Année 2022

# QCM DE MATHÉMATIQUES - LILLE

*Répondre en cochant la ou les cases correspondant à des assertions vraies (et seulement celles-ci).*

Ces questions ont été écrites par Arnaud Bodin, Barnabé Croizat et Christine Sacré de l'université de Lille. Relecture de Guillemette Chapuisat, Abdelkader Necer et Pascal Romon.

Ce travail a été effectué en 2021-2022 dans le cadre d'un projet Hilisit porté par Unisciel.

# Logique

**Arnaud Bodin, Barnabé Croizat, Christine Sacré**

## 1 Logique, ensembles et raisonnements

### 1.1 Logique | Facile

***Question 1***
Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] Il existe des triangles rectangles.
- ☐ [Faux] Tout triangle est un triangle rectangle.
- ☐ [Vrai] Tout triangle équilatéral est isocèle.
- ☐ [Faux] Il existe un triangle équilatéral qui est rectangle.

*Explications :* Il existe des triangles rectangles, mais ce n'est pas le cas de tous les triangles. Un triangle équilatéral (trois côtés égaux) est aussi isocèle (deux côtés égaux). Un triangle équilatéral ne peut pas être un triangle rectangle (par le théorème de Pythagore ou parce que les angles d'un triangle équilatéral sont de 60° tandis que l'angle droit mesure 90°).

***Question 2***
Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] Si $\cos\theta = 0$ alors $\theta = \frac{\pi}{2}$.
- ☐ [Faux] Si $\theta \in [0, \pi]$ alors $0 \leqslant \cos\theta \leqslant 1$.
- ☐ [Vrai] Si $\theta = 0$ alors $\sin\theta = 0$.
- ☐ [Vrai] Si $\theta \in [0, \pi]$ et $\sin\theta = 0$ alors ($\theta = 0$ ou $\theta = \pi$).

*Explications :* $\cos\theta = 0$ si et seulement si $\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$. $\sin\theta = 0$ si et seulement si $\theta = 0 + k\pi$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$.

***Question 3***
Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] Le chiffre des unités de tout entier pair est 0, 2, 4, 6 ou 8.
- ☐ [Faux] Le chiffre des unités de tout entier multiple de 3 est 3, 6 ou 9.
- ☐ [Faux] Le chiffre des unités de tout entier multiple de 4 est 4 ou 8.
- ☐ [Vrai] Le chiffre des unités de tout entier multiple de 5 est 0 ou 5.

*Explications :* $12 = 3 \times 4$ est un multiple de 3 et de 4. Pourtant son chiffre des unités n'est ni 3, ni 6, ni 9, ni 4 ni 8.

***Question 4***
Soient $x, y$ des nombres réels. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] Si $x = -5$ alors $x^2 = 25$.
- ☐ [Faux] Si $x^2 = 25$ alors $x = 5$.
- ☐ [Vrai] Si $xy = 0$ alors $x = 0$ ou $y = 0$.
- ☐ [Faux] Si $xy = 0$ alors $x = 0$ et $y = 0$.

*Explications :* $(-5)^2 = 25$ donc $x = -5$ est une autre solution de l'équation $x^2 = 25$. Si $xy = 0$, $x$ et $y$ ne sont pas nécessairement tous les deux nuls, mais ce qui est sûr c'est que au moins l'un des deux est nul.

### 1.2 Logique | Moyen

***Question 5***
Soit $\mathscr{P}$ une assertion vraie et $\mathscr{Q}$ une assertion fausse. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] $\mathscr{P}$ ou $\mathscr{Q}$
- ☐ [Faux] $\mathscr{Q}$ et $\mathscr{P}$
- ☐ [Vrai] $\mathscr{P}$ ou non($\mathscr{Q}$)
- ☐ [Faux] $\mathscr{Q}$ ou non($\mathscr{P}$)

*Explications :* "$\mathscr{P}$ ou $\mathscr{Q}$" est vraie car l'un des deux termes est vrai.
"$\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$" est fausse car l'un des termes est faux.
"$\mathscr{P}$ ou non($\mathscr{Q}$)" est vraie car l'un des deux termes de part et d'autre du "ou" est vrai.
"$\mathscr{Q}$ ou non($\mathscr{P}$)" est fausse car les deux termes de part et d'autre du "ou" sont faux ("non($\mathscr{P}$)" est une assertion fausse puisque $\mathscr{P}$ est vraie).

***Question 6***
On considère l'assertion "non($\mathscr{P}$) et $\mathscr{Q}$". Quand est-ce que cette assertion est vraie ?

- ☐ [Faux] Si $\mathscr{P}$ vraie et $\mathscr{Q}$ vraie.
- ☐ [Faux] Si $\mathscr{P}$ vraie et $\mathscr{Q}$ fausse.
- ☐ [Vrai] Si $\mathscr{P}$ fausse et $\mathscr{Q}$ vraie.
- ☐ [Faux] Si $\mathscr{P}$ fausse et $\mathscr{Q}$ fausse.

*Explications :* Il faut non($\mathscr{P}$) vraie et $\mathscr{Q}$ vraie, c'est-à-dire $\mathscr{P}$ fausse et $\mathscr{Q}$ vraie.

***Question 7***
Soit $n \geqslant 3$ un entier. On considère l'implication :

$$\text{"}n \text{ nombre premier} \implies n \text{ est impair".}$$

Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Faux] L'implication réciproque est "$n$ est pair $\implies$ $n$ est un nombre premier".
- ☐ [Vrai] La contraposée est "$n$ est pair $\implies$ $n$ n'est pas nombre premier".
- ☐ [Faux] Si l'implication est vraie alors l'implication réciproque l'est aussi.
- ☐ [Vrai] Si l'implication est vraie alors sa contraposée l'est aussi.

*Explications :* L'implication réciproque est "$n$ est impair $\implies$ $n$ est un nombre premier" (ce qui est une affirmation fausse).
La contraposée est "$n$ est pair $\implies$ $n$ n'est pas nombre premier" (ce qui est une affirmation vraie).
Une implication directe peut être vraie sans que l'implication réciproque soit vraie ; c'est le cas ici.
Une implication et sa contraposée sont des propositions équivalentes (donc vraies en même temps, et fausses en même temps).

***Question 8***
Soit $x$ un réel. On considère l'implication :

$$"x^2 > 0 \implies x > 0".$$

Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Vrai] L'implication réciproque est "$x > 0 \implies x^2 > 0$".
- ☐ [Faux] La contraposée est "$x > 0 \implies x^2 > 0$".
- ☐ [Faux] Si l'implication est fausse alors l'implication réciproque l'est aussi.
- ☐ [Vrai] Si l'implication est fausse alors sa contraposée l'est aussi.

*Explications :* L'implication réciproque est "$x > 0 \implies x^2 > 0$" (ce qui est une affirmation vraie).
La contraposée est "$x \leqslant 0 \implies x^2 \leqslant 0$" (ce qui est une affirmation fausse).
Une implication et sa contraposée sont des propositions équivalentes (donc vraies en même temps, et fausses en même temps).

***Question 9***
On considère l'implication :

"tu prépares un repas $\implies$ je viens chez toi".

Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Faux] L'implication réciproque est "je viens chez toi $\implies$ tu ne prépares pas de repas".
- ☐ [Vrai] La contraposée est "je ne viens pas chez toi $\implies$ tu ne prépares pas de repas".
- ☐ [Faux] Si l'implication est vraie alors l'implication réciproque l'est aussi.
- ☐ [Vrai] Si l'implication est vraie alors sa contraposée l'est aussi.

*Explications :* L'implication réciproque est "je viens chez toi $\implies$ tu prépares un repas".
La contraposée est "je ne viens pas chez toi $\implies$ tu ne prépares pas de repas".
Une implication et sa contraposée sont des propositions équivalentes (donc vraies en même temps, et fausses en même temps).

***Question 10***
Quelles sont les assertions vraies, quel que soit $x > 0$, un réel strictement positif ?

- ☐ [Faux] $\exists y > 0 \quad \ln(x) = y$
- ☐ [Vrai] $\exists y > 0 \quad e^x = y$

- ☐ [Vrai] $\exists y > 0 \quad \ln(y) = x$
- ☐ [Faux] $\exists y > 0 \quad e^y = x$

*Explications :* La valeur $y = \ln(x)$ est un nombre réel bien défini (car $x > 0$), mais elle n'est pas nécessairement strictement supérieure à 0 (prenez $x \leqslant 1$ pour que ce soit faux).
Tout nombre réel $x > 0$ possède un antécédent par la fonction exponentielle. Si l'on note $y$ cet antécédent, cela signifie que $e^y = x$. Mais cet antécédent n'est pas nécessairement strictement positif ! En effet, pour $x = 1$ par exemple, on aura $e^0 = 1$.
En revanche, le nombre $y = e^x$ sera toujours un réel strictement positif. Et en appliquant le logarithme à cette égalité, on obtient bien $\ln(y) = x$ avec ce même nombre $y > 0$.

### 1.3 Logique | Difficile

***Question 11***
Pour quelles phrases, l'assertion est vraie si on remplace "??" par "$\exists$", mais est fausse si on remplace "?? " par "$\forall$" ?

- ☐ [Vrai] ?? $n \in \mathbb{N}^* \quad n$ est pair
- ☐ [Faux] ?? $n \in \mathbb{N}^* \quad n(n+1)$ est pair
- ☐ [Vrai] ?? $n \in \mathbb{N}^* \quad n$ et $n+2$ sont des nombres premiers
- ☐ [Vrai] ?? $n \in \mathbb{N}^*$ si $n$ n'est pas premier alors $n$ admet au moins deux facteurs premiers distincts

*Explications :* Il existe des entiers pairs (par exemple $n = 4$), mais tous les entiers ne sont pas pairs (par exemple $n = 5$).
Pour tous les entiers, $n(n+1)$ est pair.
Il existe un entier (par exemple $n = 11$) tel que $n$ et $n+2$ soient deux nombres premiers ; mais ce n'est pas vrai pour tous les entiers (par exemple pour $n = 13$, $n+2$ n'est pas premier).
Il existe un entier (par exemple $n = 21$) qui a deux facteurs premiers distincts (ici 3 et 7) ; mais ce n'est pas vrai pour tous les entiers (par exemple $n = 9$, a pour seul facteur premier 3).

***Question 12***
Soit $x \in \mathbb{R}$. Quelles sont les assertions vraies si on remplace "......" par " $\iff$ " ?

- ☐ [Vrai] $x^2 = 0 \quad \ldots\ldots \quad x = 0$
- ☐ [Faux] $x^2 = 1 \quad \ldots\ldots \quad x = 1$
- ☐ [Faux] $x < 0 \quad \ldots\ldots \quad \frac{1}{x} > 0$
- ☐ [Vrai] $0 < x < 1 \quad \ldots\ldots \quad \frac{1}{x} > 1$

*Explications :* $x^2 = 0 \iff x = 0$
$x^2 = 1 \impliedby x = 1$
$x < 0$ et $\frac{1}{x} > 0$ ne peuvent pas êtres vraies en même temps : un nombre non nul et son inverse possèdent en effet le même signe !
$0 < x < 1 \iff \frac{1}{x} > 1$

***Question 13***
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ désigne une fonction. Pour les phrases suivantes dire si la négation proposée est correcte.

- ☐ [Vrai] La négation de "Il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = 0$" est "Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) \neq 0$".

- ☐ [Vrai] La négation de "Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) = 0$" est "Il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \neq 0$".
- ☐ [Vrai] La négation de "Il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \geqslant 0$" est "Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) < 0$".
- ☐ [Faux] La négation de "Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) > 0$" est "Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) \leqslant 0$".

*Explications :* La négation de "Pour tout" est "Il existe" (et réciproquement). La négation de "$f(x) = 0$" est "$f(x) \neq 0$". La négation de "$f(x) \geqslant 0$" est "$f(x) < 0$".
Toutes les affirmations sont vraies sauf la négation de "Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) > 0$" qui est "Il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \leqslant 0$".

***Question 14***
Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour quelles phrases, l'assertion est vraie si on remplace "??" par "$\exists$", mais est fausse si on remplace "?? " par "$\forall$" ?

- ☐ [Vrai] ?? $x \in \mathbb{R} \quad x^2 > 0$
- ☐ [Faux] ?? $x \in \mathbb{R} \quad x^2 - 2x + 1 \geqslant 0$
- ☐ [Vrai] ?? $x \in \mathbb{R} \quad x^2 - 2x + 1 = 0$
- ☐ [Vrai] ?? $x \in \mathbb{R} \quad x^2 \leqslant 0$

*Explications :* Il existe un réel $x$ tel que $x^2 > 0$, par exemple $x = 1$, mais ce n'est pas vrai pour $x = 0$.
$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geqslant 0$ pour tout réel $x$.
$x^2 - 2x + 1$ est nul pour $x = 1$ mais n'est pas nul pour $x = 0$.
$x^2 \leqslant 0$ pour $x = 0$ mais ce n'est pas vrai pour $x = 1$.

***Question 15***
Soit $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ deux assertions telles que "$\mathscr{P} \implies \mathscr{Q}$" soit vraie, et "non($\mathscr{P}$) $\implies$ non($\mathscr{Q}$)" soit aussi vraie. On a alors :

- ☐ [Vrai] "$\mathscr{Q} \implies \mathscr{P}$" est vraie.
- ☐ [Vrai] "$\mathscr{P} \iff \mathscr{Q}$" est vraie.
- ☐ [Faux] "$\mathscr{Q} \implies$ non($\mathscr{P}$)" est vraie.
- ☐ [Faux] "$\mathscr{P} \implies$ non($\mathscr{Q}$)" est vraie.

*Explications :* Par contraposition de "non($\mathscr{P}$) $\implies$ non($\mathscr{Q}$)", on obtient "$\mathscr{Q} \implies \mathscr{P}$". On a donc "$\mathscr{P} \iff \mathscr{Q}$". Ceci signifie que les assertions $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont soit simultanément vraies, soit simultanément fausses. Cela exclut la possibilité d'avoir l'une vraie et l'autre fausse.

***Question 16***
En 1761, le mathématicien suisse Lambert, ami d'Euler, démontre l'implication $\mathscr{I}$ : "$x \in \mathbb{Q} \implies \tan(x) \notin \mathbb{Q}$". Il remarque ensuite que $1 = \tan(\frac{\pi}{4})$. Qu'en conclut-il ?

- ☐ [Faux] D'après $\mathscr{I}$, $\tan(\frac{\pi}{4}) \notin \mathbb{Q}$.
- ☐ [Faux] D'après la contraposée de $\mathscr{I}$, $\tan(\frac{\pi}{4}) \notin \mathbb{Q}$.
- ☐ [Faux] D'après la contraposée de $\mathscr{I}$, $\frac{\pi}{4} \in \mathbb{Q}$.
- ☐ [Vrai] D'après la contraposée de $\mathscr{I}$, $\frac{\pi}{4} \notin \mathbb{Q}$.

*Explications :* On a $\tan(\frac{\pi}{4}) = 1 \in \mathbb{Q}$. On utilise la contraposée de l'implication $\mathscr{I}$ : $1 = \tan(\frac{\pi}{4}) \in \mathbb{Q} \implies \frac{\pi}{4} \notin \mathbb{Q}$. Ceci constituait la toute première preuve de l'irrationalité de $\pi$.

***Question 17***
Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} \quad y = e^x$
- ☐ [Faux] $\forall y \in \mathbb{R}\ \exists x \in \mathbb{R} \quad y = e^x$
- ☐ [Faux] $\forall y \in \mathbb{R}\ \exists x > 0 \quad y = e^x$
- ☐ [Vrai] $\forall y > 0\ \exists x \in \mathbb{R} \quad y = e^x$

*Explications :* "$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} \quad y = e^x$" signifie : pour tout nombre réel $x$, il existe un nombre réel $y$ qui est égal à $e^x$ : c'est vrai ($e^x$ est bien un nombre réel).
"$\forall y \in \mathbb{R}\ \exists x \in \mathbb{R} \quad y = e^x$" signifie : pour tout nombre réel $y$, il existe un nombre $x$ tel que $y = e^x$. Ceci est faux puisque si $y < 0$, on ne pourra jamais l'écrire comme une exponentielle.
"$\forall y \in \mathbb{R}\ \exists x > 0 \quad y = e^x$" signifie : pour tout nombre réel $y$, il existe un réel strictement positif $x$ tel que $y = e^x$. Ceci est faux : si $y < 0$, on ne pourra jamais l'écrire comme une exponentielle. Et si $0 \leqslant y < 1$, on ne pourra jamais écrire $y$ comme une exponentielle d'un nombre strictement positif.
"$\forall y > 0\ \exists x \in \mathbb{R} \quad y = e^x$" signifie : pour tout nombre strictement positif $y$, il existe un nombre réel $x$ tel que $y = e^x$. Ceci est vrai : si $y > 0$, alors on peut écrire $y = e^{\ln(y)}$. Donc on peut choisir $x = \ln(y)$.

## 1.4 Ensembles | Facile

***Question 18***
Quels sont les ensembles ayant au moins 4 éléments ?

- ☐ [Faux] $\varnothing$
- ☐ [Vrai] $[0,2] \cap [1,3]$
- ☐ [Faux] $\{0,3\} \cap \{1,3\}$
- ☐ [Vrai] $\mathbb{N} \setminus \{0,1,2,3\}$

*Explications :* $\varnothing$ ne contient aucun élément.
$[0,2] \cap [1,3] = [1,2]$ contient une infinité d'éléments. Rappel : $[1,2] = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 2\}$.
$\{0,3\} \cap \{1,3\} = \{3\}$ ne contient qu'un seul élément.
$\mathbb{N} \setminus \{0,1,2,3\} = \{4,5,6,7,\ldots\}$ contient une infinité d'éléments.

***Question 19***
Quels sont les ensembles qui contiennent l'intervalle $[0,2]$ ?

- ☐ [Vrai] $[-3,3] \cap ]-1,5]$
- ☐ [Faux] $\mathbb{R} \setminus ]1,3[$
- ☐ [Faux] $]0,1[ \cup ]1,2]$
- ☐ [Faux] $\{0,1,2\}$

*Explications :* On a $[-3,3] \cap ]-1,5] = ]-1,3]$ contient $[0,2]$.
Le nombre $\frac{3}{2} = 1,5$ n'appartient pas à $\mathbb{R} \setminus ]1,3[$ donc cet ensemble ne contient pas $[0,2]$.
Le nombre $1$ n'appartient pas à $]0,1[ \cup ]1,2]$ donc cet ensemble ne contient pas $[0,2]$.
Le nombre $\frac{3}{2}$ n'appartient pas à $\{0,1,2\}$ (qui ne contient que trois éléments), donc cet ensemble ne contient pas $[0,2]$.

***Question 20***
Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 + 2$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Vrai] L'image de $-2$ est 6.
- ☐ [Faux] Un antécédent de 18 est $-5$.
- ☐ [Faux] La valeur 2 admet plusieurs images.
- ☐ [Vrai] La valeur 18 admet plusieurs antécédents.

