Fiche 6. Équations différentielles 2

Savoir.

- ☐ Comprendre ce qu'est une condition initiale d'une équation différentielle.
- ☐ Savoir qu'un condition initiale entraîne l'unicité de la solution.
- ☐ Savoir interpréter l'unicité en terme des courbes solutions qui ne s'intersectent pas.

Savoir-faire.

- ☐ Savoir résoudre une équation différentielle avec condition initiale.
- ☐ Savoir obtenir des informations sur une solution sous la condition que les courbes des solutions ne s'intersectent pas.

Vidéo ■ Fiche 6. Équations différentielles (fin)

Un exemple

Une équation différentielle a en général une infinité de fonctions solutions.
Considérons par exemple l'équation différentielle :

$$y'(x) = y(x) \tag{1}$$

Alors les solutions de (1) sont les fonctions :

$$y(x) = ke^x \qquad \text{où } k \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, chaque valeur de la constante k fournit une fonction solution : par exemple pour $k = 1$, $y_1(x) = e^x$ est solution, pour $k = -2$, $y_{-2}(x) = -2e^x$ est solution, pour $k = 0$, $y_0(x) = 0$ est solution...
Pour n'avoir qu'une seule solution, il faut imposer une condition initiale

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) & \text{équation différentielle} \\ y(0) = 3 & \text{condition initiale} \end{cases} \tag{2}$$

Les solutions de l'équation différentielle sont de la forme $y(x) = ke^x$, mais on veut $y(0) = 3$. Comme $y(0) = ke^0 = k$, on doit avoir $k = 3$. Ainsi l'unique solution du problème (2) est la fonction $y(x) = 3e^x$.
Exercice. Considérons l'équation différentielle avec condition initiale :

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) \\ y(1) = 2 \end{cases} \tag{3}$$

Trouver l'unique solution de ce problème. (Attention ce n'est pas $y(x) = 2e^x$!)

Condition initiale

Définition

Pour une équation différentielle dite d'ordre 1, faisant intervenir y et y', une **condition initiale** est du type :

$$y(x_0) = y_0$$

où $x_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0 \in \mathbb{R}$ sont des constantes.
Exemple.

$$y'(x) = -y(x)^2 + 3y(x) - 2 \quad \text{et} \quad y(0) = 10$$

Le système formé par une équation différentielle (E) et une condition initiale est appelé **problème de Cauchy**.
Pour une équation différentielle dite d'ordre 2, faisant intervenir y, y' et y'', une **condition initiale** est du type :

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

Exemple.

$$y''(x) = -y'(x) + 2y(x) \quad \text{avec} \quad y(0) = 0 \text{ et } y'(0) = 1$$

Théorème d'unicité

Pour les problème que l'on rencontrera on admettra le théorème de Cauchy :

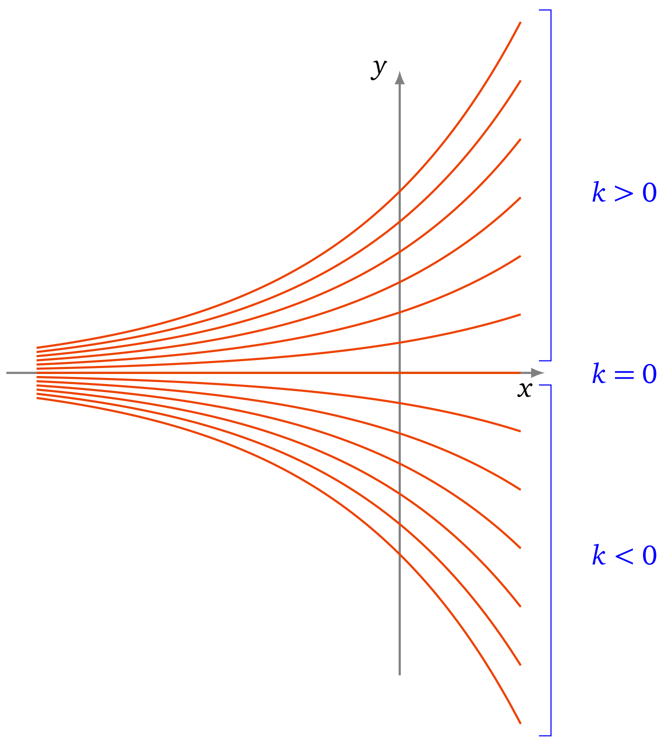
« Une équation différentielle avec condition initiale admet une unique solution. »

Courbes solutions

Une **courbe solution** d'une équation différentielle (E) est le graphe d'une solution de (E).
Pour l'équation différentielle

$$y'(x) = y(x)$$

on sait que les solution sont les $y(x) = ke^x$, où $k \in \mathbb{R}$ est une constante. Ci-dessous sont tracés quelques graphes de ces solutions.



