# Calcul de débit

### Exercice 25.

Lors d'un prélèvement sanguin le débit du sang, mesuré en ml/h, varie en fonction du temps $t$, en heures, selon la formule :

$$D(t) = \frac{K}{(t+1)(t+2)}.$$

a) Déterminer deux constantes $A$ et $B$ telles que $\frac{1}{(t+1)(t+2)} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t+2}$.

b) En sachant que pour un prélèvement qui dure $a$ heures la volume prélevé est

$$V(a) = \int_0^a D(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Montrer que $V(a) = K\ln\left(\frac{2a+2}{a+2}\right)$.

c) On estime que le volume sanguin du corps humain est en moyenne de 70 ml/kg. En considèrant que pour un temps très long on peut prélever la totalité du sang, déterminer la constante $K$ pour un homme de 80 kg.

d) Quelle est la quantité de sang prélevé en 10 minutes pour un individu de ce poids ?

### Indications 25.

a)

b)

c) Pour déterminer $K$ utiliser que le volume total s'obtient aussi en calculant la limite $V = \lim_{a\to+\infty} V(a)$.

d)

### Correction 25.

Correction vidéo ■

a) On réduit la fraction $\frac{A}{t+1} + \frac{B}{t+2}$ au même dénominateur :

$$\frac{A}{t+1} + \frac{B}{t+2} = \frac{A(t+2)+B(t+1)}{(t+1)(t+2)} = \frac{(A+B)t+2A+B}{(t+1)(t+2)}$$

On veut que cette fraction soit égale à $\dfrac{0\cdot t+1}{(t+1)(t+2)}$ il faut donc :

$$\begin{cases} A+B &= 0 \\ 2A+B &= 1 \end{cases}$$

La première ligne donne $B = -A$ ce qui en reportant dans la seconde ligne donne $A = 1$. On obtient donc $A = 1$ et $B = -1$. (C'est une bonne idée de vérifier que cette solution conduit à la bonne fraction.)

b)

$$
\begin{aligned}
V(a) &= \int_0^a D(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^a \frac{K}{(t+1)(t+2)}\,\mathrm{d}t \\
&= K\int_0^a \left(\frac{1}{t+1} + \frac{-1}{t+2}\right)\mathrm{d}t \qquad \text{en utilisant la première question} \\
&= K\int_0^a \frac{\mathrm{d}t}{t+1} \quad - \quad K\int_0^a \frac{\mathrm{d}t}{t+2} \\
&= K\,[\ln(t+1)]_0^a \quad - \quad K\,[\ln(t+2)]_0^a \qquad \text{car une primitive de } \frac{1}{t} \text{ et } \ln(t) \\
&= K\,(\ln(a+1)-\ln(1)) - K\,(\ln(a+2)-\ln(2)) \\
&= K\,(\ln(a+1)-\ln(a+2)+\ln(2)) \\
&= K\ln\left(\frac{2(a+1)}{a+2}\right) \qquad \text{en utilisant } \ln(ab)=\ln(a)+\ln(b) \text{ et } \ln(a/b)=\ln(a)-\ln(b)
\end{aligned}
$$

c) — D'une part par les information de l'énoncé on sait que le volume du sang d'un homme de 80 kg est :

$$V = 70 \times 80 = 5600 \text{ ml} = 5,6 \text{ l}$$

— D'autre part le volume total, correspond au volume que l'on prélèverait sur un temps très long :

$$V = \lim_{a\to+\infty} V(a)$$

Calculons cette limite : Comme $\frac{2(a+1)}{a+2} \to 2$ quand $a \to +\infty$, alors

$$V(a) = K\ln\left(\frac{2(a+1)}{a+2}\right) \xrightarrow[a\to+\infty]{} K\ln(2).$$

Ainsi $V = K\ln(2)$.

