Arithmétique – Partie 2 : Théorème de Bézout

Exercice 1.

Soit $a = 84$ et $b = 75$. Calculer $d = \text{pgcd}(a, b)$ à l'aide de l'algorithme d'Euclide, puis déterminer des coefficients de Bézout $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $au + bv = d$.
Même exercice avec $a = 624$ et $b = 108$.

Exercice 2.

Nous allons montrer que « Deux entiers consécutifs sont toujours premiers entre eux. »

1. *Première méthode.* On considère deux entiers consécutifs notés n et $n+1$. Montrer que si d divise n et $n+1$ alors nécessairement $d = 1$.
2. *Seconde méthode.* Soit $a = n$ et $b = n+1$. Trouver $u, v \in \mathbb{Z}$ (très simples) tels que $au + bv = 1$. Conclure.

Exercice 3.

Soit $\alpha \in \mathbb{Z}$ un entier fixé que l'on cherchera à déterminer par la suite. Pour $k \in \mathbb{Z}$, on pose : $N_1(k) = 7k+11$ et $N_2(k) = 2k + \alpha$.

1. Déterminer deux entiers u, v tels que le nombre $uN_1(k) + vN_2(k)$ ne dépende pas de l'entier k.
2. En déduire une valeur de α pour obtenir $\text{pgcd}(N_1(k), N_2(k)) = 1$ pour tout entier k.
3. Application : en déduire $\text{pgcd}(95, 27)$ d'une part, et $\text{ppcm}(361, 103)$ d'autre part.