Exercices – Équations différentielles

0.1 Primitive

Exercice 1.

Mettre en correspondance chaque fonction f avec une de ses primitives F.

— $f_1(x) = -6\sin(2x)$, $f_2(x) = 2x$, $f_3(x) = (x+1)e^x$, $f_4(x) = -6\sin(3x)$, $f_5(x) = 2xe^{x^2}$, $f_6(x) = 2x+2$.

— $F_a(x) = 2\cos(3x)$, $F_b(x) = 3\cos(2x)$, $F_c(x) = (x+1)^2$, $F_d(x) = x^2+1$, $F_e(x) = e^{x^2}$, $F_f(x) = xe^x$.

Indications 1.

F est une primitive de f si $F'(x) = f(x)$ (pour tout x de l'ensemble de définition).

Correction 1.

1. $F_a(x) = 2\cos(3x)$, $F_a'(x) = f_4(x) = -6\sin(3x)$.
2. $F_b(x) = 3\cos(2x)$, $F_b'(x) = f_1(x) = -6\sin(2x)$.
3. $F_c(x) = (x+1)^2$, $F_c'(x) = f_6(x) = 2x+2$.
4. $F_d(x) = x^2+1$, $F_d'(x) = f_2(x) = 2x$.
5. $F_e(x) = e^{x^2}$, $F_e'(x) = f_5(x) = 2xe^{x^2}$.
6. $F_f(x) = xe^x$, $F_f'(x) = f_3(x) = (x+1)e^x$.

Exercice 2.

Pour chacune des fonctions f suivantes, déterminer une primitive F.

1. $f_1(x) = -\cos(2x)$
2. $f_2(x) = x^3 - 7x^2 + 1$
3. $f_3(x) = \frac{1}{2x-1}$ (sur $]-\frac{1}{2}, +\infty[$)
4. $f_4(x) = e^{\pi x - 3}$
5. $f_5(x) = -(x-2)^2$
6. $f_6(x) = \sin(8(x+1))$

Indications 2.

Il s'agit de trouver une fonction F telle que $F'(x) = f(x)$. Il faut bien connaître ses formules des dérivées usuelles.

Correction 2.

1. $F_1(x) = -\frac{1}{2}\sin(2x)$, on vérifie que $F_1'(x) = f_1(x)$.
2. $F_2(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{3}x^3 + x$, car une primitive de x^k est $\frac{1}{k+1}x^{x+1}$ (pour $k \neq -1$).

3. $F_3(x) = \frac{1}{2}\ln(2x-1)$ car $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$ avec ici $u(x) = 2x-1$.
4. $F_4(x) = \frac{1}{\pi}e^{\pi x-3}$ car $(e^u)' = u'e^u$ avec ici $u(x) = \pi x - 3$.
5. $F_5(x) = -\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 4x$ car $f_5(x) = -x^2 + 4x - 4$. On peut aussi écrire $F_5(x) = -\frac{1}{3}(x-2)^3$.
6. $F_6(x) = -\frac{1}{8}\cos(8(x+1))$ car $(\cos(u))' = -u'\sin(u)$.

Dans tous les cas, si F est une primitive, alors pour toute constante C, $F+C$ est aussi une primitive.

Exercice 3.

1. (a) Quelle est la dérivée de la fonction $x \mapsto u^k(x)$ où $x \mapsto u(x)$ est une fonction et k un entier ?
   (b) Calculer les dérivées des fonctions définies par $(x^4+7x^3+2)^3$, $\cos^3(2x)$, $\ln^2(x)$, $\frac{1}{(x^2+1)^2}$.
   (c) Déterminer une primitive des fonctions définies par $x(x^2+5)^5$, $\sin(x)\cos^3(x)$, $\frac{\ln^n(x)}{x}$ (où $n \geqslant 0$).
2. (a) Quelle est la dérivée de la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ où $x \mapsto u(x)$ est une fonction ?
   (b) Calculer les dérivées des fonctions définies par e^{-5x}, e^{x^3-2x}, $e^{\sin(3x)}$, $e^{1/x}$.
   (c) Déterminer une primitive des fonctions définies par e^{8x+1}, xe^{x^2+1}, $\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$.
3. (a) Quelle est la dérivée de la fonction $x \mapsto \ln(u(x))$ où $x \mapsto u(x)$ est une fonction strictement positive ?
   (b) Calculer les dérivées des fonctions définies par $\ln(x^3-2)$, $\ln(e^x+e^{-x})$, $\ln(1/x)$, $\ln(\cos(x^2))$.
   (c) Déterminer une primitive des fonctions définies par $\frac{1}{x+4}$ (sur $]-4,+\infty[$), $\frac{x}{x^2+4}$ (sur $\mathbb{R}$), $\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ (pour les x où $\sin(x) > 0$).

Indications 3.

La dérivée d'une composition $f(u(x))$ est $u'(x)f'(u(x))$. Pour déterminer les primitives il faut reconnaître la fonction sous une forme $u'(x)f'(u(x))$, afin de déterminer qu'une primitive est $f(u(x))$.

Correction 3.

