Année 2022

QCM DE MATHÉMATIQUES - LILLE

Répondre en cochant la ou les cases correspondant à des assertions vraies (et seulement celles-ci).

Ces questions ont été écrites par Arnaud Bodin, Barnabé Croizat et Christine Sacré de l'université de Lille. Relecture de Guillemette Chapuisat.

Ce travail a été effectué en 2021-2022 dans le cadre d'un projet Hilisit porté par Unisciel.

Arithmétique

Arnaud Bodin, Barnabé Croizat, Christine Sacré

1 Arithmétique

1.1 pgcd | Facile

Question 1
On considère $a = 28$ et $b = 42$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ Les diviseurs communs à a et à b sont : 1, 2, 7.
- ☐ 14 est un diviseur de a mais pas de b.
- ☐ 6 est un diviseur de b mais pas de a.
- ☐ 84 est un multiple de a et de b.

Question 2
Quelles sont les valeurs qui correspondent à la division euclidienne $a = bq + r$ de a par b ?

- ☐ $a = 48$, $b = 7$, $q = 6$, $r = 6$
- ☐ $a = 101$, $b = 11$, $q = 9$, $r = 2$
- ☐ $a = 56$, $b = 9$, $q = 5$, $r = 11$
- ☐ $a = 123$, $b = 10$, $q = 13$, $r = -7$

Question 3
Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ 456 est divisible par 3.
- ☐ 754 est divisible par 4.
- ☐ 5552 est divisible par 5.
- ☐ 987 est divisible par 9.

Question 4
Quel est le reste r dans la division euclidienne de 145 par 13 ?

- ☐ $r = 0$
- ☐ $r = 2$
- ☐ $r = 7$
- ☐ $r = -11$

1.2 pgcd | Moyen

Question 5
Soit $a = bq + r$ la division euclidienne de a par b. Quelle condition définit le reste r ?

- ☐ $0 \leqslant r < a$
- ☐ $0 \leqslant r < b$
- ☐ $0 \leqslant r \leqslant q$
- ☐ $0 \leqslant r < q$

Question 6
Pour $a = 220$ et $b = 60$, quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ $\text{ppcm}(a, b) = 440$.
- ☐ 440 est un multiple commun à a et b.
- ☐ 10 est un diviseur commun à a et b.
- ☐ $\text{pgcd}(a, b) = 20$.

Question 7
Grâce à l'application de l'algorithme d'Euclide, on obtient pour $a = 630$ et $b = 165$:

- ☐ $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(165, 135)$
- ☐ $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(135, 30)$
- ☐ $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(30, 0)$
- ☐ $\text{pgcd}(a, b) = 15$

Question 8
Soit $a > 0$ un entier strictement positif dont le reste dans la division euclidienne par 8 est $r = 5$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ a est pair.
- ☐ a est impair.
- ☐ a est nécessairement divisible par 13.
- ☐ $(a - 5)$ est un multiple de 8.

Question 9
Pour $a = 24$ et $b = 8$, on a :

- ☐ $\text{ppcm}(a, b) = 8$.
- ☐ $\text{ppcm}(a, b) = 24$.
- ☐ a est un multiple de b.
- ☐ a est dans la liste des diviseurs de b.

1.3 pgcd | Difficile

Question 10

On considère a, b et d des entiers tels que $d|a$ et $d|b$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ $d|a+b$
- ☐ $d|a-b$
- ☐ $d|a \times b$
- ☐ $d|\frac{a}{b}$

Question 11

On considère a, b et n des entiers tels que $a|n$ et $b|n$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ $a+b|n$
- ☐ $a \times b|n$
- ☐ $a+b|n^2$
- ☐ $a \times b|n^2$

Question 12

Soit a_1 un entier dont le reste dans la division euclidienne par 5 est $r_1 = 2$. Soit a_2 un entier dont le reste dans la division euclidienne par 5 est $r_2 = 3$. Quelles sont alors les affirmations vraies ?

- ☐ Le reste de la division euclidienne de $a_1 + a_2$ par 5 est 0.
- ☐ Le reste de la division euclidienne de $a_1 + a_2$ par 5 est 5.
- ☐ Le reste de la division euclidienne de $2a_1 + 2a_2$ par 5 est 0.
- ☐ L'écriture décimale de $2a_1 + 2a_2$ finit par le chiffre 0.

Question 13

Soit $a > 0$ un entier impair qui est un multiple de 3. Quelles sont alors les affirmations vraies ?

