Équations différentielles – Partie 4 : $y' = ay + b$ et $y' = ay + f$

Savoir.

- ☐ Connaître le vocabulaire : second membre, équation homogène, solution particulière.
- ☐ Comprendre la structure d'une solution générale : "solutions de l'équation homogène + solution particulière".

Savoir-faire.

- ☐ Savoir trouver une solution particulière à l'aide d'indications.
- ☐ Savoir trouver toutes les solutions à partir d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène.

Nous allons maintenant résoudre des équations différentielles un peu plus compliquées du type $y' = ay+b$ (où a et b sont des constantes) et plus généralement du type $y' = ay + f$ où a est une constante mais où f est une fonction.

Vocabulaire

Considérons l'équation différentielle

$$y' = ay + b \tag{E}$$

où $a, b \in \mathbb{R}$, ou bien plus généralement

$$y' = ay + f \tag{E}$$

où $a \in \mathbb{R}$ et $x \mapsto f(x)$ est une fonction.
Vocabulaire.

- b ou $f(x)$ s'appelle le **second membre** de l'équation (E) (cette terminologie se justifie car l'équation peut aussi s'écrire $y' - ay = b$ ou $y' - ay = f$ en mettant d'un côté tous les termes en y).
- Une **solution particulière** c'est n'importe quelle fonction $y_p(x)$ solution de l'équation originelle (E).
- L'**équation homogène** associée à (E) est

$$y' = ay \tag{E_h}$$

  que l'on peut aussi écrire $y' - ay = 0$. C'est l'équation de départ sans son second membre. On note $y_h(x)$ les solutions de l'équation homogène.

Exemple 1. Soit l'équation (E) : $y' = 2y + 7$.

- L'équation homogène est (E_h) : $y' = 2y$.
- Le second membre est $b = 7$.

Exemple 2. Soit l'équation (E) : $3y' + 7y = 2\cos(x)$.

- L'équation homogène est (E_h) : $3y' + 7y = 0$, que l'on peut aussi écrire $y' = -\frac{7}{3}y$.
- Le second membre est $f(x) = 2\cos(x)$.

Structure des solutions

Reprenons une équation différentielle avec second membre

$$y' = ay + b \qquad \text{ou} \qquad y' = ay + f \tag{E}$$

On sait résoudre l'équation homogène associée (E_h) : $y' = ay$, les solutions sont les fonctions $y_h(x) = Ce^{ax}$ où $C \in \mathbb{R}$.
Imaginons que l'on connaisse en plus une solution particulière $y_p(x)$ de l'équation originale (E).

Solutions d'une équation différentielle avec second membre.
Les solutions de (E) sont les fonctions $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$.
Autrement dit, on trouve toutes les solutions en ajoutant une solution particulière (y_p) aux solutions de l'équation homogène (y_h).

Comme on sait résoudre l'équation homogène $y' = ay$ alors la recherche de la solution générale de (E) se réduit donc à la recherche d'une solution particulière. Pour trouver cette solution particulière des indications vous seront fournies.

Exemples

Exemple 1. Résoudre l'équation $(E) : y' = 2y + 7$ en cherchant une solution particulière sous la forme d'une fonction constante.

— *Équation homogène.* L'équation homogène est $(E_h) : y' = 2y$, les solutions sont les $y_h(x) = Ce^{2x}$ pour chaque $C \in \mathbb{R}$.

— *Solution particulière.* Cherchons une solution constante de (E). Soit $y_p(x) = k$, alors $y_p'(x) = 0$, donc l'équation (E) devient $0 = 2k + 7$, ce qui implique $k = -\frac{7}{2}$. Une solution particulière est donc $y_p(x) = -\frac{7}{2}$.

— *Solutions générales.* Les solutions générales de (E) sont donc les fonctions de la forme "les solutions de l'équation homogène + une solution particulière" :

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x),$$

c'est-à-dire pour notre exemple

$$y(x) = Ce^{2x} - \frac{7}{2} \qquad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$

Chaque valeur de la constante C donne une solution.

Exemple 2. Résoudre l'équation $(E) : y' + y = x^2$ en cherchant une solution particulière sous la forme d'une fonction polynomiale de degré 2, $y_p(x) = ax^2 + bx + c$.

— *Équation homogène.* L'équation homogène est $(E_h) : y' + y = 0$, c'est-à-dire $y' = -y$, dont les solutions sont les $y_h(x) = Ce^{-x}$ pour chaque $C \in \mathbb{R}$.

— *Solution particulière.* Cherchons une solution à (E) sous la forme polynomiale indiquée : $y_p(x) = ax^2 + bx + c$. On a alors $y_p'(x) = 2ax + b$, donc l'équation (E) devient $(2ax + b) + (ax^2 + bx + c) = x^2$. Pour trouver a, b, c on regroupe les coefficients devant x^2, x, et 1 pour ensuite effectuer une identification :

$$a \cdot x^2 + (2a + b) \cdot x + (b + c) \cdot 1 = x^2$$

ce qui donne

$$a \cdot x^2 + (2a + b) \cdot x + (b + c) \cdot 1 = x^2 = 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0 \cdot 1.$$

On identifie les coefficients du polynômes de gauche avec les coefficients du polynôme de droite afin d'obtenir :

$$a = 1 \qquad 2a + b = 0 \qquad b + c = 0$$

et donc

$$a = 1 \qquad b = -2 \qquad c = 2.$$

Ainsi une solution particulière est :

$$y_p(x) = x^2 - 2x + 2.$$

— *Solutions générales.* Les solutions générales de (E) sont donc les fonctions :

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x),$$

c'est-à-dire

$$y(x) = Ce^{-x} + x^2 - 2x + 2 \qquad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$