1. (a) La dérivée de $u^k(x)$ est $ku'(x)u^{k-1}(x)$.
   (b) — La dérivée de $(x^4+7x^3+2)^3$ est $3(4x^3+21x^2)(x^4+7x^3+2)^2$.
   — La dérivée de $\cos^3(2x)$ est $-6\sin(2x)\cos^2(2x)$.
   — La dérivée de $\ln^2(x)$ est $\frac{2}{x}\ln(x)$.
   — La dérivée de $\frac{1}{(x^2+1)^2} = (x^2+1)^{-2}$ est $-2(2x)(x^2+1)^{-3} = \frac{-4x}{(x^2+1)^3}$.
   (c) — Une primitive de $x(x^2+5)^5 = \frac{1}{12}\cdot 6 \cdot (2x) \cdot (x^2+5)^5$ est $\frac{1}{12}(x^2+5)^6$.
   — Une primitive de $\sin(x)\cos^3(x)$ est $-\frac{1}{4}\cos^4(x)$.
   — Une primitive de $\frac{\ln^n(x)}{x}$ est $\frac{1}{n+1}\ln^{n+1}(x)$.
2. (a) La dérivée de $e^{u(x)}$ est $u'(x)e^{u(x)}$.
   (b) — La dérivée de e^{-5x} est $-5e^{-5x}$.
   — La dérivée de e^{x^3-2x} est $(3x^2-2)e^{x^3-2x}$.
   — La dérivée de $e^{\sin(3x)}$ est $3\cos(3x)e^{\sin(3x)}$.
   — La dérivée de $e^{1/x}$ est $-\frac{1}{x^2}e^{1/x}$.
   (c) — Une primitive de e^{8x+1} est $\frac{1}{8}e^{8x+1}$.
   — Une primitive de xe^{x^2+1} est $\frac{1}{2}e^{x^2+1}$

— Une primitive de $\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ est $2e^{\sqrt{x}}$.

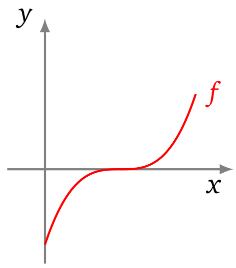
3. (a) La dérivée de $\ln(u(x))$ est $\frac{u'(x)}{u(x)}$.

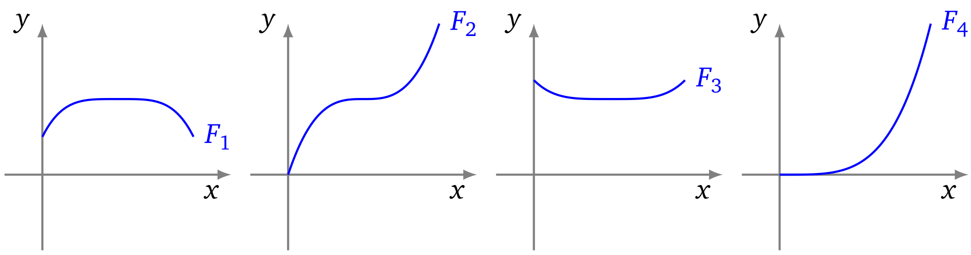
   (b) — La dérivée de $\ln(x^3-2)$ est $\frac{3x^2}{x^3-2}$.
   - — La dérivée de $\ln(e^x+e^{-x})$ est $\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.
   - — La dérivée de $\ln(1/x)$ est $-\frac{1}{x}$ (c'est plus facile si on a remarqué que $\ln(1/x) = -\ln(x)$!).
   - — La dérivée de $\ln(\cos(x^2))$ est $\frac{-2x\sin(x^2)}{\cos(x^2)}$.

   (c) — Une primitive de $\frac{1}{x+4}$ est $\ln(x+4)$.
   - — Une primitive de $\frac{x}{x^2+4}$ est $\frac{1}{2}\ln(x^2+4)$.
   - — Une primitive de $\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ est $\ln(\sin(x))$.

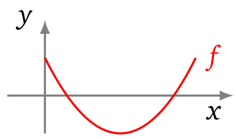
Exercice 4.

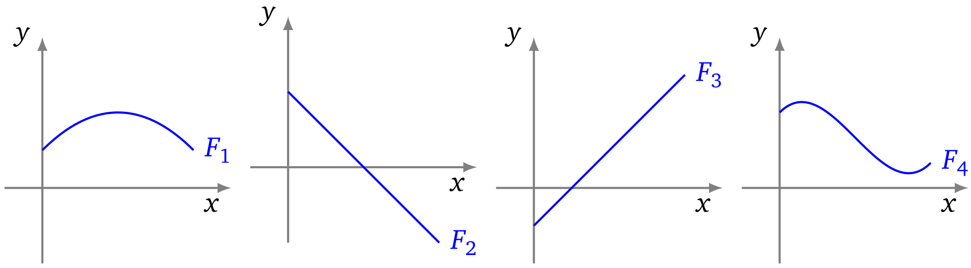
1. Pour la fonction f représentée ci-dessous, déterminer quel est le graphe de la fonction F_i qui correspond à une primitive de f.





2. Pour la fonction f représentée ci-dessous, déterminer quel est le graphe de la fonction F_i qui correspond à une primitive de f.





Indications 4.

Il faut utiliser que la dérivée de F est f et utiliser le signe (et non pas la monotonie) de f pour déterminer là où F est croissante ou décroissante.

Correction 4.

Comme la dérivée de F est f, là où f est positive, F est croissante ; là où f est négative, F est décroissante.

1. $f = F'$ est négative puis positive : F doit être d'abord décroissante, puis ensuite croissante. Ainsi il s'agit de F_3.
2. $f = F'$ est positive, négative puis à nouveau positive. Donc F est croissante, décroissante puis à nouveau croissante. Il s'agit de F_4.

0.2 Notion d'équation différentielle

Exercice 5.

Vérifier que les fonctions f suivantes sont solutions de l'équation différentielle donnée.

