Logique, ensembles et raisonnements – Partie 1

Exercice 1.

Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.

1. "$6 \times 7 = 42$"
2. "$8 \times 8 = 49$"
3. "Tout entier impair est multiple de 2."
4. "Tout nombre réel non nul admet un inverse."
5. "Il existe une solution réelle de l'équation $x^2 + x + 1 = 0$."
6. "Il existe une solution réelle de l'équation $x^2 - 3x + 1 = 0$."

Correction 1.

1. Vrai : "$6 \times 7 = 42$"
2. Faux : "$8 \times 8 = 49$". En revanche, l'assertion "$8 \times 8 = 64$" est vraie.
3. Faux : "Tout entier impair est multiple de 2." Ce qui est vrai c'est "Tout entier **pair** est multiple de 2."
4. Vrai : "Tout réel non nul admet un inverse." En effet, si $x \neq 0$, son inverse existe et c'est $\frac{1}{x}$.
5. Faux : "Il existe une solution réelle de $x^2+x+1 = 0$." Le discriminant $\Delta = -3$ est strictement négatif. Il n'y a pas de solution réelle.
6. Vrai : "Il existe une solution réelle de $x^2-3x+1 = 0$." Le discriminant $\Delta = 5$ est strictement positif. Il y a deux solutions réelles (donc il y en a au moins une !).

Exercice 2.

Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. Dans ces phrases x désigne un nombre réel quelconque fixé ($x \in \mathbb{R}$) et n un entier naturel quelconque ($n \in \mathbb{N}$).

1. "$(x > 0)$ ou $(x \leqslant 0)$"
2. "$(x^2 \geqslant 0)$ ou $(x^2 \leqslant 0)$"
3. "(n est divisible par 2) ou (n est divisible par 3)"
4. "non$(x^4 < 0)$"
5. "$(x > 3)$ ou non$(x \geqslant 4)$"
6. "(n est impair) et (n est divisible par 2)"
7. "(n est pair) ou (non(n est divisible par 2))"
8. "$(x > 0)$ ou $(x < 0)$ ou $(x = 0)$"
9. "$(x > 0)$ et (non$(x > 0)$)".

Correction 2.

1. Vrai : "$(x > 0)$ ou $(x \leqslant 0)$". En français : un réel est soit strictement positif ou bien négatif ou nul.
2. Vrai : "$(x^2 \geqslant 0)$ ou $(x^2 \leqslant 0)$". Cette phrase est vraie car on a toujours $x^2 \geqslant 0$. Comme un côté du "ou" est vrai (et même si l'autre est faux), la phrase est vraie.

3. Faux : "(n est divisible par 2) ou (n est divisible par 3)". La phrase n'est pas vraie pour tous les entiers n, par exemple $n = 5$, n'est ni divisible par 2, ni divisible par 3.
4. Vrai : "non($x^4 < 0$)". Pour un réel quelconque $x^4 = (x^2)^2 \geqslant 0$, donc "$x^4 < 0$" est faux, mais alors sa négation "non($x^4 < 0$)" est vraie. Remarquez que la proposition "non($x^4 < 0$)" peut en fait s'écrire "($x^4 \geqslant 0$)" qui est bien vraie.
5. Vrai : "($x > 3$) ou non($x \geqslant 4$)". On peut récrire la phrase sous la forme "($x > 3$) ou ($x < 4$)" qui est vraie (quel que soit x).
6. Faux : "(n est impair) et (n est divisible par 2)". Un entier ne peut être pair et impair en même temps.
7. Vrai : "(n est pair) ou (non(n est divisible par 2))" On peut récrire la phrase sous la forme "(n est pair) ou (n est impair)" qui est vraie, car un entier est soit pair, soit impair.
8. Vrai : "($x > 0$) ou ($x < 0$) ou ($x = 0$)". Un entier est soit strictement positif, soit strictement négatif, soit nul.
9. Faux. "($x > 0$) et (non($x > 0$))". De façon générale $\mathscr{P}$ et non-$\mathscr{P}$ est toujours fausse : on ne peut avoir une proposition vraie et sa négation aussi !

Exercice 3.

Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.

1. $\forall n \in \mathbb{N} \quad n$ est un nombre premier
2. $\exists n \in \mathbb{N} \quad n$ est un nombre premier
3. $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 + 1 \geqslant 1$
4. $\exists x \in \mathbb{R} \quad x^2 + 1 \geqslant 1$
5. $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad x > \frac{1}{x}$
6. $\exists x \in \mathbb{R}_+^* \quad x > \frac{1}{x}$
7. $\exists x \in \mathbb{R} \quad x^2 + x - 1 = 0$
8. $\exists x \in \mathbb{Z} \quad x^2 + x - 1 = 0$

Correction 3.

