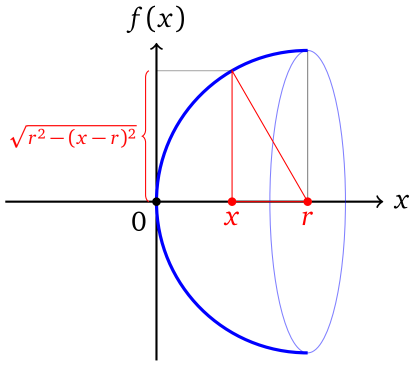
Longueur, aire, volume

Exercice 29.

On remplit d'eau un bol hémisphérique, de rayon r (en cm).



Un tel bol est obtenu par rotation autour de l'axe x de la courbe représentant $f(x) = \sqrt{r^2-(x-r)^2}$ pour $x \in [0, r]$.

a) Montrer que, s'il est rempli jusqu'à une hauteur h (en cm), le bol contient (en cm^3)

$$V(h) = \frac{1}{3}\pi h^2(3r-h).$$

b) En déduire le volume d'eau que peut contenir le bol.

c) Écrire l'équation déterminant à quelle hauteur le bol sera à moitié plein.

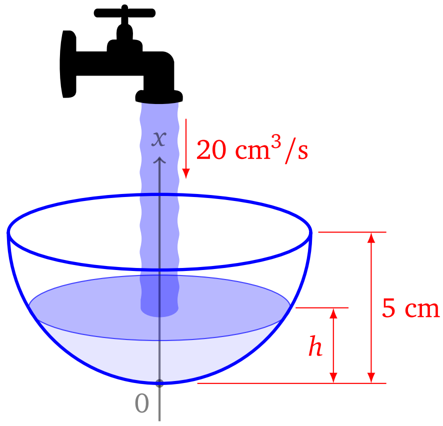
d) Le bol fait 5 centimètres de rayon et l'eau coule à un débit de 20 cm^3/s.

   (i) Combien de temps faudra-t-il pour que la hauteur de l'eau passe de 2 centimètres à 4 centimètres ?

   (ii) Soit $h(t)$ la hauteur (en cm) au temps t (en s). Montrer que

$$h'(t)(10\pi h(t) - \pi h^2(t)) = 20.$$

   (iii) A quelle vitesse le niveau de l'eau monte-t-il s'il y a déjà 2 centimètres d'eau au fond ?



Indications 29.

a) $V(h) = \int_0^h \pi f(x)^2 \mathrm{d}x$

b) Calculer $V(r)$.

c) L'équation est « $V(h)$ est égale à la moitié de $V(r)$ ». On ne demande pas de trouver le h solution de cette équation.

d) (i) Calculer $V(4) - V(2)$. Le débit est donné par débit $= \frac{\text{volume}}{\text{temps}}$.

   (ii) Le débit à un instant t est aussi la dérivée du volume par rapport au temps, ici c'est donc $\big(V(h(t))\big)'$.

   (iii) La vitesse de montée de l'eau est donnée par $h'(t)$ que l'on peut calculer en utilisant la question précédente avec ici $h(t) = 2$.

Correction 29.

Correction vidéo ■

a)

$$\begin{aligned} V(h) &= \int_0^h \pi f(x)^2 \mathrm{d}x \\ &= \int_0^h \pi\big(r^2 - (x-r)^2\big)\mathrm{d}x \\ &= \pi \int_0^h (2xr - x^2)\mathrm{d}x \\ &= \pi \left[x^2 r - \frac{x^3}{3} \right]_0^h \\ &= \pi \left(h^2 r - \frac{h^3}{3} \right) \end{aligned}$$

b)

$$V(r) = \pi\left(r^2 r - \frac{r^3}{3}\right) = \frac{2}{3}\pi r^3$$

c) L'équation est $V(h) = \frac{1}{2}V(r)$, c'est-à-dire

$$\pi h^2 \left(r - \frac{h}{3}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\pi r^3$$

ou encore

$$h^2(3r - h) = r^3.$$

On ne demande pas de résoudre cette équation.

