Arithmétique – Partie 2 : Théorème de Bézout

Exercice 1.

Soit $a = 84$ et $b = 75$. Calculer $d = \text{pgcd}(a, b)$ à l'aide de l'algorithme d'Euclide, puis déterminer des coefficients de Bézout $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $au + bv = d$.
Même exercice avec $a = 624$ et $b = 108$.

Indications 1.

Les coefficients de Bézout s'obtiennent par remontée de l'algorithme d'Euclide.

Correction 1.

1. Calculons $\text{pgcd}(84, 75)$ par l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{array}{rcllllll} 84 & = & 75 & \times & 1 & + & 9 \\ 75 & = & 9 & \times & 8 & + & \boxed{3} \\ 9 & = & 3 & \times & 3 & + & 0 \end{array}$$

   Ainsi $\text{pgcd}(84, 75) = 3$.
   Maintenant nous reprenons ces égalités en partant de la fin (avant-dernière ligne) :

$$\boxed{3} = 75 - 9 \times 8$$

   On va remplacer le 9 de cette égalité.
   La première ligne fournit l'égalité :

$$9 = 84 - 75 \times 1$$

   Donc

$$\boxed{3} = 75 - \big(84 - 75 \times 1\big) \times 8$$

   On garde précieusement les entiers 84 et 75 et on ne cherche pas à simplifier, on factorise juste :

$$\boxed{3} = 84 \times (-8) + 75 \times 9$$

   Ainsi $u = -8$ et $v = 9$ conviennent. C'est une bonne idée de faire une vérification rapide.

2. Calculons $\text{pgcd}(624, 108)$.

$$\begin{array}{rcllllll} 624 & = & 108 & \times & 5 & + & 84 \\ 108 & = & 84 & \times & 1 & + & 24 \\ 84 & = & 24 & \times & 3 & + & \boxed{12} \\ 24 & = & 12 & \times & 2 & + & 0 \end{array}$$

   Ainsi $\text{pgcd}(624, 108) = 12$.
   Remontons ces égalités, tout d'abord l'avant-dernière ligne donne le pgcd :

$$\boxed{12} = 84 - 24 \times 3$$

   Mais par la ligne au-dessus on a

$$24 = 108 - 84 \times 1$$

On remplace 24 dans l'égalité ci-dessus :

$$\boxed{12} = 84 - \big(108 - 84 \times 1\big) \times 3$$

On factorise (sans trop simplifier) :

$$\boxed{12} = 108 \times (-3) + 84 \times 4$$

La première ligne donne :

$$84 = 624 - 108 \times 5$$

ce qui nous donne

$$\boxed{12} = 108 \times (-3) + \big(624 - 108 \times 5\big) \times 4$$

On factorise pour obtenir :

$$\boxed{12} = 624 \times 4 + 108 \times (-23)$$

Ainsi les coefficients de Bézout sont $u = 4$ et $v - 23$.

Exercice 2.

Nous allons montrer que « Deux entiers consécutifs sont toujours premiers entre eux. »

1. *Première méthode.* On considère deux entiers consécutifs notés n et $n+1$. Montrer que si d divise n et $n+1$ alors nécessairement $d = 1$.
2. *Seconde méthode.* Soit $a = n$ et $b = n+1$. Trouver $u, v \in \mathbb{Z}$ (très simples) tels que $au + bv = 1$. Conclure.

Indications 2.

Pour la première méthode considérer une différence. Pour la seconde méthode, utiliser la variante du théorème de Bézout.

Correction 2.

1. Si d divise n et $n+1$ alors d divise aussi la différence $(n+1) - n$ (qui vaut 1), donc d divise 1. Ainsi $d = 1$ (ou $d = -1$) et $\mathrm{pgcd}(n, n+1) = 1$.
2. Avec $u = -1$ et $v = +1$ on a $nu + (n+1)v = 1$. Par la variante du théorème de Bézout « a et b sont premiers entre eux $\iff$ il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $au + bv = 1$ », cela implique que n et $n+1$ sont premiers entre eux.

Exercice 3.

Soit $\alpha \in \mathbb{Z}$ un entier fixé que l'on cherchera à déterminer par la suite. Pour $k \in \mathbb{Z}$, on pose : $N_1(k) = 7k + 11$ et $N_2(k) = 2k + \alpha$.

1. Déterminer deux entiers u, v tels que le nombre $uN_1(k) + vN_2(k)$ ne dépende pas de l'entier k.
2. En déduire une valeur de α pour obtenir $\mathrm{pgcd}(N_1(k), N_2(k)) = 1$ pour tout entier k.
3. Application : en déduire $\mathrm{pgcd}(95, 27)$ d'une part, et $\mathrm{ppcm}(361, 103)$ d'autre part.

Indications 3.

On cherche "des bons coefficients" pour obtenir une relation de Bézout traduisant le fait que $N_1(k)$ et $N_2(k)$ sont premiers entre eux ! Ensuite, on peut utiliser le lien entre pgcd et ppcm...

Correction 3.

1. En prenant $u = 2$ et $v = -7$, on obtient l'égalité :

$$uN_1(k) + vN_2(k) = 2(7k+11) + (-7)(2k+\alpha) = 22 - 7\alpha$$

   Cette quantité ne dépend donc plus de l'entier k. (On aurait aussi pu prendre $u = -2$ et $v = 7$).

2. Si l'on fixe α tel que $uN_1(k) + vN_2(k) = 1$, le théorème de Bézout nous garantira l'obtention de $\text{pgcd}(N_1(k), N_2(k)) = 1$ pour tout entier k. On va donc fixer :

$$22 - 7\alpha = 1 \iff \alpha = 3$$

3. On remarque que pour $k = 12$, on obtient :

$$N_1(12) = 7 \times 12 + 11 = 95 \qquad ; \qquad N_2(12) = 2 \times 12 + 3 = 27$$

   D'après ce qui précède, on sait donc que $\text{pgcd}(N_1(12), N_2(12)) = \text{pgcd}(95, 27) = 1$.
   On a ensuite pour $k = 50$:

$$N_1(50) = 7 \times 50 + 11 = 361 \qquad ; \qquad N_2(50) = 2 \times 50 + 3 = 103$$

   D'après nos résultats précédents, on sait que $\text{pgcd}(N_1(50), N_2(50)) = \text{pgcd}(361, 103) = 1$. Par conséquent, on a :

$$\text{ppcm}(361, 103) = \frac{361 \times 103}{1} = 37\,183$$