Cours – Logique, ensembles et raisonnements

Les mathématiques sont un formidable assemblage de propositions qui s'enchaînent les unes avec les autres d'une manière logique. Une proposition (que l'on peut tout à fait nommer propriété, *ou encore* théorème*) n'est adoptée au sein des théories mathématiques que si l'on a rigoureusement démontré qu'elle est vraie. Cela pose plusieurs questions : qu'est-ce que la* logique *qui permet de comprendre les propositions et de les lier les unes aux autres ? Comment démontrer qu'une proposition est vraie ou fausse ?*

Sections

1. **Logique**

   Thèmes : Comprendre les connecteurs logiques ET, OU et NON. Comprendre les quantificateurs $\forall$ et $\exists$. Comprendre l'implication, l'équivalence, la contraposée.

   Objectifs : Savoir décider si une assertion est vraie ou fausse. Savoir écrire des négations simples.

2. **Ensembles**

   Thèmes : Maîtriser le vocabulaire des ensembles : élément, inclusion, complémentaire, union, intersection. Maîtriser le vocabulaire des fonctions : image, antécédent, bijection.

   Objectifs : Savoir calculer des unions, intersections, complémentaires d'ensembles. Savoir déterminer un domaine de définition. Savoir calculer une composition et montrer qu'une fonction est bijective.

3. **Raisonnements**

   Thèmes et objectifs : Démonstration au cas par cas. Raisonnement par l'absurde. Preuve par contraposition. Récurrence.

Auteur : Barnabé Croizat de l'université de Lille.
Relecture : Arnaud Bodin, Christine Sacré et Abdelkader Necer.

Ce travail a été effectué en 2021-2022 dans le cadre d'un projet Hilisit porté Unisciel.

Logique et raisonnements – Partie 1 : Logique

Savoir.

- ☐ Comprendre les connecteurs logiques ET, OU et NON.
- ☐ Comprendre les quantificateurs $\forall$ et $\exists$.
- ☐ Comprendre l'implication, l'équivalence, la contraposée.

Savoir-faire.

- ☐ Savoir décider si une assertion est vraie ou fausse.
- ☐ Savoir écrire des négations simples.

Assertions

Définition. Une **assertion** est un énoncé ou une phrase dont on peut trancher si elle est vraie ou si elle est fausse. En particulier, elle ne peut pas être à la fois vraie et fausse.
Exemples.

— "$2+2=4$" est une assertion vraie.

— "*8 est divisible par* 3" : c'est aussi une assertion, mais elle est fausse.

— "*Je suis né à Paris*" : c'est une assertion (qui est vraie ou fausse selon l'énonciateur).

— "*Les nombres de la forme* $8k+2$*, pour tout* $k \in \mathbb{Z}$*, sont des nombres pairs*". Cette assertion, un peu plus élaborée, est vraie ! Elle pourrait être mieux formulée, nous la retrouverons sous une autre forme un peu plus tard à l'aide des *quantificateurs*.

Remarque : une proposition mathématique dont on *pense* qu'elle est vraie, sans arriver à la démontrer, est appelée une *conjecture*. Parmi les exemples célèbres il y a la conjecture de Goldbach et la conjecture des nombres premiers jumeaux.

Connecteurs logiques : NON, ET, OU

NON

— Si $\mathscr{P}$ est une assertion, alors sa **négation** "non-$\mathscr{P}$" est également une assertion qui exprime le contraire de $\mathscr{P}$. Si $\mathscr{P}$ est vraie, alors non-$\mathscr{P}$ est fausse ; si $\mathscr{P}$ est fausse, alors non-$\mathscr{P}$ est vraie.

— En termes de logique, les mots **négation** et **contraire** sont des synonymes. Chercher la *négation* d'une proposition, c'est donc essayer d'exprimer son *contraire*. Autrement dit : non-$\mathscr{P}$ = contraire de $\mathscr{P}$.

— La négation de "$x^2 < 4$" est "$x^2 \geqslant 4$". La négation de "*Il n'y a pas de solution à ce problème*" est "*Il existe une solution à ce problème*".

ET / OU

— **ET.** L'assertion "$\mathscr{P}$ **et** $\mathscr{Q}$" est une assertion qui est vraie si $\mathscr{P}$ est vraie et $\mathscr{Q}$ est vraie. Elle est fausse sinon.

