Équations différentielles – Partie 1 : Primitives

Exercice 1.

Mettre en correspondance chaque fonction f avec une de ses primitives F.

— $f_1(x) = -6\sin(2x)$, $f_2(x) = 2x$, $f_3(x) = (x+1)e^x$, $f_4(x) = -6\sin(3x)$, $f_5(x) = 2xe^{x^2}$, $f_6(x) = 2x+2$.

— $F_a(x) = 2\cos(3x)$, $F_b(x) = 3\cos(2x)$, $F_c(x) = (x+1)^2$, $F_d(x) = x^2+1$, $F_e(x) = e^{x^2}$, $F_f(x) = xe^x$.

Indications 1.

F est une primitive de f si $F'(x) = f(x)$ (pour tout x de l'ensemble de définition).

Correction 1.

1. $F_a(x) = 2\cos(3x)$, $F_a'(x) = f_4(x) = -6\sin(3x)$.
2. $F_b(x) = 3\cos(2x)$, $F_b'(x) = f_1(x) = -6\sin(2x)$.
3. $F_c(x) = (x+1)^2$, $F_c'(x) = f_6(x) = 2x+2$.
4. $F_d(x) = x^2+1$, $F_d'(x) = f_2(x) = 2x$.
5. $F_e(x) = e^{x^2}$, $F_e'(x) = f_5(x) = 2xe^{x^2}$.
6. $F_f(x) = xe^x$, $F_f'(x) = f_3(x) = (x+1)e^x$.

Exercice 2.

Pour chacune des fonctions f suivantes, déterminer une primitive F.

1. $f_1(x) = -\cos(2x)$
2. $f_2(x) = x^3 - 7x^2 + 1$
3. $f_3(x) = \frac{1}{2x-1}$ (sur $]-\frac{1}{2}, +\infty[$)
4. $f_4(x) = e^{\pi x - 3}$
5. $f_5(x) = -(x-2)^2$
6. $f_6(x) = \sin(8(x+1))$

Indications 2.

Il s'agit de trouver une fonction F telle que $F'(x) = f(x)$. Il faut bien connaître ses formules des dérivées usuelles.

Correction 2.

1. $F_1(x) = -\frac{1}{2}\sin(2x)$, on vérifie que $F_1'(x) = f_1(x)$.
2. $F_2(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{3}x^3 + x$, car une primitive de x^k est $\frac{1}{k+1}x^{x+1}$ (pour $k \neq -1$).
3. $F_3(x) = \frac{1}{2}\ln(2x-1)$ car $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$ avec ici $u(x) = 2x-1$.
4. $F_4(x) = \frac{1}{\pi}e^{\pi x - 3}$ car $(e^u)' = u'e^u$ avec ici $u(x) = \pi x - 3$.

5. $F_5(x) = -\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 4x$ car $f_5(x) = -x^2 + 4x - 4$. On peut aussi écrire $F_5(x) = -\frac{1}{3}(x-2)^3$.
6. $F_6(x) = -\frac{1}{8}\cos(8(x+1))$ car $(\cos(u))' = -u'\sin(u)$.

Dans tous les cas, si F est une primitive, alors pour toute constante C, $F + C$ est aussi une primitive.

Exercice 3.

1. (a) Quelle est la dérivée de la fonction $x \mapsto u^k(x)$ où $x \mapsto u(x)$ est une fonction et k un entier ?
   (b) Calculer les dérivées des fonctions définies par $(x^4 + 7x^3 + 2)^3$, $\cos^3(2x)$, $\ln^2(x)$, $\frac{1}{(x^2+1)^2}$.
   (c) Déterminer une primitive des fonctions définies par $x(x^2+5)^5$, $\sin(x)\cos^3(x)$, $\frac{\ln^n(x)}{x}$ (où $n \geqslant 0$).
2. (a) Quelle est la dérivée de la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ où $x \mapsto u(x)$ est une fonction ?
   (b) Calculer les dérivées des fonctions définies par e^{-5x}, e^{x^3-2x}, $e^{\sin(3x)}$, $e^{1/x}$.
   (c) Déterminer une primitive des fonctions définies par e^{8x+1}, xe^{x^2+1}, $\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$.
3. (a) Quelle est la dérivée de la fonction $x \mapsto \ln(u(x))$ où $x \mapsto u(x)$ est une fonction strictement positive ?
   (b) Calculer les dérivées des fonctions définies par $\ln(x^3 - 2)$, $\ln(e^x + e^{-x})$, $\ln(1/x)$, $\ln(\cos(x^2))$.
   (c) Déterminer une primitive des fonctions définies par $\frac{1}{x+4}$ (sur $]-4, +\infty[$), $\frac{x}{x^2+4}$ (sur $\mathbb{R}$), $\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ (pour les x où $\sin(x) > 0$).

Indications 3.

La dérivée d'une composition $f(u(x))$ est $u'(x)f'(u(x))$. Pour déterminer les primitives il faut reconnaître la fonction sous une forme $u'(x)f'(u(x))$, afin de déterminer qu'une primitive est $f(u(x))$.

Correction 3.

