

---

## Fiche 3. Limites

---

*Savoir.*

- ☐ Connaître les limites des fonctions usuelles.
- ☐ Connaître les opérations sur les limites.

*Savoir-faire.*

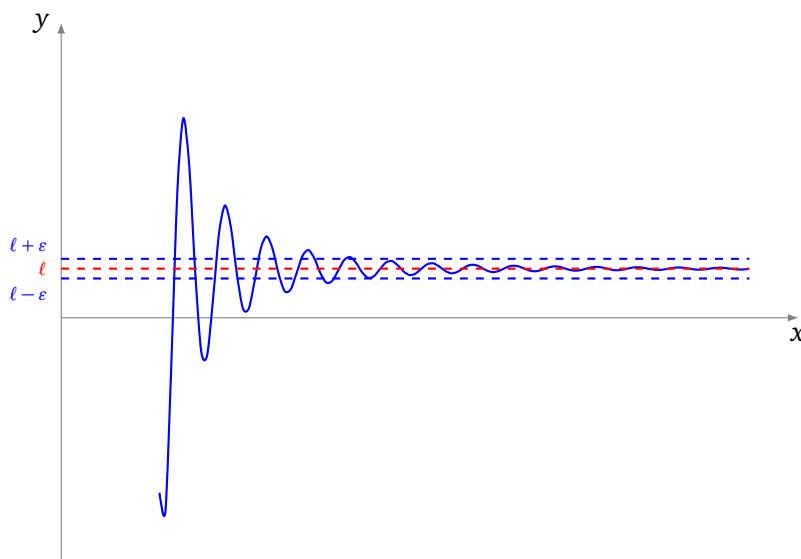
- ☐ Savoir déterminer la limite en un réel  $a$ , en  $+\infty$  ou en  $-\infty$  d'une fonction donnée.
- ☐ Savoir appliquer les différentes méthodes de calcul de limites.
- ☐ Savoir lever une indétermination.

La notion de limite permet d'étudier le comportement d'une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  en un point, en  $-\infty$  ou  $+\infty$ .

### Notion de limite en $+\infty$

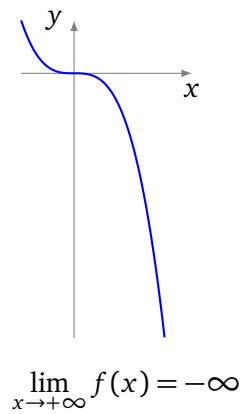
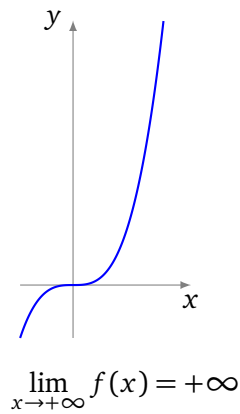
#### Limite finie en $+\infty$

Soit  $\ell$  un réel. Si tout intervalle ouvert  $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ , avec  $\varepsilon > 0$ , contient toutes les valeurs de  $f(x)$  pour  $x$  suffisamment grand alors on dit que  $f$  tend vers  $\ell$  en  $+\infty$  et on note  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$  ou  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$ .



#### Limite infinie en $+\infty$

- Si tout intervalle  $[M, +\infty[$  avec  $M \in \mathbb{R}$  contient toutes les valeurs de  $f(x)$  pour  $x$  suffisamment grand alors on dit que  $f$  tend vers  $+\infty$  en  $+\infty$  et on note  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .
- Si tout intervalle  $] -\infty, M]$  avec  $M \in \mathbb{R}$  contient toutes les valeurs de  $f(x)$  pour  $x$  suffisamment grand alors on dit que  $f$  tend vers  $-\infty$  en  $+\infty$  et on note  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ .



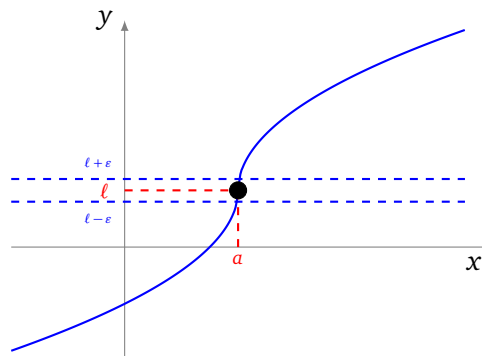
### Remarque

- Une fonction  $f$  n'admet pas obligatoirement de limite en  $+\infty$ . Par exemple, les fonctions sinus et cosinus n'admettent pas de limite que ce soit en  $+\infty$  ou en  $-\infty$ .
- La notion de limite en  $-\infty$  ne sera pas explicitée, elle est similaire à celle en  $+\infty$ .