*Explications :* L'image de $-2$ est 6 car $f(-2) = 6$.
Le nombre $-5$ n'est pas antécédent de 18 car $f(-5) = 27 \neq 18$.
La valeur $x = 2$ admet une seule image. C'est en fait vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$ !
Les antécédents de 18 sont les solutions de l'équations $f(x) = 18$, c'est-à-dire $x^2 + 2 = 18$ ou encore $x^2 = 16$, ce sont donc $x = 4$ et $x = -4$. Il y a donc deux antécédents à la valeur 18.

***Question 21***
Soient $A = \{1, 2, 3, 4\}$ et $B = \{0, 1, 2\}$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Faux] $A \cup B$ a 7 éléments.
- ☐ [Vrai] $A \cap B = \{1, 2\}$
- ☐ [Faux] $A \setminus B = \{0, 3, 4\}$
- ☐ [Vrai] $B \setminus A = \{0\}$

*Explications :* $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, on ne répète pas les éléments.
Les nombres 1 et 2 sont les deux éléments qui sont à la fois dans $A$ et dans $B$.
Les éléments qui sont dans $A$ mais pas dans $B$ sont 3 et 4.
Le nombre 0 est le seul élément qui est dans $B$ mais pas dans $A$.

***Question 22***
Quels sont les ensembles qui contiennent l'intervalle $[-1, 1]$ ?

- ☐ [Vrai] $[-3, 1] \cap ]-2, 5]$
- ☐ [Vrai] $\mathbb{R} \setminus ]1, 3[$
- ☐ [Faux] $[-1, 0[ \cup ]0, 2]$
- ☐ [Faux] $\{-1, 0, 1\}$

*Explications :* On a $[-3, 1] \cap ]-2, 5] = ]-2, 1]$ qui contient $[-1, 1]$.
On a $\mathbb{R} \setminus ]1, 3[ = ]-\infty, 1] \cup [3, +\infty[$ et $]-\infty, 1]$ contient $[-1, 1]$.
Le nombre 0 n'appartient pas à $[-1, 0[ \cup ]0, 2]$ donc cet ensemble ne contient pas $[-1, 1]$.
Le nombre $\frac{1}{2}$ n'appartient pas à $\{-1, 0, 1\}$ (qui ne contient que trois éléments), donc cet ensemble ne contient pas $[-1, 1]$.

***Question 23***
Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 - 2$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Faux] L'image de $-2$ est $-6$.
- ☐ [Vrai] Un antécédent de 7 est $-3$.
- ☐ [Faux] La valeur $-2$ admet plusieurs images.
- ☐ [Vrai] La valeur 7 admet plusieurs antécédents.

*Explications :* L'image de $-2$ n'est pas $-6$ car $f(-2) = (-2)^2 - 2 = 4 - 2 = 2$.
Le nombre $-3$ est antécédent de 7 car $f(-3) = 7$.
La valeur $x = -2$ admet une seule image. C'est en fait vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$ !
Les antécédents de 7 sont les solutions de l'équations $f(x) = 7$, c'est-à-dire $x^2 - 2 = 7$ ou encore $x^2 = 9$, ce sont donc $x = 3$ et $x = -3$. Il y a donc deux antécédents à la valeur 7.

***Question 24***
Soit la fonction réelle définie par $f(x) = 2x$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

- ☐ [Faux] $(f \circ f)(x) = 4x^2$
- ☐ [Vrai] $(f \circ f)(x) = 4x$
- ☐ [Faux] $(f \circ f) \circ f(x) = 6x$
- ☐ [Faux] $(f \circ f \circ f)(x) = 8x^3$

*Explications :* On a $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(2x) = 2 \times 2x = 4x$. Et de même $(f \circ f \circ f)(x) = f(4x) = 2 \times (4x) = 8x$.

***Question 25***
Soient les ensembles $A = [1,3]$ et $B = \{0,1,2,3\}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $B \subset A$
- ☐ [Faux] $A \subset B$
- ☐ [Faux] $A \setminus B = ]1,3[$
- ☐ [Vrai] $A \cap B = \{1,2,3\}$

*Explications :* Il n'y a pas d'inclusion entre $A$ et $B$ : Le nombre $\frac{3}{2} \in A$ et $\frac{3}{2} \notin B$ d'une part ; et $0 \in B$ avec $0 \notin A$ d'autre part.
On a $A \setminus B = ]1,2[ \cup ]2,3[$.
En revanche, on a bien $A \cap B = \{1,2,3\}$.

## 1.5 Ensembles | Moyen

***Question 26***
Soient $A, B$ deux parties d'un ensemble $E$. Quelles sont les affirmations vraies (quel que soit le choix de $A$ et $B$) ?

- ☐ [Faux] $A \cup B \subset A \cap B$
- ☐ [Vrai] $A \cap B \subset A \cup B$
- ☐ [Vrai] $A \setminus B \subset A$
- ☐ [Faux] $A \setminus B \subset B$

*Explications :* L'intersection est incluse dans l'union : $A \cap B \subset A \cup B$. Un ensemble $A$ auquel on retire quelque chose reste inclus dans $A$ : $A \setminus B \subset A$.

***Question 27***
Les fonctions suivantes sont-elles définies sur l'ensemble associé ?

- ☐ [Faux] $x \mapsto \ln(|x-3|)$ sur $\mathbb{R}$

- ☐ [Vrai] $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ sur $[-1,1]$
- ☐ [Faux] $x \mapsto \frac{1}{x^2-4}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$
- ☐ [Faux] $x \mapsto \frac{1}{\sin(\pi x)}$ sur $\mathbb{R}^*$

*Explications :* $\ln(|x-3|)$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.
$\sqrt{1-x^2}$ est définie sur $[-1,1]$.
$\frac{1}{x^2-4}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2,2\}$.
$\frac{1}{\sin(\pi x)}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

***Question 28***
Soient $f, g, h$ des fonctions définies par

$$f(x) = x^2 - 3x \qquad g(x) = 2x+1 \qquad h(x) = \frac{x}{x-1}.$$

Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Faux] $(f \circ g)(x) = 4x^2 - 2x + 4$
- ☐ [Faux] $(g \circ f)(x) = 2x^2 + 5$
- ☐ [Faux] $(h \circ f)(x) = \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 - \frac{3x}{x-1}$
- ☐ [Vrai] $(g \circ h)(x) = \frac{3x-1}{x-1}$

*Explications :* $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (2x+1)^2 - 3(2x+1) = 4x^2 - 2x - 2$,
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2(x^2-3x) + 1 = 2x^2 - 6x + 1$.
$(h \circ f)(x) = h(f(x)) = \frac{x^2-3x}{x^2-3x-1}$ ce qui est proposé c'est $(f \circ h)(x)$.
$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = 2\frac{x}{x-1} + 1 = \frac{2x}{x-1} + \frac{x-1}{x-1} = \frac{3x-1}{x-1}$.

***Question 29***
Les fonctions suivantes sont-elles définies sur l'ensemble associé ?

- ☐ [Faux] $x \mapsto \ln(|x+1|)$ sur $\mathbb{R}$
- ☐ [Vrai] $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$
- ☐ [Faux] $x \mapsto \frac{x}{1-x^2}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
- ☐ [Vrai] $x \mapsto \tan(x)$ sur $]\frac{\pi}{2}, \pi[$

*Explications :* $\ln(|x+1|)$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
$1 + x^2 \geqslant 0$ pour tout $x$ de $\mathbb{R}$.
$\frac{x}{1-x^2}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$.
$\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ et $\cos(x)$ ne s'annule pas sur $]\frac{\pi}{2}, \pi[$.

***Question 30***
Soient $f, g, h$ des fonctions définies par

$$f(x) = x^2 + x \qquad g(x) = 2x-1 \qquad h(x) = \frac{1}{x+1}.$$

Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Vrai] $(f \circ g)(x) = 4x^2 - 2x$
- ☐ [Faux] $(g \circ f)(x) = 2x^2 + 2x$

- ☐ [Vrai] $(h \circ f)(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$
- ☐ [Faux] $(g \circ h)(x) = \frac{1}{2x}$

*Explications :* $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (2x-1)^2 + (2x-1) = 4x^2 - 2x$.
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2(x^2+x) - 1 = 2x^2 + 2x - 1$.
$(h \circ f)(x) = h(f(x)) = \frac{1}{f(x)+1} = \frac{1}{x^2+x+1}$.
$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = 2\frac{1}{x+1} - 1 = \frac{2}{x+1} - \frac{x+1}{x+1} = \frac{1-x}{x+1}$. Ce qui est proposé est $(h \circ g)(x)$.

***Question 31***
Parmi ces ensembles, quels sont ceux qui sont inclus dans $\{0,1,2\}$ ?

- ☐ [Vrai] $\{x \in \mathbb{R} \mid x(x-2) = 0\}$
- ☐ [Vrai] $\{x \in \mathbb{R} \mid e^x = 1\}$
- ☐ [Faux] $\{x > 0 \mid \ln(x) = 1\}$
- ☐ [Vrai] $[0,3] \cap \{x \in \mathbb{R} \mid (x+2)^2 = 4\}$

*Explications :* $\{x \in \mathbb{R} \mid x(x-2) = 0\} = \{0,2\}$.
$\{x \in \mathbb{R} \mid e^x = 1\} = \{0\}$.
$\{x > 0 \mid \ln(x) = 1\} = \{e\}$.
$[0,3] \cap \{x \in \mathbb{R} \mid (x+2)^2 = 4\} = [0,3] \cap \{-4,0\} = \{0\}$.

***Question 32***
Soit l'ensemble $A = \{-1,0,1\}$ et la fonction réelle donnée par $f(x) = x^2 - 1$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $\forall x \in A \quad f(x) = 0$
- ☐ [Vrai] $\exists\, x \in A \quad f(x) = 0$
- ☐ [Faux] $f$ est bijective de $A$ dans son image $f(A)$.
- ☐ [Vrai] $\forall x \in A \quad f(x) \in A$

*Explications :* On a $f(-1) = f(1) = 0 \in A$, $f(0) = -1 \in A$ mais $-1 \neq 0$.
La fonction $f$ n'est pas bijective de $A$ dans $f(A)$ puisque 1 et $-1$ ont la même image.

***Question 33***
Soient les fonctions réelle définies par $f(x) = 3x+2$ et $g(x) = ax + b$. Pour quelle(s) valeur(s) des réels $a$ et $b$ a-t-on $g \circ f(x) = 6x+7$ ?

- ☐ [Faux] $a = 1$ et $b = 3$
- ☐ [Faux] $a = 1$ et $b = 5$
- ☐ [Vrai] $a = 2$ et $b = 3$
- ☐ [Faux] $a = 2$ et $b = 5$

*Explications :* On calcule que $g \circ f(x) = g(3x+2) = a(3x+2) + b = 3ax + 2a + b$. Pour que cette expression soit égale à $6x+7$, on doit avoir $3a = 6$ et $2a+b = 7$. Cela donne $a = 2$ et $b = 7-2\times 2 = 3$.

### 1.6 Ensembles | Difficile

***Question 34***

Soit $E$ un ensemble. Pour $A$ et $B$ deux parties de $E$, on définit l'ensemble

$$\Delta(A,B) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Vrai] $\Delta(A,B) = \Delta(B,A)$
- ☐ [Faux] Si $B = \varnothing$ alors $\Delta(A,B) = \varnothing$.
- ☐ [Vrai] Si $A$ et $B$ sont disjoints alors $\Delta(A,B) = A \cup B$.
- ☐ [Vrai] Si $B \subset A$ alors $\Delta(A,B) = A \setminus B$.

*Explications :* L'ensemble $\Delta(A,B)$ s'appelle la "différence symétrique" de $A$ et $B$. Toutes les propriétés sont vraies, sauf une. On a : "Si $B = \varnothing$ alors $\Delta(A,B) = A$". Faites des schémas avec des "patates" (diagrammes de Venn) pour visualiser ces propriétés.

***Question 35***

Les fonctions $f$ et $g$ définies par les expressions suivantes sont-elles bijections réciproques l'une de l'autre ? (On ne se préoccupera pas des ensembles de départ et d'arrivée.)

- ☐ [Faux] $f(x) = \exp(2x)$ et $g(x) = \ln(\frac{1}{2}x)$
- ☐ [Faux] $f(x) = \cos(x-1)$ et $g(x) = \sin(x+1)$
- ☐ [Vrai] $f(x) = \frac{1}{1+x}$ et $g(x) = \frac{1-x}{x}$
- ☐ [Faux] $f(x) = \sqrt{2x+1}$ et $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1$

*Explications :* Si $f(x) = \exp(2x)$ et $g(x) = \ln(\frac{1}{2}x)$ alors

$$(f \circ g)(x) = e^{2\ln(\frac{1}{2}x)} = e^{2\ln(x)+2\ln(\frac{1}{2})} = e^{2\ln(x))} \times e^{2\ln(\frac{1}{2})} = x^2 \times (\tfrac{1}{2})^2 = \frac{x^2}{4}$$

et ne vaut donc pas $x$.
Si $f(x) = \cos(x-1)$ et $g(x) = \sin(x+1)$ alors $(f \circ g)(x) = \cos(\sin(x+1) - 1)$ ne se simplifie pas du tout et n'a aucune chance d'être égal à $x$. Prendre par exemple $x = 10$, alors $(f \circ g)(x)$ est une valeur renvoyée par un cosinus donc est compris entre $-1$ et $+1$ donc ne peut pas être égale à 10.
Si $f(x) = \frac{1}{1+x}$ et $g(x) = \frac{1-x}{x}$

$$(f \circ g)(x) = f\left(\frac{1-x}{x}\right) = \frac{1}{1 + \frac{1-x}{x}} = \frac{x}{x + (1-x)} = x.$$

On vérifie de même que $(g \circ f)(x) = x$. Donc $f$ et $g$ sont des bijections réciproques l'une de l'autre.
Si $f(x) = \sqrt{2x+1}$ et $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1$ alors

$$(f \circ g)(x) = f\left(\tfrac{1}{2}x^2 - 1\right) = \sqrt{2(\tfrac{1}{2}x^2 - 1) + 1} = \sqrt{x^2 - 1}$$

qui n'est pas égale à $x$ (par exemple pour $x = 10$, $(f \circ g)(10) = \sqrt{10^2 - 1} = \sqrt{99} \neq 10$).

***Question 36***

Soient $A$ et $B$ deux parties d'un ensemble $E$. Quelles sont les affirmations vraies (quel que soit le choix de $A$ et $B$) ?

- ☐ [Vrai] $(A \cap B) \cup (A \setminus B) = A$

- ☐ [Faux] $(A\cap B)\cup(A\setminus B)=B$
- ☐ [Faux] $(A\cap B)\cup(A\setminus B)=A\cup B$
- ☐ [Vrai] $(A\cap B)\cup(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=A\cup B$

*Explications :* Si l'on réunit les éléments qui sont dans $A$ et dans $B$ avec ceux qui sont dans $A$ et pas dans $B$, on obtient tous les éléments de $A$.
On a 3 possibilités pour les éléments qui sont dans $A$ ou dans $B$ : ils sont dans $A$ et pas dans $B$, ou dans $A$ et dans $B$, ou dans $A$ et dans $B$. Faites des schémas avec des "patates" (diagrammes de Venn) pour visualiser ces propriétés.

***Question 37***
Soit $E$ un ensemble. Pour deux parties $A$ et $B$ de $E$, on définit $\Delta(A,B)=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$. Quelles sont les affirmations vraies (quel que soit le choix de $A$ et $B$) ?

- ☐ [Vrai] Si $A=B$, $\Delta(A,B)=\varnothing$.
- ☐ [Faux] $A\cup B\subset\Delta(A,B)$
- ☐ [Faux] $A\cap B\subset\Delta(A,B)$
- ☐ [Vrai] $\Delta(A,B)=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$

*Explications :* $\Delta(A,B)$ comprend les éléments qui sont soit dans $A$ soit dans $B$, mais pas dans les deux à la fois. Faites des schémas avec des "patates" (diagrammes de Venn) pour visualiser ces propriétés.

***Question 38***
Les fonctions $f$ et $g$ définies par les expressions suivantes sont-elles bijections réciproques l'une de l'autre ? (On ne se préoccupera pas des ensembles de départ et d'arrivée.)

- ☐ [Vrai] $f(x)=\exp(-3x)$ et $g(x)=-\frac{1}{3}\ln(x)$
- ☐ [Faux] $f(x)=\cos(x+1)$ et $g(x)=\frac{1}{\cos(x)}-1$
- ☐ [Vrai] $f(x)=\frac{x}{1+x}$ et $g(x)=\frac{x}{1-x}$
- ☐ [Faux] $f(x)=\sqrt{x+1}$ et $g(x)=x^2+1$

*Explications :* Si $f(x)=\exp(-3x)$ et $g(x)=-\frac{1}{3}\ln(x))$ alors

$$(f\circ g)(x)=e^{(-3)\times(-\frac{1}{3}\ln(x))}=e^{\ln(x)}=x$$

On vérifie de même que $(g\circ f)(x)=x$, donc $f$ et $g$ sont bijections réciproques l'une de l'autre.
Si $f(x)=\cos(x+1)$ et $g(x)=\frac{1}{\cos(x)}-1$ alors $(f\circ g)(x)=\cos(\frac{1}{\cos(x)})$ ne se simplifie pas du tout et n'a aucune chance d'être égal à $x$. Prendre $x=10$, alors $(f\circ g)(x)$ est une valeur renvoyée par un cosinus donc est compris entre $-1$ et $+1$ donc ne peut pas être égale à 10.
Si $f(x)=\frac{x}{1+x}$ et $g(x)=\frac{x}{1-x}$

$$(f\circ g)(x)=f\left(\frac{x}{1-x}\right)=\frac{\frac{x}{1-x}}{1+\frac{x}{1-x}}=\frac{\frac{x}{1-x}}{\frac{1-x}{1-x}+\frac{x}{1-x}}=\frac{x}{1-x+x}=x.$$

On vérifie de même que $(g\circ f)(x)=x$. Donc $f$ et $g$ sont bijections réciproques l'une de l'autre.
Si $f(x)=\sqrt{x+1}$ et $g(x)=x^2+1$ alors

$$(f\circ g)(x)=f\left(x^2+1\right)=\sqrt{x^2+2}$$

qui n'est pas égal à $x$ (par exemple pour $x=0$, $(f\circ g)(0)=\sqrt{2}\neq 0$).

***Question 39***
Soit la fonction réelle définie par $f(x) = x^2-x-2$. Pour quelle fonction $u$ a-t-on $f \circ u(x) = 9(x^2+x)$ ?

- ☐ [Faux] $u(x) = 9x$
- ☐ [Vrai] $u(x) = 3x + 2$
- ☐ [Faux] $u(x) = -3x$
- ☐ [Faux] $u(x) = 9x + 2$

*Explications :* On calcule pour $u(x) = 3x + 2$ que $f \circ u(x) = f(3x + 2) = (3x + 2)^2 - (3x + 2) - 2 = 9x^2 + 12x + 4 - 3x - 2 - 2 = 9x^2 + 9x = 9(x^2 + x)$.