— Ainsi $V = 5600 = K\ln(2)$ donc $K = \frac{5600}{\ln(2)} \simeq 8080$.

d) Le volume prélevé en 10 minutes (soit $\frac{1}{6}$ d'heure) est $V(a) = K\ln\left(\frac{2(a+1)}{a+2}\right)$ avec $a = \frac{1}{6}$ et $K \simeq 8080$, c'est-à-dire :

$$V(\tfrac{1}{6}) = K \cdot \ln\left(\frac{2(\frac{1}{6}+1)}{\frac{1}{6}+2}\right) \simeq 8080 \cdot \ln\left(\frac{14}{13}\right) \simeq 600 \text{ ml}$$

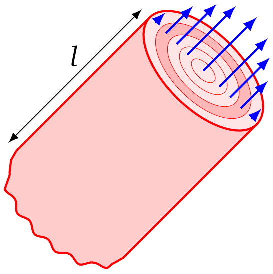
Note : lors d'un don du sang le volume prélevé est compris entre 400 et 500 ml.

**Exercice 26.**

Pour étudier le flux dans un vaisseau sanguin, on peut modéliser le vaisseau par un tube cylindrique de rayon $R$ et de longueur $l$. On désigne par $v(r)$ la vitesse du sang (en cm/s) en un point à distance $r$ de l'axe central. On admet que le débit sanguin total $F$ est donné par l'intégrale

$$F = \int_0^R 2\pi r v(r) dr. \tag{1}$$

a) Calculer $F$ lorsque l'on suppose $v(r) \equiv v$ constante sur $[0,R]$. Expliquer pourquoi le débit trouvé est le produit de la vitesse $v$ multipliée par la section du vaisseau sanguin.




A cause du frottement contre les parois du tube, la vitesse du sang est maximale au centre du vaisseau et est nulle au niveau des parois. La vitesse en un point à distance $r$ de l'axe central est donnée (en cm/s) par

$$v(r) = \frac{P}{4\eta l}(R^2 - r^2) \tag{2}$$

où $P$ est la différence de pression entre les deux extrémités du tube et $\eta$ la viscosité du sang.

b) Calculer le débit à partir de (1) en utilisant l'expression (2) de $v(r)$. Cette expression de $F$ est appelée la loi de Poiseuille.

c) L'hypertension est due au rétrécissement des artères. Pour maintenir le même débit, le coeur doit pomper plus fort, ce qui augmente la pression sanguine. Utiliser la loi de Poiseuille pour montrer que si $R_0$ et $P_0$ sont les valeurs normales du rayon et de la pression, $R$ et $P$ les valeurs lors de l'hypertension, alors conserver le même débit sanguin impliquera la relation

$$\frac{P}{P_0} = \left(\frac{R_0}{R}\right)^4. \tag{3}$$

En déduire que si le rayon de l'artère est réduit aux trois quarts de sa valeur normale, la pression sanguine a plus que triplé.

**Indications 26.**

Une primitive de $x^n$ est $\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$, $C \in \mathbb{R}$.

**Correction 26.**

`Correction vidéo` ■

a) Soit $v(r) \equiv v$ constante sur $[0, R]$. Alors la formule (1) implique

$$F = \int_0^R 2\pi r v dr = 2\pi v \int_0^R r dr = 2\pi v \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R = \underbrace{\pi R^2}_{\text{section du vaisseau}} \cdot \underbrace{v}_{\text{vitesse}}.$$

b) On a

$$F = \int_0^R 2\pi r \frac{P}{4\eta l}(R^2 - r^2) dr = \frac{\pi P}{2\eta l} \int_0^R (R^2 r - r^3) dr = \frac{\pi P}{2\eta l}\left[\frac{R^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^R = \frac{\pi P}{2\eta l}\left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4}\right) = \frac{\pi P R^4}{8\eta l}.$$

c) On a $F = \frac{\pi P R^4}{8\eta l}$ et $F_0 = \frac{\pi P_0 R_0^4}{8\eta l}$. Alors $F = F_0$ implique

$$\frac{\pi P R^4}{8\eta l} = \frac{\pi P_0 R_0^4}{8\eta l} \iff P R^4 = P_0 R_0^4 \iff \frac{P}{P_0} = \left(\frac{R_0}{R}\right)^4.$$

Si $R = \frac{3}{4} R_0$, alors

$$P = \left(\frac{4}{3}\right)^4 P_0 > 3P_0.$$