Logique et raisonnements – Partie 2 : Ensembles

Savoir.

- ☐ Maîtriser le vocabulaire des ensembles : élément, inclusion, complémentaire, union, intersection.
- ☐ Maîtriser le vocabulaire des fonctions : image, antécédent, bijection.

Savoir-faire.

- ☐ Savoir calculer des unions, intersections, complémentaires d'ensembles.
- ☐ Savoir déterminer un domaine de définition.
- ☐ Savoir calculer une composition et montrer qu'une fonction est bijective.

Ensembles

— Un **ensemble** est une collection d'objets distincts que l'on appelle des **éléments**. On note la liste des éléments qui définissent un ensemble en utilisant des accolades : $\{\ldots\}$.

— On peut définir un ensemble soit par *extension*, en énumérant l'ensemble de ses éléments. Ainsi l'ensemble des nombres apparaissant sur les faces d'un dé est $\{1,2,3,4,5,6\}$.

— On peut également définir un ensemble par *compréhension* en décrivant ses éléments par une ou plusieurs propriétés qui les caractérisent. Dans ce cadre, l'ensemble des entiers pairs peut s'écrire : $\{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

— L'ensemble qui ne comporte aucun élément est appelé **l'ensemble vide** ; on le note $\varnothing$. Un ensemble qui ne comporte qu'un unique élément est appelé un *singleton*. Une *paire* est un ensemble de deux éléments distincts.

— Si un élément e appartient à l'ensemble E, on note : $e \in E$ (on dit aussi que E *contient* e). Dans le cas contraire, on écrit : $e \notin E$.

Inclusion, complémentaire

— **Inclusion.** Si A et B sont deux ensembles, l'écriture $A \subset B$ indique que "*A est inclus dans B*", ce qui signifie que tout élément de A appartient aussi à B. On dit aussi que A est une *partie* ou un *sous-ensemble* de B.

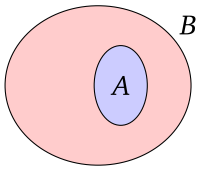
— **Égalité.** Deux ensemble A et B sont égaux s'ils ont exactement les mêmes éléments. D'un point de vue logique, cela équivaut à dire qu'ils sont mutuellement inclus l'un dans l'autre :

$$A = B \iff (\, A \subset B \text{ et } B \subset A\,)$$

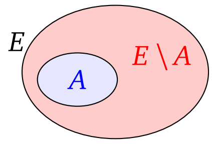
— **Complémentaire.** Si A est une partie d'un ensemble E, on définit le *complémentaire de A*, noté $E \setminus A$ (ou encore $\overline{A}$), comme l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A :

$$E \setminus A := \{x \in E \mid x \notin A\}$$

On représente souvent les opérations sur les ensembles par de petits schémas appelés des *diagrammes de Venn*. En voici deux exemples pour l'inclusion et le complémentaire de deux ensembles.



$A \subset B$



Complémentaire de A

Exemple. Soit $E = \{1,2,3,4,5\}$ et $A = \{2,5\}$.

— L'ensemble E contient 5 éléments ; A contient 2 éléments.

— Tout élément de A appartient à E, donc $A \subset E$.

— Le complémentaire de A dans E est $E \setminus A = \{1,3,4\}$.

Autres exemples.

— L'ensemble des nombres pairs $P = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$. Son complémentaire dans $\mathbb{Z}$ est : $\mathbb{Z} \setminus P = \{2k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Il s'agit bien sûr des entiers impairs !

— $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, que l'on note souvent $\mathbb{R}^\star$, est l'ensemble des nombres réels non nuls.

Les ensembles que nous connaissons et utilisons le plus fréquemment sont les ensembles de nombres. Il y a ainsi par exemple :

— L'ensemble des nombres premiers $\mathscr{P}$

— L'ensemble des nombres entiers naturels $\mathbb{N}$

— L'ensemble des nombres entiers relatifs $\mathbb{Z}$

— L'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}^\star\}$

— L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$

— L'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$

On a d'ailleurs les inclusions :

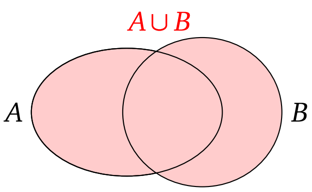
$$\mathscr{P} \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

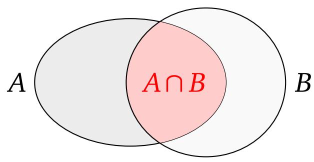
Union, intersection

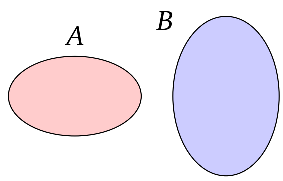
— **L'union de** A **et** B est l'ensemble des éléments qui sont soit dans A, soit dans B (et éventuellement dans les deux à la fois). On la note : $\boldsymbol{A \cup B}$ définie par $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$.

— **L'intersection de** A **et** B est l'ensemble des éléments qui sont à la fois dans A et dans B. On la note : $\boldsymbol{A \cap B}$ définie par $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$.

— Si $A \cap B = \varnothing$, on dit que les ensembles A et B sont **disjoints**.