— **OU.** L'assertion "$\mathscr{P}$ **ou** $\mathscr{Q}$" est vraie si au moins l'une des deux assertions $\mathscr{P}$ ou $\mathscr{Q}$ est vraie. Elle est fausse si $\mathscr{P}$ est fausse et $\mathscr{Q}$ est aussi fausse.

— Exemple. L'assertion "*Je suis une fille et je porte des lunettes*" est-elle vraie pour toi ?

— Exemple. Si n désigne un entier naturel (on note $n \in \mathbb{N}$), alors :

  — "*n est pair ou n est impair*" est toujours vraie.

  - "*n est positif et n est négatif*" n'est vraie que si $n=0$.
- **Négation des ET / OU.** La négation de "$\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$" est : "non-$\mathscr{P}$ ou non-$\mathscr{Q}$".
  La négation de "$\mathscr{P}$ ou $\mathscr{Q}$" est : "non-$\mathscr{P}$ et non-$\mathscr{Q}$".
- Exemple. La négation de "*Je suis une fille ET je porte des lunettes* " est "*Je ne suis pas une fille OU je ne porte pas de lunettes*".
  La négation de "*J'aime le chocolat OU j'aime les fraises*" est "*Je n'aime pas le chocolat ET je n'aime pas les fraises*".

Dans la suite, on confondra le terme d'*assertion* avec celui de *proposition*.

Quantificateurs

De nombreuses propositions mathématiques dépendent d'un ou plusieurs paramètres. Par exemple, la proposition $x^2 \geqslant 4$ est vraie pour certaines valeurs du nombre x, et fausse pour d'autres. On notera ainsi $\mathscr{P}(x)$ une proposition $\mathscr{P}$ dépendant d'un paramètre x.
On peut alors distinguer deux grands types de propositions dépendant d'un paramètre : les propositions qui sont vraies pour toutes les valeurs du paramètre, et celles dont on sait qu'il y a (au moins) un paramètre pour lequel elles sont vraies. Bien sûr, il faudra préciser de quel genre de paramètre il s'agit : un nombre entier ? Un nombre réel ? Un entier compris entre 3 et 10 ? Etc.
Pour exprimer ces deux types de propositions, on utilise deux **quantificateurs** : $\forall$ et $\exists$.

- Le quantificateur $\forall$ (appelé quantificateur universel) signifie "**pour tout**". On l'utilise pour exprimer qu'une proposition est vraie pour n'importe laquelle des valeurs d'un paramètre (au sein d'un ensemble à préciser). Ainsi, on notera par exemple :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathscr{P}(x)$$

  Cela signifie (et se lit) : "*pour tout nombre x réel, on a $\mathscr{P}(x)$*", ou encore "*pour tout nombre x réel, la proposition $\mathscr{P}(x)$ est vraie*".
- Exemples.
  - $\forall x \in \mathbb{R} \qquad x^2 \geqslant 0$
  - $\forall x \geqslant 2 \qquad 2x-3 \geqslant 1$
  - $\forall n \in \mathbb{N} \qquad 2n+1$ est un entier impair
  - $\forall x \in \,]2,3[\qquad \frac{1}{3} < \frac{1}{x} < \frac{1}{2}$
- Le quantificateur $\exists$ (appelé quantificateur existentiel) signifie "**il existe**". On l'utilise pour exprimer qu'il existe une valeur du paramètre (au sein d'un ensemble à préciser) pour laquelle une proposition est vraie. On note par exemple :

$$\exists x \in [-5,3] \quad \mathscr{P}(x)$$

  Cela signifie (et se lit) : "*il existe un nombre (réel) entre -5 et 3 pour lequel $\mathscr{P}(x)$ est vraie*".
- Exemples.
  - $\exists x \in \mathbb{R} \quad 3x-7=0$
  - n est un entier pair signifie "$\exists k \in \mathbb{Z} \quad n=2k$"
  - une fonction f s'annule entre 0 et 1 s'écrit "$\exists x \in [0,1] \quad f(x)=0$".
- Cela ne signifie pas que la valeur de x pour laquelle l'assertion $\mathscr{P}(x)$ est vraie est unique ! Par exemple, "$\exists x \in \mathbb{R} \quad x(x-2)=0$" est une proposition qui est vraie : on a bien $x(x-2)=0$ pour $x=0$ et pour $x=2$.

