Cours – Équations différentielles

Les équations différentielles jouent un rôle important en mathématique mais s'appliquent aussi aux autres sciences. Elles apparaissent naturellement en mécanique (par exemple comme équations issues du principe fondamental de la mécanique), en électricité ou pour décrire la désintégration des éléments radioactifs. En biologie, elles permettent de décrire l'évolution des populations (d'animaux, de bactéries...) ou des concentrations de molécules. L'objectif de ce chapitre est double : comprendre ce nouveau type d'équation et savoir résoudre des équations différentielles simples.

Sections

1. **Primitives**
   Thèmes : Rappels sur les primitives qui jouent un rôle important pour la résolution des équations différentielles.
   Objectifs : Connaître la définition d'une primitive. Connaître le lien entre deux primitives d'une même fonction. Connaître les formules des primitives usuelles. Savoir déterminer une primitive.
2. **Notion d'équation différentielle**
   Thèmes : Introduction et motivation aux équations différentielles.
   Objectifs : Comprendre ce qu'est une équation différentielle. Savoir vérifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle.
3. **Équations différentielles** $y' = ay$
   Thèmes : Résolution des équations différentielles $y' = ay$.
   Objectifs : Connaître la formule de la solution d'une équation différentielle $y' = ay$. Comprendre ce qu'est une condition initiale d'une équation différentielle. Comprendre qu'il y a unicité d'une solution lorsqu'on impose une condition initiale. Savoir résoudre une équation différentielle $y' = ay$. Savoir trouver la solution vérifiant une condition initiale donnée.
4. **Équations différentielles** $y' = ay + b$ **et** $y' = ay + f$
   Thèmes : Résolution des équations différentielles $y' = ay + b$ et $y' = ay + f$
   Objectifs : Connaître le vocabulaire : second membre, équation homogène, solution particulière. Comprendre la structure d'une solution générale : "solutions de l'équation homogène + solution particulière". Savoir trouver une solution particulière à l'aide d'indications. Savoir trouver toutes les solutions à partir d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène.

Dans ce chapitre on se permettra de noter la fonction $x \mapsto f(x)$ simplement par $f(x)$ pour alléger l'écriture. Par exemple on dira qu'une primitive de $\cos(x)$ est $\sin(x)$ ou bien que e^x est solution de l'équation différentielle $y' = y$.

Auteurs : Arnaud Bodin, Barnabé Croizat et Christine Sacré de l'université de Lille.
Certaines parties sont tirées d'un travail avec Cécile Mammez. Relecture de Pascal Romon.

Ce travail a été effectué en 2021-2022 dans le cadre d'un projet Hilisit porté Unisciel.

Équations différentielles – Partie 1 : Primitives

Savoir.

- ☐ Connaître la définition d'une primitive.
- ☐ Connaître le lien entre deux primitives d'une même fonction.
- ☐ Connaître les formules des primitives usuelles.

Savoir-faire.

- ☐ Savoir déterminer une primitive.

Primitives

— **Définition.** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I. On dit qu'une fonction F est une **primitive** de f sur I, si pour tout $x \in I$:

$$\boxed{F'(x) = f(x)}$$

— Dans la majorité de nos exemple, les fonctions seront définies sur $\mathbb{R}$ tout entier, ainsi si $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et alors F est une primitive de f.

— Exemples :

  — $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$ est une primitive de $f(x) = x^2$ (sur $\mathbb{R}$) puisque $F'(x) = (\frac{x^3}{3})' = x^2 = f(x)$.

  — $\ln(x)$ est une primitive de $\frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$.

— Trouver une primitive est l'opération inverse du calcul de la dérivée.

