Exercices – Logique, ensembles et raisonnements

0.1 Logique

Exercice 1.

Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.

1. "$6 \times 7 = 42$"
2. "$8 \times 8 = 49$"
3. "Tout entier impair est multiple de 2."
4. "Tout nombre réel non nul admet un inverse."
5. "Il existe une solution réelle de l'équation $x^2 + x + 1 = 0$."
6. "Il existe une solution réelle de l'équation $x^2 - 3x + 1 = 0$."

Correction 1.

1. Vrai : "$6 \times 7 = 42$"
2. Faux : "$8 \times 8 = 49$". En revanche, l'assertion "$8 \times 8 = 64$" est vraie.
3. Faux : "Tout entier impair est multiple de 2." Ce qui est vrai c'est "Tout entier **pair** est multiple de 2."
4. Vrai : "Tout réel non nul admet un inverse." En effet, si $x \neq 0$, son inverse existe et c'est $\frac{1}{x}$.
5. Faux : "Il existe une solution réelle de $x^2+x+1 = 0$." Le discriminant $\Delta = -3$ est strictement négatif. Il n'y a pas de solution réelle.
6. Vrai : "Il existe une solution réelle de $x^2-3x+1 = 0$." Le discriminant $\Delta = 5$ est strictement positif. Il y a deux solutions réelles (donc il y en a au moins une !).

Exercice 2.

Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. Dans ces phrases x désigne un nombre réel quelconque fixé ($x \in \mathbb{R}$) et n un entier naturel quelconque ($n \in \mathbb{N}$).

1. "($x > 0$) ou ($x \leqslant 0$)"
2. "($x^2 \geqslant 0$) ou ($x^2 \leqslant 0$)"
3. "(n est divisible par 2) ou (n est divisible par 3)"
4. "non($x^4 < 0$)"
5. "($x > 3$) ou non($x \geqslant 4$)"
6. "(n est impair) et (n est divisible par 2)"
7. "(n est pair) ou (non(n est divisible par 2))"
8. "($x > 0$) ou ($x < 0$) ou ($x = 0$)"
9. "($x > 0$) et (non($x > 0$))".

Correction 2.

1. Vrai : "($x > 0$) ou ($x \leqslant 0$)". En français : un réel est soit strictement positif ou bien négatif ou nul.

2. Vrai : "($x^2 \geqslant 0$) ou ($x^2 \leqslant 0$)". Cette phrase est vraie car on a toujours $x^2 \geqslant 0$. Comme un côté du "ou" est vrai (et même si l'autre est faux), la phrase est vraie.
3. Faux : "(n est divisible par 2) ou (n est divisible par 3)". La phrase n'est pas vraie pour tous les entiers n, par exemple $n = 5$, n'est ni divisible par 2, ni divisible par 3.
4. Vrai : "non($x^4 < 0$)". Pour un réel quelconque $x^4 = (x^2)^2 \geqslant 0$, donc "$x^4 < 0$" est faux, mais alors sa négation "non($x^4 < 0$)" est vraie. Remarquez que la proposition "non($x^4 < 0$)" peut en fait s'écrire "($x^4 \geqslant 0$)" qui est bien vraie.
5. Vrai : "($x > 3$) ou non($x \geqslant 4$)". On peut récrire la phrase sous la forme "($x > 3$) ou ($x < 4$)" qui est vraie (quel que soit x).
6. Faux : "(n est impair) et (n est divisible par 2)". Un entier ne peut être pair et impair en même temps.
7. Vrai : "(n est pair) ou (non(n est divisible par 2))" On peut récrire la phrase sous la forme "(n est pair) ou (n est impair)" qui est vraie, car un entier est soit pair, soit impair.
8. Vrai : "($x > 0$) ou ($x < 0$) ou ($x = 0$)". Un entier est soit strictement positif, soit strictement négatif, soit nul.
9. Faux. "($x > 0$) et (non($x > 0$))". De façon générale $\mathscr{P}$ et non-$\mathscr{P}$ est toujours fausse : on ne peut avoir une proposition vraie et sa négation aussi !