## 1.7 Raisonnements | Facile

***Question 40***
Pour montrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel une preuve classique utilise :

- ☐ [Faux] Un raisonnement par contraposition.
- ☐ [Faux] Un raisonnement par disjonction.
- ☐ [Vrai] Un raisonnement par l'absurde.
- ☐ [Faux] Un raisonnement par récurrence.

*Explications :* La preuve se fait par l'absurde.

***Question 41***
Pour montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on a $(1 + x)^n \geqslant 1 + nx$, quelle est la démarche la plus adaptée ?

- ☐ [Vrai] On fixe $x$, on fait une récurrence sur $n$.
- ☐ [Faux] On fixe $n$, on fait une récurrence sur $x$.
- ☐ [Faux] Par l'absurde on suppose $(1 + x)^n < 1 + nx$.
- ☐ [Faux] Par disjonction des cas $n$ pair/$n$ impair.

*Explications :* On fixe $x \in \mathbb{R}$, on fait une récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. On ne peut pas procéder à une récurrence sur $x \in \mathbb{R}$.

***Question 42***
On voudrait montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $2^{n-1} \leqslant n^n$. Quel type de raisonnement vous parait adapté ?

- ☐ [Faux] Un raisonnement par contraposition.
- ☐ [Faux] Un raisonnement par disjonction : $n$ pair/$n$ impair.
- ☐ [Vrai] Un raisonnement par l'absurde.
- ☐ [Faux] Un raisonnement par récurrence.

*Explications :* La preuve se fait par récurrence sur $n$ avec initialisation à $n = 1$.

***Question 43***
Soit $x$ un réel. On définit une suite par $u_0 = x$ et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = xu_n$.

- ☐ [Faux] On montre par récurrence sur $n$ que $u_n = x^n$ pour tout entier $n$.
- ☐ [Faux] On montre par récurrence sur $x$ que $u_n = x^n$ pour tout entier $n$.
- ☐ [Vrai] On montre par récurrence sur $n$ que $u_n = x^{n+1}$ pour tout entier $n$.
- ☐ [Faux] On montre par récurrence sur $x$ que $u_n = x^{n+1}$ pour tout entier $n$.

*Explications :* On fixe $x \in \mathbb{R}$, on fait une récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Pour $n = 0$, $u_0 = x^1$ et, pour $n$ quelconque, $u_n = x^{n+1}$.

***Question 44***
On commence une démonstration par l'absurde avec la rédaction suivante : "Supposons que $\log_{10}(3) \in \mathbb{Q}$. Alors on peut écrire $\log_{10}(3) = \frac{p}{q}$ avec ...". Que cherche-t-on à démontrer ?

- ☐ [Faux] $\log_{10}(3) \in \mathbb{Q}$
- ☐ [Vrai] $\log_{10}(3) \notin \mathbb{Q}$
- ☐ [Faux] $\log_{10}(3) \in \mathbb{R}$
- ☐ [Faux] $\log_{10}(3) \notin \mathbb{R}$

*Explications :* On a commencé par supposer que $\log_{10}(3) \in \mathbb{Q}$. Puisqu'il s'agit d'une démonstration par l'absurde, cette supposition correspond à la négation de ce qu'on doit démontrer. On doit donc démontrer que $\log_{10}(3) \notin \mathbb{Q}$.

## 1.8 Raisonnements | Moyen

***Question 45***
On souhaite prouver par récurrence, pour tout $n \geqslant 0$, une proposition $\mathscr{P}_n$. Après avoir prouvé $\mathscr{P}_0$, quelle rédaction du démarrage de l'étape d'hérédité convient ?

- ☐ [Faux] Soit $n \geqslant 0$. Je prouve $\mathscr{P}_1$.
- ☐ [Vrai] Soit $n \geqslant 0$. Je suppose $\mathscr{P}_n$ vraie et je montre $\mathscr{P}_{n+1}$.
- ☐ [Faux] Soit $n \geqslant 0$. Je suppose $\mathscr{P}_n$ vraie pour tout $n$ et je montre $\mathscr{P}_{n+1}$.
- ☐ [Faux] Soit $n \geqslant 0$. Je suppose $\mathscr{P}_{n+1}$ vraie et je montre $\mathscr{P}_n$.

*Explications :* La rédaction d'une récurrence est assez figée. L'étape d'hérédité commence toujours par "Soit $n \geqslant 0$. Je suppose $\mathscr{P}_n$ vraie et je montre $\mathscr{P}_{n+1}$."

***Question 46***
Pour montrer que $\sqrt{3}$ est un nombre irrationnel, je commence une démonstration par l'absurde en écrivant :

- ☐ [Vrai] Je suppose $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$ et je cherche une contradiction.
- ☐ [Faux] Je suppose $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ et je cherche une contradiction.
- ☐ [Faux] Je suppose $\sqrt{3} \notin \mathbb{R}$ et je cherche une contradiction.
- ☐ [Faux] Je suppose que $\sqrt{3}$ n'existe pas et je cherche une contradiction.

*Explications :* Pour montrer que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ par l'absurde, on commence par supposer $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$, donc on écrit $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$ avec $p$ et $q$ entiers, puis on cherche une contradiction.

***Question 47***
Quel type de raisonnement est adapté pour montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers ?

- ☐ [Faux] Au cas par cas : on étudie $n = 2$, $n = 3$, $n = 5$,...
- ☐ [Faux] Par récurrence sur $n$ parcourant l'ensemble des nombres premiers.
- ☐ [Vrai] Par l'absurde en supposant qu'il n'existe qu'un nombre fini de nombres premiers.
- ☐ [Faux] C'est une propriété que l'on ne sait pas démontrer.

*Explications :* La démonstration classique se fait par l'absurde en supposant qu'il n'existe qu'un nombre fini de nombres premiers puis en cherchant une contradiction.

***Question 48***

Pour montrer que les solutions réelles de l'équation $|x+1| = 2$ sont 1 et $-3$, on peut utiliser :

- ☐ [Faux] Un raisonnement par contraposition.
- ☐ [Vrai] Un raisonnement par disjonction des cas.
- ☐ [Faux] Un raisonnement par l'absurde.
- ☐ [Faux] Un raisonnement par récurrence.

*Explications :* Soit $x \in \mathbb{R}$. On distingue les cas $x+1 \geqslant 0$ et $x+1 < 0$ :
Si $x+1 \geqslant 0$, alors $|x+1| = x+1$ et l'équation devient $x+1 = 2$, qui a 1 pour unique solution.
Si $x+1 < 0$, alors $x+1 = -(x+1)$ et l'équation devient $-(x+1) = 2$, qui a $-3$ pour unique solution.

***Question 49***

Soient $a$ et $b$ deux nombres réels. On considère la proposition suivante : "si $a+b$ est irrationnel, alors $a$ est irrationnel ou $b$ est irrationnel". Comment puis-je montrer cette affirmation par contraposée ?

- ☐ [Vrai] Je prends deux rationnels $a$ et $b$ et je montre que $a+b$ est rationnel.
- ☐ [Faux] Je prends deux irrationnels $a$ et $b$ et je montre que $a+b$ est irrationnel.
- ☐ [Faux] Je prends un irrationnel et j'essaie de l'écrire sous la forme $a+b$ avec $a$ et $b$ irrationnels.
- ☐ [Faux] Je prends deux rationnels $a$ et $b$ et je montre que $a+b$ est irrationnel.

*Explications :* La contraposée est : si $a$ et $b$ sont rationnels alors $a+b$ est rationnel. On prend donc $a$ et $b$ deux rationnels : $a = \frac{c}{d}$, $b = \frac{e}{f}$. Alors $a+b = \frac{c}{d} + \frac{e}{f} = \frac{cf+de}{df}$ donc $a+b$ est rationnel.

***Question 50***

Téo et Théa jouent à un jeu de société. Téo est proche de la victoire ; il doit lancer un dé et Théa remarque avec raison que : "si Téo fait 4, alors il gagne le jeu". Quelles sont les affirmations certaines ?

- ☐ [Faux] Si Téo fait 3, alors il n'aura pas gagné.
- ☐ [Faux] Si Téo gagne, c'est qu'il a fait 4.
- ☐ [Vrai] Si Téo ne gagne pas, c'est qu'il n'a pas fait 4.
- ☐ [Faux] Si Téo gagne fait 5, il perd.

*Explications :* L'affirmation de Théa est "Dé $= 4 \implies$ Téo gagne". Cette affirmation ne nous dit rien sur ce qui adviendra si le lancer de dé ne donne pas 4 ! En revanche, la contraposée de l'affirmation nous informe que "Téo ne gagne pas $\implies$ Dé $\neq 4$".

## 1.9 Raisonnements | Difficile

***Question 51***

Pour montrer que $3^n > 3n$ pour des entiers $n$ naturels suffisamment grands, je fais une preuve par récurrence. Je peux commencer l'initialisation avec :

- ☐ [Faux] $n = 0$
- ☐ [Faux] $n = 1$
- ☐ [Vrai] $n = 2$
- ☐ [Vrai] $n = 3$

*Explications :* La propriété $3^n > 3n$ est vraie pour $n = 0$ mais fausse pour $n = 1$. Ensuite pour tout $n \geqslant 2$ elle est vraie. Je peux choisir l'initialisation avec $n = 2$, mais je peux aussi choisir de démarrer avec $n = 3$ (je montrerai alors la propriété pour les $n \geqslant 3$).

***Question 52***

Pour montrer une implication $\mathscr{P} \implies \mathscr{Q}$ par contraposition :

- ☐ [Faux] Je suppose $\mathscr{P}$ et je montre $\mathscr{Q}$.
- ☐ [Faux] Je suppose $\mathscr{Q}$ et je montre $\mathscr{P}$.
- ☐ [Faux] Je suppose non($\mathscr{P}$) et je montre non($\mathscr{Q}$).
- ☐ [Vrai] Je suppose non($\mathscr{Q}$) et je montre non($\mathscr{P}$).

*Explications :* Je suppose non($\mathscr{Q}$) et je montre non($\mathscr{P}$). Par exemple pour montrer "$n^2$ pair $\implies$ $n$ pair", par contraposition je suppose $n$ non pair (c-à-d impair) et je prouve alors que $n^2$ est aussi non pair.

***Question 53***

Pour démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|x-2| \leqslant x^2 - x + 2$.

- ☐ [Faux] Je distingue les cas $x \geqslant 0$ et $x < 0$.
- ☐ [Vrai] Je distingue les cas $x \geqslant 2$ et $x < 2$.
- ☐ [Faux] Je suis amené à vérifier $x^2 - x + 2 \geqslant 0$.
- ☐ [Vrai] Je suis amené à vérifier $x^2 - 2x + 4 \geqslant 0$.

*Explications :* Soit $x \in \mathbb{R}$. On discute selon le signe de $x - 2$.
Si $x - 2 \geqslant 0$ alors $|x-2| = x - 2$ donc $(x^2 - x + 2) - |x-2| = x^2 - x + 2 - (x-2) = x^2 - 2x + 4$ toujours positif (car le discriminant est négatif).
Si $x - 2 < 0$ alors $|x-2| = -(x-2)$ donc $(x^2 - x + 2) - |x-2| = x^2 - x + 2 + (x-2) = x^2$ toujours positif.

***Question 54***

Pour montrer que $4^n > 20n$ pour des entiers $n$ naturles suffisamment grands je fais une preuve par récurrence. Je peux commencer l'initialisation avec :

- ☐ [Faux] $n = 0$
- ☐ [Faux] $n = 1$
- ☐ [Faux] $n = 2$
- ☐ [Vrai] $n = 3$

*Explications :* La propriété $4^n > 20n$ est vraie pour $n = 0$ mais fausse pour $n = 1$ et pour $n = 2$. Ensuite pour tout $n \geqslant 3$ elle est vraie. Je peux donc choisir l'initialisation avec $n = 3$.

***Question 55***
Pour démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|x+1| \leqslant x^2 + 2$.

- ☐ [Faux] Je distingue les cas $x \geqslant 0$ et $x < 0$.
- ☐ [Vrai] Je distingue les cas $x \geqslant -1$ et $x < -1$.
- ☐ [Vrai] Je suis amené à vérifier $x^2 - x + 1 \geqslant 0$.
- ☐ [Vrai] Je suis amené à vérifier $x^2 + x + 3 \geqslant 0$.

*Explications :* Soit $x \in \mathbb{R}$. On discute selon le signe de $x+1$.
Si $x+1 \geqslant 0$ alors $|x+1| = x+1$ donc $(x^2+2) - |x+1| = x^2 + 2 - (x+1) = x^2 - x + 1$ toujours positif (car le discriminant est négatif).
Si $x+1 < 0$ alors $|x+1| = -(x+1)$ donc $(x^2+2) - |x+1| = x^2 + 2 + (x+1) = x^2 + x + 3$ toujours positif (car le discriminant est négatif).

***Question 56***
Soit $n \geqslant 2$ un entier. Que pensez-vous du raisonnement par récurrence suivant : on note $\mathscr{P}_n$ la propriété "$n$ points distincts quelconques dans le plan sont toujours alignés".
Initialisation : pour $n = 2$, la propriété est vraie. En effet, deux points distincts du plan sont toujours alignés.
Hérédité : soit $n$ un entier naturel quelconque supérieur ou égal à deux. Supposons la propriété $\mathscr{P}_n$ vraie. Soient $n+1$ points quelconques du plan, $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$, tous distincts. D'après l'hypothèse de récurrence, les $n$ points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont alignés. Ils le sont donc sur la droite $(A_2A_n)$. De même, les $n$ points $A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$ sont alignés. Ils le sont donc également sur la droite $(A_2A_n)$. On en déduit donc que les $n+1$ points sont tous sur la droite $(A_2A_n)$, donc ils sont alignés. La propriété $\mathscr{P}_{n+1}$ est donc vraie, d'où la propriété est héréditaire.
En conclusion, on a montré par récurrence que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 2$ : $n$ points distincts du plan sont toujours alignés.

- ☐ [Faux] Le raisonnement par récurrence est juste donc le résultat est juste.
- ☐ [Faux] Le raisonnement par récurrence est juste mais le résultat est faux.
- ☐ [Vrai] Il y a une erreur dans l'étape d'hérédité.
- ☐ [Faux] Il y a une erreur dans l'étape d'initialisation.

*Explications :* Il y a une erreur dans l'étape d'hérédité : en effet, pour $n = 2$, $A_2 = A_n$ et on ne peut pas parler de la droite $(A_2A_n)$. On n'a donc pas $\mathscr{P}_2 \implies \mathscr{P}_3$, ce qui suffit à rendre faux le raisonnement par récurrence.

---

## Arithmétique

---

**Arnaud Bodin, Barnabé Croizat, Christine Sacré**

# 2 Arithmétique

## 2.1 pgcd | Facile

***Question 57***
On considère $a = 28$ et $b = 42$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Faux] Les diviseurs communs à $a$ et à $b$ sont : 1, 2, 7.
- ☐ [Faux] 14 est un diviseur de $a$ mais pas de $b$.
- ☐ [Vrai] 6 est un diviseur de $b$ mais pas de $a$.
- ☐ [Vrai] 84 est un multiple de $a$ et de $b$.

*Explications :* Les diviseurs communs à $a$ et à $b$ sont : 1, 2, 7 et 14. Le ppcm de $a$ et $b$ est 84.

***Question 58***
Quelles sont les valeurs qui correspondent à la division euclidienne $a = bq + r$ de $a$ par $b$ ?

- ☐ [Vrai] $a = 48$, $b = 7$, $q = 6$, $r = 6$
- ☐ [Vrai] $a = 101$, $b = 11$, $q = 9$, $r = 2$
- ☐ [Faux] $a = 56$, $b = 9$, $q = 5$, $r = 11$
- ☐ [Faux] $a = 123$, $b = 10$, $q = 13$, $r = -7$

*Explications :* $48 = 7 \times 6 + 6$
$101 = 11 \times 9 + 2$
$56 = 9 \times 6 + 2$. Attention $56 = 9 \times 5 + 11$, mais on n'a pas $0 \leqslant 11 \leqslant 9 - 1$, donc cette écriture n'est pas la division euclidienne de 56 par 9.
$123 = 10 \times 12 + 3$. Attention $123 = 10 \times 13 + (-7)$, mais on n'a pas $0 \leqslant -7 \leqslant 10 - 1$, donc cette écriture n'est pas la division euclidienne de 123 par 10.

***Question 59***
Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Vrai] 456 est divisible par 3.
- ☐ [Faux] 754 est divisible par 4.
- ☐ [Faux] 5552 est divisible par 5.
- ☐ [Faux] 987 est divisible par 9.

*Explications :* Critère de divisibilité par 3 : la somme des chiffres est divisible par 3.
Critère de divisibilité par 2 : le dernier chiffre est pair.
Pour décider si un entier est divisible par 4 : diviser l'entier par 2 et appliquer le critère de divisibilité par 2.
Critère de divisibilité par 5 : le dernier chiffre est 0 ou 5.
Critère de divisibilité par 9 : la somme des chiffres est divisible par 9.

***Question 60***
Quel est le reste $r$ dans la division euclidienne de 145 par 13 ?

- ☐ [Faux] $r = 0$

- ☐ [Vrai] $r = 2$
- ☐ [Faux] $r = 7$
- ☐ [Faux] $r = -11$

*Explications :* La division euclidienne de 145 par 13 nous donne l'écriture : $145 = 13 \times 11 + 2$. Le reste $r$ est donc 2.
Il est vrai que $145 = 13 \times 12 - 11$, mais cela ne correspond pas à une division euclidienne puisque le reste $r$ n'est pas compris entre 0 et $13 - 1 = 12$.

## 2.2 pgcd | Moyen

***Question 61***
Soit $a = bq + r$ la division euclidienne de $a$ par $b$. Quelle condition définit le reste $r$ ?

- ☐ [Faux] $0 \leqslant r < a$
- ☐ [Vrai] $0 \leqslant r < b$
- ☐ [Faux] $0 \leqslant r \leqslant q$
- ☐ [Faux] $0 \leqslant r < q$

*Explications :* Dans la division euclidienne, on a $0 \leqslant r \leqslant b - 1$, c'est-à-dire $0 \leqslant r < b$ puisque $r$ est un entier. Cela permet d'avoir l'unicité du quotient $q$ et du reste $r$.

***Question 62***
Pour $a = 220$ et $b = 60$, quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Faux] $\mathrm{ppcm}(a, b) = 440$.
- ☐ [Faux] 440 est un multiple commun à $a$ et $b$.
- ☐ [Vrai] 10 est un diviseur commun à $a$ et $b$.
- ☐ [Vrai] $\mathrm{pgcd}(a, b) = 20$.

