

## Fiche 8. Primitives

*Savoir.*

- ☐ Connaître la définition d'une primitive.
- ☐ Connaître les formules des primitives usuelles.

*Savoir-faire.*

- ☐ Savoir déterminer une primitive.
- ☐ Savoir utiliser les primitives pour calculer des intégrales.

Vidéo ■ Fiche 8. Primitives

### Primitives

— **Définition.** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. On dit qu'une fonction  $F$  est une **primitive** de  $f$  si pour tout  $x \in I$  :

$$F'(x) = f(x)$$

— Exemples.

—  $F(x) = \frac{x^3}{3}$  est une primitive de  $f(x) = x^2$ .

—  $\ln(x)$  est une primitive de  $\frac{1}{x}$  sur  $]0, +\infty[$ .

— Trouver une primitive est l'opération inverse du calcul de la dérivée.

— Exercice. Trouver une primitive de chacune des fonctions suivantes :

- |  |   |
|--|---|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>x</math></li> <li>• <math>\cos(x)</math></li> <li>• <math>\sin(x)</math></li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>e^{-x}</math></li> <li>• <math>\frac{3}{x} - \frac{7}{x^2} + 1</math></li> <li>• <math>\frac{1}{\cos^2(x)}</math></li> </ul> |
|--|---|

### Calculs d'intégrales à l'aide d'une primitive

**Théorème.** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $[a, b]$ . Soit  $F$  une primitive de  $f$ . Alors :

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$$

— C'est le moyen le plus efficace pour calculer des intégrales !

— Notation par des crochets.  $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ .

— Exemple.

$$\int_1^2 x^2 \, dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3}.$$

— Exemple.

$$\int_2^7 \frac{1}{x} \, dx = [\ln(x)]_2^7 = \ln(7) - \ln(2) = \ln\left(\frac{7}{2}\right).$$

## Toutes les primitives

- Une primitive n'est pas unique ! Soit  $f(x) = x^2$ , alors  $F(x) = \frac{x^3}{3}$  est une primitive. Mais la fonction  $G(x) = \frac{x^3}{3} + 2$  est aussi une primitive (dérivez-la pour vérifier). Il y a donc plusieurs primitives. En fait toutes les fonctions  $\frac{x^3}{3} + c$ , où  $c$  est une constante, sont des primitives. Nous généralisons ceci à toutes les fonctions :

**Proposition.** Si  $F(x)$  est une primitive de  $f(x)$ , alors les autres primitives sont de la forme  $F(x) + c$  où  $c \in \mathbb{R}$  est une constante.

- Exemple. Les primitives de  $x^4 - 3x + 5$  sont les fonctions  $\frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{2}x^2 + 5x + c$ , où  $c \in \mathbb{R}$  est une constante.
- Exercice. Vérifier que les primitives de la fonction  $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$  sont les fonctions  $\frac{2}{3}x\sqrt{x} + c = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$ .
- Pour calculer une intégrale, vous choisissez la primitive que vous voulez car  $[F(x)]_a^b$  donne le même résultat quelle que soit la primitive.

## Primitives usuelles

### Primitives des fonctions classiques

Ici  $c$  désigne une constante réelle.

Fonction	Primitives
$x^n$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \in \mathbb{N})$
$\frac{1}{x}$	$\ln( x ) + c$
$x^\alpha$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$
$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{2}{3}x\sqrt{x} + c = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c \quad (\text{c'est } \alpha = \frac{1}{2})$
$e^x$	$e^x + c$
$\cos(x)$	$\sin(x) + c$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + c$

Ces formules sont à maîtriser ! Mais ce sont juste les formules des dérivées que vous connaissez déjà.

### Primitives pour une composition

Ici  $u$  est une fonction qui dépend de  $x$  ;  $c$  désigne une constante réelle.

Fonction	Primitive
$u'u^n$	$\frac{u^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \in \mathbb{N})$
$\frac{u'}{u}$	$\ln( u ) + c$
$u'u^\alpha$	$\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$
$u'e^u$	$e^u + c$
$u' \cos(u)$	$\sin(u) + c$
$u' \sin(u)$	$-\cos(u) + c$

- Exemple. Comment calculer  $\int_1^2 x e^{x^2} dx$  ? Avec  $u(x) = x^2$  (et donc  $u'(x) = 2x$ ) on a  $2x e^{x^2} = u'(x) e^{u(x)}$  dont une primitive est  $e^{x^2} = e^{u(x)}$ . Ainsi

$$\int_1^2 x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 2x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} [e^{x^2}]_1^2 = \frac{1}{2}(e^4 - e).$$

- Exemple. On sait que  $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\frac{\cos'(x)}{\cos(x)}$ . Par le tableau précédent, les primitives de la fonction tangente sont les fonctions de la forme  $F(x) = -\ln(|\cos(x)|) + c$  où  $c$  est une constante réelle.