Année 2022

QCM DE MATHÉMATIQUES - LILLE

Répondre en cochant la ou les cases correspondant à des assertions vraies (et seulement celles-ci).

Ces questions ont été écrites par Arnaud Bodin, Barnabé Croizat et Christine Sacré de l'université de Lille. Relecture de Guillemette Chapuisat, Abdelkader Necer et Pascal Romon.

Ce travail a été effectué en 2021-2022 dans le cadre d'un projet Hilisit porté par Unisciel.

Logique

Arnaud Bodin, Barnabé Croizat, Christine Sacré

1 Logique, ensembles et raisonnements

1.1 Logique | Facile

Question 1
Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ Il existe des triangles rectangles.
- ☐ Tout triangle est un triangle rectangle.
- ☐ Tout triangle équilatéral est isocèle.
- ☐ Il existe un triangle équilatéral qui est rectangle.

Question 2
Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ Si $\cos\theta = 0$ alors $\theta = \frac{\pi}{2}$.
- ☐ Si $\theta \in [0, \pi]$ alors $0 \leqslant \cos\theta \leqslant 1$.
- ☐ Si $\theta = 0$ alors $\sin\theta = 0$.
- ☐ Si $\theta \in [0, \pi]$ et $\sin\theta = 0$ alors ($\theta = 0$ ou $\theta = \pi$).

Question 3
Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ Le chiffre des unités de tout entier pair est 0, 2, 4, 6 ou 8.
- ☐ Le chiffre des unités de tout entier multiple de 3 est 3, 6 ou 9.
- ☐ Le chiffre des unités de tout entier multiple de 4 est 4 ou 8.
- ☐ Le chiffre des unités de tout entier multiple de 5 est 0 ou 5.

Question 4
Soient x, y des nombres réels. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ Si $x = -5$ alors $x^2 = 25$.
- ☐ Si $x^2 = 25$ alors $x = 5$.
- ☐ Si $xy = 0$ alors $x = 0$ ou $y = 0$.
- ☐ Si $xy = 0$ alors $x = 0$ et $y = 0$.

1.2 Logique | Moyen

Question 5
Soit $\mathscr{P}$ une assertion vraie et $\mathscr{Q}$ une assertion fausse. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\mathscr{P}$ ou $\mathscr{Q}$
- ☐ $\mathscr{Q}$ et $\mathscr{P}$
- ☐ $\mathscr{P}$ ou non($\mathscr{Q}$)
- ☐ $\mathscr{Q}$ ou non($\mathscr{P}$)

Question 6
On considère l'assertion "non($\mathscr{P}$) et $\mathscr{Q}$". Quand est-ce que cette assertion est vraie ?

- ☐ Si $\mathscr{P}$ vraie et $\mathscr{Q}$ vraie.
- ☐ Si $\mathscr{P}$ vraie et $\mathscr{Q}$ fausse.
- ☐ Si $\mathscr{P}$ fausse et $\mathscr{Q}$ vraie.
- ☐ Si $\mathscr{P}$ fausse et $\mathscr{Q}$ fausse.

Question 7
Soit $n \geqslant 3$ un entier. On considère l'implication :

$$\text{"}n \text{ nombre premier} \implies n \text{ est impair".}$$

Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ L'implication réciproque est "n est pair $\implies$ n est un nombre premier".
- ☐ La contraposée est "n est pair $\implies$ n n'est pas nombre premier".
- ☐ Si l'implication est vraie alors l'implication réciproque l'est aussi.
- ☐ Si l'implication est vraie alors sa contraposée l'est aussi.

Question 8
Soit x un réel. On considère l'implication :

$$\text{"}x^2 > 0 \implies x > 0\text{".}$$

Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ L'implication réciproque est "$x > 0 \implies x^2 > 0$".
- ☐ La contraposée est "$x > 0 \implies x^2 > 0$".
- ☐ Si l'implication est fausse alors l'implication réciproque l'est aussi.
- ☐ Si l'implication est fausse alors sa contraposée l'est aussi.

Question 9
On considère l'implication :

$$\text{"tu prépares un repas} \implies \text{je viens chez toi".}$$

Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ L'implication réciproque est "je viens chez toi $\Longrightarrow$ tu ne prépares pas de repas".
- ☐ La contraposée est "je ne viens pas chez toi $\Longrightarrow$ tu ne prépares pas de repas".
- ☐ Si l'implication est vraie alors l'implication réciproque l'est aussi.
- ☐ Si l'implication est vraie alors sa contraposée l'est aussi.

Question 10
Quelles sont les assertions vraies, quel que soit $x > 0$, un réel strictement positif ?

- ☐ $\exists y > 0 \quad \ln(x) = y$
- ☐ $\exists y > 0 \quad e^x = y$
- ☐ $\exists y > 0 \quad \ln(y) = x$
- ☐ $\exists y > 0 \quad e^y = x$

1.3 Logique | Difficile

Question 11
Pour quelles phrases, l'assertion est vraie si on remplace "??" par "$\exists$", mais est fausse si on remplace "?? " par "$\forall$" ?

- ☐ ?? $n \in \mathbb{N}^* \quad n$ est pair
- ☐ ?? $n \in \mathbb{N}^* \quad n(n+1)$ est pair
- ☐ ?? $n \in \mathbb{N}^* \quad n$ et $n+2$ sont des nombres premiers
- ☐ ?? $n \in \mathbb{N}^*$ si n n'est pas premier alors n admet au moins deux facteurs premiers distincts

Question 12
Soit $x \in \mathbb{R}$. Quelles sont les assertions vraies si on remplace "......" par " $\Longleftrightarrow$ " ?

- ☐ $x^2 = 0 \quad \ldots\ldots \quad x = 0$
- ☐ $x^2 = 1 \quad \ldots\ldots \quad x = 1$
- ☐ $x < 0 \quad \ldots\ldots \quad \frac{1}{x} > 0$
- ☐ $0 < x < 1 \quad \ldots\ldots \quad \frac{1}{x} > 1$

Question 13
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ désigne une fonction. Pour les phrases suivantes dire si la négation proposée est correcte.

- ☐ La négation de "Il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = 0$" est "Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) \neq 0$".
- ☐ La négation de "Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) = 0$" est "Il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \neq 0$".
- ☐ La négation de "Il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \geqslant 0$" est "Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) < 0$".
- ☐ La négation de "Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) > 0$" est "Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) \leqslant 0$".

Question 14
Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour quelles phrases, l'assertion est vraie si on remplace "??" par "$\exists$", mais est fausse si on remplace "?? " par "$\forall$" ?

- ☐ ?? $x \in \mathbb{R} \quad x^2 > 0$

- ☐ ?? $x \in \mathbb{R} \quad x^2 - 2x + 1 \geqslant 0$
- ☐ ?? $x \in \mathbb{R} \quad x^2 - 2x + 1 = 0$
- ☐ ?? $x \in \mathbb{R} \quad x^2 \leqslant 0$

Question 15
Soit $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ deux assertions telles que "$\mathscr{P} \implies \mathscr{Q}$" soit vraie, et "non($\mathscr{P}$) $\implies$ non($\mathscr{Q}$)" soit aussi vraie. On a alors :

- ☐ "$\mathscr{Q} \implies \mathscr{P}$" est vraie.
- ☐ "$\mathscr{P} \iff \mathscr{Q}$" est vraie.
- ☐ "$\mathscr{Q} \implies$ non($\mathscr{P}$)" est vraie.
- ☐ "$\mathscr{P} \implies$ non($\mathscr{Q}$)" est vraie.

Question 16
En 1761, le mathématicien suisse Lambert, ami d'Euler, démontre l'implication $\mathscr{I}$: "$x \in \mathbb{Q} \implies \tan(x) \notin \mathbb{Q}$". Il remarque ensuite que $1 = \tan(\frac{\pi}{4})$. Qu'en conclut-il ?

- ☐ D'après $\mathscr{I}$, $\tan(\frac{\pi}{4}) \notin \mathbb{Q}$.
- ☐ D'après la contraposée de $\mathscr{I}$, $\tan(\frac{\pi}{4}) \notin \mathbb{Q}$.
- ☐ D'après la contraposée de $\mathscr{I}$, $\frac{\pi}{4} \in \mathbb{Q}$.
- ☐ D'après la contraposée de $\mathscr{I}$, $\frac{\pi}{4} \notin \mathbb{Q}$.

Question 17
Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} \quad y = e^x$
- ☐ $\forall y \in \mathbb{R}\ \exists x \in \mathbb{R} \quad y = e^x$
- ☐ $\forall y \in \mathbb{R}\ \exists x > 0 \quad y = e^x$
- ☐ $\forall y > 0\ \exists x \in \mathbb{R} \quad y = e^x$

1.4 Ensembles | Facile

Question 18
Quels sont les ensembles ayant au moins 4 éléments ?

