Fiche 5. Équations différentielles 1

Savoir.

- ☐ Comprendre ce qu'est une équation différentielle.
- ☐ Savoir expliquer les termes d'une équation différentielle à partir des notions d'effectif, de taux de croissance ou de proportionnalité.

Savoir-faire.

- ☐ Savoir vérifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle.
- ☐ Savoir déterminer les solutions constantes d'une équation différentielle.
- ☐ Savoir trouver l'équation différentielle associée à une situation décrite par un texte.

Vidéo ■ Fiche 5.1. Équations différentielles
Vidéo ■ Fiche 5.2. Équations différentielles (suite)

Nous nous intéressons à des équations où l'inconnue à trouver n'est pas un nombre mais une fonction. Par exemple, considérons l'équation $f'(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On cherche toutes les fonctions f possibles satisfaisant cette équation. Vous en connaissez au moins une. Laquelle ? La fonction exponentielle ! Il existe d'autres solutions. En fait, les solutions de cette équation sont les fonctions de la forme $f(x) = ke^x$ où k est une constante réelle.

Définition d'une équation différentielle

On appelle **équation différentielle** toute équation, d'inconnue une fonction f, mettant en relation f et f' (et éventuellement les dérivées successives f'', f''', ...).

Exemples. Les équations suivantes sont des exemples d'équations différentielles :

$$f'(x) = e^x f(x) + x,$$
$$f''(x) = -f'(x) + 2,$$
$$f(x)f'(x) = -\ln(f(x)).$$

Notation. Il faut s'habituer aux notations variées pour une équation différentielle. Voici différentes notations de la même équations :

$$f'(x) = -f(x) \qquad \text{(fonction inconnue } f \text{ de variable } x\text{)},$$
$$y'(x) = -y(x) \qquad \text{(fonction inconnue } y \text{ de variable } x\text{)},$$
$$y'(t) = -y(t) \qquad \text{(fonction inconnue } y \text{ de variable } t\text{)},$$
$$y' = -y \qquad \text{(fonction inconnue } y\text{, le nom de la variable n'est pas spécifié)}.$$

Exercice. Trouver/deviner une solution (ou mieux plusieurs) des équations différentielles suivantes :

$$y'(x) = -y(x)$$
$$y'(x) = \sin(2x)$$
$$y'(x) = 3y(x)$$
$$y''(x) = y(x)$$

Solutions particulières – Solutions constantes

Résoudre une équation différentielle c'est trouver toutes les fonctions qui satisfont l'équation. En général, c'est un problème très difficile, voir impossible.
Nous nous placerons dans deux situations plus simples :

— vérifier qu'une fonction donnée est bien solution de l'équation différentielle,

— déterminer les solutions constantes d'une équation différentielle.

Exemple 1

$$y'(x) = 2xy(x) + 4x \tag{1}$$

Vérifier que $y(x) = k\exp(x^2) - 2$ est solution (quel que soit $k \in \mathbb{R}$).
Si $y(x) = k\exp(x^2) - 2$, alors par dérivation $y'(x) = 2kx\exp(x^2)$. Mais d'autre part $2xy(x) + 4x = (2kx\exp(x^2) - 4x) + 4x = 2kx\exp(x^2)$ et donc $2xy(x) + 4x = y'(x)$. Ainsi $y(x) = k\exp(x^2) - 2$ est bien solution de l'équation différentielle (1).

Exemple 2 On considère l'équation différentielle

$$y''(x) - y'(x) = 2y(x) \tag{2}$$

Vérifier que $y(x) = 3e^{-x} + \sqrt{2}e^{2x}$ solution de l'équation différentielle (2), pour cela :

— calculer que $y'(x) = -3e^{-x} + 2\sqrt{2}e^{2x}$,

— calculer que $y''(x) = 3e^{-x} + 4\sqrt{2}e^{2x}$,

— conclure.

Exemple 3 On considère l'équation différentielle

$$y'(x) = y(x)^3 + 2y(x)^2 - 3y(x) \tag{3}$$

Déterminons les solutions constantes de cette équation différentielle. Pour cela, rappelons les points suivants :

— Une fonction définie et dérivable sur un intervalle I est constante si et seulement si sa dérivée est nulle sur I.

— Pour connaître une fonction f constante sur un intervalle I, il suffit de la connaître la valeur en un point $x_0 \in I$.

Ainsi pour déterminer les solutions constantes de (3), il suffit de résoudre l'équation réelle (équation dont l'inconnue est un réel que nous noterons c)

$$0 = c^3 + 2c^2 - 3c. \tag{4}$$

On a $c^3+2c^2-3c = c(c^2+2c-3)$. Donc $c^3+2c^2-3c = 0 \iff c = 0$ ou $c^2+2c-3 = 0$. Il reste à résoudre $c^2+2c-3 = 0$ c'est-à-dire trouver les racines d'un trinôme du second degré. Les réels -3 et 1 sont racines évidentes. Ainsi $c^3 + 2c^2 - 3c = 0 \iff c = 0$ ou $c = -3$ ou $c = 1$. Au final, l'équation différentielle (3) possède trois solutions constantes : $y_1(x) = -3$, $y_2(x) = 0$ et $y_3(x) = 1$.

Modélisation

Le concept d'équation différentielle intervient dans de nombreux domaines scientifiques. Entre autres, elles interviennent dans les domaines suivants :

— En biologie avec l'étude d'une population (comme la population de micro-organismes) où l'on connaît des règles pour décrire sa croissance (comme le taux de natalité/mortalité).

— En physique avec la loi fondamentale de la mécanique qui relie l'accélération à la somme des forces. Cela conduit à une équation différentielle car l'accélération est la dérivée seconde de la position.

— En radioactivité avec l'étude de la désintégration de noyaux radioactifs et le calcul de la demi-vie radioactive.

Ce sera parfois à vous de trouver l'équation différentielle en fonction de l'énoncé avant d'avoir à la résoudre. Voici deux exemples.

Exemple 1. "*On étudie la population de chenilles qui s'est introduite dans un groupe d'arbres. On note* $N(t)$ *le nombre de chenilles au cours du temps. Des mesures effectuées montrent que le taux de croissance des chenilles au temps* t *est de* 4% *de la population.*"
Ce texte signifie que la variation du nombre de chenilles au temps t (c'est-à-dire la dérivée du nombre de chenilles au temps t, donc $N'(t)$) est proportionnelle à l'effectif des chenilles au temps t (c'est-à-dire proportionnelle à $N(t)$) et que le coefficient de proportionnalité vaut 0.04 (la population croît donc le coefficient est positif).
L'équation différentielle associée au problème est donc :

$$N'(t) = 0.04\, N(t).$$

Exemple 2. "*On considère une population de renards roux. Une maladie décime les proies et les renards ne peuvent plus s'alimenter. On estime que le taux de décroissance des renards est de* 5% *de la population à chaque instant* t.*"
Notons $R(t)$ l'effectif des renards au temps t. D'après le texte, $R'(t)$ est proportionnelle à $R(t)$ et le coefficient de proportionnalité est -0.05 (le coefficient est négatif car la population décroît).
L'équation différentielle associée au problème est donc :

$$R'(t) = -0.05\, R(t).$$