Calcul d'intégrales

Exercice 20.

Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_2^4 (x-2)^5\,dx$ b) $\int_0^1 \sqrt{3y+1}\,dy$ c) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 5\sin(2\theta)\,d\theta$ d) $\int_0^1 \frac{1}{(2t+1)^3}\,dt$

Indications 20.

Il s'agit de faire des changements de variable simples :

a) Poser $u = x-2$.

b) Poser $u = 3y+1$.

c) Poser $u = 2\theta$.

d) Poser $u = 2t+1$.

Correction 20.

Correction vidéo ■

a) $I = \int_2^4 (x-2)^5\,dx$

On pose $u = x-2$. On alors $du = dx$. La calcul de l'intégrale va de la borne $x = 2$ à $x = 4$. Ce qui donne comme bornes en u : de $u = 2-2 = 0$ à $u = 4-2$ (car $u = x-2$).

La formule de changement de variable transforme l'intégrale en x en une intégrales en u. On n'oublie pas de changer les bornes (les bornes en x sont remplacées par des bornes en u) et aussi l'élément différentiel (la nouvelle intégrale a pour élément différentiel du).

$$I = \int_{x=2}^{x=4} (x-2)^5\,dx = \int_{u=0}^{u=2} u^5\,du$$

Cette nouvelle intégrale est beaucoup plus facile à calculer :

$$I = \int_{u=0}^{u=2} u^5\,du = \left[\frac{u^6}{6}\right]_{u=0}^{u=2} = \frac{2^6}{6} = \frac{64}{6} = \frac{32}{3}.$$

b) $\int_0^1 \sqrt{3y+1}\,dy$

On pose $u = 3y+1$. On alors $du = 3\,dy$ et donc $dy = \frac{du}{3}$. Les bornes en x sont de $x = 0$ à $x = 1$ et deviennent en la variable u : de $u = 1$ à $u = 4$.

$$
\begin{aligned}
\int_{y=0}^{y=1} \sqrt{3y+1}\,dy &= \int_{u=1}^{u=4} \sqrt{u}\,\frac{du}{3} \\
&= \frac{1}{3}\int_{u=1}^{u=4} u^{\frac{1}{2}}\,du \\
&= \frac{1}{3}\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_{u=1}^{u=4} \qquad \text{car une primitive de } u^{\alpha} \text{ est } \frac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1} \text{ avec ici } \alpha = \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\cdot 4^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\cdot 1^{\frac{3}{2}}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\cdot 8 - \frac{2}{3}\cdot 1^{\frac{3}{2}}\right) \qquad \text{car } 4^{\frac{3}{2}} = (4^3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{64} = 8 \\
&= \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot 7 \\
&= \frac{14}{9}
\end{aligned}
$$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 5\sin(2\theta)\,d\theta$

Posons $u = 2\theta$, alors $du = 2\,d\theta$ et donc $d\theta = \frac{du}{2}$. θ varie de $\theta = 0$ à $\theta = \frac{\pi}{4}$ donc u varie de $u = 0$ à $u = \frac{\pi}{2}$.

$$\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{4}} 5\sin(2\theta)\,d\theta = \int_{u=0}^{u=\frac{\pi}{2}} 5\sin(u)\,\frac{du}{2} = \frac{5}{2}\big[-\cos(u)\big]_{u=0}^{u=\frac{\pi}{2}} = \frac{5}{2}\big(-\cos(\frac{\pi}{2}) - (-\cos(0))\big) = \frac{5}{2}(0+1) = \frac{5}{2}.$$

d) $\int_0^1 \frac{1}{(2t+1)^3}\,dt$

Posons $u = 2t+1$. Donc $du = 2\,dt$ ou encore $dt = \frac{du}{2}$. t varie de $t = 0$ à $t = 1$ donc u varie de $u = 1$ à $u = 3$.

$$\int_{t=0}^{t=1} \frac{1}{(2t+1)^3}\,dt = \int_{u=1}^{u=3} \frac{1}{u^3}\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int_{u=1}^{u=3} u^{-3}du = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}u^{-2}\right]_{u=1}^{u=3} = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3^2} + \frac{1}{1^2}\right) = \frac{1}{4}\cdot\frac{8}{9} = \frac{2}{9}$$

On a utilisé que $\frac{1}{u^2} = u^{-2}$, $\frac{1}{u^3} = u^{-3}$ et qu'une primitive de u^{α} est $\frac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}$, ce qui donne pour $\alpha = -3$: une primitive de u^{-3} est $-\frac{1}{2}u^{-2}$. Si vous préférez vous pouvez dire directement qu'une primitive de $\frac{1}{u^3}$ est $-\frac{1}{2}\frac{1}{u^2}$.

