Logique et raisonnements – Partie 1 : Logique

Savoir.

- ☐ Comprendre les connecteurs logiques ET, OU et NON.
- ☐ Comprendre les quantificateurs $\forall$ et $\exists$.
- ☐ Comprendre l'implication, l'équivalence, la contraposée.

Savoir-faire.

- ☐ Savoir décider si une assertion est vraie ou fausse.
- ☐ Savoir écrire des négations simples.

Assertions

Définition. Une **assertion** est un énoncé ou une phrase dont on peut trancher si elle est vraie ou si elle est fausse. En particulier, elle ne peut pas être à la fois vraie et fausse.
Exemples.

- "$2+2=4$" est une assertion vraie.
- "*8 est divisible par* 3" : c'est aussi une assertion, mais elle est fausse.
- "*Je suis né à Paris*" : c'est une assertion (qui est vraie ou fausse selon l'énonciateur).
- "*Les nombres de la forme* $8k+2$*, pour tout* $k \in \mathbb{Z}$*, sont des nombres pairs*". Cette assertion, un peu plus élaborée, est vraie ! Elle pourrait être mieux formulée, nous la retrouverons sous une autre forme un peu plus tard à l'aide des *quantificateurs*.

Remarque : une proposition mathématique dont on *pense* qu'elle est vraie, sans arriver à la démontrer, est appelée une *conjecture*. Parmi les exemples célèbres il y a la conjecture de Goldbach et la conjecture des nombres premiers jumeaux.

Connecteurs logiques : NON, ET, OU

NON

- Si $\mathscr{P}$ est une assertion, alors sa **négation** "non-$\mathscr{P}$" est également une assertion qui exprime le contraire de $\mathscr{P}$. Si $\mathscr{P}$ est vraie, alors non-$\mathscr{P}$ est fausse ; si $\mathscr{P}$ est fausse, alors non-$\mathscr{P}$ est vraie.
- En termes de logique, les mots **négation** et **contraire** sont des synonymes. Chercher la *négation* d'une proposition, c'est donc essayer d'exprimer son *contraire*. Autrement dit : non-$\mathscr{P}$ = contraire de $\mathscr{P}$.
- La négation de "$x^2 < 4$" est "$x^2 \geqslant 4$". La négation de "*Il n'y a pas de solution à ce problème*" est "*Il existe une solution à ce problème*".

ET / OU

- **ET.** L'assertion "$\mathscr{P}$ **et** $\mathscr{Q}$" est une assertion qui est vraie si $\mathscr{P}$ est vraie et $\mathscr{Q}$ est vraie. Elle est fausse sinon.
- **OU.** L'assertion "$\mathscr{P}$ **ou** $\mathscr{Q}$" est vraie si au moins l'une des deux assertions $\mathscr{P}$ ou $\mathscr{Q}$ est vraie. Elle est fausse si $\mathscr{P}$ est fausse et $\mathscr{Q}$ est aussi fausse.
- Exemple. L'assertion "*Je suis une fille et je porte des lunettes*" est-elle vraie pour toi ?
- Exemple. Si n désigne un entier naturel (on note $n \in \mathbb{N}$), alors :
  - "*n est pair ou n est impair*" est toujours vraie.

  - "*n est positif et n est négatif*" n'est vraie que si $n = 0$.
- **Négation des ET / OU.** La négation de "$\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$" est : "non-$\mathscr{P}$ ou non-$\mathscr{Q}$".
  La négation de "$\mathscr{P}$ ou $\mathscr{Q}$" est : "non-$\mathscr{P}$ et non-$\mathscr{Q}$".
- Exemple. La négation de "*Je suis une fille ET je porte des lunettes* " est "*Je ne suis pas une fille OU je ne porte pas de lunettes*".
  La négation de "*J'aime le chocolat OU j'aime les fraises*" est "*Je n'aime pas le chocolat ET je n'aime pas les fraises*".

Dans la suite, on confondra le terme d'*assertion* avec celui de *proposition*.

Quantificateurs

De nombreuses propositions mathématiques dépendent d'un ou plusieurs paramètres. Par exemple, la proposition $x^2 \geqslant 4$ est vraie pour certaines valeurs du nombre x, et fausse pour d'autres. On notera ainsi $\mathscr{P}(x)$ une proposition $\mathscr{P}$ dépendant d'un paramètre x.
On peut alors distinguer deux grands types de propositions dépendant d'un paramètre : les propositions qui sont vraies pour toutes les valeurs du paramètre, et celles dont on sait qu'il y a (au moins) un paramètre pour lequel elles sont vraies. Bien sûr, il faudra préciser de quel genre de paramètre il s'agit : un nombre entier ? Un nombre réel ? Un entier compris entre 3 et 10 ? Etc.
Pour exprimer ces deux types de propositions, on utilise deux **quantificateurs** : $\forall$ et $\exists$.

