

---

## Fiche 1. Fonctions usuelles

---

*Savoir.*

- ☐ Connaître les fonctions usuelles, leur domaine de définition, leurs limites, l'allure du graphe et leur dérivée.
- ☐ Maîtriser la fonction exponentielle et la fonction logarithmique.
- ☐ Réviser ses formules trigonométriques.

*Savoir-faire.*

- ☐ Déterminer le domaine de définition d'une fonction.
- ☐ Savoir utiliser l'égalité  $x^a = e^{a \ln(x)}$  dans les deux sens.

### Domaine de définition

— Une fonction  $f$  associe à un réel  $x$  un réel noté  $f(x)$ .

— Exemple :

$$\begin{array}{ccc} f : & \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto x^2 \end{array}$$

Alors  $f(3) = 9$ ,  $f(-4) = 16$ .

— Exemple :

$$\begin{array}{ccc} f : & [0, +\infty[ & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto \sqrt{x} \end{array}$$

La fonction n'est pas définie pour des  $x < 0$ .

— Le **domaine de définition** d'une fonction  $f$  est l'ensemble des  $x$ , où l'expression  $f(x)$  est définie.

*Note.* Si on vous donne l'expression d'une fonction  $f$ , sans préciser l'ensemble de départ c'est à vous de déterminer le domaine de définition !

— Exemples : trouvons le domaine de définition des fonctions suivantes.

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1} \quad \mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\} = ]-\infty, -1[ \cup ]-1, +\infty[$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2-4} \quad \mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, +2\}$$

$$f(x) = \sqrt{x^2-4} \quad \mathcal{D}_f = ]-\infty, -2] \cup [+2, +\infty[$$

### Fonction polynôme

— Une **fonction monôme** est définie par  $f(x) = x^k$  où  $k \in \mathbb{N}$  est un entier.

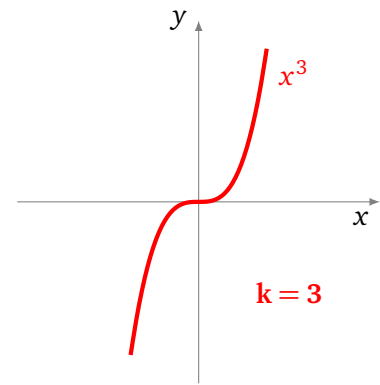
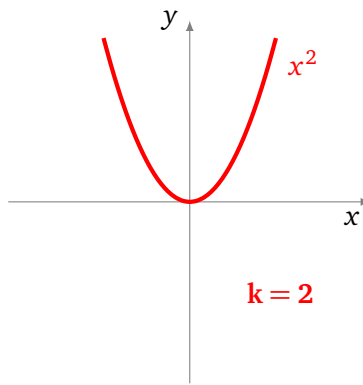
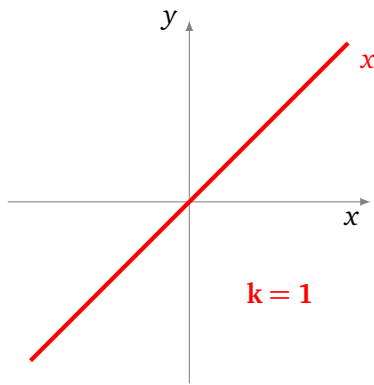
— Le domaine de définition est  $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ .

— La dérivée est  $(x^k)' = kx^{k-1}$ .

— Les limites en  $+\infty$  et  $-\infty$  sont :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = \begin{cases} +\infty & \text{si } k \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

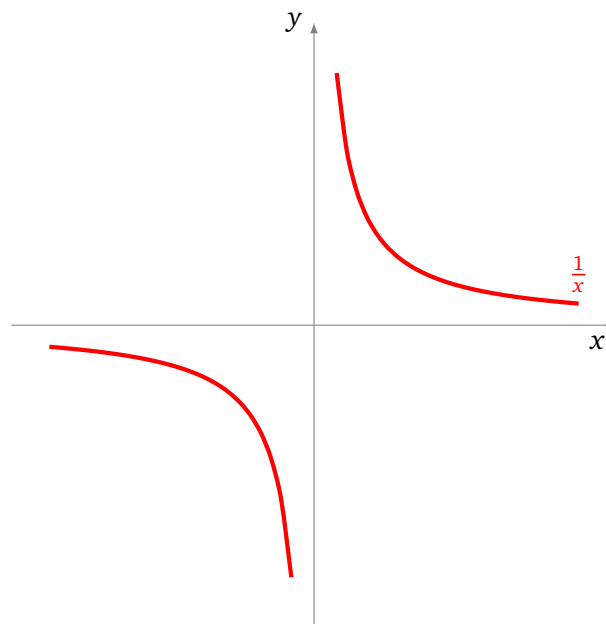
— Une **fonction polynôme** est une somme de fonctions monômes. Par exemple, les fonctions définies par  $f(x) = x$  et  $g(x) = x^3 - 4x + 13$  sont des fonctions polynômes.