*Explications :* Le plus grand diviseur commun à $a = 220$ et $b = 60$ est $\mathrm{pgcd}(220, 60) = 20$ (on peut l'obtenir via l'algorithme d'Euclide, on en dressant les listes exhaustives des diviseurs communs à 220 et 60). Puisque 10 est un diviseur de 20, 10 est bien un diviseur commun à $a$ et $b$ (ce qui se voit sur l'écriture des deux nombres : ils finissent par 0).
En revanche 440 n'est pas un multiple de $b = 60$ (on a $60 \times 7 = 420$ et $60 \times 8 = 480$). On peut d'ailleurs calculer que $\mathrm{ppcm}(a, b) = \frac{a \times b}{\mathrm{pgcd}(a, b)} = 660$.

***Question 63***
Grâce à l'application de l'algorithme d'Euclide, on obtient pour $a = 630$ et $b = 165$ :

- ☐ [Vrai] $\mathrm{pgcd}(a, b) = \mathrm{pgcd}(165, 135)$
- ☐ [Vrai] $\mathrm{pgcd}(a, b) = \mathrm{pgcd}(135, 30)$
- ☐ [Faux] $\mathrm{pgcd}(a, b) = \mathrm{pgcd}(30, 0)$
- ☐ [Vrai] $\mathrm{pgcd}(a, b) = 15$

*Explications :* L'algorithme d'Euclide nous donne :

$$630 = 165 \times 3 + 135$$

$$165 = 135 \times 1 + 30$$

$$135 = 30 \times 4 + \boxed{15}$$
$$30 = 15 \times 2 + 0$$

Ainsi on a :

$$\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(165, 135) = \text{pgcd}(135, 30) = \text{pgcd}(30, 15) = \text{pgcd}(15, 0) = 15$$

En revanche, $\text{pgcd}(30, 0) = 30 \neq \text{pgcd}(a, b)$.

***Question 64***
Soit $a > 0$ un entier strictement positif dont le reste dans la division euclidienne par 8 est $r = 5$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Faux] $a$ est pair.
- ☐ [Vrai] $a$ est impair.
- ☐ [Faux] $a$ est nécessairement divisible par 13.
- ☐ [Vrai] $(a-5)$ est un multiple de 8.

*Explications :* Puisque le reste dans la division euclidienne de $a$ par 8 est 5, on peut écrire $a = 8k+5$, avec $k$ un nombre entier (positif car $a > 0$).
On peut réécrire $a = 8k + 5 = 2(4k + 2) + 1$ : ainsi $a$ est impair.
Pour $k = 0$, on a $a = 5$ qui n'est pas divisible par 13 (ou aussi pour $k = 2$ avec $a = 21$ par exemple).
Puisqu'on a $(a-5) = 8k$, cela signifie que $(a-5)$ est bien un multiple de 8.

***Question 65***
Pour $a = 24$ et $b = 8$, on a :

- ☐ [Faux] $\text{ppcm}(a, b) = 8$.
- ☐ [Vrai] $\text{ppcm}(a, b) = 24$.
- ☐ [Vrai] $a$ est un multiple de $b$.
- ☐ [Faux] $a$ est dans la liste des diviseurs de $b$.

*Explications :* $a$ étant un multiple de $b$ (on a $24 = 8 \times 3$), on a immédiatement $\text{pgcd}(a, b) = b$ et $\text{ppcm}(a, b) = a$.

## 2.3 pgcd | Difficile

***Question 66***
On considère $a, b$ et $d$ des entiers tels que $d|a$ et $d|b$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Vrai] $d|a + b$
- ☐ [Vrai] $d|a - b$
- ☐ [Vrai] $d|a \times b$
- ☐ [Faux] $d|\frac{a}{b}$

*Explications :* L'affirmation $d|\frac{a}{b}$ est fausse et n'a même pas toujours de sens. Le reste est vrai.

***Question 67***
On considère $a, b$ et $n$ des entiers tels que $a|n$ et $b|n$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Faux] $a+b|n$
- ☐ [Faux] $a\times b|n$
- ☐ [Faux] $a+b|n^2$
- ☐ [Vrai] $a\times b|n^2$

*Explications :* Si $a|n$ et $b|n$ alors $ab$ divise $n\times n=n^2$. Les autres affirmations sont fausses. Trouver des contre-exemples, du style : $2|12$ et $3|12$ mais $2+3$ ne divise pas 12.

***Question 68***

Soit $a_1$ un entier dont le reste dans la division euclidienne par 5 est $r_1=2$. Soit $a_2$ un entier dont le reste dans la division euclidienne par 5 est $r_2=3$. Quelles sont alors les affirmations vraies ?

- ☐ [Vrai] Le reste de la division euclidienne de $a_1+a_2$ par 5 est 0.
- ☐ [Faux] Le reste de la division euclidienne de $a_1+a_2$ par 5 est 5.
- ☐ [Vrai] Le reste de la division euclidienne de $2a_1+2a_2$ par 5 est 0.
- ☐ [Vrai] L'écriture décimale de $2a_1+2a_2$ finit par le chiffre 0.

*Explications :* Les divisions euclidiennes par 5 nous donnent : $a_1=5k_1+2$ et $a_2=5k_2+3$. On a ainsi :

$$a_1+a_2=5(k_1+k_2)+5=5(k_1+k_2+1)+0$$

La dernière écriture correspond bien à la division euclidienne de $a_1+a_2$ par 5 car le reste (c'est 0) est bien compris entre 0 et 4.
De même, on calcule :

$$2a_1+2a_2=2\times 5(k_1+k_2+1)=5(2k_1+2k_2+2)=10(k_1+k_2+1)$$

Aussi $2a_1+2a_2$ est un entier divisible par 5 et par 10, donc son écriture décimale se termine par 0.

***Question 69***

Soit $a>0$ un entier impair qui est un multiple de 3. Quelles sont alors les affirmations vraies ?

- ☐ [Faux] $a$ est un multiple de 6.
- ☐ [Faux] L'écriture décimale de $a$ finit nécessairement soit par 7 soit par 9.
- ☐ [Vrai] $\text{pgcd}(a,3)=3$.
- ☐ [Vrai] $\text{ppcm}(a,3)=a$.

*Explications :* Les multiples positifs de 3 s'écrivent $3N$, avec $N$ un entier positif. Si $N=2k$ est pair, alors $3N=6k$ est un entier pair. Donc $a$, notre entier impair multiple de 3, s'écrit $a=3N$ avec $N=2k+1$ un nombre impair ; ou encore $a=3(2k+1)=6k+3$.
Le reste de la division euclidienne de $a$ par 6 est 3. Donc $a$ n'est pas un multiple de 6.
Pour $k=2$ par exemple, on a $a=6\times 2+3=15$ qui est un entier impair, multiple de 3, dont l'écriture décimale ne finit ni par 7 ni par 9.
La liste des diviseurs de 3 se réduit à 1 et 3. Puisque 3 divise $a$, 3 est un multiple commun à 3 et $a$ : on a donc $\text{pgcd}(a,3)=3$. Par conséquent, on a aussi $\text{ppcm}(a,3)=a$ de sorte que $\text{pgcd}(a,3)\times\text{ppcm}(a,3)=a\times 3$.

***Question 70***

Soient $a$ et $b$ deux entiers positifs tels que $\text{pgcd}(a,b)=10$ et $\text{ppcm}(a,b)=140$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Vrai] $\text{pgcd}(2a, 2b) = 20$
- ☐ [Faux] $\text{ppcm}(2a, 2b) = 70$
- ☐ [Faux] $\text{pgcd}(2a, 2b) = 10$
- ☐ [Vrai] $\text{ppcm}(2a, 2b) = 280$

*Explications :* On utilise la relation $\text{pgcd}(a, b) \times \text{ppcm}(a, b) = a \times b$ pour obtenir $ab = 10 \times 140 = 1400$. On a alors $\text{pgcd}(2a, 2b) = 2 \times \text{pgcd}(a, b) = 2 \times 10 = 20$.
Mais on obtient aussi

$$\text{pgcd}(2a, 2b) \times \text{ppcm}(2a, 2b) = (2a) \times (2b) = 4 \times ab = 5600$$

donc

$$\text{ppcm}(2a, 2b) = \frac{5600}{\text{pgcd}(2a, 2b)} = \frac{5600}{20} = 280$$

Remarquez qu'on a donc $\text{ppcm}(2a, 2b) = 2 \times \text{ppcm}(2a, 2b)$, et plus généralement $\text{ppcm}(na, nb) = |n| \, \text{ppcm}(a, b)$.

## 2.4 Théorème de Bézout | Facile

***Question 71***
Soient deux entiers $a, b$ tels que $\text{pgcd}(a, b) = 1$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Faux] $a$ et $b$ sont des nombres premiers.
- ☐ [Vrai] $a$ et $b$ sont des nombres premiers entre eux.
- ☐ [Vrai] Il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $au + bv = 1$.
- ☐ [Vrai] Il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $au + bv = 2$.

*Explications :* $\text{pgcd}(a, b) = 1$ est la définition de $a$ et $b$ sont des nombres premiers entre eux. Le théorème de Bézout affirme qu'il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $au + bv = 1$. En multipliant cette égalité par 2, on obtient $a(2u) + b(2v) = 2$.

***Question 72***
Soient $a, b, c$ des entiers tels que $a|bc$. Dans le lemme de Gauss, quelle est la condition pour pouvoir conclure que $a|c$ ?

- ☐ [Vrai] $\text{pgcd}(a, b) = 1$
- ☐ [Faux] $\text{pgcd}(a, c) = 1$
- ☐ [Faux] $\text{pgcd}(b, c) = 1$
- ☐ [Faux] $a$, $b$ et $c$ sont des nombres premiers.

*Explications :* Lemme de Gauss : si $a|bc$ et $\text{pgcd}(a, b) = 1$ alors $a|c$.

***Question 73***
Soit $a$ et $b$ deux entiers tels que $\text{pgcd}(a, b) = 4$. Alors on peut trouver deux entiers $u$ et $v$ tels que :

- ☐ [Faux] $au - bv = 2$
- ☐ [Faux] $au + bv = 2$
- ☐ [Vrai] $au - bv = 4$
- ☐ [Vrai] $au + bv = 12$

*Explications :* Une égalité $au \pm bv = 2$ nous indiquerait que tout diviseur de $a$ et $b$ diviserait 2 donc $\text{pgcd}(a, b) = 1$ ou 2, ce qui n'est pas le cas ici.
Le théorème de Bézout nous garantit l'existence de deux entiers $U$ et $V$ tels que $aU + bV = 4$. Si l'on prend $v = -V$, on obtient $au - bv = 4$. Si l'on multiplie l'égalité de Bézout par 3, on a alors $a \times (3U) + b \times (3V) = 3 \times 4 = 12$.

### 2.5 Théorème de Bézout | Moyen

***Question 74***
Soient deux entiers positifs $a, b$, on calcule le pgcd de $a$ et $b$ par l'algorithme d'Euclide. La première étape est d'écrire la division euclidienne de $a$ par $b$ : $a = bq + r$. Quelle est la second étape ?

- ☐ [Faux] La division de $a$ par $r$.
- ☐ [Vrai] La division de $b$ par $r$.
- ☐ [Faux] La division de $q$ par $r$.
- ☐ [Faux] Cela dépend des valeurs de $a$ et $b$.

*Explications :* Une conséquence de l'égalité est que $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(b, r)$. On remplace donc $a$ par $b$ et $b$ par $r$ dans l'étape suivante, c'est-à-dire qu'on fait la division euclidienne de $b$ par $r$.

***Question 75***
Soient deux entiers positifs $a, b$ et $d = \text{pgcd}(a, b)$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Faux] Il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ uniques tels que $au + bv = d$.
- ☐ [Vrai] Il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $au + bv = d$.
- ☐ [Faux] Il existe $u, v \in \mathbb{N}$ uniques tels que $au + bv = d$.
- ☐ [Faux] Il existe $u, v \in \mathbb{N}$ tels que $au + bv = d$.

*Explications :* Il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $au + bv = d$. $u$ et $v$ ne sont pas uniques. Comme $a, b, d > 0$, $d \leqslant a$ et $d \leqslant b$ alors soit $u$ soit $v$ sera négatif.

***Question 76***
Pour $a = 453$ et $b = 201$, l'algorithme d'Euclide (étendu) fournit des coefficients de Bézout $u$ et $v$ tels que $au + bv = \text{pgcd}(a, b)$ avec :

- ☐ [Faux] $u = 4$, $v = -9$, $\text{pgcd}(a, b) = 1$.
- ☐ [Faux] $u = -12$, $v = 27$, $\text{pgcd}(a, b) = 51$.
- ☐ [Faux] $u = 1$, $v = -2$, $\text{pgcd}(a, b) = 51$
- ☐ [Vrai] $u = 4$, $v = -9$, $\text{pgcd}(a, b) = 3$.

*Explications :* L'algorithme d'Euclide nous fournit :

$$453 = 2 \times 201 + 51$$

$$201 = 3 \times 51 + 48$$

$$51 = 1 \times 48 + 3$$

$$48 = 16 \times 3 + 0$$

Ainsi on a $\text{pgcd}(a,b) = 3$. En remontant cet algorithme, on obtient :

$$3 = 51 - 48 = 201 \times (-1) + 51 \times 4 = 453 \times 4 + 201 \times (-9)$$

***Question 77***

Pour les entiers $a, b$ suivants, les $u, v$ donnés sont-ils des coefficients de Bézout, c'est-à-dire tels que $au + bv = \text{pgcd}(a,b)$ ?

- ☐ [Faux] $a = 7$, $b = 11$, $u = 2$, $v = -3$
- ☐ [Faux] $a = 20$, $b = 55$, $u = 6$, $v = -2$
- ☐ [Vrai] $a = 28$, $b = 12$, $u = 1$, $v = -2$
- ☐ [Vrai] $a = 36$, $b = 15$, $u = -2$, $v = 5$

*Explications :* Pour $a = 7$, $b = 11$, $u = 2$, $v = -3$, on a $\text{pgcd}(a,b) = 1$ et $au + bv = -19 \neq 1$.
Pour $a = 20$, $b = 55$, $u = 6$, $v = -2$, on a $\text{pgcd}(a,b) = 5$ et $au + bv = 10 \neq 5$.
Pour $a = 28$, $b = 12$, $u = 1$, $v = -2$, on a $\text{pgcd}(a,b) = 4$ et $au + bv = 4$.
Pour $a = 36$, $b = 15$, $u = -2$, $v = 5$, on a $\text{pgcd}(a,b) = 3$ et $au + bv = 3$.

***Question 78***

Pour $a = 41$ et $b = 7$, on a notamment l'égalité $a \times (-3) + b \times 18 = 3$. Que peut-on en conclure ?

- ☐ [Faux] $\text{pgcd}(a,b) = 3$.
- ☐ [Vrai] $\text{pgcd}(a,b)$ est un diviseur de 3.
- ☐ [Vrai] Comme 3 ne divise pas 7 alors $a$ et $b$ sont premiers entre eux.
- ☐ [Faux] $-3$ et 18 sont premiers entre eux.

*Explications :* Comme $\text{pgcd}(a,b)$ divise $a$ et $b$, il divise aussi $a \times (-3) + b \times 18 = 3$. Donc $\text{pgcd}(a,b)$ est un diviseur de 3 : c'est donc soit 3, soit 1. Mais puisque 3 ne divise pas $b$ (ni $a$ d'ailleurs), on a donc $\text{pgcd}(a,b) = 1$ : $a$ et $b$ sont premiers entre eux.
Enfin, les nombres $-3$ et 18 sont divisibles par 3.

***Question 79***

Soit deux nombres entiers $a$ et $b$ tels que $5a^2 - 4b^2 = 1$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Vrai] $\text{pgcd}(a^2, b^2) = 1$.
- ☐ [Vrai] $\text{pgcd}(5a, 4b) = 1$.
- ☐ [Faux] 5 divise $4b^2$.
- ☐ [Vrai] 4 divise $5a^2 - 1$.

*Explications :* L'égalité fournie peut s'écrire sous les formes $5 \times a^2 + (-4) \times b^2 = 1 = a \times (5a) + (-b) \times 4b = 1$. Ce sont notamment des identités de Bézout pour les couples $(a^2, b^2)$ et $(5a, 4b)$ qui sont donc premiers entre eux.
Si 5 était un diviseur de $4b^2$, il diviserait $(5a^2 - 4b^2)$ et donc 1 ce qui est impossible.
Enfin ayant $5a^2 - 1 = 4b^2$, le nombre $5a^2 - 1$ est bien un multiple de 4.

## 2.6 Théorème de Bézout | Difficile

***Question 80***
Quelles sont les affirmations vraies concernant l'algorithme d'Euclide ?

- ☐ [Faux] Il se peut que le processus n'aboutisse pas à cause d'un nombre infini de divisions à effectuer.
- ☐ [Faux] Il se peut que le processus ne fournisse pas le pgcd correct.
- ☐ [Vrai] Le pgcd est le dernier reste non nul.
- ☐ [Vrai] L'algorithme étendu permet en plus de calculer des coefficients de Bézout.

*Explications :* L'algorithme d'Euclide fournit un résultat *correct* en un nombre *fini* d'étapes. La remontée de l'algorithme d'Euclide permet de calculer des coefficients de Bézout.

***Question 81***
Soit $n$ un entier tel que $5n$ soit un multiple de 7. Quelles sont alors les affirmations vraies ?

- ☐ [Vrai] $n$ est un multiple de 7.
- ☐ [Faux] 5 divise $7n$.
- ☐ [Vrai] 7 divise $n$.
- ☐ [Faux] 35 divise $n$.

*Explications :* D'après le lemme de Gauss, puisque $7|5n$ et que $\mathrm{pgcd}(5,7)=1$, on a $7|n$ : ceci revient à dire que $n$ est un multiple de 7.
En revanche si l'on prend $n=7$, on constate que $5n=35$ est bien multiple de 7 mais que 5 ne divise pas $7n=49$ et que 35 ne divise pas $n=7$.

***Question 82***
Soient 5 entiers relatifs $a,b,c,u,v$ tels que $au+bv=1$ et $a|bc$. Quelles sont alors les affirmations vraies ?

- ☐ [Faux] $\mathrm{pgcd}(a,c)=1$.
- ☐ [Vrai] $\mathrm{pgcd}(a,b)=1$.
- ☐ [Vrai] $a|c$.
- ☐ [Vrai] $\mathrm{pgcd}(a,c)=|a|$.

*Explications :* $au+bv=1$ est une identité de Bézout qui garantit que $\mathrm{pgcd}(a,b)=1$. D'après le lemme de Gauss, puisque $a|bc$, on a alors $a|c$.
Puisque $a|c$, $|a|$ est un diviseur de $c$. Or c'est le plus grand diviseur de $a$ : donc $|a|=\mathrm{pgcd}(a,c)$.
Un contre-exemple pour établir que $\mathrm{pgcd}(a,c)$ n'est pas nécessairement égal à 1 peut par exemple être $a=5$, $b=7$ (bien premiers entre eux) et $c=10$. On a bien $a|bc$ mais $\mathrm{pgcd}(a,c)=5$. Plus généralement, on peut toujours respecter la condition $a|bc$ avec $c=a$, ce qui contredit $\mathrm{pgcd}(a,c)=1$ dès que $a$ n'est pas égal à $\pm 1$.