Exercice 3.

Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.

1. $\forall n \in \mathbb{N} \quad n$ est un nombre premier
2. $\exists n \in \mathbb{N} \quad n$ est un nombre premier
3. $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 + 1 \geqslant 1$
4. $\exists x \in \mathbb{R} \quad x^2 + 1 \geqslant 1$
5. $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad x > \frac{1}{x}$
6. $\exists x \in \mathbb{R}_+^* \quad x > \frac{1}{x}$
7. $\exists x \in \mathbb{R} \quad x^2 + x - 1 = 0$
8. $\exists x \in \mathbb{Z} \quad x^2 + x - 1 = 0$

Correction 3.

1. Faux : $\forall n \in \mathbb{N} \quad n$ est un nombre premier . La phrase dit "Tout entier est un nombre premier" ce qui est faux, car par exemple $n = 4$ n'est pas un nombre premier.
2. Vrai : $\exists n \in \mathbb{N} \quad n$ est un nombre premier . La phrase dit "Il existe un entier qui est un nombre premier" ce qui est vrai, en prenant par exemple $n = 5$.
3. Vrai : $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 + 1 \geqslant 1$. Preuve : pour n'importe quel $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geqslant 0$, donc en ajoutant 1 de part et d'autre : $x^2 + 1 \geqslant 1$.
4. Vrai : $\exists x \in \mathbb{R} \quad x^2 + 1 \geqslant 1$. C'est vrai aussi, mais pour le prouver il suffit de dire que, par exemple, $x = 10$ convient, car pour $x = 10$ on a bien $x^2 + 1 = 101 \geqslant 1$.
5. Faux : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad x > \frac{1}{x}$. Un contre-exemple est $x = \frac{1}{2}$, pour lequel $\frac{1}{x} = 2$.
6. Vrai : $\exists x \in \mathbb{R}_+^* \quad x > \frac{1}{x}$. Il suffit de dire que, par exemple, $x = 3$ convient.
7. Vrai : $\exists x \in \mathbb{R} \quad x^2 + x - 1 = 0$. Le discriminant $\Delta = 5$ est strictement positif. Il y a deux solutions réelles (donc il y en au moins une).
8. Faux : $\exists x \in \mathbb{Z} \quad x^2 + x - 1 = 0$. Les seules solutions sont $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ qui sont des réels, mais pas des entiers.

Exercice 4.

Remplacer les pointillés des propositions suivantes par le symbole le plus adapté parmi $\Longrightarrow$, $\Longleftarrow$ ou $\Longleftrightarrow$.

Dans ces phrases x et y désignent des nombres réels et n un entier naturel.

1. $x > 0 \quad \ldots\ldots \quad x^2 > 0$
2. $-x < 0 \quad \ldots\ldots \quad 3x > 1$
3. $x^2 = 4 \quad \ldots\ldots \quad (x = 2)$ ou $(x = -2)$
4. $x \neq y \quad \ldots\ldots \quad x^2 \neq y^2$
5. $xy = 0 \quad \ldots\ldots \quad x = 0$ ou $y = 0$
6. $xy = 0 \quad \ldots\ldots \quad x = 0$ et $y = 0$
7. $xy \neq 0 \quad \ldots\ldots \quad x \neq 0$ ou $y \neq 0$
8. $n \geqslant 3$ et n impair $\quad \ldots\ldots \quad n \geqslant 3$ et n un nombre premier
9. $n \geqslant 3$ et n pair $\quad \ldots\ldots \quad n \geqslant 3$ et n n'est pas un nombre premier

Correction 4.

