Année 2022

QCM DE MATHÉMATIQUES - LILLE

Répondre en cochant la ou les cases correspondant à des assertions vraies (et seulement celles-ci).

Ces questions ont été écrites par Arnaud Bodin, Barnabé Croizat et Christine Sacré de l'université de Lille. Relecture de Guillemette Chapuisat.

Ce travail a été effectué en 2021-2022 dans le cadre d'un projet Hilisit porté par Unisciel.

Arithmétique

Arnaud Bodin, Barnabé Croizat, Christine Sacré

1 Arithmétique

1.1 pgcd | Facile

Question 1
On considère $a = 28$ et $b = 42$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Faux] Les diviseurs communs à a et à b sont : 1, 2, 7.
- ☐ [Faux] 14 est un diviseur de a mais pas de b.
- ☐ [Vrai] 6 est un diviseur de b mais pas de a.
- ☐ [Vrai] 84 est un multiple de a et de b.

Explications : Les diviseurs communs à a et à b sont : 1, 2, 7 et 14. Le ppcm de a et b est 84.

Question 2
Quelles sont les valeurs qui correspondent à la division euclidienne $a = bq + r$ de a par b ?

- ☐ [Vrai] $a = 48$, $b = 7$, $q = 6$, $r = 6$
- ☐ [Vrai] $a = 101$, $b = 11$, $q = 9$, $r = 2$
- ☐ [Faux] $a = 56$, $b = 9$, $q = 5$, $r = 11$
- ☐ [Faux] $a = 123$, $b = 10$, $q = 13$, $r = -7$

Explications : $48 = 7 \times 6 + 6$
$101 = 11 \times 9 + 2$
$56 = 9 \times 6 + 2$. Attention $56 = 9 \times 5 + 11$, mais on n'a pas $0 \leqslant 11 \leqslant 9 - 1$, donc cette écriture n'est pas la division euclidienne de 56 par 9.
$123 = 10 \times 12 + 3$. Attention $123 = 10 \times 13 + (-7)$, mais on n'a pas $0 \leqslant -7 \leqslant 10 - 1$, donc cette écriture n'est pas la division euclidienne de 123 par 10.

Question 3
Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Vrai] 456 est divisible par 3.
- ☐ [Faux] 754 est divisible par 4.
- ☐ [Faux] 5552 est divisible par 5.
- ☐ [Faux] 987 est divisible par 9.

Explications : Critère de divisibilité par 3 : la somme des chiffres est divisible par 3.
Critère de divisibilité par 2 : le dernier chiffre est pair.
Pour décider si un entier est divisible par 4 : diviser l'entier par 2 et appliquer le critère de divisibilité

par 2.
Critère de divisibilité par 5 : le dernier chiffre est 0 ou 5.
Critère de divisibilité par 9 : la somme des chiffres est divisible par 9.

Question 4
Quel est le reste r dans la division euclidienne de 145 par 13 ?

- ☐ [Faux] $r = 0$
- ☐ [Vrai] $r = 2$
- ☐ [Faux] $r = 7$
- ☐ [Faux] $r = -11$

Explications : La division euclidienne de 145 par 13 nous donne l'écriture : $145 = 13 \times 11 + 2$. Le reste r est donc 2.
Il est vrai que $145 = 13 \times 12 - 11$, mais cela ne correspond pas à une division euclidienne puisque le reste r n'est pas compris entre 0 et $13 - 1 = 12$.

1.2 pgcd | Moyen

Question 5
Soit $a = bq + r$ la division euclidienne de a par b. Quelle condition définit le reste r ?

- ☐ [Faux] $0 \leqslant r < a$
- ☐ [Vrai] $0 \leqslant r < b$
- ☐ [Faux] $0 \leqslant r \leqslant q$
- ☐ [Faux] $0 \leqslant r < q$

Explications : Dans la division euclidienne, on a $0 \leqslant r \leqslant b - 1$, c'est-à-dire $0 \leqslant r < b$ puisque r est un entier. Cela permet d'avoir l'unicité du quotient q et du reste r.

Question 6
Pour $a = 220$ et $b = 60$, quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Faux] $\mathrm{ppcm}(a, b) = 440$.
- ☐ [Faux] 440 est un multiple commun à a et b.
- ☐ [Vrai] 10 est un diviseur commun à a et b.
- ☐ [Vrai] $\mathrm{pgcd}(a, b) = 20$.

Explications : Le plus grand diviseur commun à $a = 220$ et $b = 60$ est $\mathrm{pgcd}(220, 60) = 20$ (on peut l'obtenir via l'algorithme d'Euclide, on en dressant les listes exhaustives des diviseurs communs à 220 et 60). Puisque 10 est un diviseur de 20, 10 est bien un diviseur commun à a et b (ce qui se voit sur l'écriture des deux nombres : ils finissent par 0).
En revanche 440 n'est pas un multiple de $b = 60$ (on a $60 \times 7 = 420$ et $60 \times 8 = 480$). On peut d'ailleurs calculer que $\mathrm{ppcm}(a, b) = \frac{a \times b}{\mathrm{pgcd}(a,b)} = 660$.

