Logique, ensembles et raisonnements – Partie 3

Exercice 1 - Preuve au cas par cas.

1. Montrer, en utilisant une disjonction de cas, que pour tout entier n, le produit $n(n+1)(2n+1)$ est divisible par 6.
2. Montrer que tout nombre premier supérieur à 5 s'écrit soit sous la forme $6k+1$, soit sous la forme $6k-1$ ($k \in \mathbb{N}$).

Exercice 2 - Raisonnement par l'absurde.

1. Soient n, a, b trois entiers naturels tels que $n = ab$. Montrer que a ou b est inférieur ou égal à $\sqrt{n}$.
2. Soit $a \in \mathbb{R}^+$ un réel positif. Montrer :

$$\text{Si "}\forall \varepsilon > 0 \quad a \leqslant \varepsilon\text{" alors } a = 0.$$

Exercice 3 - Raisonnement par contraposition.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ un entier naturel non nul. Montrer par contraposition :
$$n^2 - 1 \text{ n'est pas divisible par 8} \quad \Longrightarrow \quad n \text{ est pair}$$
2. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ deux nombres réels. Montrer par contraposition :
$$x \neq y \quad \Longrightarrow \quad (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$$

Exercice 4 - Preuve par récurrence.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Démontrer par récurrence l'inégalité $2^n > n$.
2. Montrer que l'on a, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

3. On définit par récurrence la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme ceci :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \text{et } u_{n+1} = 2u_n + 1 \quad \text{pour } n \geqslant 0. \end{cases}$$

   (a) Calculer les premiers termes de la suite (u_n), et émettre une conjecture quant à l'expression de son terme général.

   (b) Montrer par récurrence que $u_n = 2^n - 1$.