1. $x > 0 \Longrightarrow x^2 > 0$ (la réciproque $\Longleftarrow$ est fausse, prenez par exemple $x = -2$).
2. $-x < 0 \Longleftarrow 3x > 1$ (l'implication directe $\Longrightarrow$ est fausse, prenez par exemple $x = \frac{1}{10}$).
3. $x^2 = 4 \Longleftrightarrow (x = 2)$ ou $(x = -2)$
4. $x \neq y \Longleftarrow x^2 \neq y^2$ (l'implication directe $\Longrightarrow$ est fausse, prenez par exemple $x = 2$, $y = -2$).
5. $xy = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ ou $y = 0$
6. $xy = 0 \Longleftarrow x = 0$ et $y = 0$
7. $xy \neq 0 \Longrightarrow x \neq 0$ ou $y \neq 0$: il s'agit de la contraposée de l'implication précédente !
8. $n \geqslant 3$ et n impair $\Longleftarrow n \geqslant 3$ et n est un nombre premier (l'implication directe est fausse pour $n = 9$ par exemple).
9. $n \geqslant 3$ et n pair $\Longrightarrow n \geqslant 3$ et n n'est pas un nombre premier : c'est la contraposée de l'implication précédente ; $n = 9$ convient donc encore comme contre-exemple pour vérifier que l'implication réciproque n'est pas vraie.

Exercice 5.

Écrire la contraposée de chacune des propositions suivantes. Dans ces phrases, x désigne un réel et n un entier naturel quelconque. (On ne demande pas de dire si les phrases sont vraies ou fausses.)

1. Il pleut $\Longrightarrow$ Je prends mon parapluie
2. $x^2 \neq 0 \Longrightarrow x \neq 0$
3. $7x - 1 > 20 \Longrightarrow x > 3$
4. n^2 est pair $\Longrightarrow$ n est pair
5. Si un triangle est rectangle alors le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des côtés opposés.

Indications 5.

La contraposition de "$\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}$" est "non($\mathscr{Q}$) $\Longrightarrow$ non($\mathscr{P}$)".

Correction 5.

La contraposition de "$\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}$" est "non($\mathscr{Q}$) $\Longrightarrow$ non($\mathscr{P}$)". Les contrapositions sont :

1. Je ne prends pas mon parapluie $\implies$ Il ne pleut pas
2. $x = 0 \implies x^2 = 0$
3. $x \leqslant 3 \implies 7x - 1 \leqslant 20$
4. n est impair $\implies n^2$ est impair
5. Si le carré de l'hypoténuse n'est pas égal à la somme des carrés des côtés opposés alors le triangle n'est pas rectangle.

0.2 Ensembles

Exercice 6.

Remplacer les pointillés par le symbole le plus adapté parmi $\in$, $\notin$, $\subset$, $\supset$.

1. $[3,5]$ ...... $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x \leqslant 7\}$
2. 2 ...... $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geqslant 5\}$
3. $\pi = 3.14\ldots$ ...... $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
4. $[1,9]$ ...... $[1,4] \cup [5,9]$
5. $\{0\}$ ...... $\mathbb{R}_+$
6. 0 ...... $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$
7. $[-7,5] \cap [-2,8]$ ...... $[-1,1]$

Indications 6.

Rappels : $\in$ "appartient à" ; $\notin$ "n'appartient pas à" sont utilisés pour des éléments, $\subset$ "est contenu dans", $\supset$ "contient" sont utilisés pour des ensembles.

Correction 6.

1. $[3,5] \subset \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x \leqslant 7\}$ car on rappelle que $[3,5] = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leqslant x \leqslant 5\}$.
2. $2 \notin \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geqslant 5\}$
3. $\pi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
4. $[1,9] \supset [1,4] \cup [5,9]$
5. $\{0\} \subset \mathbb{R}_+$ (et pas "$\in$" car $\{0\}$ est un ensemble, ce n'est pas l'élément 0).
6. $0 \notin \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ ($0 \in \mathbb{N}$ donc on le retire ici de $\mathbb{Z}$).
7. $\big([-7,5] \cap [-2,8]\big) \supset [-1,1]$

Exercice 7.

Déterminer le domaine de définition de la fonction $x \mapsto f(x)$ dans chacun des cas suivants :

1. $f(x) = \sqrt{-x+3}$
2. $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2-1}$
3. $f(x) = \exp(x^2+1)$
4. $f(x) = \ln(5x+8)$
5. $f(x) = \ln\big((x-1)(x+2)\big)$
6. $f(x) = \sqrt{x^2+3x-2}$

Indications 7.