Question 7
Grâce à l'application de l'algorithme d'Euclide, on obtient pour $a = 630$ et $b = 165$:

- ☐ [Vrai] $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(165, 135)$
- ☐ [Vrai] $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(135, 30)$
- ☐ [Faux] $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(30, 0)$
- ☐ [Vrai] $\text{pgcd}(a, b) = 15$

Explications : L'algorithme d'Euclide nous donne :

$$630 = 165 \times 3 + 135$$
$$165 = 135 \times 1 + 30$$
$$135 = 30 \times 4 + \boxed{15}$$
$$30 = 15 \times 2 + 0$$

Ainsi on a :

$$\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(165, 135) = \text{pgcd}(135, 30) = \text{pgcd}(30, 15) = \text{pgcd}(15, 0) = 15$$

En revanche, $\text{pgcd}(30, 0) = 30 \neq \text{pgcd}(a, b)$.

Question 8

Soit $a > 0$ un entier strictement positif dont le reste dans la division euclidienne par 8 est $r = 5$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Faux] a est pair.
- ☐ [Vrai] a est impair.
- ☐ [Faux] a est nécessairement divisible par 13.
- ☐ [Vrai] $(a - 5)$ est un multiple de 8.

Explications : Puisque le reste dans la division euclidienne de a par 8 est 5, on peut écrire $a = 8k + 5$, avec k un nombre entier (positif car $a > 0$).
On peut réécrire $a = 8k + 5 = 2(4k + 2) + 1$: ainsi a est impair.
Pour $k = 0$, on a $a = 5$ qui n'est pas divisible par 13 (ou aussi pour $k = 2$ avec $a = 21$ par exemple).
Puisqu'on a $(a - 5) = 8k$, cela signifie que $(a - 5)$ est bien un multiple de 8.

Question 9

Pour $a = 24$ et $b = 8$, on a :

- ☐ [Faux] $\text{ppcm}(a, b) = 8$.
- ☐ [Vrai] $\text{ppcm}(a, b) = 24$.
- ☐ [Vrai] a est un multiple de b.
- ☐ [Faux] a est dans la liste des diviseurs de b.

Explications : a étant un multiple de b (on a $24 = 8 \times 3$), on a immédiatement $\text{pgcd}(a, b) = b$ et $\text{ppcm}(a, b) = a$.

1.3 pgcd | Difficile

Question 10
On considère a, b et d des entiers tels que $d|a$ et $d|b$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Vrai] $d|a+b$
- ☐ [Vrai] $d|a-b$
- ☐ [Vrai] $d|a \times b$
- ☐ [Faux] $d|\frac{a}{b}$

Explications : L'affirmation $d|\frac{a}{b}$ est fausse et n'a même pas toujours de sens. Le reste est vrai.

Question 11
On considère a, b et n des entiers tels que $a|n$ et $b|n$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Faux] $a+b|n$
- ☐ [Faux] $a \times b|n$
- ☐ [Faux] $a+b|n^2$
- ☐ [Vrai] $a \times b|n^2$

Explications : Si $a|n$ et $b|n$ alors ab divise $n \times n = n^2$. Les autres affirmations sont fausses. Trouver des contre-exemples, du style : $2|12$ et $3|12$ mais $2+3$ ne divise pas 12.

Question 12
Soit a_1 un entier dont le reste dans la division euclidienne par 5 est $r_1 = 2$. Soit a_2 un entier dont le reste dans la division euclidienne par 5 est $r_2 = 3$. Quelles sont alors les affirmations vraies ?

- ☐ [Vrai] Le reste de la division euclidienne de $a_1 + a_2$ par 5 est 0.
- ☐ [Faux] Le reste de la division euclidienne de $a_1 + a_2$ par 5 est 5.
- ☐ [Vrai] Le reste de la division euclidienne de $2a_1 + 2a_2$ par 5 est 0.
- ☐ [Vrai] L'écriture décimale de $2a_1 + 2a_2$ finit par le chiffre 0.

Explications : Les divisions euclidiennes par 5 nous donnent : $a_1 = 5k_1 + 2$ et $a_2 = 5k_2 + 3$. On a ainsi :

$$a_1 + a_2 = 5(k_1 + k_2) + 5 = 5(k_1 + k_2 + 1) + 0$$

La dernière écriture correspond bien à la division euclidienne de $a_1 + a_2$ par 5 car le reste (c'est 0) est bien compris entre 0 et 4.
De même, on calcule :

$$2a_1 + 2a_2 = 2 \times 5(k_1 + k_2 + 1) = 5(2k_1 + 2k_2 + 2) = 10(k_1 + k_2 + 1)$$

Aussi $2a_1 + 2a_2$ est un entier divisible par 5 et par 10, donc son écriture décimale se termine par 0.

Question 13
Soit $a > 0$ un entier impair qui est un multiple de 3. Quelles sont alors les affirmations vraies ?

- ☐ [Faux] a est un multiple de 6.
- ☐ [Faux] L'écriture décimale de a finit nécessairement soit par 7 soit par 9.
- ☐ [Vrai] $\mathrm{pgcd}(a, 3) = 3$.

- ☐ [Vrai] $\text{ppcm}(a,3) = a$.