## 2.7 Nombres premiers | Facile

***Question 83***
Les entiers suivants sont-ils des nombres premiers ?

- ☐ [Vrai] 107

- ☐ [Vrai] 113
- ☐ [Faux] 145
- ☐ [Faux] 153

*Explications :* 107 et 113 sont des nombres premiers ; $145 = 5 \times 29$ ; $153 = 3^2 \times 17$.

***Question 84***
Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Faux] Tout nombre impair supérieur à 3 est premier.
- ☐ [Vrai] Tout nombre premier supérieur à 3 est impair.
- ☐ [Vrai] Il existe une infinité de nombres premiers impairs.
- ☐ [Faux] Il existe une infinité de nombres premiers pairs.

*Explications :* Par exemple 9 est un nombre impair qui n'est pas premier. Le seul nombre premier pair est 2, tous les autres sont impairs et il y en a une infinité.

***Question 85***
Les entiers suivants sont-ils des nombres premiers ?

- ☐ [Faux] 161
- ☐ [Faux] 169
- ☐ [Faux] 171
- ☐ [Vrai] 179

*Explications :* On a $161 = 7 \times 23$, $169 = 13^2$ et 171 est divisible par 9 (car la somme de ses chiffres fait 9).
En revanche, 179 n'est pas divisible par $2, 3, 5, 7, 11, 13$ ce qui garantit sa primalité.

## 2.8 Nombres premiers | Moyen

***Question 86***
Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Vrai] La somme de deux nombres premiers $\geqslant 3$ n'est jamais un nombre premier.
- ☐ [Vrai] Le produit de deux nombres premiers $\geqslant 3$ n'est jamais un nombre premier.
- ☐ [Faux] Il existe un nombre premier $p \geqslant 3$ tel que $p + 1$ soit aussi premier.
- ☐ [Vrai] Il existe un nombre premier $p \geqslant 3$ tel que $p + 2$ soit aussi premier.

*Explications :* Le produit de deux nombres premiers n'est jamais un nombre premier (par définition de ce qu'est un nombre premier). Pour la somme, cela peut arriver, par exemple $2 + 3 = 5$, mais pour deux nombres premiers $\geqslant 3$, ils sont impairs, donc la somme est paire et n'est pas un nombre premier. De même si $p \geqslant 3$ est premier, il est impair, donc $p + 1$ est pair et n'est pas premier. Par contre pour $p = 11$ alors $p + 2 = 13$ est aussi premier, d'autres exemples sont 17 et 19 ou bien 101 et 103.

***Question 87***
Soient $p$ un nombre premier et $a, b$ des entiers avec $p|ab$. Par application du lemme d'Euclide, quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Faux] $p$ divise $a$ et $p$ divise $b$.
- ☐ [Vrai] $p$ divise $a$ ou $p$ divise $b$.
- ☐ [Faux] $p$ divise $a$ ou $p$ divise $b$, mais pas les deux en même temps.
- ☐ [Faux] $p$ ne divise ni $a$, ni $b$.

*Explications :* Lemme d'Euclide : Si $p$ premier et $p|ab$, alors $p|a$ ou $p|b$. Les autres affirmations sont fausses. Voici des contre-exemples : $2|(3 \times 4)$ mais 2 ne divise pas 3, mais divise bien 4 ; $2|(4 \times 6)$ et $2|4$ et $2|6$.

***Question 88***

Soit $n$ un entier tel que $n^2 - 1$ est un multiple de 11. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Faux] 11 divise $n - 1$.
- ☐ [Faux] 11 divise $n + 1$.
- ☐ [Vrai] (11 divise $n - 1$) ou (11 divise $n + 1$).
- ☐ [Faux] (11 divise $n - 1$) et (11 divise $n + 1$).

*Explications :* 11 est premier et divise $n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$. D'après le lemme d'Euclide, soit $11|(n-1)$, soit $11|(n+1)$.
Pour $n = 10$, on a $11|(10^2 - 1)$ mais 11 ne divise pas $10 - 1 = 9$.
Pour $n = 12$, on a $11|12^2 - 1$ mais 11 ne divise pas $12 + 1 = 13$.
Et si 11 divisait $n - 1$ et $n + 1$ alors 11 diviserait $n + 1 - (n - 1) = 2$.

***Question 89***

À l'aide d'une calculatrice, quelle est l'écriture de la décomposition en produit de facteurs premiers de $N = 111\,111$ ?

- ☐ [Faux] $N = 11 \times 10\,101$.
- ☐ [Faux] $N = 3 \times 11 \times 3367$.
- ☐ [Faux] $N = 7 \times 33 \times 481$.
- ☐ [Vrai] $N = 3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 3713$.

*Explications :* Les entiers 10 101, 3367 et 481 sont des multiples de 13 !

***Question 90***

Soit $p \geqslant 3$ un nombre premier et $p = 4q + r$ le résultat de sa division euclidienne par 4. On peut alors avoir :

- ☐ [Faux] $r = 0$
- ☐ [Vrai] $r = 1$
- ☐ [Faux] $r = 2$
- ☐ [Vrai] $r = 3$

*Explications :* Un nombre premier $\geqslant 3$ est nécessairement impair. Ceci exclut donc les possibilité $r = 0$ et $r = 2$ qui correspondent à des nombres pairs.
On peut à titre d'exemple obtenir pour $p = 3$ que $r = 3$ ; et pour $p = 5$ que $r = 1$.

***Question 91***
Soit $p$ un nombre premier tel que $10 < p < 100$. On note $A$ le chiffre des dizaines et $B$ le chiffre des unités de l'écriture décimale de $p$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Vrai] $A$ peut être pair.
- ☐ [Faux] $B$ peut être pair.
- ☐ [Vrai] On peut avoir $A = B$.
- ☐ [Faux] On peut avoir $B = 9 - A$.

*Explications :* Pour $p = 23$ qui est premier, on a bien $A = 2$ qui est pair.
Si le chiffre des unités $B$ est pair, alors $p$ est pair ce qui est impossible pour un nombre premier $\geqslant 3$.
Pour $p = 11$ premier, on a bien $A = B$ (les autres nombres avec deux chiffres identiques sont justement les multiples de 11, et ne sont donc pas premiers).
Si $B = 9 - A$, alors la somme des chiffres de $p$ vaut $A + B = 9$ : ainsi $p$ est divisible par 9, ce qui contredit sa primalité.

## 2.9 Nombres premiers | Difficile

***Question 92***
Les entiers suivants ont été factorisés correctement. Quelles sont les écritures qui sont des décompositions en facteurs premiers ?

- ☐ [Faux] $3\,025 = 1^3 \times 5^2 \times 11^2$
- ☐ [Faux] $1\,836 = 2^2 \times 3 \times 3^2 \times 17$
- ☐ [Faux] $1\,444\,716 = 2^2 \times 7^3 \times 9^2 \times 13$
- ☐ [Vrai] $13\,915 = 5 \times 11^2 \times 23$

*Explications :* Chaque facteur doit être de la forme $p_i^{\alpha_i}$ avec $p_i$ un nombre premier (donc pas 1 ni 9) et $\alpha_i > 0$. En plus les $p_i$ doivent être deux à deux distincts. Avec ces contraintes la décomposition est unique (à l'ordre des facteurs près).

***Question 93***
Soient $a = 5^3 \times 11^2 \times 13^5 \times 19$ et $b = 5^5 \times 7^4 \times 11 \times 19$ Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Faux] $\mathrm{pgcd}(a, b) = 5^3 \times 7^4 \times 11 \times 13^5 \times 19$
- ☐ [Faux] $\mathrm{pgcd}(a, b) = 5 \times 11 \times 19$
- ☐ [Vrai] $\mathrm{ppcm}(a, b) = 5^5 \times 7^4 \times 11^2 \times 13^5 \times 19$
- ☐ [Faux] $\mathrm{ppcm}(a, b) = 5^5 \times 11^2 \times 19$

*Explications :* Pour le pgcd, on garde le plus petit exposant des décompositions de $a$ et $b$ ; pour le ppcm, on garde le plus grand exposant.
$\mathrm{pgcd}(a, b) = 5^3 \times 11 \times 19$
$\mathrm{ppcm}(a, b) = 5^5 \times 7^4 \times 11^2 \times 13^5 \times 19$

***Question 94***
Soit $a = 79\,475 = 5^2 \times 11 \times 17^2$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Faux] $\mathrm{pgcd}(a, 75) = 3 \times 5^2$
- ☐ [Vrai] $\mathrm{pgcd}(a, 75) = 5^2$

- ☐ [Faux] $\text{ppcm}(a,75) = 3 \times 11 \times 17^2$
- ☐ [Faux] $75|a$

*Explications :* On a $75 = 3 \times 5^2$. En utilisant les décompositions en produits de facteurs premiers, on obtient :

$$\text{pgcd}(a,75) = 5^2 = 25 \qquad ; \qquad \text{ppcm}(a,75) = 3 \times 5^2 \times 11 \times 17^2$$

Enfin $a$ n'est pas divisible par 3 donc il n'est pas divisible par $75 = 3 \times 25$.

***Question 95***

Soit $p \geqslant 5$ un nombre premier et $N = (p+3)^2 - p^2$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Faux] $2|N$.
- ☐ [Vrai] $3|N$.
- ☐ [Faux] $6|N$.
- ☐ [Vrai] $p$ ne divise pas $N$.

*Explications :* En développant, on constate que $N = 6p + 9 = 6(p+1) + 3 = 3(2p+3)$. $N$ est donc un multiple de 3, non divisible par 6 (le reste dans la division euclidienne par 6 est 3). $N$ est impair (produit de deux nombres impairs) et n'est donc pas divisible par 2.
Enfin, si $p|N$, on a $p|(6p+9)$ et donc $p|9$. Puisque $p$ est premier, cela signifie que $p = 3$ ce qui est impossible car $p \geqslant 5$.

## 2.10 Congruences | Facile

***Question 96***

Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Faux] $31 \equiv 6\,[12]$
- ☐ [Vrai] $42 \equiv 16\,[13]$
- ☐ [Faux] $25 \equiv -11\,[14]$
- ☐ [Vrai] $158 \equiv 8\,[15]$

*Explications :* 12 ne divise pas $31 - 6 = 25$ ; en fait $31 \equiv 7\,[12]$.
13 divise $42 - 16 = 26$ ; en fait $42 \equiv 16 \equiv 3\,[13]$.
14 ne divise pas $25 - (-11) = 36$ ; en fait $25 \equiv +11 \equiv -3\,[14]$.
15 divise $158 - 8 = 150$ ; en fait $158 = 15 \times 10 + 8 \equiv 8\,[15]$.

***Question 97***

Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Faux] $456\,789 \equiv 0\,[2]$
- ☐ [Vrai] $43\,210 \equiv 0\,[5]$
- ☐ [Faux] $23\,769 \equiv 3\,[9]$
- ☐ [Faux] $10\,326 \equiv 8\,[10]$

*Explications :* 456 789 est impair, donc n'est pas congru à 0 modulo 2.
43 210 est divisible par 5 donc congru à 0 modulo 5.
23 769 est divisible par 9 (la somme des chiffres est divisible par 9) donc congru à 0 modulo 9.
$10\,326 \equiv 6\,[10]$, réduire modulo 10 c'est garder le chiffre des unités.

***Question 98***
Si $x \equiv 2\,[5]$, alors on a :

- ☐ [Vrai] $x^2 \equiv 2x\,[5]$
- ☐ [Faux] $3x \equiv -1\,[5]$
- ☐ [Vrai] $x+1 \equiv 3\,[5]$
- ☐ [Faux] $10x \equiv 2\,[5]$

*Explications :* D'après les propriétés arithmétiques des congruences et notre congruence initiale $x \equiv 2\,[5]$ :
en ajoutant 1 : $x+1 \equiv 2+1 = 3\,[5]$,
en multipliant par 3 : $3x \equiv 3 \times 2 = 6 \equiv 1\,[5]$,
en multipliant par 10 : $10x \equiv 10 \times 2 = 20 \equiv 0\,[5]$,
Enfin on calcule : $x^2 \equiv 2 \times 2 \equiv 2x\,[5]$.

***Question 99***
Parmi les nombres $n$ ci-dessous, lequel vérifie à la fois $n \equiv 5\,[14]$ et $n \equiv 1\,[8]$ ?

- ☐ [Faux] $n = 47$
- ☐ [Faux] $n = 57$
- ☐ [Vrai] $n = 89$
- ☐ [Faux] $n = 103$

*Explications :* On a bien $89 \equiv 5\,[14]$ $(89 = 14 \times 6 + 5)$ et $89 \equiv 1\,[8]$ $(89 = 8 \times 11 + 1)$.
On calcule que $47 \equiv 7\,[8]$, $57 \equiv 1\,[14]$ et $103 \equiv 7\,[8]$.

## 2.11 Congruences | Moyen

***Question 100***
Soient $a \equiv 2\,[13]$ et $b \equiv 7\,[13]$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Vrai] $a+b \equiv 9\,[13]$
- ☐ [Vrai] $ab \equiv 1\,[13]$
- ☐ [Vrai] $a^2 \equiv -9\,[13]$
- ☐ [Vrai] $b^3 \equiv 5\,[13]$

*Explications :* Tout est vrai ! Modulo 13, on a bien :

$$a+b = 2+7 = 9 \equiv 9,$$

$$ab = 2 \times 7 = 14 \equiv 1,$$
$$a^2 = 2^2 = 4 \equiv -9,$$
$$b^3 = 7^3 = 343 \equiv 5.$$

***Question 101***
Soient $a \equiv b\,[n]$ et $c \equiv d\,[n]$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Faux] $a+b \equiv c+d\,[n]$

- ☐ [Vrai] $a+c \equiv b+d\ [n]$
- ☐ [Vrai] $a^2 \equiv b^2\ [n]$
- ☐ [Vrai] $c^2 \equiv d^2\ [n]$

*Explications :* $a+c \equiv b+d\ [n]$ et $a^k \equiv b^k\ [n]$ et aussi $c^k \equiv d^k\ [n]$.

***Question 102***
Soit $n$ un entier premier avec 3. On peut alors affirmer :

- ☐ [Faux] $2n \equiv 1\ [3]$
- ☐ [Faux] $2n \equiv -1\ [3]$
- ☐ [Vrai] $n^2 \equiv 1\ [3]$
- ☐ [Faux] $n^2 \equiv -1\ [3]$

*Explications :* Puisque $n$ n'est pas un multiple de 3, on a soit $n \equiv 1\ [3]$ (cas 1) soit $n \equiv 2 \equiv -1\ [3]$ (cas 2). Dans le cas 1, on a $2n \equiv 2 \equiv -1\ [3]$, et dans le cas 2 on a $2n \equiv -2 \equiv 1\ [3]$.
Dans les deux cas, on aura $n^2 \equiv 1\ [3]$.

***Question 103***
Soit $k$ un entier et $N = 5k^2 - 10k + 4$. On peut affirmer :

- ☐ [Vrai] $N \equiv 4\ [5]$
- ☐ [Faux] $N \equiv 5\ [5]$
- ☐ [Vrai] $N \equiv 5k^2\ [2]$
- ☐ [Faux] $N \equiv 1\ [2]$

*Explications :* Puisque $5 \equiv 10 \equiv 0\ [5]$, on a $5k^2 - 10k \equiv 0\ [5]$. Donc $N \equiv 4\ [5]$.
D'autre part, puisque $10 \equiv 4 \equiv 0\ [2]$, on a $-10k + 4 \equiv 0\ [2]$. Donc $N \equiv 5k^2\ [2]$. Le cas $k = 2$ (ou tout autre entier pair) montre que l'on peut avoir $N \equiv 5k^2 \equiv 0\ [2]$.

## 2.12 Congruences | Difficile

***Question 104***
Soit $p$ un nombre premier et $x$ un entier. Quel(s) énoncé(s) du petit théorème de Fermat sont corrects ?

- ☐ [Faux] $x^p \equiv p\ [x]$
- ☐ [Vrai] $x^p \equiv x\ [p]$
- ☐ [Faux] Si $p$ ne divise pas $x$, alors $x^{p-1} \equiv 0\ [x]$
- ☐ [Faux] Si $p$ ne divise pas $x$, alors $x^{p-1} \equiv 0\ [p]$

*Explications :* Le théorème de Fermat stipule que $x^p \equiv x\ [p]$, et que si $p$ ne divise pas $x$ alors $x^{p-1} \equiv 1\ [p]$.

***Question 105***
Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Faux] $2^8 \equiv 2\ [8]$
- ☐ [Faux] $3^{12} \equiv 3\ [13]$

- ☐ [Faux] $18^7 \equiv 1\,[19]$
- ☐ [Vrai] $4^{16} \equiv 1\,[17]$

*Explications :* 8 n'est pas un nombre premier, le petit théorème de Fermat ne s'applique pas. En fait $2^8 \equiv 0\,[8]$ car $2^3 = 8 \equiv 0\,[8]$.
Petit théorème de Fermat, avec $p = 13$, $3^{12} \equiv 1\,[13]$.
$18^7 \equiv (-1)^7 \equiv -1 \equiv 18\,[19]$ (le calcul n'a rien à voir avec le petit théorème de Fermat).
Petit théorème de Fermat, avec $p = 17$, $4^{16} \equiv 1\,[17]$.

***Question 106***
Soit un entier $k$ tel que $k \equiv 2\,[7]$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Faux] $2k^2 + k \equiv k^3\,[7]$
- ☐ [Vrai] $3(k^4 - k) \equiv 0\,[7]$
- ☐ [Vrai] $14k - 2 \equiv 5\,[7]$
- ☐ [Faux] $k^{18} + k^{12} + k^6 \equiv k\,[7]$

*Explications :* On calcule que $k^2 \equiv 4\,[7]$ ; $k^3 \equiv 2^3 \equiv 1\,[7]$ et $k^4 \equiv 2^4 \equiv 2\,[7]$. On a alors :
$2k^2 + k \equiv 2 \times 2^2 + 2 \equiv 10 \equiv 3\,[7]$.
$k^4 \equiv k\,[7]$ donc $3(k^4 - k) \equiv 3 \times 0 \equiv 0\,[7]$.
$14k \equiv 7 \times 2k \equiv 0\,[7]$ donc $14k - 2 \equiv -2 \equiv 5\,[7]$.
Enfin on a $k^{18} \equiv k^{12} \equiv k^6 \equiv 1\,[7]$ (c'est le théorème de Fermat, ou une conséquence directe de $k^3 \equiv 1\,[7]$). Donc $k^{18} + k^{12} + k^6 \equiv 3\,[7]$.

