Exercices de mathématiques pour la SVT

Partie I. Calcul différentiel

1. Échauffement
2. Problèmes d'optimisation
3. Équations différentielles

Partie II. Intégrales

4. Calcul d'intégrales
5. Calcul de débit
6. Longueur, aire, volume
7. Résolution d'équations différentielles au moyen des primitives

Les corrections en vidéos : ■ Mathématiques pour la SVT ■

Auteurs des corrections.
Arnaud Bodin
Jean-Paul Doeraene
Julien Hauseux
Nicole Raulf

Échauffement

Exercice 1.

Déterminer le domaine de définition maximal des expressions suivantes :

a) $f_1(x) = x^2 + x + 1$

b) $f_2(x) = \sqrt{x-1}$

c) $f_3(x) = \sqrt{\frac{2+3x}{5-2x}}$

d) $f_4(x) = \ln(4x+3)$

Indications 1.

Pour déterminer le domaine de définition maximal des fonctions on doit connaître les domaines de définition des fonctions $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto \ln(x)$.

Correction 1.

Correction vidéo ■

a) Le domaine de définition est $\mathbb{R}$ car la fonction f_1 est un polynôme.

b) On sait que le domaine de définition de la fonction $y \mapsto \sqrt{y}$ est $[0, +\infty[$. Ici, il faut que $y = x - 1 \geqslant 0$ et on obtient que le domaine de définition de f_2 est $[1, +\infty[$.

c) On remarque que pour $x = \frac{5}{2}$ il y aurait une division par zéro. Donc $x = \frac{5}{2}$ ne fait pas partie du domaine de définition. De plus, on sait que le domaine de définition de $y \mapsto \sqrt{y}$ est $[0, +\infty[$. Alors on doit résoudre l'inégalité $y = \frac{2+3x}{5-2x} \geqslant 0$. On calcule le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$2+3x$		$-$	0	$+$		$+$	
$5-2x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{2+3x}{5-2x}$		$-$		$+$	$\Vert$	$-$	

Alors le domaine de définition de f_3 est $\left[-\frac{2}{3}, \frac{5}{2}\right[$.

d) On sait que le domaine de définition de $y \mapsto \ln(y)$ est $]0, +\infty[$. Ici, il faut que $y = 4x + 3 > 0$ et le domaine de définition de f_4 est $\left]-\frac{3}{4}, +\infty\right[$.

Exercice 2.

Soit $f : x \mapsto -x^2 + x + 2$.

a) Déterminer les racines de f.

b) Dresser le tableau des variations de f et donner ses intervalles de monotonie.

c) Tracer le graphe de la fonction f. Donner son image.

d) Résoudre les inégalités $f(x) \leqslant 0$, $f(x) > 1$, $f(x) < 5$.

Indications 2.

Utiliser la méthode de résolution des équation du second degré à l'aide du discriminant. Pour connaître les variations de f on calcule le signe de sa dérivée.

Correction 2.

Correction vidéo ■

a) On cherche à résoudre l'équation du second degré $-x^2+x+2=0$. On calcule le discriminant :

$$\Delta = 1^2 - 4\times(-1)\times 2 = 9 > 0.$$

L'équation admet donc deux solutions :

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{9}}{2\times(-1)} = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1-\sqrt{9}}{2\times(-1)} = 2.$$

b) On calcule la dérivée de f :

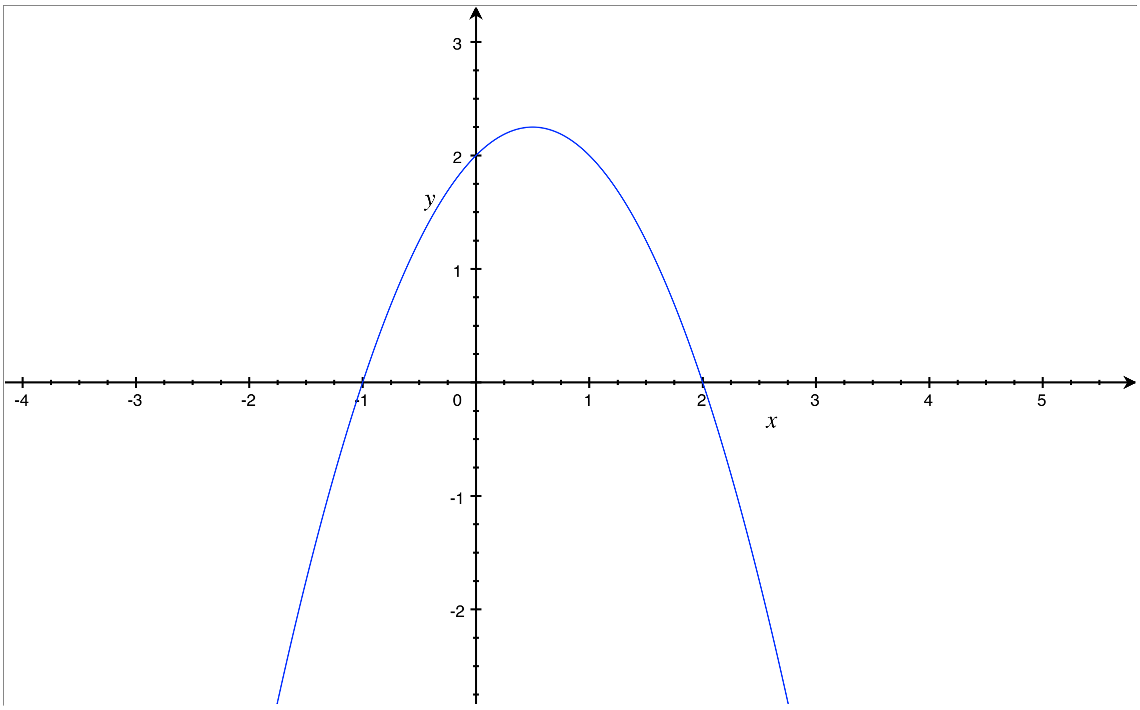
$$f'(x) = -2x+1.$$

On a donc $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$. De plus $f(\frac{1}{2})=\frac{9}{4}$.
On en déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{9}{4}$	$\searrow$	

La fonction f est monotone sur les intervalles $]-\infty;\frac{1}{2}]$ et sur $[\frac{1}{2};+\infty[$.

c) Le graphe de f est une parabole renversée de sommet $(\frac{1}{2},\frac{9}{4})$. Les points d'intersection avec l'axe des abscisses sont : $(-1,0)$ et $(2,0)$. On calcule le point d'intersection de la courbe avec l'axe des ordonnées : $(0,f(0))=(0,2)$. Enfin on trace le graphe :



L'image de f est l'intervalle $]-\infty;\frac{9}{4}]$ (avec $\frac{9}{4}=2,25$).

d) — On sait que les solutions de l'équation $f(x)=0$ sont -1 et 2. En utilisant le tableau de variations de f on en déduit :

$$f(x)\leqslant 0 \iff x\in]-\infty;-1] \text{ ou } x\in[2;+\infty[.$$

— On résout l'équation $f(x) = 1$ dont les solutions sont $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. En utilisant le tableau de variation de f on en déduit :

$$f(x) > 1 \iff x \in]\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}[.$$

— Enfin le maximum de f étant $\frac{9}{4} < 5$, on a :

$$f(x) < 5 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

On n'oublie pas de vérifier sur le graphe de f que les résultats sont cohérents.

Exercice 4.

Résoudre les équations suivantes :

a) $3\ln(x+4) = 9$

b) $\ln(x+2) + \ln(x) = 3$

c) $e^x = e^{1-x}$

d) $e^{3x} - 2e^{-x} = 0$

Indications 4.

Pour résoudre ces équations on remarque que la fonction $y \mapsto \ln(y)$ et la fonction réciproque de la fonction $x \mapsto e^x$, c'est-à-dire $y = e^x$ si et seulement si $x = \ln(y)$.

Correction 4.

Correction vidéo ■

a) $3\ln(x+4) = 9 \iff \ln(x+4) = 3 \iff x+4 = e^3 \iff x = e^3 - 4$.

b) $\ln(x+2) + \ln(x) = 3 \implies \ln(x(x+2)) = 3 \implies x(x+2) = e^3 \implies x^2 + 2x - e^3 = 0 \implies x = -1 + \sqrt{e^3+1}$ ou $x = -1 - \sqrt{e^3+1}$. Mais attention, dans l'équation initiale x doit être strictement positif. Il ne reste qu'une seule solution valide c'est $x = -1 + \sqrt{e^3+1}$.

c) $e^x = e^{1-x} \iff \ln(e^x) = \ln\left(e^{1-x}\right) \implies x = 1 - x \iff 2x = 1 \iff x = \frac{1}{2}$.

d) $e^{3x} - 2e^{-x} = 0 \iff e^{3x} = 2e^{-x} \iff \ln\left(e^{3x}\right) = \ln\left(2e^{-x}\right) \iff 3x = \ln(2) + \ln\left(e^{-x}\right) \iff 3x = \ln(2) - x \iff 4x = \ln(2) \iff x = \frac{\ln(2)}{4}$.

Exercice 5.

Calculer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x}$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x-1}{\ln(x)}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2+3}{2x^2+x+1}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2-x} - x$

Indications 5.

Pour a), on se rappellera des théorèmes de croissances comparées. Pour b) et d), il faut utiliser la définition de la dérivée comme limite du taux d'accroissement. Pour c), il faut mettre en facteur les termes dominants du numérateur et du dénominateur. Pour e), il faut faire apparaître la « quantité conjuguée » : $\sqrt{x^2-x} + x$.

Correction 5.

Correction vidéo ■

a) Par croissances comparées on a
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty.$$

b) On fait apparaître la limite du taux d'accroissement de ln en $x=1$:
$$\lim_{x\to1}\frac{\ln(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\ln(x)-\ln(1)}{x-1}=\ln'(1)=1.$$
Ainsi $\lim_{x\to1}\frac{x-1}{\ln(x)}=1$.

c) On met en facteur les termes dominants du numérateur et du dénominateur :
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3}{2x^2+x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2(1+\frac{3}{x^2})}{x^2(2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{3}{x^2}}{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}.$$

d) On fait apparaître la limite du taux d'accroissement de sin en $x=0$:
$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin(x)-\sin(0)}{x-0}=\sin'(0)=\cos(0)=1.$$

e) On fait apparaître la quantité conjuguée :
$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-x}-x&=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2-x}-x)(\sqrt{x^2-x}+x)}{\sqrt{x^2-x}+x}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2-x)-x^2}{\sqrt{x^2-x}+x}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{x\sqrt{1-\frac{1}{x}}+x}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1}\\&=-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Exercice 6.