1. $f(x) = -e^{2x}$, $y' = 2y$.
2. $f(x) = \frac{1}{2-x}$, $y' = y^2$.
3. $f(x) = (3+2x)e^x$, $y'' - 2y' + y = 0$.
4. $f(x) = Ce^{-x} + \sin(x) - \cos(x)$ (quelle que soit la constante C), $y' + y = 2\sin(x)$

Indications 5.

Il faut calculer la dérivée $f'(x)$ (et si besoin la dérivée seconde $f''(x)$) et vérifier que f et f' (et éventuellement f'') satisfont la relation donnée par l'équation différentielle (en remplaçant y par f, y' par f'...).

Correction 5.

1. $f(x) = -e^{2x}$, $f'(x) = -2e^{2x}$ donc on a bien $f'(x) = 2f(x)$.
2. $f(x) = \frac{1}{2-x}$, $f'(x) = \frac{1}{(2-x)^2}$ donc on a bien $f'(x) = f(x)^2$.
3. $f(x) = (3+2x)e^x$, $f'(x) = (5+2x)e^x$, $f''(x) = (7+2x)e^x$ donc on a bien $f''(x) - 2f'(x) + f(x) = ((3+2x) - 2(5+2x) + (7+2x))e^x = 0 \cdot e^x = 0$.
4. $f(x) = Ce^{-x} + \sin(x) - \cos(x)$, $f'(x) = -Ce^{-x} + \cos(x) + \sin(x)$, donc on a bien $f'(x) + f(x) = 2\sin(x)$.

Exercice 6.

Déterminer toutes les solutions constantes des équations différentielles suivantes.

1. $y' + y = 5$
2. $y' = y^2 - y$
3. $y' = y^2 - 4y + 1$
4. $y' = y + x$

Indications 6.

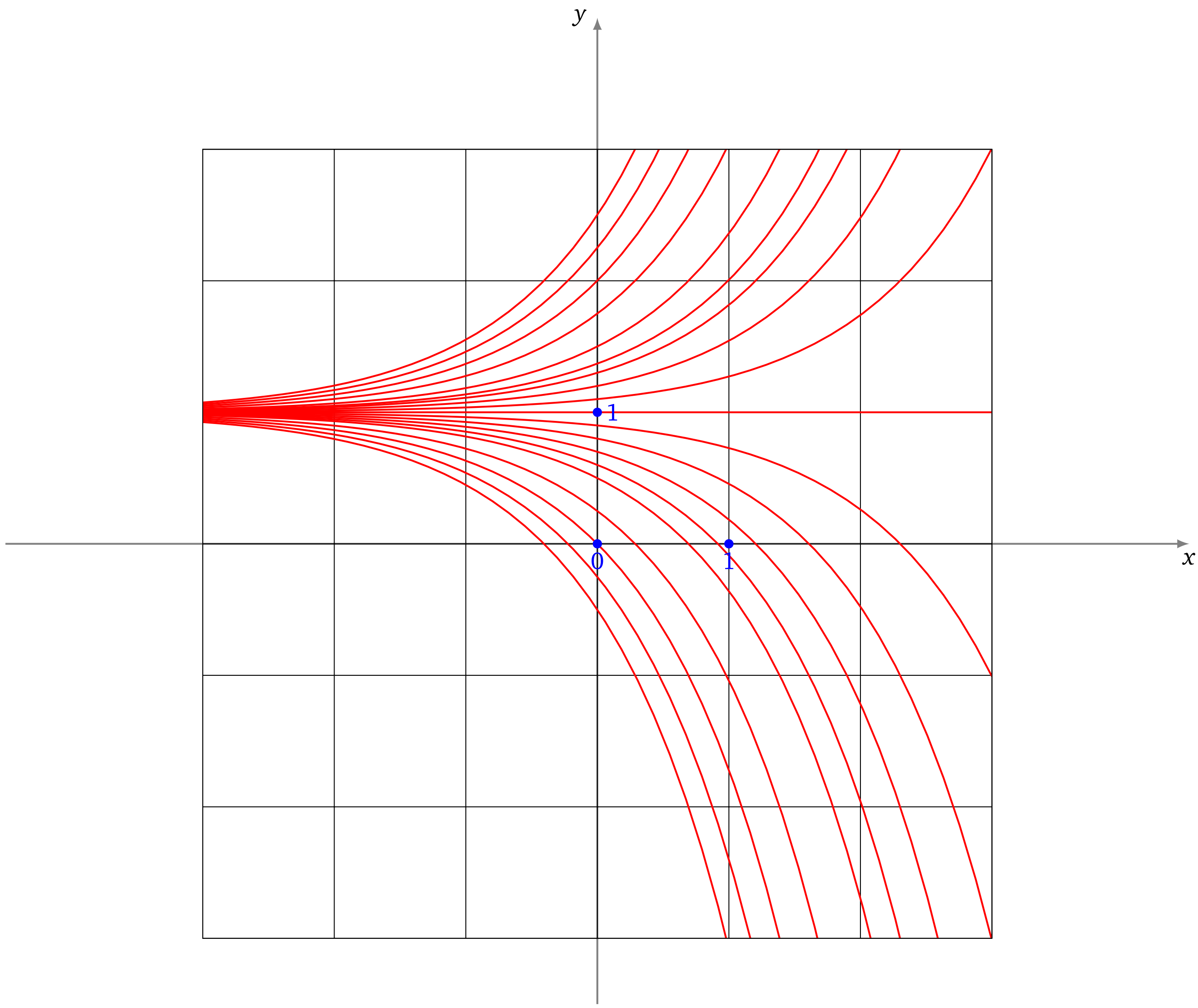
Si $f(x) = k$ est une fonction constante, alors $f'(x) = 0$ pour tout x. Une des équations n'admet aucune solution constante !