Le théorème de Cauchy pour les équations différentielles linéaires se reformule ainsi :

« Par chaque point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ passe une et une seule courbe solution. »

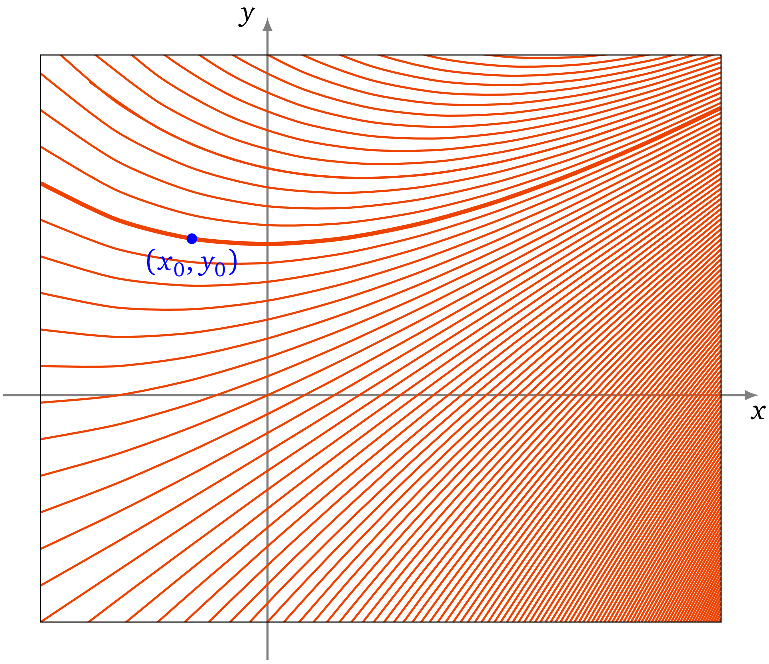
En particulier :

« Deux courbes solutions ne s'intersectent pas. »

Exemple. Les solutions de l'équation différentielle $y' + y = x$ sont les

$$y(x) = x - 1 + ke^{-x} \quad k \in \mathbb{R}.$$

Pour chaque point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, il existe une unique solution y telle que $y(x_0) = y_0$. Le graphe de cette solution est la courbe intégrale passant par (x_0, y_0).



Variations des solutions

L'équation différentielle permet parfois d'avoir des informations sur la fonctions f avant même de connaître exactement la solution.
Par exemple, considérons :

$$y'(x) = y^2(x) + 1$$

Alors, sans résoudre cette équation, on sait qu'une solution vérifiera $y'(x) \geqslant 0$, donc une solution $y(x)$ est une fonction croissante.
Autre exemple, avec :

$$y'(x) = xe^{y(x)}$$

Si $x \leqslant 0$ alors $xe^{y(x)} \leqslant 0$ donc une solution vérifiera $y'(x) \leqslant 0$, et la solution $y(x)$ est une fonction décroissante sur $]-\infty, 0]$. Par contre Si $x \geqslant 0$ alors $xe^{y(x)} \geqslant 0$ donc une solution vérifiera $y'(x) \geqslant 0$, et la fonction $y(x)$ est croissante sur $[0, +\infty[$.

Équation à variables séparées

Une **équation différentielle à variable séparées** est de la forme :

$$y'(x) = \frac{a(x)}{b(y)}$$

Ce nom est justifié car on peut mettre tous les x d'un côté et tous les y de l'autre :

$$b(y)y' = a(x)$$

Voici la méthode pour résoudre ce type d'équation.
Exemple.

$$x^2 y'(x) = e^{-y(x)}$$

— On sépare les variables x des variables y :

$$y'(x)e^{y(x)} = \frac{1}{x^2}$$

— On intègre chacun des côtés :

$$e^{y(x)} = -\frac{1}{x} + c$$

où $c \in \mathbb{R}$ est une constante.

— On exprime la solution :

$$y(x) = \ln\left(-\frac{1}{x} + c\right)$$

Autres exemples.

$$y'y^2 = x \qquad y' = y\ln(x) \qquad y' = \frac{1}{y^n}$$