— *Exercice*. Trouver une primitive de chacune des fonctions suivantes (en précisant l'intervalle I considéré) :

- x
- $2x - x^2$
- $\cos(x)$
- $\sin(x)$
- e^x
- $\dfrac{3}{x} - \dfrac{7}{x^2} + 1$

Toutes les primitives

— Une primitive n'est pas unique ! Soit $f(x) = x^2$, alors $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$ est une primitive. Mais la fonction $G(x) = \dfrac{x^3}{3} + 2$ est aussi une primitive (dérivez-la pour vérifier). Il y a donc plusieurs primitives. En fait toutes les fonctions $\dfrac{x^3}{3} + C$, où C est une constante, sont des primitives. Nous généralisons ceci à toutes les fonctions :

Proposition. Si $F(x)$ est une primitive de $f(x)$, alors les autres primitives sont de la forme $F(x) + C$ où $C \in \mathbb{R}$ est une constante.

— Une conséquence de cette proposition est la suivante : si $F(x)$ et $G(x)$ sont deux primitives d'une même fonction, alors F et G ne diffèrent que d'une constante. Autrement dit, il existe une constante C telle que $F(x) = G(x) + C$.

— Exemple. Les primitives de $x^4 - 3x + 5$ sont les fonctions $\frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{2}x^2 + 5x + C$, où $C \in \mathbb{R}$ est une constante.

— Exercice. Vérifier que les primitives de la fonction $\frac{1}{\sqrt{x}}$ sont les fonctions $2\sqrt{x} + C$.

Primitives usuelles

Primitives des fonctions classiques

Ici C désigne une constante réelle. Si l'intervalle n'est pas précisé, c'est $I = \mathbb{R}$.

Fonction	**Primitives**
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \in \mathbb{N})$
$\frac{1}{x^n} = x^{-n}$	$\frac{1}{1-n}\frac{1}{x^{n-1}} + C = \frac{x^{1-n}}{1-n} + C \quad (n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}) \quad$ sur $I =]0,+\infty[$ ou $I =]-\infty, 0[$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x) + C \quad$ sur $I =]0,+\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + C \quad$ sur $I =]0,+\infty[$
e^x	$e^x + C$
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$

Ces formules sont à maîtriser ! Mais ce sont juste les formules des dérivées que vous connaissez déjà.

Primitives pour une composition

Ici u est une fonction dérivable sur un intervalle I ; C désigne une constante réelle.

Fonction	**Primitive**
$u'u^n$	$\frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \in \mathbb{N})$
$u'u^{-n}$	$\frac{u^{1-n}}{1-n} + C \quad (n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}) \quad u$ ne s'annulant pas sur I
$\frac{u'}{u}$	$\ln(u) + C$ où $u(x) > 0$ pour tout $x \in I$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + C \quad$ où $u(x) > 0$ pour tout $x \in I$
$u'e^u$	$e^u + C$
$u'\cos(u)$	$\sin(u) + C$
$u'\sin(u)$	$-\cos(u) + C$

— Exemple. Comment calculer une primitive de $f(x) = xe^{x^2}$? Avec $u(x) = x^2$ (et donc $u'(x) = 2x$) on a $2xe^{x^2} = u'(x)e^{u(x)}$ dont une primitive est ainsi $e^{x^2} = e^{u(x)}$. On réécrit alors la fonction dont on recherche une primitive comme $f(x) = \frac{1}{2} \cdot 2xe^{x^2}$: une primitive est donc $F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}$. Si on veut toutes les primitives, ce sont les fonctions $\frac{1}{2}e^{x^2} + C$ où C est une constante.

— Exercice. Calculer une primitive de $\cos(x)\big(\sin(x)\big)^2$.

Équations différentielles – Partie 2 : Notion d'équation différentielle

Savoir.

- ☐ Comprendre ce qu'est une équation différentielle.

Savoir-faire.

- ☐ Savoir vérifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle.

Nous nous intéressons à des équations où l'inconnue à trouver n'est pas un nombre mais une fonction. Par exemple, considérons l'équation $f'(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On cherche toutes les fonctions f possibles satisfaisant cette équation, c'est-à-dire qui sont égales à leur propre dérivée. Vous en connaissez au moins une... Laquelle ? La fonction exponentielle ! Il existe d'autres solutions. En fait, les solutions de cette équation sont les fonctions de la forme $f(x) = Ce^x$ où C est une constante réelle.