Implication et équivalence

L'implication "$\Longrightarrow$"

Si $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont deux assertions, on peut définir la proposition "*si $\mathscr{P}$ est vraie, alors $\mathscr{Q}$ est vraie*". Cette proposition est très utilisée en mathématiques, on la note : $\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}$ (on lit "$\mathscr{P}$ implique $\mathscr{Q}$").

Remarque. Si "$\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}$" est vraie, on dit souvent que $\mathscr{P}$ *est une condition suffisante pour* $\mathscr{Q}$. En effet, si l'on cherche à montrer que $\mathscr{Q}$ est vraie, il suffit d'obtenir que $\mathscr{P}$ est vraie ! Cependant, $\mathscr{Q}$ peut très bien être vraie sans que $\mathscr{P}$ ne le soit. Réciproquement, $\mathscr{Q}$ est une *condition nécessaire* pour $\mathscr{P}$ car il faut que $\mathscr{Q}$ soit vraie pour que $\mathscr{P}$ le soit (mais cela ne suffit pas forcément).

Exemples.

— "*Je suis à l'Université* $\Longrightarrow$ *J'ai eu mon bac*" est une implication qui est vraie. En effet avoir son bac est une *condition nécessaire* pour entrer à l'Université !

— "$0 \leqslant x \leqslant 9 \Longrightarrow \sqrt{x} \leqslant 3$" est une implication qui est vraie.

— "$\sin(\theta) = 0 \Longrightarrow \theta = 0$" est fausse (par exemple $\sin(\pi) = 0$ bien que $\pi = 3.14\ldots$ soit non nul).

Équivalence "$\Longleftrightarrow$"

Si les propositions $\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}$ et $\mathscr{Q} \Longrightarrow \mathscr{P}$ sont toutes deux vraies, on note : $\mathscr{P} \Longleftrightarrow \mathscr{Q}$ (on lit "$\mathscr{P}$ équivaut à $\mathscr{Q}$").

Dans le cas d'une équivalence, les deux propositions $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ ont la même valeur de vérité : elles sont soit simultanément vraies soit simultanément fausses.

Exemples.

— "*Je suis à l'Université* $\Longleftrightarrow$ *J'ai eu mon bac*" est une équivalence qui est fausse ! Le sens direct $\Longrightarrow$ est vrai, mais le sens réciproque $\Longleftarrow$ est faux : ce n'est pas parce qu'on a eu son bac qu'on est à l'Université.

— Pour x un nombre réel, on a l'équivalence : "$5x + 15 < 0 \Longleftrightarrow x < -3$".

— Pour a et b deux nombres réels ou complexes, on a l'équivalence : "$ab = 0 \Longleftrightarrow (a = 0 \text{ ou } b = 0)$".

Proposition contraposée

Les implications $\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}$ et *non-$\mathscr{Q}$* $\Longrightarrow$ *non-$\mathscr{P}$* sont équivalentes. En d'autres termes, l'implication "$\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}$" sera vraie si, et seulement si, l'implication "non-$\mathscr{Q} \Longrightarrow$ non-$\mathscr{P}$" est vraie.

La proposition *non-$\mathscr{Q}$* $\Longrightarrow$ *non-$\mathscr{P}$* est appelée la **contraposée** de la proposition $\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}$.

Remarque. L'équivalence d'une implication et de sa contraposée signifie que si l'on doit prouver $\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}$, il revient au même de prouver non-$\mathscr{Q} \Longrightarrow$ non-$\mathscr{P}$.

Exemples.

— Si l'on doit démontrer "*Je vais au carnaval* $\Longrightarrow$ *Je suis maquillé*", et que l'on démontre (sa contraposée) "*Je ne suis pas maquillé* $\Longrightarrow$ *Je ne vais pas au carnaval*", alors c'est gagné.

— La contraposée de l'implication cartésienne : "*Je pense donc je suis*" est : "*Je ne suis pas donc je ne pense pas*".

— Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour montrer l'assertion "n^2 *est pair* $\Longrightarrow$ n *est pair*" il est beaucoup plus facile de prouver la contraposée : "n *est impair* $\Longrightarrow$ n^2 *est impair*".

Logique et raisonnements – Partie 2 : Ensembles

Savoir.

- ☐ Maîtriser le vocabulaire des ensembles : élément, inclusion, complémentaire, union, intersection.
- ☐ Maîtriser le vocabulaire des fonctions : image, antécédent, bijection.

