Année 2022

QCM DE MATHÉMATIQUES - LILLE

Répondre en cochant la ou les cases correspondant à des assertions vraies (et seulement celles-ci).

Ces questions ont été écrites par Arnaud Bodin, Barnabé Croizat et Christine Sacré de l'université de Lille. Relecture de Pascal Romon.

Ce travail a été effectué en 2021-2022 dans le cadre d'un projet Hilisit porté par Unisciel.

Equations différentielles

Arnaud Bodin, Barnabé Croizat, Christine Sacré

1 Equations différentielles

1.1 Primitive | Facile

Question 1
Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Faux] x^3 est une primitive de $3x^2+3$.
- ☐ [Vrai] x^3+3 est une primitive de $3x^2$.
- ☐ [Faux] $\ln(x^2+1)$ est une primitive de $\frac{1}{x^2+1}$.
- ☐ [Vrai] $\sqrt{x}$ est une primitive de $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ (sur $]0,+\infty[$).

Explications : Pour vérifier si une fonction f est une primitive d'une fonction g, on calcule la dérivée de f et on regarde si on obtient bien la fonction g. La dérivée de x^3 et de x^3+3 est $3x^2$. La dérivée de $\ln(x^2+1)$ est $\frac{2x}{x^2+1}$ et non $\frac{1}{x^2+1}$. La dérivée de $\sqrt{x}$ sur $]0,+\infty[$ est bien $\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Question 2
Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Faux] $\cos(x)$ est une primitive de $\sin(x)$.
- ☐ [Vrai] $\exp(x)$ est une primitive de $\exp(x)$.
- ☐ [Vrai] $x^4-3x^3+2x^2-8$ est une primitive de $4x^3-9x^2+4x$.
- ☐ [Faux] $4x^3+x^2-3x+6$ est une primitive de x^4+2x-3.

Explications : Pour vérifier si une fonction f est une primitive d'une fonction g, on calcule la dérivée de f et on regarde si on obtient bien la fonction g. $\cos'(x)=-\sin(x)$; $\exp'(x)=\exp(x)$; $(x^4-3x^3+2x^2-8)'=4x^3-9x^2+4x$; $(4x^3+x^2-3x+6)'=12x^2+2x-3$.

Question 3
Parmi les phrases suivantes, quelles sont les affirmations correctes ?

- ☐ [Vrai] L'opération du calcul de primitives est le contraire de l'opération du calcul de dérivées.
- ☐ [Vrai] L'opération du calcul de dérivées est le contraire de l'opération du calcul de primitives.
- ☐ [Vrai] Deux primitives d'une même fonction sur un intervalle sont égales à une constante près.
- ☐ [Vrai] Si on connaît une primitive d'une fonction, alors on les connaît toutes.

Explications : Tout est vrai ! Les calculs de dérivées et de primitives sont bien réciproques l'un de l'autre, et dès que l'on connaît une primitive F d'une fonction f sur un intervalle, alors toutes les primitives de f sur cet intervalle seront de la forme $F(x)+C$ (où C est une constante).

Question 4
Pour chacune des équations différentielles suivantes, la fonction donnée est-elle solution ?

- ☐ [Faux] Pour $y' = \sin(x)$ la fonction $f(x) = \cos(x)$ est solution.
- ☐ [Faux] Pour $y' = e^{2x}$ la fonction $f(x) = e^{2x} + 1$ est solution.
- ☐ [Faux] Pour $y' = \ln(x)$ la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ est solution.
- ☐ [Vrai] Pour $y' = \frac{1}{e^x}$ la fonction $f(x) = 1 - e^{-x}$ est solution.

Explications : Pour $y' = \sin(x)$ la fonction $f(x) = -\cos(x)$ est solution. Pour $y' = e^{2x}$ la fonction $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + 1$ est solution. C'est pour $y' = \frac{1}{x}$ que $f(x) = \ln(x)$ est solution. Pour $y' = \frac{1}{e^x} = e^{-x}$ la fonction $f(x) = 1 - e^{-x}$ est bien solution puisque $f'(x) = -(-e^{-x}) = e^{-x} = \frac{1}{e^x}$.

1.2 Primitive | Moyen

Question 5
On considère la fonction $f : x \mapsto 2e^{-2x} - 3$. Quelles sont les affirmations exactes ?

- ☐ [Faux] f est une primitive de $-e^{-2x} - 3x$ sur $\mathbb{R}$.
- ☐ [Vrai] f est une primitive de $-4e^{-2x}$ sur $\mathbb{R}$.
- ☐ [Vrai] f est la primitive de $-4e^{-2x}$ sur $\mathbb{R}$ valant -1 en $x = 0$.
- ☐ [Faux] f est la dérivée de $x \mapsto -e^{-2x}$

Explications : Pour vérifier si une fonction f est une primitive d'une fonction g, on calcule la dérivée de f et on regarde si on obtient bien la fonction g. La dérivée de e^{-2x} est $-2e^{-2x}$ donc $f'(x) = -4e^{-2x}$. De plus $f(0) = 2e^0 - 3 = 2 - 3 = -1$.

Question 6
Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Faux] $x \mapsto \ln(x)$ est une primitive de $x \mapsto 1/x$ sur $\mathbb{R}$.
- ☐ [Faux] $x \mapsto \ln(x)$ est une primitive de $x \mapsto 1/x$ sur $]-\infty, 0[$.
- ☐ [Vrai] $x \mapsto \ln(x)$ est une primitive de $x \mapsto 1/x$ sur $]0, +\infty[$.
- ☐ [Vrai] $x \mapsto \ln(-x)$ est une primitive de $x \mapsto 1/x$ sur $]-\infty, 0[$.

Explications : La fonction ln n'est définie et dérivable que sur $]0, +\infty[$. Pour tout x de $]0, +\infty[$, $(\ln(x))' = 1/x$; pour tout x de $]-\infty, 0[$, la fonction $x \mapsto \ln(-x)$ est bien définie et dérivable, et on a $(\ln(-x))' = -1/-x = 1/x$.

Question 7
Soit F une primitive d'une fonction f et G une primitive d'une fonction g sur un intervalle I. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Faux] Si $f = g$ alors $F = G$.
- ☐ [Vrai] Si $F = G$ alors $f = g$.
- ☐ [Faux] Si $f = g^2$ alors $F = G^2$.
- ☐ [Vrai] Si $F = G + C$ (où C est une constante) alors $f = g$.

Explications : Si $f = g$ alors $F = G + C$ (où C est une constante). On rappelle que $F' = f$ et $G' = g$, donc si $F = G + C$ alors en dérivant l'égalité on obtient $F' = f = (G + C)' = G' + 0 = g$. Remarquez par ailleurs que les primitives de x^2 sont $\frac{x^3}{3} + C$ (où C est une constante) : ce ne sont les carrés des primitives de x (qui sont $\frac{x^2}{2} + \widetilde{C}$, où $\widetilde{C}$ est une constante).