L'expression $\sqrt{x}$ est définie pour $x \geqslant 0$. L'expression $\frac{1}{x}$ est définie pour $x \neq 0$. L'expression $\ln(x)$ est définie pour $x > 0$.

Correction 7.

On désigne par $\mathscr{D}_f$ l'ensemble de définition de f.

1. $f(x) = \sqrt{-x+3}$. On doit avoir $-x+3 \geqslant 0$, c'est-à-dire $3 \geqslant x$, donc $\mathscr{D}_f =]-\infty, 3]$.
2. $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2-1}$. Les dénominateurs ne doivent pas s'annuler. Les dénominateurs s'annulent lorsque $x = 0$ ou $x^2 - 1 = 0$, c'est-à-dire $x \in \{0, 1, -1\}$. Ainsi
$$\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0,1,-1\} =]-\infty, -1[\cup]-1, 0[\cup]0, 1[\cup]1, +\infty[.$$
3. $f(x) = \exp(x^2+1)$. Cette expression est définie pour tout x réel : $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.
4. $f(x) = \ln(5x+8)$. On doit avoir $5x+8 > 0$, c'est-à-dire $x > -\frac{8}{5}$, donc $\mathscr{D}_f =]-\frac{8}{5}, +\infty[$.
5. $f(x) = \ln\big((x-1)(x+2)\big)$.
On étudie le signe de $(x-1)(x+2)$ (tableau de signes immédiat plutôt que développement et étude du signe d'un trinôme selon ses racines), qui est strictement positif pour $x > 1$ et aussi pour $x < -2$. Donc $\mathscr{D}_f =]-\infty, -2[\cup]1, +\infty[$.
6. $f(x) = \sqrt{x^2+3x-2}$. On étudie le signe de x^2+3x-2. Pour cela on cherche d'abord les solutions de $x^2+3x-2 = 0$. Les racines sont $x_1 = \frac{-3-\sqrt{17}}{2}$ et $x_2 = \frac{-3+\sqrt{17}}{2}$. Le trinôme x^2+3x-2 est positif à l'extérieur des racines, donc $\mathscr{D}_f =]-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty[$.

Exercice 8.

Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par $f(x) = 2x+1$ et $g(x) = x^2 - 3x$.

1. Déterminer l'expression de la fonction $f \circ g$.
2. Déterminer l'expression de la fonction $g \circ f$.
3. Montrer que $(g \circ f)(\frac{-1}{2}) = 0$ et en déduire, pour $x \in \mathbb{R}$, la factorisation de l'expression $(g \circ f)(x)$.

Indications 8.

$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$
$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$
Si un polynôme $P(X)$ s'annule en $X = \alpha$, alors il se factorise par $(X - \alpha)$.

Correction 8.

1. $f \circ g$
$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f(x^2-3x) = 2(x^2-3x)+1 = 2x^2-6x+1.$$
2. $g \circ f$
$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(2x+1) = (2x+1)^2 - 3(2x+1) = (4x^2+4x+1)-(6x+3) = 4x^2-2x-2.$$
3. Calculons $(g \circ f)(\frac{-1}{2})$.
D'une part $f(-\frac{1}{2}) = 2(-\frac{1}{2})+1 = 0$. Donc $(g \circ f)(\frac{-1}{2}) = g(0) = 0^2 - 3 \times 0 = 0$.
D'autre part, on a calculé que $(g \circ f)(x) = 4x^2-2x-2$. Donc on vient de prouver que $-\frac{1}{2}$ est une racine de $4x^2-2x-2$. On en déduit $4x^2-2x-2 = a(x+\frac{1}{2})(x-b)$. Par identification on trouve $a = 4$ et $b = 1$. Conclusion : $4x^2-2x-2 = 4(x+\frac{1}{2})(x-1)$.

Exercice 9.

