Équations différentielles – Partie 2 : Notion d'équation différentielle

Exercice 1.

Vérifier que les fonctions f suivantes sont solutions de l'équation différentielle donnée.

1. $f(x) = -e^{2x}$, $y' = 2y$.
2. $f(x) = \frac{1}{2-x}$, $y' = y^2$.
3. $f(x) = (3+2x)e^x$, $y'' - 2y' + y = 0$.
4. $f(x) = Ce^{-x} + \sin(x) - \cos(x)$ (quelle que soit la constante C), $y' + y = 2\sin(x)$

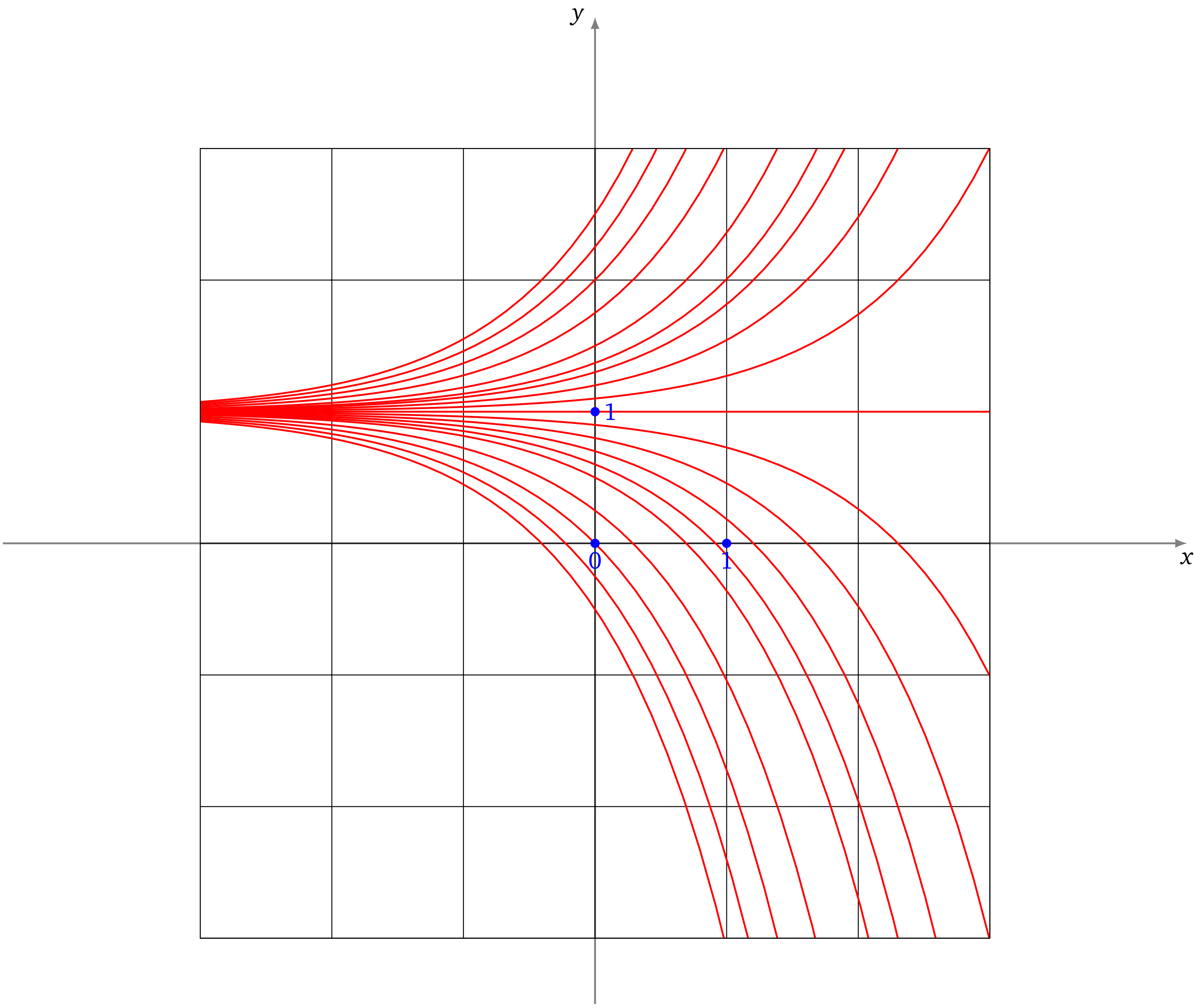
Exercice 2.

Déterminer toutes les solutions constantes des équations différentielles suivantes.

1. $y' + y = 5$
2. $y' = y^2 - y$
3. $y' = y^2 - 4y + 1$
4. $y' = y + x$

Exercice 3.

Le dessin représente quelques solutions de l'équation différentielle $y' = y - 1$.



1. Répondre graphiquement aux questions suivantes :
   (a) Quelle est la limite d'une solution en $-\infty$?
   (b) Quelle est la solution constante ?
   (c) En fonction de la valeur $f(0)$ d'une solution f, discuter si f est croissante ou décroissante et déterminer la limite en $+\infty$.
   (d) Tracer la tangente à la courbe solution qui passe par le point $(0,2)$; en déduire une équation approchée de cette tangente.
   (e) Tracer la tangente à la courbe solution qui passe par le point $(1,-1)$; en déduire une équation approchée de cette tangente.
2. Répondre par le calcul aux questions suivantes (il n'y a pas besoin de résoudre l'équation) :
   (a) Soit f la solution dont le graphe passe par le point $(0,0)$. Combien vaut $f(0)$? Combien vaut $f'(0)$? En déduire la pente de la tangente en ce point, puis l'équation de cette tangente.
   (b) Soit g la solution dont le graphe passe par le point $(1,2)$. Combien vaut $g(1)$? Combien vaut $g'(1)$? En déduire l'équation de la tangente en ce point.

Exercice 4.

Une tasse de café de température $T_0 = 100$ degrés Celsius est posée dans une pièce de température $T_\infty =$

20 degrés. La loi de Newton affirme que la vitesse de décroissance de la température est proportionnelle à l'écart entre sa température $T(t)$ et la température ambiante T_∞.
Sachant qu'au bout de 3 minutes la température du café est passée à 80 degrés, quelle sera sa température au bout de 5 minutes ?
Les questions détaillent les étapes de la résolution de ce problème :

1. Justifier que la fonction température $T(t)$ satisfait l'équation différentielle $y' = -k(y-20)$ pour une certaine constante $k > 0$.
2. Vérifier que $T(t) = Ce^{-kt} + 20$ est solution de cette équation différentielle pour toute constante C.
3. Calculer C en fonction de $T(0)$.
4. Quelle est la température au bout d'un temps très long ?
5. Déterminer la constante k en utilisant que $T(3) = 80$.
6. Trouver la solution du problème.