Exercice 21.

Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_0^1 xe^{x^2}\,dx$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{3\cos(y)}\sin(y)\,dy$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(\theta)\,d\theta$

d) $\int_1^5 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\,dx$

Indications 21.

Vous pouvez soit reconnaître une forme $u'f'(u)$ et utiliser qu'une primitive de la fonction $u'(x)f'(u(x))$ est $f(u(x))+C$, c'est la méthode de substitution, $C \in \mathbb{R}$ ou bien vous pouvez faire un changement de variable.

Correction 21.

Correction vidéo ■

La méthode de substitution ou le changement de variable sont des méthodes équivalentes. Choisissez celle que vous préférez !

a) $\int_0^1 xe^{x^2}dx$

Substitution. On sait que $(x^2)' = 2x$. Alors xe^{x^2} est de la forme $\frac{1}{2}u'(x)f'(u(x))$ avec $u(x) = x^2$ et $f(x) = e^x$ et on obtient

$$\int_0^1 xe^{x^2}dx = \left[\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}(e-1).$$

Changement de variable.

On pose $u = x^2$, donc $du = 2x\,dx$. Les bornes de $x = 0$ à $x = 1$ deviennent des bornes de $u = 0$ à $u = 1$. Ainsi :

$$\int_{x=0}^{x=1} e^{x^2}x dx = \int_{u=0}^{u=1} e^u\frac{du}{2} = \frac{1}{2}[e^u]_{u=0}^{u=1} = \frac{1}{2}(e-1)$$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{3\cos(y)}\sin(y)dy$

Substitution. On sait que $\cos'(y) = -\sin(y)$. Alors $\sqrt{3\cos(y)}\sin(y)$ est de la forme $-\sqrt{3}u'(y)f'(u(y))$ avec $u(y) = \cos(y)$ et $f(y) = \frac{2}{3}y^{3/2}$ et on obtient

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{3\cos(y)}\sin(y)dy = \left[-\sqrt{3}\,\frac{2}{3}(\cos(y))^{3/2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{3}}\left((\cos(\pi/2))^{3/2}-(\cos(0))^{3/2}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Changement de variable. On pose $u = 3\cos(y)$, donc $du = -3\sin(y)dy$. Les bornes de $y = 0$ à $y = \frac{\pi}{2}$ deviennent des bornes de $u = 3\cos(0) = 3$ à $u = 3\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$.

$$\int_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}} \sqrt{3\cos(y)}\sin(y)dy = \int_{u=3}^{u=0} \sqrt{u}\frac{-du}{3} = +\frac{1}{3}\int_{u=0}^{u=3} \sqrt{u}\,du = \frac{1}{3}\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_{u=0}^{u=3} = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot(\sqrt{3})^3 = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(\theta)d\theta$

Substitution. Comme $\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$ et $\cos'(\theta) = -\sin(\theta)$, $\tan(\theta)$ est de la forme $u'(\theta)f'(u(\theta))$ avec $u(\theta) = \cos(\theta)$ et $f(\theta) = \ln(\theta)$ et on obtient

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(\theta)d\theta = [-\ln(\cos(\theta))]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\ln(\cos(\pi/4)) + \ln(\cos(0)) = -\ln\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \frac{1}{2}\ln(2).$$

Changement de variable. Poser $u = \cos(\theta)$.

d) $\int_1^5 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}dx$

Substitution. Comme $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$ est de la forme $u'(x)f'(u(x))$ avec $u(x) = \sqrt{x}$ et $f(x) = e^x$ et on obtient

$$\int_1^5 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}dx = \left[e^{\sqrt{x}}\right]_1^5 = e^{\sqrt{5}} - e.$$

Changement de variable. Poser $u = \sqrt{x}$.