Étudier les fonctions suivantes.

a) $\dfrac{x^2-x-2}{x-3}$ b) $\sqrt{\dfrac{x+1}{x+2}}$ c) $\ln\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$

Indications 6.

Pour étudier une fonction $f(x)$ il faut donner le domaine de définition, les asymptotes éventuelles, dériver la fonction $f(x)$ et étudier le signe de $f'(x)$.

Correction 6.

Correction vidéo ■
Correction vidéo ■
Correction vidéo ■

a) Soit $f(x)=\frac{x^2-x-2}{x-3}$. Le domaine de définition est $\mathbb{R}\setminus\{3\}$, car pour $x=3$ il y aurait une division par zéro. Le comportement de f aux bord de son domaine de définition est
$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty}x=-\infty,\qquad \lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty,$$
$$\lim_{x\to3^-}f(x)=-\infty\ \left(\text{en tant que «}\frac{4}{0^-}\text{»}\right),\qquad \lim_{x\to3^+}f(x)=+\infty\ \left(\text{en tant que «}\frac{4}{0^+}\text{»}\right).$$

Alors il y a une asymptote verticale d'équation $x = 3$ et des asymptotes obliques de l'équation $ax + b$ en $\pm\infty$. Pour déterminer a et b on calcule

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

et

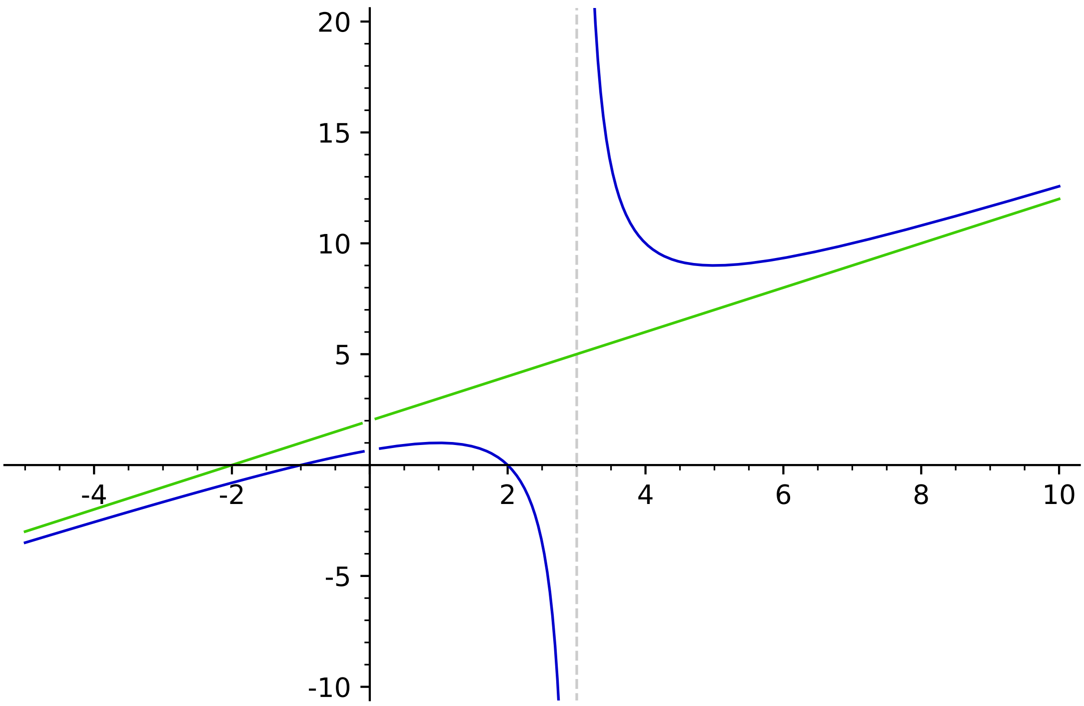
$$b = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - ax = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 - x - 2}{x-3} - x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x-2}{x-3} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{x} = 2.$$

On remarque qu'on a le même calcul pour $+\infty$ et $-\infty$. Maintenant on étudie les variations de f :

$$f'(x) = \frac{(2x-1)(x-3) - (x^2 - x - 2)}{(x-3)^2} = \frac{x^2 - 6x + 5}{(x-3)^2} = \frac{(x-1)(x-5)}{(x-3)^2}$$

Alors

x	$-\infty$		1		3		5		$+\infty$
$(x-3)^2$					$+$				
$x-1$		$-$	0		$+$				
$x-5$				$-$			0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	max	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	min	$\nearrow$	$+\infty$



b) Soit $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$. On sait que $x + 2 = 0$ si et seulement si $x = -2$. Donc -2 n'appartient pas au domaine de définition de f.
Le domaine de définition de la fonction $y \mapsto \sqrt{y}$ est $[0, +\infty[$. On étudie le signe de $y = \frac{x+1}{x+2}$ à l'aide d'un tableau :

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x+1}{x+2}$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

Il faut que $y = \frac{x+1}{x+2} \geqslant 0$. Alors le domaine de définition de f est $]-\infty,-2[\, \cup\, [-1,+\infty[$. Le comportement de f aux bord de son domaine de définition est

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{x}{x}} = \lim_{x\to-\infty} 1 = 1, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x}{x}} = \lim_{x\to+\infty} 1 = 1,$$

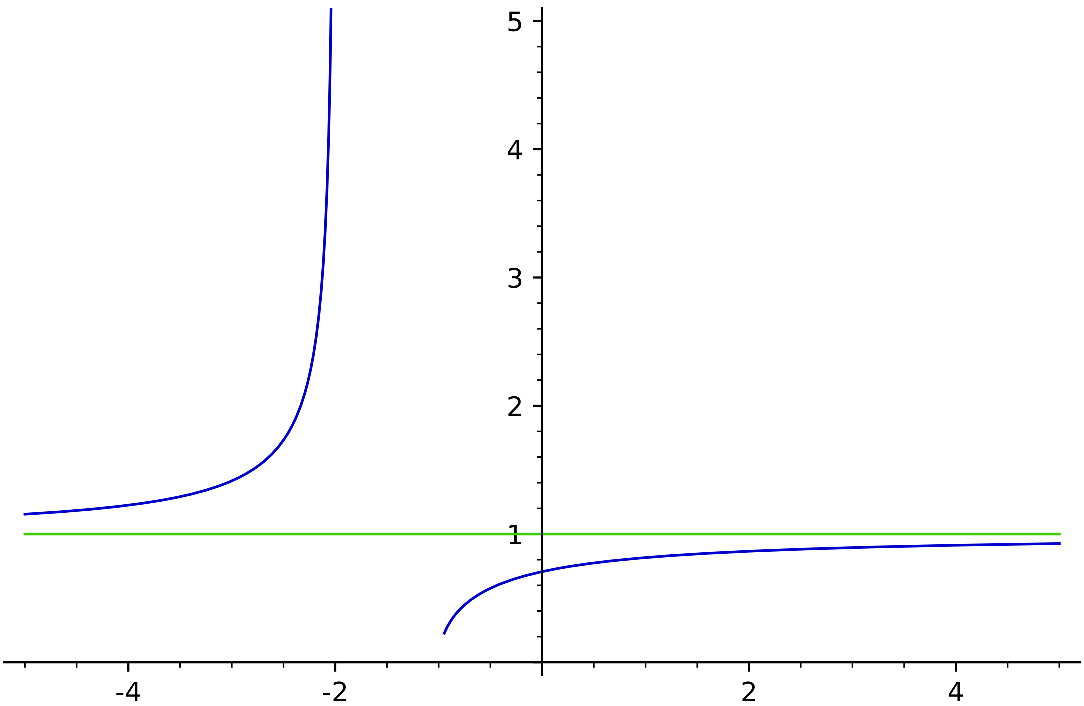
$$\lim_{x\to-2^-} f(x) = +\infty \left(\text{en tant que } «\frac{-1}{0^-}» \right), \qquad \lim_{x\to-1^+} f(x) = f(-1) = 0.$$

Alors il y a une asymptote verticale d'équation $x = -2$ et une asymptote horizontale d'équation $y = 1$. Maintenant on étudie les variations de f :

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}} \left(\frac{x+1}{x+2} \right)' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}} \frac{x+2-(x+1)}{(x+2)^2} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}} \frac{1}{(x+2)^2}$$

Alors

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$			$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$ $\Vert$		0	$\nearrow$	1



c) Soit $f(x) = \ln\left(x - \frac{1}{x}\right)$. Le domaine de définition de la fonction $y \mapsto \ln(y)$ est $]0,+\infty[$. Alors il faut que $y = x - \frac{1}{x} > 0$. On étudie le signe de $x - \frac{1}{x} = \frac{x^2-1}{x} = \frac{(x-1)(x+1)}{x}$.

x	$-\infty$		-1		0		$+1$		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{(x-1)(x+1)}{x}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Finalement, on obtient que le domaine de définition de f est $]-1;0[\,\cup\,]1;+\infty[$. Le comportement de f aux bords de son domaine de définition est