- ☐ $\varnothing$
- ☐ $[0,2] \cap [1,3]$
- ☐ $\{0,3\} \cap \{1,3\}$
- ☐ $\mathbb{N} \setminus \{0,1,2,3\}$

Question 19
Quels sont les ensembles qui contiennent l'intervalle $[0,2]$?

- ☐ $[-3,3] \cap]-1,5]$
- ☐ $\mathbb{R} \setminus]1,3[$

- [ ] $]0,1[\cup]1,2]$
- [ ] $\{0,1,2\}$

Question 20
Soit la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x^2+2$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- [ ] L'image de -2 est 6.
- [ ] Un antécédent de 18 est -5.
- [ ] La valeur 2 admet plusieurs images.
- [ ] La valeur 18 admet plusieurs antécédents.

Question 21
Soient $A=\{1,2,3,4\}$ et $B=\{0,1,2\}$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- [ ] $A\cup B$ a 7 éléments.
- [ ] $A\cap B=\{1,2\}$
- [ ] $A\setminus B=\{0,3,4\}$
- [ ] $B\setminus A=\{0\}$

Question 22
Quels sont les ensembles qui contiennent l'intervalle $[-1,1]$?

- [ ] $[-3,1]\cap]-2,5]$
- [ ] $\mathbb{R}\backslash]1,3[$
- [ ] $[-1,0[\cup]0,2]$
- [ ] $\{-1,0,1\}$

Question 23
Soit la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x^2-2$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- [ ] L'image de -2 est -6.
- [ ] Un antécédent de 7 est -3.
- [ ] La valeur -2 admet plusieurs images.
- [ ] La valeur 7 admet plusieurs antécédents.

Question 24
Soit la fonction réelle définie par $f(x)=2x$. Soit $x\in\mathbb{R}$. On a :

- [ ] $(f\circ f)(x)=4x^2$
- [ ] $(f\circ f)(x)=4x$
- [ ] $(f\circ f)\circ f(x)=6x$
- [ ] $(f\circ f\circ f)(x)=8x^3$

Question 25
Soient les ensembles $A = [1,3]$ et $B = \{0,1,2,3\}$. Quelles sont les assertions vraies ?

☐ $B \subset A$

☐ $A \subset B$

☐ $A \setminus B =]1,3[$

☐ $A \cap B = \{1,2,3\}$

1.5 Ensembles | Moyen

Question 26
Soient A, B deux parties d'un ensemble E. Quelles sont les affirmations vraies (quel que soit le choix de A et B) ?

☐ $A \cup B \ \subset \ A \cap B$

☐ $A \cap B \ \subset \ A \cup B$

☐ $A \setminus B \ \subset \ A$

☐ $A \setminus B \ \subset \ B$

Question 27
Les fonctions suivantes sont-elles définies sur l'ensemble associé ?

☐ $x \mapsto \ln(|x-3|)$ sur $\mathbb{R}$

☐ $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ sur $[-1,1]$

☐ $x \mapsto \frac{1}{x^2-4}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

☐ $x \mapsto \frac{1}{\sin(\pi x)}$ sur $\mathbb{R}^*$

Question 28
Soient f, g, h des fonctions définies par

$$f(x) = x^2 - 3x \qquad g(x) = 2x + 1 \qquad h(x) = \frac{x}{x-1}.$$

Quelles sont les affirmations vraies ?

☐ $(f \circ g)(x) = 4x^2 - 2x + 4$

☐ $(g \circ f)(x) = 2x^2 + 5$

☐ $(h \circ f)(x) = \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 - \frac{3x}{x-1}$

☐ $(g \circ h)(x) = \frac{3x-1}{x-1}$

Question 29
Les fonctions suivantes sont-elles définies sur l'ensemble associé ?

☐ $x \mapsto \ln(|x+1|)$ sur $\mathbb{R}$

☐ $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$

☐ $x \mapsto \frac{x}{1-x^2}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

☐ $x \mapsto \tan(x)$ sur $]\frac{\pi}{2}, \pi[$

Question 30
Soient f, g, h des fonctions définies par

$$f(x) = x^2 + x \qquad g(x) = 2x - 1 \qquad h(x) = \frac{1}{x+1}.$$

Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ $(f \circ g)(x) = 4x^2 - 2x$
- ☐ $(g \circ f)(x) = 2x^2 + 2x$
- ☐ $(h \circ f)(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$
- ☐ $(g \circ h)(x) = \frac{1}{2x}$

Question 31
Parmi ces ensembles, quels sont ceux qui sont inclus dans $\{0, 1, 2\}$?

- ☐ $\{x \in \mathbb{R} \mid x(x-2) = 0\}$
- ☐ $\{x \in \mathbb{R} \mid e^x = 1\}$
- ☐ $\{x > 0 \mid \ln(x) = 1\}$
- ☐ $[0, 3] \cap \{x \in \mathbb{R} \mid (x+2)^2 = 4\}$

Question 32
Soit l'ensemble $A = \{-1, 0, 1\}$ et la fonction réelle donnée par $f(x) = x^2 - 1$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\forall x \in A \quad f(x) = 0$
- ☐ $\exists x \in A \quad f(x) = 0$
- ☐ f est bijective de A dans son image $f(A)$.
- ☐ $\forall x \in A \quad f(x) \in A$

Question 33
Soient les fonctions réelle définies par $f(x) = 3x + 2$ et $g(x) = ax + b$. Pour quelle(s) valeur(s) des réels a et b a-t-on $g \circ f(x) = 6x + 7$?

- ☐ $a = 1$ et $b = 3$
- ☐ $a = 1$ et $b = 5$
- ☐ $a = 2$ et $b = 3$
- ☐ $a = 2$ et $b = 5$

1.6 Ensembles | Difficile

Question 34
Soit E un ensemble. Pour A et B deux parties de E, on définit l'ensemble

$$\Delta(A, B) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ $\Delta(A,B) = \Delta(B,A)$
- ☐ Si $B = \varnothing$ alors $\Delta(A,B) = \varnothing$.
- ☐ Si A et B sont disjoints alors $\Delta(A,B) = A \cup B$.
- ☐ Si $B \subset A$ alors $\Delta(A,B) = A \setminus B$.

Question 35

Les fonctions f et g définies par les expressions suivantes sont-elles bijections réciproques l'une de l'autre ? (On ne se préoccupera pas des ensembles de départ et d'arrivée.)

- ☐ $f(x) = \exp(2x)$ et $g(x) = \ln(\frac{1}{2}x)$
- ☐ $f(x) = \cos(x-1)$ et $g(x) = \sin(x+1)$
- ☐ $f(x) = \frac{1}{1+x}$ et $g(x) = \frac{1-x}{x}$
- ☐ $f(x) = \sqrt{2x+1}$ et $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1$

Question 36

Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Quelles sont les affirmations vraies (quel que soit le choix de A et B) ?

- ☐ $(A \cap B) \cup (A \setminus B) = A$
- ☐ $(A \cap B) \cup (A \setminus B) = B$
- ☐ $(A \cap B) \cup (A \setminus B) = A \cup B$
- ☐ $(A \cap B) \cup (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A \cup B$

Question 37

Soit E un ensemble. Pour deux parties A et B de E, on définit $\Delta(A,B) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Quelles sont les affirmations vraies (quel que soit le choix de A et B) ?

- ☐ Si $A = B$, $\Delta(A,B) = \varnothing$.
- ☐ $A \cup B \subset \Delta(A,B)$
- ☐ $A \cap B \subset \Delta(A,B)$
- ☐ $\Delta(A,B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

Question 38

Les fonctions f et g définies par les expressions suivantes sont-elles bijections réciproques l'une de l'autre ? (On ne se préoccupera pas des ensembles de départ et d'arrivée.)

- ☐ $f(x) = \exp(-3x)$ et $g(x) = -\frac{1}{3}\ln(x)$
- ☐ $f(x) = \cos(x+1)$ et $g(x) = \frac{1}{\cos(x)} - 1$
- ☐ $f(x) = \frac{x}{1+x}$ et $g(x) = \frac{x}{1-x}$
- ☐ $f(x) = \sqrt{x+1}$ et $g(x) = x^2 + 1$

Question 39

Soit la fonction réelle définie par $f(x) = x^2 - x - 2$. Pour quelle fonction u a-t-on $f \circ u(x) = 9(x^2 + x)$?