## Fonction inverse

- La **fonction inverse** est définie par  $f(x) = \frac{1}{x}$ , notée aussi  $f(x) = x^{-1}$ .
- Le domaine de définition est  $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , car il est interdit de diviser par 0.
- La dérivée est  $\boxed{\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}}$ .
- Les limites de  $f$  sont :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$



## Fonction exponentielle

- La **fonction exponentielle**  $f(x) = \exp(x)$  se note aussi par  $f(x) = e^x$ .
- Son domaine de définition est  $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ .
- On a  $\exp(x) > 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .
- $\exp(0) = 1$ ,  $\exp(1) = e \simeq 2.718$ .
- La dérivée est la fonction elle-même :  $\boxed{\exp'(x) = \exp(x)}$ .
- Les limites de  $f$  sont :

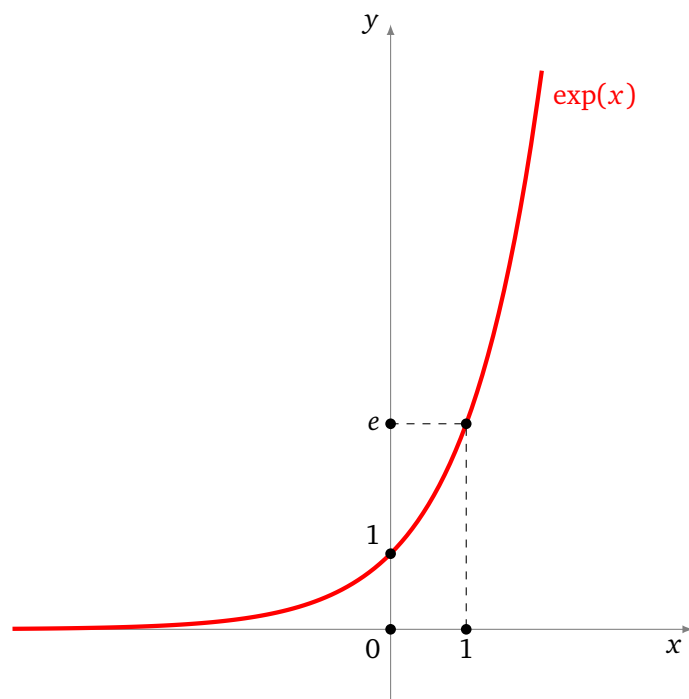
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

- Propriétés :

$$e^{a+b} = e^a \cdot e^b$$

$$(e^x)^\alpha = e^{\alpha x}$$

$$(e^{-x}) = \frac{1}{e^x}$$



## Fonction logarithme

- Le **logarithme népérien** se note  $f(x) = \ln(x)$ .
- Son domaine de définition est  $\mathcal{D}_f = ]0, +\infty[$ . Le logarithme n'est pas défini pour des  $x$  négatifs ou nuls.
- $\ln(1) = 0$ ,  $\ln(e) = 1$ .
- Propriétés :

$$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$$

$$\ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x)$$

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$$

- Le logarithme est la bijection réciproque de l'exponentielle :

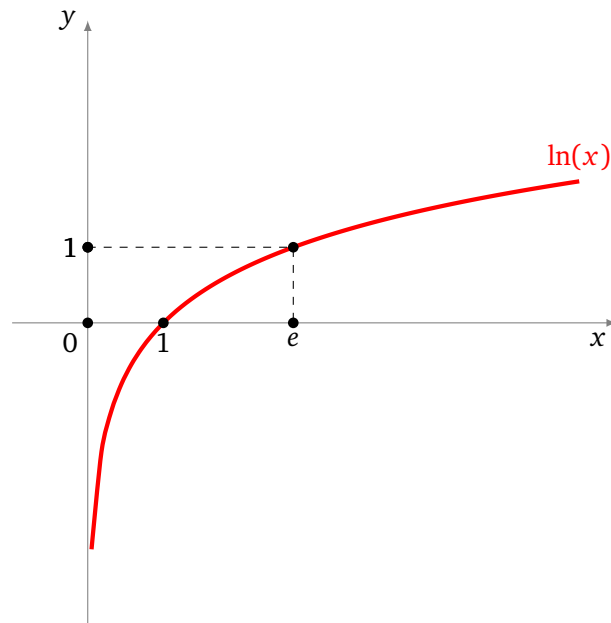
$$\ln(\exp(x)) = x \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

$$\exp(\ln(x)) = x \quad \text{pour tout } x > 0$$

- La dérivée du logarithme est la fonction inverse  $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ .

- Les limites de  $f$  sont :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$



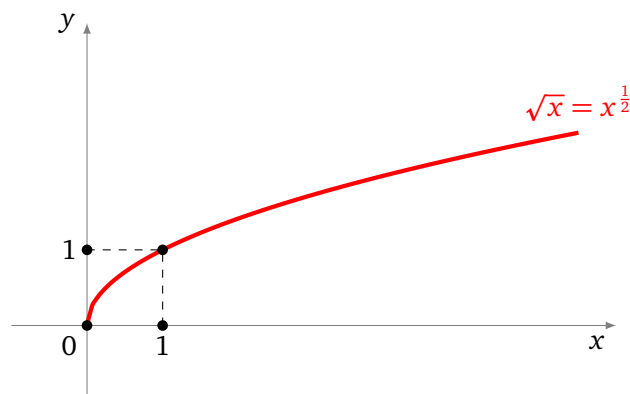
## Fonctions puissances

- Les **fonctions puissances**  $f(x) = x^\alpha$ , avec  $\alpha \in \mathbb{R}$  fixé, généralisent les fonctions polynômes (où l'exposant était un entier).
- Elles sont définies par :

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$$

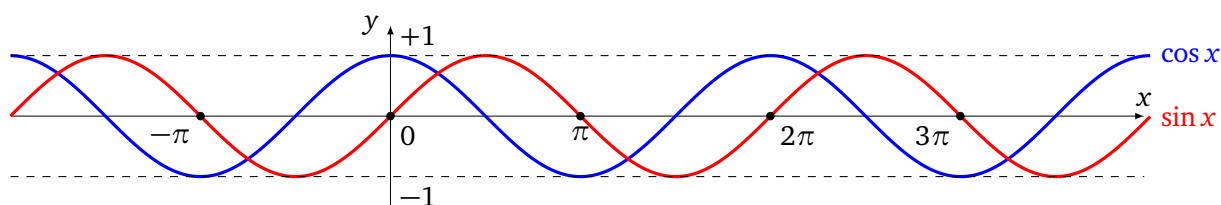
Autrement dit  $x^\alpha = \exp(\alpha \ln(x))$ .

- Le domaine de définition est  $\mathcal{D}_f = ]0, +\infty[$ .
- La dérivée est  $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ .
- Exemple (carré) :  $\alpha = 2$ , on retrouve la fonction carrée  $x^\alpha = e^{2\ln(x)} = (e^{\ln(x)})^2 = x^2$ .
- Exemple (racine carrée) :  $\alpha = \frac{1}{2}$ , alors  $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ , qui vérifie bien sûr  $(x^{\frac{1}{2}})^2 = x$ .
- Exemple (racine cubique) :  $\alpha = \frac{1}{3}$ , alors  $x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$ , qui vérifie  $(x^{\frac{1}{3}})^3 = x$ .

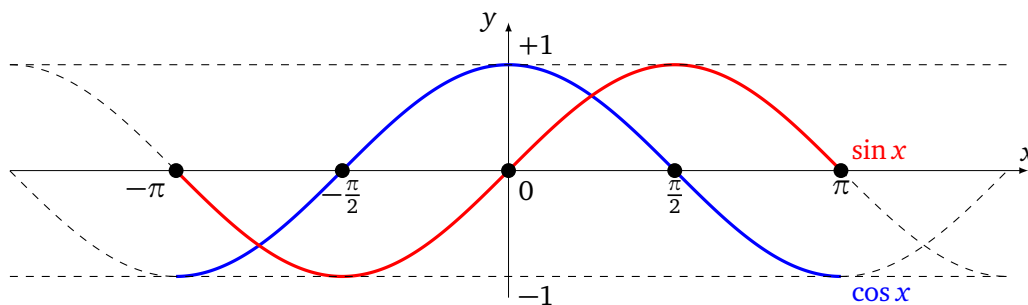


## Sinus, cosinus, tangente

- Les fonctions **sinus** et **cosinus** sont définies sur  $\mathbb{R}$ .
- Les dérivées sont  $\sin'(x) = \cos(x)$  et  $\cos'(x) = -\sin(x)$ .



Voici un zoom sur l'intervalle  $[-\pi, \pi]$ .



— La **tangente** est définie par  $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ . Elle est définie si  $\cos(x) \neq 0$ , c'est-à-dire si  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

( $k \in \mathbb{Z}$ ). Sa dérivée peut s'écrire de deux façons différentes :  $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$

## Rappels de trigonométrie

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x$$

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x$$

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	