***Question 107***
Pour quel(s) entier(s) $n$ a-t-on $10^{10} \equiv 7^{18}\,[n]$ ?

- ☐ [Vrai] $n = 3$
- ☐ [Faux] $n = 5$
- ☐ [Faux] $n = 7$
- ☐ [Vrai] $n = 9$

*Explications :* On a $10 \equiv 7 \equiv 1\,[3]$. Donc $10^{10} \equiv 1 \equiv 7^{18}\,[3]$.
$10 \equiv 0\,[5]$ donc $10^{10} \equiv 0\,[5]$. Mais $7^{18} \equiv (7^4)^4 \times 7^2 \equiv 1^4 \times 49 \equiv -1\,[5]$.
$7^{18} \equiv 0\,[7]$ mais $10^{10} \equiv 3^{10} \equiv 3^6 \times 3^4 \equiv 1 \times 81 \equiv 4\,[7]$.
Enfin, on a $10^{10} \equiv 1^{10} \equiv 1\,[9]$, et également $7^{18} \equiv (-2)^{18} \equiv 2^{18} \equiv 8^6 \equiv (-1)^6 \equiv 1\,[9]$.

***Question 108***
Quel est le chiffre des unités de $7^{100}$ ?

- ☐ [Vrai] 1
- ☐ [Faux] 3
- ☐ [Faux] 5
- ☐ [Faux] 9

*Explications :* Le chiffre des unités est donné par la congruence modulo 10.
Puisque $7^2 = 49 \equiv (-1)\,[10]$, on a :

$$7^{100} = (7^2)^{50} \equiv (-1)^{50} \equiv 1\,[10]$$

## Equations différentielles

**Arnaud Bodin, Barnabé Croizat, Christine Sacré**

# 3 Equations différentielles

## 3.1 Primitive | Facile

***Question 109***
Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Faux] $x^3$ est une primitive de $3x^2+3$.
- ☐ [Vrai] $x^3+3$ est une primitive de $3x^2$.
- ☐ [Faux] $\ln(x^2+1)$ est une primitive de $\frac{1}{x^2+1}$.
- ☐ [Vrai] $\sqrt{x}$ est une primitive de $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ (sur $]0,+\infty[$).

*Explications :* Pour vérifier si une fonction $f$ est une primitive d'une fonction $g$, on calcule la dérivée de $f$ et on regarde si on obtient bien la fonction $g$. La dérivée de $x^3$ et de $x^3+3$ est $3x^2$. La dérivée de $\ln(x^2+1)$ est $\frac{2x}{x^2+1}$ et non $\frac{1}{x^2+1}$. La dérivée de $\sqrt{x}$ sur $]0,+\infty[$ est bien $\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

***Question 110***
Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Faux] $\cos(x)$ est une primitive de $\sin(x)$.
- ☐ [Vrai] $\exp(x)$ est une primitive de $\exp(x)$.
- ☐ [Vrai] $x^4-3x^3+2x^2-8$ est une primitive de $4x^3-9x^2+4x$.
- ☐ [Faux] $4x^3+x^2-3x+6$ est une primitive de $x^4+2x-3$.

*Explications :* Pour vérifier si une fonction $f$ est une primitive d'une fonction $g$, on calcule la dérivée de $f$ et on regarde si on obtient bien la fonction $g$. $\cos'(x)=-\sin(x)$ ; $\exp'(x)=\exp(x)$ ; $(x^4-3x^3+2x^2-8)'=4x^3-9x^2+4x$ ; $(4x^3+x^2-3x+6)'=12x^2+2x-3$.

***Question 111***
Parmi les phrases suivantes, quelles sont les affirmations correctes ?

- ☐ [Vrai] L'opération du calcul de primitives est le contraire de l'opération du calcul de dérivées.
- ☐ [Vrai] L'opération du calcul de dérivées est le contraire de l'opération du calcul de primitives.
- ☐ [Vrai] Deux primitives d'une même fonction sur un intervalle sont égales à une constante près.
- ☐ [Vrai] Si on connaît une primitive d'une fonction, alors on les connaît toutes.

*Explications :* Tout est vrai ! Les calculs de dérivées et de primitives sont bien réciproques l'un de l'autre, et dès que l'on connaît une primitive $F$ d'une fonction $f$ sur un intervalle, alors toutes les primitives de $f$ sur cet intervalle seront de la forme $F(x)+C$ (où $C$ est une constante).

***Question 112***
Pour chacune des équations différentielles suivantes, la fonction donnée est-elle solution ?

- ☐ [Faux] Pour $y' = \sin(x)$ la fonction $f(x) = \cos(x)$ est solution.
- ☐ [Faux] Pour $y' = e^{2x}$ la fonction $f(x) = e^{2x} + 1$ est solution.
- ☐ [Faux] Pour $y' = \ln(x)$ la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ est solution.
- ☐ [Vrai] Pour $y' = \frac{1}{e^x}$ la fonction $f(x) = 1 - e^{-x}$ est solution.

*Explications :* Pour $y' = \sin(x)$ la fonction $f(x) = -\cos(x)$ est solution. Pour $y' = e^{2x}$ la fonction $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + 1$ est solution. C'est pour $y' = \frac{1}{x}$ que $f(x) = \ln(x)$ est solution. Pour $y' = \frac{1}{e^x} = e^{-x}$ la fonction $f(x) = 1 - e^{-x}$ est bien solution puisque $f'(x) = -(-e^{-x}) = e^{-x} = \frac{1}{e^x}$.

## 3.2 Primitive | Moyen

***Question 113***
On considère la fonction $f : x \mapsto 2e^{-2x} - 3$. Quelles sont les affirmations exactes ?

- ☐ [Faux] $f$ est une primitive de $-e^{-2x} - 3x$ sur $\mathbb{R}$.
- ☐ [Vrai] $f$ est une primitive de $-4e^{-2x}$ sur $\mathbb{R}$.
- ☐ [Vrai] $f$ est la primitive de $-4e^{-2x}$ sur $\mathbb{R}$ valant $-1$ en $x = 0$.
- ☐ [Faux] $f$ est la dérivée de $x \mapsto -e^{-2x}$

*Explications :* Pour vérifier si une fonction $f$ est une primitive d'une fonction $g$, on calcule la dérivée de $f$ et on regarde si on obtient bien la fonction $g$. La dérivée de $e^{-2x}$ est $-2e^{-2x}$ donc $f'(x) = -4e^{-2x}$. De plus $f(0) = 2e^0 - 3 = 2 - 3 = -1$.

***Question 114***
Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Faux] $x \mapsto \ln(x)$ est une primitive de $x \mapsto 1/x$ sur $\mathbb{R}$.
- ☐ [Faux] $x \mapsto \ln(x)$ est une primitive de $x \mapsto 1/x$ sur $]-\infty, 0[$.
- ☐ [Vrai] $x \mapsto \ln(x)$ est une primitive de $x \mapsto 1/x$ sur $]0, +\infty[$.
- ☐ [Vrai] $x \mapsto \ln(-x)$ est une primitive de $x \mapsto 1/x$ sur $]-\infty, 0[$.

*Explications :* La fonction ln n'est définie et dérivable que sur $]0, +\infty[$. Pour tout $x$ de $]0, +\infty[$, $(\ln(x))' = 1/x$ ; pour tout $x$ de $]-\infty, 0[$, la fonction $x \mapsto \ln(-x)$ est bien définie et dérivable, et on a $(\ln(-x))' = -1/-x = 1/x$.

***Question 115***
Soit $F$ une primitive d'une fonction $f$ et $G$ une primitive d'une fonction $g$ sur un intervalle $I$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Faux] Si $f = g$ alors $F = G$.
- ☐ [Vrai] Si $F = G$ alors $f = g$.
- ☐ [Faux] Si $f = g^2$ alors $F = G^2$.
- ☐ [Vrai] Si $F = G + C$ (où $C$ est une constante) alors $f = g$.

*Explications :* Si $f = g$ alors $F = G + C$ (où $C$ est une constante). On rappelle que $F' = f$ et $G' = g$, donc si $F = G + C$ alors en dérivant l'égalité on obtient $F' = f = (G+C)' = G' + 0 = g$. Remarquez par ailleurs que les primitives de $x^2$ sont $\frac{x^3}{3} + C$ (où $C$ est une constante) : ce ne sont les carrés des primitives de $x$ (qui sont $\frac{x^2}{2} + \widetilde{C}$, où $\widetilde{C}$ est une constante).

***Question 116***
Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Faux] Une primitive de $x^k$ est $\frac{x^k}{k}$.
- ☐ [Faux] Une primitive de $\ln(x)$ est $\frac{1}{x}$.
- ☐ [Vrai] Une primitive de $\frac{1}{\sqrt{x}}$ est $2\sqrt{x}$.
- ☐ [Faux] Une primitive de $e^{ax}$ est $e^{ax}$ (où $a > 0$ est une constante).

*Explications :* Une primitive de $x^k$ est $\frac{x^{k+1}}{k+1}$. C'est $\ln(x)$ qui est une primitive de $\frac{1}{x}$, l'inverse est faux. Oui, une primitive de $\frac{1}{\sqrt{x}}$ est $2\sqrt{x}$ puisque $(2\sqrt{x})' = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Enfin, une primitive de $e^{ax}$ est $\frac{1}{a}e^{ax}$.

### 3.3 Primitive | Difficile

***Question 117***
Parmi les fonctions suivantes, laquelle est une primitive de $\sqrt{x}$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$ ?

- ☐ [Faux] $2x\sqrt{x}$
- ☐ [Faux] $\frac{1}{2\sqrt{x}}$
- ☐ [Faux] $x^2\sqrt{x}$
- ☐ [Vrai] $\frac{2}{3}x\sqrt{x}$

*Explications :* La dérivée de $x\sqrt{x}$ est $\sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{(\sqrt{x})^2}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ donc $\frac{2}{3}x\sqrt{x}$ est une primitive de $\sqrt{x}$. Remarquez d'ailleurs que $x\sqrt{x}$ peut aussi s'écrire $x^{3/2}$, ce qui permet d'obtenir différemment sa dérivée : $(x^{3/2})' = \frac{3}{2}x^{3/2-1} = \frac{3}{2}x^{1/2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$. Par ailleurs, les dérivées de $x^2\sqrt{x}$ et de $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ donnent respectivement $\frac{5}{2}x\sqrt{x}$ et $\frac{-1}{4x\sqrt{x}}$, qui sont donc bien distinctes de $\sqrt{x}$.

***Question 118***
Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Vrai] $x^2e^{1/x}$ est une primitive de $(2x-1)e^{1/x}$ sur $]-\infty, 0[$.
- ☐ [Faux] $\ln(|x|)$ est une primitive de $1/x$ sur $\mathbb{R}$.
- ☐ [Faux] $\ln(x^2 + x + 1)$ est une primitive de $\frac{2x}{x^2+x+1}$ sur $\mathbb{R}$.
- ☐ [Vrai] $e^x \ln(x)$ est une primitive de $e^x \ln(x) + e^x/x$ sur $]0, +\infty[$.

*Explications :* On calcule que $(x^2e^{1/x})' = 2xe^{1/x} + x^2(-1/x^2)e^{1/x} = (2x-1)e^{1/x}$. Ensuite, la fonction $x \mapsto \ln(x^2 + x + 1)$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ puisque $x^2 + x + 1 > 0$ pour tout nombre réel $x$. Mais on a : $(\ln(x^2 + x + 1))' = \frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1} = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas définie en $x = 0$ : il est donc impossible de lui déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ ($x \mapsto \ln(|x|)$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ seulement sur $\mathbb{R}^*$). Enfin, on calcule que $(e^x \ln(x))' = (e^x)' \ln(x) + e^x(\ln(x))' = e^x \ln(x) + e^x \cdot \frac{1}{x}$.

***Question 119***
Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Vrai] Une primitive de $\sin(x)e^{\cos(x)}$ est $-e^{\cos(x)}$.
- ☐ [Faux] Une primitive de $\cos(x^3+x)$ est $\sin(x^3+x)$.
- ☐ [Vrai] Une primitive de $\ln(x)$ est $x\ln(x)-x$ (sur $]0,+\infty[$).
- ☐ [Vrai] Une primitive de $4x^3+4x$ est $(x^2+1)^2$.

*Explications :* Une primitive de $\sin(x)e^{\cos(x)}$ est bien $-e^{\cos(x)}$ puisque $(-e^{\cos(x)})' = -(-\sin(x))e^{\cos(x)} = \sin(x)e^{\cos(x)}$. La dérivée de $\sin(x^3+x)$ est $(3x^2+1)\cos(x^3+x)$, donc $\sin(x^3+x)$ n'est pas une primitive de $\cos(x^3+x)$. Oui une primitive de $\ln(x)$ est $x\ln(x)-x$ puisque la dérivée de cette-dernière donne bien $\ln(x)+x\cdot\frac{1}{x}-1=\ln(x)$. Enfin, la dérivée de $(x^2+1)^2$ est $2\times 2x\times(x^2+1)=4x^3+4x$, donc $(x^2+1)^2$ est bien une primitive de $4x^3+4x$.

***Question 120***
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle. Soit $F$ une primitive de $f$. $C$ désigne une constante. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Vrai] Si $f(x)=0$ sur $I$ alors $F(x)=C$.
- ☐ [Faux] Si $f(x)=x$ alors $F(x)=x^2+C$.
- ☐ [Faux] Si $f(x)\times\cos(x)=1$ alors $F(x)=\frac{1}{\sin(x)}+C$.
- ☐ [Faux] Si $f(\ln(x))=0$ alors $F(x)=e^x+C$.

*Explications :* Si $f$ est la fonction nulle, alors $F$ est une fonction constante. Si $f(x)=x$, alors $F(x)=\frac{1}{2}x^2+C$. Les autres affirmations sont fantaisistes : lorsqu'on dérive $\frac{1}{\sin(x)}+C$ on obtient $\frac{-\cos(x)}{\sin^2(x)}$ qui n'est pas du tout l'inverse de $\cos(x)$. Et si $F(x)=e^x+C$, alors $f(x)=F'(x)=e^x$ ce qui donne $f(\ln(x))=e^{\ln(x)}=x\neq 0$ !

## 3.4 Notion d'équation différentielle | Facile

***Question 121***
On considère la fonction $f : x \mapsto 2e^{-x}+3$. Parmi les équations différentielles suivantes, quelles sont celles dont $f$ est solution ?

- ☐ [Vrai] $y'=-y+3$
- ☐ [Vrai] $y'=y-4e^{-x}-3$
- ☐ [Faux] $y'=2y+3$
- ☐ [Vrai] $y'=-2e^{-x}$

*Explications :* Pour vérifier si une fonction $f$ est solution d'une équation différentielle du premier ordre, on remplace $y$ par $f(x)$, $y'$ par $f'(x)$ et on regarde si l'égalité est vraie pour tout $x$ (égalité entre fonctions). Ici $f'(x)=-2e^{-x}$. Donc $f'(x)=-f(x)+3=f(x)-4e^{-x}-3$ pour tout réel $x$. Par contre $2f(x)+3$ n'est pas la même fonction que $f'(x)$.

***Question 122***
Parmi les fonctions suivantes, quelles sont celles qui sont solutions de l'équation différentielle $y'=2y-10$.

- ☐ [Vrai] $f : x\mapsto 4e^{2x}+5$

- ☐ [Vrai] $f : x \mapsto e^{2x} + 5$
- ☐ [Faux] $f : x \mapsto 2e^{x} + 5$
- ☐ [Faux] $f : x \mapsto 2x + 5$

*Explications :* Pour vérifier si une fonction $f$ est solution d'une équation différentielle du premier ordre, on remplace $y$ par $f(x)$, $y'$ par $f'(x)$ et on regarde si l'égalité est vraie pour tout $x$ (égalité entre fonctions). La dérivée de $e^{2x}$ étant $2e^{2x}$, on constate que l'égalité $f'(x) = 2f(x) - 10$ a seulement lieu pour $4e^{2x} + 5$ et $e^{2x} + 5$ parmi les solutions proposées.

***Question 123***

Parmi les fonctions suivantes quelles sont celles qui sont des solutions de l'équation différentielle $y' = xy$ ?

- ☐ [Faux] $f(x) = \exp(x^2)$
- ☐ [Vrai] $f(x) = 2\exp(x^2/2)$
- ☐ [Vrai] $f(x) = 0$
- ☐ [Faux] $f(x) = 1$

*Explications :* On calcule $f'(x)$ dans chaque cas et on observe si elle vérifie l'équation $f'(x) = xf(x)$. C'est le cas pour la fonction définie par $f(x) = 2\exp(x^2/2)$ (dont la dérivée est $f'(x) = 2x\exp(x^2/2)$) et pour $f(x) = 0$ (de dérivée $f'(x) = 0$).

***Question 124***

Soit la fonction $f(x) = \cos(x)$. De quelle(s) équation(s) différentielle(s) $f$ est-elle solution ?

- ☐ [Faux] $y' = y$
- ☐ [Vrai] $y'' = -y$
- ☐ [Vrai] $y' - y = -\sin(x) - \cos(x)$
- ☐ [Faux] $y'' = -y'$

*Explications :* D'une part $f'(x) = -\sin(x)$, donc $f'(x) - f(x) = -\sin(x) - \cos(x)$. D'autre part $f''(x) = -\cos(x)$, donc $f'' = -f$. En revanche, on a $f'(x) \neq f(x)$ et $f''(x) \neq -f'(x)$.

## 3.5 Notion d'équation différentielle | Moyen

***Question 125***

Soit l'équation différentielle $y' = 2x(y + x) - 1$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Vrai] $y = e^{x^2} - x$ est une solution.
- ☐ [Vrai] Cette équation différentielle n'a pas de solution constante.
- ☐ [Vrai] $y = -x$ est une solution.
- ☐ [Faux] $y = e^{x^2} - x + 1$ est une solution.

*Explications :* Pour une fonction constante $y = C$, $y' = 0$ et $2x(y + x) - 1 = 2x(C + x) - 1$, ce qui n'est pas la fonction nulle (c'est un polynôme du second degré), donc $y = C$ n'est pas solution. Pour $y = -x$, $2x(y + x) - 1 = -1 = y'$, donc $y = -x$ est solution. Pour $y = e^{x^2} - x$, $2x(y + x) - 1 = 2xe^{x^2} - 1 = y'$ donc $y = e^{x^2} - x$ est une solution. Pour $y = e^{x^2} - x + 1$, $y' = 2xe^{x^2} - 1$ et $2x(y + x) - 1 = 2xe^{x^2} + 2x - 1$ donc $y = e^{x^2} - x + 1$ n'est pas solution.

***Question 126***
Soit l'équation différentielle $xy' - 3y = 0$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Faux] $x^3 + 1$ est une solution.
- ☐ [Vrai] $x^3$ est une solution.
- ☐ [Faux] $e^{3x}$ est une solution.
- ☐ [Vrai] La fonction nulle est la seule solution constante.

*Explications :* Pour une solution constante $y = C$, $y' = 0$ donc $3y = 0$ donc $y$ est la fonction nulle (et réciproquement, la fonction nulle est bien solution). Pour $y = x^3$, $xy' - 3y = x \cdot 3x^2 - 3x^3 = 0$ donc $x^3$ est solution. Pour $y = x^3 + 1$, $xy' - 3y = x \cdot 3x^2 - 3x^3 - 3 = -3$ donc $x^3 + 1$ n'est pas solution. Pour $y = e^{3x}$, $xy' - 3y = x \cdot 3e^{3x} - 3e^{3x} = 3(x-1)e^{3x}$, ce qui n'est pas la fonction nulle, donc $y = e^{3x}$ n'est pas solution.

