Échauffement

Exercice 1.

Déterminer le domaine de définition maximal des expressions suivantes :

a) $f_1(x) = x^2 + x + 1$

b) $f_2(x) = \sqrt{x-1}$

c) $f_3(x) = \sqrt{\frac{2+3x}{5-2x}}$

d) $f_4(x) = \ln(4x+3)$

Indications 1.

Pour déterminer le domaine de définition maximal des fonctions on doit connaître les domaines de définition des fonctions $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto \ln(x)$.

Correction 1.

Correction vidéo ■

a) Le domaine de définition est $\mathbb{R}$ car la fonction f_1 est un polynôme.

b) On sait que le domaine de définition de la fonction $y \mapsto \sqrt{y}$ est $[0, +\infty[$. Ici, il faut que $y = x-1 \geqslant 0$ et on obtient que le domaine de définition de f_2 est $[1, +\infty[$.

c) On remarque que pour $x = \frac{5}{2}$ il y aurait une division par zéro. Donc $x = \frac{5}{2}$ ne fait pas partie du domaine de définition. De plus, on sait que le domaine de définition de $y \mapsto \sqrt{y}$ est $[0, +\infty[$. Alors on doit résoudre l'inégalité $y = \frac{2+3x}{5-2x} \geqslant 0$. On calcule le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$2+3x$		$-$	0	$+$		$+$	
$5-2x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{2+3x}{5-2x}$		$-$		$+$	‖	$-$	

Alors le domaine de définition de f_3 est $\left[-\frac{2}{3}, \frac{5}{2}\right[$.

d) On sait que le domaine de définition de $y \mapsto \ln(y)$ est $]0, +\infty[$. Ici, il faut que $y = 4x+3 > 0$ et le domaine de définition de f_4 est $\left]-\frac{3}{4}, +\infty\right[$.

Exercice 2.

Soit $f : x \mapsto -x^2 + x + 2$.

a) Déterminer les racines de f.

b) Dresser le tableau des variations de f et donner ses intervalles de monotonie.

c) Tracer le graphe de la fonction f. Donner son image.

d) Résoudre les inégalités $f(x) \leqslant 0$, $f(x) > 1$, $f(x) < 5$.

Indications 2.

Utiliser la méthode de résolution des équation du second degré à l'aide du discriminant. Pour connaître les variations de f on calcule le signe de sa dérivée.

Correction 2.

Correction vidéo ■

a) On cherche à résoudre l'équation du second degré $-x^2+x+2=0$. On calcule le discriminant :

$$\Delta = 1^2 - 4\times(-1)\times 2 = 9 > 0.$$

L'équation admet donc deux solutions :

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{9}}{2\times(-1)} = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1-\sqrt{9}}{2\times(-1)} = 2.$$

b) On calcule la dérivée de f :

