Logique, ensembles et raisonnements – Partie 2

Exercice 1.

Remplacer les pointillés par le symbole le plus adapté parmi $\in$, $\notin$, $\subset$, $\supset$.

1. $[3,5]$ ...... $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x \leqslant 7\}$
2. 2 ...... $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geqslant 5\}$
3. $\pi = 3.14\ldots$ ...... $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
4. $[1,9]$ ...... $[1,4] \cup [5,9]$
5. $\{0\}$ ...... $\mathbb{R}_+$
6. 0 ...... $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$
7. $[-7,5] \cap [-2,8]$ ...... $[-1,1]$

Indications 1.

Rappels : $\in$ "appartient à" ; $\notin$ "n'appartient pas à" sont utilisés pour des éléments, $\subset$ "est contenu dans", $\supset$ "contient" sont utilisés pour des ensembles.

Correction 1.

1. $[3,5] \subset \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x \leqslant 7\}$ car on rappelle que $[3,5] = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leqslant x \leqslant 5\}$.
2. $2 \notin \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geqslant 5\}$
3. $\pi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
4. $[1,9] \supset [1,4] \cup [5,9]$
5. $\{0\} \subset \mathbb{R}_+$ (et pas "$\in$" car $\{0\}$ est un ensemble, ce n'est pas l'élément 0).
6. $0 \notin \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ ($0 \in \mathbb{N}$ donc on le retire ici de $\mathbb{Z}$).
7. $\big([-7,5] \cap [-2,8]\big) \supset [-1,1]$

Exercice 2.

Déterminer le domaine de définition de la fonction $x \mapsto f(x)$ dans chacun des cas suivants :

1. $f(x) = \sqrt{-x+3}$
2. $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2-1}$
3. $f(x) = \exp(x^2+1)$
4. $f(x) = \ln(5x+8)$
5. $f(x) = \ln\big((x-1)(x+2)\big)$
6. $f(x) = \sqrt{x^2+3x-2}$

Indications 2.

L'expression $\sqrt{x}$ est définie pour $x \geqslant 0$. L'expression $\frac{1}{x}$ est définie pour $x \neq 0$. L'expression $\ln(x)$ est définie pour $x > 0$.

Correction 2.

On désigne par $\mathscr{D}_f$ l'ensemble de définition de f.

1. $f(x) = \sqrt{-x+3}$. On doit avoir $-x+3 \geqslant 0$, c'est-à-dire $3 \geqslant x$, donc $\mathscr{D}_f =]-\infty, 3]$.
2. $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2-1}$. Les dénominateurs ne doivent pas s'annuler. Les dénominateurs s'annulent lorsque $x = 0$ ou $x^2 - 1 = 0$, c'est-à-dire $x \in \{0, 1, -1\}$. Ainsi
$$\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0, 1, -1\} =]-\infty, -1[\cup]-1, 0[\cup]0, 1[\cup]1, +\infty[.$$
3. $f(x) = \exp(x^2+1)$. Cette expression est définie pour tout x réel : $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.
4. $f(x) = \ln(5x+8)$. On doit avoir $5x+8 > 0$, c'est-à-dire $x > -\frac{8}{5}$, donc $\mathscr{D}_f =]-\frac{8}{5}, +\infty[$.
5. $f(x) = \ln\big((x-1)(x+2)\big)$.
On étudie le signe de $(x-1)(x+2)$ (tableau de signes immédiat plutôt que développement et étude du signe d'un trinôme selon ses racines), qui est strictement positif pour $x > 1$ et aussi pour $x < -2$.
Donc $\mathscr{D}_f =]-\infty, -2[\cup]1, +\infty[$.
6. $f(x) = \sqrt{x^2+3x-2}$. On étudie le signe de x^2+3x-2. Pour cela on cherche d'abord les solutions de $x^2+3x-2 = 0$. Les racines sont $x_1 = \frac{-3-\sqrt{17}}{2}$ et $x_2 = \frac{-3+\sqrt{17}}{2}$. Le trinôme x^2+3x-2 est positif à l'extérieur des racines, donc $\mathscr{D}_f =]-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty[$.

Exercice 3.

Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par $f(x) = 2x+1$ et $g(x) = x^2 - 3x$.