Correction 6.

1. Si f est une fonction constante, alors $f(x) = k$ pour tout x, donc $f'(x) = 0$ pour tout x. Si f est solution de l'équation différentielle $y' + y = 5$, alors $f'(x) + f(x) = 5$ pour tout x, donc $0 + k = 5$, donc $k = 5$. La seule solution constante est la solution $f(x) = 5$ pour tout x.
2. Si $f(x) = k$ est solution de l'équation différentielle $y' = y^2 - y$, alors $f'(x) = f(x)^2 - f(x)$ pour tout x, donc $0 = k^2 - k$, donc $k(k-1) = 0$, donc $k = 0$ ou $k = 1$. Il y a deux solutions constantes $f(x) = 0$ pour tout x (la fonction nulle) et $f(x) = 1$ pour tout x.
3. Si $f(x) = k$ est solution de l'équation différentielle $y' = y^2 - 4y + 1$, alors $f'(x) = f(x)^2 - 4f(x) + 1$, donc $0 = k^2 - 4k + 1$. Les solutions de $k^2 - 4k + 1 = 0$ sont $k_1 = 2 - \sqrt{3}$ et $k_2 = 2 + \sqrt{3}$ qui définissent les deux solutions constantes.
4. Si $f(x) = k$ est solution de l'équation différentielle $y' = y + x$, alors $f'(x) = f(x) + x$ donc $0 = k + x$ et alors $k = -x$. Ceci est une contradiction car k doit être une constante (un nombre fixé !). Ainsi cette équation différentielle n'admet aucune solution constante.

Exercice 7.

Le dessin représente quelques solutions de l'équation différentielle $y' = y - 1$.



1. Répondre graphiquement aux questions suivantes :
   (a) Quelle est la limite d'une solution en $-\infty$?

(b) Quelle est la solution constante ?

(c) En fonction de la valeur $f(0)$ d'une solution f, discuter si f est croissante ou décroissante et déterminer la limite en $+\infty$.

(d) Tracer la tangente à la courbe solution qui passe par le point $(0,2)$; en déduire une équation approchée de cette tangente.

(e) Tracer la tangente à la courbe solution qui passe par le point $(1,-1)$; en déduire une équation approchée de cette tangente.

2. Répondre par le calcul aux questions suivantes (il n'y a pas besoin de résoudre l'équation) :

   (a) Soit f la solution dont le graphe passe par le point $(0,0)$. Combien vaut $f(0)$? Combien vaut $f'(0)$? En déduire la pente de la tangente en ce point, puis l'équation de cette tangente.

   (b) Soit g la solution dont le graphe passe par le point $(1,2)$. Combien vaut $g(1)$? Combien vaut $g'(1)$? En déduire l'équation de la tangente en ce point.

Indications 7.

La pente de la tangente en x_0 est $f'(x_0)$.

Correction 7.

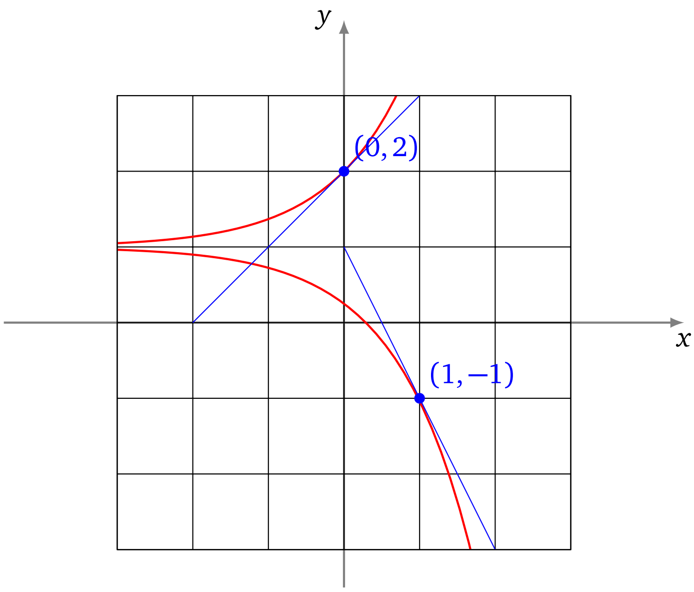
1. (a) Graphiquement on note que toutes les solutions tendent vers 1 en $-\infty$. (Cela s'explique par le calcul, mais ce n'est pas ce qui est demandé ici.)

   (b) La fonction égale à 1 est la seule solution constante.

   (c) Si $f(0) = 1$, la fonction est constante égale à 1. Si $f(0) > 1$, la fonction est croissante et tend vers $+\infty$ en $+\infty$. Si $f(0) < 1$, la fonction est décroissante et tend vers $-\infty$ en $+\infty$.