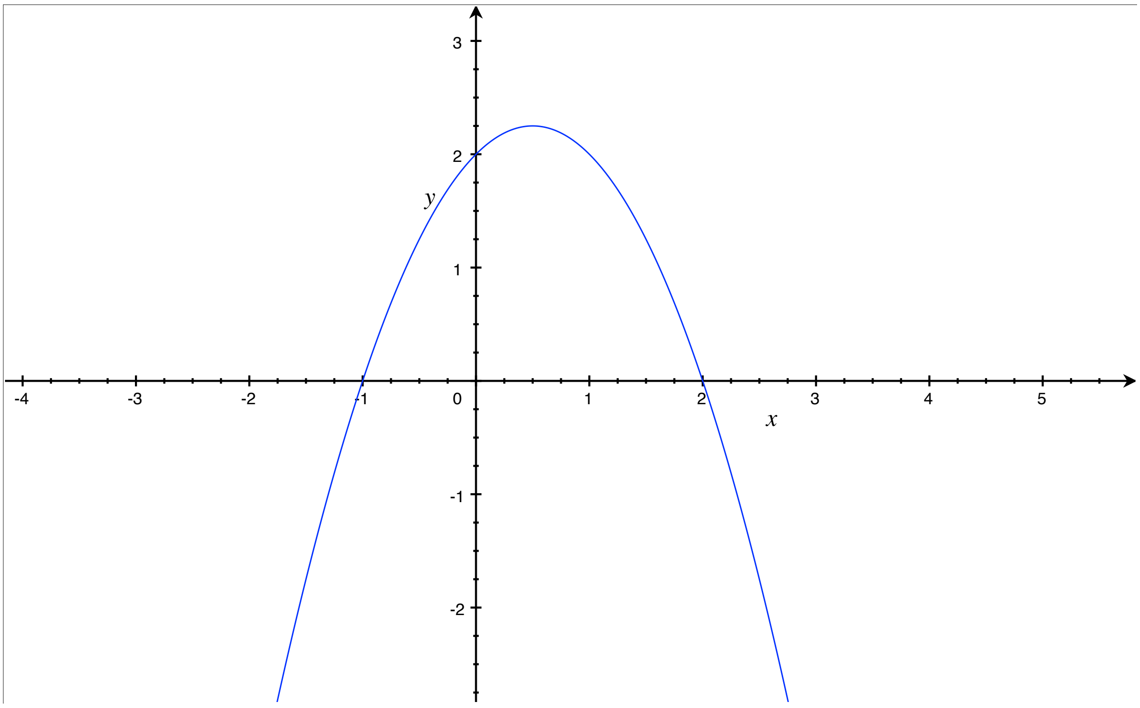
$$f'(x) = -2x+1.$$

On a donc $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$. De plus $f(\frac{1}{2})=\frac{9}{4}$.
On en déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{9}{4}$	$\searrow$	

La fonction f est monotone sur les intervalles $]-\infty;\frac{1}{2}]$ et sur $[\frac{1}{2};+\infty[$.

c) Le graphe de f est une parabole renversée de sommet $(\frac{1}{2},\frac{9}{4})$. Les points d'intersection avec l'axe des abscisses sont : $(-1,0)$ et $(2,0)$. On calcule le point d'intersection de la courbe avec l'axe des ordonnées : $(0,f(0))=(0,2)$. Enfin on trace le graphe :



L'image de f est l'intervalle $]-\infty;\frac{9}{4}]$ (avec $\frac{9}{4}=2,25$).

d) — On sait que les solutions de l'équation $f(x)=0$ sont -1 et 2. En utilisant le tableau de variations de f on en déduit :

$$f(x)\leqslant 0 \iff x\in]-\infty;-1] \text{ ou } x\in[2;+\infty[.$$

— On résout l'équation $f(x) = 1$ dont les solutions sont $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. En utilisant le tableau de variation de f on en déduit :

$$f(x) > 1 \iff x \in \left]\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right[.$$

— Enfin le maximum de f étant $\frac{9}{4} < 5$, on a :

$$f(x) < 5 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

On n'oublie pas de vérifier sur le graphe de f que les résultats sont cohérents.

Exercice 4.

Résoudre les équations suivantes :

a) $3\ln(x+4) = 9$

b) $\ln(x+2) + \ln(x) = 3$

c) $e^x = e^{1-x}$

d) $e^{3x} - 2e^{-x} = 0$

Indications 4.

Pour résoudre ces équations on remarque que la fonction $y \mapsto \ln(y)$ et la fonction réciproque de la fonction $x \mapsto e^x$, c'est-à-dire $y = e^x$ si et seulement si $x = \ln(y)$.

Correction 4.