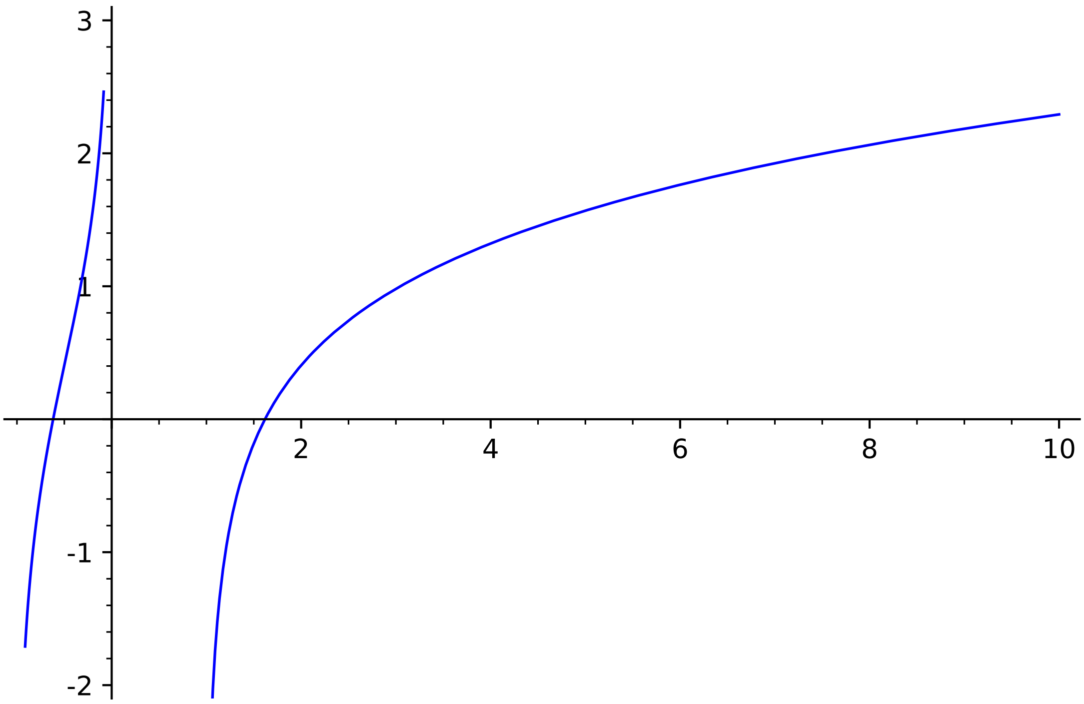
$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty,$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty.$$

Alors il y a des asymptotes verticales d'équation $x = -1$, $x = 0$ et $x = 1$. Maintenant on étudie les variations de f :

$$f'(x) = \frac{1}{x-\frac{1}{x}}\left(x-\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x-\frac{1}{x}}\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x-\frac{1}{x}}\frac{x^2+1}{x^2}.$$

Comme $\frac{x^2+1}{x^2} \geqslant 0$ alors $f'(x)$ est du signe de $y = x - \frac{1}{x}$ qui est positif sur le domaine de définition. Ainsi $f'(x) \geqslant 0$ pour tout x appartenant au domaine de définition.
Alors

x	-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$				$+$	
$f(x)$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ $\Vert$		$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

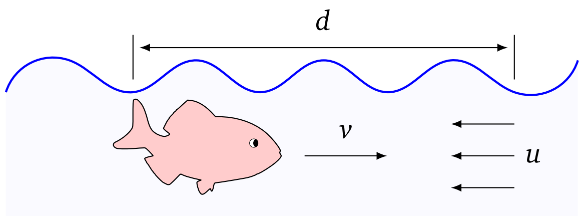


Problèmes d'optimisation

Exercice 7.

L'énergie dépensée par un poisson pour remonter une distance d d'un courant de vitesse u à la vitesse v est donnée par

$$E(v) = v^3 \frac{d}{v-u}.$$



a) Quel est le domaine de définition de cette fonction ?

b) On se restreindra ici au domaine $]u,+\infty[$. Expliquer pourquoi.

c) Étudier la fonction E sur $]u,+\infty[$.

d) En déduire la vitesse v qui minimise l'énergie $E(v)$, puis calculer cette énergie minimale.

Indications 7.

Pour étudier la fonction il faut d'abord dériver la fonction $E(v)$ et étudier le signe de $E'(v)$.

Correction 7.

Correction vidéo ■

a) Le domaine de définition est $\mathbb{R} \setminus \{u\}$, car pour $v = u$ il y aurait une division par zéro.

b) Dans la pratique le poisson ne peut remonter le courant que si $v > u$, donc on étudie la fonction pour $v \in]u,+\infty[$.

c)
$$E'(v) = d\left(\frac{v^3}{v-u}\right)' = d\,\frac{3v^2(v-u)-v^3\cdot 1}{(v-u)^2} = d\,\frac{v^2(2v-3u)}{(v-u)^2}$$

Le signe de E' ne dépend que du signe de $2v-3u$.

v	u		$\frac{3}{2}u$		$+\infty$
$E'(v)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$E(v)$	$\Vert$	$\searrow$	min.	$\nearrow$	

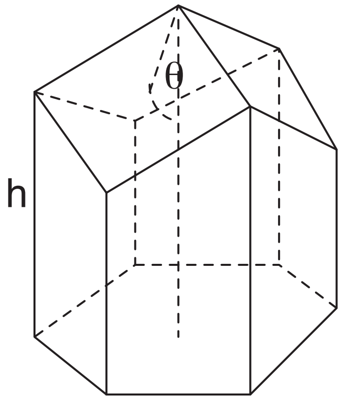
d) L'énergie est minimale pour $v = \frac{3}{2}u$, c'est-à-dire lorsque le poisson nage à une vitesse valant 150% de celle du courant.

Exercice 10.

Dans une ruche, chaque alvéole a une forme de prisme hexagonal à fond rhombique dont la surface est donnée, pour une longueur de côté s et une hauteur h, par

$$A(\theta) = 6sh - \frac{3}{2}s^2\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} + \frac{3\sqrt{3}}{2}s^2\frac{1}{\sin(\theta)}$$

où θ désigne l'angle au sommet du prisme.



a) Quelle est le domaine de définition de cette fonction ?

b) On se restreindra ici au domaine $]0,\pi[$. Expliquer pourquoi.

c) Etudier la fonction A sur $]0,\pi[$.

d) En déduire l'angle θ qui minimise la surface $A(\theta)$ d'une telle alvéole et déterminez, en fonction de s et h, la surface correspondante.

Dans la réalité, les alvéoles ont l'angle θ optimal à ± 2 degrés près.

Indications 10.

On utilisera la fonction arccos : $[-1;1] \to [0;\pi]$ définie par $\arccos(x) = \theta \iff \cos(\theta) = x$. De plus on a $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$ pour tout $x \in [0;1]$.

Correction 10.

Correction vidéo ■

a) L'expression définissant $A(\theta)$ est bien définie si et seulement si les dénominateurs sont non nuls, i.e. $\sin(\theta) \neq 0$. Or, $\sin(\theta) = 0$ si et seulement $\theta = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, ce que l'on peut réécrire $\theta \in \pi\mathbb{Z}$. On en déduit que le domaine de définition de A est $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.

b) L'angle au sommet du prisme doit avoir une mesure comprise dans l'intervalle $]0;\pi[$. On peut donc restreindre le domaine de A à l'intervalle $]0;\pi[$ (ou à n'importe lequel des intervalles $]k;k+\pi[$ avec $k \in \mathbb{Z}$).

c) On calcule la dérivée :

$$\begin{aligned}
A'(\theta) &= -\frac{3}{2}s^2\frac{\cos'(\theta)\sin(\theta)-\cos(\theta)\sin'(\theta)}{\sin(\theta)^2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}s^2\frac{-\sin'(\theta)}{\sin(\theta)^2} \\
&= -\frac{3}{2}s^2\frac{-\sin(\theta)^2-\cos(\theta)^2}{\sin(\theta)^2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}s^2\frac{-\cos(\theta)}{\sin(\theta)^2} \\
&= -\frac{3}{2}s^2\frac{-1}{\sin(\theta)^2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}s^2\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)^2} \\
&= \frac{3}{2}s^2\frac{1-\sqrt{3}\cos(\theta)}{\sin(\theta)^2}.
\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$A'(\theta) = 0 \iff 1-\sqrt{3}\cos(\theta) = 0 \iff \cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{3}} \iff \theta = \arccos(\frac{1}{\sqrt{3}}).$$

On en déduit le tableau de variation de A :

θ	0		$\arccos(\frac{1}{\sqrt{3}})$		π
$A'(\theta)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	$\|\|$
$A(\theta)$	$\|\|$	$\searrow$		$\nearrow$	$\|\|$

d) L'angle θ qui minimise la surface $A(\theta)$ est $\theta = \arccos(\frac{1}{\sqrt{3}}) \simeq 0,955$. Soit environ $54,7°$.
Pour la surface correspondante c'est un peu plus compliqué. On a :

$$\cos(\arccos(\frac{1}{\sqrt{3}})) = \frac{1}{\sqrt{3}},$$
$$\sin(\arccos(\frac{1}{\sqrt{3}})) = \sqrt{1-(\frac{1}{\sqrt{3}})^2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

La surface correspondante est donc :

$$\begin{aligned} A(\arccos(\frac{1}{\sqrt{3}})) &= 6sh - \frac{3}{2}s^2\frac{\cos(\arccos(\frac{1}{\sqrt{3}}))}{\sin(\arccos(\frac{1}{\sqrt{3}}))} + \frac{3\sqrt{3}}{2}s^2\frac{1}{\sin(\arccos(\frac{1}{\sqrt{3}}))} \\ &= 6sh - \frac{3}{2}s^2\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} + \frac{3\sqrt{3}}{2}s^2\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} \\ &= 6sh - \frac{3}{2\sqrt{2}}s^2 + \frac{9}{2\sqrt{2}}s^2 \\ &= 6sh + \frac{3}{\sqrt{2}}s^2. \end{aligned}$$

Équations différentielles

Exercice 12.

On observe une population de microbes se développant de manière malthusienne, c'est-à-dire dont le taux de croissance au temps t (en heures) est proportionnel à la taille de la population $N(t)$.

a) En notant k la constante de proportionnalité, donner une équation différentielle modélisant cette situation.

b) Montrer que les fonctions $N(t) = Ce^{kt}$ (où C est une constante) sont solutions de cette équation différentielle.

c) Que représente C ?

d) Si $k = \ln 2$, que peut-on dire de la population au bout d'une heure ?

e) Si $k = \ln 2$ et $N(0) = 100$, quelle sera, d'après le modèle, la taille de la population au bout de 4 heures et 20 minutes ?

f) Si $k = \ln 2$ et $N(0) = 100$, au bout de combien de temps la population atteindra-t-elle 1000 individus ?

Indications 12.

L'équation différentielle est une égalité qui relie le taux de croissance $N'(t)$ à la population $N(t)$.

Correction 12.