Définition d'une équation différentielle

On appelle **équation différentielle** toute équation, où l'inconnue est une fonction f, mettant en relation f et f' (et éventuellement les dérivées successives f'', f''', ...).

Exemples. Les équations suivantes sont des exemples d'équations différentielles :

$$f'(x) = e^x f(x) + x,$$
$$f''(x) = -f'(x) + 2,$$
$$f(x)f'(x) = -\ln(f(x)).$$

Notation. Il faut s'habituer aux notations variées pour une équation différentielle. Voici différentes notations de la même équation :

$f'(x) = -f(x)$ (fonction inconnue f de variable x),

$y'(x) = -y(x)$ (fonction inconnue y de variable x),

$y'(t) = -y(t)$ (fonction inconnue y de variable t),

$y' = -y$ fonction inconnue y : c'est cette dernière notation que nous adoptons, le nom de la variable sera x même s'il n'est pas spécifié dans l'équation.

Exercice. Trouver/deviner une solution (ou mieux plusieurs) des équations différentielles suivantes :

$$y' = -y$$
$$y' = \sin(2x)$$
$$y'(x) = 3y(x)$$
$$y''(x) = y(x)$$

Remarque. Trouver une primitive d'une fonction f, c'est en fait résoudre l'équation différentielle $y' = f$ où l'inconnue est y (appelée F en section précédente) et f est donnée.

Solutions particulières

Résoudre une équation différentielle c'est trouver toutes les fonctions qui satisfont l'équation. En général, c'est un problème très difficile, voire même impossible !

Nous nous placerons dans deux situations plus simples :

- vérifier qu'une fonction donnée est bien solution d'une équation différentielle,
- déterminer les solutions constantes d'une équation différentielle.

Exemple 1

$$y' = 2y + 4x$$

Il s'agit donc de trouver des fonctions f telles que $f'(x) = 2f(x) + 4x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- Vérifier que $f(x) = -2x - 1$ est solution.
- Vérifier que $f(x) = \exp(2x) - 2x - 1$ est aussi solution.
- Plus généralement vérifier que $f(x) = C\exp(2x) - 2x - 1$ est solution (quel que soit $C \in \mathbb{R}$).

Les deux premiers points sont des cas particuliers du troisième (avec $C = 0$ ou $C = 1$). Faisons le cas général. Soit $f(x) = C\exp(2x) - 2x - 1$. On va calculer ce qui correspond au terme de gauche, puis au terme de droite de l'équation $y' = 2y + 4x$:

- on calcule d'abord la dérivée f' : $\quad f'(x) = 2C\exp(2x) - 2$,
- puis $2f(x) + 4x$:

$$2f(x) + 4x = 2\big(C\exp(2x) - 2x - 1\big) + 4x = 2C\exp(2x) - 2.$$

On a donc prouvé que $f'(x) = 2f(x) + 4x$ (pour tout $x \in \mathbb{R}$), donc notre fonction f est bien solution de l'équation différentielle $y' = 2y + 4x$, et ceci quelle que soit la constante $C \in \mathbb{R}$.

Exemple 2 On considère l'équation différentielle

$$y'(x) = y(x)^2 - 1 \tag{E}$$

Déterminons les solutions constantes de cette équation différentielle. Pour cela, rappelons les points suivants :

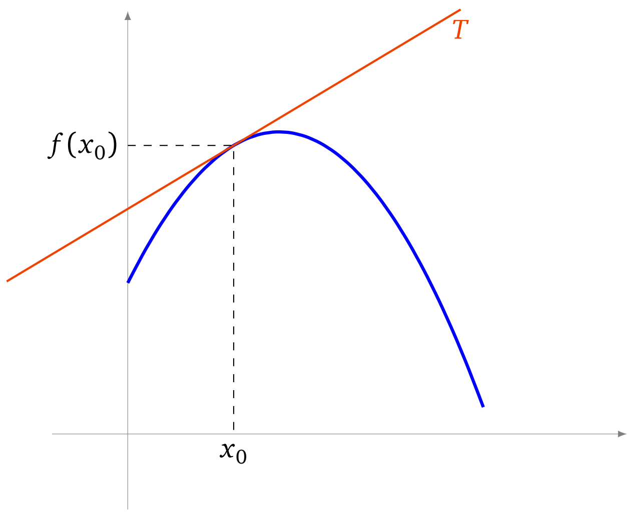
- Une fonction définie et dérivable sur un intervalle I est constante si et seulement si sa dérivée est nulle sur I.
- Pour connaître une fonction f constante sur un intervalle I, il suffit de la connaître la valeur en un point $x_0 \in I$.