***Question 127***
Soit $f$ une solution de l'équation différentielle $y' = y^2 + 1$. Quelles sont les affirmations vraies sur la fonction $f$ ?

- ☐ [Vrai] $f$ est une fonction croissante.
- ☐ [Faux] $f$ est une fonction décroissante.
- ☐ [Vrai] $f'$ est une fonction positive.
- ☐ [Faux] $f$ peut être une fonction constante.

*Explications :* Si $f$ est solution de l'équation $y' = y^2 + 1$, alors on a $f'(x) = f^2(x) + 1$ et donc $f'(x) \geqslant 1 > 0$. Ainsi $f'$ est strictement positive, et par conséquent $f$ est strictement croissante.

***Question 128***
Soit l'équation différentielle $y' - 2xy = 4x$. Quelles sont les affirmations vraies concernant les solutions de cette équation ?

- ☐ [Vrai] $y = -2$ est une solution.
- ☐ [Faux] $y = +2$ est une solution.
- ☐ [Faux] $y = e^{x^2} + 2$ est une solution.
- ☐ [Vrai] $y = e^{x^2} - 2$ est une solution.

*Explications :* Si $y = C$ est constante, alors $y' = 0$ et on a $0 - 2x \cdot C = 4x$ donc $C = -2$ est la seule solution constante de notre équation différentielle. D'autre part, la dérivée de $e^{x^2}$ étant $2xe^{x^2}$, on vérifie en remplaçant dans l'équation différentielle que $e^{x^2} - 2$ est solution puisqu'alors $y' - 2xy = 2xe^{x^2} - 2x(e^{x^2} - 2) = 4x$. En revanche $e^{x^2} + 2$ n'est pas solution puisque $y' - 2xy = 2xe^{x^2} - 2x(e^{x^2} + 2) = -4x$.

## 3.6 Notion d'équation différentielle | Difficile

***Question 129***
Soit $f$ une solution de l'équation différentielle $y' = 2y - x^3$. On sait que la courbe représentative de $f$ passe par le point $A(1, 2)$. Quelle est la pente de sa tangente au point $A$ ?

- ☐ [Faux] $-1$
- ☐ [Faux] $1$

- ☐ [Faux] 2
- ☐ [Vrai] 3

*Explications :* La pente de la tangente au point $A(1,2)$ est le nombre $f'(1)$. Or on sait que $f(1)=2$ puisque la courbe représentative de $f$ passe par $A(1,2)$. De plus, comme $f$ est solution de l'équation différentielle $y'=2y-x^3$, on a - en considérant cette égalité pour la fonction $f$ et pour $x=1$ : $f'(1)=2f(1)-1^3=2\times 2-1=3$.

***Question 130***

Soit $f$ une solution de l'équation différentielle $y'=y+3x$. On sait de plus que la courbe représentative de $f$ passe par le point $A(-1,2)$. Quelles sont les affirmations exactes ?

- ☐ [Vrai] La pente de la tangente à la courbe de $f$ au point $A$ est $-1$.
- ☐ [Faux] La pente de la tangente à la courbe de $f$ au point $A$ est 4.
- ☐ [Vrai] La tangente à la courbe de $f$ au point $A$ admet pour équation : $y=-x+1$.
- ☐ [Faux] La tangente à la courbe de $f$ au point $A$ admet pour équation : $y=4x+6$.

*Explications :* La pente de la tangente au point $A(-1,2)$ est le nombre $f'(-1)$. Or on sait que $f(-1)=2$ puisque la courbe représentative de $f$ passe par $A(-1,2)$. De plus, comme $f$ est solution de l'équation différentielle $y'=y+3x$, en considérant cette égalité pour la fonction $f$ et pour $x=-1$, on a : $f'(-1)=f(-1)+3\times(-1)=2-3=-1$. La pente de la tangente en $A$ est donc $-1$. Enfin, les coordonnées du point $A$ vérifient l'équation de cette tangente, ce qui permet d'obtenir que l'ordonnée à l'origine vaut bien $+1$ (on sait aussi plus directement que l'équation de la tangente est $y=(-1)(x-(-1))+1=-x+1$).

***Question 131***

Soit l'équation différentielle $xy'=y-x$ définie pour $x\in]0,+\infty[$. Quelles sont les fonctions solutions de cette équation, quelle que soit la constante $C$ ?

- ☐ [Faux] $f(x)=x-C\ln(x)$
- ☐ [Faux] $f(x)=x-\ln(x)+C$
- ☐ [Vrai] $f(x)=Cx-x\ln(x)$
- ☐ [Faux] $f(x)=x-C$

*Explications :* Seule la fonction $f(x)=Cx-x\ln(x)$, avec $f'(x)=C-\ln(x)-1$, vérifie l'équation différentielle. On a en effet $xf'(x)=Cx-x\ln(x)-x=f(x)-x$. Pour les autres fonctions proposées, les calculs de $xf'(x)$ et de $f(x)-x$ diffèrent.

***Question 132***

Soit $f$ une solution de l'équation différentielle $y'=\cos(x)y$, vérifiant $f(\frac{\pi}{3})=3$. On considère la courbe représentative de $f$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Faux] La tangente en $x=\frac{\pi}{3}$ a pour équation $y=\frac{3}{2}x+3$.
- ☐ [Vrai] La tangente en $x=\frac{\pi}{3}$ a pour équation $y=\frac{3}{2}(x-\frac{\pi}{3})+3$.
- ☐ [Vrai] La tangente en $x=\frac{\pi}{2}$ est horizontale.
- ☐ [Faux] La tangente en $x=\frac{\pi}{3}$ est horizontale.

*Explications :* En $x=\frac{\pi}{2}$, par l'équation différentielle on a $f'(\frac{\pi}{2})=0$ (car $\cos\frac{\pi}{2}=0$), donc la tangente est horizontale. En $x=\frac{\pi}{3}$, on obtient $f'(\frac{\pi}{3})=\cos(\frac{\pi}{3})y(\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}\times 3=\frac{3}{2}$, donc la pente de la tangente en $x=\frac{\pi}{3}$ est $\frac{3}{2}$. Cette tangente passe par le point $(\frac{\pi}{3},3)$ donc son équation est $y=\frac{3}{2}(x-\frac{\pi}{3})+3$.

### 3.7 $y' = ay$ | Facile

***Question 133***
Les solutions de l'équation différentielle $y' = -y$ sont :

- ☐ [Faux] $e^{-x} + C$ avec $C$ constante réelle.
- ☐ [Faux] $e^{x} + C$ avec $C$ constante réelle.
- ☐ [Vrai] $Ce^{-x}$ avec $C$ constante réelle.
- ☐ [Faux] $Ce^{x}$ avec $C$ constante réelle.

*Explications :* Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ sont les fonctions $Ce^{ax}$ avec $C$ constante réelle. Ici, $a = -1$.

***Question 134***
Les solutions de l'équation différentielle $y' + 2y = 0$ sont :

- ☐ [Faux] $e^{-2x} + C$ avec $C$ constante réelle.
- ☐ [Faux] $e^{2x} + C$ avec $C$ constante réelle.
- ☐ [Faux] $Ce^{2x}$ avec $C$ constante réelle.
- ☐ [Vrai] $Ce^{-2x}$ avec $C$ constante réelle.

*Explications :* Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ sont les fonctions $Ce^{ax}$ avec $C$ constante réelle. Ici, $a = -2$ puisque $y' + 2y = 0$ se réécrit comme $y' = -2y$.

***Question 135***
De quelle(s) équation(s) différentielle(s) $4e^{3x}$ est-elle une solution ?

- ☐ [Vrai] $y' = 3y$
- ☐ [Faux] $3y' = y$
- ☐ [Faux] $y' = 4y$
- ☐ [Faux] $4y' = y$

*Explications :* Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ sont les fonctions $Ce^{ax}$ avec $C$ constante réelle. Ici, $a = 3$ et $C = 4$.

***Question 136***
Parmi les fonctions suivantes, quelles sont celles solutions de l'équation différentielle $y' = 3y$ ?

- ☐ [Faux] $f(x) = 3e^{2x}$
- ☐ [Vrai] $f(x) = 2e^{3x}$
- ☐ [Faux] $f(x) = e^{-3x}$
- ☐ [Faux] $f(x) = e^{-2x}$

*Explications :* La forme générale des solutions est $y(x) = Ce^{3x}$ où $C$ est une constante réelle.

***Question 137***
Parmi les fonctions suivantes, quelles sont celles solutions de l'équation différentielle $y' = \frac{1}{e}y$ ?

- ☐ [Vrai] $f(x) = C\exp(x/e)$

- ☐ [Faux] $f(x) = C\exp(ex)$
- ☐ [Faux] $f(x) = Ce\exp(x)$
- ☐ [Faux] $f(x) = C\frac{\exp(x)}{e}$

*Explications :* La forme générale des solutions de $y' = ay$ est $y(x) = C\exp(ax) = Ce^{ax}$. Ici $a = \frac{1}{e}$, donc la forme générale des solutions est $y(x) = C\exp(x/e)$.

## 3.8 $y' = ay$ | Moyen

***Question 138***
Que peut-on dire des solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ ?

- ☐ [Faux] Ce sont toutes des fonctions croissantes sur $\mathbb{R}$.
- ☐ [Faux] Ce sont toutes des fonctions décroissantes sur $\mathbb{R}$.
- ☐ [Faux] Si $a \geqslant 0$, ce sont des fonctions croissantes sur $\mathbb{R}$.
- ☐ [Vrai] Ce sont toutes des fonctions monotones sur $\mathbb{R}$.

*Explications :* Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ sont les fonctions $Ce^{ax}$ avec $C$ constante réelle. Si $a \geqslant 0$, ce sont des fonctions croissantes pour $C \geqslant 0$ et décroissantes pour $C \leqslant 0$. Si $a \leqslant 0$, ce sont des fonctions décroissantes pour $C \geqslant 0$ et croissantes pour $C \leqslant 0$. Dans tous les cas, ce sont toutes des fonctions monotones sur $\mathbb{R}$.

***Question 139***
Soit $f : x \mapsto -2e^{3x}$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Faux] $f$ est la seule solution de l'équation différentielle $y' = 3y$ dont la courbe représentative passe par le point $A(0, 3)$.
- ☐ [Faux] $f$ est la seule solution de l'équation différentielle $y' = 3y$ qui tend vers $-\infty$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.
- ☐ [Vrai] $f$ est la seule solution de l'équation différentielle $y' = 3y$ valant $-2$ en $x = 0$.
- ☐ [Vrai] $f$ est la seule solution de l'équation différentielle $y' = 3y$ dont la dérivée en $x = 0$ est $-6$.

*Explications :* Les solutions de l'équation différentielle $y' = 3y$ sont les fonctions $f_C : x \mapsto Ce^{3x}$ avec $C$ constante réelle. $f = f_{-2}$ est donc bien solution de $y' = 3y$. $f_C(0) = C$ : la valeur de la constante $C$ correspond à la valeur de la fonction en $x = 0$. Ainsi $f(x) = -2e^{3x}$ est bien la seule solution valant $-2$ en $x = 0$. Par contre, $f(0) \neq 3$ donc sa courbe représentative ne passe pas par $A(0, 3)$. Puisque d'après l'équation différentielle on a $f_C'(0) = 3f_C(0) = 3C$, alors $f$ est la seule solution telle que $f_C'(0) = -6$ car cela impose $C = -2$. Enfin, dès que $C < 0$, $Ce^{3x}$ tend vers $-\infty$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$ donc $f$ n'est pas la seule fonction ayant cette propriété.

***Question 140***
Soit l'équation différentielle $y' + 5y = 0$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Vrai] Les solutions générales sont $y(x) = Ce^{-5x}$.
- ☐ [Faux] Les solutions générales sont $y(x) = Ce^{5x}$.
- ☐ [Faux] La solution vérifiant $y(1) = 0$ est $y(x) = e^{-5x}$.
- ☐ [Faux] La solution vérifiant $y(1) = 0$ est $y(x) = e^{5x}$.

*Explications :* Les solutions générales sont $y(x) = Ce^{-5x}$. Si $y(1) = 0$ alors $C = 0$ et $y$ est la solution nulle partout.

***Question 141***
Pour quelles valeurs de $a$ et $b$ la fonction $y(x) = 7e^{-5x}$ est-elle solution de $y' = ay$ avec $y(0) = b$ ?

- ☐ [Vrai] $a = -5$ et $b = 7$
- ☐ [Faux] $a = 5$ et $b = 7$
- ☐ [Faux] $a = 5$ et $b = 0$
- ☐ [Faux] $a = 0$ et $b = 7$

*Explications :* La solution de $y' = ay$ vérifiant $y(0) = b$ est $y(x) = be^{ax}$. Donc on identifie : $a = -5$ et $b = 7$.

## 3.9 $y' = ay$ | Difficile

***Question 142***
Soit $f$ la solution de l'équation différentielle $y' + 3y = 0$ telle que $f'(0) = -6$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Vrai] La courbe représentative de $f$ passe par $A(0,2)$.
- ☐ [Faux] La courbe représentative de $f$ passe par $A(0,-6)$.
- ☐ [Faux] $f$ est toujours négative.
- ☐ [Vrai] $f$ est une fonction décroissante sur $\mathbb{R}$.

*Explications :* Comme $f$ est solution de l'équation différentielle, $f'(0) + 3f(0) = 0$ donc $f(0) = 2$ donc la courbe représentative de $f$ passe par le point de coordonnées $(0,2)$ et ne passe pas par celui de coordonnées $(0,-6)$. De plus, $f(x) = 2e^{-3x}$ et $f'(x) = -6e^{-3x}$ donc $f$ est toujours positive et $f'$ est toujours négative. Par conséquent $f$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

***Question 143***
Soit $f$ la solution de l'équation différentielle $y' = 4y$ telle que $f(1) = e^4$.

- ☐ [Vrai] La courbe représentative de $f$ passe par le point $A(1,e^4)$.
- ☐ [Vrai] La courbe représentative de $f$ passe par le point $B(0,1)$.
- ☐ [Faux] La pente de la tangente à la courbe de $f$ en $x = 1$ est 4.
- ☐ [Faux] On n'a pas assez de données pour déterminer la pente de la tangente à la courbe de $f$ en $x = 0$.

*Explications :* Les solutions de l'équation différentielle $y' = 4y$ sont les fonctions $Ce^{4x}$ avec $C$ constante réelle. Comme on a $f(1) = e^4$, on obtient que $C = 1$ et donc $f(x) = e^{4x}$. Par conséquent la courbe représentative de $f$ passe par les points $A$ et $B$. De plus $f'(1) = 4f(1) = 4e^4$ et $f'(0) = 4$, ce qui donne la pente de la tangente à la courbe en $x = 1$ et $x = 0$ respectivement.

***Question 144***
Soit l'équation différentielle $y' = ay$ avec $a > 0$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Faux] Il n'y a pas de solutions constantes.

- ☐ [Vrai] Il y a une seule solution constante.
- ☐ [Faux] Toute solution vérifie $y(x) \geqslant 0$.
- ☐ [Vrai] Toute solution $y(x)$ tend vers 0 lorsque $x$ tend vers $-\infty$.

*Explications :* Les solutions générales sont $y(x) = Ce^{ax}$. La solution est constante dans le seul cas où $C = 0$ ($y$ est alors la solution partout nulle). Puisque $a > 0$, on sait que $Ce^{ax}$ tend vers 0 lorsque $x$ tend vers $-\infty$. Attention, si $C < 0$ alors la fonction $y$ est strictement négative et décroissante.

***Question 145***
Soit la solution de l'équation différentielle $y' = 2y$ vérifiant $y(0) = -1$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Vrai] La solution est toujours négative.
- ☐ [Vrai] La solution est une fonction décroissante.
- ☐ [Faux] La pente de la tangente en $x = 0$ vaut 1.
- ☐ [Vrai] La pente de la tangente en $x = 1$ vaut $-2e^2$.

*Explications :* Les solutions générales sont $y(x) = Ce^{2x}$. Comme $y(0) = -1$ alors $C = -1$. La solution est donc $f(x) = -e^{2x}$. La pente de la tangente en $x_0$ est donnée par $f'(x_0)$. Comme $f(0) = -1$ alors $f'(0) = -2$, la pente de la tangente en $x = 0$ vaut $-2$. De façon générale, comme $f(x) = -e^{2x}$, alors $f'(x) = -2e^{2x}$ qui est une fonction toujours négative : ainsi $f$ est une fonction décroissante. La pente de sa tangente en $x = 1$ vaut bien $f'(1) = -2e^2$.

## 3.10 $y' = ay + b$ et $y' = ay + f$ | Facile

***Question 146***
Soit l'équation différentielle $2y' + 4y = 3$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Faux] La seule solution constante est $y = 3/2$.
- ☐ [Vrai] La seule solution constante est $y = 3/4$.
- ☐ [Faux] Les solutions sont $Ce^{-4x} - 3$ avec $C$ constante réelle.
- ☐ [Vrai] Les solutions sont $Ce^{-2x} + 3/4$ avec $C$ constante réelle.

*Explications :* La seule solution constante est $y = 3/4$ : c'est ce qu'on retrouve dans l'équation différentielle lorsqu'on cherche $y$ constante avec donc $y' = 0$ : l'équation devient $2y = 3/2$ donc $y = 3/4$. On peut réécrire l'équation différentielle $y' = -2y + 3/2$, dont les solutions sont $Ce^{-2x} + 3/4$ avec $C$ constante réelle.

***Question 147***
Soit l'équation différentielle $3y' = y - 3$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Faux] La seule solution constante est $y = 1$.
- ☐ [Vrai] La seule solution constante est $y = 3$.
- ☐ [Faux] Les solutions sont $Ce^{3x} + 1$ avec $C$ constante réelle.
- ☐ [Vrai] Les solutions sont $Ce^{x/3} + 3$ avec $C$ constante réelle.

*Explications :* La seule solution constante est $y = 3$ : c'est ce qu'on retrouve dans l'équation différentielle lorsqu'on cherche $y$ constante avec donc $y' = 0$ : l'équation devient $y - 3 = 0$ donc $y = 3$. On peut réécrire l'équation différentielle $y' = \frac{1}{3}y - 1$, dont les solutions sont $Ce^{x/3} + 3$ avec $C$ constante réelle.

***Question 148***
Soit $f(x) = e^x + 3$. De quelle(s) équations(s) différentielle(s) cette fonction est-elle solution ?

- ☐ [Faux] $y' - y = e^x$
- ☐ [Vrai] $y' = y - 3$
- ☐ [Faux] $3y' - y = 0$
- ☐ [Faux] $y' - 3y = 0$

*Explications :* Lorsqu'on dérive $f$, on obtient $f'(x) = e^x = (e^x + 3) - 3 = f(x) - 3$ : ainsi $f$ est solution de l'équation différentielle $y' = y - 3$. On vérifie en remplaçant dans les autres équations différentielles $y$ par $f$ (et $y'$ par $f'$) que les égalités ne sont pas vérifiées, donc que $f$ n'est pas une solution.