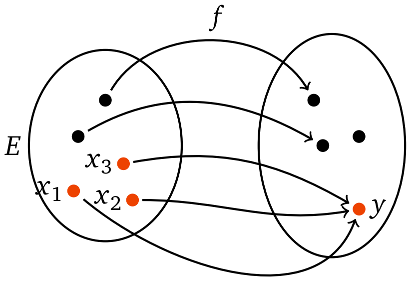
Ensembles disjoints

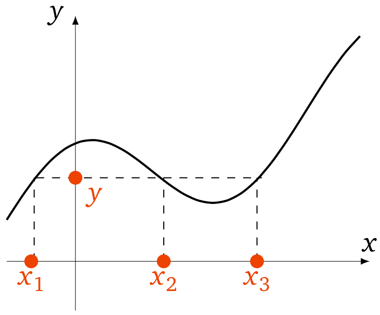
Exemple. Si $A = \{1,2,3\}$ et $B = \{2,4\}$, alors on a :

$$A \cup B = \{1,2,3,4\} \qquad A \cap B = \{2\}.$$

Fonctions

— Une **fonction** (ou une **application**) d'un ensemble E vers un ensemble F, est la donnée pour chaque élément x de E d'un unique élément y de F. On écrit alors cela : $f(x) = y$. L'élément y s'appelle l'**image** de x, et l'élément x est un **antécédent** de y.





— On note cette application "$f : E \longrightarrow F,\ x \longmapsto f(x)$".

— L'ensemble E s'appelle le **domaine de définition** de f (il est parfois noté $\mathscr{D}_f$).

— Ce sera souvent à vous de déterminer le domaine de définition (le plus grand possible). Par exemple l'expression $f(x) = \sqrt{x}$ définit une fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$. En effet pour avoir le droit d'écrire $\sqrt{x}$ il faut que x soit positif ou nul.

Exercice. Déterminer les domaines de définition (dans $\mathbb{R}$) des fonctions définies par les expressions suivantes :

— $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

— $f(x) = \sqrt{x+3}$

— $f(x) = \ln(3x-7)$

— $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x^2-2}}$

Composition

Composition Soient E, F, G trois ensembles, et $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ deux applications. Alors on peut définir la **composée** de f par g, notée $g \circ f$, comme étant l'application : $g \circ f : E \to G$ définie par :

$$\boxed{(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)}$$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & F \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[r] & G \end{tikzcd}$$

Exemple. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ et soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \cos(2x+1)$, alors $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction donnée par :

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(x^2) = \cos(2x^2+1)$$

Attention $f \circ g$ est aussi définie mais est une toute autre application. Son expression est donnée par :

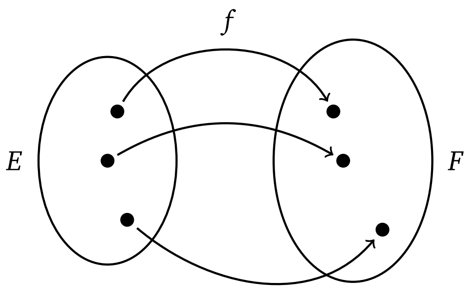
$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f\big(\cos(2x+1)\big) = \big(\cos(2x+1)\big)^2.$$

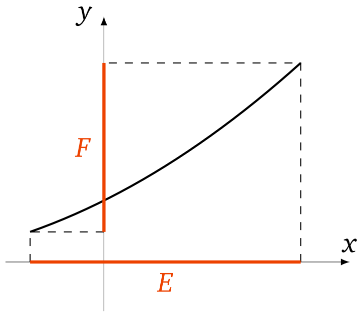
Exemple. Soit $f : \mathbb{R}_+^\star \to \mathbb{R}_+^\star$ définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g : \mathbb{R}_+^\star \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \frac{x-2}{x+3}$ (rappel : $\mathbb{R}_+^\star =]0, +\infty[$). Alors

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{1}{x} - 2}{\frac{1}{x} + 3} \underbrace{=}_{\times x > 0} \frac{1-2x}{1+3x}$$

Bijection

— **Bijection.** On dit que l'application $f : E \to F$ est **bijective** si chaque élément de F possède un antécédent par f, et que cet antécédent est de plus unique. Dans ce cas, l'application f établit une correspondance parfaite entre les éléments de E et les éléments de F.





— Si $f : E \to F$ est bijective, alors l'application $g : F \to E$ qui à tout élément de y de F associe son unique antécédent x par f dans E est bien définie et est également bijective. Elle est notée f^{-1} et s'appelle la **bijection réciproque** de f.

— On a alors $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ (pour tout $x \in E$) et aussi $(f \circ f^{-1})(y) = y$ (pour tout $y \in F$).

— Exemple. Soit $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$, $x \mapsto x^2$. Sa bijection réciproque est la fonction racine carrée : $f^{-1} : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$, $x \mapsto \sqrt{x}$. On a bien $(\sqrt{x})^2 = x$ et $\sqrt{x^2} = x$, pour tout $x \geqslant 0$.

— Exponentielle et logarithme sont bijections réciproques l'une de l'autre : $\exp(\ln(x)) = x$ (pour tout $x > 0$) et $\ln(\exp(x)) = x$ (pour tout $x \in \mathbb{R}$).