Considérons une fonction constante $f(x) = k$ (pour tout x), alors on sait que $f'(x) = 0$ (pour tout x). Si en plus f est solution de (E) alors on doit résoudre l'équation réelle (équation dont l'inconnue est un réel que nous noterons k)

$$0 = k^2 - 1.$$

Les deux solutions réelles sont $k = 1$ ou $k = -1$. Au final, l'équation différentielle (E) possède deux solutions constantes : $f(x) = 1$ et $f(x) = -1$. Notons que l'équation possède peut-être aussi des solutions non-constantes que nous n'avons pas déterminées.
Ajoutons enfin qu'une équation différentielle ne possède pas nécessairement de solutions constantes. Essayez par exemple de trouver des solutions constantes à l'équation différentielle $y' + 2y = 4x^2$: vous n'y parviendrez pas !

Tangente (rappels)



La dérivée en x_0 d'une fonction f est le coefficient directeur de la tangente au point $(x_0, f(x_0))$ du graphe de f.
L'équation de cette tangente est :

$$\boxed{y = (x - x_0) f'(x_0) + f(x_0)}$$

Exemple : quelle est l'équation de la tangente au graphe de $f(x) = e^{2x}$ en $x_0 = 1$? On a $f'(x) = 2e^{2x}$, $f(x_0) = f(1) = e^2$, $f'(x_0) = f'(1) = 2e^2$. L'équation de la tangente est $y = (x-1)2e^2 + e^2$, ce qui s'écrit aussi $y = 2e^2 x - e^2$.

Équation différentielle et tangente

Une équation différentielle donne une relation entre une fonction solution et sa dérivée. On peut ainsi obtenir des informations sur la tangente au graphe de cette solution, parfois on n'a même pas besoin de calculer explicitement la solution.
Exemple. On considère l'équation (E) : $y' = xy + 1$ (que l'on ne cherchera pas à résoudre).

— *Quelle est l'équation de la tangente en $x = 0$ au graphe de la solution f qui vérifie $f(0) = 1$?*
  On sait que cette tangente passe par le point $(0, 1)$ car $f(0) = 1$, mais on doit en plus connaître le coefficient directeur qui est donné par $f'(0)$.
  Comme f est solution de l'équation différentielle (E) alors $f'(x) = xf(x) + 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. En particulier pour $x = 0$ on obtient $f'(0) = 0 \cdot f(0) + 1$, donc $f'(0) = 1$. Ainsi la tangente cherchée passe par le point $(0, 1)$ et a pour pente 1, c'est donc la droite d'équation $y = x + 1$.

— *Quelle est l'équation de la tangente en $x = 2$ au graphe de la solution g qui vérifie $g(2) = 3$?*
  Comme $g(2) = 3$ cette tangente passe par le point $(2, 3)$. Comme g est solution de l'équation différentielle (E) alors $g'(x) = xg(x) + 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. En particulier pour $x = 2$ on obtient $g'(2) = 2 \cdot g(2) + 1$, donc $g'(2) = 7$. Ainsi la tangente cherchée passe par le point $(2, 3)$ et a pour pente 7, c'est donc la droite d'équation $y = 7(x-2) + 3$, qui s'écrit aussi $y = 7x - 11$.

Notez que l'on n'a pas calculé explicitement ni $f(x)$, ni $g(x)$.