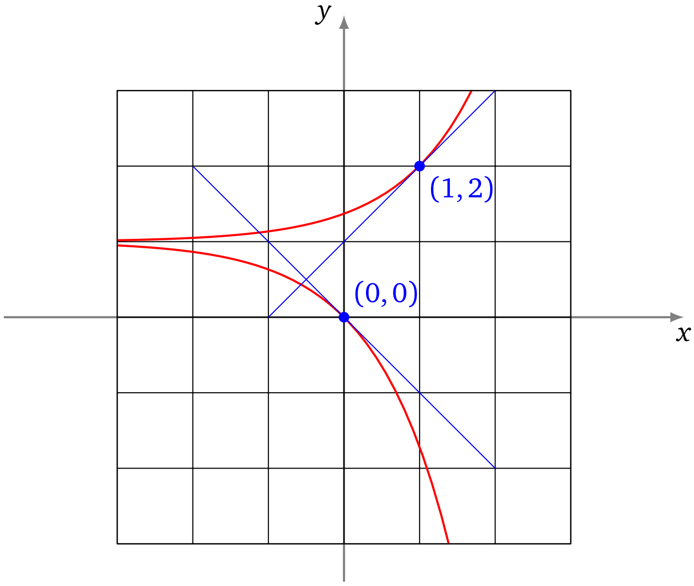
   (d) La tangente est tracée ci-dessous, par lecture graphique elle a pour équation $y = x + 2$.

   (e) La tangente est tracée ci-dessous, par lecture graphique elle a pour équation $y = -2x + 1$.



2. (a) Si le graphe de f passe par $(0,0)$, alors $f(0) = 0$. Comme f est solution de l'équation différentielle $y' = y - 1$ alors pour tout x, $f'(x) = f(x) - 1$, donc en particulier pour $x = 0$ on obtient $f'(0) = f(0) - 1$, donc $f'(0) = -1$. La pente de la tangente au graphe de f en $(0,0)$ est donc -1. L'équation de cette tangente est donc $y = -x$ (cf graphique ci-dessous).

(b) Si le graphe de g passe par $(1,2)$, alors $g(1)=2$. Comme g vérifie l'équation différentielle alors $g'(x)=g(x)-1$, donc pour $x=1$, $g'(1)=g(1)-1=2-1=1$. La pente de la tangente au graphe de g en $(1,2)$ est donc 1 et comme la droite passe par le point $(1,2)$, l'équation de la tangente est $y=x+1$ (cf graphique ci-dessous).



Exercice 8.

Une tasse de café de température $T_0=100$ degrés Celsius est posée dans une pièce de température $T_\infty=20$ degrés. La loi de Newton affirme que la vitesse de décroissance de la température est proportionnelle à l'écart entre sa température $T(t)$ et la température ambiante T_∞.
Sachant qu'au bout de 3 minutes la température du café est passée à 80 degrés, quelle sera sa température au bout de 5 minutes ?
Les questions détaillent les étapes de la résolution de ce problème :

1. Justifier que la fonction température $T(t)$ satisfait l'équation différentielle $y'=-k(y-20)$ pour une certaine constante $k>0$.
2. Vérifier que $T(t)=Ce^{-kt}+20$ est solution de cette équation différentielle pour toute constante C.
3. Calculer C en fonction de $T(0)$.
4. Quelle est la température au bout d'un temps très long ?
5. Déterminer la constante k en utilisant que $T(3)=80$.
6. Trouver la solution du problème.

Correction 8.

1. y' mesure la vitesse de croissance (ou de décroissance selon le signe) de la température ; $(y-20)$ traduit l'écart entre la température du café et la température ambiante. Le coefficient k exprime la proportionnalité, le signe moins venant de la décroissance de la température (le café refroidit).
2. Pour $T(t)=Ce^{-kt}+20$, on a $T'(t)=-kCe^{-kt}$. Donc $-k(T(t)-20)=-kCe^{-kt}=T'(t)$ et ainsi $T(t)$ satisfait l'équation différentielle.
3. $T(0)=Ce^{-k\cdot 0}+20=C+20$. Comme $T(0)=100$, alors $C=80$.
4. Comme $\lim_{t\to+\infty} Ce^{-kt}=0$, on a $\lim_{t\to+\infty} T(t)=20$. La température du café tendra vers 20 degrés (c'est normal, c'est la température de la pièce).
5. Comme $T(3)=80$ alors $80e^{-k\cdot 3}+20=80$ donc $e^{-3k}=\frac{3}{4}$. On compose par le logarithme des deux côtés : $\ln(e^{-3k})=\ln(\frac{3}{4})$ donc $-3k=\ln(\frac{3}{4})$ et ainsi $k=-\frac{1}{3}\ln(\frac{3}{4})=\frac{1}{3}\ln(\frac{4}{3})\simeq 0,096$.

6. Ainsi $T(t) \simeq 80e^{-0,096 \cdot t} + 20$, donc pour $t = 5$ on obtient $T(5) \simeq 80e^{-0,096\times 5} + 20 \simeq 69,5$ degrés Celsius.

0.3 $y' = ay$

Exercice 9.

Résoudre les équations différentielles suivantes, c'est-à-dire trouver toutes les fonctions solutions.

1. $y' = 3y$
2. $y' + 2y = 0$
3. $4y' - 5y = 0$

Indications 9.

Les solutions de $y' = ay$ sont les fonctions $y(x) = Ce^{ax}$ où C est une constante.

Correction 9.

1. $y' = 3y$: les solutions sont $y(x) = Ce^{3x}$ où C est une constante.
2. $y' + 2y$ équivaut à $y' = -2y$: les solutions sont $y(x) = Ce^{-2x}$ où C est une constante.
3. $4y' - 5y = 0$ équivaut à $y' = \frac{5}{4}y$: les solutions sont $y(x) = Ce^{\frac{5}{4}x}$ où C est une constante.

Exercice 10.

Trouver la solution des équations différentielles suivantes vérifiant la condition initiale donnée.