1. Déterminer l'expression de la fonction $f \circ g$.
2. Déterminer l'expression de la fonction $g \circ f$.
3. Montrer que $(g \circ f)(\frac{-1}{2}) = 0$ et en déduire, pour $x \in \mathbb{R}$, la factorisation de l'expression $(g \circ f)(x)$.

Indications 3.

$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$
$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$
Si un polynôme $P(X)$ s'annule en $X = \alpha$, alors il se factorise par $(X - \alpha)$.

Correction 3.

1. $f \circ g$
$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f(x^2-3x) = 2(x^2-3x)+1 = 2x^2-6x+1.$$
2. $g \circ f$
$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(2x+1) = (2x+1)^2 - 3(2x+1) = (4x^2+4x+1)-(6x+3) = 4x^2-2x-2.$$
3. Calculons $(g \circ f)(\frac{-1}{2})$.
D'une part $f(-\frac{1}{2}) = 2(-\frac{1}{2})+1 = 0$. Donc $(g \circ f)(\frac{-1}{2}) = g(0) = 0^2 - 3 \times 0 = 0$.
D'autre part, on a calculé que $(g \circ f)(x) = 4x^2-2x-2$. Donc on vient de prouver que $-\frac{1}{2}$ est une racine de $4x^2-2x-2$. On en déduit $4x^2-2x-2 = a(x+\frac{1}{2})(x-b)$. Par identification on trouve $a = 4$ et $b = 1$. Conclusion : $4x^2-2x-2 = 4(x+\frac{1}{2})(x-1)$.

Exercice 4.

On veut déterminer la bijection réciproque de la fonction f définie par :
$$f(x) = \frac{2x-1}{x-3}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Résoudre l'équation $y = f(x)$, c'est-à-dire déterminer x en fonction de y. Indication : exprimer x sous la forme $x = \frac{ay+b}{cy+d}$. Quelle valeur y_0 de y faut-il exclure ?
3. On définit $g(y) = \frac{ay+b}{cy+d}$ (où a, b, c, d ont été déterminés à la question précédente). Montrer que g est la bijection réciproque de f, c'est-à-dire

$$(g \circ f)(x) = x \qquad \text{pour tout } x \neq 3$$

et

$$(f \circ g)(y) = y \qquad \text{pour tout } y \neq y_0.$$

Indications 4.

On calcule x en fonction de y. En isolant x, on doit trouver : $x = \frac{3y-1}{y-2}$.

Correction 4.

1. Le domaine de définition de $f(x) = \frac{2x-1}{x-3}$ est $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.
2. Fixons y et résolvons l'équation $y = f(x)$, avec $x \neq 3$, on a les équivalences :

$$\begin{aligned} y = f(x) &\iff y = \frac{2x-1}{x-3} \iff (x-3)y = 2x-1 \\ &\iff xy - 2x = 3y - 1 \iff x(y-2) = 3y-1 \\ &\iff x = \frac{3y-1}{y-2} \qquad \text{et } y \neq 2 \end{aligned}$$

Ces calculs sont valables pour $x \neq 3$ et $y \neq 2$. (On pourrait vérifier que l'équation $f(x) = 2$ n'a pas de solution.)
3. Définissons $g(y) = \frac{3y-1}{y-2}$ comme fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Vérifions que g est la bijection réciproque de f.
D'une part, avec $x \neq 3$,

$$g \circ f(x) = g\left(\frac{2x-1}{x-3}\right) = \frac{3\frac{2x-1}{x-3} - 1}{\frac{2x-1}{x-3} - 2} = \frac{3(2x-1)-(x-3)}{2x-1-2(x-3)} = \frac{5x}{5} = x$$

D'autre part, avec $y \neq 2$,

$$f \circ g(y) = f\left(\frac{3y-1}{y-2}\right) = \frac{2\frac{3y-1}{y-2} - 1}{\frac{3y-1}{y-2} - 3} = \frac{2(3y-1)-(y-2)}{3y-1-3(y-2)} = \frac{5y}{5} = y$$

Cela prouve que $f : \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R} \setminus \{2\}$ et $g : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R} \setminus \{3\}$ sont des bijections réciproques l'une de l'autre.