- ☐ $u(x) = 9x$

- ☐ $u(x) = 3x + 2$
- ☐ $u(x) = -3x$
- ☐ $u(x) = 9x + 2$

1.7 Raisonnements | Facile

Question 40
Pour montrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel une preuve classique utilise :

- ☐ Un raisonnement par contraposition.
- ☐ Un raisonnement par disjonction.
- ☐ Un raisonnement par l'absurde.
- ☐ Un raisonnement par récurrence.

Question 41
Pour montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on a $(1+x)^n \geqslant 1+nx$, quelle est la démarche la plus adaptée ?

- ☐ On fixe x, on fait une récurrence sur n.
- ☐ On fixe n, on fait une récurrence sur x.
- ☐ Par l'absurde on suppose $(1+x)^n < 1+nx$.
- ☐ Par disjonction des cas n pair/n impair.

Question 42
On voudrait montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $2^{n-1} \leqslant n^n$. Quel type de raisonnement vous parait adapté ?

- ☐ Un raisonnement par contraposition.
- ☐ Un raisonnement par disjonction : n pair/n impair.
- ☐ Un raisonnement par l'absurde.
- ☐ Un raisonnement par récurrence.

Question 43
Soit x un réel. On définit une suite par $u_0 = x$ et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = xu_n$.

- ☐ On montre par récurrence sur n que $u_n = x^n$ pour tout entier n.
- ☐ On montre par récurrence sur x que $u_n = x^n$ pour tout entier n.
- ☐ On montre par récurrence sur n que $u_n = x^{n+1}$ pour tout entier n.
- ☐ On montre par récurrence sur x que $u_n = x^{n+1}$ pour tout entier n.

Question 44
On commence une démonstration par l'absurde avec la rédaction suivante : "Supposons que $\log_{10}(3) \in \mathbb{Q}$. Alors on peut écrire $\log_{10}(3) = \frac{p}{q}$ avec ...". Que cherche-t-on à démontrer ?

- ☐ $\log_{10}(3) \in \mathbb{Q}$

- ☐ $\log_{10}(3) \notin \mathbb{Q}$
- ☐ $\log_{10}(3) \in \mathbb{R}$
- ☐ $\log_{10}(3) \notin \mathbb{R}$

1.8 Raisonnements | Moyen

Question 45
On souhaite prouver par récurrence, pour tout $n \geqslant 0$, une proposition $\mathscr{P}_n$. Après avoir prouvé $\mathscr{P}_0$, quelle rédaction du démarrage de l'étape d'hérédité convient ?

- ☐ Soit $n \geqslant 0$. Je prouve $\mathscr{P}_1$.
- ☐ Soit $n \geqslant 0$. Je suppose $\mathscr{P}_n$ vraie et je montre $\mathscr{P}_{n+1}$.
- ☐ Soit $n \geqslant 0$. Je suppose $\mathscr{P}_n$ vraie pour tout n et je montre $\mathscr{P}_{n+1}$.
- ☐ Soit $n \geqslant 0$. Je suppose $\mathscr{P}_{n+1}$ vraie et je montre $\mathscr{P}_n$.

Question 46
Pour montrer que $\sqrt{3}$ est un nombre irrationnel, je commence une démonstration par l'absurde en écrivant :

- ☐ Je suppose $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$ et je cherche une contradiction.
- ☐ Je suppose $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ et je cherche une contradiction.
- ☐ Je suppose $\sqrt{3} \notin \mathbb{R}$ et je cherche une contradiction.
- ☐ Je suppose que $\sqrt{3}$ n'existe pas et je cherche une contradiction.

Question 47
Quel type de raisonnement est adapté pour montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers ?

- ☐ Au cas par cas : on étudie $n = 2$, $n = 3$, $n = 5$,...
- ☐ Par récurrence sur n parcourant l'ensemble des nombres premiers.
- ☐ Par l'absurde en supposant qu'il n'existe qu'un nombre fini de nombres premiers.
- ☐ C'est une propriété que l'on ne sait pas démontrer.

Question 48
Pour montrer que les solutions réelles de l'équation $|x+1| = 2$ sont 1 et -3, on peut utiliser :

- ☐ Un raisonnement par contraposition.
- ☐ Un raisonnement par disjonction des cas.
- ☐ Un raisonnement par l'absurde.
- ☐ Un raisonnement par récurrence.

Question 49
Soient a et b deux nombres réels. On considère la proposition suivante : "si $a+b$ est irrationnel, alors a est irrationnel ou b est irrationnel". Comment puis-je montrer cette affirmation par contraposée ?

- ☐ Je prends deux rationnels a et b et je montre que $a+b$ est rationnel.

- ☐ Je prends deux irrationnels a et b et je montre que $a+b$ est irrationnel.
- ☐ Je prends un irrationnel et j'essaie de l'écrire sous la forme $a+b$ avec a et b irrationnels.
- ☐ Je prends deux rationnels a et b et je montre que $a+b$ est irrationnel.

Question 50

Téo et Théa jouent à un jeu de société. Téo est proche de la victoire ; il doit lancer un dé et Théa remarque avec raison que : "si Téo fait 4, alors il gagne le jeu". Quelles sont les affirmations certaines ?

- ☐ Si Téo fait 3, alors il n'aura pas gagné.
- ☐ Si Téo gagne, c'est qu'il a fait 4.
- ☐ Si Téo ne gagne pas, c'est qu'il n'a pas fait 4.
- ☐ Si Téo gagne fait 5, il perd.

1.9 Raisonnements | Difficile

Question 51

Pour montrer que $3^n > 3n$ pour des entiers n naturels suffisamment grands, je fais une preuve par récurrence. Je peux commencer l'initialisation avec :

- ☐ $n=0$
- ☐ $n=1$
- ☐ $n=2$
- ☐ $n=3$

Question 52

Pour montrer une implication $\mathscr{P} \implies \mathscr{Q}$ par contraposition :

- ☐ Je suppose $\mathscr{P}$ et je montre $\mathscr{Q}$.
- ☐ Je suppose $\mathscr{Q}$ et je montre $\mathscr{P}$.
- ☐ Je suppose non($\mathscr{P}$) et je montre non($\mathscr{Q}$).
- ☐ Je suppose non($\mathscr{Q}$) et je montre non($\mathscr{P}$).

Question 53

Pour démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|x-2| \leqslant x^2 - x + 2$.

- ☐ Je distingue les cas $x \geqslant 0$ et $x < 0$.
- ☐ Je distingue les cas $x \geqslant 2$ et $x < 2$.
- ☐ Je suis amené à vérifier $x^2 - x + 2 \geqslant 0$.
- ☐ Je suis amené à vérifier $x^2 - 2x + 4 \geqslant 0$.

Question 54

Pour montrer que $4^n > 20n$ pour des entiers n naturles suffisamment grands je fais une preuve par récurrence. Je peux commencer l'initialisation avec :

- ☐ $n=0$

- ☐ $n=1$
- ☐ $n=2$
- ☐ $n=3$

Question 55
Pour démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|x+1| \leqslant x^2+2$.

- ☐ Je distingue les cas $x \geqslant 0$ et $x < 0$.
- ☐ Je distingue les cas $x \geqslant -1$ et $x < -1$.
- ☐ Je suis amené à vérifier $x^2 - x + 1 \geqslant 0$.
- ☐ Je suis amené à vérifier $x^2 + x + 3 \geqslant 0$.

Question 56
Soit $n \geqslant 2$ un entier. Que pensez-vous du raisonnement par récurrence suivant : on note $\mathscr{P}_n$ la propriété "n points distincts quelconques dans le plan sont toujours alignés".
Initialisation : pour $n=2$, la propriété est vraie. En effet, deux points distincts du plan sont toujours alignés.
Hérédité : soit n un entier naturel quelconque supérieur ou égal à deux. Supposons la propriété $\mathscr{P}_n$ vraie. Soient $n+1$ points quelconques du plan, $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$, tous distincts. D'après l'hypothèse de récurrence, les n points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont alignés. Ils le sont donc sur la droite (A_2A_n). De même, les n points $A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$ sont alignés. Ils le sont donc également sur la droite (A_2A_n). On en déduit donc que les $n+1$ points sont tous sur la droite (A_2A_n), donc ils sont alignés. La propriété $\mathscr{P}_{n+1}$ est donc vraie, d'où la propriété est héréditaire.
En conclusion, on a montré par récurrence que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 2$: n points distincts du plan sont toujours alignés.

- ☐ Le raisonnement par récurrence est juste donc le résultat est juste.
- ☐ Le raisonnement par récurrence est juste mais le résultat est faux.
- ☐ Il y a une erreur dans l'étape d'hérédité.
- ☐ Il y a une erreur dans l'étape d'initialisation.