Explications : Les multiples positifs de 3 s'écrivent $3N$, avec N un entier positif. Si $N = 2k$ est pair, alors $3N = 6k$ est un entier pair. Donc a, notre entier impair multiple de 3, s'écrit $a = 3N$ avec $N = 2k+1$ un nombre impair ; ou encore $a = 3(2k+1) = 6k+3$.
Le reste de la division euclidienne de a par 6 est 3. Donc a n'est pas un multiple de 6.
Pour $k = 2$ par exemple, on a $a = 6\times2+3 = 15$ qui est un entier impair, multiple de 3, dont l'écriture décimale ne finit ni par 7 ni par 9.
La liste des diviseurs de 3 se réduit à 1 et 3. Puisque 3 divise a, 3 est un multiple commun à 3 et a : on a donc $\text{pgcd}(a,3) = 3$. Par conséquent, on a aussi $\text{ppcm}(a,3) = a$ de sorte que $\text{pgcd}(a,3)\times\text{ppcm}(a,3) = a \times 3$.

Question 14
Soient a et b deux entiers positifs tels que $\text{pgcd}(a,b) = 10$ et $\text{ppcm}(a,b) = 140$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Vrai] $\text{pgcd}(2a,2b) = 20$
- ☐ [Faux] $\text{ppcm}(2a,2b) = 70$
- ☐ [Faux] $\text{pgcd}(2a,2b) = 10$
- ☐ [Vrai] $\text{ppcm}(2a,2b) = 280$

Explications : On utilise la relation $\text{pgcd}(a,b)\times\text{ppcm}(a,b) = a\times b$ pour obtenir $ab = 10\times140 = 1400$.
On a alors $\text{pgcd}(2a,2b) = 2\times\text{pgcd}(a,b) = 2\times10 = 20$.
Mais on obtient aussi

$$\text{pgcd}(2a,2b)\times\text{ppcm}(2a,2b) = (2a)\times(2b) = 4\times ab = 5600$$

donc

$$\text{ppcm}(2a,2b) = \frac{5600}{\text{pgcd}(2a,2b)} = \frac{5600}{20} = 280$$

Remarquez qu'on a donc $\text{ppcm}(2a,2b) = 2\times\text{ppcm}(2a,2b)$, et plus généralement $\text{ppcm}(na,nb) = |n|\,\text{ppcm}(a,b)$.

1.4 Théorème de Bézout | Facile

Question 15
Soient deux entiers a, b tels que $\text{pgcd}(a,b) = 1$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Faux] a et b sont des nombres premiers.
- ☐ [Vrai] a et b sont des nombres premiers entre eux.
- ☐ [Vrai] Il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $au + bv = 1$.
- ☐ [Vrai] Il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $au + bv = 2$.

Explications : $\text{pgcd}(a,b) = 1$ est la définition de a et b sont des nombres premiers entre eux. Le théorème de Bézout affirme qu'il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $au+bv = 1$. En multipliant cette égalité par 2, on obtient $a(2u) + b(2v) = 2$.

Question 16
Soient a, b, c des entiers tels que $a|bc$. Dans le lemme de Gauss, quelle est la condition pour pouvoir conclure que $a|c$?

- ☐ [Vrai] $\text{pgcd}(a,b) = 1$
- ☐ [Faux] $\text{pgcd}(a,c) = 1$
- ☐ [Faux] $\text{pgcd}(b,c) = 1$
- ☐ [Faux] a, b et c sont des nombres premiers.

Explications : Lemme de Gauss : si $a|bc$ et $\text{pgcd}(a,b) = 1$ alors $a|c$.

Question 17
Soit a et b deux entiers tels que $\text{pgcd}(a,b) = 4$. Alors on peut trouver deux entiers u et v tels que :

- ☐ [Faux] $au - bv = 2$
- ☐ [Faux] $au + bv = 2$
- ☐ [Vrai] $au - bv = 4$
- ☐ [Vrai] $au + bv = 12$

Explications : Une égalité $au \pm bv = 2$ nous indiquerait que tout diviseur de a et b diviserait 2 donc $\text{pgcd}(a,b) = 1$ ou 2, ce qui n'est pas le cas ici.
Le théorème de Bézout nous garantit l'existence de deux entiers U et V tels que $aU + bV = 4$. Si l'on prend $v = -V$, on obtient $au - bv = 4$. Si l'on multiplie l'égalité de Bézout par 3, on a alors $a \times (3U) + b \times (3V) = 3 \times 4 = 12$.

1.5 Théorème de Bézout | Moyen

Question 18
Soient deux entiers positifs a, b, on calcule le pgcd de a et b par l'algorithme d'Euclide. La première étape est d'écrire la division euclidienne de a par b : $a = bq + r$. Quelle est la second étape ?

- ☐ [Faux] La division de a par r.
- ☐ [Vrai] La division de b par r.
- ☐ [Faux] La division de q par r.
- ☐ [Faux] Cela dépend des valeurs de a et b.

Explications : Une conséquence de l'égalité est que $\text{pgcd}(a,b) = \text{pgcd}(b,r)$. On remplace donc a par b et b par r dans l'étape suivante, c'est-à-dire qu'on fait la division euclidienne de b par r.

Question 19
Soient deux entiers positifs a, b et $d = \text{pgcd}(a,b)$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Faux] Il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ uniques tels que $au + bv = d$.
- ☐ [Vrai] Il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $au + bv = d$.
- ☐ [Faux] Il existe $u, v \in \mathbb{N}$ uniques tels que $au + bv = d$.
- ☐ [Faux] Il existe $u, v \in \mathbb{N}$ tels que $au + bv = d$.

Explications : Il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $au + bv = d$. u et v ne sont pas uniques. Comme $a, b, d > 0$, $d \leqslant a$ et $d \leqslant b$ alors soit u soit v sera négatif.