Correction vidéo ■

a) $3\ln(x+4) = 9 \iff \ln(x+4) = 3 \iff x+4 = e^3 \iff x = e^3 - 4$.

b) $\ln(x+2) + \ln(x) = 3 \implies \ln(x(x+2)) = 3 \implies x(x+2) = e^3 \implies x^2 + 2x - e^3 = 0 \implies x = -1 + \sqrt{e^3+1}$ ou $x = -1 - \sqrt{e^3+1}$. Mais attention, dans l'équation initiale x doit être strictement positif. Il ne reste qu'une seule solution valide c'est $x = -1 + \sqrt{e^3+1}$.

c) $e^x = e^{1-x} \iff \ln(e^x) = \ln\left(e^{1-x}\right) \implies x = 1 - x \iff 2x = 1 \iff x = \frac{1}{2}$.

d) $e^{3x} - 2e^{-x} = 0 \iff e^{3x} = 2e^{-x} \iff \ln\left(e^{3x}\right) = \ln\left(2e^{-x}\right) \iff 3x = \ln(2) + \ln\left(e^{-x}\right) \iff 3x = \ln(2) - x \iff 4x = \ln(2) \iff x = \frac{\ln(2)}{4}$.

Exercice 5.

Calculer les limites suivantes.

a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x}$

b) $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln(x)}$

c) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+3}{2x^2+x+1}$

d) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$

e) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-x} - x$

Indications 5.

Pour a), on se rappellera des théorèmes de croissances comparées. Pour b) et d), il faut utiliser la définition de la dérivée comme limite du taux d'accroissement. Pour c), il faut mettre en facteur les termes dominants du numérateur et du dénominateur. Pour e), il faut faire apparaître la « quantité conjuguée » : $\sqrt{x^2-x} + x$.

Correction 5.

Correction vidéo ■

a) Par croissances comparées on a
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty.$$

b) On fait apparaître la limite du taux d'accroissement de ln en $x = 1$:
$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)-\ln(1)}{x-1} = \ln'(1) = 1.$$
Ainsi $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln(x)} = 1$.

c) On met en facteur les termes dominants du numérateur et du dénominateur :
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+3}{2x^2+x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2(1+\frac{3}{x^2})}{x^2(2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{3}{x^2}}{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}.$$

d) On fait apparaître la limite du taux d'accroissement de sin en $x = 0$:
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-\sin(0)}{x-0} = \sin'(0) = \cos(0) = 1.$$

e) On fait apparaître la quantité conjuguée :
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-x}-x &= \lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x^2-x}-x)(\sqrt{x^2-x}+x)}{\sqrt{x^2-x}+x} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2-x)-x^2}{\sqrt{x^2-x}+x} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{x\sqrt{1-\frac{1}{x}}+x} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1} \\
&= -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Exercice 6.

Étudier les fonctions suivantes.

a) $\dfrac{x^2-x-2}{x-3}$ b) $\sqrt{\dfrac{x+1}{x+2}}$ c) $\ln\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$

Indications 6.

Pour étudier une fonction $f(x)$ il faut donner le domaine de définition, les asymptotes éventuelles, dériver la fonction $f(x)$ et étudier le signe de $f'(x)$.

Correction 6.

Correction vidéo ■
Correction vidéo ■
Correction vidéo ■

a) Soit $f(x) = \frac{x^2-x-2}{x-3}$. Le domaine de définition est $\mathbb{R}\setminus\{3\}$, car pour $x = 3$ il y aurait une division par zéro. Le comportement de f aux bord de son domaine de définition est
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty,$$
$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = -\infty \left(\text{en tant que } «\frac{4}{0^-}»\right), \qquad \lim_{x\to 3^+} f(x) = +\infty \left(\text{en tant que } «\frac{4}{0^+}»\right).$$

Alors il y a une asymptote verticale d'équation $x = 3$ et des asymptotes obliques de l'équation $ax + b$ en $\pm\infty$. Pour déterminer a et b on calcule