Arithmétique

Arnaud Bodin, Barnabé Croizat, Christine Sacré

---

2 Arithmétique

2.1 pgcd | Facile

Question 57
On considère $a=28$ et $b=42$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ Les diviseurs communs à a et à b sont : 1, 2, 7.
- ☐ 14 est un diviseur de a mais pas de b.

- ☐ 6 est un diviseur de b mais pas de a.
- ☐ 84 est un multiple de a et de b.

Question 58

Quelles sont les valeurs qui correspondent à la division euclidienne $a = bq + r$ de a par b ?

- ☐ $a = 48$, $b = 7$, $q = 6$, $r = 6$
- ☐ $a = 101$, $b = 11$, $q = 9$, $r = 2$
- ☐ $a = 56$, $b = 9$, $q = 5$, $r = 11$
- ☐ $a = 123$, $b = 10$, $q = 13$, $r = -7$

Question 59

Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ 456 est divisible par 3.
- ☐ 754 est divisible par 4.
- ☐ 5552 est divisible par 5.
- ☐ 987 est divisible par 9.

Question 60

Quel est le reste r dans la division euclidienne de 145 par 13 ?

- ☐ $r = 0$
- ☐ $r = 2$
- ☐ $r = 7$
- ☐ $r = -11$

2.2 pgcd | Moyen

Question 61

Soit $a = bq + r$ la division euclidienne de a par b. Quelle condition définit le reste r ?

- ☐ $0 \leqslant r < a$
- ☐ $0 \leqslant r < b$
- ☐ $0 \leqslant r \leqslant q$
- ☐ $0 \leqslant r < q$

Question 62

Pour $a = 220$ et $b = 60$, quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ $\text{ppcm}(a, b) = 440$.
- ☐ 440 est un multiple commun à a et b.
- ☐ 10 est un diviseur commun à a et b.
- ☐ $\text{pgcd}(a, b) = 20$.

Question 63
Grâce à l'application de l'algorithme d'Euclide, on obtient pour $a = 630$ et $b = 165$:

- ☐ $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(165, 135)$
- ☐ $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(135, 30)$
- ☐ $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(30, 0)$
- ☐ $\text{pgcd}(a, b) = 15$

Question 64
Soit $a > 0$ un entier strictement positif dont le reste dans la division euclidienne par 8 est $r = 5$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ a est pair.
- ☐ a est impair.
- ☐ a est nécessairement divisible par 13.
- ☐ $(a - 5)$ est un multiple de 8.

Question 65
Pour $a = 24$ et $b = 8$, on a :

- ☐ $\text{ppcm}(a, b) = 8$.
- ☐ $\text{ppcm}(a, b) = 24$.
- ☐ a est un multiple de b.
- ☐ a est dans la liste des diviseurs de b.

2.3 pgcd | Difficile

Question 66
On considère a, b et d des entiers tels que $d|a$ et $d|b$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ $d|a + b$
- ☐ $d|a - b$
- ☐ $d|a \times b$
- ☐ $d|\frac{a}{b}$

Question 67
On considère a, b et n des entiers tels que $a|n$ et $b|n$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ $a + b|n$
- ☐ $a \times b|n$
- ☐ $a + b|n^2$
- ☐ $a \times b|n^2$

Question 68
Soit a_1 un entier dont le reste dans la division euclidienne par 5 est $r_1 = 2$. Soit a_2 un entier dont le reste dans la division euclidienne par 5 est $r_2 = 3$. Quelles sont alors les affirmations vraies ?

- ☐ Le reste de la division euclidienne de $a_1 + a_2$ par 5 est 0.
- ☐ Le reste de la division euclidienne de $a_1 + a_2$ par 5 est 5.
- ☐ Le reste de la division euclidienne de $2a_1 + 2a_2$ par 5 est 0.
- ☐ L'écriture décimale de $2a_1 + 2a_2$ finit par le chiffre 0.

Question 69
Soit $a > 0$ un entier impair qui est un multiple de 3. Quelles sont alors les affirmations vraies ?

- ☐ a est un multiple de 6.
- ☐ L'écriture décimale de a finit nécessairement soit par 7 soit par 9.
- ☐ $\mathrm{pgcd}(a, 3) = 3$.
- ☐ $\mathrm{ppcm}(a, 3) = a$.

Question 70
Soient a et b deux entiers positifs tels que $\mathrm{pgcd}(a, b) = 10$ et $\mathrm{ppcm}(a, b) = 140$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ $\mathrm{pgcd}(2a, 2b) = 20$
- ☐ $\mathrm{ppcm}(2a, 2b) = 70$
- ☐ $\mathrm{pgcd}(2a, 2b) = 10$
- ☐ $\mathrm{ppcm}(2a, 2b) = 280$

2.4 Théorème de Bézout | Facile

Question 71
Soient deux entiers a, b tels que $\mathrm{pgcd}(a, b) = 1$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ a et b sont des nombres premiers.
- ☐ a et b sont des nombres premiers entre eux.
- ☐ Il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $au + bv = 1$.
- ☐ Il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $au + bv = 2$.

Question 72
Soient a, b, c des entiers tels que $a|bc$. Dans le lemme de Gauss, quelle est la condition pour pouvoir conclure que $a|c$?

- ☐ $\mathrm{pgcd}(a, b) = 1$
- ☐ $\mathrm{pgcd}(a, c) = 1$
- ☐ $\mathrm{pgcd}(b, c) = 1$
- ☐ a, b et c sont des nombres premiers.

Question 73
Soit a et b deux entiers tels que $\mathrm{pgcd}(a, b) = 4$. Alors on peut trouver deux entiers u et v tels que :

- ☐ $au - bv = 2$

- ☐ $au + bv = 2$
- ☐ $au - bv = 4$
- ☐ $au + bv = 12$

2.5 Théorème de Bézout | Moyen

Question 74
Soient deux entiers positifs a, b, on calcule le pgcd de a et b par l'algorithme d'Euclide. La première étape est d'écrire la division euclidienne de a par b : $a = bq + r$. Quelle est la second étape ?

- ☐ La division de a par r.
- ☐ La division de b par r.
- ☐ La division de q par r.
- ☐ Cela dépend des valeurs de a et b.

Question 75
Soient deux entiers positifs a, b et $d = \mathrm{pgcd}(a, b)$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ Il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ uniques tels que $au + bv = d$.
- ☐ Il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $au + bv = d$.
- ☐ Il existe $u, v \in \mathbb{N}$ uniques tels que $au + bv = d$.
- ☐ Il existe $u, v \in \mathbb{N}$ tels que $au + bv = d$.

Question 76
Pour $a = 453$ et $b = 201$, l'algorithme d'Euclide (étendu) fournit des coefficients de Bézout u et v tels que $au + bv = \mathrm{pgcd}(a, b)$ avec :

- ☐ $u = 4$, $v = -9$, $\mathrm{pgcd}(a, b) = 1$.
- ☐ $u = -12$, $v = 27$, $\mathrm{pgcd}(a, b) = 51$.
- ☐ $u = 1$, $v = -2$, $\mathrm{pgcd}(a, b) = 51$
- ☐ $u = 4$, $v = -9$, $\mathrm{pgcd}(a, b) = 3$.

Question 77
Pour les entiers a, b suivants, les u, v donnés sont-ils des coefficients de Bézout, c'est-à-dire tels que $au + bv = \mathrm{pgcd}(a, b)$?

- ☐ $a = 7$, $b = 11$, $u = 2$, $v = -3$
- ☐ $a = 20$, $b = 55$, $u = 6$, $v = -2$
- ☐ $a = 28$, $b = 12$, $u = 1$, $v = -2$
- ☐ $a = 36$, $b = 15$, $u = -2$, $v = 5$

Question 78
Pour $a = 41$ et $b = 7$, on a notamment l'égalité $a \times (-3) + b \times 18 = 3$. Que peut-on en conclure ?

- ☐ $\mathrm{pgcd}(a, b) = 3$.

- ☐ pgcd(a,b) est un diviseur de 3.
- ☐ Comme 3 ne divise pas 7 alors a et b sont premiers entre eux.
- ☐ -3 et 18 sont premiers entre eux.

Question 79
Soit deux nombres entiers a et b tels que $5a^2 - 4b^2 = 1$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ pgcd$(a^2, b^2) = 1$.
- ☐ pgcd$(5a, 4b) = 1$.
- ☐ 5 divise $4b^2$.
- ☐ 4 divise $5a^2 - 1$.

2.6 Théorème de Bézout | Difficile

Question 80
Quelles sont les affirmations vraies concernant l'algorithme d'Euclide ?

- ☐ Il se peut que le processus n'aboutisse pas à cause d'un nombre infini de divisions à effectuer.
- ☐ Il se peut que le processus ne fournisse pas le pgcd correct.
- ☐ Le pgcd est le dernier reste non nul.
- ☐ L'algorithme étendu permet en plus de calculer des coefficients de Bézout.