Question 20
Pour $a = 453$ et $b = 201$, l'algorithme d'Euclide (étendu) fournit des coefficients de Bézout u et v tels que $au + bv = \text{pgcd}(a,b)$ avec :

- ☐ [Faux] $u = 4$, $v = -9$, $\text{pgcd}(a, b) = 1$.
- ☐ [Faux] $u = -12$, $v = 27$, $\text{pgcd}(a, b) = 51$.
- ☐ [Faux] $u = 1$, $v = -2$, $\text{pgcd}(a, b) = 51$
- ☐ [Vrai] $u = 4$, $v = -9$, $\text{pgcd}(a, b) = 3$.

Explications : L'algorithme d'Euclide nous fournit :

$$453 = 2 \times 201 + 51$$

$$201 = 3 \times 51 + 48$$

$$51 = 1 \times 48 + 3$$

$$48 = 16 \times 3 + 0$$

Ainsi on a $\text{pgcd}(a, b) = 3$. En remontant cet algorithme, on obtient :

$$3 = 51 - 48 = 201 \times (-1) + 51 \times 4 = 453 \times 4 + 201 \times (-9)$$

Question 21
Pour les entiers a, b suivants, les u, v donnés sont-ils des coefficients de Bézout, c'est-à-dire tels que $au + bv = \text{pgcd}(a, b)$?

- ☐ [Faux] $a = 7$, $b = 11$, $u = 2$, $v = -3$
- ☐ [Faux] $a = 20$, $b = 55$, $u = 6$, $v = -2$
- ☐ [Vrai] $a = 28$, $b = 12$, $u = 1$, $v = -2$
- ☐ [Vrai] $a = 36$, $b = 15$, $u = -2$, $v = 5$

Explications : Pour $a = 7$, $b = 11$, $u = 2$, $v = -3$, on a $\text{pgcd}(a, b) = 1$ et $au + bv = -19 \neq 1$.
Pour $a = 20$, $b = 55$, $u = 6$, $v = -2$, on a $\text{pgcd}(a, b) = 5$ et $au + bv = 10 \neq 5$.
Pour $a = 28$, $b = 12$, $u = 1$, $v = -2$, on a $\text{pgcd}(a, b) = 4$ et $au + bv = 4$.
Pour $a = 36$, $b = 15$, $u = -2$, $v = 5$, on a $\text{pgcd}(a, b) = 3$ et $au + bv = 3$.

Question 22
Pour $a = 41$ et $b = 7$, on a notamment l'égalité $a \times (-3) + b \times 18 = 3$. Que peut-on en conclure ?

- ☐ [Faux] $\text{pgcd}(a, b) = 3$.
- ☐ [Vrai] $\text{pgcd}(a, b)$ est un diviseur de 3.
- ☐ [Vrai] Comme 3 ne divise pas 7 alors a et b sont premiers entre eux.
- ☐ [Faux] -3 et 18 sont premiers entre eux.

Explications : Comme $\text{pgcd}(a, b)$ divise a et b, il divise aussi $a \times (-3) + b \times 18 = 3$. Donc $\text{pgcd}(a, b)$ est un diviseur de 3 : c'est donc soit 3, soit 1. Mais puisque 3 ne divise pas b (ni a d'ailleurs), on a donc $\text{pgcd}(a, b) = 1$: a et b sont premiers entre eux.
Enfin, les nombres -3 et 18 sont divisibles par 3.

Question 23
Soit deux nombres entiers a et b tels que $5a^2 - 4b^2 = 1$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Vrai] $\text{pgcd}(a^2, b^2) = 1$.
- ☐ [Vrai] $\text{pgcd}(5a, 4b) = 1$.
- ☐ [Faux] 5 divise $4b^2$.
- ☐ [Vrai] 4 divise $5a^2 - 1$.

Explications : L'égalité fournie peut s'écrire sous les formes $5 \times a^2 + (-4) \times b^2 = 1 = a \times (5a) + (-b) \times 4b = 1$. Ce sont notamment des identités de Bézout pour les couples (a^2, b^2) et $(5a, 4b)$ qui sont donc premiers entre eux.
Si 5 était un diviseur de $4b^2$, il diviserait $(5a^2 - 4b^2)$ et donc 1 ce qui est impossible.
Enfin ayant $5a^2 - 1 = 4b^2$, le nombre $5a^2 - 1$ est bien un multiple de 4.

1.6 Théorème de Bézout | Difficile

Question 24
Quelles sont les affirmations vraies concernant l'algorithme d'Euclide ?

- ☐ [Faux] Il se peut que le processus n'aboutisse pas à cause d'un nombre infini de divisions à effectuer.
- ☐ [Faux] Il se peut que le processus ne fournisse pas le pgcd correct.
- ☐ [Vrai] Le pgcd est le dernier reste non nul.
- ☐ [Vrai] L'algorithme étendu permet en plus de calculer des coefficients de Bézout.

Explications : L'algorithme d'Euclide fournit un résultat *correct* en un nombre *fini* d'étapes. La remontée de l'algorithme d'Euclide permet de calculer des coefficients de Bézout.

Question 25
Soit n un entier tel que $5n$ soit un multiple de 7. Quelles sont alors les affirmations vraies ?

- ☐ [Vrai] n est un multiple de 7.
- ☐ [Faux] 5 divise $7n$.
- ☐ [Vrai] 7 divise n.
- ☐ [Faux] 35 divise n.

