Équations différentielles – Partie 4 : $y' = ay + b$ et $y' = ay + f$

Exercice 1.

Pour chacune des équations différentielles (E) suivantes,

— déterminer l'équation homogène associée,

— trouver les solutions $y_h(x)$ de cette équation homogène,

— vérifier que la fonction $y_p(x)$ est bien solution de l'équation différentielle (E),

— en déduire toutes les solutions de (E).

1. $y' = -y + x^2 + 1$, $y_p(x) = x^2 - 2x + 3$
2. $y' = y + 2\cos(x)$, $y_p(x) = \sin(x) - \cos(x)$
3. $y' = 3y + xe^{2x}$, $y_p(x) = -(x+1)e^{2x}$

Indications 1.

Pour une équation différentielle $(E) : y' = ay + f$, l'équation homogène est $y' = ay$. Si l'on note les solutions de l'équation homogène y_h, et une solution particulière de (E) y_p, alors toutes les solutions de (E) sont les fonctions $y_h + y_p$.

Correction 1.

1. $(E_h) : y' = -y$, $y_h(x) = Ce^{-x}$, $(E) : y' = -y + x^2 + 1$, dont $y_p(x) = x^2 - 2x + 3$ est une solution particulière puisque $y_p'(x) = 2x - 2 = -(x^2 - 2x + 3) + x^2 + 1 = -y_p(x) + x^2 + 1$. Les solutions générales de (E) sont les $y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ce^{-x} + x^2 - 2x + 3$ où C est une constante réelle.
2. $(E_h) : y' = y$, $y_h(x) = Ce^{x}$, $(E) : y' = y + 2\cos(x)$, dont $y_p(x) = \sin(x) - \cos(x)$ est une solution particulière. Les solutions générales de (E) sont les $y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ce^{x} + \sin(x) - \cos(x)$ où C est une constante réelle.
3. $(E_h) : y' = 3y$, $y_h(x) = Ce^{3x}$, $(E) : y' = 3y + xe^{2x}$, dont $y_p(x) = -(x+1)e^{2x}$ est une solution particulière. Les solutions générales de (E) sont les $y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ce^{3x} - (x+1)e^{2x}$ où C est une constante réelle.

Exercice 2.

Pour chacune des équations différentielles (E) suivantes,

— déterminer l'équation homogène associée,

— trouver les solutions $y_h(x)$ de cette équation homogène,

— trouver une solution particulière $y_p(x)$ en vous aidant des indications,

— en déduire toutes les solutions de (E).

1. $y' + 2y = 5$, chercher une solution particulière sous la forme d'une fonction constante.
2. $2y' - 3y = e^{-x}$, chercher une solution particulière sous la forme ke^{-x} où k est une constante à déterminer.
3. $y' = y + x^2$, chercher une solution particulière sous la forme $ax^2 + bx + c$.

Indications 2.

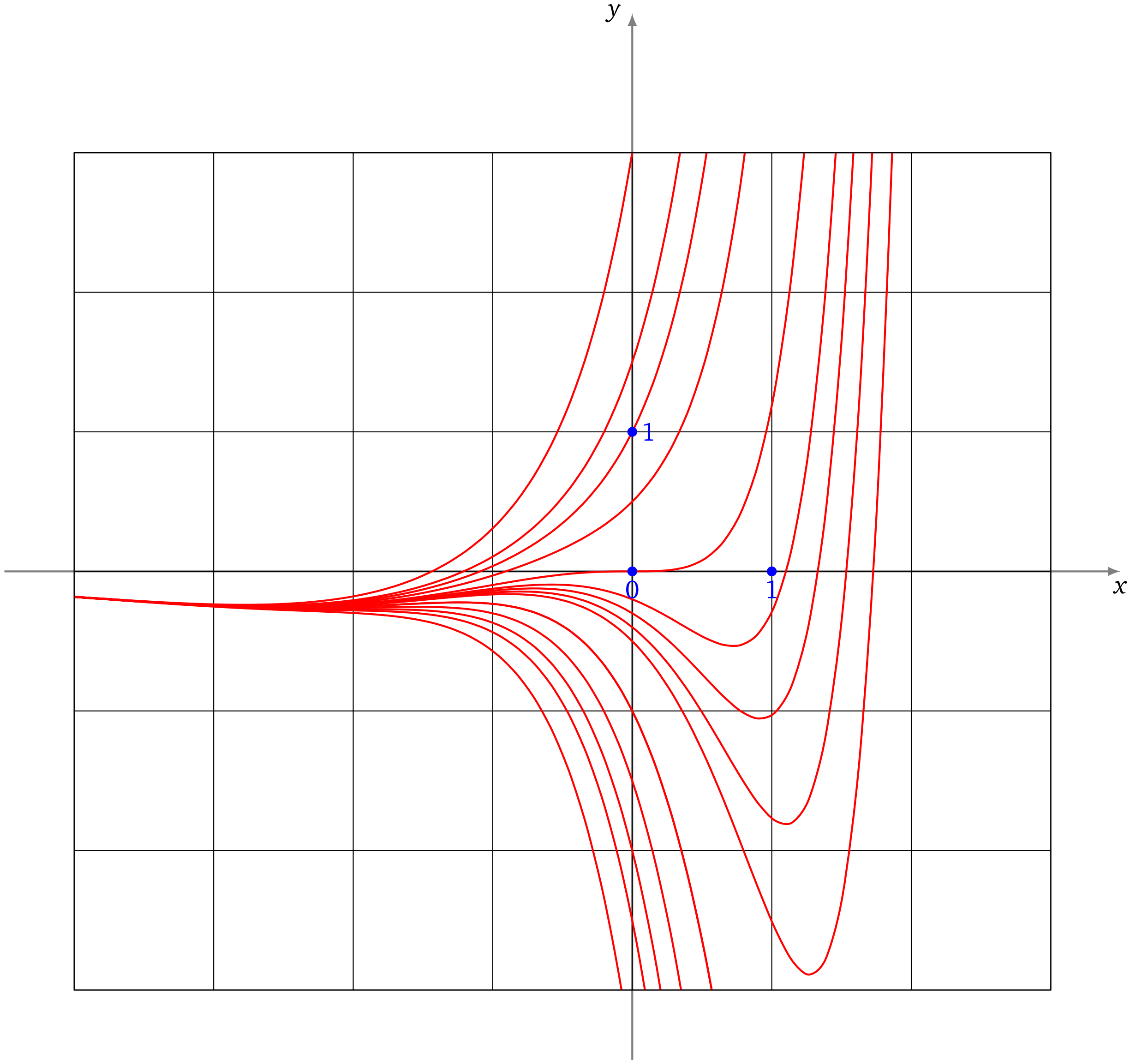
Pour une équation différentielle (E) : $y' = ay + f$, l'équation homogène est $y' = ay$. Si l'on note les solutions de l'équation homogène y_h, et une solution particulière de (E) y_p, alors toutes les solutions de (E) sont les fonctions $y_h + y_p$.