Modélisation

Le concept d'équation différentielle intervient dans de nombreux domaines scientifiques, entre autres :

— En biologie avec l'étude d'une population (comme la population de micro-organismes) où l'on connaît des règles pour décrire sa croissance (comme le taux de natalité/mortalité).

— En physique avec notamment la loi fondamentale de la mécanique qui relie l'accélération à la somme des forces. Cela conduit à une équation différentielle car l'accélération est la dérivée de la vitesse, et donc la dérivée seconde de la position. L'étude du mouvement des corps célestes en astronomie, ainsi que la physique quantique (avec la célèbre équation de Schrödinger) sont également des domaines où les équations différentielles sont omniprésentes.

— En radioactivité avec l'étude de la désintégration de noyaux radioactifs et le calcul de la demi-vie radioactive qui permet en particulier la datation des matières organiques anciennes.

Exemple. "*On étudie la population de chenilles qui s'est introduite dans un groupe d'arbres. On note $N(t)$ le nombre de chenilles au cours du temps. Des mesures effectuées montrent que le taux de croissance des chenilles au temps t est de 4% de la population.*"
Ce texte signifie que la variation du nombre de chenilles au temps t (c'est-à-dire la dérivée du nombre de chenilles au temps t, donc $N'(t)$) est proportionnelle à l'effectif des chenilles au temps t (c'est-à-dire proportionnelle à $N(t)$) et que le coefficient de proportionnalité vaut 0.04 (la population est croissante donc le coefficient est positif).
L'équation différentielle associée au problème est donc :

$$N'(t) = 0,04\, N(t).$$

Avec nos notations habituelles cette équation différentielle est : $y' = 0,04y$.

Équations différentielles – Partie 3 : $y' = ay$

Savoir.

- ☐ Connaître la formule de la solution d'une équation différentielle $y' = ay$.
- ☐ Comprendre ce qu'est une condition initiale d'une équation différentielle.
- ☐ Comprendre qu'il y a unicité d'une solution lorsqu'on impose une condition initiale.

Savoir-faire.

- ☐ Savoir résoudre une équation différentielle $y' = ay$.
- ☐ Savoir trouver la solution vérifiant une condition initiale donnée.

Un exemple

Une équation différentielle a en général une infinité de fonctions solutions.
Considérons par exemple l'équation différentielle :

$$y'(x) = y(x) \tag{1}$$

Alors les solutions de (1) sont les fonctions :

$$y(x) = Ce^x \qquad \text{où } C \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, chaque valeur de la constante C fournit une fonction solution que l'on note y_C : par exemple pour $C = 1$, $y_1(x) = e^x$ est solution, pour $C = -2$, $y_{-2}(x) = -2e^x$ est solution, pour $C = 0$, $y_0(x) = 0$ est solution...
Pour n'avoir qu'une seule solution, on peut imposer une condition initiale

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) & \text{équation différentielle} \\ y(0) = 3 & \text{condition initiale} \end{cases} \tag{2}$$

Les solutions de l'équation différentielle sont de la forme $y(x) = Ce^x$, mais on veut $y(0) = 3$. Comme $y(0) = Ce^0 = C$, on doit avoir $C = 3$. Ainsi l'unique solution du problème (2) est la fonction $y(x) = 3e^x$.

Exercice. Considérons l'équation différentielle avec condition initiale :

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) \\ y(1) = 2 \end{cases} \tag{3}$$

Trouver l'unique solution de ce problème. (Attention ce n'est pas $y(x) = 2e^x$!)

$y' = ay$

Considérons l'équation différentielle $y' = ay$ où $a \in \mathbb{R}$ est une constante fixée. Cette équation s'appelle une *équation différentielle homogène linéaire d'ordre* 1 *à coefficients constants*.

Théorème. Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ sont les fonctions définies par $f(x) = Ce^{ax}$ où $C \in \mathbb{R}$ est une constante.

Exemples.