Explications : D'après le lemme de Gauss, puisque $7|5n$ et que $\text{pgcd}(5, 7) = 1$, on a $7|n$: ceci revient à dire que n est un multiple de 7.
En revanche si l'on prend $n = 7$, on constate que $5n = 35$ est bien multiple de 7 mais que 5 ne divise pas $7n = 49$ et que 35 ne divise pas $n = 7$.

Question 26
Soient 5 entiers relatifs a, b, c, u, v tels que $au + bv = 1$ et $a|bc$. Quelles sont alors les affirmations vraies ?

- ☐ [Faux] $\text{pgcd}(a, c) = 1$.
- ☐ [Vrai] $\text{pgcd}(a, b) = 1$.
- ☐ [Vrai] $a|c$.
- ☐ [Vrai] $\text{pgcd}(a, c) = |a|$.

Explications : $au + bv = 1$ est une identité de Bézout qui garantit que $\mathrm{pgcd}(a, b) = 1$. D'après le lemme de Gauss, puisque $a|bc$, on a alors $a|c$.
Puisque $a|c$, $|a|$ est un diviseur de c. Or c'est le plus grand diviseur de a : donc $|a| = \mathrm{pgcd}(a, c)$.
Un contre-exemple pour établir que $\mathrm{pgcd}(a, c)$ n'est pas nécessairement égal à 1 peut par exemple être $a = 5$, $b = 7$ (bien premiers entre eux) et $c = 10$. On a bien $a|bc$ mais $\mathrm{pgcd}(a, c) = 5$. Plus généralement, on peut toujours respecter la condition $a|bc$ avec $c = a$, ce qui contredit $\mathrm{pgcd}(a, c) = 1$ dès que a n'est pas égal à ± 1.

1.7 Nombres premiers | Facile

Question 27
Les entiers suivants sont-ils des nombres premiers ?

- ☐ [Vrai] 107
- ☐ [Vrai] 113
- ☐ [Faux] 145
- ☐ [Faux] 153

Explications : 107 et 113 sont des nombres premiers ; $145 = 5 \times 29$; $153 = 3^2 \times 17$.

Question 28
Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Faux] Tout nombre impair supérieur à 3 est premier.
- ☐ [Vrai] Tout nombre premier supérieur à 3 est impair.
- ☐ [Vrai] Il existe une infinité de nombres premiers impairs.
- ☐ [Faux] Il existe une infinité de nombres premiers pairs.

Explications : Par exemple 9 est un nombre impair qui n'est pas premier. Le seul nombre premier pair est 2, tous les autres sont impairs et il y en a une infinité.

Question 29
Les entiers suivants sont-ils des nombres premiers ?

- ☐ [Faux] 161
- ☐ [Faux] 169
- ☐ [Faux] 171
- ☐ [Vrai] 179

Explications : On a $161 = 7 \times 23$, $169 = 13^2$ et 171 est divisible par 9 (car la somme de ses chiffres fait 9).
En revanche, 179 n'est pas divisible par $2, 3, 5, 7, 11, 13$ ce qui garantit sa primalité.

1.8 Nombres premiers | Moyen

Question 30
Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Vrai] La somme de deux nombres premiers $\geqslant 3$ n'est jamais un nombre premier.
- ☐ [Vrai] Le produit de deux nombres premiers $\geqslant 3$ n'est jamais un nombre premier.
- ☐ [Faux] Il existe un nombre premier $p \geqslant 3$ tel que $p+1$ soit aussi premier.
- ☐ [Vrai] Il existe un nombre premier $p \geqslant 3$ tel que $p+2$ soit aussi premier.

Explications : Le produit de deux nombres premiers n'est jamais un nombre premier (par définition de ce qu'est un nombre premier). Pour la somme, cela peut arriver, par exemple $2+3=5$, mais pour deux nombres premiers $\geqslant 3$, ils sont impairs, donc la somme est paire et n'est pas un nombre premier. De même si $p \geqslant 3$ est premier, il est impair, donc $p+1$ est pair et n'est pas premier. Par contre pour $p=11$ alors $p+2=13$ est aussi premier, d'autres exemples sont 17 et 19 ou bien 101 et 103.

Question 31
Soient p un nombre premier et a, b des entiers avec $p|ab$. Par application du lemme d'Euclide, quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Faux] p divise a et p divise b.
- ☐ [Vrai] p divise a ou p divise b.
- ☐ [Faux] p divise a ou p divise b, mais pas les deux en même temps.
- ☐ [Faux] p ne divise ni a, ni b.

Explications : Lemme d'Euclide : Si p premier et $p|ab$, alors $p|a$ ou $p|b$. Les autres affirmations sont fausses. Voici des contre-exemples : $2|(3\times 4)$ mais 2 ne divise pas 3, mais divise bien 4 ; $2|(4\times 6)$ et $2|4$ et $2|6$.

Question 32
Soit n un entier tel que n^2-1 est un multiple de 11. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Faux] 11 divise $n-1$.
- ☐ [Faux] 11 divise $n+1$.
- ☐ [Vrai] (11 divise $n-1$) ou (11 divise $n+1$).
- ☐ [Faux] (11 divise $n-1$) et (11 divise $n+1$).