Savoir-faire.

- ☐ Savoir calculer des unions, intersections, complémentaires d'ensembles.
- ☐ Savoir déterminer un domaine de définition.
- ☐ Savoir calculer une composition et montrer qu'une fonction est bijective.

Ensembles

- Un **ensemble** est une collection d'objets distincts que l'on appelle des **éléments**. On note la liste des éléments qui définissent un ensemble en utilisant des accolades : $\{\dots\}$.
- On peut définir un ensemble soit par *extension*, en énumérant l'ensemble de ses éléments. Ainsi l'ensemble des nombres apparaissant sur les faces d'un dé est $\{1,2,3,4,5,6\}$.
- On peut également définir un ensemble par *compréhension* en décrivant ses éléments par une ou plusieurs propriétés qui les caractérisent. Dans ce cadre, l'ensemble des entiers pairs peut s'écrire : $\{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
- L'ensemble qui ne comporte aucun élément est appelé **l'ensemble vide** ; on le note $\varnothing$. Un ensemble qui ne comporte qu'un unique élément est appelé un *singleton*. Une *paire* est un ensemble de deux éléments distincts.
- Si un élément e appartient à l'ensemble E, on note : $e \in E$ (on dit aussi que *E contient e*). Dans le cas contraire, on écrit : $e \notin E$.

Inclusion, complémentaire

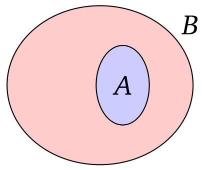
- **Inclusion.** Si A et B sont deux ensembles, l'écriture $A \subset B$ indique que "*A est inclus dans B*", ce qui signifie que tout élément de A appartient aussi à B. On dit aussi que A est une *partie* ou un *sous-ensemble* de B.
- **Égalité.** Deux ensemble A et B sont égaux s'ils ont exactement les mêmes éléments. D'un point de vue logique, cela équivaut à dire qu'ils sont mutuellement inclus l'un dans l'autre :

$$A = B \iff (\, A \subset B \text{ et } B \subset A\,)$$

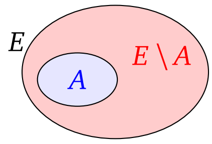
- **Complémentaire.** Si A est une partie d'un ensemble E, on définit le *complémentaire de A*, noté $E \setminus A$ (ou encore $\overline{A}$), comme l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A :

$$E \setminus A := \{x \in E \mid x \notin A\}$$

On représente souvent les opérations sur les ensembles par de petits schémas appelés des *diagrammes de Venn*. En voici deux exemples pour l'inclusion et le complémentaire de deux ensembles.



$A \subset B$



Complémentaire de A

Exemple. Soit $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $A = \{2, 5\}$.

— L'ensemble E contient 5 éléments ; A contient 2 éléments.

— Tout élément de A appartient à E, donc $A \subset E$.

— Le complémentaire de A dans E est $E \setminus A = \{1, 3, 4\}$.

Autres exemples.

— L'ensemble des nombres pairs $P = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$. Son complémentaire dans $\mathbb{Z}$ est : $\mathbb{Z} \setminus P = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Il s'agit bien sûr des entiers impairs !

— $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, que l'on note souvent $\mathbb{R}^\star$, est l'ensemble des nombres réels non nuls.

Les ensembles que nous connaissons et utilisons le plus fréquemment sont les ensembles de nombres. Il y a ainsi par exemple :

— L'ensemble des nombres premiers $\mathscr{P}$

— L'ensemble des nombres entiers naturels $\mathbb{N}$

— L'ensemble des nombres entiers relatifs $\mathbb{Z}$

— L'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}^\star\}$

— L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$

— L'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$

On a d'ailleurs les inclusions :

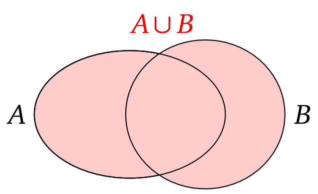
$$\mathscr{P} \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

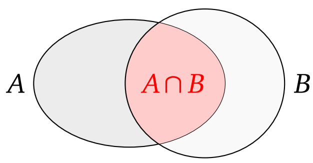
Union, intersection

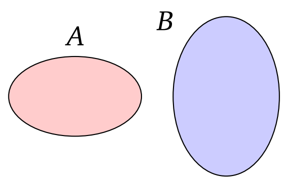
— **L'union de** A **et** B est l'ensemble des éléments qui sont soit dans A, soit dans B (et éventuellement dans les deux à la fois). On la note : $\boldsymbol{A \cup B}$ définie par $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$.