On veut déterminer la bijection réciproque de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{2x-1}{x-3}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Résoudre l'équation $y = f(x)$, c'est-à-dire déterminer x en fonction de y. Indication : exprimer x sous la forme $x = \frac{ay+b}{cy+d}$. Quelle valeur y_0 de y faut-il exclure ?
3. On définit $g(y) = \frac{ay+b}{cy+d}$ (où a, b, c, d ont été déterminés à la question précédente). Montrer que g est la bijection réciproque de f, c'est-à-dire

$$(g \circ f)(x) = x \qquad \text{pour tout } x \neq 3$$

et

$$(f \circ g)(y) = y \qquad \text{pour tout } y \neq y_0.$$

Indications 9.

On calcule x en fonction de y. En isolant x, on doit trouver : $x = \frac{3y-1}{y-2}$.

Correction 9.

1. Le domaine de définition de $f(x) = \frac{2x-1}{x-3}$ est $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.
2. Fixons y et résolvons l'équation $y = f(x)$, avec $x \neq 3$, on a les équivalences :

$$\begin{aligned} y = f(x) \iff y = \frac{2x-1}{x-3} &\iff (x-3)y = 2x-1 \\ &\iff xy - 2x = 3y - 1 \iff x(y-2) = 3y-1 \\ &\iff x = \frac{3y-1}{y-2} \quad \text{ et } y \neq 2 \end{aligned}$$

Ces calculs sont valables pour $x \neq 3$ et $y \neq 2$. (On pourrait vérifier que l'équation $f(x) = 2$ n'a pas de solution.)

3. Définissons $g(y) = \frac{3y-1}{y-2}$ comme fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Vérifions que g est la bijection réciproque de f.

D'une part, avec $x \neq 3$,

$$g \circ f(x) = g\left(\frac{2x-1}{x-3}\right) = \frac{3\frac{2x-1}{x-3} - 1}{\frac{2x-1}{x-3} - 2} = \frac{3(2x-1)-(x-3)}{2x-1-2(x-3)} = \frac{5x}{5} = x$$

D'autre part, avec $y \neq 2$,

$$f \circ g(y) = f\left(\frac{3y-1}{y-2}\right) = \frac{2\frac{3y-1}{y-2} - 1}{\frac{3y-1}{y-2} - 3} = \frac{2(3y-1)-(y-2)}{3y-1-3(y-2)} = \frac{5y}{5} = y$$

Cela prouve que $f : \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R} \setminus \{2\}$ et $g : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R} \setminus \{3\}$ sont des bijections réciproques l'une de l'autre.

0.3 Raisonnements

Exercice 10 - Preuve au cas par cas.

1. Montrer, en utilisant une disjonction de cas, que pour tout entier n, le produit $n(n+1)(2n+1)$ est divisible par 6.
2. Montrer que tout nombre premier supérieur à 5 s'écrit soit sous la forme $6k+1$, soit sous la forme $6k-1$ ($k \in \mathbb{N}$).

Indications 10.

1. Distinguer les cas $n = 3k$, $n = 3k+1$ ou $n = 3k+2$. Il faut montrer que $n(n+1)(2n+1)$ est divisible par 2 et par 3.
2. Distinguer les cas $n = 6k$, $n = 6k+1$, $n = 6k+2$, $n = 6k+3$, $n = 6k+4$ ou $n = 6k+5$ (ce dernier cas s'écrit aussi $n = 6k'-1$).

Correction 10.

1. On distingue les cas selon le reste de la division de n par 3 (c'est-à-dire qu'on regarde n modulo 3). Au préalable, remarquons que n ou $n+1$ est un nombre pair donc $n(n+1)(2n+1)$ est déjà divisible par 2. Il reste à montrer qu'il est aussi divisible par 3.
   — Si $n = 3k$ (pour un certain $k \in \mathbb{Z}$), alors n est divisible par 3 donc $n(n+1)(2n+1)$ aussi.
   — Si $n = 3k+1$, alors $2n+1 = 2(3k+1)+1 = 6k+3$ est divisible par 3 donc $n(n+1)(2n+1)$ aussi.
   — Si $n = 3k+2$, alors $n+1 = 3k+3$ est divisible par 3 donc $n(n+1)(2n+1)$ aussi.