### Notion de limite en un réel $a$

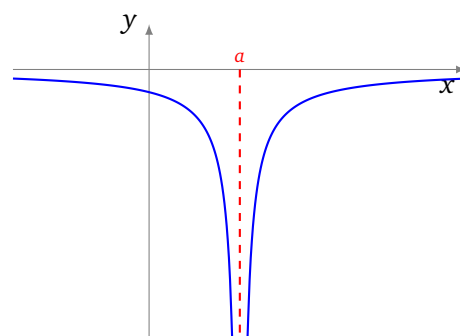
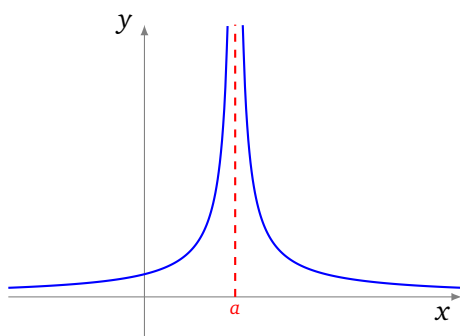
#### Limite finie en $a$

Soit  $\ell \in \mathbb{R}$ . Si tout intervalle ouvert  $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ , avec  $\varepsilon > 0$  contient toutes les valeurs de  $f(x)$  pour  $x$  suffisamment proche de  $a$  alors on dit que  $f$  tend vers  $\ell$  en  $a$  et on note  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ .



#### Limite infinie en $a$

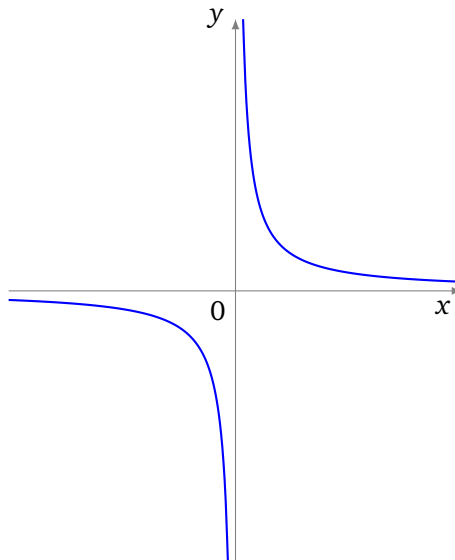
- Si tout intervalle  $[M, +\infty[$  avec  $M \in \mathbb{R}$  contient toutes les valeurs de  $f(x)$  pour  $x$  suffisamment proche de  $a$  alors on dit que  $f$  tend vers  $+\infty$  en  $a$  et on note  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ .
- Si tout intervalle  $]-\infty, M]$  avec  $M \in \mathbb{R}$  contient toutes les valeurs de  $f(x)$  pour  $x$  suffisamment proche de  $a$  alors on dit que  $f$  tend vers  $-\infty$  en  $a$  et on note  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ .



## Limite à gauche, limite à droite en $a$

- Pour définir la notion de limite à gauche en  $a$ , on remplace la locution "x suffisamment proche de  $a$ " de la définition par "x suffisamment proche de  $a$  avec  $x < a$ ". La notation devient  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ .
- Pour définir la notion de limite à droite en  $a$ , on remplace la locution "x suffisamment proche de  $a$ " de la définition par "x suffisamment proche de  $a$  avec  $x > a$ ". La notation devient  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ .

L'étude de la fonction inverse est un exemple montrant l'importance de la notion de limite à gauche et de limite à droite. En effet, la limite en 0 n'existe pas mais  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ .



## Opérations sur les limites

Lorsque l'on connaît la limite de deux fonctions  $f$  et  $g$  en un point ou en l'infini, que se passe-t-il pour  $kf$  (avec  $k$  un réel),  $f + g$ ,  $f - g$ ,  $f \times g$ ,  $\frac{f}{g}$  (si cela existe),  $f \circ g$  (composée de  $g$  par  $f$  si cela existe) ? Toutes ces opérations sont naturelles, à l'exception notable des formes indéterminées (notées FI).

### Limite d'une somme de fonctions

$$\text{Si } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \text{ et } g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell' \text{ alors } f(x) + g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell + \ell'.$$

Cette formule est encore valable si on se place en  $a = +\infty$  (ou  $a = -\infty$ ).