Question 8
Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Faux] Une primitive de x^k est $\frac{x^k}{k}$.
- ☐ [Faux] Une primitive de $\ln(x)$ est $\frac{1}{x}$.
- ☐ [Vrai] Une primitive de $\frac{1}{\sqrt{x}}$ est $2\sqrt{x}$.
- ☐ [Faux] Une primitive de e^{ax} est e^{ax} (où $a > 0$ est une constante).

Explications : Une primitive de x^k est $\frac{x^{k+1}}{k+1}$. C'est $\ln(x)$ qui est une primitive de $\frac{1}{x}$, l'inverse est faux. Oui, une primitive de $\frac{1}{\sqrt{x}}$ est $2\sqrt{x}$ puisque $(2\sqrt{x})' = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Enfin, une primitive de e^{ax} est $\frac{1}{a}e^{ax}$.

1.3 Primitive | Difficile

Question 9
Parmi les fonctions suivantes, laquelle est une primitive de $\sqrt{x}$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$?

- ☐ [Faux] $2x\sqrt{x}$
- ☐ [Faux] $\frac{1}{2\sqrt{x}}$
- ☐ [Faux] $x^2\sqrt{x}$
- ☐ [Vrai] $\frac{2}{3}x\sqrt{x}$

Explications : La dérivée de $x\sqrt{x}$ est $\sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{(\sqrt{x})^2}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ donc $\frac{2}{3}x\sqrt{x}$ est une primitive de $\sqrt{x}$. Remarquez d'ailleurs que $x\sqrt{x}$ peut aussi s'écrire $x^{3/2}$, ce qui permet d'obtenir différemment sa dérivée : $(x^{3/2})' = \frac{3}{2}x^{3/2-1} = \frac{3}{2}x^{1/2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$. Par ailleurs, les dérivées de $x^2\sqrt{x}$ et de $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ donnent respectivement $\frac{5}{2}x\sqrt{x}$ et $\frac{-1}{4x\sqrt{x}}$, qui sont donc bien distinctes de $\sqrt{x}$.

Question 10
Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Vrai] $x^2e^{1/x}$ est une primitive de $(2x - 1)e^{1/x}$ sur $]-\infty, 0[$.
- ☐ [Faux] $\ln(|x|)$ est une primitive de $1/x$ sur $\mathbb{R}$.
- ☐ [Faux] $\ln(x^2 + x + 1)$ est une primitive de $\frac{2x}{x^2+x+1}$ sur $\mathbb{R}$.
- ☐ [Vrai] $e^x \ln(x)$ est une primitive de $e^x \ln(x) + e^x/x$ sur $]0, +\infty[$.

Explications : On calcule que $(x^2e^{1/x})' = 2xe^{1/x} + x^2(-1/x^2)e^{1/x} = (2x-1)e^{1/x}$. Ensuite, la fonction $x \mapsto \ln(x^2 + x + 1)$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ puisque $x^2 + x + 1 > 0$ pour tout nombre réel x. Mais on a : $(\ln(x^2 + x + 1))' = \frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1} = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas définie en $x = 0$: il est donc impossible de lui déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ ($x \mapsto \ln(|x|)$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ seulement sur $\mathbb{R}^*$). Enfin, on calcule que $(e^x \ln(x))' = (e^x)' \ln(x) + e^x(\ln(x))' = e^x \ln(x) + e^x \cdot \frac{1}{x}$.

Question 11
Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Vrai] Une primitive de $\sin(x)e^{\cos(x)}$ est $-e^{\cos(x)}$.
- ☐ [Faux] Une primitive de $\cos(x^3+x)$ est $\sin(x^3+x)$.
- ☐ [Vrai] Une primitive de $\ln(x)$ est $x\ln(x)-x$ (sur $]0,+\infty[$).
- ☐ [Vrai] Une primitive de $4x^3+4x$ est $(x^2+1)^2$.

Explications : Une primitive de $\sin(x)e^{\cos(x)}$ est bien $-e^{\cos(x)}$ puisque $(-e^{\cos(x)})' = -(-\sin(x))e^{\cos(x)} = \sin(x)e^{\cos(x)}$. La dérivée de $\sin(x^3+x)$ est $(3x^2+1)\cos(x^3+x)$, donc $\sin(x^3+x)$ n'est pas une primitive de $\cos(x^3+x)$. Oui une primitive de $\ln(x)$ est $x\ln(x)-x$ puisque la dérivée de cette-dernière donne bien $\ln(x)+x\cdot\frac{1}{x}-1=\ln(x)$. Enfin, la dérivée de $(x^2+1)^2$ est $2\times 2x\times(x^2+1)=4x^3+4x$, donc $(x^2+1)^2$ est bien une primitive de $4x^3+4x$.

Question 12
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle. Soit F une primitive de f. C désigne une constante. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Vrai] Si $f(x)=0$ sur I alors $F(x)=C$.
- ☐ [Faux] Si $f(x)=x$ alors $F(x)=x^2+C$.
- ☐ [Faux] Si $f(x)\times\cos(x)=1$ alors $F(x)=\frac{1}{\sin(x)}+C$.
- ☐ [Faux] Si $f(\ln(x))=0$ alors $F(x)=e^x+C$.

Explications : Si f est la fonction nulle, alors F est une fonction constante. Si $f(x)=x$, alors $F(x)=\frac{1}{2}x^2+C$. Les autres affirmations sont fantaisistes : lorsqu'on dérive $\frac{1}{\sin(x)}+C$ on obtient $\frac{-\cos(x)}{\sin^2(x)}$ qui n'est pas du tout l'inverse de $\cos(x)$. Et si $F(x)=e^x+C$, alors $f(x)=F'(x)=e^x$ ce qui donne $f(\ln(x))=e^{\ln(x)}=x\neq 0$!

1.4 Notion d'équation différentielle | Facile

Question 13
On considère la fonction $f : x \mapsto 2e^{-x}+3$. Parmi les équations différentielles suivantes, quelles sont celles dont f est solution ?

- ☐ [Vrai] $y'=-y+3$
- ☐ [Vrai] $y'=y-4e^{-x}-3$
- ☐ [Faux] $y'=2y+3$
- ☐ [Vrai] $y'=-2e^{-x}$

Explications : Pour vérifier si une fonction f est solution d'une équation différentielle du premier ordre, on remplace y par $f(x)$, y' par $f'(x)$ et on regarde si l'égalité est vraie pour tout x (égalité entre fonctions). Ici $f'(x)=-2e^{-x}$. Donc $f'(x)=-f(x)+3=f(x)-4e^{-x}-3$ pour tout réel x. Par contre $2f(x)+3$ n'est pas la même fonction que $f'(x)$.

Question 14
Parmi les fonctions suivantes, quelles sont celles qui sont solutions de l'équation différentielle $y'=2y-10$.