1. $y' = -y$ avec $y(0) = 2$
2. $y' = 3y$ avec $y(0) = -1$
3. $2y' = y$ avec $y(2) = 3$

Indications 10.

Les solutions de $y' = ay$ sont les $y(x) = Ce^{ax}$ où C est une constante. Mais ici, il faut en plus déterminer la constante C afin que $y(x_0) = y_0$ (x_0 et y_0 correspondant à la condition initiale imposée).

Correction 10.

1. $y' = -y$: les solutions sont $y(x) = Ce^{-x}$ où C est une constante. On veut en plus $y(0) = 2$, donc $Ce^{-0} = 2$, comme $e^0 = 1$ alors $C = 2$. L'unique solution cherchée est $y(x) = 2e^{-x}$.
2. $y' = 3y$: les solutions sont $y(x) = Ce^{3x}$ où C est une constante. On veut en plus $y(0) = -1$, donc $Ce^{3\cdot 0} = -1$, donc $C = -1$. L'unique solution cherchée est $y(x) = -e^{3x}$.
3. $2y' = y$: les solutions sont $y(x) = Ce^{\frac{1}{2}x}$ où C est une constante. On veut en plus $y(2) = 3$, donc $Ce^{\frac{1}{2}\cdot 2} = 3$, donc $Ce^1 = 3$ d'où $C = \frac{3}{e}$. L'unique solution cherchée est $y(x) = \frac{3}{e}e^{\frac{1}{2}x}$ que l'on peut écrire aussi $y(x) = 3e^{\frac{1}{2}x-1}$.

Exercice 11.

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier votre réponse par un résultat du cours ou un contre-exemple.

1. « Les solutions de $y' = 2y$ sont toutes des fonctions croissantes. »
2. « L'équation différentielle $y' = -y$ admet une seule solution constante. »
3. « Il existe une unique solution à l'équation différentielle $y' = 7y$ qui vérifie $y(0) > 0$. »
4. « La solution de l'équation différentielle $y' = -2y$ qui vérifie $y(0) = -1$ tend vers $-\infty$ en $+\infty$. »

Correction 11.

1. Faux. Les solutions de $y' = 2y$ sont les $y(x) = Ce^{2x}$ où C est une constante réelle. Par exemple pour $C = -1$, la solution $y(x) = -e^{2x}$ est décroissante.
2. Vrai. La seule solution constante est $y(x) = 0$ (obtenue via l'expression générale $y(x) = Ce^{-x}$ pour $C = 0$).
3. Faux. Il existe une solution pour chaque valeur de $C = y(0)$. Par exemple pour $C = 1$, $y(x) = e^{7x}$ est solution et pour $C = 2$, $y(x) = 2e^{7x}$ est aussi solution.
4. Faux. La solution cherchée est $y(x) = -e^{-2x}$ qui tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 12.

À la mort d'un être vivant, le nombre $N(t)$ de noyaux radioactifs de carbone 14 (en milliards) décroît selon l'équation différentielle

$$N'(t) = -kN(t)$$

où $k > 0$ est une constante.
On cherche à dater un os d'animal trouvé dans une grotte.
On prend pour temps d'origine $t = 0$, la date de mort de l'animal. L'unité de temps est l'année. On sait que la « demi-vie » du carbone 14 est 5500 ans, cela signifie qu'à chaque période de 5500 années, la moitié des noyaux se sont désintégrés.
On sait que le nombre de noyaux lors du vivant de l'animal était $N_0 = 16$ (ce nombre reste constant pour tous les animaux vivants et commence à décroître à leur mort). On mesure $N_1 = 0,20$ le nombre de noyaux dans l'os au temps présent.

1. Résoudre l'équation différentielle en fonction de N_0 et de k.
2. La période de demi-vie donne la relation $N(5500) = \frac{N_0}{2}$. Calculer alors la valeur de la constante k.
3. Combien d'années auparavant cet animal a-t-il vécu ?

Correction 12.

1. La solution de $N'(t) = -kN(t)$ est $N(t) = Ce^{-kt}$, or $N(0) = N_0 = C$ donc la solution est $N(t) = N_0 e^{-kt}$ autrement dit $N(t) = 16e^{-kt}$.
2. $N(5500) = \frac{16}{2} = 8$, donc $16e^{-k\cdot 5500} = 8$. Cela donne $e^{-k\cdot 5500} = \frac{1}{2}$. On compose par le logarithme de chaque côté : $\ln\left(e^{-k\cdot 5500}\right) = \ln(\frac{1}{2})$, donc $-k \cdot 5500 = -\ln(2)$. Conclusion : $k = \frac{\ln(2)}{5500} \simeq 0,000126$ et la solution est $N(t) \simeq 16e^{-0,000126\cdot t}$.
3. Notons τ le temps écoulé depuis la mort de l'animal. Alors on sait que $N(\tau) = N_1$, donc $16e^{-0,000126\cdot\tau} = 0,2$. Cela donne $e^{-0,000126\cdot\tau} = 0,0125$; donc en composant par le logarithme $-0,000126 \cdot \tau = \ln(0,0125)$ ainsi $\tau \simeq 34777$. On peut donc dire que l'animal a vécu il y a environ 35 000 années.

0.4 $y' = ay + b$ et $y' = ay + f$

Exercice 13.

Pour chacune des équations différentielles (E) suivantes,

— déterminer l'équation homogène associée,

— trouver les solutions $y_h(x)$ de cette équation homogène,

— vérifier que la fonction $y_p(x)$ est bien solution de l'équation différentielle (E),

— en déduire toutes les solutions de (E).