Question 81
Soit n un entier tel que $5n$ soit un multiple de 7. Quelles sont alors les affirmations vraies ?

- ☐ n est un multiple de 7.
- ☐ 5 divise $7n$.
- ☐ 7 divise n.
- ☐ 35 divise n.

Question 82
Soient 5 entiers relatifs a, b, c, u, v tels que $au + bv = 1$ et $a|bc$. Quelles sont alors les affirmations vraies ?

- ☐ pgcd$(a,c) = 1$.
- ☐ pgcd$(a,b) = 1$.
- ☐ $a|c$.
- ☐ pgcd$(a,c) = |a|$.

2.7 Nombres premiers | Facile

Question 83
Les entiers suivants sont-ils des nombres premiers ?

- ☐ 107
- ☐ 113

- ☐ 145
- ☐ 153

Question 84
Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ Tout nombre impair supérieur à 3 est premier.
- ☐ Tout nombre premier supérieur à 3 est impair.
- ☐ Il existe une infinité de nombres premiers impairs.
- ☐ Il existe une infinité de nombres premiers pairs.

Question 85
Les entiers suivants sont-ils des nombres premiers ?

- ☐ 161
- ☐ 169
- ☐ 171
- ☐ 179

2.8 Nombres premiers | Moyen

Question 86
Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ La somme de deux nombres premiers $\geqslant 3$ n'est jamais un nombre premier.
- ☐ Le produit de deux nombres premiers $\geqslant 3$ n'est jamais un nombre premier.
- ☐ Il existe un nombre premier $p \geqslant 3$ tel que $p+1$ soit aussi premier.
- ☐ Il existe un nombre premier $p \geqslant 3$ tel que $p+2$ soit aussi premier.

Question 87
Soient p un nombre premier et a, b des entiers avec $p|ab$. Par application du lemme d'Euclide, quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ p divise a et p divise b.
- ☐ p divise a ou p divise b.
- ☐ p divise a ou p divise b, mais pas les deux en même temps.
- ☐ p ne divise ni a, ni b.

Question 88
Soit n un entier tel que $n^2 - 1$ est un multiple de 11. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ 11 divise $n-1$.
- ☐ 11 divise $n+1$.
- ☐ (11 divise $n-1$) ou (11 divise $n+1$).
- ☐ (11 divise $n-1$) et (11 divise $n+1$).

Question 89
À l'aide d'une calculatrice, quelle est l'écriture de la décomposition en produit de facteurs premiers de $N = 111\,111$?

- ☐ $N = 11 \times 10\,101$.
- ☐ $N = 3 \times 11 \times 3367$.
- ☐ $N = 7 \times 33 \times 481$.
- ☐ $N = 3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 3713$.

Question 90
Soit $p \geqslant 3$ un nombre premier et $p = 4q + r$ le résultat de sa division euclidienne par 4. On peut alors avoir :

- ☐ $r = 0$
- ☐ $r = 1$
- ☐ $r = 2$
- ☐ $r = 3$

Question 91
Soit p un nombre premier tel que $10 < p < 100$. On note A le chiffre des dizaines et B le chiffre des unités de l'écriture décimale de p. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ A peut être pair.
- ☐ B peut être pair.
- ☐ On peut avoir $A = B$.
- ☐ On peut avoir $B = 9 - A$.

2.9 Nombres premiers | Difficile

Question 92
Les entiers suivants ont été factorisés correctement. Quelles sont les écritures qui sont des décompositions en facteurs premiers ?

- ☐ $3\,025 = 1^3 \times 5^2 \times 11^2$
- ☐ $1\,836 = 2^2 \times 3 \times 3^2 \times 17$
- ☐ $1\,444\,716 = 2^2 \times 7^3 \times 9^2 \times 13$
- ☐ $13\,915 = 5 \times 11^2 \times 23$

Question 93
Soient $a = 5^3 \times 11^2 \times 13^5 \times 19$ et $b = 5^5 \times 7^4 \times 11 \times 19$ Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ $\mathrm{pgcd}(a, b) = 5^3 \times 7^4 \times 11 \times 13^5 \times 19$
- ☐ $\mathrm{pgcd}(a, b) = 5 \times 11 \times 19$
- ☐ $\mathrm{ppcm}(a, b) = 5^5 \times 7^4 \times 11^2 \times 13^5 \times 19$

☐ $\text{ppcm}(a,b) = 5^5 \times 11^2 \times 19$

Question 94
Soit $a = 79\,475 = 5^2 \times 11 \times 17^2$. Quelles sont les affirmations vraies ?

☐ $\text{pgcd}(a,75) = 3 \times 5^2$

☐ $\text{pgcd}(a,75) = 5^2$

☐ $\text{ppcm}(a,75) = 3 \times 11 \times 17^2$

☐ $75|a$

Question 95
Soit $p \geqslant 5$ un nombre premier et $N = (p+3)^2 - p^2$. Quelles sont les affirmations vraies ?

☐ $2|N$.

☐ $3|N$.

☐ $6|N$.

☐ p ne divise pas N.

2.10 Congruences | Facile

Question 96
Quelles sont les affirmations vraies ?

☐ $31 \equiv 6\,[12]$

☐ $42 \equiv 16\,[13]$

☐ $25 \equiv -11\,[14]$

☐ $158 \equiv 8\,[15]$

Question 97
Quelles sont les affirmations vraies ?

☐ $456\,789 \equiv 0\,[2]$

☐ $43\,210 \equiv 0\,[5]$

☐ $23\,769 \equiv 3\,[9]$

☐ $10\,326 \equiv 8\,[10]$

Question 98
Si $x \equiv 2\,[5]$, alors on a :

☐ $x^2 \equiv 2x\,[5]$

☐ $3x \equiv -1\,[5]$

☐ $x+1 \equiv 3\,[5]$

☐ $10x \equiv 2\,[5]$

Question 99
Parmi les nombres n ci-dessous, lequel vérifie à la fois $n \equiv 5\,[14]$ et $n \equiv 1\,[8]$?

- ☐ $n = 47$
- ☐ $n = 57$
- ☐ $n = 89$
- ☐ $n = 103$

2.11 Congruences | Moyen

Question 100
Soient $a \equiv 2\,[13]$ et $b \equiv 7\,[13]$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ $a + b \equiv 9\,[13]$
- ☐ $ab \equiv 1\,[13]$
- ☐ $a^2 \equiv -9\,[13]$
- ☐ $b^3 \equiv 5\,[13]$

Question 101
Soient $a \equiv b\ [n]$ et $c \equiv d\ [n]$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ $a + b \equiv c + d\ [n]$
- ☐ $a + c \equiv b + d\ [n]$
- ☐ $a^2 \equiv b^2\ [n]$
- ☐ $c^2 \equiv d^2\ [n]$

Question 102
Soit n un entier premier avec 3. On peut alors affirmer :

- ☐ $2n \equiv 1\,[3]$
- ☐ $2n \equiv -1\,[3]$
- ☐ $n^2 \equiv 1\,[3]$
- ☐ $n^2 \equiv -1\,[3]$

Question 103
Soit k un entier et $N = 5k^2 - 10k + 4$. On peut affirmer :

- ☐ $N \equiv 4\,[5]$
- ☐ $N \equiv 5\,[5]$
- ☐ $N \equiv 5k^2\,[2]$
- ☐ $N \equiv 1\,[2]$

2.12 Congruences | Difficile

Question 104
Soit p un nombre premier et x un entier. Quel(s) énoncé(s) du petit théorème de Fermat sont corrects ?

- ☐ $x^p \equiv p\ [x]$
- ☐ $x^p \equiv x\ [p]$
- ☐ Si p ne divise pas x, alors $x^{p-1} \equiv 0\ [x]$
- ☐ Si p ne divise pas x, alors $x^{p-1} \equiv 0\ [p]$

Question 105
Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ $2^8 \equiv 2\ [8]$
- ☐ $3^{12} \equiv 3\ [13]$
- ☐ $18^7 \equiv 1\ [19]$
- ☐ $4^{16} \equiv 1\ [17]$

Question 106
Soit un entier k tel que $k \equiv 2\ [7]$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ $2k^2 + k \equiv k^3\ [7]$
- ☐ $3(k^4 - k) \equiv 0\ [7]$
- ☐ $14k - 2 \equiv 5\ [7]$
- ☐ $k^{18} + k^{12} + k^6 \equiv k\ [7]$

Question 107
Pour quel(s) entier(s) n a-t-on $10^{10} \equiv 7^{18}\ [n]$?