- ☐ [Vrai] $f : x \mapsto 4e^{2x}+5$

- ☐ [Vrai] $f : x \mapsto e^{2x} + 5$
- ☐ [Faux] $f : x \mapsto 2e^{x} + 5$
- ☐ [Faux] $f : x \mapsto 2x + 5$

Explications : Pour vérifier si une fonction f est solution d'une équation différentielle du premier ordre, on remplace y par $f(x)$, y' par $f'(x)$ et on regarde si l'égalité est vraie pour tout x (égalité entre fonctions). La dérivée de e^{2x} étant $2e^{2x}$, on constate que l'égalité $f'(x) = 2f(x) - 10$ a seulement lieu pour $4e^{2x} + 5$ et $e^{2x} + 5$ parmi les solutions proposées.

Question 15
Parmi les fonctions suivantes quelles sont celles qui sont des solutions de l'équation différentielle $y' = xy$?

- ☐ [Faux] $f(x) = \exp(x^2)$
- ☐ [Vrai] $f(x) = 2\exp(x^2/2)$
- ☐ [Vrai] $f(x) = 0$
- ☐ [Faux] $f(x) = 1$

Explications : On calcule $f'(x)$ dans chaque cas et on observe si elle vérifie l'équation $f'(x) = xf(x)$. C'est le cas pour la fonction définie par $f(x) = 2\exp(x^2/2)$ (dont la dérivée est $f'(x) = 2x\exp(x^2/2)$) et pour $f(x) = 0$ (de dérivée $f'(x) = 0$).

Question 16
Soit la fonction $f(x) = \cos(x)$. De quelle(s) équation(s) différentielle(s) f est-elle solution ?

- ☐ [Faux] $y' = y$
- ☐ [Vrai] $y'' = -y$
- ☐ [Vrai] $y' - y = -\sin(x) - \cos(x)$
- ☐ [Faux] $y'' = -y'$

Explications : D'une part $f'(x) = -\sin(x)$, donc $f'(x) - f(x) = -\sin(x) - \cos(x)$. D'autre part $f''(x) = -\cos(x)$, donc $f'' = -f$. En revanche, on a $f'(x) \neq f(x)$ et $f''(x) \neq -f'(x)$.

1.5 Notion d'équation différentielle | Moyen

Question 17
Soit l'équation différentielle $y' = 2x(y + x) - 1$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Vrai] $y = e^{x^2} - x$ est une solution.
- ☐ [Vrai] Cette équation différentielle n'a pas de solution constante.
- ☐ [Vrai] $y = -x$ est une solution.
- ☐ [Faux] $y = e^{x^2} - x + 1$ est une solution.

Explications : Pour une fonction constante $y = C$, $y' = 0$ et $2x(y + x) - 1 = 2x(C + x) - 1$, ce qui n'est pas la fonction nulle (c'est un polynôme du second degré), donc $y = C$ n'est pas solution. Pour $y = -x$, $2x(y + x) - 1 = -1 = y'$, donc $y = -x$ est solution. Pour $y = e^{x^2} - x$, $2x(y + x) - 1 = 2xe^{x^2} - 1 = y'$ donc $y = e^{x^2} - x$ est une solution. Pour $y = e^{x^2} - x + 1$, $y' = 2xe^{x^2} - 1$ et $2x(y + x) - 1 = 2xe^{x^2} + 2x - 1$ donc $y = e^{x^2} - x + 1$ n'est pas solution.

Question 18
Soit l'équation différentielle $xy' - 3y = 0$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Faux] $x^3 + 1$ est une solution.
- ☐ [Vrai] x^3 est une solution.
- ☐ [Faux] e^{3x} est une solution.
- ☐ [Vrai] La fonction nulle est la seule solution constante.

Explications : Pour une solution constante $y = C$, $y' = 0$ donc $3y = 0$ donc y est la fonction nulle (et réciproquement, la fonction nulle est bien solution). Pour $y = x^3$, $xy' - 3y = x \cdot 3x^2 - 3x^3 = 0$ donc x^3 est solution. Pour $y = x^3 + 1$, $xy' - 3y = x \cdot 3x^2 - 3x^3 - 3 = -3$ donc $x^3 + 1$ n'est pas solution. Pour $y = e^{3x}$, $xy' - 3y = x \cdot 3e^{3x} - 3e^{3x} = 3(x-1)e^{3x}$, ce qui n'est pas la fonction nulle, donc $y = e^{3x}$ n'est pas solution.

Question 19
Soit f une solution de l'équation différentielle $y' = y^2 + 1$. Quelles sont les affirmations vraies sur la fonction f ?

- ☐ [Vrai] f est une fonction croissante.
- ☐ [Faux] f est une fonction décroissante.
- ☐ [Vrai] f' est une fonction positive.
- ☐ [Faux] f peut être une fonction constante.

Explications : Si f est solution de l'équation $y' = y^2 + 1$, alors on a $f'(x) = f^2(x) + 1$ et donc $f'(x) \geqslant 1 > 0$. Ainsi f' est strictement positive, et par conséquent f est strictement croissante.

Question 20
Soit l'équation différentielle $y' - 2xy = 4x$. Quelles sont les affirmations vraies concernant les solutions de cette équation ?

- ☐ [Vrai] $y = -2$ est une solution.
- ☐ [Faux] $y = +2$ est une solution.
- ☐ [Faux] $y = e^{x^2} + 2$ est une solution.
- ☐ [Vrai] $y = e^{x^2} - 2$ est une solution.

Explications : Si $y = C$ est constante, alors $y' = 0$ et on a $0 - 2x \cdot C = 4x$ donc $C = -2$ est la seule solution constante de notre équation différentielle. D'autre part, la dérivée de e^{x^2} étant $2xe^{x^2}$, on vérifie en remplaçant dans l'équation différentielle que $e^{x^2} - 2$ est solution puisqu'alors $y' - 2xy = 2xe^{x^2} - 2x(e^{x^2} - 2) = 4x$. En revanche $e^{x^2} + 2$ n'est pas solution puisque $y' - 2xy = 2xe^{x^2} - 2x(e^{x^2} + 2) = -4x$.

1.6 Notion d'équation différentielle | Difficile

Question 21
Soit f une solution de l'équation différentielle $y' = 2y - x^3$. On sait que la courbe représentative de f passe par le point $A(1, 2)$. Quelle est la pente de sa tangente au point A ?

- ☐ [Faux] -1
- ☐ [Faux] 1

- ☐ [Faux] 2
- ☐ [Vrai] 3

Explications : La pente de la tangente au point $A(1,2)$ est le nombre $f'(1)$. Or on sait que $f(1)=2$ puisque la courbe représentative de f passe par $A(1,2)$. De plus, comme f est solution de l'équation différentielle $y'=2y-x^3$, on a - en considérant cette égalité pour la fonction f et pour $x=1$: $f'(1)=2f(1)-1^3=2\times 2-1=3$.