— **L'intersection de** A **et** B est l'ensemble des éléments qui sont à la fois dans A et dans B. On la note : $\boldsymbol{A \cap B}$ définie par $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$.

— Si $A \cap B = \varnothing$, on dit que les ensembles A et B sont **disjoints**.







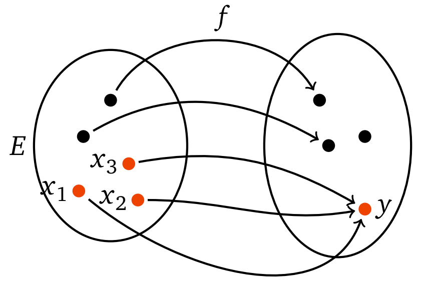
Ensembles disjoints

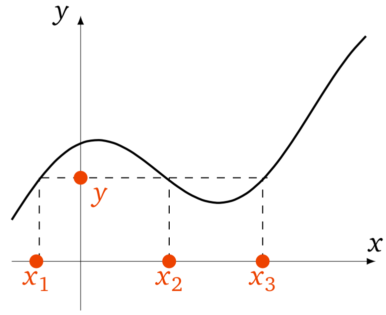
Exemple. Si $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{2, 4\}$, alors on a :

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\} \qquad A \cap B = \{2\}.$$

Fonctions

— Une **fonction** (ou une **application**) d'un ensemble E vers un ensemble F, est la donnée pour chaque élément x de E d'un unique élément y de F. On écrit alors cela : $f(x) = y$. L'élément y s'appelle l'**image** de x, et l'élément x est un **antécédent** de y.





— On note cette application "$f : E \longrightarrow F, x \longmapsto f(x)$".

— L'ensemble E s'appelle le **domaine de définition** de f (il est parfois noté $\mathscr{D}_f$).

— Ce sera souvent à vous de déterminer le domaine de définition (le plus grand possible). Par exemple l'expression $f(x) = \sqrt{x}$ définit une fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$. En effet pour avoir le droit d'écrire $\sqrt{x}$ il faut que x soit positif ou nul.

Exercice. Déterminer les domaines de définition (dans $\mathbb{R}$) des fonctions définies par les expressions suivantes :

— $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

— $f(x) = \sqrt{x+3}$

— $f(x) = \ln(3x-7)$

— $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x^2-2}}$

Composition

Composition Soient E, F, G trois ensembles, et $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ deux applications. Alors on peut définir la **composée** de f par g, notée $g \circ f$, comme étant l'application : $g \circ f : E \to G$ définie par :

$$\boxed{(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)}$$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r] \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & F \arrow[r] \arrow[r, bend left, "g"] & G \end{tikzcd}$$

Exemple. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ et soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \cos(2x+1)$, alors $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction donnée par :

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(x^2) = \cos(2x^2+1)$$

Attention $f \circ g$ est aussi définie mais est une toute autre application. Son expression est donnée par :

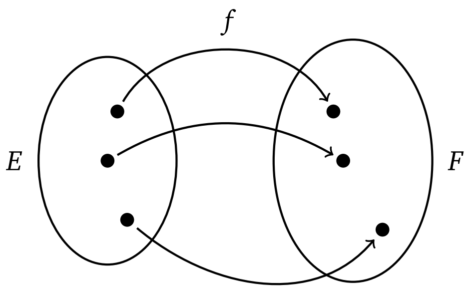
$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f\big(\cos(2x+1)\big) = \big(\cos(2x+1)\big)^2.$$

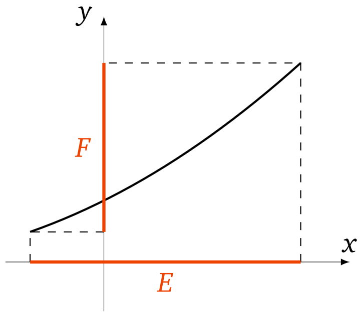
Exemple. Soit $f : \mathbb{R}_+^\star \to \mathbb{R}_+^\star$ définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g : \mathbb{R}_+^\star \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \frac{x-2}{x+3}$ (rappel : $\mathbb{R}_+^\star =]0, +\infty[$). Alors

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{1}{x}-2}{\frac{1}{x}+3} \underbrace{=}_{\times x > 0} \frac{1-2x}{1+3x}$$

Bijection

— **Bijection.** On dit que l'application $f : E \to F$ est **bijective** si chaque élément de F possède un antécédent par f, et que cet antécédent est de plus unique. Dans ce cas, l'application f établit une correspondance parfaite entre les éléments de E et les éléments de F.