Ces formules sont aussi valables dans certains cas pour  $\ell = +\infty$  ou  $\ell' = +\infty$  en utilisant les conventions :

$$\ell + \infty = +\infty \quad +\infty + \infty = +\infty$$

Exemple.  $f(x) = \exp(x)$  et  $g(x) = x^2 - 1$ . On a  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$  donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + g(x) = +\infty$ . On a aussi  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - g(x) = -\infty$ .

Par contre si  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty$  et  $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} -\infty$ , alors il s'agit d'une forme indéterminée " $+\infty - \infty$ ". On ne peut rien dire sur la limite de  $f + g$ . Il faut étudier la situation à la main sur chaque exemple.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$\ell$	$\ell$	$\ell$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} f(x) + g(x)$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

### Limite d'un produit de fonctions

$$\text{Si } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \text{ et } g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell' \text{ alors } f(x) \times g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \times \ell'.$$

Ces formules s'étendent dans certains cas pour  $\ell = +\infty$  ou  $\ell' = +\infty$  en utilisant les conventions :

$$\begin{aligned} (+\infty) \times (+\infty) &= +\infty & (-\infty) \times (-\infty) &= +\infty & (+\infty) \times (-\infty) &= -\infty \\ \ell \times (+\infty) &= +\infty \text{ si } \ell > 0 & \ell \times (+\infty) &= -\infty \text{ si } \ell < 0 \end{aligned}$$

Par contre " $0 \times (+\infty)$ " est une forme indéterminée à étudier au cas par cas.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$\ell$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$\ell'$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \times g(x) =$	$\ell \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	FI	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

### Limite de l'inverse d'une fonction

$$\text{Si } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \text{ avec } \ell \neq 0 \text{ alors } \frac{1}{f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} \frac{1}{\ell}.$$

La forme " $\frac{1}{0}$ " est indéterminée, mais par contre on peut dire " $\frac{1}{0^+} = +\infty$ " et " $\frac{1}{0^-} = -\infty$ ".

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$\ell \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	$0^+$	$0^-$
$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)}$	$\frac{1}{\ell}$	$0^+$	$0^-$	$+\infty$	$-\infty$

Pour une fraction  $\frac{f}{g}$  on écrit  $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \times \frac{1}{g(x)}$ .

### Limite d'une composée de fonctions

$$\text{Si } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b \text{ et } g(x) \xrightarrow{x \rightarrow b} \ell \text{ alors } g(f(x)) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell.$$

*Exemple.* On cherche à déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x}{x^2 + 1}\right)$ .

— Pour tout  $x > 0$  on a :

$$\frac{x}{x^2 + 1} = \frac{x}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1}{x} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right).$$

— On sait que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$  et donc que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x^2} = 1$ . Donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 0$ . D'où

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = 0.$$

— On sait que  $\lim_{y \rightarrow 0} \ln(y) = -\infty$ .

Ainsi, par le théorème de composition,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x}{x^2 + 1}\right) = -\infty$ .

### Comment lever une indétermination ?

Les opérations sur les limites ne permettent pas de conclure dans tous les cas. Il existe des formes indéterminées. Les plus courantes sont du type :

$$+\infty - \infty \quad 0 \times (+\infty) \quad \frac{0}{0} \quad \frac{\infty}{\infty}$$

Dans ce cas, il faut lever l'indétermination. Pour cela, il existe différentes méthodes que nous expliquerons par des exemples.

## Factorisation

- Considérons la fonction polynomiale définie par  $f(x) = -3x^6 - 7x^5 + x + 12$ . On cherche à déterminer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ . Pour cela, on factorise par le monôme de plus haut degré. Ici il s'agit du monôme  $-3x^6$ . Pour  $x < 0$  on a donc :

$$f(x) = -3x^6 - 7x^5 + x + 12 = -3x^6 \left( 1 - \frac{7x^5}{-3x^6} + \frac{x}{-3x^6} + \frac{12}{-3x^6} \right) = -3x^6 \left( 1 + \frac{7}{3x} - \frac{1}{3x^5} - \frac{4}{x^6} \right).$$

Or  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7}{3x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{3x^5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x^6} = 0$ , donc la fonction dans la parenthèse tend vers 1 et comme  $\lim_{x \rightarrow -\infty} -3x^6 = -\infty$ , on obtient

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

- On considère la fonction définie par  $f(x) = \frac{x^3 + \sqrt{x}}{x^2 + 1}$ . On cherche à déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ . On a une forme indéterminée  $\frac{\infty}{\infty}$ . Pour lever l'indétermination, on factorise au numérateur et au dénominateur par le terme qui croît le plus vite en valeur absolue. Dans notre cas, on factorise le numérateur par  $x^3$  et le dénominateur par  $x^2$ . Ainsi, pour  $x > 0$ , on a :

$$f(x) = \frac{x^3 + \sqrt{x}}{x^2 + 1} = \frac{x^3 \left( 1 + \frac{\sqrt{x}}{x^3} \right)}{x^2 \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right)} = x \frac{1 + \frac{\sqrt{x}}{x^3}}{1 + \frac{1}{x^2}} = x \frac{1 + x^{-\frac{5}{2}}}{1 + \frac{1}{x^2}}.$$

Or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-\frac{5}{2}} = 0$ . Donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + x^{-\frac{5}{2}}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

## Utilisation de l'expression conjuguée

À partir de l'identité remarquable  $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ , on déduit que  $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b$ .

