Fiche 9. Changement de variable

Savoir.

- ☐ Comprendre la formule du changement de variable.

Savoir-faire.

- ☐ Savoir trouver le bon changement de variable.
- ☐ Savoir changer les bornes de l'intégrale.
- ☐ Savoir changer l'élément différentiel.

Vidéo ■ Fiche 9. Changement de variable

Formule du changement de variable

Calculer l'intégrale $\int_a^b f(u(x))u'(x)\,\mathrm{d}x$ par la formule du changement de variable c'est utiliser la formule suivante :

$$\boxed{\int_a^b f(u(x))\,u'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,\mathrm{d}u}$$

Pour la pratique du changement de variable :

a) On doit identifier quelle est la fonction $u(x)$ qui réalise la bon changement de variable. Ce n'est pas toujours évident, il faut parfois faire plusieurs essais. Le but est d'obtenir une intégrale (à droite dans la formule ci-dessus) plus simple à calculer.

b) Il faut calculer le nouvel élément différentiel : $\mathrm{d}u = u'(x)\,\mathrm{d}x$.

c) Il faut changer les bornes de l'intégrale : si x varie de a à b, alors u varie de $u(a)$ à $u(b)$.

d) L'intégrale à calculer (en la variable x) est remplacée par une intégrale en la variable u (normalement plus simple).

Cela peut sembler un peu compliqué, mais après avoir pratiqué plusieurs exemples c'est assez facile !

Exemples

Exemple 1.
On veut calculer

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos(3x)\mathrm{d}x.$$

On pose le changement de variable $u(x) = 3x$. On a alors $u'(x) = 3$, donc $\mathrm{d}u = 3\,\mathrm{d}x$, ou encore $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{3}$. Comme x varie de $x = 0$ à $x = \frac{\pi}{6}$, alors u varie de $u = 0$ à $u = \frac{\pi}{2}$. Ainsi,

$$\int_{x=0}^{x=\frac{\pi}{6}} \cos(3x)\,\mathrm{d}x = \int_{u=0}^{u=\frac{\pi}{2}} \cos(u)\,\frac{\mathrm{d}u}{3}$$

L'intégrale de droite est quand même plus facile à calculer !
Concluons :

$$\int_{x=0}^{x=\frac{\pi}{6}} \cos(3x)\,\mathrm{d}x = \int_{u=0}^{u=\frac{\pi}{2}} \cos(u)\,\frac{\mathrm{d}u}{3} = \frac{1}{3}\big[\sin(x)\big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}\big(\sin(\tfrac{\pi}{2}) - \sin(0)\big) = \frac{1}{3}.$$

Exemple 2.
On veut calculer
$$\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}\mathrm{d}x.$$
On pose le changement de variable $u(x) = e^x$. On a alors $u'(x) = e^x$, donc $\mathrm{d}u = e^x\,\mathrm{d}x$. Comme x varie de $x = 0$ à $x = 1$, alors u varie de $u = e^0 = 1$ à $u = e^1 = e$. Ainsi la formule du changement de variable donne :
$$\int_{x=0}^{x=1} \frac{e^x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{e^x+1}} = \int_{u=1}^{u=e} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u+1}}.$$
La seconde intégrale, avec la variable u, est plus simple à calculer car une primitive de $\frac{1}{\sqrt{u+1}}$ est $2\sqrt{u+1}$. Ainsi :
$$\int_{x=0}^{x=1} \frac{e^x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{e^x+1}} = \int_{u=1}^{u=e} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u+1}}\mathrm{d}x = \left[2\sqrt{u+1}\right]_{u=1}^{u=e} = 2\left(\sqrt{e+1}-\sqrt{2}\right).$$