Fiche 10. Intégration par parties

Savoir.

- ☐ Connaître la formule d'intégration par parties.

Savoir-faire.

- ☐ Savoir calculer un intégrale à l'aide d'une intégration par parties.

Vidéo ■ Fiche 10. Intégration par parties

Formule d'intégration par parties

Soient u et v deux fonctions dérivables sur $[a,b]$. On cherche à calculer $\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x$ à l'aide d'une méthode donnée par la formule suivante.

Formule d'intégration par parties (IPP).

$$\boxed{\int_a^b u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x = \big[u(x)v(x)\big]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x}$$

— On rappelle que $\big[F(x)\big]_a^b = F(b)-F(a)$. Donc $\big[u(x)v(x)\big]_a^b = u(b)v(b)-u(a)v(a)$.

— N'oubliez pas le signe « moins » dans la formule !

— Cette méthode ne fonctionne qui si l'intégrale tout à droite $\int_a^b u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x$ est plus facile à calculer que l'intégrale de départ.

— La preuve de la formule est basée sur la formule $(uv)' = u'v + uv'$, donc $uv' = (uv)' - u'v$. Ainsi $\int uv' = \int (uv)' - \int u'v$. Mais une primitive de $(uv)'$ est uv donc $\int uv' = [uv] - \int u'v$.

Exemples

Exemple 1. On veut calculer

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin(x)\mathrm{d}x.$$

On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = \sin(x)$, alors $u'(x) = 1$ et $v(x) = -\cos(x)$ (une primitive de $\sin(x)$ est $-\cos(x)$).

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin(x)\mathrm{d}x &= \big[-x\cos(x)\big]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} -1\cdot\cos(x)\mathrm{d}x \\
&= \left(-\tfrac{\pi}{4}\cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right) + 0\cos(0)\right) + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(x)\mathrm{d}x \\
&= -\frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{2}}{2} + \big[\sin(x)\big]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= -\frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(\sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right) - \sin(0)\right) \\
&= -\frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \\
&= (1-\frac{\pi}{4})\frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

Exemple 2.
On veut calculer

$$I = \int_1^2 xe^x \,\mathrm{d}x.$$

On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = e^x$. On a alors $u'(x) = x$ et $v(x) = e^x$. Ainsi,

$$\begin{aligned} I = \int_1^2 xe^x \,\mathrm{d}x &= \left[xe^x\right]_1^2 - \int_1^2 e^x \,\mathrm{d}x \\ &= (2e^2 - e) - \left[e^x\right]_1^2 = (2e^2 - e) - (e^2 - e) \\ &= e^2. \end{aligned}$$

Remarques.

- On pourrait calculer $J = \int_1^2 x^2 e^x \,\mathrm{d}x$ par deux intégrations par parties successives : en posant $u(x) = x^2$ et $v'(x) = e^x$, la formule ne donne pas directement le résultat mais conduit à une formule avec l'intégrale $I = \int_1^2 xe^x \,\mathrm{d}x$ que l'on a déjà calculée ci-dessus.
- *Astuce.* Pour calculer $\int_a^b \ln(x) \,\mathrm{d}t$ par intégration par parties, il suffit d'écrire $\ln(x) = \ln(x) \times 1$ afin de faire apparaître artificiellement une multiplication.