- ☐ $n = 3$
- ☐ $n = 5$
- ☐ $n = 7$
- ☐ $n = 9$

Question 108
Quel est le chiffre des unités de 7^{100} ?

- ☐ 1
- ☐ 3
- ☐ 5
- ☐ 9

Equations différentielles

Arnaud Bodin, Barnabé Croizat, Christine Sacré

3 Equations différentielles

3.1 Primitive | Facile

Question 109
Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ x^3 est une primitive de $3x^2+3$.
- ☐ x^3+3 est une primitive de $3x^2$.
- ☐ $\ln(x^2+1)$ est une primitive de $\frac{1}{x^2+1}$.
- ☐ $\sqrt{x}$ est une primitive de $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ (sur $]0,+\infty[$).

Question 110
Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ $\cos(x)$ est une primitive de $\sin(x)$.
- ☐ $\exp(x)$ est une primitive de $\exp(x)$.
- ☐ $x^4-3x^3+2x^2-8$ est une primitive de $4x^3-9x^2+4x$.
- ☐ $4x^3+x^2-3x+6$ est une primitive de x^4+2x-3.

Question 111
Parmi les phrases suivantes, quelles sont les affirmations correctes ?

- ☐ L'opération du calcul de primitives est le contraire de l'opération du calcul de dérivées.
- ☐ L'opération du calcul de dérivées est le contraire de l'opération du calcul de primitives.
- ☐ Deux primitives d'une même fonction sur un intervalle sont égales à une constante près.
- ☐ Si on connaît une primitive d'une fonction, alors on les connaît toutes.

Question 112
Pour chacune des équations différentielles suivantes, la fonction donnée est-elle solution ?

- ☐ Pour $y'=\sin(x)$ la fonction $f(x)=\cos(x)$ est solution.
- ☐ Pour $y'=e^{2x}$ la fonction $f(x)=e^{2x}+1$ est solution.
- ☐ Pour $y'=\ln(x)$ la fonction $f(x)=\frac{1}{x}$ est solution.
- ☐ Pour $y'=\frac{1}{e^x}$ la fonction $f(x)=1-e^{-x}$ est solution.

3.2 Primitive | Moyen

Question 113
On considère la fonction $f : x \mapsto 2e^{-2x} - 3$. Quelles sont les affirmations exactes ?

- ☐ f est une primitive de $-e^{-2x} - 3x$ sur $\mathbb{R}$.
- ☐ f est une primitive de $-4e^{-2x}$ sur $\mathbb{R}$.
- ☐ f est la primitive de $-4e^{-2x}$ sur $\mathbb{R}$ valant -1 en $x = 0$.
- ☐ f est la dérivée de $x \mapsto -e^{-2x}$

Question 114
Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ $x \mapsto \ln(x)$ est une primitive de $x \mapsto 1/x$ sur $\mathbb{R}$.
- ☐ $x \mapsto \ln(x)$ est une primitive de $x \mapsto 1/x$ sur $]-\infty, 0[$.
- ☐ $x \mapsto \ln(x)$ est une primitive de $x \mapsto 1/x$ sur $]0, +\infty[$.
- ☐ $x \mapsto \ln(-x)$ est une primitive de $x \mapsto 1/x$ sur $]-\infty, 0[$.

Question 115
Soit F une primitive d'une fonction f et G une primitive d'une fonction g sur un intervalle I. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ Si $f = g$ alors $F = G$.
- ☐ Si $F = G$ alors $f = g$.
- ☐ Si $f = g^2$ alors $F = G^2$.
- ☐ Si $F = G + C$ (où C est une constante) alors $f = g$.

Question 116
Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ Une primitive de x^k est $\frac{x^k}{k}$.
- ☐ Une primitive de $\ln(x)$ est $\frac{1}{x}$.
- ☐ Une primitive de $\frac{1}{\sqrt{x}}$ est $2\sqrt{x}$.
- ☐ Une primitive de e^{ax} est e^{ax} (où $a > 0$ est une constante).

3.3 Primitive | Difficile

Question 117
Parmi les fonctions suivantes, laquelle est une primitive de $\sqrt{x}$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$?

- ☐ $2x\sqrt{x}$
- ☐ $\frac{1}{2\sqrt{x}}$
- ☐ $x^2\sqrt{x}$
- ☐ $\frac{2}{3}x\sqrt{x}$

Question 118
Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ $x^2 e^{1/x}$ est une primitive de $(2x-1)e^{1/x}$ sur $]-\infty, 0[$.
- ☐ $\ln(|x|)$ est une primitive de $1/x$ sur $\mathbb{R}$.
- ☐ $\ln(x^2+x+1)$ est une primitive de $\frac{2x}{x^2+x+1}$ sur $\mathbb{R}$.
- ☐ $e^x \ln(x)$ est une primitive de $e^x \ln(x) + e^x/x$ sur $]0, +\infty[$.

Question 119
Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ Une primitive de $\sin(x)e^{\cos(x)}$ est $-e^{\cos(x)}$.
- ☐ Une primitive de $\cos(x^3+x)$ est $\sin(x^3+x)$.
- ☐ Une primitive de $\ln(x)$ est $x\ln(x) - x$ (sur $]0, +\infty[$).
- ☐ Une primitive de $4x^3 + 4x$ est $(x^2+1)^2$.

Question 120
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle. Soit F une primitive de f. C désigne une constante. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ Si $f(x) = 0$ sur I alors $F(x) = C$.
- ☐ Si $f(x) = x$ alors $F(x) = x^2 + C$.
- ☐ Si $f(x) \times \cos(x) = 1$ alors $F(x) = \frac{1}{\sin(x)} + C$.
- ☐ Si $f(\ln(x)) = 0$ alors $F(x) = e^x + C$.

3.4 Notion d'équation différentielle | Facile

Question 121
On considère la fonction $f : x \mapsto 2e^{-x} + 3$. Parmi les équations différentielles suivantes, quelles sont celles dont f est solution ?

- ☐ $y' = -y + 3$
- ☐ $y' = y - 4e^{-x} - 3$
- ☐ $y' = 2y + 3$
- ☐ $y' = -2e^{-x}$

Question 122
Parmi les fonctions suivantes, quelles sont celles qui sont solutions de l'équation différentielle $y' = 2y - 10$.

- ☐ $f : x \mapsto 4e^{2x} + 5$
- ☐ $f : x \mapsto e^{2x} + 5$
- ☐ $f : x \mapsto 2e^x + 5$
- ☐ $f : x \mapsto 2x + 5$

Question 123
Parmi les fonctions suivantes quelles sont celles qui sont des solutions de l'équation différentielle $y' = xy$?

- ☐ $f(x) = \exp(x^2)$
- ☐ $f(x) = 2\exp(x^2/2)$
- ☐ $f(x) = 0$
- ☐ $f(x) = 1$

Question 124
Soit la fonction $f(x) = \cos(x)$. De quelle(s) équation(s) différentielle(s) f est-elle solution ?

- ☐ $y' = y$
- ☐ $y'' = -y$
- ☐ $y' - y = -\sin(x) - \cos(x)$
- ☐ $y'' = -y'$

3.5 Notion d'équation différentielle | Moyen

Question 125
Soit l'équation différentielle $y' = 2x(y + x) - 1$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ $y = e^{x^2} - x$ est une solution.
- ☐ Cette équation différentielle n'a pas de solution constante.
- ☐ $y = -x$ est une solution.
- ☐ $y = e^{x^2} - x + 1$ est une solution.

Question 126
Soit l'équation différentielle $xy' - 3y = 0$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ $x^3 + 1$ est une solution.
- ☐ x^3 est une solution.
- ☐ e^{3x} est une solution.
- ☐ La fonction nulle est la seule solution constante.

Question 127
Soit f une solution de l'équation différentielle $y' = y^2 + 1$. Quelles sont les affirmations vraies sur la fonction f ?

- ☐ f est une fonction croissante.
- ☐ f est une fonction décroissante.
- ☐ f' est une fonction positive.
- ☐ f peut être une fonction constante.

Question 128
Soit l'équation différentielle $y' - 2xy = 4x$. Quelles sont les affirmations vraies concernant les solutions de cette équation ?

- ☐ $y = -2$ est une solution.
- ☐ $y = +2$ est une solution.
- ☐ $y = e^{x^2} + 2$ est une solution.
- ☐ $y = e^{x^2} - 2$ est une solution.

3.6 Notion d'équation différentielle | Difficile

Question 129
Soit f une solution de l'équation différentielle $y' = 2y - x^3$. On sait que la courbe représentative de f passe par le point $A(1,2)$. Quelle est la pente de sa tangente au point A ?