Correction vidéo ■

a) Si $N(t)$ dénote la taille de la population à l'instant t, le taux de croissance au temps t est donné par $N'(t)$. Alors on obtient l'équation différentielle

$$N'(t) = kN(t). \tag{1}$$

b) Soit $N(t) = Ce^{kt}$. Sa dérivée est

$$N'(t) = (Ce^{kt})' = C(e^{kt})' = Cke^{kt}.$$

De plus, $kN(t) = kCe^{kt} = Cke^{kt}$. Comme on obtient $N'(t) = kN(t)$, alors les fonctions de la forme $N(t) = Ce^{kt}$, $C \in \mathbb{R}$, sont solutions de (1).

c) Comme $N(0) = Ce^0 = C$, C est la taille de la population au début. Donc $N(t) = N(0)e^{kt}$.

d) On remplace k par $\ln(2)$. Alors $N(1) = N(0)e^{\ln(2)} = 2N(0)$ car $e^{\ln(2)} = 2$. Donc au bout d'une heure la population a doublé.

e) Pour $N(0) = 100$ et $k = \ln(2)$ on a $N(t) = 100 \cdot e^{t\ln(2)} = 100 \cdot (e^{\ln(2)})^t = 100 \cdot 2^t$. Donc

$$N\left(4+\frac{1}{3}\right) = N\left(\frac{13}{3}\right) = 100 \cdot 2^{13/3} \approx 2015.$$

f) On a $N(t) = 100 \cdot 2^t$ et on cherche le temps T tel que $N(T) = 100 \cdot 2^T = 1000$.

$$100 \cdot 2^T = 1000 \iff 2^T = 10 \iff \ln(2^T) = \ln(10) \iff T\ln(2) = \ln(10) \iff T = \frac{\ln(10)}{\ln(2)} \approx 3,32.$$

Au bout de 3 heures et 20 minutes environ la population atteindra 1000 individus.

Exercice 15.

On considère le problème :

$$y'(t) = -t^2 y(t) \quad \text{pour } t \geqslant 0, \tag{1}$$
$$y(0) = y_0. \tag{2}$$

a) Montrer que la fonction constante $y(t) = 0$ est solution de (1). Y a-t-il d'autres solutions constantes ?

b) On suppose que y est une solution de (1) et (2) et on suppose $y_0 > 0$.

(i) Montrer que $y(t) > 0$ pour tout $t \geqslant 0$ (*on admettra que les graphes de deux solutions distinctes de (1) ne se coupent jamais*).

(ii) Montrer que y est décroissante sur $[0;+\infty[$. En déduire que $y(t)$ admet une limite quand $t \to +\infty$.

c) On pose $u(t) = at^3 + b$ et $Y(t) = e^{u(t)}$ où a et b sont des constantes.

(i) Calculer $u'(t)$ et $Y'(t)$.

(ii) Déterminer la constante a pour que $Y(t)$ soit solution de (1).

(iii) Calculer $Y(0)$. Comment faut-il choisir b pour avoir $Y(0) = y_0$?

(iv) Calculer $\lim_{t\to+\infty} Y(t)$, en prenant pour a et b les valeurs trouvées dans les questions précédentes.

Indications 15.

Pour a), remplacer y dans (1) par une fonction constante. Pour b) (ii) utiliser l'équation (1).

Correction 15.

Correction vidéo ■

a) Soit $c \in \mathbb{R}$. Soit $y(t) = c$ la fonction constante égale à c sur $[0;+\infty[$. On a $y'(t) = 0$ pour tout $t \in [0;+\infty[$. Donc y est solution constante de (1) si et seulement si :

$$0 = -t^2 c \quad \text{pour tout } t \in [0;+\infty[.$$

Cela n'est vrai que si $c = 0$. Ainsi la fonction constante égale à 0 est bien solution de (1) et aucune autre fonction constante n'est solution de (1).

b) Soit y une solution de (1) et (2) avec $y_0 > 0$.

(i) Comme $y_0 > 0$, y n'est pas la fonction constante égale à 0. Ainsi le graphe de y ne coupe jamais le graphe de la fonction constante égale à 0, c'est-à-dire l'axe des abscisse. Comme y est une fonction continue, on en déduit qu'elle est de signe constant. Comme $y_0 > 0$, on en conclut que $y(t) > 0$ pour tout $t \in [0;+\infty[$.

(ii) En utilisant l'équation (1), on déduit de la question précédente que $y'(t) \leqslant 0$ pour tout $t \in [0;+\infty[$. Donc y est décroissante sur $[0;+\infty[$. Comme est elle minorée (par 0), on en déduit qu'elle admet une limite ($l \geqslant 0$) quand $t \to +\infty$.

c) (i) On calcule pour tout $t \in [0;+\infty[$:

$$\begin{aligned} u'(t) &= 3at^2, \\ Y'(t) &= u'(t)e^{u(t)} = 3at^2 e^{at^3+b}. \end{aligned}$$

(ii) Y est solution de (1) si et seulement si :

$$3at^2 e^{at^3+b} = -t^2 e^{at^3+b} \quad \text{pour tout } t \in [0;+\infty[.$$

Cela est vrai si et seulement si $a = -\frac{1}{3}$.

(iii) On a $Y(0) = e^b$. On en déduit que $Y(0) = y_0$ si et seulement si $b = \ln(y_0)$.

(iv) Avec $a = -\frac{1}{3}$ et $b = \ln(y_0)$ on a

$$Y(t) = y_0 e^{-\frac{t^3}{3}} \quad \text{pour tout } t \in [0;+\infty[.$$

On en déduit que $\lim_{t\to+\infty} Y(t) = 0$.

Exercice 18.

On considère le problème représenté par les deux équations suivantes :

$$\begin{aligned} y'(t) &= (y(t)-1)^2(y(t)+1) \qquad (1) \\ y(0) &= 0 \qquad (2) \end{aligned}$$

et l'on suppose qu'il existe une fonction $y : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ solution de ce problème.

a) Chercher les solutions constantes de l'équation différentielle (1).

b) Montrer que la solution y du problème est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

c) En déduire que $\lim_{t\to+\infty} y(t) = l$ avec $l \in \mathbb{R}$. Calculer l en admettant que $\lim_{t\to+\infty} y'(t) = 0$.

Indications 18.

Vous devez étudier le signe de $y'(t)$ en admettant que les graphes de deux solutions distinctes de (1) ne se coupent jamais.

Correction 18.

Correction vidéo ■

a) On pose $y(t)=c$, $t\geqslant 0$. Donc $y'(t)=0$, $t\geqslant 0$. Si on remplace $y'(t)$ par 0 et $y(t)$ par c dans (1) on obtient

$$0=(c-1)^2(c+1) \quad\Longleftrightarrow\quad c-1=0 \;\text{ ou }\; c+1=0 \quad\Longleftrightarrow\quad c=1 \text{ ou } c=-1.$$

Donc les solutions constants sont $y_1(t)=-1$ et $y_2(t)=1$, $t\geqslant 0$.

b) Étudions le signe de y. On sait que $y(0)=0$ et donc $y_1(0)<y(0)<y_2(0)$. Comme les graphes graphes de deux solutions distinctes de (1) ne se coupent jamais et $y_1(0)<y(0)<y_2(0)$, le graphe de y est toujours en dessous de celui de y_2 et au-dessus de celui de y_1. Alors

$$-1=y_1(t)<y(t)<y_2(t)=1,\; t\geqslant 0,$$

et on obtient le tableau de variation suivant :

t	$0 \qquad +\infty$
$(y(t)-1)^2$	$+$
$y(t)+1$	$+$
$y'(t)$	$+$
$y(t)$	$0 \nearrow$

Comme $y'(t)\geqslant 0$, alors la fonction y est croissante.

c) Comme la fonction $y(t)$ est croissante et majorée par 1 (car $y(t)\leqslant y_2(t)=1$), la limite $l:=\lim\limits_{t\to+\infty} y(t)$ existe. De plus, $0\leqslant l\leqslant 1$. En admettant que $\lim\limits_{t\to+\infty} y'(t)=0$ et en utilisant (1), on obtient :

$$0=\lim_{t\to+\infty} y'(t)=\lim_{t\to+\infty}(y(t)-1)^2(y(t)+1)=(\lim_{t\to+\infty} y(t)-1)^2(\lim_{t\to+\infty} y(t)+1)=(l-1)^2(l+1).$$

Comme $0=(l-1)^2(l+1)\Longleftrightarrow l=-1$ ou $l=1$, mais $l\geqslant 0$, on déduit donc que $l=1$.

Calcul d'intégrales

Exercice 20.

Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_2^4 (x-2)^5\,dx$ b) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{3y+1}\,dy$ c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} 5\sin(2\theta)\,d\theta$ d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(2t+1)^3}\,dt$

Indications 20.

Il s'agit de faire des changements de variable simples :

a) Poser $u=x-2$.

b) Poser $u=3y+1$.

c) Poser $u=2\theta$.

d) Poser $u=2t+1$.

Correction 20.

Correction vidéo ■

a) $I = \int_2^4 (x-2)^5 \, dx$

On pose $u = x - 2$. On alors $du = dx$. La calcul de l'intégrale va de la borne $x = 2$ à $x = 4$. Ce qui donne comme bornes en u : de $u = 2 - 2 = 0$ à $u = 4 - 2$ (car $u = x - 2$).