***Question 149***
Soit l'équation différentielle $y' = 2y + \cos(x)$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Faux] Les solutions de l'équation homogène associée sont les $y(x) = C\sin(x)$.
- ☐ [Faux] Les solutions de l'équation homogène associée sont les $y(x) = C\cos(x)$.
- ☐ [Vrai] Une solution particulière est $y(x) = \frac{1}{5}\sin(x) - \frac{2}{5}\cos(x)$.
- ☐ [Faux] Une solution particulière est $y(x) = e^{2x}$.

*Explications :* L'équation homogène est $y' = 2y$, dont les solutions sont les $y_h(x) = Ce^{2x}$. Une solution particulière de l'équation $y' = 2y + \cos(x)$ est $y_p(x) = \frac{1}{5}\sin(x) - \frac{2}{5}\cos(x)$. Les solutions générales sont alors $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$.

***Question 150***
Soit l'équation différentielle $y' = 2y - 2x + 1$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Faux] La seule solution constante est $y(x) = x - \frac{1}{2}$.
- ☐ [Vrai] $y(x) = x$ est une solution particulière.
- ☐ [Vrai] $y(x) = 3e^{2x} + x$ est une solution particulière.
- ☐ [Faux] $y(x) = x^2$ est une solution particulière.

*Explications :* Si l'on recherche une solution constante $y = C$, avec donc $y' = 0$, on obtient dans l'équation différentielle $0 = 2C - 2x + 1$ et donc $C = x - \frac{1}{2}$. Mais ceci n'est pas une constante ! Donc il n'existe aucune solution constante. Pour $f(x) = x$ et $f'(x) = 1$, on constate en remplaçant que $f$ est bien solution de l'équation différentielle puisque $f' = 1 = 2x - 2x + 1$. Il en va de même pour $f(x) = 3e^{2x} + x$, avec $f'(x) = 6e^{2x} + 1$ puisque $6e^{2x} + 1 = 2(3e^{2x} + x) - 2x + 1$. En revanche, pour $f(x) = x^2$, et donc $f'(x) = 2x$, l'équation différentielle n'est pas vérifiée puisque $2x \neq 2x^2 - 2x + 1$.

## 3.11 $y' = ay + b$ et $y' = ay + f$ | Moyen

***Question 151***
Quelles sont les valeurs de $a$, $b$ et $c$ telles que $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ soit solution de l'équation différentielle $y' + 2y = 4x^2 + 2x - 1$ ?

- ☐ [Faux] $a = 4$, $b = 2$, $c = -1$
- ☐ [Vrai] $a = 2$, $b = -1$, $c = 0$
- ☐ [Faux] $a = 2$, $b = -1$, $c = -1$

☐ [Faux] $a = 4$, $b = -3$, $c = 1$

*Explications :* On a $f'(x) = 2ax + b$ donc $f'(x) + 2f(x) = 2ax^2 + (2a + 2b)x + b + 2c$. Ce polynôme doit être égal à $4x^2 + 2x - 1$. On calcule alors $a$, $b$ et $c$ en identifiant les coefficients : $2a = 4$ ; $2a + 2b = 2$ ; $b + 2c = -1$. On obtient $a = 2$, puis $b = 1 - a = -1$, et enfin $c = (-1 - b)/2 = 0$.

***Question 152***

Parmi les fonctions suivantes, quelles sont celles qui sont solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = 2y + e^{2x}$ et qui valent 2 en $x = 0$ :

☐ [Faux] $x \mapsto 2e^{2x}$

☐ [Faux] $x \mapsto xe^{2x}$

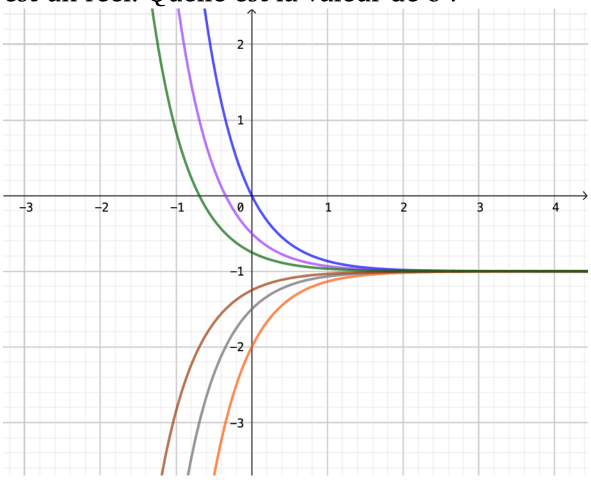
☐ [Faux] $x \mapsto xe^{2x} + 2$

☐ [Vrai] $x \mapsto (x + 2)e^{2x}$

*Explications :* On peut éliminer la fonction $x \mapsto xe^{2x}$ qui ne prend pas la valeur 2 en $x = 0$ contrairement aux trois autres. On calcule ensuite la dérivée des autres fonctions proposées et on remplace $y$ et $y'$ dans l'équation différentielle pour identifier celle qui est solution : la seule qui soit solution de notre équation différentielle est $x \mapsto (x + 2)e^{2x}$. Rappel : la dérivée du produit de deux fonctions $u$ et $v$ est $u'v + uv'$. Ainsi $[(x + 2)e^{2x}]' = e^{2x} + 2(x + 2)e^{2x}$.

***Question 153***

Le graphique ci-dessous représente plusieurs solutions de l'équation différentielle $y' + 2y = b$, où $b$ est un réel. Quelle est la valeur de $b$ ?




☐ [Vrai] $b = -2$

☐ [Faux] $b = -1$

☐ [Faux] $b = 1/2$

☐ [Faux] $b = 1$

*Explications :* L'équation différentielle peut s'écrire $y' = ay + b$ avec $a = -2$ donc ses solutions sont les fonctions $x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a} = Ce^{-2x} + \frac{b}{2}$. De plus $\lim_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0$ donc $b/2$ est la limite des solutions lorsque $x$ tend vers $+\infty$. On lit graphiquement que cette limite vaut $-1 = b/2$ donc on en déduit que $b = -2$.

***Question 154***

Soit l'équation différentielle $y' + y = e^x$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Faux] Les solutions de l'équation homogène associée sont $y(x) = Ce^x$.
- ☐ [Faux] Une solution particulière est $y(x) = e^{-x}$.
- ☐ [Vrai] La solution vérifiant $y(0) = 1$ est $y(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.
- ☐ [Faux] La solution vérifiant $y(1) = 1$ est $y(x) = e \cdot e^{-x}$.

*Explications :* L'équation homogène est $y' + y = 0$, dont les solutions sont les $y_h(x) = Ce^{-x}$. Pour aller plus loin : une solution particulière de l'équation $y' + y = e^x$ est $y_p(x) = \frac{1}{2}e^x$ ; les solutions générales sont alors $y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ce^{-x} + \frac{1}{2}e^x$.

***Question 155***
Soit l'équation différentielle $y' = y + x^2 - 1$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Faux] Les solutions de l'équation homogène associée sont $y(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + C$.
- ☐ [Faux] Les solutions de l'équation homogène associée sont $y(x) = Ce^{x^2-1}$.
- ☐ [Faux] Une solution particulière est $y(x) = e^x$.
- ☐ [Vrai] Une solution particulière est $y(x) = -x^2 - 2x - 1$.

*Explications :* L'équation homogène est $y' = y$, dont les solutions sont les $y_h(x) = Ce^x$. Une solution particulière de l'équation $y' = y + x^2 - 1$ est $y_p(x) = -x^2 - 2x - 1$. Les solutions générales sont alors $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$.

***Question 156***
On considère l'équation différentielle $y' + y = 2x^2(x+3)$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Faux] Il existe un nombre réel $r$ tel que $y(x) = e^{rx}$ soit une solution particulière.
- ☐ [Vrai] Il existe deux nombres entiers $k$ et $n$ tels que $y(x) = kx^n$ soit une solution particulière.
- ☐ [Faux] $y(x) = e^{-x} + 2x^3$ est une solution particulière vérifiant $y(0) = 0$.
- ☐ [Faux] $y(x) = -2e^{-x} + 2x^3$ est une solution particulière vérifiant $y(0) = 0$.

*Explications :* Si l'on cherche une solution sous la forme $y(x) = kx^n$, on a $y'(x) = knx^{n-1}$. En remplaçant dans l'équation différentielle, on obtient alors (en développant) : $knx^{n-1} + kx^n = 6x^2 + 2x^3$. En identifiant, on vérifie que l'égalité est vraie pour $k = 2$ et $n = 3$. Ainsi $f(x) = 2x^3$ est une solution particulière. En revanche, si on cherche une solution sous la forme $f(x) = e^{rx}$, alors $f'(x) = re^{rx}$, et en remplaçant on obtient $(r+1)e^{rx} = 2x^2(x+3)$ ce qui est impossible (un côté est une exponentielle et l'autre un polynôme). Enfin, on vérifie que les fonctions $y(x) = e^{-x} + 2x^3$ et $y(x) = -2e^{-x} + 2x^3$ sont bien solutions de notre équation différentielle, mais aucune des deux ne vaut 0 en $x = 0$ (elles valent respectivement 1 et $-2$).

***Question 157***
Soit $(E)$ l'équation différentielle $y' + 5y = 5x^2 + 2x$. Alors :

- ☐ [Faux] Si $f$ est solution de $(E)$, alors la fonction $x \mapsto f(x) - 5x^2 - 2x$ est solution de l'équation différentielle $(H)$ : $y' + 5y = 0$.
- ☐ [Vrai] Si $f$ est solution de $(E)$, alors la fonction $x \mapsto f(x) - x^2$ est solution de l'équation différentielle $(H)$ : $y' + 5y = 0$.
- ☐ [Faux] Si $f$ est solution de $(E)$, alors la fonction $x \mapsto f(x) - e^{-5x}$ est solution de l'équation différentielle $(H)$ : $y' + 5y = 0$.

- ☐ [Faux] Si $f$ est solution de $(E)$, alors la fonction $x \mapsto f(x) - 2x$ est solution de l'équation différentielle $(H) : y' + 5y = 0$.

*Explications :* Si $f$ est solution de $(E)$, alors $f'(x)+5f(x) = 5x^2+2x$. On calcule alors que : $(f(x)-x^2)'+5(f(x)-x^2) = f'(x)-2x+5f(x)-5x^2 = f'(x)+5f(x)-2x-5x^2 = 5x^2+2x-2x-5x^2 = 0$. Ainsi la fonction $x \mapsto (f(x)-x^2)$ est bien solution de $(H)$. En revanche, lorsqu'on remplace dans $y'+5y$ avec les fonctions $x \mapsto f(x)-5x^2-2x$, $x \mapsto f(x)-e^{-5x}$ et $x \mapsto f(x)-2x$ (toujours en utilisant le fait que $f'(x)+5f(x)$ peut être remplacé par $5x^2+2x$) on ne trouve pas 0.

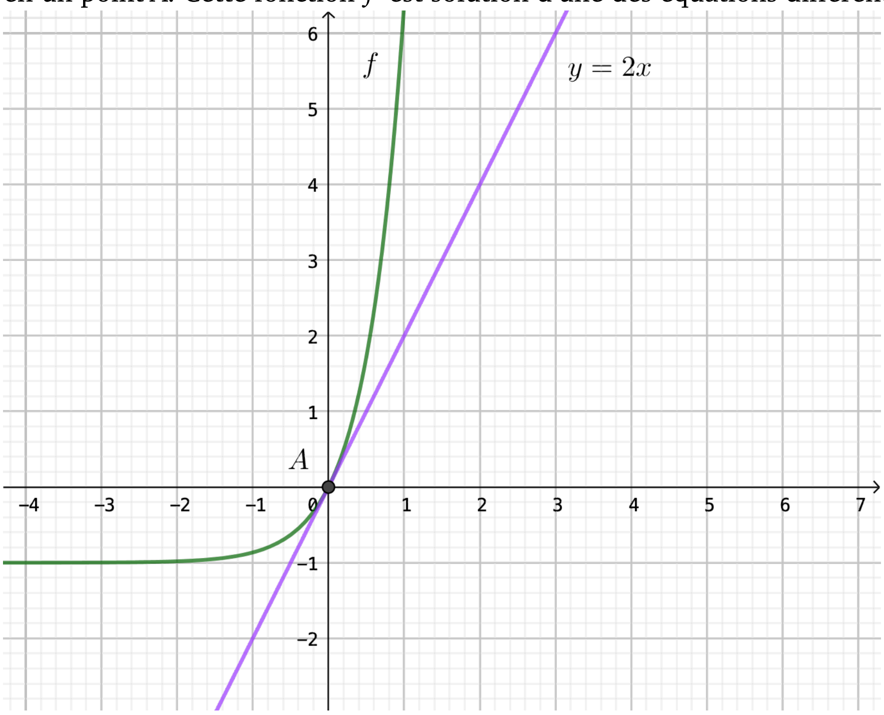
**_Question 158_**
Soit l'équation différentielle $y' = y + 2e^{3x} + 4xe^{3x}$. On recherche une solution particulière sous la forme $f(x) = axe^{bx}$. Quelles doivent être les valeurs de $a$ et $b$ ?

- ☐ [Faux] $a = 4$, $b = 3$
- ☐ [Vrai] $a = 2$, $b = 3$
- ☐ [Faux] $a = 1$, $b = 3$
- ☐ [Faux] $a = 1$, $b = 4$

*Explications :* On calcule qu'avec la forme voulue, on a $f'(x) = ae^{bx} + abxe^{bx}$. Ainsi en remplaçant dans l'équation différentielle, on obtient : $ae^{bx} + abxe^{bx} = axe^{bx} + 2e^{3x} + 4xe^{3x}$, ce qu'on peut écrire $(a+a(b-1)x)e^{bx} = (2+4x)e^{3x}$ pour y voir plus clair. On peut donc identifier dans l'exposant de l'exponentielle que $b = 3$. Puis cela donne pour le polynôme qui accompagne les exponentielles $a+2ax = 2+4x$, et donc $a = 2$.

## 3.12 $y' = ay + b$ et $y' = ay + f$ | Difficile

**_Question 159_**
Le graphique ci-dessous représente la courbe représentative d'une fonction $f$ ainsi que sa tangente en un point $A$. Cette fonction $f$ est solution d'une des équations différentielles suivantes ; laquelle ?




- ☐ [Faux] $y' = 2x$

- ☐ [Faux] $y' = y + 1$
- ☐ [Vrai] $y' = 2y + 2$
- ☐ [Faux] $y' = 2y - 2$

*Explications :* On a $f(0) = 0$ et $f'(0) = 2$ puisqu'il s'agit de la pente de la tangente à la courbe de $f$ au point d'abscisse $x = 0$. Ceci élimine toutes les réponses proposées sauf $y' = 2y + 2$. De fait, la courbe représentative donnée est celle de $x \mapsto e^{2x} - 1$ qui en est bien une solution.

***Question 160***
Soit $f$ une fonction dont la courbe représentative admet pour tangente en $x = -1$ la droite d'équation $y = 2x - 2$. Parmi les équations différentielles suivantes, quelle est la seule dont $f$ peut être une solution ?

- ☐ [Faux] $y' = y + e^x$
- ☐ [Vrai] $y' = -y + 2x$
- ☐ [Faux] $y' = 2y + 3x^3$
- ☐ [Faux] $2y' - y = 2$

*Explications :* Sur la droite $y = 2x - 2$, le point d'abscisse $x = -1$ est $A(-1, -4)$ donc $f(-1) = -4$. De plus, la pente de la droite est 2, donc $f'(-1) = 2$. Parmi les équations différentielles proposées, $y' = -y + 2x$ est la seule qui permet d'obtenir ces deux valeurs (on remplace $y$ par $f$, $y'$ par $f'$, et on évalue tout cela en $x = -1$).

***Question 161***
Soit l'équation différentielle $2y' = 3y + 1$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Faux] Il y a au moins une solution dont la limite en $-\infty$ est 0.
- ☐ [Vrai] La solution vérifiant $y(0) = 0$ est $y(x) = \frac{1}{3}(e^{\frac{3}{2}x} - 1)$.
- ☐ [Faux] La solution vérifiant $y(0) = 0$ est $y(x) = 0$.
- ☐ [Faux] La solution vérifiant $y(0) = 0$ est $y(x) = e^{\frac{3}{2}x} - 1$.

*Explications :* Notre équation différentielle peut se réécrire sous la forme $y' = \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}$. Les solutions d'une équation diffférentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions $x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$. Donc ici les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions $f(x) = Ce^{\frac{3}{2}x} - \frac{1}{3}$. La solution vérifiant $y(0) = 0$ est $y_0(x) = \frac{1}{3}e^{\frac{3}{2}x} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}(e^{\frac{3}{2}x} - 1)$. Enfin, puisque la limite de $e^{\frac{3}{2}x}$ en $-\infty$ est nulle, la limite de toutes les fonctions solutions en $-\infty$ sera $-\frac{1}{3}$.

***Question 162***
Soit l'équation différentielle $y' = y + 3x - 2$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Vrai] Une solution particulière est $y(x) = -3x - 1$.
- ☐ [Faux] Une solution particulière est $y(x) = 3x - 2$.
- ☐ [Vrai] La solution vérifiant $y(0) = 1$ est $y(x) = 2e^x - 3x - 1$.
- ☐ [Faux] La solution vérifiant $y(0) = 1$ est $y(x) = 3e^x + 3x - 2$.

*Explications :* L'équation homogène est $y' = y$, dont les solutions sont les $y_h(x) = Ce^x$. Une solution particulière de l'équation $y' = y + 3x - 2$ est $y_p(x) = -3x - 1$. Les solutions générales sont alors $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$. La solutions vérifiant $y(0) = 1$ est $y_0(x) = 2e^x - 3x - 1$.

***Question 163***

Soit $f$ une solution de l'équation différentielle $(H)$ : $y' = 4y$. De quelle équation différentielle la fonction $g : x \mapsto f(x) + e^{2x}$ sera-t-elle solution ?

- ☐ [Faux] $y' = 4y + e^{2x}$
- ☐ [Faux] $y' - 4y = 4e^{2x}$
- ☐ [Vrai] $y' = 4y - 2e^{2x}$
- ☐ [Faux] $y' = 2y$

*Explications :* Si $f$ est solution de $(H)$, alors $f'(x) = 4f(x)$. On calcule alors la dérivée de $g$ : $g'(x) = f'(x) + 2e^{2x}$. Mais on a alors : $g'(x) = 4f(x) + 2e^{2x} = 4f(x) + 4e^{2x} - 2e^{2x} = 4(f(x) + e^{2x}) - 2e^{2x} = 4g(x) - 2e^{2x}$. De ce fait, $g$ est solution de $y' = 4y - 2e^{2x}$. On pouvait aussi exploiter le fait que $f(x)$ s'écrit sous la forme $Ce^{4x}$ et tenter de remplacer directement dans chacune des équations différentielles les expressions de $g$ et de $g'$ pour voir quelle égalité était vérifiée.