1. $y' = -y + x^2 + 1$, $y_p(x) = x^2 - 2x + 3$
2. $y' = y + 2\cos(x)$, $y_p(x) = \sin(x) - \cos(x)$
3. $y' = 3y + xe^{2x}$, $y_p(x) = -(x+1)e^{2x}$

Indications 13.

Pour une équation différentielle $(E) : y' = ay + f$, l'équation homogène est $y' = ay$. Si l'on note les solutions de l'équation homogène y_h, et une solution particulière de (E) y_p, alors toutes les solutions de (E) sont les fonctions $y_h + y_p$.

Correction 13.

1. $(E_h) : y' = -y$, $y_h(x) = Ce^{-x}$, $(E) : y' = -y + x^2 + 1$, dont $y_p(x) = x^2 - 2x + 3$ est une solution particulière puisque $y_p'(x) = 2x - 2 = -(x^2 - 2x + 3) + x^2 + 1 = -y_p(x) + x^2 + 1$. Les solutions générales de (E) sont les $y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ce^{-x} + x^2 - 2x + 3$ où C est une constante réelle.
2. $(E_h) : y' = y$, $y_h(x) = Ce^x$, $(E) : y' = y + 2\cos(x)$, dont $y_p(x) = \sin(x) - \cos(x)$ est une solution particulière. Les solutions générales de (E) sont les $y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ce^x + \sin(x) - \cos(x)$ où C est une constante réelle.
3. $(E_h) : y' = 3y$, $y_h(x) = Ce^{3x}$, $(E) : y' = 3y + xe^{2x}$, dont $y_p(x) = -(x+1)e^{2x}$ est une solution particulière. Les solutions générales de (E) sont les $y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ce^{3x} - (x+1)e^{2x}$ où C est une constante réelle.

Exercice 14.

Pour chacune des équations différentielles (E) suivantes,

— déterminer l'équation homogène associée,

— trouver les solutions $y_h(x)$ de cette équation homogène,

— trouver une solution particulière $y_p(x)$ en vous aidant des indications,

— en déduire toutes les solutions de (E).

1. $y' + 2y = 5$, chercher une solution particulière sous la forme d'une fonction constante.
2. $2y' - 3y = e^{-x}$, chercher une solution particulière sous la forme ke^{-x} où k est une constante à déterminer.
3. $y' = y + x^2$, chercher une solution particulière sous la forme $ax^2 + bx + c$.

Indications 14.

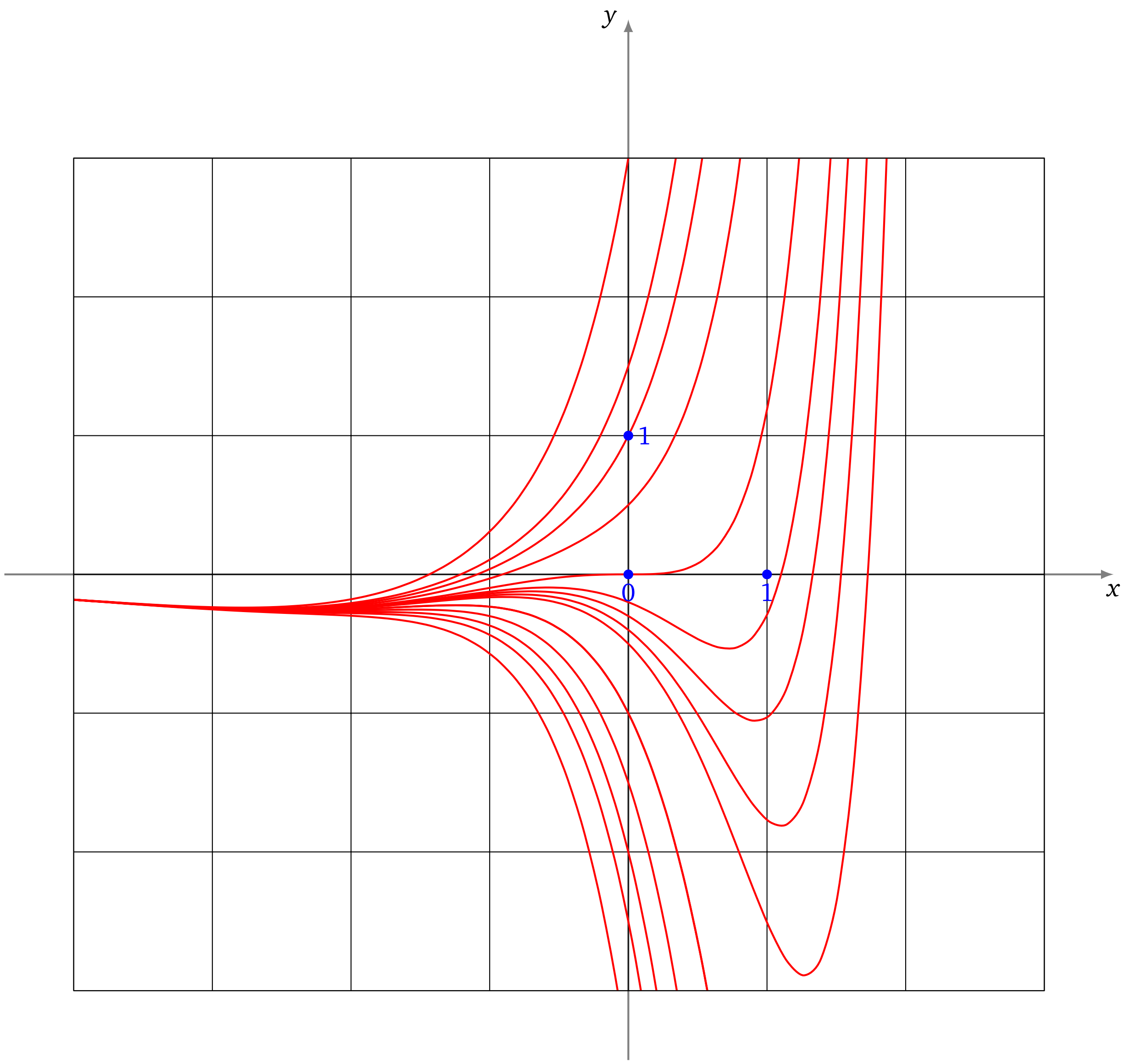
Pour une équation différentielle $(E) : y' = ay + f$, l'équation homogène est $y' = ay$. Si l'on note les solutions de l'équation homogène y_h, et une solution particulière de (E) y_p, alors toutes les solutions de (E) sont les fonctions $y_h + y_p$.