Exercice 22.

Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_0^1 xe^x\,dx$ b) $\int_0^1 y^2e^{2y}\,dy$ c) $\int_1^2 \ln(t)\,dt$ d) $\int_0^\pi \theta\cos(\theta)\,d\theta$

Indications 22.

Il s'agit d'appliquer la formule d'intégration par parties :

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \big[uv\big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$$

Correction 22.

Correction vidéo ■

Nous allons appliquer la formule d'intégration par parties (IPP) :

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \big[uv\big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$$

Pour cela nous allons dire quelle fonction joue le rôle de $u(x)$ et quelle fonction joue le rôle de $v'(x)$.

a) $\int_0^1 xe^x\,dx$

On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = e^x$. Cela donne $u'(x) = 1$ et $v(x) = e^x$. La formule d'intégration par parties donne :

$$I = \int_0^1 xe^x\,dx = \big[xe^x\big]_0^1 - \int_0^1 1\cdot e^x\,dx$$

Nous avons fait un progrès : le crochet est juste une évaluation à calculer et l'intégrale tout à droite est facile à calculer (car on connaît une primitive de e^x qui est e^x).

$$I = \big(1\cdot e^1 - 0\cdot e^0\big) - \big[e^x\big]_0^1 = e-(e-1) = 1.$$

b) $\int_0^1 y^2e^{2y}\,dy$

On pose $u(y) = y^2$ et $v'(y) = e^{2y}$. Cela donne $u'(y) = 2y$ et $v(y) = \frac{1}{2}e^{2y}$. La formule d'intégration par parties donne :

$$J = \int_0^1 y^2e^{2y}\,dy = \big[\frac{1}{2}y^2e^{2y}\big]_0^1 - \int_0^1 ye^{2y}\,dy = \frac{1}{2}e^2 - \int_0^1 ye^{2y}\,dy$$

Ce n'est pas encore fini car il reste encore à calculer l'intégrale $J' = \int_0^1 ye^{2y}\,dy$. Mais on a quand même progresser car J' est plus facile à calculer que J.

Pour calculer J' on effectue une seconde intégration par parties, en posant $u(y) = y$ et $v'(y) = e^{2y}$ (et donc $u'(y) = 1$ et $v(y) = \frac{1}{2}e^{2y}$). Donc

$$\begin{aligned} J' &= \int_0^1 ye^{2y}\,dy \\ &= \left[\frac{1}{2}ye^{2y}\right]_0^1 - \int_0^1 1\cdot\frac{1}{2}e^{2y}\,dy \\ &= \frac{1}{2}e^2 - \big[\frac{1}{4}e^{2y}\big]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}(e^2-1) \\ &= \frac{1}{4}(e^2+1) \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à reporter la valeur de J' obtenue pour obtenir la valeur de J :

$$J = \frac{1}{2}e^2 - J' = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}(e^2+1) = \frac{1}{4}(e^2-1)$$

c) $\int_1^2 \ln(t)\,dt$
Comment peut-on décider qui est u et qui est v alors qu'il n'y a pas de produit ? Il suffit d'écrire $\ln(t) = \ln(t) \times 1$ pour faire apparaître artificiellement une multiplication. On pose alors $u(t) = \ln(t)$ et $v'(t) = 1$ et donc $u'(t) = \frac{1}{t}$ et $v(t) = t$. On peut maintenant faire une IPP :

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \ln(t)\,dt &= \big[t\ln(t)\big]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{t}\cdot t\,dt \\
&= (2\ln 2 - 0) - \int_1^2 1\,dt \\
&= 2\ln 2 - \big[t\big]_1^2 \qquad \text{car une primitive de la fonction 1 est } t \\
&= 2\ln(2) - (2-1) \\
&= 2\ln(2) - 1
\end{aligned}$$

d) $\int_0^\pi \theta\cos(\theta)\,d\theta$
On pose $u(\theta) = \theta$ et $v'(\theta) = \cos(\theta)$. Cela donne $u'(\theta) = 1$ et $v(\theta) = \sin(\theta)$. La formule d'intégration par parties donne :