Considérons la fonction définie par  $f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{x}$ . On cherche à déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ . Nous utilisons la quantité conjuguée de  $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ , qui est  $\sqrt{x+1} + \sqrt{x}$ . Ainsi, pour  $x > 0$ , on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{x} = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{x} \times \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{x(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} \\ &= \frac{(\sqrt{x+1})^2 - (\sqrt{x})^2}{x(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} = \frac{x+1-x}{x(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} = \frac{1}{x(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}. \end{aligned}$$

Or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}) = +\infty$ . Donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{x} = 0$ .

## Utilisation de la définition de la dérivée

Considérons la fonction définie par  $f(x) = \frac{\cos(x) - 1}{x}$ . On veut déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ . Pour cela, on pose  $g(x) = \cos(x)$ . La fonction cosinus est dérivable en 0 et, par définition,  $g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0}$ . Or  $g(0) = \cos(0) = 1$ . Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = g'(0)$$

Il ne reste plus qu'à calculer  $g'(0)$  à l'aide de  $g'$ . On sait que  $g'(x) = -\sin(x)$  pour tout réel  $x$ . Ainsi  $g'(0) = -\sin(0) = 0$ . On obtient finalement que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ .

En exercice, calculez  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$ .

## Règle de l'Hôpital

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies et dérivables avec :

$$f(a) = 0 \quad g(a) = 0 \quad \text{et} \quad g'(a) \neq 0.$$

$$\text{Alors:} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

*Exemple.* Considérons la fonction définie par  $h(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$ . On veut déterminer  $\lim_{x \rightarrow 1} h(x)$ . On pose  $f(x) = x^3 - 1$  et  $g(x) = x - 1$ . Ces deux fonctions sont définies et dérivables sur  $\mathbb{R}$  car ce sont des fonctions polynomiales. De plus,  $f(1) = g(1) = 0$ ,  $g'(x) = 1$ ,  $g'(1) = 1 \neq 0$ ,  $f'(x) = 3x^2$  et  $f'(1) = 3$ . Alors, en utilisant la règle de l'Hôpital, on a :  $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(1)}{g'(1)} = 3$ .

Exercice. Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$ .

## Croissances comparées

Ce sont des situations où l'on peut lever l'indétermination car une fonction "l'emporte" sur l'autre. Par exemple le comportement de l'exponentielle l'emporte sur le comportement d'une fonction polynôme, qui elle l'emporte sur le logarithme.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^k} = +\infty$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^k e^x = 0$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^k} = 0$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^k \ln(x) = 0$$

où  $k > 0$  est un entier ou un réel

*Exemple.* Calculons  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}}$ . Soit  $x > 0$ . On a  $x^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{1}{x} \ln(x)\right)$ . Or, par croissance comparée,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln(x) = 0$ . On sait que  $\lim_{x \rightarrow 0} \exp(x) = 1$ . Ainsi,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$ .

## Une fonction croissante et majorée admet une limite

**Proposition.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction croissante et majorée (c'est-à-dire il existe  $M > 0$  tel que  $f(x) < M$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ) alors  $f$  admet une limite  $\ell \in \mathbb{R}$  lorsque  $x \rightarrow +\infty$ . De même une fonction décroissante et minorée admet une limite en  $+\infty$ .

*Exemple.* Soit  $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x}$  définie sur  $[1, +\infty[$ . On sait  $-1 \leq \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$  et  $0 \leq \frac{1}{x} \leq 1$  pour tout  $x \in [1, +\infty[$ . Alors  $-1 \leq f(x) \leq 2$  pour tout  $x \in [1, +\infty[$ . En plus

$$f'(x) = \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right) - 1}{x^2} \leq 0$$

donc  $f$  est décroissante et minorée par  $-1$ , donc  $f$  admet une limite  $\ell$  en  $+\infty$ . La proposition ne donne pas la valeur de la limite (en fait ici  $\ell = 1$ ).