Explications : 11 est premier et divise $n^2-1=(n-1)(n+1)$. D'après le lemme d'Euclide, soit $11|(n-1)$, soit $11|(n+1)$.
Pour $n=10$, on a $11|(10^2-1)$ mais 11 ne divise pas $10-1=9$.
Pour $n=12$, on a $11|12^2-1$ mais 11 ne divise pas $12+1=13$.
Et si 11 divisait $n-1$ et $n+1$ alors 11 diviserait $n+1-(n-1)=2$.

Question 33
À l'aide d'une calculatrice, quelle est l'écriture de la décomposition en produit de facteurs premiers de $N=111\,111$?

- ☐ [Faux] $N=11\times 10\,101$.
- ☐ [Faux] $N=3\times 11\times 3367$.

- ☐ [Faux] $N = 7 \times 33 \times 481$.
- ☐ [Vrai] $N = 3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 3713$.

Explications : Les entiers 10 101, 3367 et 481 sont des multiples de 13 !

Question 34

Soit $p \geqslant 3$ un nombre premier et $p = 4q + r$ le résultat de sa division euclidienne par 4. On peut alors avoir :

- ☐ [Faux] $r = 0$
- ☐ [Vrai] $r = 1$
- ☐ [Faux] $r = 2$
- ☐ [Vrai] $r = 3$

Explications : Un nombre premier $\geqslant 3$ est nécessairement impair. Ceci exclut donc les possibilité $r = 0$ et $r = 2$ qui correspondent à des nombres pairs.
On peut à titre d'exemple obtenir pour $p = 3$ que $r = 3$; et pour $p = 5$ que $r = 1$.

Question 35

Soit p un nombre premier tel que $10 < p < 100$. On note A le chiffre des dizaines et B le chiffre des unités de l'écriture décimale de p. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Vrai] A peut être pair.
- ☐ [Faux] B peut être pair.
- ☐ [Vrai] On peut avoir $A = B$.
- ☐ [Faux] On peut avoir $B = 9 - A$.

Explications : Pour $p = 23$ qui est premier, on a bien $A = 2$ qui est pair.
Si le chiffre des unités B est pair, alors p est pair ce qui est impossible pour un nombre premier $\geqslant 3$.
Pour $p = 11$ premier, on a bien $A = B$ (les autres nombres avec deux chiffres identiques sont justement les multiples de 11, et ne sont donc pas premiers).
Si $B = 9 - A$, alors la somme des chiffres de p vaut $A + B = 9$: ainsi p est divisible par 9, ce qui contredit sa primalité.

1.9 Nombres premiers | Difficile

Question 36

Les entiers suivants ont été factorisés correctement. Quelles sont les écritures qui sont des décompositions en facteurs premiers ?

- ☐ [Faux] $3\,025 = 1^3 \times 5^2 \times 11^2$
- ☐ [Faux] $1\,836 = 2^2 \times 3 \times 3^2 \times 17$
- ☐ [Faux] $1\,444\,716 = 2^2 \times 7^3 \times 9^2 \times 13$
- ☐ [Vrai] $13\,915 = 5 \times 11^2 \times 23$

Explications : Chaque facteur doit être de la forme $p_i^{\alpha_i}$ avec p_i un nombre premier (donc pas 1 ni 9) et $\alpha_i > 0$. En plus les p_i doivent être deux à deux distincts. Avec ces contraintes la décomposition est unique (à l'ordre des facteurs près).

Question 37
Soient $a = 5^3 \times 11^2 \times 13^5 \times 19$ et $b = 5^5 \times 7^4 \times 11 \times 19$ Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Faux] $\text{pgcd}(a, b) = 5^3 \times 7^4 \times 11 \times 13^5 \times 19$
- ☐ [Faux] $\text{pgcd}(a, b) = 5 \times 11 \times 19$
- ☐ [Vrai] $\text{ppcm}(a, b) = 5^5 \times 7^4 \times 11^2 \times 13^5 \times 19$
- ☐ [Faux] $\text{ppcm}(a, b) = 5^5 \times 11^2 \times 19$

Explications : Pour le pgcd, on garde le plus petit exposant des décompositions de a et b ; pour le ppcm, on garde le plus grand exposant.
$\text{pgcd}(a, b) = 5^3 \times 11 \times 19$
$\text{ppcm}(a, b) = 5^5 \times 7^4 \times 11^2 \times 13^5 \times 19$

Question 38
Soit $a = 79\,475 = 5^2 \times 11 \times 17^2$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Faux] $\text{pgcd}(a, 75) = 3 \times 5^2$
- ☐ [Vrai] $\text{pgcd}(a, 75) = 5^2$
- ☐ [Faux] $\text{ppcm}(a, 75) = 3 \times 11 \times 17^2$
- ☐ [Faux] $75|a$

Explications : On a $75 = 3 \times 5^2$. En utilisant les décompositions en produits de facteurs premiers, on obtient :

$$\text{pgcd}(a, 75) = 5^2 = 25 \qquad ; \qquad \text{ppcm}(a, 75) = 3 \times 5^2 \times 11 \times 17^2$$

Enfin a n'est pas divisible par 3 donc il n'est pas divisible par $75 = 3 \times 25$.

Question 39
Soit $p \geqslant 5$ un nombre premier et $N = (p+3)^2 - p^2$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Faux] $2|N$.
- ☐ [Vrai] $3|N$.
- ☐ [Faux] $6|N$.
- ☐ [Vrai] p ne divise pas N.