— Si $f : E \to F$ est bijective, alors l'application $g : F \to E$ qui à tout élément de y de F associe son unique antécédent x par f dans E est bien définie et est également bijective. Elle est notée f^{-1} et s'appelle la **bijection réciproque** de f.

— On a alors $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ (pour tout $x \in E$) et aussi $(f \circ f^{-1})(y) = y$ (pour tout $y \in F$).

— Exemple. Soit $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$, $x \mapsto x^2$. Sa bijection réciproque est la fonction racine carrée : $f^{-1} : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$, $x \mapsto \sqrt{x}$. On a bien $(\sqrt{x})^2 = x$ et $\sqrt{x^2} = x$, pour tout $x \geqslant 0$.

— Exponentielle et logarithme sont bijections réciproques l'une de l'autre : $\exp(\ln(x)) = x$ (pour tout $x > 0$) et $\ln(\exp(x)) = x$ (pour tout $x \in \mathbb{R}$).

Logique et raisonnements – Partie 3 : Raisonnements

Savoir-faire.

- ☐ Démonstration au cas par cas.
- ☐ Raisonnement par l'absurde.
- ☐ Preuve par contraposition.
- ☐ Récurrence.

Pour démontrer de manière rigoureuse si une proposition est vraie ou non on peut utiliser plusieurs types de raisonnement.

Le raisonnement par disjonction (cas par cas)

Pour démontrer qu'une proposition est vraie, on peut procéder au cas par cas, et en prouvant pour chacun de ces cas qu'elle est vraie. Par exemple on peut démontrer une proposition concernant des nombres entiers en considérant d'une part les entiers pairs, puis d'autre part les entiers impairs.

Exemple. Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, montrons que $\frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{Z}$. (Noter qu'à priori $\frac{n(n+1)}{2}$ est une fraction : ce n'est pas évident qu'elle sera égale à un entier.)
Procédons en distinguant le cas n pair du cas n impair :

— Si n est pair, $n = 2k$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$. On a alors $n+1 = 2k+1$. Et donc :

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{2k(2k+1)}{2} = k(2k+1) \in \mathbb{Z}.$$

— Si n est impair, $n = 2k+1$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$. On a alors $n+1 = 2k+2$. Et donc :

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{(2k+1)(2k+2)}{2} = (2k+1)(k+1) \in \mathbb{Z}.$$

Cela achève bien de montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a bien $\frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{Z}$.

Le raisonnement par l'absurde

Ce type de raisonnement est très fréquent en mathématiques, et il en est un des plus anciens procédés. En effet, c'est en utilisant un raisonnement par l'absurde qu'Euclide a démontré il y a environ 2 300 ans qu'il y avait une infinité de nombres premiers !
L'idée d'un raisonnement par l'absurde pour démontrer qu'un énoncé est vrai, c'est de supposer que cet énoncé est faux et de montrer que cela aboutit à une contradiction, une absurdité. On en conclut alors que le principe de départ (avoir supposé l'énoncé faux) était erroné, et que par conséquent l'énoncé est vrai.

Exemple. Montrons, en utilisant un raisonnement par l'absurde, la proposition : "si $n \in \mathbb{N}^\star$, alors $\sqrt{n^2+1}$ n'est pas un entier".
On commence donc par supposer que la proposition à démontrer est fausse, c'est-à-dire (en prenant sa négation) : il existe $n \in \mathbb{N}^\star$ tel que $\sqrt{n^2+1}$ est un entier. Notons k cet entier : $k := \sqrt{n^2+1} \in \mathbb{N}$. On a alors :

$$k^2 = n^2 + 1 \quad \text{(donc notamment } k > n\text{)}$$

Ainsi :

$$1 = k^2 - n^2 = (k-n)(k+n)$$

Les nombres $(k-n)$ et $(k+n)$ sont deux entiers positifs qui divisent le nombre 1 : ils ne peuvent être tous deux qu'égaux à 1 :

$$\begin{cases} k-n &= 1 \\ k+n &= 1 \end{cases}$$

En sommant ces deux équations, on trouve $2k = 2$ donc $k = 1$, et par conséquent $n = 0$. Voilà une contradiction, puisque l'énoncé de départ supposait $n \in \mathbb{N}^\star$! On vient donc de montrer par l'absurde que $n \in \mathbb{N}^\star \implies \sqrt{n^2+1} \notin \mathbb{N}$.