   Dans tous les cas $n(n+1)(2n+1)$ est divisible par 2 et par 3 donc par 6.
2. Distinguons les cas selon le reste de la division de n par 6 (c'est-à-dire qu'on regarde n modulo 6).
   — Si $n = 6k$, alors n ne peut pas être premier car divisible par 6.
   — Si $n = 6k+1$, rien ne permet d'exclure ce cas a priori.
   — Si $n = 6k+2$, alors n est pair, donc ne peut pas être premier.
   — Si $n = 6k+3$, alors n est divisible par 3, donc ne peut pas être premier.
   — Si $n = 6k+4$, alors n est pair, donc ne peut pas être premier.
   — Si $n = 6k+5$, rien ne permet d'exclure ce cas a priori.

   Les seuls cas où n peut être un nombre premier sont les n de la forme $6k+1$ et $6k+5$ (qui s'écrit aussi $6k'-1$ en posant $k' = k+1$).

Exercice 11 - Raisonnement par l'absurde.

1. Soient n, a, b trois entiers naturels tels que $n = ab$. Montrer que a ou b est inférieur ou égal à $\sqrt{n}$.
2. Soit $a \in \mathbb{R}^+$ un réel positif. Montrer :

$$\text{Si "}\forall \varepsilon > 0 \quad a \leqslant \varepsilon\text{" alors } a = 0.$$

Indications 11.

1. Soit $n = ab$. Par l'absurde si a et b sont plus grand que $\sqrt{n}$ alors...
2. Soit $a \geqslant 0$ tel que "$\forall \varepsilon > 0,\ a \leqslant \varepsilon$". Par l'absurde si $a \neq 0$ alors...

Correction 11.

1. Supposons par l'absurde que "$a > \sqrt{n}$ **et** $b > \sqrt{n}$", alors $ab > \sqrt{n} \times \sqrt{n} = n$. On a d'une part $ab = n$ mais aussi $ab > n$ ce qui fournit une contradiction. Conclusion : notre hypothèse de départ est fausse. Ainsi, on a "$a \leqslant \sqrt{n}$ **ou** $b \leqslant \sqrt{n}$".
2. Soit $a \in \mathbb{R}^+$ tel que :
$$\forall \varepsilon > 0 \quad a \leqslant \varepsilon.$$
Par l'absurde supposons "$a \neq 0$". On aura ainsi $a > 0$.
Choisissons $\varepsilon = \frac{a}{2}$. Alors d'une part $0 < \varepsilon < a$, mais d'autre part pour cet ε on a $a \leqslant \varepsilon$ (vu que c'est vrai pour tout ε). On obtient une contradiction. Notre hypothèse "$a \neq 0$" est donc fausse. Ce qui prouve $a = 0$.

Exercice 12 - Raisonnement par contraposition.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ un entier naturel non nul. Montrer par contraposition :
$$n^2 - 1 \text{ n'est pas divisible par } 8 \quad \Longrightarrow \quad n \text{ est pair}$$
2. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ deux nombres réels. Montrer par contraposition :
$$x \neq y \quad \Longrightarrow \quad (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$$

Indications 12.

1. Il s'agit donc de prouver :
$$n \text{ impair} \quad \Longrightarrow \quad n^2 - 1 \text{ est divisible par } 8$$
2. Il s'agit donc de prouver :
$$(x+1)(y-1) = (x-1)(y+1) \quad \Longrightarrow \quad x = y$$

Correction 12.