Explications : En développant, on constate que $N = 6p + 9 = 6(p + 1) + 3 = 3(2p + 3)$. N est donc un multiple de 3, non divisible par 6 (le reste dans la division euclidienne par 6 est 3). N est impair (produit de deux nombres impairs) et n'est donc pas divisible par 2.
Enfin, si $p|N$, on a $p|(6p + 9)$ et donc $p|9$. Puisque p est premier, cela signifie que $p = 3$ ce qui est impossible car $p \geqslant 5$.

1.10 Congruences | Facile

Question 40
Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Faux] $31 \equiv 6\,[12]$
- ☐ [Vrai] $42 \equiv 16\,[13]$
- ☐ [Faux] $25 \equiv -11\,[14]$
- ☐ [Vrai] $158 \equiv 8\,[15]$

Explications : 12 ne divise pas $31-6=25$; en fait $31 \equiv 7\,[12]$.
13 divise $42-16=26$; en fait $42 \equiv 16 \equiv 3\,[13]$.
14 ne divise pas $25-(-11)=36$; en fait $25 \equiv +11 \equiv -3\,[14]$.
15 divise $158-8=150$; en fait $158 = 15 \times 10 + 8 \equiv 8\,[15]$.

Question 41
Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Faux] $456\,789 \equiv 0\,[2]$
- ☐ [Vrai] $43\,210 \equiv 0\,[5]$
- ☐ [Faux] $23\,769 \equiv 3\,[9]$
- ☐ [Faux] $10\,326 \equiv 8\,[10]$

Explications : 456 789 est impair, donc n'est pas congru à 0 modulo 2.
43 210 est divisible par 5 donc congru à 0 modulo 5.
23 769 est divisible par 9 (la somme des chiffres est divisible par 9) donc congru à 0 modulo 9.
$10\,326 \equiv 6\,[10]$, réduire modulo 10 c'est garder le chiffre des unités.

Question 42
Si $x \equiv 2\,[5]$, alors on a :

- ☐ [Vrai] $x^2 \equiv 2x\,[5]$
- ☐ [Faux] $3x \equiv -1\,[5]$
- ☐ [Vrai] $x+1 \equiv 3\,[5]$
- ☐ [Faux] $10x \equiv 2\,[5]$

Explications : D'après les propriétés arithmétiques des congruences et notre congruence initiale $x \equiv 2\,[5]$:
en ajoutant 1 : $x+1 \equiv 2+1 = 3\,[5]$,
en multipliant par 3 : $3x \equiv 3 \times 2 = 6 \equiv 1\,[5]$,
en multipliant par 10 : $10x \equiv 10 \times 2 = 20 \equiv 0\,[5]$,
Enfin on calcule : $x^2 \equiv 2 \times 2 \equiv 2x\,[5]$.

Question 43
Parmi les nombres n ci-dessous, lequel vérifie à la fois $n \equiv 5\,[14]$ et $n \equiv 1\,[8]$?

- ☐ [Faux] $n = 47$
- ☐ [Faux] $n = 57$
- ☐ [Vrai] $n = 89$
- ☐ [Faux] $n = 103$

Explications : On a bien $89 \equiv 5\,[14]$ $(89 = 14 \times 6 + 5)$ et $89 \equiv 1\,[8]$ $(89 = 8 \times 11 + 1)$.
On calcule que $47 \equiv 7\,[8]$, $57 \equiv 1\,[14]$ et $103 \equiv 7\,[8]$.

1.11 Congruences | Moyen

Question 44
Soient $a \equiv 2\,[13]$ et $b \equiv 7\,[13]$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Vrai] $a + b \equiv 9\,[13]$
- ☐ [Vrai] $ab \equiv 1\,[13]$
- ☐ [Vrai] $a^2 \equiv -9\,[13]$
- ☐ [Vrai] $b^3 \equiv 5\,[13]$

Explications : Tout est vrai ! Modulo 13, on a bien :

$$a + b = 2 + 7 = 9 \equiv 9,$$
$$ab = 2 \times 7 = 14 \equiv 1,$$
$$a^2 = 2^2 = 4 \equiv -9,$$
$$b^3 = 7^3 = 343 \equiv 5.$$

Question 45
Soient $a \equiv b\;[n]$ et $c \equiv d\;[n]$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Faux] $a + b \equiv c + d\;[n]$
- ☐ [Vrai] $a + c \equiv b + d\;[n]$
- ☐ [Vrai] $a^2 \equiv b^2\;[n]$
- ☐ [Vrai] $c^2 \equiv d^2\;[n]$

Explications : $a + c \equiv b + d\;[n]$ et $a^k \equiv b^k\;[n]$ et aussi $c^k \equiv d^k\;[n]$.

Question 46
Soit n un entier premier avec 3. On peut alors affirmer :

- ☐ [Faux] $2n \equiv 1\,[3]$
- ☐ [Faux] $2n \equiv -1\,[3]$
- ☐ [Vrai] $n^2 \equiv 1\,[3]$
- ☐ [Faux] $n^2 \equiv -1\,[3]$

Explications : Puisque n n'est pas un multiple de 3, on a soit $n \equiv 1\;[3]$ (cas 1) soit $n \equiv 2 \equiv -1\;[3]$ (cas 2). Dans le cas 1, on a $2n \equiv 2 \equiv -1\;[3]$, et dans le cas 2 on a $2n \equiv -2 \equiv 1\;[3]$.
Dans les deux cas, on aura $n^2 \equiv 1\;[3]$.