— $y' = 6y$: ici $a = 6$ donc les solutions sont les fonctions $x \mapsto Ce^{6x}$ quelle que soit la constante C. Il y a donc une infinité de solutions par exemple $x \mapsto 8e^{6x}$ (pour $C = 8$), $x \mapsto \pi e^{6x}$ (pour $C = \pi$), $x \mapsto 0$ (pour $C = 0$)...

— $2y' + 4y = 0$: cette équation s'écrit aussi $y' = -2y$. Ici $a = -2$ (attention au signe !), les solutions sont les fonctions Ce^{-2x} où C est une constante réelle.

Condition initiale

Définition

Pour une équation différentielle $y' = ay$, une **condition initiale** c'est le fait d'imposer une égalité du type :

$$y(x_0) = y_0$$

où $x_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0 \in \mathbb{R}$ sont des constantes.

Théorème d'unicité. Une équation différentielle $y' = ay$ avec condition initiale admet une unique solution.

Exemple.

$$y'(x) = 2y(x) \quad \text{et} \quad y(0) = 4$$

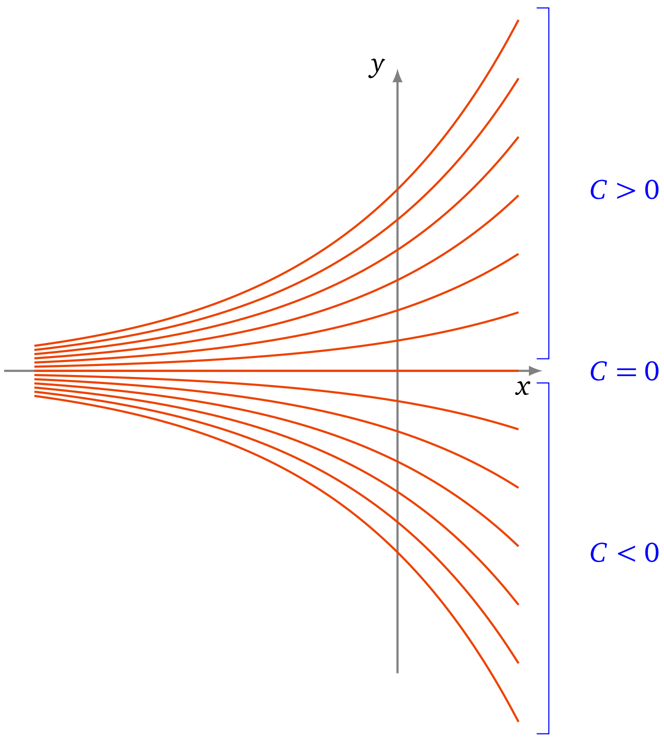
Les solutions de l'équation différentielle $y' = 2y$ sont les fonctions définies par $f(x) = Ce^{2x}$ où $C \in \mathbb{R}$. Mais nous voulons en plus que la fonction solution vérifie la condition initiale $f(0) = 4$. Cela entraîne $Ce^0 = 4$, donc $C = 4$. Ainsi la seule solution au problème est la fonction $f(x) = 4e^{2x}$. Pour se rassurer, c'est une bonne idée de vérifier que $f' = 2f$ et $f(0) = 4$.

Courbes solutions

Une **courbe solution** d'une équation différentielle (E) est le graphe d'une solution de (E).
Pour l'équation différentielle

$$y'(x) = y(x)$$

on sait que les solutions sont les $y(x) = Ce^x$, où $k \in \mathbb{R}$ est une constante. Ci-dessous sont tracés quelques graphes de ces solutions.