1. Faux : $\forall n \in \mathbb{N} \quad n$ est un nombre premier . La phrase dit "Tout entier est un nombre premier" ce qui est faux, car par exemple $n = 4$ n'est pas un nombre premier.
2. Vrai : $\exists n \in \mathbb{N} \quad n$ est un nombre premier . La phrase dit "Il existe un entier qui est un nombre premier" ce qui est vrai, en prenant par exemple $n = 5$.
3. Vrai : $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 + 1 \geqslant 1$. Preuve : pour n'importe quel $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geqslant 0$, donc en ajoutant 1 de part et d'autre : $x^2 + 1 \geqslant 1$.
4. Vrai : $\exists x \in \mathbb{R} \quad x^2 + 1 \geqslant 1$. C'est vrai aussi, mais pour le prouver il suffit de dire que, par exemple, $x = 10$ convient, car pour $x = 10$ on a bien $x^2 + 1 = 101 \geqslant 1$.
5. Faux : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad x > \frac{1}{x}$. Un contre-exemple est $x = \frac{1}{2}$, pour lequel $\frac{1}{x} = 2$.
6. Vrai : $\exists x \in \mathbb{R}_+^* \quad x > \frac{1}{x}$. Il suffit de dire que, par exemple, $x = 3$ convient.
7. Vrai : $\exists x \in \mathbb{R} \quad x^2 + x - 1 = 0$. Le discriminant $\Delta = 5$ est strictement positif. Il y a deux solutions réelles (donc il y en au moins une).
8. Faux : $\exists x \in \mathbb{Z} \quad x^2 + x - 1 = 0$. Les seules solutions sont $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ qui sont des réels, mais pas des entiers.

Exercice 4.

Remplacer les pointillés des propositions suivantes par le symbole le plus adapté parmi $\Longrightarrow$, $\Longleftarrow$ ou $\Longleftrightarrow$.
Dans ces phrases x et y désignent des nombres réels et n un entier naturel.

1. $x > 0$ ...... $x^2 > 0$
2. $-x < 0$ ...... $3x > 1$
3. $x^2 = 4$ ...... $(x = 2)$ ou $(x = -2)$
4. $x \neq y$ ...... $x^2 \neq y^2$
5. $xy = 0$ ...... $x = 0$ ou $y = 0$
6. $xy = 0$ ...... $x = 0$ et $y = 0$
7. $xy \neq 0$ ...... $x \neq 0$ ou $y \neq 0$
8. $n \geqslant 3$ et n impair ...... $n \geqslant 3$ et n un nombre premier
9. $n \geqslant 3$ et n pair ...... $n \geqslant 3$ et n n'est pas un nombre premier

Correction 4.

1. $x > 0 \Longrightarrow x^2 > 0$ (la réciproque $\Longleftarrow$ est fausse, prenez par exemple $x = -2$).
2. $-x < 0 \Longleftarrow 3x > 1$ (l'implication directe $\Longrightarrow$ est fausse, prenez par exemple $x = \frac{1}{10}$).
3. $x^2 = 4 \Longleftrightarrow (x = 2)$ ou $(x = -2)$
4. $x \neq y \Longleftarrow x^2 \neq y^2$ (l'implication directe $\Longrightarrow$ est fausse, prenez par exemple $x = 2$, $y = -2$).
5. $xy = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ ou $y = 0$
6. $xy = 0 \Longleftarrow x = 0$ et $y = 0$
7. $xy \neq 0 \Longrightarrow x \neq 0$ ou $y \neq 0$: il s'agit de la contraposée de l'implication précédente !
8. $n \geqslant 3$ et n impair $\Longleftarrow$ $n \geqslant 3$ et n est un nombre premier (l'implication directe est fausse pour $n = 9$ par exemple).
9. $n \geqslant 3$ et n pair $\Longrightarrow$ $n \geqslant 3$ et n n'est pas un nombre premier : c'est la contraposée de l'implication précédente ; $n = 9$ convient donc encore comme contre-exemple pour vérifier que l'implication réciproque n'est pas vraie.

Exercice 5.

Écrire la contraposée de chacune des propositions suivantes. Dans ces phrases, x désigne un réel et n un entier naturel quelconque. (On ne demande pas de dire si les phrases sont vraies ou fausses.)

1. Il pleut $\Longrightarrow$ Je prends mon parapluie
2. $x^2 \neq 0 \Longrightarrow x \neq 0$
3. $7x - 1 > 20 \Longrightarrow x > 3$
4. n^2 est pair $\Longrightarrow$ n est pair
5. Si un triangle est rectangle alors le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des côtés opposés.

Indications 5.

La contraposition de "$\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}$" est "non($\mathscr{Q}$) $\Longrightarrow$ non($\mathscr{P}$)".

Correction 5.

La contraposition de "$\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}$" est "non($\mathscr{Q}$) $\Longrightarrow$ non($\mathscr{P}$)". Les contrapositions sont :

1. Je ne prends pas mon parapluie $\implies$ Il ne pleut pas
2. $x = 0 \implies x^2 = 0$
3. $x \leqslant 3 \implies 7x - 1 \leqslant 20$
4. n est impair $\implies$ n^2 est impair
5. Si le carré de l'hypoténuse n'est pas égal à la somme des carrés des côtés opposés alors le triangle n'est pas rectangle.