Question 22
Soit f une solution de l'équation différentielle $y'=y+3x$. On sait de plus que la courbe représentative de f passe par le point $A(-1,2)$. Quelles sont les affirmations exactes ?

- ☐ [Vrai] La pente de la tangente à la courbe de f au point A est -1.
- ☐ [Faux] La pente de la tangente à la courbe de f au point A est 4.
- ☐ [Vrai] La tangente à la courbe de f au point A admet pour équation : $y=-x+1$.
- ☐ [Faux] La tangente à la courbe de f au point A admet pour équation : $y=4x+6$.

Explications : La pente de la tangente au point $A(-1,2)$ est le nombre $f'(-1)$. Or on sait que $f(-1)=2$ puisque la courbe représentative de f passe par $A(-1,2)$. De plus, comme f est solution de l'équation différentielle $y'=y+3x$, en considérant cette égalité pour la fonction f et pour $x=-1$, on a : $f'(-1)=f(-1)+3\times(-1)=2-3=-1$. La pente de la tangente en A est donc -1. Enfin, les coordonnées du point A vérifient l'équation de cette tangente, ce qui permet d'obtenir que l'ordonnée à l'origine vaut bien $+1$ (on sait aussi plus directement que l'équation de la tangente est $y=(-1)(x-(-1))+1=-x+1$).

Question 23
Soit l'équation différentielle $xy'=y-x$ définie pour $x\in]0,+\infty[$. Quelles sont les fonctions solutions de cette équation, quelle que soit la constante C ?

- ☐ [Faux] $f(x)=x-C\ln(x)$
- ☐ [Faux] $f(x)=x-\ln(x)+C$
- ☐ [Vrai] $f(x)=Cx-x\ln(x)$
- ☐ [Faux] $f(x)=x-C$

Explications : Seule la fonction $f(x)=Cx-x\ln(x)$, avec $f'(x)=C-\ln(x)-1$, vérifie l'équation différentielle. On a en effet $xf'(x)=Cx-x\ln(x)-x=f(x)-x$. Pour les autres fonctions proposées, les calculs de $xf'(x)$ et de $f(x)-x$ diffèrent.

Question 24
Soit f une solution de l'équation différentielle $y'=\cos(x)y$, vérifiant $f(\frac{\pi}{3})=3$. On considère la courbe représentative de f. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Faux] La tangente en $x=\frac{\pi}{3}$ a pour équation $y=\frac{3}{2}x+3$.
- ☐ [Vrai] La tangente en $x=\frac{\pi}{3}$ a pour équation $y=\frac{3}{2}(x-\frac{\pi}{3})+3$.
- ☐ [Vrai] La tangente en $x=\frac{\pi}{2}$ est horizontale.
- ☐ [Faux] La tangente en $x=\frac{\pi}{3}$ est horizontale.

Explications : En $x=\frac{\pi}{2}$, par l'équation différentielle on a $f'(\frac{\pi}{2})=0$ (car $\cos\frac{\pi}{2}=0$), donc la tangente est horizontale. En $x=\frac{\pi}{3}$, on obtient $f'(\frac{\pi}{3})=\cos(\frac{\pi}{3})y(\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}\times 3=\frac{3}{2}$, donc la pente de la tangente en $x=\frac{\pi}{3}$ est $\frac{3}{2}$. Cette tangente passe par le point $(\frac{\pi}{3},3)$ donc son équation est $y=\frac{3}{2}(x-\frac{\pi}{3})+3$.

1.7 $y' = ay$ | **Facile**

Question 25
Les solutions de l'équation différentielle $y' = -y$ sont :

- ☐ [Faux] $e^{-x} + C$ avec C constante réelle.
- ☐ [Faux] $e^{x} + C$ avec C constante réelle.
- ☐ [Vrai] Ce^{-x} avec C constante réelle.
- ☐ [Faux] Ce^{x} avec C constante réelle.

Explications : Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ sont les fonctions Ce^{ax} avec C constante réelle. Ici, $a = -1$.

Question 26
Les solutions de l'équation différentielle $y' + 2y = 0$ sont :

- ☐ [Faux] $e^{-2x} + C$ avec C constante réelle.
- ☐ [Faux] $e^{2x} + C$ avec C constante réelle.
- ☐ [Faux] Ce^{2x} avec C constante réelle.
- ☐ [Vrai] Ce^{-2x} avec C constante réelle.

Explications : Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ sont les fonctions Ce^{ax} avec C constante réelle. Ici, $a = -2$ puisque $y' + 2y = 0$ se réécrit comme $y' = -2y$.

Question 27
De quelle(s) équation(s) différentielle(s) $4e^{3x}$ est-elle une solution ?

- ☐ [Vrai] $y' = 3y$
- ☐ [Faux] $3y' = y$
- ☐ [Faux] $y' = 4y$
- ☐ [Faux] $4y' = y$

Explications : Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ sont les fonctions Ce^{ax} avec C constante réelle. Ici, $a = 3$ et $C = 4$.

Question 28
Parmi les fonctions suivantes, quelles sont celles solutions de l'équation différentielle $y' = 3y$?

- ☐ [Faux] $f(x) = 3e^{2x}$
- ☐ [Vrai] $f(x) = 2e^{3x}$
- ☐ [Faux] $f(x) = e^{-3x}$
- ☐ [Faux] $f(x) = e^{-2x}$

Explications : La forme générale des solutions est $y(x) = Ce^{3x}$ où C est une constante réelle.

Question 29
Parmi les fonctions suivantes, quelles sont celles solutions de l'équation différentielle $y' = \frac{1}{e}y$?

- ☐ [Vrai] $f(x) = C\exp(x/e)$

- ☐ [Faux] $f(x) = C\exp(ex)$
- ☐ [Faux] $f(x) = Ce\exp(x)$
- ☐ [Faux] $f(x) = C\frac{\exp(x)}{e}$

Explications : La forme générale des solutions de $y' = ay$ est $y(x) = C\exp(ax) = Ce^{ax}$. Ici $a = \frac{1}{e}$, donc la forme générale des solutions est $y(x) = C\exp(x/e)$.

1.8 $y' = ay$ | Moyen

Question 30
Que peut-on dire des solutions de l'équation différentielle $y' = ay$?

- ☐ [Faux] Ce sont toutes des fonctions croissantes sur $\mathbb{R}$.
- ☐ [Faux] Ce sont toutes des fonctions décroissantes sur $\mathbb{R}$.
- ☐ [Faux] Si $a \geqslant 0$, ce sont des fonctions croissantes sur $\mathbb{R}$.
- ☐ [Vrai] Ce sont toutes des fonctions monotones sur $\mathbb{R}$.

Explications : Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ sont les fonctions Ce^{ax} avec C constante réelle. Si $a \geqslant 0$, ce sont des fonctions croissantes pour $C \geqslant 0$ et décroissantes pour $C \leqslant 0$. Si $a \leqslant 0$, ce sont des fonctions décroissantes pour $C \geqslant 0$ et croissantes pour $C \leqslant 0$. Dans tous les cas, ce sont toutes des fonctions monotones sur $\mathbb{R}$.