- Le quantificateur $\forall$ (appelé quantificateur universel) signifie "**pour tout**". On l'utilise pour exprimer qu'une proposition est vraie pour n'importe laquelle des valeurs d'un paramètre (au sein d'un ensemble à préciser). Ainsi, on notera par exemple :
  $$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathscr{P}(x)$$
  Cela signifie (et se lit) : "*pour tout nombre x réel, on a* $\mathscr{P}(x)$", ou encore "*pour tout nombre x réel, la proposition* $\mathscr{P}(x)$ *est vraie*".
- Exemples.
  - $\forall x \in \mathbb{R} \qquad x^2 \geqslant 0$
  - $\forall x \geqslant 2 \qquad 2x - 3 \geqslant 1$
  - $\forall n \in \mathbb{N} \qquad 2n + 1$ est un entier impair
  - $\forall x \in \,]2,3[\qquad \frac{1}{3} < \frac{1}{x} < \frac{1}{2}$
- Le quantificateur $\exists$ (appelé quantificateur existentiel) signifie "**il existe**". On l'utilise pour exprimer qu'il existe une valeur du paramètre (au sein d'un ensemble à préciser) pour laquelle une proposition est vraie. On note par exemple :
  $$\exists x \in [-5,3] \quad \mathscr{P}(x)$$
  Cela signifie (et se lit) : "*il existe un nombre (réel) entre* -5 *et* 3 *pour lequel* $\mathscr{P}(x)$ *est vraie*".
- Exemples.
  - $\exists x \in \mathbb{R} \quad 3x - 7 = 0$
  - n est un entier pair signifie "$\exists k \in \mathbb{Z} \quad n = 2k$"
  - une fonction f s'annule entre 0 et 1 s'écrit "$\exists x \in [0,1] \quad f(x) = 0$".
- Cela ne signifie pas que la valeur de x pour laquelle l'assertion $\mathscr{P}(x)$ est vraie est unique ! Par exemple, "$\exists x \in \mathbb{R} \quad x(x-2) = 0$" est une proposition qui est vraie : on a bien $x(x-2) = 0$ pour $x = 0$ et pour $x = 2$.

Implication et équivalence

L'implication "$\Longrightarrow$"

Si $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont deux assertions, on peut définir la proposition "*si $\mathscr{P}$ est vraie, alors $\mathscr{Q}$ est vraie*". Cette proposition est très utilisée en mathématiques, on la note : $\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}$ (on lit "$\mathscr{P}$ implique $\mathscr{Q}$").

Remarque. Si "$\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}$" est vraie, on dit souvent que *$\mathscr{P}$ est une condition suffisante pour $\mathscr{Q}$*. En effet, si l'on cherche à montrer que $\mathscr{Q}$ est vraie, il suffit d'obtenir que $\mathscr{P}$ est vraie ! Cependant, $\mathscr{Q}$ peut très bien être vraie sans que $\mathscr{P}$ ne le soit. Réciproquement, $\mathscr{Q}$ est une *condition nécessaire* pour $\mathscr{P}$ car il faut que $\mathscr{Q}$ soit vraie pour que $\mathscr{P}$ le soit (mais cela ne suffit pas forcément).

Exemples.

- "*Je suis à l'Université $\Longrightarrow$ J'ai eu mon bac*" est une implication qui est vraie. En effet avoir son bac est une *condition nécessaire* pour entrer à l'Université !
- "$0 \leqslant x \leqslant 9 \Longrightarrow \sqrt{x} \leqslant 3$" est une implication qui est vraie.
- "$\sin(\theta) = 0 \Longrightarrow \theta = 0$" est fausse (par exemple $\sin(\pi) = 0$ bien que $\pi = 3.14\ldots$ soit non nul).

Équivalence "$\Longleftrightarrow$"

Si les propositions $\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}$ et $\mathscr{Q} \Longrightarrow \mathscr{P}$ sont toutes deux vraies, on note : $\mathscr{P} \Longleftrightarrow \mathscr{Q}$ (on lit "$\mathscr{P}$ équivaut à $\mathscr{Q}$").
Dans le cas d'une équivalence, les deux propositions $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ ont la même valeur de vérité : elles sont soit simultanément vraies soit simultanément fausses.

Exemples.

- "*Je suis à l'Université $\Longleftrightarrow$ J'ai eu mon bac*" est une équivalence qui est fausse ! Le sens direct $\Longrightarrow$ est vrai, mais le sens réciproque $\Longleftarrow$ est faux : ce n'est pas parce qu'on a eu son bac qu'on est à l'Université.
- Pour x un nombre réel, on a l'équivalence : "$5x + 15 < 0 \Longleftrightarrow x < -3$".
- Pour a et b deux nombres réels ou complexes, on a l'équivalence : "$ab = 0 \Longleftrightarrow (a = 0$ ou $b = 0)$".

Proposition contraposée

Les implications $\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}$ et *non-$\mathscr{Q}$ $\Longrightarrow$ non-$\mathscr{P}$* sont équivalentes. En d'autres termes, l'implication "$\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}$" sera vraie si, et seulement si, l'implication "non-$\mathscr{Q} \Longrightarrow$ non-$\mathscr{P}$" est vraie.
La proposition *non-$\mathscr{Q}$ $\Longrightarrow$ non-$\mathscr{P}$* est appelée la **contraposée** de la proposition $\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}$.
Remarque. L'équivalence d'une implication et de sa contraposée signifie que si l'on doit prouver $\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}$, il revient au même de prouver non-$\mathscr{Q} \Longrightarrow$ non-$\mathscr{P}$.
Exemples.

- Si l'on doit démontrer "*Je vais au carnaval $\Longrightarrow$ Je suis maquillé*", et que l'on démontre (sa contraposée) "*Je ne suis pas maquillé $\Longrightarrow$ Je ne vais pas au carnaval*", alors c'est gagné.
- La contraposée de l'implication cartésienne : "*Je pense donc je suis*" est : "*Je ne suis pas donc je ne pense pas*".
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour montrer l'assertion "*n^2 est pair $\Longrightarrow$ n est pair*" il est beaucoup plus facile de prouver la contraposée : "*n est impair $\Longrightarrow$ n^2 est impair*".