Question 47
Soit k un entier et $N = 5k^2 - 10k + 4$. On peut affirmer :

- ☐ [Vrai] $N \equiv 4\,[5]$
- ☐ [Faux] $N \equiv 5\,[5]$
- ☐ [Vrai] $N \equiv 5k^2\,[2]$
- ☐ [Faux] $N \equiv 1\,[2]$

Explications : Puisque $5 \equiv 10 \equiv 0\,[5]$, on a $5k^2 - 10k \equiv 0\,[5]$. Donc $N \equiv 4\,[5]$.
D'autre part, puisque $10 \equiv 4 \equiv 0\,[2]$, on a $-10k + 4 \equiv 0\,[2]$. Donc $N \equiv 5k^2\;[2]$. Le cas $k = 2$ (ou tout autre entier pair) montre que l'on peut avoir $N \equiv 5k^2 \equiv 0\,[2]$.

1.12 Congruences | Difficile

Question 48
Soit p un nombre premier et x un entier. Quel(s) énoncé(s) du petit théorème de Fermat sont corrects ?

- ☐ [Faux] $x^p \equiv p\ [x]$
- ☐ [Vrai] $x^p \equiv x\ [p]$
- ☐ [Faux] Si p ne divise pas x, alors $x^{p-1} \equiv 0\ [x]$
- ☐ [Faux] Si p ne divise pas x, alors $x^{p-1} \equiv 0\ [p]$

Explications : Le théorème de Fermat stipule que $x^p \equiv x\ [p]$, et que si p ne divise pas x alors $x^{p-1} \equiv 1\ [p]$.

Question 49
Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Faux] $2^8 \equiv 2\ [8]$
- ☐ [Faux] $3^{12} \equiv 3\ [13]$
- ☐ [Faux] $18^7 \equiv 1\ [19]$
- ☐ [Vrai] $4^{16} \equiv 1\ [17]$

Explications : 8 n'est pas un nombre premier, le petit théorème de Fermat ne s'applique pas. En fait $2^8 \equiv 0\ [8]$ car $2^3 = 8 \equiv 0\ [8]$.
Petit théorème de Fermat, avec $p = 13$, $3^{12} \equiv 1\ [13]$.
$18^7 \equiv (-1)^7 \equiv -1 \equiv 18\ [19]$ (le calcul n'a rien à voir avec le petit théorème de Fermat).
Petit théorème de Fermat, avec $p = 17$, $4^{16} \equiv 1\ [17]$.

Question 50
Soit un entier k tel que $k \equiv 2\ [7]$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Faux] $2k^2 + k \equiv k^3\ [7]$
- ☐ [Vrai] $3(k^4 - k) \equiv 0\ [7]$
- ☐ [Vrai] $14k - 2 \equiv 5\ [7]$
- ☐ [Faux] $k^{18} + k^{12} + k^6 \equiv k\ [7]$

Explications : On calcule que $k^2 \equiv 4\ [7]$; $k^3 \equiv 2^3 \equiv 1\ [7]$ et $k^4 \equiv 2^4 \equiv 2\ [7]$. On a alors :
$2k^2 + k \equiv 2 \times 2^2 + 2 \equiv 10 \equiv 3\ [7]$.
$k^4 \equiv k\ [7]$ donc $3(k^4 - k) \equiv 3 \times 0 \equiv 0\ [7]$.
$14k \equiv 7 \times 2k \equiv 0\ [7]$ donc $14k - 2 \equiv -2 \equiv 5\ [7]$.
Enfin on a $k^{18} \equiv k^{12} \equiv k^6 \equiv 1\ [7]$ (c'est le théorème de Fermat, ou une conséquence directe de $k^3 \equiv 1\ [7]$). Donc $k^{18} + k^{12} + k^6 \equiv 3\ [7]$.

Question 51
Pour quel(s) entier(s) n a-t-on $10^{10} \equiv 7^{18}\ [n]$?

- ☐ [Vrai] $n = 3$
- ☐ [Faux] $n = 5$
- ☐ [Faux] $n = 7$

- ☐ [Vrai] $n = 9$

Explications : On a $10 \equiv 7 \equiv 1\,[3]$. Donc $10^{10} \equiv 1 \equiv 7^{18}\,[3]$.
$10 \equiv 0\,[5]$ donc $10^{10} \equiv 0\,[5]$. Mais $7^{18} \equiv (7^4)^4 \times 7^2 \equiv 1^4 \times 49 \equiv -1\,[5]$.
$7^{18} \equiv 0\,[7]$ mais $10^{10} \equiv 3^{10} \equiv 3^6 \times 3^4 \equiv 1 \times 81 \equiv 4\,[7]$.
Enfin, on a $10^{10} \equiv 1^{10} \equiv 1\,[9]$, et également $7^{18} \equiv (-2)^{18} \equiv 2^{18} \equiv 8^6 \equiv (-1)^6 \equiv 1\,[9]$.

Question 52
Quel est le chiffre des unités de 7^{100} ?

- ☐ [Vrai] 1
- ☐ [Faux] 3
- ☐ [Faux] 5
- ☐ [Faux] 9

Explications : Le chiffre des unités est donné par la congruence modulo 10.
Puisque $7^2 = 49 \equiv (-1)\,[10]$, on a :

$$7^{100} = (7^2)^{50} \equiv (-1)^{50} \equiv 1\,[10]$$