Équations différentielles – Partie 1 : Primitives

Savoir.
- ☐ Connaître la définition d'une primitive.
- ☐ Connaître le lien entre deux primitives d'une même fonction.
- ☐ Connaître les formules des primitives usuelles.

Savoir-faire.
- ☐ Savoir déterminer une primitive.

Primitives

— **Définition.** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I. On dit qu'une fonction F est une **primitive** de f sur I, si pour tout $x \in I$:

$$\boxed{F'(x) = f(x)}$$

— Dans la majorité de nos exemple, les fonctions seront définies sur $\mathbb{R}$ tout entier, ainsi si $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et alors F est une primitive de f.

— Exemples :
  - — $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$ est une primitive de $f(x) = x^2$ (sur $\mathbb{R}$) puisque $F'(x) = (\frac{x^3}{3})' = x^2 = f(x)$.
  - — $\ln(x)$ est une primitive de $\frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$.

— Trouver une primitive est l'opération inverse du calcul de la dérivée.

— *Exercice*. Trouver une primitive de chacune des fonctions suivantes (en précisant l'intervalle I considéré) :

- x
- $2x - x^2$
- $\cos(x)$
- $\sin(x)$
- e^x
- $\dfrac{3}{x} - \dfrac{7}{x^2} + 1$

Toutes les primitives

— Une primitive n'est pas unique ! Soit $f(x) = x^2$, alors $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$ est une primitive. Mais la fonction $G(x) = \dfrac{x^3}{3} + 2$ est aussi une primitive (dérivez-la pour vérifier). Il y a donc plusieurs primitives. En fait toutes les fonctions $\dfrac{x^3}{3} + C$, où C est une constante, sont des primitives. Nous généralisons ceci à toutes les fonctions :

> **Proposition.** Si $F(x)$ est une primitive de $f(x)$, alors les autres primitives sont de la forme $F(x) + C$ où $C \in \mathbb{R}$ est une constante.

— Une conséquence de cette proposition est la suivante : si $F(x)$ et $G(x)$ sont deux primitives d'une même fonction, alors F et G ne diffèrent que d'une constante. Autrement dit, il existe une constante C telle que $F(x) = G(x) + C$.

— Exemple. Les primitives de $x^4 - 3x + 5$ sont les fonctions $\frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{2}x^2 + 5x + C$, où $C \in \mathbb{R}$ est une constante.

— Exercice. Vérifier que les primitives de la fonction $\frac{1}{\sqrt{x}}$ sont les fonctions $2\sqrt{x} + C$.

Primitives usuelles

Primitives des fonctions classiques

Ici C désigne une constante réelle. Si l'intervalle n'est pas précisé, c'est $I = \mathbb{R}$.

Fonction	**Primitives**
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \in \mathbb{N})$
$\frac{1}{x^n} = x^{-n}$	$\frac{1}{1-n}\frac{1}{x^{n-1}} + C = \frac{x^{1-n}}{1-n} + C \quad (n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}) \quad$ sur $I =]0,+\infty[$ ou $I =]-\infty, 0[$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x) + C \quad$ sur $I =]0,+\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + C \quad$ sur $I =]0,+\infty[$
e^x	$e^x + C$
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$

Ces formules sont à maîtriser ! Mais ce sont juste les formules des dérivées que vous connaissez déjà.

Primitives pour une composition

Ici u est une fonction dérivable sur un intervalle I ; C désigne une constante réelle.

Fonction	**Primitive**
$u'u^n$	$\frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \in \mathbb{N})$
$u'u^{-n}$	$\frac{u^{1-n}}{1-n} + C \quad (n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}) \quad u$ ne s'annulant pas sur I
$\frac{u'}{u}$	$\ln(u) + C$ où $u(x) > 0$ pour tout $x \in I$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + C \quad$ où $u(x) > 0$ pour tout $x \in I$
$u'e^u$	$e^u + C$
$u'\cos(u)$	$\sin(u) + C$
$u'\sin(u)$	$-\cos(u) + C$

— Exemple. Comment calculer une primitive de $f(x) = xe^{x^2}$? Avec $u(x) = x^2$ (et donc $u'(x) = 2x$) on a $2xe^{x^2} = u'(x)e^{u(x)}$ dont une primitive est ainsi $e^{x^2} = e^{u(x)}$. On réécrit alors la fonction dont on recherche une primitive comme $f(x) = \frac{1}{2} \cdot 2xe^{x^2}$: une primitive est donc $F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}$. Si on veut toutes les primitives, ce sont les fonctions $\frac{1}{2}e^{x^2} + C$ où C est une constante.

— Exercice. Calculer une primitive de $\cos(x)\big(\sin(x)\big)^2$.