- ☐ -1
- ☐ 1
- ☐ 2
- ☐ 3

Question 130
Soit f une solution de l'équation différentielle $y' = y + 3x$. On sait de plus que la courbe représentative de f passe par le point $A(-1,2)$. Quelles sont les affirmations exactes ?

- ☐ La pente de la tangente à la courbe de f au point A est -1.
- ☐ La pente de la tangente à la courbe de f au point A est 4.
- ☐ La tangente à la courbe de f au point A admet pour équation : $y = -x + 1$.
- ☐ La tangente à la courbe de f au point A admet pour équation : $y = 4x + 6$.

Question 131
Soit l'équation différentielle $xy' = y - x$ définie pour $x \in]0,+\infty[$. Quelles sont les fonctions solutions de cette équation, quelle que soit la constante C ?

- ☐ $f(x) = x - C\ln(x)$
- ☐ $f(x) = x - \ln(x) + C$
- ☐ $f(x) = Cx - x\ln(x)$
- ☐ $f(x) = x - C$

Question 132
Soit f une solution de l'équation différentielle $y' = \cos(x)y$, vérifiant $f(\frac{\pi}{3}) = 3$. On considère la courbe représentative de f. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ La tangente en $x = \frac{\pi}{3}$ a pour équation $y = \frac{3}{2}x + 3$.
- ☐ La tangente en $x = \frac{\pi}{3}$ a pour équation $y = \frac{3}{2}(x - \frac{\pi}{3}) + 3$.
- ☐ La tangente en $x = \frac{\pi}{2}$ est horizontale.
- ☐ La tangente en $x = \frac{\pi}{3}$ est horizontale.

3.7 $y' = ay$ | Facile

Question 133

Les solutions de l'équation différentielle $y' = -y$ sont :

- ☐ $e^{-x} + C$ avec C constante réelle.
- ☐ $e^{x} + C$ avec C constante réelle.
- ☐ Ce^{-x} avec C constante réelle.
- ☐ Ce^{x} avec C constante réelle.

Question 134

Les solutions de l'équation différentielle $y' + 2y = 0$ sont :

- ☐ $e^{-2x} + C$ avec C constante réelle.
- ☐ $e^{2x} + C$ avec C constante réelle.
- ☐ Ce^{2x} avec C constante réelle.
- ☐ Ce^{-2x} avec C constante réelle.

Question 135

De quelle(s) équation(s) différentielle(s) $4e^{3x}$ est-elle une solution ?

- ☐ $y' = 3y$
- ☐ $3y' = y$
- ☐ $y' = 4y$
- ☐ $4y' = y$

Question 136

Parmi les fonctions suivantes, quelles sont celles solutions de l'équation différentielle $y' = 3y$?

- ☐ $f(x) = 3e^{2x}$
- ☐ $f(x) = 2e^{3x}$
- ☐ $f(x) = e^{-3x}$
- ☐ $f(x) = e^{-2x}$

Question 137

Parmi les fonctions suivantes, quelles sont celles solutions de l'équation différentielle $y' = \frac{1}{e}y$?

- ☐ $f(x) = C\exp(x/e)$
- ☐ $f(x) = C\exp(ex)$
- ☐ $f(x) = Ce\exp(x)$
- ☐ $f(x) = C\frac{\exp(x)}{e}$

3.8 $y' = ay$ | Moyen

Question 138
Que peut-on dire des solutions de l'équation différentielle $y' = ay$?

- ☐ Ce sont toutes des fonctions croissantes sur $\mathbb{R}$.
- ☐ Ce sont toutes des fonctions décroissantes sur $\mathbb{R}$.
- ☐ Si $a \geqslant 0$, ce sont des fonctions croissantes sur $\mathbb{R}$.
- ☐ Ce sont toutes des fonctions monotones sur $\mathbb{R}$.

Question 139
Soit $f : x \mapsto -2e^{3x}$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ f est la seule solution de l'équation différentielle $y' = 3y$ dont la courbe représentative passe par le point $A(0, 3)$.
- ☐ f est la seule solution de l'équation différentielle $y' = 3y$ qui tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.
- ☐ f est la seule solution de l'équation différentielle $y' = 3y$ valant -2 en $x = 0$.
- ☐ f est la seule solution de l'équation différentielle $y' = 3y$ dont la dérivée en $x = 0$ est -6.

Question 140
Soit l'équation différentielle $y' + 5y = 0$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ Les solutions générales sont $y(x) = Ce^{-5x}$.
- ☐ Les solutions générales sont $y(x) = Ce^{5x}$.
- ☐ La solution vérifiant $y(1) = 0$ est $y(x) = e^{-5x}$.
- ☐ La solution vérifiant $y(1) = 0$ est $y(x) = e^{5x}$.

Question 141
Pour quelles valeurs de a et b la fonction $y(x) = 7e^{-5x}$ est-elle solution de $y' = ay$ avec $y(0) = b$?

- ☐ $a = -5$ et $b = 7$
- ☐ $a = 5$ et $b = 7$
- ☐ $a = 5$ et $b = 0$
- ☐ $a = 0$ et $b = 7$

3.9 $y' = ay$ | Difficile

Question 142
Soit f la solution de l'équation différentielle $y' + 3y = 0$ telle que $f'(0) = -6$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ La courbe représentative de f passe par $A(0, 2)$.
- ☐ La courbe représentative de f passe par $A(0, -6)$.
- ☐ f est toujours négative.
- ☐ f est une fonction décroissante sur $\mathbb{R}$.

Question 143
Soit f la solution de l'équation différentielle $y' = 4y$ telle que $f(1) = e^4$.

☐ La courbe représentative de f passe par le point $A(1, e^4)$.

☐ La courbe représentative de f passe par le point $B(0, 1)$.

☐ La pente de la tangente à la courbe de f en $x = 1$ est 4.

☐ On n'a pas assez de données pour déterminer la pente de la tangente à la courbe de f en $x = 0$.

Question 144
Soit l'équation différentielle $y' = ay$ avec $a > 0$. Quelles sont les affirmations vraies ?

☐ Il n'y a pas de solutions constantes.

☐ Il y a une seule solution constante.

☐ Toute solution vérifie $y(x) \geqslant 0$.

☐ Toute solution $y(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $-\infty$.

Question 145
Soit la solution de l'équation différentielle $y' = 2y$ vérifiant $y(0) = -1$. Quelles sont les affirmations vraies ?

☐ La solution est toujours négative.

☐ La solution est une fonction décroissante.

☐ La pente de la tangente en $x = 0$ vaut 1.

☐ La pente de la tangente en $x = 1$ vaut $-2e^2$.

3.10 $y' = ay + b$ et $y' = ay + f$ | Facile

Question 146
Soit l'équation différentielle $2y' + 4y = 3$. Quelles sont les affirmations vraies ?

☐ La seule solution constante est $y = 3/2$.

☐ La seule solution constante est $y = 3/4$.

☐ Les solutions sont $Ce^{-4x} - 3$ avec C constante réelle.

☐ Les solutions sont $Ce^{-2x} + 3/4$ avec C constante réelle.

Question 147
Soit l'équation différentielle $3y' = y - 3$. Quelles sont les affirmations vraies ?

☐ La seule solution constante est $y = 1$.

☐ La seule solution constante est $y = 3$.

☐ Les solutions sont $Ce^{3x} + 1$ avec C constante réelle.

☐ Les solutions sont $Ce^{x/3} + 3$ avec C constante réelle.

Question 148
Soit $f(x) = e^x + 3$. De quelle(s) équations(s) différentielle(s) cette fonction est-elle solution ?

- ☐ $y' - y = e^x$
- ☐ $y' = y - 3$
- ☐ $3y' - y = 0$
- ☐ $y' - 3y = 0$

Question 149
Soit l'équation différentielle $y' = 2y + \cos(x)$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ Les solutions de l'équation homogène associée sont les $y(x) = C\sin(x)$.
- ☐ Les solutions de l'équation homogène associée sont les $y(x) = C\cos(x)$.
- ☐ Une solution particulière est $y(x) = \frac{1}{5}\sin(x) - \frac{2}{5}\cos(x)$.
- ☐ Une solution particulière est $y(x) = e^{2x}$.

Question 150
Soit l'équation différentielle $y' = 2y - 2x + 1$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ La seule solution constante est $y(x) = x - \frac{1}{2}$.
- ☐ $y(x) = x$ est une solution particulière.
- ☐ $y(x) = 3e^{2x} + x$ est une solution particulière.
- ☐ $y(x) = x^2$ est une solution particulière.