1. (a) La dérivée de $u^k(x)$ est $ku'(x)u^{k-1}(x)$.
   (b) — La dérivée de $(x^4 + 7x^3 + 2)^3$ est $3(4x^3 + 21x^2)(x^4 + 7x^3 + 2)^2$.
   — La dérivée de $\cos^3(2x)$ est $-6\sin(2x)\cos^2(2x)$.
   — La dérivée de $\ln^2(x)$ est $\frac{2}{x}\ln(x)$.
   — La dérivée de $\frac{1}{(x^2+1)^2} = (x^2+1)^{-2}$ est $-2(2x)(x^2+1)^{-3} = \frac{-4x}{(x^2+1)^3}$.
   (c) — Une primitive de $x(x^2+5)^5 = \frac{1}{12} \cdot 6 \cdot (2x) \cdot (x^2+5)^5$ est $\frac{1}{12}(x^2+5)^6$.
   — Une primitive de $\sin(x)\cos^3(x)$ est $-\frac{1}{4}\cos^4(x)$.
   — Une primitive de $\frac{\ln^n(x)}{x}$ est $\frac{1}{n+1}\ln^{n+1}(x)$.
2. (a) La dérivée de $e^{u(x)}$ est $u'(x)e^{u(x)}$.
   (b) — La dérivée de e^{-5x} est $-5e^{-5x}$.
   — La dérivée de e^{x^3-2x} est $(3x^2-2)e^{x^3-2x}$.
   — La dérivée de $e^{\sin(3x)}$ est $3\cos(3x)e^{\sin(3x)}$.
   — La dérivée de $e^{1/x}$ est $-\frac{1}{x^2}e^{1/x}$.
   (c) — Une primitive de e^{8x+1} est $\frac{1}{8}e^{8x+1}$.
   — Une primitive de xe^{x^2+1} est $\frac{1}{2}e^{x^2+1}$
   — Une primitive de $\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ est $2e^{\sqrt{x}}$.
3. (a) La dérivée de $\ln(u(x))$ est $\frac{u'(x)}{u(x)}$.

(b) — La dérivée de $\ln(x^3-2)$ est $\frac{3x^2}{x^3-2}$.

— La dérivée de $\ln(e^x+e^{-x})$ est $\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

— La dérivée de $\ln(1/x)$ est $-\frac{1}{x}$ (c'est plus facile si on a remarqué que $\ln(1/x)=-\ln(x)$!).

— La dérivée de $\ln(\cos(x^2))$ est $\frac{-2x\sin(x^2)}{\cos(x^2)}$.

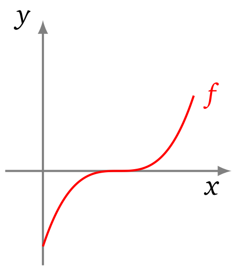
(c) — Une primitive de $\frac{1}{x+4}$ est $\ln(x+4)$.

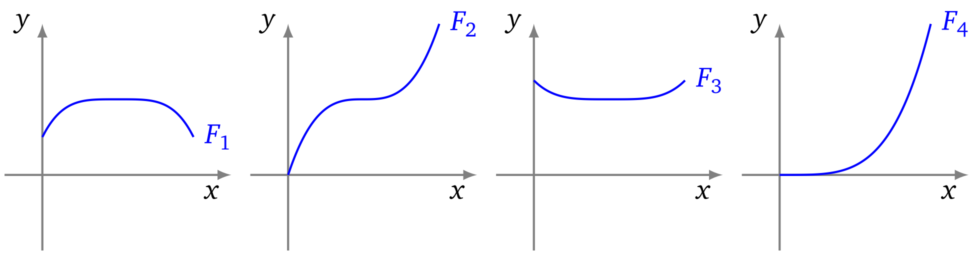
— Une primitive de $\frac{x}{x^2+4}$ est $\frac{1}{2}\ln(x^2+4)$.

— Une primitive de $\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ est $\ln(\sin(x))$.

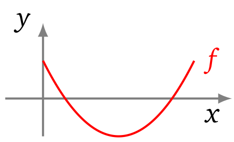
Exercice 4.

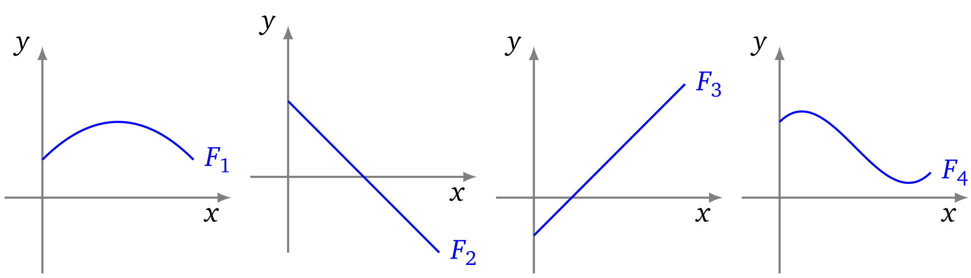
1. Pour la fonction f représentée ci-dessous, déterminer quel est le graphe de la fonction F_i qui correspond à une primitive de f.





2. Pour la fonction f représentée ci-dessous, déterminer quel est le graphe de la fonction F_i qui correspond à une primitive de f.





Indications 4.

Il faut utiliser que la dérivée de F est f et utiliser le signe (et non pas la monotonie) de f pour déterminer là où F est croissante ou décroissante.

Correction 4.

Comme la dérivée de F est f, là où f est positive, F est croissante ; là où f est négative, F est décroissante.

1. $f = F'$ est négative puis positive : F doit être d'abord décroissante, puis ensuite croissante. Ainsi il s'agit de F_3.
2. $f = F'$ est positive, négative puis à nouveau positive. Donc F est croissante, décroissante puis à nouveau croissante. Il s'agit de F_4.