d) (i) Le volume d'eau nécessaire pour faire passer le niveau de 2 à 4 cm est :

$$V(4) - V(2) = \frac{2}{3}\big(16(15-4) - 4(15-2)\big) \simeq 128,8 \text{ cm}^3.$$

et le temps nécessaire est :

$$\text{temps} = \frac{\text{volume}}{\text{débit}} \simeq \frac{128,8}{20} \simeq 6,4 \text{ s}.$$

(ii) Le débit est la dérivée du volume par rapport au temps, c'est-à-dire

$$\text{débit} = \big(V(h(t))\big)' = V'(h(t))\cdot h'(t) = \pi(2h(t)r - h(t)^2)h'(t).$$

Ici on obtient avec $r = 5$ et débit de 20 cm^3/s :

$$\pi(10h(t) - h(t)^2)h'(t) = 20.$$

(iii) La vitesse du niveau de l'eau est la dérivée de h par rapport au temps : $h'(t)$. Par l'équation de la question précédente :

$$h'(t) = \frac{20}{\pi(10h(t) - h(t)^2)}.$$

On se place au temps t_0 où il y a déjà 2 cm d'eau, alors $h(t_0) = 2$

$$h'(t_0) = \frac{20}{\pi(10\cdot 2 - 2^2)} = \frac{20}{16\pi} \simeq 0,4 \text{ cm/s}.$$

Exercice 30.

Soit f une fonction continue sur le segment $[a,b]$.

a) On admet que la longueur de la courbe d'équation $y=f(x)$ pour $x\in[a,b]$ est donnée par l'intégrale

$$L=\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx. \tag{1}$$

(i) Soit f une fonction constante : pour $x\in[a,b]$, $f(x)=c$. La formule (1) donne-t-elle le résultat attendu ?

(ii) Soit f une fonction affine : pour $x\in[a,b]$, $f(x)=kx+c$. Tracer le graphe de f. La formule (1) donne-t-elle le résultat attendu ?

(iii) Calculer la longueur de la courbe d'équation $y=x^{\frac{3}{2}}$ pour $x\in[0,1]$.

b) Soit f une fonction positive. On fait tourner la courbe d'équation $y=f(x)$ entre $x=a$ et $x=b$ autour de l'axe des x. On admet que l'aire de la surface ainsi obtenue est donnée par l'intégrale

$$A=\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{(1+f'(x)^2)}\,dx. \tag{2}$$

(i) Soit f une fonction constante. Quelle est la forme de l'objet obtenu ? La formule (2) donne-t-elle le résultat attendu ?

(ii) Mêmes questions pour $f(x)=kx$ $(k>0)$ pour x entre 0 et 1.

(iii) Retrouver la formule de l'aire d'une sphère de rayon R.

Indications 30.

Une primitive de la fonction $f(x)=u'(x)(u(x))^n$ est $\frac{1}{n+1}(u(x))^{n+1}+C$, $C\in\mathbb{R}$.

Correction 30.

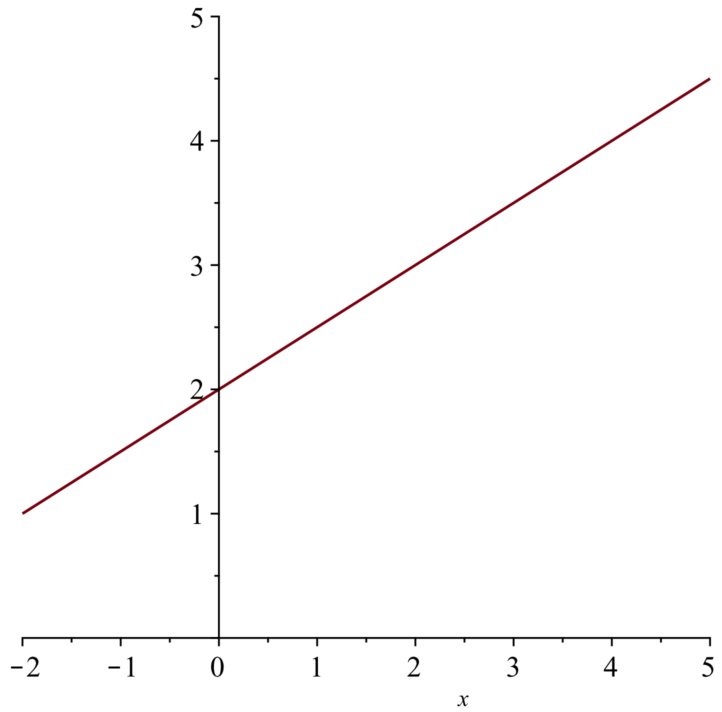
Correction vidéo ■

a) (i) Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $f(x)=c$ une fonction constante. Alors la longueur de la courbe d'équation $y=f(x)$, $x\in[a,b]$, est bien sûr $b-a$. De plus, on a $f'(x)=0$, $x\in[a,b]$, et donc la formule donne :