Question 31
Soit $f : x \mapsto -2e^{3x}$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Faux] f est la seule solution de l'équation différentielle $y' = 3y$ dont la courbe représentative passe par le point $A(0,3)$.
- ☐ [Faux] f est la seule solution de l'équation différentielle $y' = 3y$ qui tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.
- ☐ [Vrai] f est la seule solution de l'équation différentielle $y' = 3y$ valant -2 en $x = 0$.
- ☐ [Vrai] f est la seule solution de l'équation différentielle $y' = 3y$ dont la dérivée en $x = 0$ est -6.

Explications : Les solutions de l'équation différentielle $y' = 3y$ sont les fonctions $f_C : x \mapsto Ce^{3x}$ avec C constante réelle. $f = f_{-2}$ est donc bien solution de $y' = 3y$. $f_C(0) = C$: la valeur de la constante C correspond à la valeur de la fonction en $x = 0$. Ainsi $f(x) = -2e^{3x}$ est bien la seule solution valant -2 en $x = 0$. Par contre, $f(0) \neq 3$ donc sa courbe représentative ne passe pas par $A(0,3)$. Puisque d'après l'équation différentielle on a $f_C'(0) = 3f_C(0) = 3C$, alors f est la seule solution telle que $f_C'(0) = -6$ car cela impose $C = -2$. Enfin, dès que $C < 0$, Ce^{3x} tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ donc f n'est pas la seule fonction ayant cette propriété.

Question 32
Soit l'équation différentielle $y' + 5y = 0$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Vrai] Les solutions générales sont $y(x) = Ce^{-5x}$.
- ☐ [Faux] Les solutions générales sont $y(x) = Ce^{5x}$.
- ☐ [Faux] La solution vérifiant $y(1) = 0$ est $y(x) = e^{-5x}$.
- ☐ [Faux] La solution vérifiant $y(1) = 0$ est $y(x) = e^{5x}$.

Explications : Les solutions générales sont $y(x) = Ce^{-5x}$. Si $y(1) = 0$ alors $C = 0$ et y est la solution nulle partout.

Question 33
Pour quelles valeurs de a et b la fonction $y(x) = 7e^{-5x}$ est-elle solution de $y' = ay$ avec $y(0) = b$?

- ☐ [Vrai] $a = -5$ et $b = 7$
- ☐ [Faux] $a = 5$ et $b = 7$
- ☐ [Faux] $a = 5$ et $b = 0$
- ☐ [Faux] $a = 0$ et $b = 7$

Explications : La solution de $y' = ay$ vérifiant $y(0) = b$ est $y(x) = be^{ax}$. Donc on identifie : $a = -5$ et $b = 7$.

1.9 $y' = ay$ | Difficile

Question 34
Soit f la solution de l'équation différentielle $y' + 3y = 0$ telle que $f'(0) = -6$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Vrai] La courbe représentative de f passe par $A(0, 2)$.
- ☐ [Faux] La courbe représentative de f passe par $A(0, -6)$.
- ☐ [Faux] f est toujours négative.
- ☐ [Vrai] f est une fonction décroissante sur $\mathbb{R}$.

Explications : Comme f est solution de l'équation différentielle, $f'(0) + 3f(0) = 0$ donc $f(0) = 2$ donc la courbe représentative de f passe par le point de coordonnées $(0, 2)$ et ne passe pas par celui de coordonnées $(0, -6)$. De plus, $f(x) = 2e^{-3x}$ et $f'(x) = -6e^{-3x}$ donc f est toujours positive et f' est toujours négative. Par conséquent f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Question 35
Soit f la solution de l'équation différentielle $y' = 4y$ telle que $f(1) = e^4$.

- ☐ [Vrai] La courbe représentative de f passe par le point $A(1, e^4)$.
- ☐ [Vrai] La courbe représentative de f passe par le point $B(0, 1)$.
- ☐ [Faux] La pente de la tangente à la courbe de f en $x = 1$ est 4.
- ☐ [Faux] On n'a pas assez de données pour déterminer la pente de la tangente à la courbe de f en $x = 0$.

Explications : Les solutions de l'équation différentielle $y' = 4y$ sont les fonctions Ce^{4x} avec C constante réelle. Comme on a $f(1) = e^4$, on obtient que $C = 1$ et donc $f(x) = e^{4x}$. Par conséquent la courbe représentative de f passe par les points A et B. De plus $f'(1) = 4f(1) = 4e^4$ et $f'(0) = 4$, ce qui donne la pente de la tangente à la courbe en $x = 1$ et $x = 0$ respectivement.

Question 36
Soit l'équation différentielle $y' = ay$ avec $a > 0$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Faux] Il n'y a pas de solutions constantes.

- ☐ [Vrai] Il y a une seule solution constante.
- ☐ [Faux] Toute solution vérifie $y(x) \geqslant 0$.
- ☐ [Vrai] Toute solution $y(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $-\infty$.

Explications : Les solutions générales sont $y(x) = Ce^{ax}$. La solution est constante dans le seul cas où $C = 0$ (y est alors la solution partout nulle). Puisque $a > 0$, on sait que Ce^{ax} tend vers 0 lorsque x tend vers $-\infty$. Attention, si $C < 0$ alors la fonction y est strictement négative et décroissante.

Question 37
Soit la solution de l'équation différentielle $y' = 2y$ vérifiant $y(0) = -1$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Vrai] La solution est toujours négative.
- ☐ [Vrai] La solution est une fonction décroissante.
- ☐ [Faux] La pente de la tangente en $x = 0$ vaut 1.
- ☐ [Vrai] La pente de la tangente en $x = 1$ vaut $-2e^2$.

Explications : Les solutions générales sont $y(x) = Ce^{2x}$. Comme $y(0) = -1$ alors $C = -1$. La solution est donc $f(x) = -e^{2x}$. La pente de la tangente en x_0 est donnée par $f'(x_0)$. Comme $f(0) = -1$ alors $f'(0) = -2$, la pente de la tangente en $x = 0$ vaut -2. De façon générale, comme $f(x) = -e^{2x}$, alors $f'(x) = -2e^{2x}$ qui est une fonction toujours négative : ainsi f est une fonction décroissante. La pente de sa tangente en $x = 1$ vaut bien $f'(1) = -2e^2$.

1.10 $y' = ay + b$ et $y' = ay + f$ | Facile

Question 38
Soit l'équation différentielle $2y' + 4y = 3$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Faux] La seule solution constante est $y = 3/2$.
- ☐ [Vrai] La seule solution constante est $y = 3/4$.
- ☐ [Faux] Les solutions sont $Ce^{-4x} - 3$ avec C constante réelle.
- ☐ [Vrai] Les solutions sont $Ce^{-2x} + 3/4$ avec C constante réelle.

