Logique, ensembles et raisonnements – Partie 2

Exercice 1.

Remplacer les pointillés par le symbole le plus adapté parmi $\in$, $\notin$, $\subset$, $\supset$.

1. $[3,5]$ ...... $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x \leqslant 7\}$
2. 2 ...... $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geqslant 5\}$
3. $\pi = 3.14\ldots$ ...... $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
4. $[1,9]$ ...... $[1,4] \cup [5,9]$
5. $\{0\}$ ...... $\mathbb{R}_+$
6. 0 ...... $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$
7. $[-7,5] \cap [-2,8]$ ...... $[-1,1]$

Exercice 2.

Déterminer le domaine de définition de la fonction $x \mapsto f(x)$ dans chacun des cas suivants :

1. $f(x) = \sqrt{-x+3}$
2. $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2-1}$
3. $f(x) = \exp(x^2+1)$
4. $f(x) = \ln(5x+8)$
5. $f(x) = \ln\big((x-1)(x+2)\big)$
6. $f(x) = \sqrt{x^2+3x-2}$

Exercice 3.

Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par $f(x) = 2x+1$ et $g(x) = x^2 - 3x$.

1. Déterminer l'expression de la fonction $f \circ g$.
2. Déterminer l'expression de la fonction $g \circ f$.
3. Montrer que $(g \circ f)(\frac{-1}{2}) = 0$ et en déduire, pour $x \in \mathbb{R}$, la factorisation de l'expression $(g \circ f)(x)$.

Exercice 4.

On veut déterminer la bijection réciproque de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{2x-1}{x-3}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Résoudre l'équation $y = f(x)$, c'est-à-dire déterminer x en fonction de y. Indication : exprimer x sous la forme $x = \frac{ay+b}{cy+d}$. Quelle valeur y_0 de y faut-il exclure ?
3. On définit $g(y) = \frac{ay+b}{cy+d}$ (où a, b, c, d ont été déterminés à la question précédente). Montrer que g est la bijection réciproque de f, c'est-à-dire

$$(g \circ f)(x) = x \qquad \text{pour tout } x \neq 3$$

et

$$(f \circ g)(y) = y \qquad \text{pour tout } y \neq y_0.$$