- ☐ a est un multiple de 6.
- ☐ L'écriture décimale de a finit nécessairement soit par 7 soit par 9.
- ☐ $\text{pgcd}(a, 3) = 3$.
- ☐ $\text{ppcm}(a, 3) = a$.

Question 14

Soient a et b deux entiers positifs tels que $\text{pgcd}(a, b) = 10$ et $\text{ppcm}(a, b) = 140$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ $\text{pgcd}(2a, 2b) = 20$
- ☐ $\text{ppcm}(2a, 2b) = 70$
- ☐ $\text{pgcd}(2a, 2b) = 10$
- ☐ $\text{ppcm}(2a, 2b) = 280$

1.4 Théorème de Bézout | Facile

Question 15
Soient deux entiers a, b tels que $\text{pgcd}(a, b) = 1$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ a et b sont des nombres premiers.
- ☐ a et b sont des nombres premiers entre eux.
- ☐ Il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $au + bv = 1$.
- ☐ Il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $au + bv = 2$.

Question 16
Soient a, b, c des entiers tels que $a|bc$. Dans le lemme de Gauss, quelle est la condition pour pouvoir conclure que $a|c$?

- ☐ $\text{pgcd}(a, b) = 1$
- ☐ $\text{pgcd}(a, c) = 1$
- ☐ $\text{pgcd}(b, c) = 1$
- ☐ a, b et c sont des nombres premiers.

Question 17
Soit a et b deux entiers tels que $\text{pgcd}(a, b) = 4$. Alors on peut trouver deux entiers u et v tels que :

- ☐ $au - bv = 2$
- ☐ $au + bv = 2$
- ☐ $au - bv = 4$
- ☐ $au + bv = 12$

1.5 Théorème de Bézout | Moyen

Question 18
Soient deux entiers positifs a, b, on calcule le pgcd de a et b par l'algorithme d'Euclide. La première étape est d'écrire la division euclidienne de a par b : $a = bq + r$. Quelle est la second étape ?

- ☐ La division de a par r.
- ☐ La division de b par r.
- ☐ La division de q par r.
- ☐ Cela dépend des valeurs de a et b.

Question 19
Soient deux entiers positifs a, b et $d = \text{pgcd}(a, b)$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ Il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ uniques tels que $au + bv = d$.
- ☐ Il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $au + bv = d$.
- ☐ Il existe $u, v \in \mathbb{N}$ uniques tels que $au + bv = d$.
- ☐ Il existe $u, v \in \mathbb{N}$ tels que $au + bv = d$.

Question 20
Pour $a = 453$ et $b = 201$, l'algorithme d'Euclide (étendu) fournit des coefficients de Bézout u et v tels que $au + bv = \text{pgcd}(a, b)$ avec :

- ☐ $u = 4$, $v = -9$, $\text{pgcd}(a, b) = 1$.
- ☐ $u = -12$, $v = 27$, $\text{pgcd}(a, b) = 51$.
- ☐ $u = 1$, $v = -2$, $\text{pgcd}(a, b) = 51$
- ☐ $u = 4$, $v = -9$, $\text{pgcd}(a, b) = 3$.

Question 21
Pour les entiers a, b suivants, les u, v donnés sont-ils des coefficients de Bézout, c'est-à-dire tels que $au + bv = \text{pgcd}(a, b)$?

- ☐ $a = 7$, $b = 11$, $u = 2$, $v = -3$
- ☐ $a = 20$, $b = 55$, $u = 6$, $v = -2$
- ☐ $a = 28$, $b = 12$, $u = 1$, $v = -2$
- ☐ $a = 36$, $b = 15$, $u = -2$, $v = 5$

Question 22
Pour $a = 41$ et $b = 7$, on a notamment l'égalité $a \times (-3) + b \times 18 = 3$. Que peut-on en conclure ?

- ☐ $\text{pgcd}(a, b) = 3$.
- ☐ $\text{pgcd}(a, b)$ est un diviseur de 3.
- ☐ Comme 3 ne divise pas 7 alors a et b sont premiers entre eux.
- ☐ -3 et 18 sont premiers entre eux.

Question 23
Soit deux nombres entiers a et b tels que $5a^2 - 4b^2 = 1$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ $\text{pgcd}(a^2, b^2) = 1$.
- ☐ $\text{pgcd}(5a, 4b) = 1$.
- ☐ 5 divise $4b^2$.
- ☐ 4 divise $5a^2 - 1$.

1.6 Théorème de Bézout | Difficile

Question 24
Quelles sont les affirmations vraies concernant l'algorithme d'Euclide ?