Explications : La seule solution constante est $y = 3/4$: c'est ce qu'on retrouve dans l'équation différentielle lorsqu'on cherche y constante avec donc $y' = 0$: l'équation devient $2y = 3/2$ donc $y = 3/4$. On peut réécrire l'équation différentielle $y' = -2y + 3/2$, dont les solutions sont $Ce^{-2x} + 3/4$ avec C constante réelle.

Question 39
Soit l'équation différentielle $3y' = y - 3$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Faux] La seule solution constante est $y = 1$.
- ☐ [Vrai] La seule solution constante est $y = 3$.
- ☐ [Faux] Les solutions sont $Ce^{3x} + 1$ avec C constante réelle.
- ☐ [Vrai] Les solutions sont $Ce^{x/3} + 3$ avec C constante réelle.

Explications : La seule solution constante est $y = 3$: c'est ce qu'on retrouve dans l'équation différentielle lorsqu'on cherche y constante avec donc $y' = 0$: l'équation devient $y - 3 = 0$ donc $y = 3$. On peut réécrire l'équation différentielle $y' = \frac{1}{3}y - 1$, dont les solutions sont $Ce^{x/3} + 3$ avec C constante réelle.

Question 40
Soit $f(x) = e^x + 3$. De quelle(s) équations(s) différentielle(s) cette fonction est-elle solution ?

- ☐ [Faux] $y' - y = e^x$
- ☐ [Vrai] $y' = y - 3$
- ☐ [Faux] $3y' - y = 0$
- ☐ [Faux] $y' - 3y = 0$

Explications : Lorsqu'on dérive f, on obtient $f'(x) = e^x = (e^x + 3) - 3 = f(x) - 3$: ainsi f est solution de l'équation différentielle $y' = y - 3$. On vérifie en remplaçant dans les autres équations différentielles y par f (et y' par f') que les égalités ne sont pas vérifiées, donc que f n'est pas une solution.

Question 41
Soit l'équation différentielle $y' = 2y + \cos(x)$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Faux] Les solutions de l'équation homogène associée sont les $y(x) = C\sin(x)$.
- ☐ [Faux] Les solutions de l'équation homogène associée sont les $y(x) = C\cos(x)$.
- ☐ [Vrai] Une solution particulière est $y(x) = \frac{1}{5}\sin(x) - \frac{2}{5}\cos(x)$.
- ☐ [Faux] Une solution particulière est $y(x) = e^{2x}$.

Explications : L'équation homogène est $y' = 2y$, dont les solutions sont les $y_h(x) = Ce^{2x}$. Une solution particulière de l'équation $y' = 2y + \cos(x)$ est $y_p(x) = \frac{1}{5}\sin(x) - \frac{2}{5}\cos(x)$. Les solutions générales sont alors $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$.

Question 42
Soit l'équation différentielle $y' = 2y - 2x + 1$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Faux] La seule solution constante est $y(x) = x - \frac{1}{2}$.
- ☐ [Vrai] $y(x) = x$ est une solution particulière.
- ☐ [Vrai] $y(x) = 3e^{2x} + x$ est une solution particulière.
- ☐ [Faux] $y(x) = x^2$ est une solution particulière.

Explications : Si l'on recherche une solution constante $y = C$, avec donc $y' = 0$, on obtient dans l'équation différentielle $0 = 2C - 2x + 1$ et donc $C = x - \frac{1}{2}$. Mais ceci n'est pas une constante ! Donc il n'existe aucune solution constante. Pour $f(x) = x$ et $f'(x) = 1$, on constate en remplaçant que f est bien solution de l'équation différentielle puisque $f' = 1 = 2x - 2x + 1$. Il en va de même pour $f(x) = 3e^{2x} + x$, avec $f'(x) = 6e^{2x} + 1$ puisque $6e^{2x} + 1 = 2(3e^{2x} + x) - 2x + 1$. En revanche, pour $f(x) = x^2$, et donc $f'(x) = 2x$, l'équation différentielle n'est pas vérifiée puisque $2x \neq 2x^2 - 2x + 1$.

1.11 $y' = ay + b$ et $y' = ay + f$ | Moyen

Question 43
Quelles sont les valeurs de a, b et c telles que $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ soit solution de l'équation différentielle $y' + 2y = 4x^2 + 2x - 1$?

- ☐ [Faux] $a = 4$, $b = 2$, $c = -1$
- ☐ [Vrai] $a = 2$, $b = -1$, $c = 0$
- ☐ [Faux] $a = 2$, $b = -1$, $c = -1$

- ☐ [Faux] $a = 4$, $b = -3$, $c = 1$

Explications : On a $f'(x) = 2ax + b$ donc $f'(x) + 2f(x) = 2ax^2 + (2a + 2b)x + b + 2c$. Ce polynôme doit être égal à $4x^2 + 2x - 1$. On calcule alors a, b et c en identifiant les coefficients : $2a = 4$; $2a + 2b = 2$; $b + 2c = -1$. On obtient $a = 2$, puis $b = 1 - a = -1$, et enfin $c = (-1 - b)/2 = 0$.

Question 44

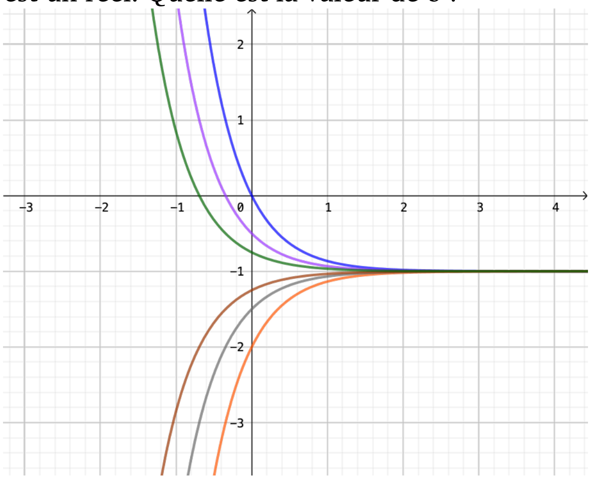
Parmi les fonctions suivantes, quelles sont celles qui sont solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = 2y + e^{2x}$ et qui valent 2 en $x = 0$:

- ☐ [Faux] $x \mapsto 2e^{2x}$
- ☐ [Faux] $x \mapsto xe^{2x}$
- ☐ [Faux] $x \mapsto xe^{2x} + 2$
- ☐ [Vrai] $x \mapsto (x + 2)e^{2x}$

Explications : On peut éliminer la fonction $x \mapsto xe^{2x}$ qui ne prend pas la valeur 2 en $x = 0$ contrairement aux trois autres. On calcule ensuite la dérivée des autres fonctions proposées et on remplace y et y' dans l'équation différentielle pour identifier celle qui est solution : la seule qui soit solution de notre équation différentielle est $x \mapsto (x + 2)e^{2x}$. Rappel : la dérivée du produit de deux fonctions u et v est $u'v + uv'$. Ainsi $[(x + 2)e^{2x}]' = e^{2x} + 2(x + 2)e^{2x}$.