$$\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx=\int_a^b 1\,dx=[x]_a^b=b-a.$$

On retrouve bien le résultat attendu.

(ii) Soit $f(x)=kx+c$, $x\in[a,b]$. Pour $k=\frac{3}{2}$ and $a=2$ on a le graphe



En utilisant le théorème de Phythagore on obtient que la longueur de la courbe d'équation $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, est donnée par

$$\sqrt{(f(b)-f(a))^2+(b-a)^2} = \sqrt{(kb+c-(ka+c))^2+(b-a)^2} = \sqrt{(k(b-a))^2+(b-a)^2}$$
$$= \sqrt{(b-a)^2(k^2+1)} = (b-a)\sqrt{k^2+1}.$$

De plus, on a $f'(x) = k$, $x \in [a, b]$, et d'après la formule (1) :

$$\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx = \int_a^b \sqrt{1+k^2}\,dx = \sqrt{1+k^2}\int_a^b 1\,dx = \sqrt{1+k^2}\,[x]_a^b = \sqrt{1+k^2}(b-a).$$

Ainsi la formule donne bien le résultat attendu.

(iii) Comme la dérivée de la fonction $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ est $f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ la formule (1) implique

$$L = \int_0^1 \sqrt{1+\tfrac{9}{4}x}\,dx = \frac{4}{9}\int_0^1 \frac{9}{4}\sqrt{1+\tfrac{9}{4}x}\,dx = \frac{4}{9}\left[\frac{2}{3}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{8}{27}\left(\left(1+\frac{9}{4}\right)^{\frac{3}{2}}-1\right)$$
$$= \frac{8}{27}\left(\left(\frac{13}{4}\right)^{\frac{3}{2}}-1\right).$$

b) (i) Si $f(x) = c$, $x \in [a, b]$, $c \in \mathbb{R}$, alors on obtient un cylindre de rayon $r = c$ et hauteur $h = b-a$. Donc l'aire de la surface est $A = 2\pi c(b-a)$. Comme $f'(x) = 0$, $x \in [a, b]$, on obtient en utilisant la formule (2) :

$$A = \int_a^b 2\pi c\sqrt{1}\,dx = 2\pi c\int_a^b 1\,dx = 2\pi c\,[x]_a^b = 2\pi c(b-a)$$

et la formule donne le résultat attendu.

(ii) Si $f(x) = kx$, $x \in [0, 1]$, $k \in \mathbb{R}$, alors on obtient un cône de rayon $r = f(1) = k$ et hauteur $h = 1$. Donc l'aire de la surface est $A = \pi k\sqrt{1+k^2}$. Comme $f'(x) = k$, $x \in [0, 1]$, on obtient en utilisant la formule (2)

$$A = \int_0^1 2\pi kx\sqrt{1+k^2}\,dx = 2\pi k\sqrt{1+k^2}\int_0^1 x\,dx = 2\pi k\sqrt{1+k^2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \pi k\sqrt{1+k^2}$$

et la formule donne le résultat attendu.

(iii) On obtient une sphère de rayon R si on fait tourner la courbe d'équation $y = f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, $x \in [-R, R]$, autour de l'axe des x. Comme $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}$ la formule (2) donne

$$\begin{aligned} A &= \int_{-R}^{R} 2\pi \sqrt{R^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}\, dx = 2\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2} \sqrt{\frac{R^2 - x^2 + x^2}{R^2 - x^2}}\, dx \\ &= 2\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2}\, dx = 2\pi R \int_{-R}^{R} 1\, dx = 2\pi R\, [x]_{-R}^{R} = 2\pi R \cdot 2R = 4\pi R^2. \end{aligned}$$