- ☐ Il se peut que le processus n'aboutisse pas à cause d'un nombre infini de divisions à effectuer.
- ☐ Il se peut que le processus ne fournisse pas le pgcd correct.
- ☐ Le pgcd est le dernier reste non nul.
- ☐ L'algorithme étendu permet en plus de calculer des coefficients de Bézout.

Question 25
Soit n un entier tel que $5n$ soit un multiple de 7. Quelles sont alors les affirmations vraies ?

- ☐ n est un multiple de 7.
- ☐ 5 divise $7n$.
- ☐ 7 divise n.
- ☐ 35 divise n.

Question 26
Soient 5 entiers relatifs a, b, c, u, v tels que $au + bv = 1$ et $a|bc$. Quelles sont alors les affirmations vraies ?

- ☐ $\text{pgcd}(a, c) = 1$.
- ☐ $\text{pgcd}(a, b) = 1$.
- ☐ $a|c$.
- ☐ $\text{pgcd}(a, c) = |a|$.

1.7 Nombres premiers | Facile

Question 27
Les entiers suivants sont-ils des nombres premiers ?

- ☐ 107
- ☐ 113
- ☐ 145
- ☐ 153

Question 28
Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ Tout nombre impair supérieur à 3 est premier.
- ☐ Tout nombre premier supérieur à 3 est impair.
- ☐ Il existe une infinité de nombres premiers impairs.
- ☐ Il existe une infinité de nombres premiers pairs.

Question 29
Les entiers suivants sont-ils des nombres premiers ?

- ☐ 161
- ☐ 169
- ☐ 171
- ☐ 179

1.8 Nombres premiers | Moyen

Question 30

Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ La somme de deux nombres premiers $\geqslant 3$ n'est jamais un nombre premier.
- ☐ Le produit de deux nombres premiers $\geqslant 3$ n'est jamais un nombre premier.
- ☐ Il existe un nombre premier $p \geqslant 3$ tel que $p+1$ soit aussi premier.
- ☐ Il existe un nombre premier $p \geqslant 3$ tel que $p+2$ soit aussi premier.

Question 31

Soient p un nombre premier et a, b des entiers avec $p|ab$. Par application du lemme d'Euclide, quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ p divise a et p divise b.
- ☐ p divise a ou p divise b.
- ☐ p divise a ou p divise b, mais pas les deux en même temps.
- ☐ p ne divise ni a, ni b.

Question 32

Soit n un entier tel que $n^2 - 1$ est un multiple de 11. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ 11 divise $n-1$.
- ☐ 11 divise $n+1$.
- ☐ (11 divise $n-1$) ou (11 divise $n+1$).
- ☐ (11 divise $n-1$) et (11 divise $n+1$).

Question 33

À l'aide d'une calculatrice, quelle est l'écriture de la décomposition en produit de facteurs premiers de $N = 111\,111$?

- ☐ $N = 11 \times 10\,101$.
- ☐ $N = 3 \times 11 \times 3367$.
- ☐ $N = 7 \times 33 \times 481$.
- ☐ $N = 3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 3713$.

Question 34

Soit $p \geqslant 3$ un nombre premier et $p = 4q + r$ le résultat de sa division euclidienne par 4. On peut alors avoir :

- ☐ $r = 0$
- ☐ $r = 1$
- ☐ $r = 2$
- ☐ $r = 3$

Question 35
Soit p un nombre premier tel que $10 < p < 100$. On note A le chiffre des dizaines et B le chiffre des unités de l'écriture décimale de p. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ A peut être pair.
- ☐ B peut être pair.
- ☐ On peut avoir $A = B$.
- ☐ On peut avoir $B = 9 - A$.

1.9 Nombres premiers | Difficile

Question 36
Les entiers suivants ont été factorisés correctement. Quelles sont les écritures qui sont des décompositions en facteurs premiers ?

- ☐ $3\,025 = 1^3 \times 5^2 \times 11^2$
- ☐ $1\,836 = 2^2 \times 3 \times 3^2 \times 17$
- ☐ $1\,444\,716 = 2^2 \times 7^3 \times 9^2 \times 13$
- ☐ $13\,915 = 5 \times 11^2 \times 23$

Question 37
Soient $a = 5^3 \times 11^2 \times 13^5 \times 19$ et $b = 5^5 \times 7^4 \times 11 \times 19$ Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ $\mathrm{pgcd}(a, b) = 5^3 \times 7^4 \times 11 \times 13^5 \times 19$
- ☐ $\mathrm{pgcd}(a, b) = 5 \times 11 \times 19$
- ☐ $\mathrm{ppcm}(a, b) = 5^5 \times 7^4 \times 11^2 \times 13^5 \times 19$
- ☐ $\mathrm{ppcm}(a, b) = 5^5 \times 11^2 \times 19$