Question 45

Le graphique ci-dessous représente plusieurs solutions de l'équation différentielle $y' + 2y = b$, où b est un réel. Quelle est la valeur de b ?



- ☐ [Vrai] $b = -2$
- ☐ [Faux] $b = -1$
- ☐ [Faux] $b = 1/2$
- ☐ [Faux] $b = 1$

Explications : L'équation différentielle peut s'écrire $y' = ay + b$ avec $a = -2$ donc ses solutions sont les fonctions $x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a} = Ce^{-2x} + \frac{b}{2}$. De plus $\lim_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0$ donc $b/2$ est la limite des solutions lorsque x tend vers $+\infty$. On lit graphiquement que cette limite vaut $-1 = b/2$ donc on en déduit que $b = -2$.

Question 46

Soit l'équation différentielle $y' + y = e^x$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Faux] Les solutions de l'équation homogène associée sont $y(x) = Ce^x$.
- ☐ [Faux] Une solution particulière est $y(x) = e^{-x}$.
- ☐ [Vrai] La solution vérifiant $y(0) = 1$ est $y(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.
- ☐ [Faux] La solution vérifiant $y(1) = 1$ est $y(x) = e \cdot e^{-x}$.

Explications : L'équation homogène est $y' + y = 0$, dont les solutions sont les $y_h(x) = Ce^{-x}$. Pour aller plus loin : une solution particulière de l'équation $y' + y = e^x$ est $y_p(x) = \frac{1}{2}e^x$; les solutions générales sont alors $y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ce^{-x} + \frac{1}{2}e^x$.

Question 47

Soit l'équation différentielle $y' = y + x^2 - 1$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Faux] Les solutions de l'équation homogène associée sont $y(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + C$.
- ☐ [Faux] Les solutions de l'équation homogène associée sont $y(x) = Ce^{x^2-1}$.
- ☐ [Faux] Une solution particulière est $y(x) = e^x$.
- ☐ [Vrai] Une solution particulière est $y(x) = -x^2 - 2x - 1$.

Explications : L'équation homogène est $y' = y$, dont les solutions sont les $y_h(x) = Ce^x$. Une solution particulière de l'équation $y' = y + x^2 - 1$ est $y_p(x) = -x^2 - 2x - 1$. Les solutions générales sont alors $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$.

Question 48

On considère l'équation différentielle $y' + y = 2x^2(x + 3)$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Faux] Il existe un nombre réel r tel que $y(x) = e^{rx}$ soit une solution particulière.
- ☐ [Vrai] Il existe deux nombres entiers k et n tels que $y(x) = kx^n$ soit une solution particulière.
- ☐ [Faux] $y(x) = e^{-x} + 2x^3$ est une solution particulière vérifiant $y(0) = 0$.
- ☐ [Faux] $y(x) = -2e^{-x} + 2x^3$ est une solution particulière vérifiant $y(0) = 0$.

Explications : Si l'on cherche une solution sous la forme $y(x) = kx^n$, on a $y'(x) = knx^{n-1}$. En remplaçant dans l'équation différentielle, on obtient alors (en développant) : $knx^{n-1} + kx^n = 6x^2 + 2x^3$. En identifiant, on vérifie que l'égalité est vraie pour $k = 2$ et $n = 3$. Ainsi $f(x) = 2x^3$ est une solution particulière. En revanche, si on cherche une solution sous la forme $f(x) = e^{rx}$, alors $f'(x) = re^{rx}$, et en remplaçant on obtient $(r + 1)e^{rx} = 2x^2(x + 3)$ ce qui est impossible (un côté est une exponentielle et l'autre un polynôme). Enfin, on vérifie que les fonctions $y(x) = e^{-x} + 2x^3$ et $y(x) = -2e^{-x} + 2x^3$ sont bien solutions de notre équation différentielle, mais aucune des deux ne vaut 0 en $x = 0$ (elles valent respectivement 1 et -2).

Question 49

Soit (E) l'équation différentielle $y' + 5y = 5x^2 + 2x$. Alors :

- ☐ [Faux] Si f est solution de (E), alors la fonction $x \mapsto f(x) - 5x^2 - 2x$ est solution de l'équation différentielle (H) : $y' + 5y = 0$.
- ☐ [Vrai] Si f est solution de (E), alors la fonction $x \mapsto f(x) - x^2$ est solution de l'équation différentielle (H) : $y' + 5y = 0$.
- ☐ [Faux] Si f est solution de (E), alors la fonction $x \mapsto f(x) - e^{-5x}$ est solution de l'équation différentielle (H) : $y' + 5y = 0$.

- ☐ [Faux] Si f est solution de (E), alors la fonction $x \mapsto f(x) - 2x$ est solution de l'équation différentielle $(H) : y' + 5y = 0$.

Explications : Si f est solution de (E), alors $f'(x)+5f(x) = 5x^2+2x$. On calcule alors que : $(f(x)-x^2)'+5(f(x)-x^2) = f'(x)-2x+5f(x)-5x^2 = f'(x)+5f(x)-2x-5x^2 = 5x^2+2x-2x-5x^2 = 0$. Ainsi la fonction $x \mapsto (f(x)-x^2)$ est bien solution de (H). En revanche, lorsqu'on remplace dans $y' + 5y$ avec les fonctions $x \mapsto f(x) - 5x^2 - 2x$, $x \mapsto f(x) - e^{-5x}$ et $x \mapsto f(x) - 2x$ (toujours en utilisant le fait que $f'(x) + 5f(x)$ peut être remplacé par $5x^2 + 2x$) on ne trouve pas 0.

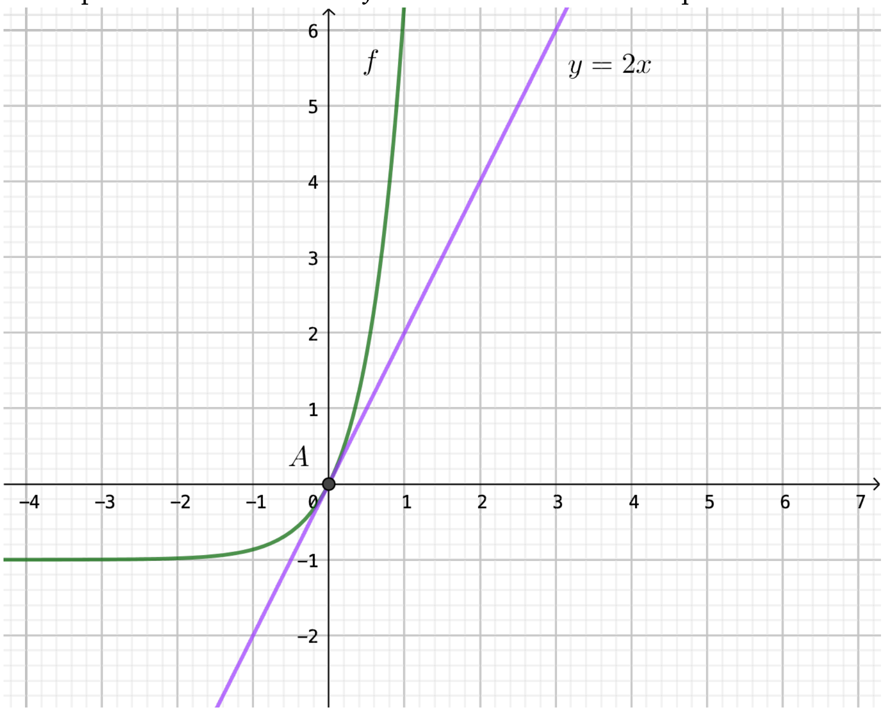
Question 50
Soit l'équation différentielle $y' = y + 2e^{3x} + 4xe^{3x}$. On recherche une solution particulière sous la forme $f(x) = axe^{bx}$. Quelles doivent être les valeurs de a et b ?