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

et

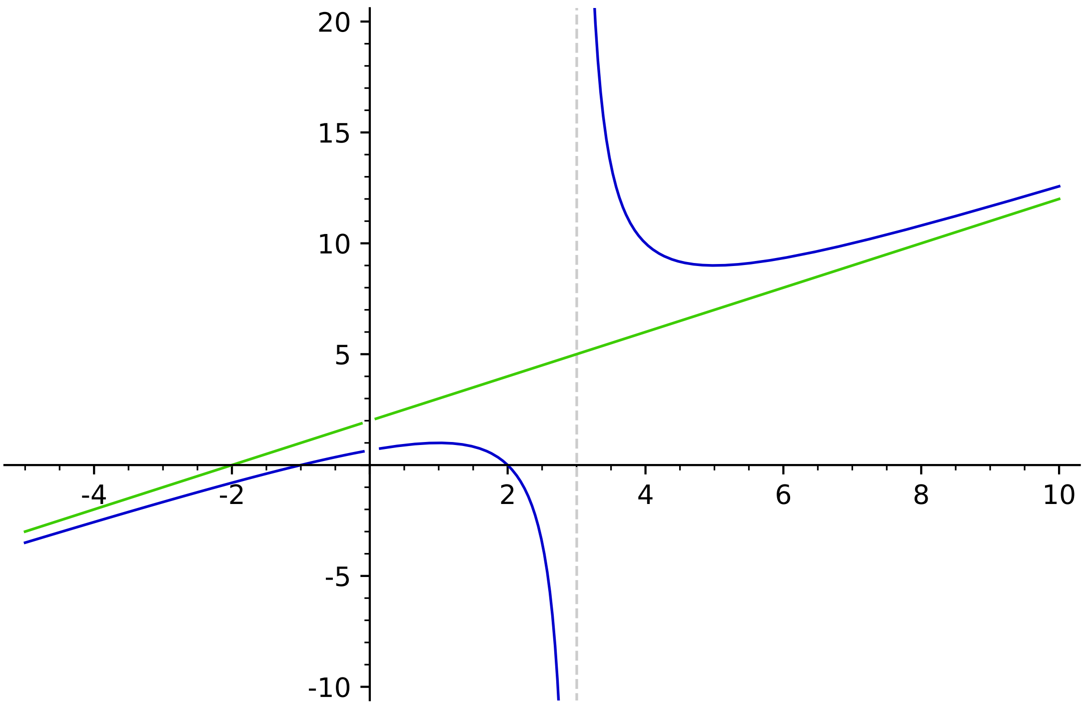
$$b = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - ax = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 - x - 2}{x - 3} - x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x - 2}{x - 3} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{x} = 2.$$

On remarque qu'on a le même calcul pour $+\infty$ et $-\infty$. Maintenant on étudie les variations de f :

$$f'(x) = \frac{(2x-1)(x-3) - (x^2 - x - 2)}{(x-3)^2} = \frac{x^2 - 6x + 5}{(x-3)^2} = \frac{(x-1)(x-5)}{(x-3)^2}$$

Alors

x	$-\infty$		1		3		5		$+\infty$
$(x-3)^2$						$+$			
$x-1$		$-$	0			$+$			
$x-5$				$-$			0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	max	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	min	$\nearrow$	$+\infty$



b) Soit $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$. On sait que $x + 2 = 0$ si et seulement si $x = -2$. Donc -2 n'appartient pas au domaine de définition de f.
Le domaine de définition de la fonction $y \mapsto \sqrt{y}$ est $[0, +\infty[$. On étudie le signe de $y = \frac{x+1}{x+2}$ à l'aide d'un tableau :

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x+1}{x+2}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Il faut que $y = \frac{x+1}{x+2} \geqslant 0$. Alors le domaine de définition de f est $]-\infty,-2[\ \cup\ [-1,+\infty[$. Le comportement de f aux bord de son domaine de définition est

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{x}{x}} = \lim_{x\to-\infty} 1 = 1, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x}{x}} = \lim_{x\to+\infty} 1 = 1,$$