1. La contraposition de :
$$n^2 - 1 \text{ n'est pas divisible par } 8 \quad \Longrightarrow \quad n \text{ est pair}$$
est
$$n \text{ impair} \quad \Longrightarrow \quad n^2 - 1 \text{ est divisible par } 8$$
Prouvons cette dernière assertion : Soit n un entier impair, il s'écrit donc $n = 2k+1$ (pour un certain entier k), alors $n^2 - 1 = (2k+1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k = 4k(k+1)$. Or $k(k+1)$ est toujours divisible par 2, donc $n^2 - 1 = 4k(k+1)$ est divisible par 8.
Comme la contraposée est prouvée alors l'assertion initiale est aussi vraie.
2. La contraposition de :
$$x \neq y \quad \Longrightarrow \quad (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$$
est
$$(x+1)(y-1) = (x-1)(y+1) \quad \Longrightarrow \quad x = y$$
Prouvons cette dernière assertion : soient x et y tels que $(x+1)(y-1) = (x-1)(y+1)$ alors
$$\begin{aligned}(x+1)(y-1) = (x-1)(y+1) &\Longrightarrow xy - x + y - 1 = xy + x - y - 1 \\ &\Longrightarrow 2y = 2x \\ &\Longrightarrow x = y\end{aligned}$$
Comme la contraposée est vraie alors l'assertion initiale est aussi vraie.

Exercice 13 - Preuve par récurrence.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Démontrer par récurrence l'inégalité $2^n > n$.
2. Montrer que l'on a, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

3. On définit par récurrence la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ comme ceci :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \text{et } u_{n+1} = 2u_n + 1 \quad \text{pour } n \geqslant 0. \end{cases}$$

   (a) Calculer les premiers termes de la suite (u_n), et émettre une conjecture quant à l'expression de son terme général.

   (b) Montrer par récurrence que $u_n = 2^n - 1$.

Correction 13.

1. Pour $n \geqslant 1$, on note $\mathscr{P}_n$ l'assertion $2^n > n$.
   — **Initialisation.** $\mathscr{P}_1$ est vraie car pour $n = 1$, $2^1 > 1$.
   — **Hérédité.** Fixons $n \geqslant 1$. Supposons que pour ce rang n, $\mathscr{P}(n)$ soit vraie, c'est-à-dire $2^n > n$. On veut montrer que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire $2^{n+1} > n + 1$.
   Écrivons :
   $$2^{n+1} = 2 \times 2^n > 2 \times n \geqslant n + 1.$$
   On a utilisé l'hypothèse de récurrence $2^n > n$ (et aussi que $2n \geqslant n + 1$). La propriété est donc héréditaire.
   — **Conclusion.** Par le principe de récurrence, quel que soit $n \geqslant 1$, on a $2^n > n$.
2. Pour $n \geqslant 1$, on note $\mathscr{P}_n$ l'assertion $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$.
   — **Initialisation.** $\mathscr{P}_1$ est vraie car pour $n = 1$, $1 = 1^2$.
   — **Hérédité.** Fixons $n \geqslant 1$. Supposons que pour ce rang n, $\mathscr{P}(n)$ soit vraie, c'est-à-dire $1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1 = n^2$. On veut montrer que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire
   $$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) + (2(n + 1) - 1) = (n + 1)^2.$$
   Écrivons :
   $$\underbrace{1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)}_{= n^2 \text{ par hyp. de rec.}} + (2n + 1) = n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2$$
   Ainsi $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. La propriété est donc héréditaire.
   — **Conclusion.** Par le principe de récurrence, quel que soit $n \geqslant 1$, on a $1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$.
3. $u_0 = 0$, $u_1 = 2u_0 + 1 = 1$, $u_2 = 2u_1 + 1 = 3$, $u_3 = 2u_2 + 1 = 7$, $u_4 = 2u_3 + 1 = 15, \ldots$
   Montrons par récurrence que $u_n = 2^n - 1$ pour tout $n \geqslant 0$.
   — **Initialisation.** Pour $n = 0$, on a bien $u_0 = 0 = 2^0 - 1$.
   — **Hérédité.** Fixons $n \geqslant 0$ et supposons $u_n = 2^n - 1$. Alors
   $$u_{n+1} = 2u_n + 1 = 2 \times (2^n - 1) + 1 = 2 \times 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1.$$
   Ainsi la propriété est vraie au rang $n + 1$.
   — **Conclusion.** Par le principe de récurrence, $u_n = 2^n - 1$ quel que soit $n \geqslant 0$.