- ☐ [Faux] $a = 4,\ b = 3$
- ☐ [Vrai] $a = 2,\ b = 3$
- ☐ [Faux] $a = 1,\ b = 3$
- ☐ [Faux] $a = 1,\ b = 4$

Explications : On calcule qu'avec la forme voulue, on a $f'(x) = ae^{bx} + abxe^{bx}$. Ainsi en remplaçant dans l'équation différentielle, on obtient : $ae^{bx} + abxe^{bx} = axe^{bx} + 2e^{3x} + 4xe^{3x}$, ce qu'on peut écrire $(a+a(b-1)x)e^{bx} = (2+4x)e^{3x}$ pour y voir plus clair. On peut donc identifier dans l'exposant de l'exponentielle que $b = 3$. Puis cela donne pour le polynôme qui accompagne les exponentielles $a + 2ax = 2 + 4x$, et donc $a = 2$.

1.12 $y' = ay + b$ et $y' = ay + f$ | Difficile

Question 51
Le graphique ci-dessous représente la courbe représentative d'une fonction f ainsi que sa tangente en un point A. Cette fonction f est solution d'une des équations différentielles suivantes ; laquelle ?



- ☐ [Faux] $y' = 2x$

- ☐ [Faux] $y' = y + 1$
- ☐ [Vrai] $y' = 2y + 2$
- ☐ [Faux] $y' = 2y - 2$

Explications : On a $f(0) = 0$ et $f'(0) = 2$ puisqu'il s'agit de la pente de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $x = 0$. Ceci élimine toutes les réponses proposées sauf $y' = 2y + 2$. De fait, la courbe représentative donnée est celle de $x \mapsto e^{2x} - 1$ qui en est bien une solution.

Question 52
Soit f une fonction dont la courbe représentative admet pour tangente en $x = -1$ la droite d'équation $y = 2x - 2$. Parmi les équations différentielles suivantes, quelle est la seule dont f peut être une solution ?

- ☐ [Faux] $y' = y + e^x$
- ☐ [Vrai] $y' = -y + 2x$
- ☐ [Faux] $y' = 2y + 3x^3$
- ☐ [Faux] $2y' - y = 2$

Explications : Sur la droite $y = 2x - 2$, le point d'abscisse $x = -1$ est $A(-1, -4)$ donc $f(-1) = -4$. De plus, la pente de la droite est 2, donc $f'(-1) = 2$. Parmi les équations différentielles proposées, $y' = -y + 2x$ est la seule qui permet d'obtenir ces deux valeurs (on remplace y par f, y' par f', et on évalue tout cela en $x = -1$).

Question 53
Soit l'équation différentielle $2y' = 3y + 1$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Faux] Il y a au moins une solution dont la limite en $-\infty$ est 0.
- ☐ [Vrai] La solution vérifiant $y(0) = 0$ est $y(x) = \frac{1}{3}(e^{\frac{3}{2}x} - 1)$.
- ☐ [Faux] La solution vérifiant $y(0) = 0$ est $y(x) = 0$.
- ☐ [Faux] La solution vérifiant $y(0) = 0$ est $y(x) = e^{\frac{3}{2}x} - 1$.

Explications : Notre équation différentielle peut se réécrire sous la forme $y' = \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}$. Les solutions d'une équation diffférentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions $x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$. Donc ici les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions $f(x) = Ce^{\frac{3}{2}x} - \frac{1}{3}$. La solution vérifiant $y(0) = 0$ est $y_0(x) = \frac{1}{3}e^{\frac{3}{2}x} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}(e^{\frac{3}{2}x} - 1)$. Enfin, puisque la limite de $e^{\frac{3}{2}x}$ en $-\infty$ est nulle, la limite de toutes les fonctions solutions en $-\infty$ sera $-\frac{1}{3}$.

Question 54
Soit l'équation différentielle $y' = y + 3x - 2$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Vrai] Une solution particulière est $y(x) = -3x - 1$.
- ☐ [Faux] Une solution particulière est $y(x) = 3x - 2$.
- ☐ [Vrai] La solution vérifiant $y(0) = 1$ est $y(x) = 2e^x - 3x - 1$.
- ☐ [Faux] La solution vérifiant $y(0) = 1$ est $y(x) = 3e^x + 3x - 2$.

Explications : L'équation homogène est $y' = y$, dont les solutions sont les $y_h(x) = Ce^x$. Une solution particulière de l'équation $y' = y + 3x - 2$ est $y_p(x) = -3x - 1$. Les solutions générales sont alors $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$. La solutions vérifiant $y(0) = 1$ est $y_0(x) = 2e^x - 3x - 1$.

Question 55

Soit f une solution de l'équation différentielle (H) : $y' = 4y$. De quelle équation différentielle la fonction $g : x \mapsto f(x) + e^{2x}$ sera-t-elle solution ?

- ☐ [Faux] $y' = 4y + e^{2x}$
- ☐ [Faux] $y' - 4y = 4e^{2x}$
- ☐ [Vrai] $y' = 4y - 2e^{2x}$
- ☐ [Faux] $y' = 2y$

Explications : Si f est solution de (H), alors $f'(x) = 4f(x)$. On calcule alors la dérivée de g : $g'(x) = f'(x) + 2e^{2x}$. Mais on a alors : $g'(x) = 4f(x) + 2e^{2x} = 4f(x) + 4e^{2x} - 2e^{2x} = 4(f(x) + e^{2x}) - 2e^{2x} = 4g(x) - 2e^{2x}$. De ce fait, g est solution de $y' = 4y - 2e^{2x}$. On pouvait aussi exploiter le fait que $f(x)$ s'écrit sous la forme Ce^{4x} et tenter de remplacer directement dans chacune des équations différentielles les expressions de g et de g' pour voir quelle égalité était vérifiée.