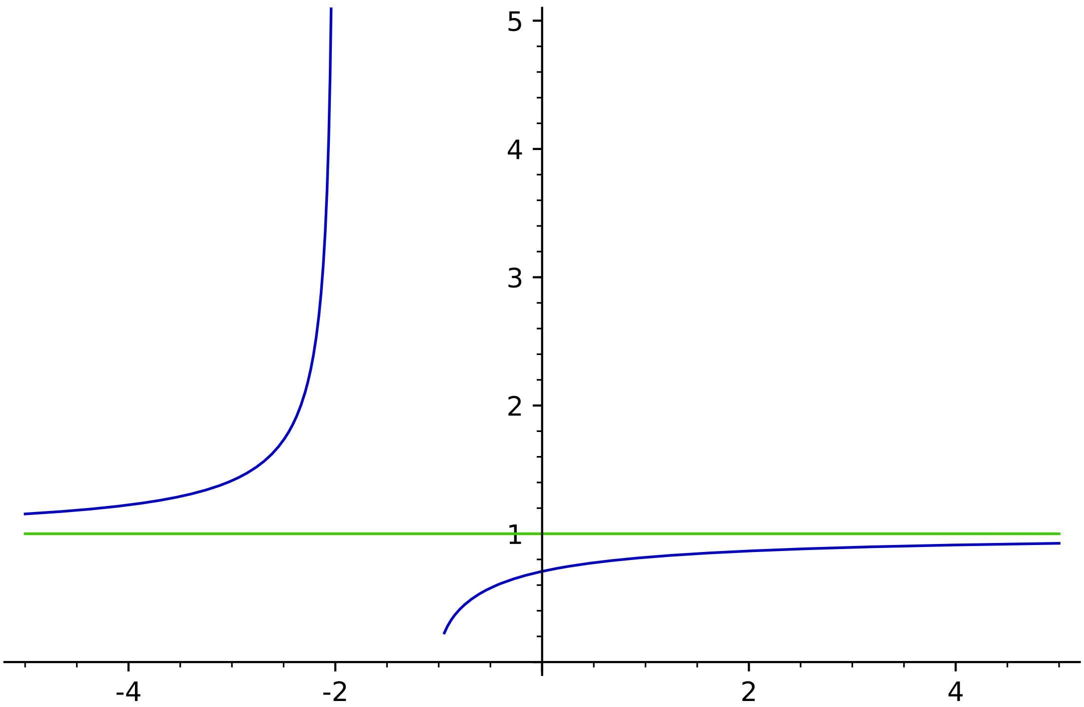
$$\lim_{x\to-2^-} f(x) = +\infty \left(\text{en tant que } «\frac{-1}{0^-}» \right), \qquad \lim_{x\to-1^+} f(x) = f(-1) = 0.$$

Alors il y a une asymptote verticale d'équation $x = -2$ et une asymptote horizontale d'équation $y = 1$. Maintenant on étudie les variations de f :

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}} \left(\frac{x+1}{x+2}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}} \frac{x+2-(x+1)}{(x+2)^2} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}} \frac{1}{(x+2)^2}$$

Alors

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|$			$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$ $\|$		0	$\nearrow$	1



c) Soit $f(x) = \ln\left(x - \frac{1}{x}\right)$. Le domaine de définition de la fonction $y \mapsto \ln(y)$ est $]0,+\infty[$. Alors il faut que $y = x - \frac{1}{x} > 0$. On étudie le signe de $x - \frac{1}{x} = \frac{x^2-1}{x} = \frac{(x-1)(x+1)}{x}$.

x	$-\infty$		-1		0		$+1$		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{(x-1)(x+1)}{x}$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	0	$+$	

Finalement, on obtient que le domaine de définition de f est $]-1;0[\,\cup\,]1;+\infty[$. Le comportement de f aux bords de son domaine de définition est

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty,$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty.$$

Alors il y a des asymptotes verticales d'équation $x = -1$, $x = 0$ et $x = 1$. Maintenant on étudie les variations de f :

$$f'(x) = \frac{1}{x-\frac{1}{x}}\left(x-\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x-\frac{1}{x}}\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x-\frac{1}{x}}\,\frac{x^2+1}{x^2}.$$

Comme $\frac{x^2+1}{x^2} \geqslant 0$ alors $f'(x)$ est du signe de $y = x - \frac{1}{x}$ qui est positif sur le domaine de définition. Ainsi $f'(x) \geqslant 0$ pour tout x appartenant au domaine de définition.
Alors

x	-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$				$+$	
$f(x)$	$\|$	$-\infty \nearrow +\infty$	$\|$		$\|$	$-\infty \nearrow +\infty$