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \theta\cos(\theta)\,d\theta &= \big[\theta\sin(\theta)\big]_0^\pi - \int_0^\pi \sin(\theta)\,d\theta \\
&= 0 - \big[-\cos(\theta)\big]_0^\pi \\
&= \cos\pi - \cos 0 \\
&= -1 - 1 \\
&= -2
\end{aligned}$$

Exercice 23.

a) Déterminer A et B tels que $\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$, puis calculer $\int_2^4 \frac{1}{x^2-1}dx$.

b) Déterminer A, B, C tels que $\frac{x-2}{(x^2+1)(2x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{2x+1}$, puis calculer $\int_0^1 \frac{x-2}{(x^2+1)(2x+1)}dx$.

Indications 23.

Une primitive de $\frac{u'(x)}{u(x)}$ est $\ln|u(x)| + C$, $C \in \mathbb{R}$.

Correction 23.

Correction vidéo ■

a) On écrit

$$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{Ax+A+Bx-B}{x^2-1} = \frac{x(A+B)+A-B}{x^2-1}.$$

Donc $\frac{1}{x^2-1} = \frac{(A+B)x+A-B}{x^2-1}$ d'où $1 = (A+B)x + A - B$ et on obtient le système suivant pour déterminer les valeurs de A et B :

$$\begin{cases} A+B &= 0 \\ A-B &= 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A &= -B \\ 2A &= 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A &= \frac{1}{2} \\ B &= -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Ainsi $\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)}$ et donc :

$$\begin{aligned} \int_2^4 \frac{1}{x^2-1}dx &= \int_2^4 \left(\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)}\right)dx = \int_2^4 \frac{1}{2(x-1)}dx - \int_2^4 \frac{1}{2(x+1)}dx \\ &= \frac{1}{2}\int_2^4 \frac{1}{x-1}dx - \frac{1}{2}\int_2^4 \frac{1}{x+1}dx = \frac{1}{2}\big[\ln|x-1|\big]_2^4 - \frac{1}{2}\big[\ln|x+1|\big]_2^4 \\ &= \frac{1}{2}(\ln(3)-\ln(1)) - \frac{1}{2}(\ln(5)-\ln(3)) = \ln(3) - \frac{1}{2}\ln(5). \end{aligned}$$

b) On écrit

$$\begin{aligned} \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{2x+1} &= \frac{(Ax+B)(2x+1)+C(x^2+1)}{(x^2+1)(2x+1)} = \frac{2Ax^2+Ax+2Bx+B+Cx^2+C}{(x^2+1)(2x+1)} \\ &= \frac{(2A+C)x^2+(A+2B)x+B+C}{(x^2+1)(2x+1)}. \end{aligned}$$

Donc $\frac{x-2}{(x^2+1)(2x+1)} = \frac{(2A+C)x^2+(A+2B)x+B+C}{(x^2+1)(2x+1)}$ d'où $x-2 = (2A+C)x^2 + (A+2B)x + B + C$ et on obtient le système suivant pour déterminer les valeurs de A, B et C :

$$\begin{cases} 2A+C &= 0 \\ A+2B &= 1 \\ B+C &= -2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2-4B-2-B &= 0 \\ A &= 1-2B \\ C &= -2-B \end{cases} \iff \begin{cases} B &= 0 \\ A &= 1 \\ C &= -2 \end{cases}$$

Ainsi $\frac{x-2}{(x^2+1)(2x+1)} = \frac{x}{x^2+1} - \frac{2}{2x+1}$ et donc :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x-2}{(x^2+1)(2x+1)}dx &= \int_0^1 \left(\frac{x}{x^2+1} - \frac{2}{2x+1}\right)dx = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx - \int_0^1 \frac{2}{2x+1}dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx - \int_0^1 \frac{2}{2x+1}dx = \frac{1}{2}\big[\ln|x^2+1|\big]_0^1 - \big[\ln|2x+1|\big]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}(\ln(2)-\ln(1)) - (\ln(3)-\ln(1)) = \frac{1}{2}\ln(2) - \ln(3). \end{aligned}$$