3.11 $y' = ay + b$ et $y' = ay + f$ | Moyen

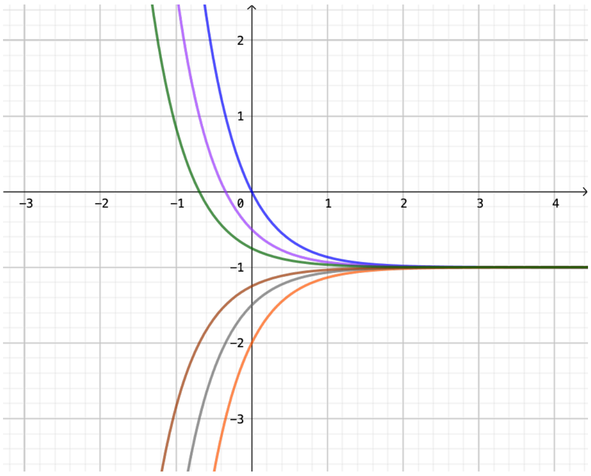
Question 151
Quelles sont les valeurs de a, b et c telles que $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ soit solution de l'équation différentielle $y' + 2y = 4x^2 + 2x - 1$?

- ☐ $a = 4$, $b = 2$, $c = -1$
- ☐ $a = 2$, $b = -1$, $c = 0$
- ☐ $a = 2$, $b = -1$, $c = -1$
- ☐ $a = 4$, $b = -3$, $c = 1$

Question 152
Parmi les fonctions suivantes, quelles sont celles qui sont solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = 2y + e^{2x}$ et qui valent 2 en $x = 0$:

- ☐ $x \mapsto 2e^{2x}$
- ☐ $x \mapsto xe^{2x}$
- ☐ $x \mapsto xe^{2x} + 2$
- ☐ $x \mapsto (x+2)e^{2x}$

Question 153
Le graphique ci-dessous représente plusieurs solutions de l'équation différentielle $y' + 2y = b$, où b est un réel. Quelle est la valeur de b ?



- ☐ $b = -2$
- ☐ $b = -1$
- ☐ $b = 1/2$
- ☐ $b = 1$

Question 154

Soit l'équation différentielle $y' + y = e^x$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ Les solutions de l'équation homogène associée sont $y(x) = Ce^x$.
- ☐ Une solution particulière est $y(x) = e^{-x}$.
- ☐ La solution vérifiant $y(0) = 1$ est $y(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.
- ☐ La solution vérifiant $y(1) = 1$ est $y(x) = e \cdot e^{-x}$.

Question 155

Soit l'équation différentielle $y' = y + x^2 - 1$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ Les solutions de l'équation homogène associée sont $y(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + C$.
- ☐ Les solutions de l'équation homogène associée sont $y(x) = Ce^{x^2-1}$.
- ☐ Une solution particulière est $y(x) = e^x$.
- ☐ Une solution particulière est $y(x) = -x^2 - 2x - 1$.

Question 156

On considère l'équation différentielle $y' + y = 2x^2(x+3)$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ Il existe un nombre réel r tel que $y(x) = e^{rx}$ soit une solution particulière.
- ☐ Il existe deux nombres entiers k et n tels que $y(x) = kx^n$ soit une solution particulière.
- ☐ $y(x) = e^{-x} + 2x^3$ est une solution particulière vérifiant $y(0) = 0$.
- ☐ $y(x) = -2e^{-x} + 2x^3$ est une solution particulière vérifiant $y(0) = 0$.

Question 157

Soit (E) l'équation différentielle $y' + 5y = 5x^2 + 2x$. Alors :

- ☐ Si f est solution de (E), alors la fonction $x \mapsto f(x) - 5x^2 - 2x$ est solution de l'équation différentielle $(H) : y' + 5y = 0$.
- ☐ Si f est solution de (E), alors la fonction $x \mapsto f(x) - x^2$ est solution de l'équation différentielle $(H) : y' + 5y = 0$.
- ☐ Si f est solution de (E), alors la fonction $x \mapsto f(x) - e^{-5x}$ est solution de l'équation différentielle $(H) : y' + 5y = 0$.
- ☐ Si f est solution de (E), alors la fonction $x \mapsto f(x) - 2x$ est solution de l'équation différentielle $(H) : y' + 5y = 0$.

Question 158

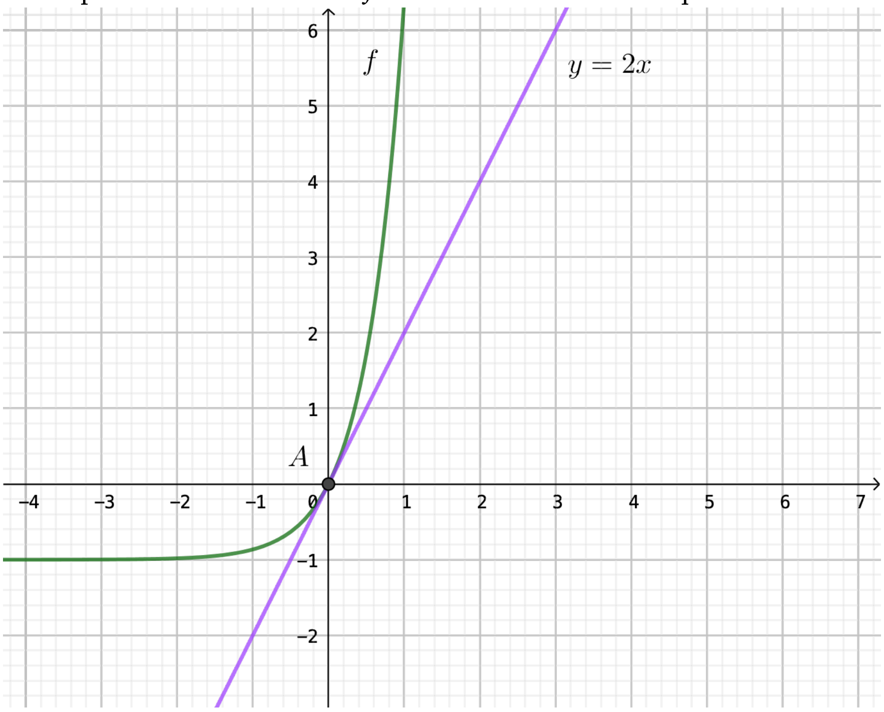
Soit l'équation différentielle $y' = y + 2e^{3x} + 4xe^{3x}$. On recherche une solution particulière sous la forme $f(x) = axe^{bx}$. Quelles doivent être les valeurs de a et b ?

- ☐ $a = 4,\ b = 3$
- ☐ $a = 2,\ b = 3$
- ☐ $a = 1,\ b = 3$
- ☐ $a = 1,\ b = 4$

3.12 $y' = ay + b$ et $y' = ay + f$ | Difficile

Question 159

Le graphique ci-dessous représente la courbe représentative d'une fonction f ainsi que sa tangente en un point A. Cette fonction f est solution d'une des équations différentielles suivantes ; laquelle ?



- ☐ $y' = 2x$
- ☐ $y' = y + 1$
- ☐ $y' = 2y + 2$
- ☐ $y' = 2y - 2$

Question 160
Soit f une fonction dont la courbe représentative admet pour tangente en $x = -1$ la droite d'équation $y = 2x - 2$. Parmi les équations différentielles suivantes, quelle est la seule dont f peut être une solution ?

- ☐ $y' = y + e^x$
- ☐ $y' = -y + 2x$
- ☐ $y' = 2y + 3x^3$
- ☐ $2y' - y = 2$

Question 161
Soit l'équation différentielle $2y' = 3y + 1$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ Il y a au moins une solution dont la limite en $-\infty$ est 0.
- ☐ La solution vérifiant $y(0) = 0$ est $y(x) = \frac{1}{3}(e^{\frac{3}{2}x} - 1)$.
- ☐ La solution vérifiant $y(0) = 0$ est $y(x) = 0$.
- ☐ La solution vérifiant $y(0) = 0$ est $y(x) = e^{\frac{3}{2}x} - 1$.

Question 162
Soit l'équation différentielle $y' = y + 3x - 2$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ Une solution particulière est $y(x) = -3x - 1$.
- ☐ Une solution particulière est $y(x) = 3x - 2$.
- ☐ La solution vérifiant $y(0) = 1$ est $y(x) = 2e^x - 3x - 1$.
- ☐ La solution vérifiant $y(0) = 1$ est $y(x) = 3e^x + 3x - 2$.

Question 163
Soit f une solution de l'équation différentielle $(H) : y' = 4y$. De quelle équation différentielle la fonction $g : x \mapsto f(x) + e^{2x}$ sera-t-elle solution ?

- ☐ $y' = 4y + e^{2x}$
- ☐ $y' - 4y = 4e^{2x}$
- ☐ $y' = 4y - 2e^{2x}$
- ☐ $y' = 2y$