question 47
Quel type de raisonnement est adapté pour montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers ?

- ☐ Au cas par cas : on étudie $n = 2$, $n = 3$, $n = 5$,...
- ☐ Par récurrence sur n parcourant l'ensemble des nombres premiers.
- ☐ Par l'absurde en supposant qu'il n'existe qu'un nombre fini de nombres premiers.
- ☐ C'est une propriété que l'on ne sait pas démontrer.

Question 48
Pour montrer que les solutions réelles de l'équation $|x + 1| = 2$ sont 1 et -3, on peut utiliser :

- ☐ Un raisonnement par contraposition.
- ☐ Un raisonnement par disjonction des cas.
- ☐ Un raisonnement par l'absurde.
- ☐ Un raisonnement par récurrence.

Question 49
Soient a et b deux nombres réels. On considère la proposition suivante : "si $a+b$ est irrationnel, alors a est irrationnel ou b est irrationnel". Comment puis-je montrer cette affirmation par contraposée ?

- ☐ Je prends deux rationnels a et b et je montre que $a + b$ est rationnel.

- ☐ Je prends deux irrationnels a et b et je montre que $a+b$ est irrationnel.
- ☐ Je prends un irrationnel et j'essaie de l'écrire sous la forme $a+b$ avec a et b irrationnels.
- ☐ Je prends deux rationnels a et b et je montre que $a+b$ est irrationnel.

Question 50

Téo et Théa jouent à un jeu de société. Téo est proche de la victoire ; il doit lancer un dé et Théa remarque avec raison que : "si Téo fait 4, alors il gagne le jeu". Quelles sont les affirmations certaines ?

- ☐ Si Téo fait 3, alors il n'aura pas gagné.
- ☐ Si Téo gagne, c'est qu'il a fait 4.
- ☐ Si Téo ne gagne pas, c'est qu'il n'a pas fait 4.
- ☐ Si Téo gagne fait 5, il perd.

1.9 Raisonnements | Difficile

Question 51

Pour montrer que $3^n > 3n$ pour des entiers n naturels suffisamment grands, je fais une preuve par récurrence. Je peux commencer l'initialisation avec :

- ☐ $n=0$
- ☐ $n=1$
- ☐ $n=2$
- ☐ $n=3$

Question 52

Pour montrer une implication $\mathscr{P} \implies \mathscr{Q}$ par contraposition :

- ☐ Je suppose $\mathscr{P}$ et je montre $\mathscr{Q}$.
- ☐ Je suppose $\mathscr{Q}$ et je montre $\mathscr{P}$.
- ☐ Je suppose non($\mathscr{P}$) et je montre non($\mathscr{Q}$).
- ☐ Je suppose non($\mathscr{Q}$) et je montre non($\mathscr{P}$).

Question 53

Pour démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|x-2| \leqslant x^2 - x + 2$.

- ☐ Je distingue les cas $x \geqslant 0$ et $x < 0$.
- ☐ Je distingue les cas $x \geqslant 2$ et $x < 2$.
- ☐ Je suis amené à vérifier $x^2 - x + 2 \geqslant 0$.
- ☐ Je suis amené à vérifier $x^2 - 2x + 4 \geqslant 0$.

Question 54

Pour montrer que $4^n > 20n$ pour des entiers n naturles suffisamment grands je fais une preuve par récurrence. Je peux commencer l'initialisation avec :

- ☐ $n=0$

- ☐ $n=1$
- ☐ $n=2$
- ☐ $n=3$

Question 55

Pour démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|x+1| \leqslant x^2+2$.

- ☐ Je distingue les cas $x \geqslant 0$ et $x < 0$.
- ☐ Je distingue les cas $x \geqslant -1$ et $x < -1$.
- ☐ Je suis amené à vérifier $x^2 - x + 1 \geqslant 0$.
- ☐ Je suis amené à vérifier $x^2 + x + 3 \geqslant 0$.

Question 56

Soit $n \geqslant 2$ un entier. Que pensez-vous du raisonnement par récurrence suivant : on note $\mathscr{P}_n$ la propriété "n points distincts quelconques dans le plan sont toujours alignés".

Initialisation : pour $n=2$, la propriété est vraie. En effet, deux points distincts du plan sont toujours alignés.

Hérédité : soit n un entier naturel quelconque supérieur ou égal à deux. Supposons la propriété $\mathscr{P}_n$ vraie. Soient $n+1$ points quelconques du plan, $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$, tous distincts. D'après l'hypothèse de récurrence, les n points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont alignés. Ils le sont donc sur la droite (A_2A_n). De même, les n points $A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$ sont alignés. Ils le sont donc également sur la droite (A_2A_n). On en déduit donc que les $n+1$ points sont tous sur la droite (A_2A_n), donc ils sont alignés. La propriété $\mathscr{P}_{n+1}$ est donc vraie, d'où la propriété est héréditaire.

En conclusion, on a montré par récurrence que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 2$: n points distincts du plan sont toujours alignés.

- ☐ Le raisonnement par récurrence est juste donc le résultat est juste.
- ☐ Le raisonnement par récurrence est juste mais le résultat est faux.
- ☐ Il y a une erreur dans l'étape d'hérédité.
- ☐ Il y a une erreur dans l'étape d'initialisation.