Le raisonnement par contraposition

Pour démontrer qu'une implication $\mathscr{P} \implies \mathscr{Q}$ est vraie, il est équivalent de démontrer que sa contraposée non-$\mathscr{Q} \implies$ non-$\mathscr{P}$ est vraie. Dans certaines situations, il peut en effet se révéler plus simple de raisonner grâce à la contraposée plutôt qu'avec l'implication de départ.

Exemple. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons : "n^2 est pair $\implies$ n est pair".
Nous allons prouver la contraposée : "n est non-pair $\implies$ n^2 est non-pair". Bien sûr dire "non-pair" c'est exactement dire "impair".
On suppose donc que n est impair. Alors, $n = 2k+1$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$. Calculons n^2 :

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2+2k) + 1$$

Ainsi n^2 est un entier de la forme $2\ell + 1$ (avec $\ell = 2k^2 + 2k \in \mathbb{N}$) donc c'est un entier impair.
Conclusion : on a prouvé "n est impair $\implies$ n^2 est impair" ce qui est équivalent à "n^2 est pair $\implies$ n est pair".

Dans la plupart des situations on peut remplacer une démonstration par l'absurde, par une démonstration par contraposition (et inversement). L'important étant de bien préciser votre choix et de s'appliquer sur la rédaction.

Le raisonnement par récurrence

Le principe de récurrence c'est comme un escalier. Si on est sur la première marche (initialisation) et que l'on sait passer d'une marche à la suivante (hérédité), alors on peut grimper jusqu'à l'infini (conclusion).
Soit $\mathscr{P}(n)$ une proposition dépendant d'un entier naturel $n \in \mathbb{N}$. On souhaite démontrer que cette proposition est vraie pour tous les entiers naturels, c'est-à-dire : "$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathscr{P}(n)$".
Voici les trois étapes d'une preuve par récurrence :

- **Initialisation.** On montre que **$\mathscr{P}(0)$ est vraie**.
- **Hérédité.** On fixe $n \geqslant 0$. **On suppose $\mathscr{P}(n)$ est vraie** et **on prouve $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.**
- **Conclusion.** Alors la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarques.

- Si l'on souhaite montrer qu'une proposition $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$, alors on effectuera l'étape d'initialisation au rang n_0 en établissant que $\mathscr{P}(n_0)$ est vraie.
- Il faut être attentif à bien rédiger une preuve par récurrence et ne pas prendre de liberté avec la rédaction ! On s'attend à bien voir en évidence et dans l'ordre les éléments :
  0. "*Prouvons par récurrence que ...*"
  1. "*Initialisation. Pour $n = 0$, ...*"
  2. "*Hérédité : Fixons $n \geqslant 0$. Supposons qu'au rang n on ait ...*"
  3. "*Conclusion : On a bien montré par récurrence que pour tout $n \geqslant 0$, on a ...*"

Exemple. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons par récurrence que la propriété suivante est vraie :

$$\mathscr{P}(n) \qquad 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

— **Initialisation.** Pour $n = 1$, la proposition $\mathscr{P}(1)$ est vraie car $1 = \frac{1\times 2}{2}$.

— **Hérédité.** Fixons $n \geqslant 1$. Supposons que pour ce rang n, $\mathscr{P}(n)$ soit vraie, c'est-à-dire qu'on a égalité $1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.

On veut montrer que $\mathscr{P}(n+1)$ aussi est vraie. On calcule alors :

$$1+2+\cdots+n+(n+1) = \underbrace{1+2+\cdots+n}_{=\frac{n(n+1)}{2}\text{ par hypothèse de réc. au rang } n} + (n+1)$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Cela correspond bien à la propriété voulue au rang $n+1$, à savoir : $1+2+\cdots+n+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. La propriété est donc héréditaire.

— **Conclusion.** Par le principe de récurrence, quel que soit $n \geqslant 1$, on a $1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.