La formule de changement de variable transforme l'intégrale en x en une intégrales en u. On n'oublie pas de changer les bornes (les bornes en x sont remplacées par des bornes en u) et aussi l'élément différentiel (la nouvelle intégrale a pour élément différentiel du).

$$I = \int_{x=2}^{x=4} (x-2)^5 \, dx = \int_{u=0}^{u=2} u^5 \, du$$

Cette nouvelle intégrale est beaucoup plus facile à calculer :

$$I = \int_{u=0}^{u=2} u^5 \, du = \left[\frac{u^6}{6} \right]_{u=0}^{u=2} = \frac{2^6}{6} = \frac{64}{6} = \frac{32}{3}.$$

b) $\int_0^1 \sqrt{3y+1} \, dy$

On pose $u = 3y + 1$. On alors $du = 3\,dy$ et donc $dy = \frac{du}{3}$. Les bornes en x sont de $x = 0$ à $x = 1$ et deviennent en la variable u : de $u = 1$ à $u = 4$.

$$\begin{aligned}
\int_{y=0}^{y=1} \sqrt{3y+1} \, dy &= \int_{u=1}^{u=4} \sqrt{u} \, \frac{du}{3} \\
&= \frac{1}{3} \int_{u=1}^{u=4} u^{\frac{1}{2}} \, du \\
&= \frac{1}{3} \left[\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \right]_{u=1}^{u=4} \qquad \text{car une primitive de } u^\alpha \text{ est } \frac{1}{\alpha+1} u^{\alpha+1} \text{ avec ici } \alpha = \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} \cdot 4^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \cdot 1^{\frac{3}{2}} \right) \\
&= \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} \cdot 8 - \frac{2}{3} \cdot 1^{\frac{3}{2}} \right) \qquad \text{car } 4^{\frac{3}{2}} = (4^3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{64} = 8 \\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 7 \\
&= \frac{14}{9}
\end{aligned}$$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 5 \sin(2\theta) \, d\theta$

Posons $u = 2\theta$, alors $du = 2\,d\theta$ et donc $d\theta = \frac{du}{2}$. θ varie de $\theta = 0$ à $\theta = \frac{\pi}{4}$ donc u varie de $u = 0$ à $u = \frac{\pi}{2}$.

$$\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{4}} 5 \sin(2\theta) \, d\theta = \int_{u=0}^{u=\frac{\pi}{2}} 5 \sin(u) \, \frac{du}{2} = \frac{5}{2} \big[-\cos(u) \big]_{u=0}^{u=\frac{\pi}{2}} = \frac{5}{2} \big(-\cos(\frac{\pi}{2}) - (-\cos(0)) \big) = \frac{5}{2}(0+1) = \frac{5}{2}.$$

d) $\int\limits_0^1 \frac{1}{(2t+1)^3} dt$

Posons $u = 2t+1$. Donc $du = 2\,dt$ ou encore $dt = \frac{du}{2}$. t varie de $t=0$ à $t=1$ donc u varie de $u=1$ à $u=3$.

$$\int\limits_{t=0}^{t=1} \frac{1}{(2t+1)^3} dt = \int\limits_{u=1}^{u=3} \frac{1}{u^3}\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int\limits_{u=1}^{u=3} u^{-3} du = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}u^{-2}\right]_{u=1}^{u=3} = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{1^2}\right) = \frac{1}{4}\cdot\frac{8}{9} = \frac{2}{9}$$

On a utilisé que $\frac{1}{u^2} = u^{-2}$, $\frac{1}{u^3} = u^{-3}$ et qu'une primitive de u^α est $\frac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}$, ce qui donne pour $\alpha = -3$: une primitive de u^{-3} est $-\frac{1}{2}u^{-2}$. Si vous préférez vous pouvez dire directement qu'une primitive de $\frac{1}{u^3}$ est $-\frac{1}{2}\frac{1}{u^2}$.

Exercice 21.

Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int\limits_0^1 x e^{x^2} dx$

b) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{3\cos(y)}\sin(y)\,dy$

c) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(\theta)\,d\theta$

d) $\int\limits_1^5 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} dx$

Indications 21.

Vous pouvez soit reconnaître une forme $u'f'(u)$ et utiliser qu'une primitive de la fonction $u'(x)f'(u(x))$ est $f(u(x))+C$, c'est la méthode de substitution, $C \in \mathbb{R}$ ou bien vous pouvez faire un changement de variable.

Correction 21.

Correction vidéo ■

La méthode de substitution ou le changement de variable sont des méthodes équivalentes. Choisissez celle que vous préférez !

a) $\int_0^1 x e^{x^2} dx$

Substitution. On sait que $(x^2)' = 2x$. Alors xe^{x^2} est de la forme $\frac{1}{2}u'(x)f'(u(x))$ avec $u(x) = x^2$ et $f(x) = e^x$ et on obtient

$$\int_0^1 x e^{x^2} dx = \left[\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}(e-1).$$

Changement de variable.

On pose $u = x^2$, donc $du = 2x\,dx$. Les bornes de $x=0$ à $x=1$ deviennent des bornes de $u=0$ à $u=1$. Ainsi :

$$\int_{x=0}^{x=1} e^{x^2} x dx = \int_{u=0}^{u=1} e^u \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\left[e^u\right]_{u=0}^{u=1} = \frac{1}{2}(e-1)$$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{3\cos(y)}\sin(y)\,dy$

Substitution. On sait que $\cos'(y) = -\sin(y)$. Alors $\sqrt{3\cos(y)}\sin(y)$ est de la forme $-\sqrt{3}u'(y)f'(u(y))$ avec $u(y) = \cos(y)$ et $f(y) = \frac{2}{3}y^{3/2}$ et on obtient

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{3\cos(y)}\sin(y)\,dy = \left[-\sqrt{3}\,\frac{2}{3}(\cos(y))^{3/2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{3}}\left((\cos(\pi/2))^{3/2} - (\cos(0))^{3/2}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Changement de variable. On pose $u = 3\cos(y)$, donc $du = -3\sin(y)\,dy$. Les bornes de $y = 0$ à $y = \frac{\pi}{2}$ deviennent des bornes de $u = 3\cos(0) = 3$ à $u = 3\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$.

$$\int_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}} \sqrt{3\cos(y)}\sin(y)\,dy = \int_{u=3}^{u=0} \sqrt{u}\frac{-du}{3} = +\frac{1}{3}\int_{u=0}^{u=3} \sqrt{u}\,du = \frac{1}{3}\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_{u=0}^{u=3} = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot(\sqrt{3})^3 = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(\theta)\,d\theta$

Substitution. Comme $\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$ et $\cos'(\theta) = -\sin(\theta)$, $\tan(\theta)$ est de la forme $u'(\theta)f'(u(\theta))$ avec $u(\theta) = \cos(\theta)$ et $f(\theta) = \ln(\theta)$ et on obtient

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(\theta)\,d\theta = [-\ln(\cos(\theta))]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\ln(\cos(\pi/4)) + \ln(\cos(0)) = -\ln\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \frac{1}{2}\ln(2).$$

Changement de variable. Poser $u = \cos(\theta)$.

d) $\int_1^5 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}dx$

Substitution. Comme $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$ est de la forme $u'(x)f'(u(x))$ avec $u(x) = \sqrt{x}$ et $f(x) = e^x$ et on obtient

$$\int_1^5 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}dx = \left[e^{\sqrt{x}}\right]_1^5 = e^{\sqrt{5}} - e.$$

Changement de variable. Poser $u = \sqrt{x}$.

Exercice 22.

Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_0^1 xe^x\,dx$ b) $\int_0^1 y^2e^{2y}\,dy$ c) $\int_1^2 \ln(t)\,dt$ d) $\int_0^{\pi} \theta\cos(\theta)\,d\theta$

Indications 22.

Il s'agit d'appliquer la formule d'intégration par parties :

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = \left[uv\right]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx$$

Correction 22.

Correction vidéo ■

Nous allons appliquer la formule d'intégration par parties (IPP) :

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = \left[uv\right]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx$$

Pour cela nous allons dire quelle fonction joue le rôle de $u(x)$ et quelle fonction joue le rôle de $v'(x)$.

a) $\int_0^1 xe^x\,dx$

On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = e^x$. Cela donne $u'(x) = 1$ et $v(x) = e^x$. La formule d'intégration par parties donne :

$$I = \int_0^1 xe^x\,dx = \left[xe^x\right]_0^1 - \int_0^1 1\cdot e^x\,dx$$

Nous avons fait un progrès : le crochet est juste une évaluation à calculer et l'intégrale tout à droite est facile à calculer (car on connaît une primitive de e^x qui est e^x).

$$I = \left(1\cdot e^1 - 0\cdot e^0\right) - \left[e^x\right]_0^1 = e - (e-1) = 1.$$

b) $\int_0^1 y^2 e^{2y}\,dy$

On pose $u(y) = y^2$ et $v'(y) = e^{2y}$. Cela donne $u'(y) = 2y$ et $v(y) = \frac{1}{2}e^{2y}$. La formule d'intégration par parties donne :

$$J = \int_0^1 y^2 e^{2y}\,dy = \left[\frac{1}{2}y^2 e^{2y}\right]_0^1 - \int_0^1 y e^{2y}\,dy = \frac{1}{2}e^2 - \int_0^1 y e^{2y}\,dy$$

Ce n'est pas encore fini car il reste encore à calculer l'intégrale $J' = \int_0^1 y e^{2y}\,dy$. Mais on a quand même progresser car J' est plus facile à calculer que J.

Pour calculer J' on effectue une seconde intégration par parties, en posant $u(y) = y$ et $v'(y) = e^{2y}$ (et donc $u'(y) = 1$ et $v(y) = \frac{1}{2}e^{2y}$). Donc

$$\begin{aligned}
J' &= \int_0^1 y e^{2y}\,dy \\
&= \left[\frac{1}{2}y e^{2y}\right]_0^1 - \int_0^1 1 \cdot \frac{1}{2}e^{2y}\,dy \\
&= \frac{1}{2}e^2 - \left[\frac{1}{4}e^{2y}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}(e^2 - 1) \\
&= \frac{1}{4}(e^2 + 1)
\end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à reporter la valeur de J' obtenue pour obtenir la valeur de J :

$$J = \frac{1}{2}e^2 - J' = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}(e^2 + 1) = \frac{1}{4}(e^2 - 1)$$

c) $\int_1^2 \ln(t)\,dt$

Comment peut-on décider qui est u et qui est v alors qu'il n'y a pas de produit ? Il suffit d'écrire $\ln(t) = \ln(t) \times 1$ pour faire apparaître artificiellement une multiplication. On pose alors $u(t) = \ln(t)$ et $v'(t) = 1$ et donc $u'(t) = \frac{1}{t}$ et $v(t) = t$. On peut maintenant faire une IPP :

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \ln(t)\,dt &= \big[t\ln(t)\big]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{t} \cdot t\,dt \\
&= (2\ln 2 - 0) - \int_1^2 1\,dt \\
&= 2\ln 2 - \big[t\big]_1^2 \qquad \text{car une primitive de la fonction 1 est } t \\
&= 2\ln(2) - (2 - 1) \\
&= 2\ln(2) - 1
\end{aligned}$$

d) $\int_0^\pi \theta\cos(\theta)\,d\theta$

On pose $u(\theta) = \theta$ et $v'(\theta) = \cos(\theta)$. Cela donne $u'(\theta) = 1$ et $v(\theta) = \sin(\theta)$. La formule d'intégration par parties donne :

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \theta\cos(\theta)\,d\theta &= \big[\theta\sin(\theta)\big]_0^\pi - \int_0^\pi \sin(\theta)\,d\theta \\
&= 0 - \big[-\cos(\theta)\big]_0^\pi \\
&= \cos\pi - \cos 0 \\
&= -1 - 1 \\
&= -2
\end{aligned}$$

Exercice 23.

a) Déterminer A et B tels que $\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$, puis calculer $\int_2^4 \frac{1}{x^2-1} dx$.

b) Déterminer A, B, C tels que $\frac{x-2}{(x^2+1)(2x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{2x+1}$, puis calculer $\int_0^1 \frac{x-2}{(x^2+1)(2x+1)} dx$.

