Équations différentielles – Partie 3 : $y' = ay$

Savoir.

- ☐ Connaître la formule de la solution d'une équation différentielle $y' = ay$.
- ☐ Comprendre ce qu'est une condition initiale d'une équation différentielle.
- ☐ Comprendre qu'il y a unicité d'une solution lorsqu'on impose une condition initiale.

Savoir-faire.

- ☐ Savoir résoudre une équation différentielle $y' = ay$.
- ☐ Savoir trouver la solution vérifiant une condition initiale donnée.

Un exemple

Une équation différentielle a en général une infinité de fonctions solutions.
Considérons par exemple l'équation différentielle :

$$y'(x) = y(x) \tag{1}$$

Alors les solutions de (1) sont les fonctions :

$$y(x) = Ce^x \qquad \text{où } C \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, chaque valeur de la constante C fournit une fonction solution que l'on note y_C : par exemple pour $C = 1$, $y_1(x) = e^x$ est solution, pour $C = -2$, $y_{-2}(x) = -2e^x$ est solution, pour $C = 0$, $y_0(x) = 0$ est solution...
Pour n'avoir qu'une seule solution, on peut imposer une condition initiale

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) & \text{équation différentielle} \\ y(0) = 3 & \text{condition initiale} \end{cases} \tag{2}$$

Les solutions de l'équation différentielle sont de la forme $y(x) = Ce^x$, mais on veut $y(0) = 3$. Comme $y(0) = Ce^0 = C$, on doit avoir $C = 3$. Ainsi l'unique solution du problème (2) est la fonction $y(x) = 3e^x$.

Exercice. Considérons l'équation différentielle avec condition initiale :

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) \\ y(1) = 2 \end{cases} \tag{3}$$

Trouver l'unique solution de ce problème. (Attention ce n'est pas $y(x) = 2e^x$!)

$y' = ay$

Considérons l'équation différentielle $y' = ay$ où $a \in \mathbb{R}$ est une constante fixée. Cette équation s'appelle une *équation différentielle homogène linéaire d'ordre* 1 *à coefficients constants*.

Théorème. Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ sont les fonctions définies par $f(x) = Ce^{ax}$ où $C \in \mathbb{R}$ est une constante.

Exemples.

— $y' = 6y$: ici $a = 6$ donc les solutions sont les fonctions $x \mapsto Ce^{6x}$ quelle que soit la constante C. Il y a donc une infinité de solutions par exemple $x \mapsto 8e^{6x}$ (pour $C = 8$), $x \mapsto \pi e^{6x}$ (pour $C = \pi$), $x \mapsto 0$ (pour $C = 0$)...

— $2y' + 4y = 0$: cette équation s'écrit aussi $y' = -2y$. Ici $a = -2$ (attention au signe !), les solutions sont les fonctions Ce^{-2x} où C est une constante réelle.

Condition initiale

Définition

Pour une équation différentielle $y' = ay$, une **condition initiale** c'est le fait d'imposer une égalité du type :

$$y(x_0) = y_0$$

où $x_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0 \in \mathbb{R}$ sont des constantes.

Théorème d'unicité. Une équation différentielle $y' = ay$ avec condition initiale admet une unique solution.

Exemple.

$$y'(x) = 2y(x) \quad \text{et} \quad y(0) = 4$$

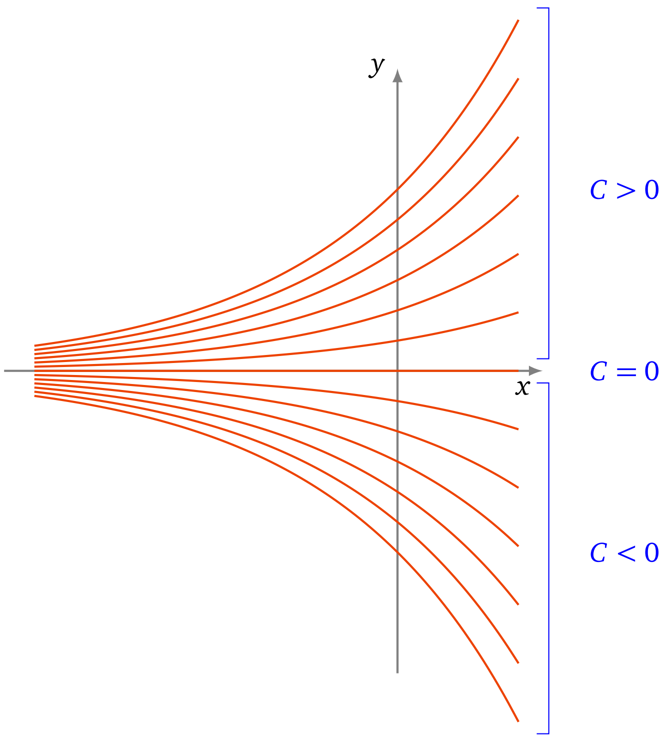
Les solutions de l'équation différentielle $y' = 2y$ sont les fonctions définies par $f(x) = Ce^{2x}$ où $C \in \mathbb{R}$. Mais nous voulons en plus que la fonction solution vérifie la condition initiale $f(0) = 4$. Cela entraîne $Ce^0 = 4$, donc $C = 4$. Ainsi la seule solution au problème est la fonction $f(x) = 4e^{2x}$. Pour se rassurer, c'est une bonne idée de vérifier que $f' = 2f$ et $f(0) = 4$.

Courbes solutions

Une **courbe solution** d'une équation différentielle (E) est le graphe d'une solution de (E).
Pour l'équation différentielle

$$y'(x) = y(x)$$

on sait que les solutions sont les $y(x) = Ce^x$, où $k \in \mathbb{R}$ est une constante. Ci-dessous sont tracés quelques graphes de ces solutions.



Pour une équation $y' = ay$ le théorème d'unicité se reformule ainsi :

$$\boxed{\text{« Par chaque point } (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \text{ passe une et une seule courbe solution. »}}$$

En particulier :

$$\boxed{\text{« Deux courbes solutions ne s'intersectent pas. »}}$$

Exemple. Les solutions de l'équation différentielle $3y' = -y$ sont les

$$f(x) = Ce^{-\frac{1}{3}x} \quad C \in \mathbb{R}.$$

Pour chaque point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, il existe une unique solution y telle que $y(x_0) = y_0$. Le graphe de cette solution est la courbe solution passant par (x_0, y_0).