Question 38
Soit $a = 79\,475 = 5^2 \times 11 \times 17^2$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ $\mathrm{pgcd}(a, 75) = 3 \times 5^2$
- ☐ $\mathrm{pgcd}(a, 75) = 5^2$
- ☐ $\mathrm{ppcm}(a, 75) = 3 \times 11 \times 17^2$
- ☐ $75 | a$

Question 39
Soit $p \geqslant 5$ un nombre premier et $N = (p + 3)^2 - p^2$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ $2 | N$.
- ☐ $3 | N$.
- ☐ $6 | N$.
- ☐ p ne divise pas N.

1.10 Congruences | Facile

Question 40
Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ $31 \equiv 6\,[12]$
- ☐ $42 \equiv 16\,[13]$
- ☐ $25 \equiv -11\,[14]$
- ☐ $158 \equiv 8\,[15]$

Question 41
Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ $456\,789 \equiv 0\,[2]$
- ☐ $43\,210 \equiv 0\,[5]$
- ☐ $23\,769 \equiv 3\,[9]$
- ☐ $10\,326 \equiv 8\,[10]$

Question 42
Si $x \equiv 2\,[5]$, alors on a :

- ☐ $x^2 \equiv 2x\,[5]$
- ☐ $3x \equiv -1\,[5]$
- ☐ $x + 1 \equiv 3\,[5]$
- ☐ $10x \equiv 2\,[5]$

Question 43
Parmi les nombres n ci-dessous, lequel vérifie à la fois $n \equiv 5\,[14]$ et $n \equiv 1\,[8]$?

- ☐ $n = 47$
- ☐ $n = 57$
- ☐ $n = 89$
- ☐ $n = 103$

1.11 Congruences | Moyen

Question 44
Soient $a \equiv 2\,[13]$ et $b \equiv 7\,[13]$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ $a + b \equiv 9\,[13]$
- ☐ $ab \equiv 1\,[13]$
- ☐ $a^2 \equiv -9\,[13]$
- ☐ $b^3 \equiv 5\,[13]$

Question 45
Soient $a \equiv b\,[n]$ et $c \equiv d\,[n]$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ $a+b \equiv c+d\ [n]$
- ☐ $a+c \equiv b+d\ [n]$
- ☐ $a^2 \equiv b^2\ [n]$
- ☐ $c^2 \equiv d^2\ [n]$

Question 46
Soit n un entier premier avec 3. On peut alors affirmer :

- ☐ $2n \equiv 1\ [3]$
- ☐ $2n \equiv -1\ [3]$
- ☐ $n^2 \equiv 1\ [3]$
- ☐ $n^2 \equiv -1\ [3]$

Question 47
Soit k un entier et $N = 5k^2 - 10k + 4$. On peut affirmer :

- ☐ $N \equiv 4\ [5]$
- ☐ $N \equiv 5\ [5]$
- ☐ $N \equiv 5k^2\ [2]$
- ☐ $N \equiv 1\ [2]$

1.12 Congruences | Difficile

Question 48
Soit p un nombre premier et x un entier. Quel(s) énoncé(s) du petit théorème de Fermat sont corrects ?

- ☐ $x^p \equiv p\ [x]$
- ☐ $x^p \equiv x\ [p]$
- ☐ Si p ne divise pas x, alors $x^{p-1} \equiv 0\ [x]$
- ☐ Si p ne divise pas x, alors $x^{p-1} \equiv 0\ [p]$

Question 49
Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ $2^8 \equiv 2\ [8]$
- ☐ $3^{12} \equiv 3\ [13]$
- ☐ $18^7 \equiv 1\ [19]$
- ☐ $4^{16} \equiv 1\ [17]$

Question 50
Soit un entier k tel que $k \equiv 2\ [7]$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ $2k^2 + k \equiv k^3\ [7]$
- ☐ $3(k^4 - k) \equiv 0\ [7]$

- ☐ $14k - 2 \equiv 5\ [7]$
- ☐ $k^{18} + k^{12} + k^{6} \equiv k\ [7]$

Question 51

Pour quel(s) entier(s) n a-t-on $10^{10} \equiv 7^{18}\ [n]$?

- ☐ $n = 3$
- ☐ $n = 5$
- ☐ $n = 7$
- ☐ $n = 9$

Question 52

Quel est le chiffre des unités de 7^{100} ?

- ☐ 1
- ☐ 3
- ☐ 5
- ☐ 9