Correction 14.

1. Équation homogène : $y' + 2y = 0$ soit $y' = -2y$.
   Solutions de l'équation homogène : $y_h(x) = Ce^{-2x}$.
   Solution particulière constante : $y_p(x) = \frac{5}{2}$.
   Solutions générales : $y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ce^{-2x} + \frac{5}{2}$ où C est une constante réelle.
2. Équation homogène : $2y' - 3y = 0$ soit $y' = \frac{3}{2}y$.
   Solutions de l'équation homogène : $y_h(x) = Ce^{\frac{3}{2}x}$.
   Solution particulière : $y_p(x) = -\frac{1}{5}e^{-x}$.
   Solutions générales : $y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ce^{\frac{3}{2}x} - \frac{1}{5}e^{-x}$ où C est une constante réelle.
3. Équation homogène : $y' = y$.
   Solutions de l'équation homogène ; $y_h(x) = Ce^x$.
   Solution particulière : $y_p(x) = -x^2 - 2x - 2$.
   Solutions générales : $y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ce^x - x^2 - 2x - 2$ où C est une constante réelle.

Exercice 15.

Le dessin représente quelques solutions de l'équation différentielle $(E) : y' = 2y + x^2e^x$.



1. Tracer la tangente à la courbe solution qui passe par le point $(0, 0)$. Retrouver son équation par le calcul grâce à l'équation différentielle.

2. Tracer la tangente à la courbe solution qui passe par le point $(0,1)$. Retrouver son équation par le calcul grâce à l'équation différentielle.
3. Tracer la tangente à la courbe solution qui passe par le point $(1,-1)$. Retrouver son équation par le calcul grâce à l'équation différentielle.
4. Déterminer les solutions $y_h(x)$ de l'équation homogène.
5. Déterminer une solution particulière $y_p(x)$ sous la forme $(ax^2+bx+c)e^x$.
6. En déduire toutes les solutions de (E).

Correction 15.

1. Par lecture graphique il semble que la tangente en $(0,0)$ soit horizontale. Vérifions-le par le calcul. La solution f dont le graphe passe par $(0,0)$ vérifie $f(0)=0$. Comme f vérifie l'équation différentielle $y'=2y+x^2e^x$, alors $f'(0)=2f(0)+0^2\cdot e^0=0$, donc la tangente est bien horizontale. Son équation est $y=0$.
2. La solution g dont le graphe passe par $(0,1)$ vérifie $g(0)=1$. Comme g vérifie l'équation différentielle alors $g'(0)=2g(0)+0^2\cdot e^0=2$, donc la pente de la tangente est 2 et son équation est $y=2x+1$.
3. La solution h dont le graphe passe par $(1,-1)$ vérifie $h(1)=-1$. Comme h vérifie l'équation différentielle alors $h'(1)=2h(1)+1^2\cdot e^1=e-2$, donc la pente de la tangente est $e-2$ et comme cette droite passe par $(1,-1)$ son équation est $y=(e-2)(x-1)-1$, c'est-à-dire $y=(e-2)x+1-e$.
4. L'équation homogène est $(E_h) : y'=2y$, dont les solutions sont $y_h(x)=Ce^{2x}$, pour toute constante réelle C.
5. Cherchons une solution particulière sous la forme $y_p(x)=(ax^2+bx+c)e^x$. Alors $y_p'(x)=(ax^2+(2a+b)x+b+c)e^x$.

$$\begin{aligned}
& y_p(x) \text{ solution de } (E) \\
\iff & y_p'(x)=2y_p(x)+x^2e^x \text{ pour tout } x\in\mathbb{R} \\
\iff & (ax^2+(2a+b)x+b+c)e^x=2(ax^2+bx+c)e^x+x^2e^x \\
\iff & e^x\big((a+1)x^2+(b-2a)x+(c-b)\big)=0 \\
\iff & (a+1)x^2+(b-2a)x+(c-b)=0 \qquad \text{car } e^x\neq 0 \\
\iff & a+1=0 \quad \text{et} \quad b-2a=0 \quad \text{et} \quad c-b=0 \\
\iff & a=-1, b=-2, c=-2
\end{aligned}$$

Ainsi $y_p(x)=(-x^2-2x-2)e^x=-(x^2+2x+2)e^x$ est une solution particulière.
6. Les solutions générales de (E) sont $y(x)=y_h(x)+y_p(x)=Ce^{2x}-(x^2+2x+2)e^x$ où C est une constante réelle.