Indications 23.

Une primitive de $\frac{u'(x)}{u(x)}$ est $\ln|u(x)| + C$, $C \in \mathbb{R}$.

Correction 23.

Correction vidéo ■

a) On écrit

$$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{Ax+A+Bx-B}{x^2-1} = \frac{x(A+B)+A-B}{x^2-1}.$$

Donc $\frac{1}{x^2-1} = \frac{(A+B)x+A-B}{x^2-1}$ d'où $1 = (A+B)x + A - B$ et on obtient le système suivant pour déterminer les valeurs de A et B :

$$\begin{cases} A+B & = 0 \\ A-B & = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A & = -B \\ 2A & = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A & = \frac{1}{2} \\ B & = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Ainsi $\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)}$ et donc :

$$\begin{aligned} \int_2^4 \frac{1}{x^2-1} dx &= \int_2^4 \left(\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)} \right) dx = \int_2^4 \frac{1}{2(x-1)} dx - \int_2^4 \frac{1}{2(x+1)} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_2^4 \frac{1}{x-1} dx - \frac{1}{2} \int_2^4 \frac{1}{x+1} dx = \frac{1}{2} \big[\ln|x-1| \big]_2^4 - \frac{1}{2} \big[\ln|x+1| \big]_2^4 \\ &= \frac{1}{2}(\ln(3) - \ln(1)) - \frac{1}{2}(\ln(5) - \ln(3)) = \ln(3) - \frac{1}{2}\ln(5). \end{aligned}$$

b) On écrit

$$\begin{aligned} \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{2x+1} &= \frac{(Ax+B)(2x+1)+C(x^2+1)}{(x^2+1)(2x+1)} = \frac{2Ax^2+Ax+2Bx+B+Cx^2+C}{(x^2+1)(2x+1)} \\ &= \frac{(2A+C)x^2+(A+2B)x+B+C}{(x^2+1)(2x+1)}. \end{aligned}$$

Donc $\frac{x-2}{(x^2+1)(2x+1)} = \frac{(2A+C)x^2+(A+2B)x+B+C}{(x^2+1)(2x+1)}$ d'où $x - 2 = (2A+C)x^2 + (A+2B)x + B + C$ et on obtient le système suivant pour déterminer les valeurs de A, B et C :

$$\begin{cases} 2A+C & = 0 \\ A+2B & = 1 \\ B+C & = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2-4B-2-B & = 0 \\ A & = 1-2B \\ C & = -2-B \end{cases} \iff \begin{cases} B & = 0 \\ A & = 1 \\ C & = -2 \end{cases}$$

Ainsi $\frac{x-2}{(x^2+1)(2x+1)} = \frac{x}{x^2+1} - \frac{2}{2x+1}$ et donc :

$$\int_0^1 \frac{x-2}{(x^2+1)(2x+1)}dx = \int_0^1 \left(\frac{x}{x^2+1} - \frac{2}{2x+1}\right)dx = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx - \int_0^1 \frac{2}{2x+1}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx - \int_0^1 \frac{2}{2x+1}dx = \frac{1}{2}\Big[\ln|x^2+1|\Big]_0^1 - \Big[\ln|2x+1|\Big]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}(\ln(2)-\ln(1)) - (\ln(3)-\ln(1)) = \frac{1}{2}\ln(2) - \ln(3).$$

Calcul de débit

Exercice 25.

Lors d'un prélèvement sanguin le débit du sang, mesuré en ml/h, varie en fonction du temps t, en heures, selon la formule :

$$D(t) = \frac{K}{(t+1)(t+2)}.$$

a) Déterminer deux constantes A et B telles que $\frac{1}{(t+1)(t+2)} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t+2}$.

b) En sachant que pour un prélèvement qui dure a heures la volume prélevé est

$$V(a) = \int_0^a D(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Montrer que $V(a) = K\ln\left(\frac{2a+2}{a+2}\right)$.

c) On estime que le volume sanguin du corps humain est en moyenne de 70 ml/kg. En considèrant que pour un temps très long on peut prélever la totalité du sang, déterminer la constante K pour un homme de 80 kg.

d) Quelle est la quantité de sang prélevé en 10 minutes pour un individu de ce poids ?

Indications 25.

a)

b)

c) Pour déterminer K utiliser que le volume total s'obtient aussi en calculant la limite $V = \lim_{a\to+\infty} V(a)$.

d)

Correction 25.

Correction vidéo ■

a) On réduit la fraction $\frac{A}{t+1} + \frac{B}{t+2}$ au même dénominateur :

$$\frac{A}{t+1} + \frac{B}{t+2} = \frac{A(t+2)+B(t+1)}{(t+1)(t+2)} = \frac{(A+B)t+2A+B}{(t+1)(t+2)}$$

On veut que cette fraction soit égale à $\dfrac{0\cdot t+1}{(t+1)(t+2)}$ il faut donc :

$$\begin{cases} A+B &= 0 \\ 2A+B &= 1 \end{cases}$$

La première ligne donne $B = -A$ ce qui en reportant dans la seconde ligne donne $A = 1$. On obtient donc $A = 1$ et $B = -1$. (C'est une bonne idée de vérifier que cette solution conduit à la bonne fraction.)

b)

$$\begin{aligned}
V(a) &= \int_0^a D(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^a \frac{K}{(t+1)(t+2)}\,\mathrm{d}t \\
&= K\int_0^a \left(\frac{1}{t+1}+\frac{-1}{t+2}\right)\mathrm{d}t \qquad \text{en utilisant la première question} \\
&= K\int_0^a \frac{\mathrm{d}t}{t+1} \quad - \quad K\int_0^a \frac{\mathrm{d}t}{t+2} \\
&= K\left[\ln(t+1)\right]_0^a \quad - \quad K\left[\ln(t+2)\right]_0^a \qquad \text{car une primitive de } \frac{1}{t} \text{ et } \ln(t) \\
&= K\left(\ln(a+1)-\ln(1)\right)-K\left(\ln(a+2)-\ln(2)\right) \\
&= K\left(\ln(a+1)-\ln(a+2)+\ln(2)\right) \\
&= K\ln\left(\frac{2(a+1)}{a+2}\right) \qquad \text{en utilisant } \ln(ab)=\ln(a)+\ln(b) \text{ et } \ln(a/b)=\ln(a)-\ln(b)
\end{aligned}$$

c) — D'une part par les information de l'énoncé on sait que le volume du sang d'un homme de 80 kg est :

$$V = 70\times 80 = 5600 \text{ ml} = 5,6 \text{ l}$$

— D'autre part le volume total, correspond au volume que l'on prélèverait sur un temps très long :

$$V = \lim_{a\to+\infty} V(a)$$

Calculons cette limite : Comme $\frac{2(a+1)}{a+2}\to 2$ quand $a\to+\infty$, alors

$$V(a) = K\ln\left(\frac{2(a+1)}{a+2}\right) \xrightarrow[a\to+\infty]{} K\ln(2).$$

Ainsi $V = K\ln(2)$.

— Ainsi $V = 5600 = K\ln(2)$ donc $K = \frac{5600}{\ln(2)} \simeq 8080$.

d) Le volume prélevé en 10 minutes (soit $\frac{1}{6}$ d'heure) est $V(a) = K\ln\left(\frac{2(a+1)}{a+2}\right)$ avec $a=\frac{1}{6}$ et $K\simeq 8080$, c'est-à-dire :

$$V(\tfrac{1}{6}) = K\cdot\ln\left(\frac{2(\frac{1}{6}+1)}{\frac{1}{6}+2}\right) \simeq 8080\cdot\ln\left(\frac{14}{13}\right) \simeq 600 \text{ ml}$$

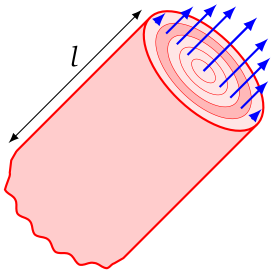
Note : lors d'un don du sang le volume prélevé est compris entre 400 et 500 ml.

Exercice 26.

Pour étudier le flux dans un vaisseau sanguin, on peut modéliser le vaisseau par un tube cylindrique de rayon R et de longueur l. On désigne par $v(r)$ la vitesse du sang (en cm/s) en un point à distance r de l'axe central. On admet que le débit sanguin total F est donné par l'intégrale

$$F = \int_0^R 2\pi r v(r) dr. \tag{1}$$

a) Calculer F lorsque l'on suppose $v(r)\equiv v$ constante sur $[0,R]$. Expliquer pourquoi le débit trouvé est le produit de la vitesse v multipliée par la section du vaisseau sanguin.



A cause du frottement contre les parois du tube, la vitesse du sang est maximale au centre du vaisseau et est nulle au niveau des parois. La vitesse en un point à distance r de l'axe central est donnée (en cm/s) par

$$v(r) = \frac{P}{4\eta l}(R^2 - r^2) \tag{2}$$

où P est la différence de pression entre les deux extrémités du tube et η la viscosité du sang.

b) Calculer le débit à partir de (1) en utilisant l'expression (2) de $v(r)$. Cette expression de F est appelée la loi de Poiseuille.

c) L'hypertension est due au rétrécissement des artères. Pour maintenir le même débit, le coeur doit pomper plus fort, ce qui augmente la pression sanguine. Utiliser la loi de Poiseuille pour montrer que si R_0 et P_0 sont les valeurs normales du rayon et de la pression, R et P les valeurs lors de l'hypertension, alors conserver le même débit sanguin impliquera la relation

$$\frac{P}{P_0} = \left(\frac{R_0}{R}\right)^4. \tag{3}$$

En déduire que si le rayon de l'artère est réduit aux trois quarts de sa valeur normale, la pression sanguine a plus que triplé.