Correction 2.

1. Équation homogène : $y' + 2y = 0$ soit $y' = -2y$.
   Solutions de l'équation homogène : $y_h(x) = Ce^{-2x}$.
   Solution particulière constante : $y_p(x) = \frac{5}{2}$.
   Solutions générales : $y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ce^{-2x} + \frac{5}{2}$ où C est une constante réelle.
2. Équation homogène : $2y' - 3y = 0$ soit $y' = \frac{3}{2}y$.
   Solutions de l'équation homogène : $y_h(x) = Ce^{\frac{3}{2}x}$.
   Solution particulière : $y_p(x) = -\frac{1}{5}e^{-x}$.
   Solutions générales : $y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ce^{\frac{3}{2}x} - \frac{1}{5}e^{-x}$ où C est une constante réelle.
3. Équation homogène : $y' = y$.
   Solutions de l'équation homogène ; $y_h(x) = Ce^x$.
   Solution particulière : $y_p(x) = -x^2 - 2x - 2$.
   Solutions générales : $y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ce^x - x^2 - 2x - 2$ où C est une constante réelle.

Exercice 3.

Le dessin représente quelques solutions de l'équation différentielle (E) : $y' = 2y + x^2e^x$.



1. Tracer la tangente à la courbe solution qui passe par le point $(0,0)$. Retrouver son équation par le calcul grâce à l'équation différentielle.
2. Tracer la tangente à la courbe solution qui passe par le point $(0,1)$. Retrouver son équation par le calcul grâce à l'équation différentielle.
3. Tracer la tangente à la courbe solution qui passe par le point $(1,-1)$. Retrouver son équation par le calcul grâce à l'équation différentielle.
4. Déterminer les solutions $y_h(x)$ de l'équation homogène.
5. Déterminer une solution particulière $y_p(x)$ sous la forme $(ax^2+bx+c)e^x$.
6. En déduire toutes les solutions de (E).

Correction 3.

1. Par lecture graphique il semble que la tangente en $(0,0)$ soit horizontale. Vérifions-le par le calcul. La solution f dont le graphe passe par $(0,0)$ vérifie $f(0)=0$. Comme f vérifie l'équation différentielle $y'=2y+x^2e^x$, alors $f'(0)=2f(0)+0^2\cdot e^0=0$, donc la tangente est bien horizontale. Son équation est $y=0$.
2. La solution g dont le graphe passe par $(0,1)$ vérifie $g(0)=1$. Comme g vérifie l'équation différentielle alors $g'(0)=2g(0)+0^2\cdot e^0=2$, donc la pente de la tangente est 2 et son équation est $y=2x+1$.

3. La solution h dont le graphe passe par $(1,-1)$ vérifie $h(1)=-1$. Comme h vérifie l'équation différentielle alors $h'(1)=2h(1)+1^2\cdot e^1=e-2$, donc la pente de la tangente est $e-2$ et comme cette droite passe par $(1,-1)$ son équation est $y=(e-2)(x-1)-1$, c'est-à-dire $y=(e-2)x+1-e$.
4. L'équation homogène est $(E_h): y'=2y$, dont les solutions sont $y_h(x)=Ce^{2x}$, pour toute constante réelle C.
5. Cherchons une solution particulière sous la forme $y_p(x)=(ax^2+bx+c)e^x$. Alors $y_p'(x)=(ax^2+(2a+b)x+b+c)e^x$.

$$
\begin{aligned}
& y_p(x) \text{ solution de } (E) \\
\iff & y_p'(x)=2y_p(x)+x^2e^x \text{ pour tout } x\in\mathbb{R} \\
\iff & (ax^2+(2a+b)x+b+c)e^x=2(ax^2+bx+c)e^x+x^2e^x \\
\iff & e^x\big((a+1)x^2+(b-2a)x+(c-b)\big)=0 \\
\iff & (a+1)x^2+(b-2a)x+(c-b)=0 \qquad \text{car } e^x\neq 0 \\
\iff & a+1=0 \quad \text{et} \quad b-2a=0 \quad \text{et} \quad c-b=0 \\
\iff & a=-1, b=-2, c=-2
\end{aligned}
$$

   Ainsi $y_p(x)=(-x^2-2x-2)e^x=-(x^2+2x+2)e^x$ est une solution particulière.
6. Les solutions générales de (E) sont $y(x)=y_h(x)+y_p(x)=Ce^{2x}-(x^2+2x+2)e^x$ où C est une constante réelle.