Pour une équation $y' = ay$ le théorème d'unicité se reformule ainsi :

« Par chaque point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ passe une et une seule courbe solution. »

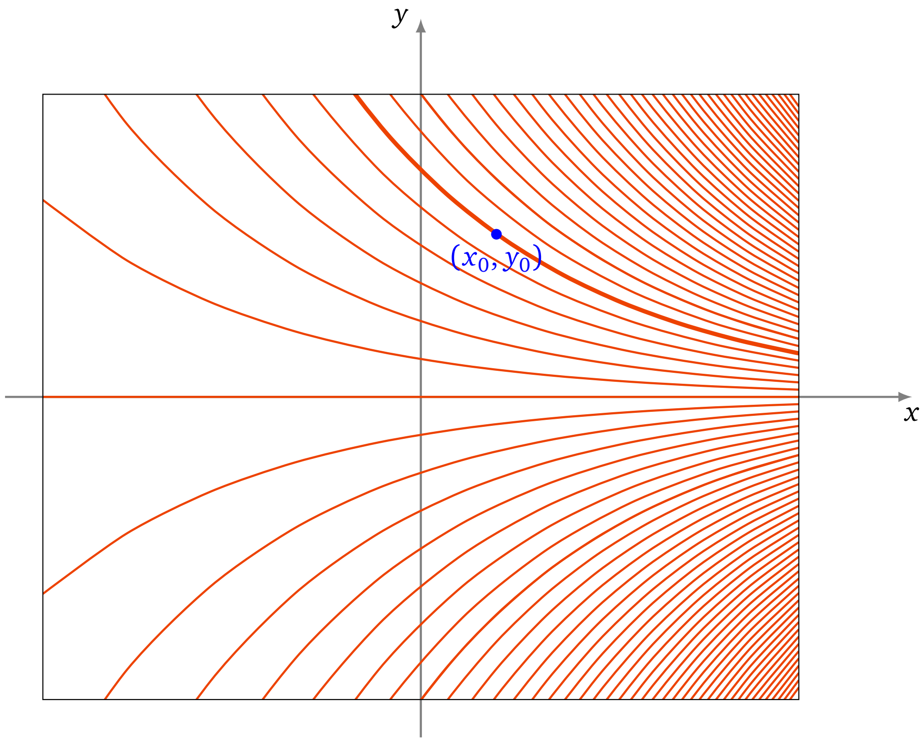
En particulier :

« Deux courbes solutions ne s'intersectent pas. »

Exemple. Les solutions de l'équation différentielle $3y' = -y$ sont les

$$f(x) = Ce^{-\frac{1}{3}x} \quad C \in \mathbb{R}.$$

Pour chaque point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, il existe une unique solution y telle que $y(x_0) = y_0$. Le graphe de cette solution est la courbe solution passant par (x_0, y_0).



Équations différentielles – Partie 4 : $y' = ay + b$ et $y' = ay + f$

Savoir.

- ☐ Connaître le vocabulaire : second membre, équation homogène, solution particulière.
- ☐ Comprendre la structure d'une solution générale : "solutions de l'équation homogène + solution particulière".

Savoir-faire.

- ☐ Savoir trouver une solution particulière à l'aide d'indications.
- ☐ Savoir trouver toutes les solutions à partir d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène.

Nous allons maintenant résoudre des équations différentielles un peu plus compliquées du type $y' = ay + b$ (où a et b sont des constantes) et plus généralement du type $y' = ay + f$ où a est une constante mais où f est une fonction.

Vocabulaire

Considérons l'équation différentielle

$$y' = ay + b \tag{E}$$

où $a, b \in \mathbb{R}$, ou bien plus généralement

$$y' = ay + f \tag{E}$$

où $a \in \mathbb{R}$ et $x \mapsto f(x)$ est une fonction.
Vocabulaire.

- b ou $f(x)$ s'appelle le **second membre** de l'équation (E) (cette terminologie se justifie car l'équation peut aussi s'écrire $y' - ay = b$ ou $y' - ay = f$ en mettant d'un côté tous les termes en y).
- Une **solution particulière** c'est n'importe quelle fonction $y_p(x)$ solution de l'équation originelle (E).
- L'**équation homogène** associée à (E) est

$$y' = ay \tag{E_h}$$

  que l'on peut aussi écrire $y' - ay = 0$. C'est l'équation de départ sans son second membre. On note $y_h(x)$ les solutions de l'équation homogène.

Exemple 1. Soit l'équation (E) : $y' = 2y + 7$.

