Résolution d'équations différentielles au moyen des primitives

Exercice 33.

Reprenons le problème déjà rencontré dans la première partie :

$$\begin{aligned} x'(t) &= (\alpha - 2t - 1)x(t) && (1) \\ x(0) &= x_0 > 0 && (2) \end{aligned}$$

a) Quelle est la primitive (à constante près) de $\frac{x'(t)}{x(t)}$ et celle de $\alpha - 2t - 1$? Déduire que si $x(t)$ est solution de l'équation différentielle, on a $\ln|x| = \alpha t - t^2 - t + C$.

b) Déterminer la constante C en fonction de la valeur initiale x_0.

c) Extraire la valeur de x comme fonction de t.

Indications 33.

Si deux fonctions ont la même dérivée, alors les fonctions sont égales à une constante près : si $f'(x) = g'(x)$ (pour tout x) alors $f(x) = g(x) + C$ (pour tout x), pour une certaines constante réelle C.
On peut admettre ici que la solution cherchée est partout positive, ainsi $|x(t)| = x(t)$.

Correction 33.

Correction vidéo ■

a) Les primitives de $\frac{x'(t)}{x(t)}$ sont les $\ln(|x(t)|) + C_1$. Les primitives de $\alpha - 2t - 1$ sont les $\alpha t - t^2 - t + C_2$. Par l'équation différentielle $\frac{x'(t)}{x(t)} = \alpha - 2t - 1$, donc les primitives sont égales (à une constante près) :

$$\ln(|x(t)|) = \alpha t - t^2 - t + C$$

b) En $t = 0$ on a $x(t) = x_0 > 0$ donc on obtient $\ln(x_0) = C$.

c) Reprenons l'égalité $\ln(|x(t)|) = \alpha t - t^2 - t + C$, alors

$$\begin{aligned} |x(t)| &= e^{\alpha t - t^2 - t + C} \\ &= e^{(\alpha-1)t - t^2} \cdot e^C \\ &= x_0 \cdot e^{(\alpha-1)t - t^2} \qquad \text{car } e^C = e^{\ln(x_0)} = x_0 \end{aligned}$$

On prouve pour finir que $x(t) > 0$. En effet la solution nulle est solution de l'équation différentielle ; comme deux courbes intégrales ne se coupent pas, notre solution ne s'annule pas et comme $x(0) > 0$ alors $x(t)$ reste positive.
Conclusion $|x(t)| = x(t)$ et donc $x(t) = x_0 e^{(\alpha-1)t - t^2}$.

Exercice 34.

Reprenons le problème déjà rencontré dans la première partie :

$$\begin{aligned} y'(t) &= -K\,y(t)(1 - y(t)) && (1) \\ y(0) &= y_0 \text{ avec } 0 < y_0 < 1 && (2) \end{aligned}$$

a) Calculer la primitive (à constante près) de

$$\frac{y'(t)}{y(t)(1 - y(t))}.$$

Déduire que si $y(t)$ est solution de l'équation différentielle, on a

$$\ln\left|\frac{y}{1-y}\right| = -Kt + C.$$

b) Déterminer la constante C en fonction de la valeur initiale y_0.

c) Extraire la valeur de y comme fonction de t.

Indications 34.

— Trouver des constantes A, B telle que $\frac{1}{y(1-y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{1-y}$.

— Récrire l'équation différentielle sous la forme $\frac{y'(t)}{y(t)(1-y(t))} = -K$ et intégrer de chaque côté.

— Si F et G sont des primitives d'une fonction f, alors $F = G + C$, où $C \in \mathbb{R}$ est une constante.

— On admet ici que notre solution vérifie $0 < y(t) < 1$ pour tout t.

Correction 34.

Correction vidéo ■

a) Si $F(t)$ est une primitive de $f(t)$ et $u(t)$ est une fonction dérivable, alors $F(u(t))$ est une primitive de $u'(t)f(u(t))$. On cherche des constantes A, B telle que $\frac{1}{y(1-y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{1-y}$. Comme

$$\frac{A}{y} + \frac{B}{1-y} = \frac{A - Ay + By}{y(1-y)} = \frac{(B-A)y + A}{y(1-y)}$$

il faut que $(B-A)y + A = 1$

$$\begin{cases} B - A & = 0 \\ A & = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A & = 1 \\ B & = 1. \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\int \frac{y'(t)}{y(t)(1-y(t))}\,dt &= \int y'(t)\frac{1}{y(t)(1-y(t))}\,dt = \int y'(t)\left(\frac{1}{y(t)} + \frac{1}{1-y(t)}\right)dt \\
&= \int \left(\frac{y'(t)}{y(t)} + \frac{y'(t)}{1-y(t)}\right)dt = \int \frac{y'(t)}{y(t)} + \int \frac{y'(t)}{1-y(t)}dt \\
&= \ln|y(t)| - \ln|1-y(t)| + C \\
&= \ln\left|\frac{y(t)}{1-y(t)}\right| + C.
\end{aligned}$$

On écrit l'équation différentielle (1) sous la forme

$$\frac{y'(t)}{y(t)(1-y(t))} = -K.$$

On sait déjà qu'une primitive de $\frac{y'(t)}{y(t)(1-y(t))}$ est la fonction $\ln\left|\frac{y(t)}{1-y(t)}\right|$. De plus, $-Kt$ est une primitive de $-K$. Comme on sait que deux primitives d'une même fonction ne diffèrent que d'une constante, il existe alors une constante C telle que

$$\ln\left|\frac{y(t)}{1-y(t)}\right| = -Kt + C. \qquad (3)$$

b) Si on pose $t = 0$ dans (3), alors

$$C = \ln\left|\frac{y(0)}{1-y(0)}\right| + K \cdot 0 = \ln\frac{y_0}{1-y_0}$$

c) En remplace C par la valeur trouvée et obtient

$$\ln\left|\frac{y(t)}{1-y(t)}\right| = -Kt + \ln\frac{y_0}{1-y_0} \quad \Longleftrightarrow \quad \ln\left|\frac{(1-y_0)y(t)}{y_0(1-y(t))}\right| = -Kt.$$

En appliquant la fonction exponentielle et en admettant ici $0 < y(t) < 1$, on trouve :

$$\frac{(1-y_0)y(t)}{y_0(1-y(t))} = e^{-Kt} \Longleftrightarrow (1-y_0)y(t) = y_0(1-y(t))e^{-Kt} \Longleftrightarrow (1-y_0+y_0e^{-Kt})y(t) = y_0e^{-Kt}$$

$$\Longleftrightarrow y(t) = \frac{y_0e^{-Kt}}{1-y_0+y_0e^{-Kt}}.$$