Indications 26.

Une primitive de x^n est $\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$, $C \in \mathbb{R}$.

Correction 26.

Correction vidéo ■

a) Soit $v(r) \equiv v$ constante sur $[0, R]$. Alors la formule (1) implique

$$F = \int_0^R 2\pi r v dr = 2\pi v \int_0^R r dr = 2\pi v \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R = \underbrace{\pi R^2}_{\text{section du vaisseau}} \cdot \underbrace{v}_{\text{vitesse}}.$$

b) On a

$$F = \int_0^R 2\pi r \frac{P}{4\eta l}(R^2 - r^2) dr = \frac{\pi P}{2\eta l}\int_0^R (R^2 r - r^3) dr = \frac{\pi P}{2\eta l}\left[\frac{R^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^R = \frac{\pi P}{2\eta l}\left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4}\right) = \frac{\pi P R^4}{8\eta l}.$$

c) On a $F = \frac{\pi P R^4}{8\eta l}$ et $F_0 = \frac{\pi P_0 R_0^4}{8\eta l}$. Alors $F = F_0$ implique

$$\frac{\pi P R^4}{8\eta l} = \frac{\pi P_0 R_0^4}{8\eta l} \iff P R^4 = P_0 R_0^4 \iff \frac{P}{P_0} = \left(\frac{R_0}{R}\right)^4.$$

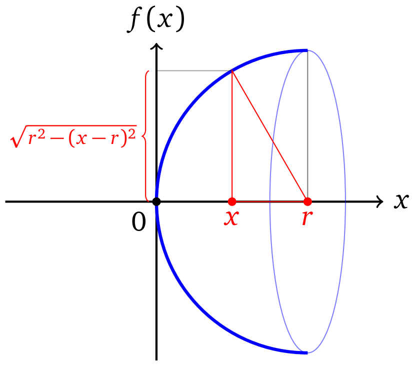
Si $R = \frac{3}{4}R_0$, alors

$$P = \left(\frac{4}{3}\right)^4 P_0 > 3P_0.$$

Longueur, aire, volume

Exercice 29.

On remplit d'eau un bol hémisphérique, de rayon r (en cm).



Un tel bol est obtenu par rotation autour de l'axe x de la courbe représentant $f(x) = \sqrt{r^2-(x-r)^2}$ pour $x \in [0, r]$.

a) Montrer que, s'il est rempli jusqu'à une hauteur h (en cm), le bol contient (en cm^3)

$$V(h) = \frac{1}{3}\pi h^2(3r-h).$$

b) En déduire le volume d'eau que peut contenir le bol.

c) Écrire l'équation déterminant à quelle hauteur le bol sera à moitié plein.

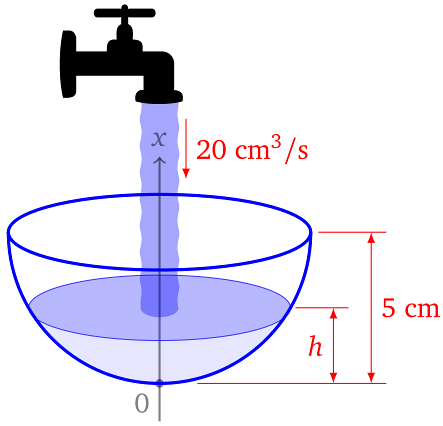
d) Le bol fait 5 centimètres de rayon et l'eau coule à un débit de 20 cm^3/s.

(i) Combien de temps faudra-t-il pour que la hauteur de l'eau passe de 2 centimètres à 4 centimètres ?

(ii) Soit $h(t)$ la hauteur (en cm) au temps t (en s). Montrer que

$$h'(t)(10\pi h(t) - \pi h^2(t)) = 20.$$

(iii) A quelle vitesse le niveau de l'eau monte-t-il s'il y a déjà 2 centimètres d'eau au fond ?



Indications 29.

a) $V(h) = \int_0^h \pi f(x)^2 \mathrm{d}x$

b) Calculer $V(r)$.

c) L'équation est « $V(h)$ est égale à la moitié de $V(r)$ ». On ne demande pas de trouver le h solution de cette équation.

d) (i) Calculer $V(4) - V(2)$. Le débit est donné par débit $= \frac{\text{volume}}{\text{temps}}$.

(ii) Le débit à un instant t est aussi la dérivée du volume par rapport au temps, ici c'est donc $\big(V(h(t))\big)'$.

(iii) La vitesse de montée de l'eau est donnée par $h'(t)$ que l'on peut calculer en utilisant la question précédente avec ici $h(t) = 2$.

Correction 29.

Correction vidéo ■

a)

$$\begin{aligned} V(h) &= \int_0^h \pi f(x)^2 \mathrm{d}x \\ &= \int_0^h \pi\big(r^2-(x-r)^2\big)\mathrm{d}x \\ &= \pi \int_0^h (2xr - x^2)\mathrm{d}x \\ &= \pi\left[x^2 r - \frac{x^3}{3}\right]_0^h \\ &= \pi\left(h^2 r - \frac{h^3}{3}\right) \end{aligned}$$

b)

$$V(r) = \pi\left(r^2 r - \frac{r^3}{3}\right) = \frac{2}{3}\pi r^3$$

c) L'équation est $V(h) = \frac{1}{2}V(r)$, c'est-à-dire

$$\pi h^2\left(r - \frac{h}{3}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\pi r^3$$

ou encore

$$h^2(3r-h) = r^3.$$

On ne demande pas de résoudre cette équation.

d) (i) Le volume d'eau nécessaire pour faire passer le niveau de 2 à 4 cm est :

$$V(4) - V(2) = \frac{\pi}{3}\big(16(15-4) - 4(15-2)\big) \simeq 128,8 \text{ cm}^3.$$

et le temps nécessaire est :

$$\text{temps} = \frac{\text{volume}}{\text{débit}} \simeq \frac{129,8}{20} \simeq 7 \text{ s}.$$

(ii) Le débit est la dérivée du volume par rapport au temps, c'est-à-dire

$$\text{débit} = \big(V(h(t))\big)' = V'(h(t))\cdot h'(t) = \pi(2h(t)r - h(t)^2)h'(t).$$

Ici on obtient avec $r = 5$ et débit de 20 cm^3/s :

$$\pi(10h(t) - h(t)^2)h'(t) = 20.$$

(iii) La vitesse du niveau de l'eau est la dérivée de h par rapport au temps : $h'(t)$. Par l'équation de la question précédente :

$$h'(t) = \frac{20}{\pi(10h(t)-h(t)^2)}.$$

On se place au temps t_0 où il y a déjà 2 cm d'eau, alors $h(t_0) = 2$

$$h'(t_0) = \frac{20}{\pi(10\cdot 2 - 2^2)} = \frac{20}{16\pi} \simeq 0,4 \text{ cm/s}.$$

Exercice 30.

Soit f une fonction continue sur le segment $[a,b]$.

a) On admet que la longueur de la courbe d'équation $y=f(x)$ pour $x\in[a,b]$ est donnée par l'intégrale

$$L=\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx. \tag{1}$$

(i) Soit f une fonction constante : pour $x\in[a,b]$, $f(x)=c$. La formule (1) donne-t-elle le résultat attendu ?

(ii) Soit f une fonction affine : pour $x\in[a,b]$, $f(x)=kx+c$. Tracer le graphe de f. La formule (1) donne-t-elle le résultat attendu ?

(iii) Calculer la longueur de la courbe d'équation $y=x^{\frac{3}{2}}$ pour $x\in[0,1]$.

b) Soit f une fonction positive. On fait tourner la courbe d'équation $y=f(x)$ entre $x=a$ et $x=b$ autour de l'axe des x. On admet que l'aire de la surface ainsi obtenue est donnée par l'intégrale

$$A=\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{(1+f'(x)^2)}\,dx. \tag{2}$$

(i) Soit f une fonction constante. Quelle est la forme de l'objet obtenu ? La formule (2) donne-t-elle le résultat attendu ?

(ii) Mêmes questions pour $f(x)=kx$ $(k>0)$ pour x entre 0 et 1.

(iii) Retrouver la formule de l'aire d'une sphère de rayon R.

Indications 30.

Une primitive de la fonction $f(x)=u'(x)(u(x))^n$ est $\frac{1}{n+1}(u(x))^{n+1}+C$, $C\in\mathbb{R}$.

Correction 30.

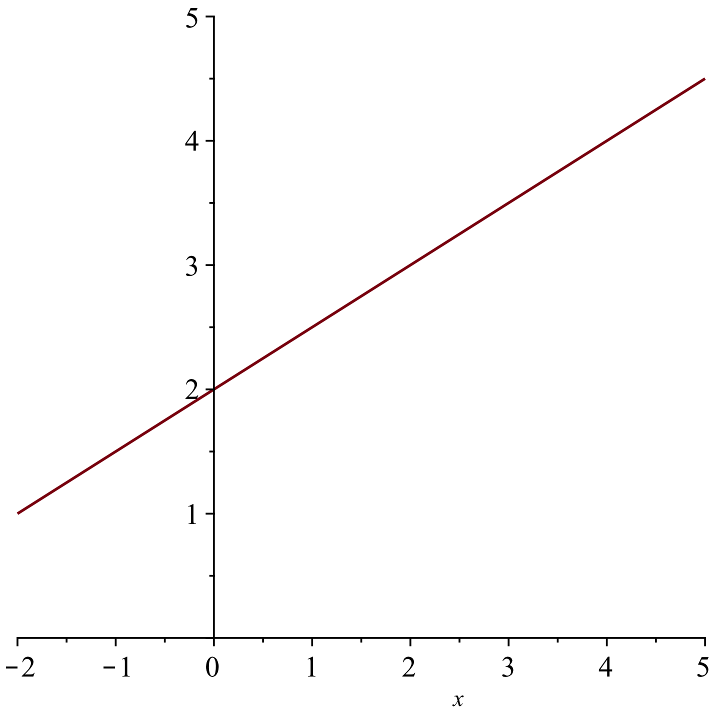
Correction vidéo ■

a) (i) Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $f(x)=c$ une fonction constante. Alors la longueur de la courbe d'équation $y=f(x)$, $x\in[a,b]$, est bien sûr $b-a$. De plus, on a $f'(x)=0$, $x\in[a,b]$, et donc la formule donne :

$$\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx=\int_a^b 1\,dx=[x]_a^b=b-a.$$

On retrouve bien le résultat attendu.