- L'équation homogène est (E_h) : $y' = 2y$.
- Le second membre est $b = 7$.

Exemple 2. Soit l'équation (E) : $3y' + 7y = 2\cos(x)$.

- L'équation homogène est (E_h) : $3y' + 7y = 0$, que l'on peut aussi écrire $y' = -\frac{7}{3}y$.
- Le second membre est $f(x) = 2\cos(x)$.

Structure des solutions

Reprenons une équation différentielle avec second membre

$$y' = ay + b \qquad \text{ou} \qquad y' = ay + f \tag{E}$$

On sait résoudre l'équation homogène associée (E_h) : $y' = ay$, les solutions sont les fonctions $y_h(x) = Ce^{ax}$ où $C \in \mathbb{R}$.
Imaginons que l'on connaisse en plus une solution particulière $y_p(x)$ de l'équation originale (E).

Solutions d'une équation différentielle avec second membre.
Les solutions de (E) sont les fonctions $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$.
Autrement dit, on trouve toutes les solutions en ajoutant une solution particulière (y_p) aux solutions de l'équation homogène (y_h).

Comme on sait résoudre l'équation homogène $y' = ay$ alors la recherche de la solution générale de (E) se réduit donc à la recherche d'une solution particulière. Pour trouver cette solution particulière des indications vous seront fournies.

Exemples

Exemple 1. Résoudre l'équation $(E) : y' = 2y + 7$ en cherchant une solution particulière sous la forme d'une fonction constante.

— *Équation homogène.* L'équation homogène est $(E_h) : y' = 2y$, les solutions sont les $y_h(x) = Ce^{2x}$ pour chaque $C \in \mathbb{R}$.

— *Solution particulière.* Cherchons une solution constante de (E). Soit $y_p(x) = k$, alors $y_p'(x) = 0$, donc l'équation (E) devient $0 = 2k + 7$, ce qui implique $k = -\frac{7}{2}$. Une solution particulière est donc $y_p(x) = -\frac{7}{2}$.

— *Solutions générales.* Les solutions générales de (E) sont donc les fonctions de la forme "les solutions de l'équation homogène + une solution particulière" :

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x),$$

c'est-à-dire pour notre exemple

$$y(x) = Ce^{2x} - \frac{7}{2} \qquad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$

Chaque valeur de la constante C donne une solution.

Exemple 2. Résoudre l'équation $(E) : y' + y = x^2$ en cherchant une solution particulière sous la forme d'une fonction polynomiale de degré 2, $y_p(x) = ax^2 + bx + c$.

— *Équation homogène.* L'équation homogène est $(E_h) : y' + y = 0$, c'est-à-dire $y' = -y$, dont les solutions sont les $y_h(x) = Ce^{-x}$ pour chaque $C \in \mathbb{R}$.

— *Solution particulière.* Cherchons une solution à (E) sous la forme polynomiale indiquée : $y_p(x) = ax^2 + bx + c$. On a alors $y_p'(x) = 2ax + b$, donc l'équation (E) devient $(2ax + b) + (ax^2 + bx + c) = x^2$. Pour trouver a, b, c on regroupe les coefficients devant x^2, x, et 1 pour ensuite effectuer une identification :

$$a \cdot x^2 + (2a + b) \cdot x + (b + c) \cdot 1 = x^2$$

ce qui donne

$$a \cdot x^2 + (2a + b) \cdot x + (b + c) \cdot 1 = x^2 = 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0 \cdot 1.$$

On identifie les coefficients du polynômes de gauche avec les coefficients du polynôme de droite afin d'obtenir :

$$a = 1 \qquad 2a + b = 0 \qquad b + c = 0$$

et donc

$$a = 1 \qquad b = -2 \qquad c = 2.$$

Ainsi une solution particulière est :

$$y_p(x) = x^2 - 2x + 2.$$

— *Solutions générales.* Les solutions générales de (E) sont donc les fonctions :

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x),$$

c'est-à-dire

$$y(x) = Ce^{-x} + x^2 - 2x + 2 \qquad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$