(ii) Soit $f(x)=kx+c$, $x\in[a,b]$. Pour $k=\frac{3}{2}$ and $a=2$ on a le graphe



En utilisant le théorème de Phythagore on obtient que la longueur de la courbe d'équation $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, est donnée par

$$\sqrt{(f(b)-f(a))^2+(b-a)^2} = \sqrt{(kb+c-(ka+c))^2+(b-a)^2} = \sqrt{(k(b-a))^2+(b-a)^2}$$
$$= \sqrt{(b-a)^2(k^2+1)} = (b-a)\sqrt{k^2+1}.$$

De plus, on a $f'(x) = k$, $x \in [a, b]$, et d'après la formule (1) :

$$\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx = \int_a^b \sqrt{1+k^2}\,dx = \sqrt{1+k^2}\int_a^b 1\,dx = \sqrt{1+k^2}\,[x]_a^b = \sqrt{1+k^2}(b-a).$$

Ainsi la formule donne bien le résultat attendu.

(iii) Comme la dérivée de la fonction $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ est $f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ la formule (1) implique

$$L = \int_0^1 \sqrt{1+\tfrac{9}{4}x}\,dx = \frac{4}{9}\int_0^1 \frac{9}{4}\sqrt{1+\tfrac{9}{4}x}\,dx = \frac{4}{9}\left[\frac{2}{3}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{8}{27}\left(\left(1+\frac{9}{4}\right)^{\frac{3}{2}}-1\right)$$
$$= \frac{8}{27}\left(\left(\frac{13}{4}\right)^{\frac{3}{2}}-1\right).$$

b) (i) Si $f(x) = c$, $x \in [a, b]$, $c \in \mathbb{R}$, alors on obtient un cylindre de rayon $r = c$ et hauteur $h = b-a$. Donc l'aire de la surface est $A = 2\pi c(b-a)$. Comme $f'(x) = 0$, $x \in [a, b]$, on obtient en utilisant la formule (2) :

$$A = \int_a^b 2\pi c\sqrt{1}\,dx = 2\pi c\int_a^b 1\,dx = 2\pi c\,[x]_a^b = 2\pi c(b-a)$$

et la formule donne le résultat attendu.

(ii) Si $f(x) = kx$, $x \in [0, 1]$, $k \in \mathbb{R}$, alors on obtient un cône de rayon $r = f(1) = k$ et hauteur $h = 1$. Donc l'aire de la surface est $A = \pi k\sqrt{1+k^2}$. Comme $f'(x) = k$, $x \in [0, 1]$, on obtient en utilisant la formule (2)

$$A = \int_0^1 2\pi kx\sqrt{1+k^2}\,dx = 2\pi k\sqrt{1+k^2}\int_0^1 x\,dx = 2\pi k\sqrt{1+k^2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \pi k\sqrt{1+k^2}$$

et la formule donne le résultat attendu.

(iii) On obtient une sphère de rayon R si on fait tourner la courbe d'équation $y = f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, $x \in [-R, R]$, autour de l'axe des x. Comme $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}$ la formule (2) donne

$$\begin{aligned} A &= \int_{-R}^{R} 2\pi\sqrt{R^2-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\,dx = 2\pi\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\sqrt{\frac{R^2-x^2+x^2}{R^2-x^2}}\,dx \\ &= 2\pi\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2}\,dx = 2\pi R\int_{-R}^{R} 1\,dx = 2\pi R\,[x]_{-R}^{R} = 2\pi R\cdot 2R = 4\pi R^2. \end{aligned}$$

Résolution d'équations différentielles au moyen des primitives

Exercice 33.

Reprenons le problème déjà rencontré dans la première partie :

$$\begin{aligned} x'(t) &= (\alpha - 2t - 1)x(t) &\quad (1) \\ x(0) &= x_0 > 0 &\quad (2) \end{aligned}$$

a) Quelle est la primitive (à constante près) de $\frac{x'(t)}{x(t)}$ et celle de $\alpha - 2t - 1$? Déduire que si $x(t)$ est solution de l'équation différentielle, on a $\ln|x| = \alpha t - t^2 - t + C$.

b) Déterminer la constante C en fonction de la valeur initiale x_0.

c) Extraire la valeur de x comme fonction de t.

Indications 33.

Si deux fonctions ont la même dérivée, alors les fonctions sont égales à une constante près : si $f'(x) = g'(x)$ (pour tout x) alors $f(x) = g(x) + C$ (pour tout x), pour une certaines constante réelle C.
On peut admettre ici que la solution cherchée est partout positive, ainsi $|x(t)| = x(t)$.

Correction 33.

`Correction vidéo ■`

a) Les primitives de $\frac{x'(t)}{x(t)}$ sont les $\ln(|x(t)|) + C_1$. Les primitives de $\alpha - 2t - 1$ sont les $\alpha t - t^2 - t + C_2$. Par l'équation différentielle $\frac{x'(t)}{x(t)} = \alpha - 2t - 1$, donc les primitives sont égales (à une constante près) :

$$\ln(|x(t)|) = \alpha t - t^2 - t + C$$

b) En $t = 0$ on a $x(t) = x_0 > 0$ donc on obtient $\ln(x_0) = C$.

c) Reprenons l'égalité $\ln(|x(t)|) = \alpha t - t^2 - t + C$, alors

$$\begin{aligned} |x(t)| &= e^{\alpha t - t^2 - t + C} \\ &= e^{(\alpha-1)t - t^2} \cdot e^C \\ &= x_0 \cdot e^{(\alpha-1)t-t^2} \qquad \text{car } e^C = e^{\ln(x_0)} = x_0 \end{aligned}$$

On prouve pour finir que $x(t) > 0$. En effet la solution nulle est solution de l'équation différentielle ; comme deux courbes intégrales ne se coupent pas, notre solution ne s'annule pas et comme $x(0) > 0$ alors $x(t)$ reste positive.
Conclusion $|x(t)| = x(t)$ et donc $x(t) = x_0 e^{(\alpha-1)t-t^2}$.

Exercice 34.

Reprenons le problème déjà rencontré dans la première partie :

$$\begin{aligned} y'(t) &= -K\,y(t)(1-y(t)) && (1)\\ y(0) &= y_0 \text{ avec } 0<y_0<1 && (2)\end{aligned}$$

a) Calculer la primitive (à constante près) de

$$\frac{y'(t)}{y(t)(1-y(t))}.$$

Déduire que si $y(t)$ est solution de l'équation différentielle, on a

$$\ln\left|\frac{y}{1-y}\right| = -Kt + C.$$

b) Déterminer la constante C en fonction de la valeur initiale y_0.

c) Extraire la valeur de y comme fonction de t.

Indications 34.

— Trouver des constantes A, B telle que $\frac{1}{y(1-y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{1-y}$.

— Récrire l'équation différentielle sous la forme $\frac{y'(t)}{y(t)(1-y(t))} = -K$ et intégrer de chaque côté.

— Si F et G sont des primitives d'une fonction f, alors $F = G + C$, où $C \in \mathbb{R}$ est une constante.

— On admet ici que notre solution vérifie $0 < y(t) < 1$ pour tout t.

Correction 34.

Correction vidéo ■

a) Si $F(t)$ est une primitive de $f(t)$ et $u(t)$ est une fonction dérivable, alors $F(u(t))$ est une primitive de $u'(t)f(u(t))$. On cherche des constantes A, B telle que $\frac{1}{y(1-y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{1-y}$. Comme

$$\frac{A}{y} + \frac{B}{1-y} = \frac{A - Ay + By}{y(1-y)} = \frac{(B-A)y + A}{y(1-y)}$$

il faut que $(B-A)y + A = 1$

$$\begin{cases} B-A &= 0\\ A &= 1\end{cases} \iff \begin{cases} A &= 1\\ B &= 1.\end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned}\int \frac{y'(t)}{y(t)(1-y(t))}\,dt &= \int y'(t)\frac{1}{y(t)(1-y(t))}\,dt = \int y'(t)\left(\frac{1}{y(t)} + \frac{1}{1-y(t)}\right)dt\\ &= \int \left(\frac{y'(t)}{y(t)} + \frac{y'(t)}{1-y(t)}\right)dt = \int \frac{y'(t)}{y(t)} + \int \frac{y'(t)}{1-y(t)}dt\\ &= \ln|y(t)| - \ln|1-y(t)| + C\\ &= \ln\left|\frac{y(t)}{1-y(t)}\right| + C.\end{aligned}$$

On écrit l'équation différentielle (1) sous la forme

$$\frac{y'(t)}{y(t)(1-y(t))} = -K.$$

On sait déjà qu'une primitive de $\frac{y'(t)}{y(t)(1-y(t))}$ est la fonction $\ln\left|\frac{y(t)}{1-y(t)}\right|$. De plus, $-Kt$ est une primitive de $-K$. Comme on sait que deux primitives d'une même fonction ne diffèrent que d'une constante, il existe alors une constante C telle que

$$\ln\left|\frac{y(t)}{1-y(t)}\right| = -Kt + C. \tag{3}$$

b) Si on pose $t = 0$ dans (3), alors

$$C = \ln\left|\frac{y(0)}{1-y(0)}\right| + K \cdot 0 = \ln\frac{y_0}{1-y_0}$$

c) En remplace C par la valeur trouvée et obtient

$$\ln\left|\frac{y(t)}{1-y(t)}\right| = -Kt + \ln\frac{y_0}{1-y_0} \quad \iff \quad \ln\left|\frac{(1-y_0)y(t)}{y_0(1-y(t))}\right| = -Kt.$$

En appliquant la fonction exponentielle et en admettant ici $0 < y(t) < 1$, on trouve :

$$\frac{(1-y_0)y(t)}{y_0(1-y(t))} = e^{-Kt} \iff (1-y_0)y(t) = y_0(1-y(t))e^{-Kt} \iff (1-y_0+y_0e^{-Kt})y(t) = y_0e^{-Kt}$$
$$\iff y(t) = \frac{y_0e^{-Kt}}{1-y_0+y_0e^{-Kt}}.$$