Fiche 2. Dérivées

Savoir.

- ☐ Comprendre la définition de la dérivée en terme de limite.
- ☐ Connaître les formules de la dérivées d'une somme, d'un produit, d'un quotient.
- ☐ Connaître sur le bout de doigts les formules des dérivées usuelles.

Savoir-faire.

- ☐ Savoir calculer l'équation de la tangente au graphe d'une fonction.
- ☐ Savoir dériver les fonctions construites à partir de fonctions usuelles.
- ☐ En particulier savoir dériver les compositions de fonctions.

Définition

Le **nombre dérivé** d'une fonction f en x_0 est défini par une limite :

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

Une autre écriture de cette limite est :

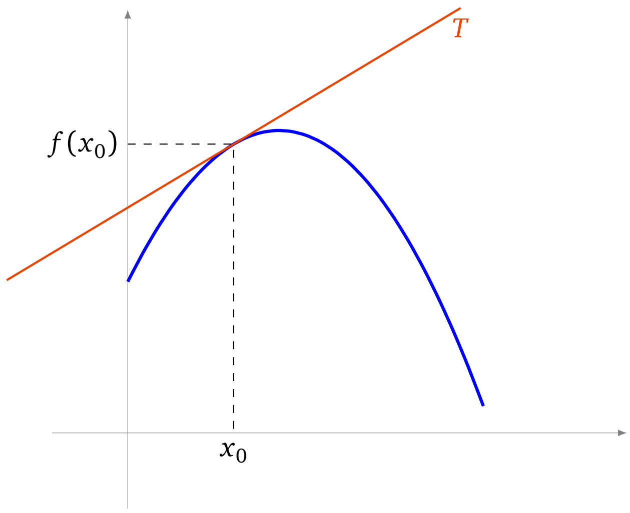
$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Une autre notation pour $f'(x_0)$ est $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$.
La **fonction dérivée** est $x \mapsto f'(x)$.

Tangente

La dérivée en x_0 est le coefficient directeur de la tangente au point $(x_0, f(x_0))$.
L'équation de cette tangente est :

$$\boxed{y = (x - x_0)f'(x_0) + f(x_0)}$$



Exemple : quelle est l'équation de la tangente au graphe de $f(x) = e^{2x}$ en $x_0 = 1$? On a $f'(x) = 2e^{2x}$, $f(x_0) = f(1) = e^2$, $f'(x_0) = f'(1) = 2e^2$. L'équation de la tangente est $y = (x-1)2e^2 + e^2$, ce qui s'écrit aussi $y = 2e^2 x - e^2$.

Opérations sur les dérivées

- **Somme.** $\boxed{(f+g)' = f' + g'}$
- **Produit par un réel.** $\boxed{(kf)' = kf' \qquad \text{où } k \in \mathbb{R}}$
- **Produit.** $\boxed{(f \times g)' = f'g + fg'}$
- **Inverse.** $\boxed{\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}}$
- **Quotient.** $\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}}$

Exemple. Calcul de la dérivée de $f(x) = xe^x + \ln(x)$. Il y a un produit (xe^x) et une somme. Ainsi :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (xe^x)' + (\ln(x))' \quad \text{(somme)} \\
&= (x)'e^x + x(e^x)' + \frac{1}{x} \quad \text{(produit et dérivée de ln)} \\
&= e^x + xe^x + \frac{1}{x} \quad \text{(dérivée de exp)} \\
&= (x+1)e^x + \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

Exemple. Calcul de la dérivée de $f(x) = \tan(x)$. Par définition $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Il s'agit de dériver un quotient.

$$\begin{aligned}
\tan'(x) &= \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' \\
&= \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{(\cos(x))^2} \\
&= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} \\
&= \frac{1}{\cos^2(x)}
\end{aligned}$$

On a utilisé l'égalité $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$. En repartant de l'avant-dernière égalité on a aussi :

$$\tan'(x) = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

Formules

Les dérivées des fonctions classiques (à gauche) et les formules pour la composition (à droite, où u est une fonction qui dépend de x).

Fonction	**Dérivée**
x^n	$nx^{n-1} \qquad (n \in \mathbb{Z})$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1} \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

Fonction	**Dérivée**
u^n	$nu'u^{n-1} \qquad (n \in \mathbb{Z})$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\sqrt{u}$	$\frac{1}{2}\frac{u'}{\sqrt{u}}$
u^α	$\alpha u'u^{\alpha-1} \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$
e^u	$u'e^u$
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
$\cos u$	$-u'\sin u$
$\sin u$	$u'\cos u$
$\tan u$	$u'(1+\tan^2 u) = \frac{u'}{\cos^2 u}$

Exemples.

— $F(x) = \ln(x^2)$ alors en posant $u = x^2$ (et donc $u' = 2x$), on a $F(x) = \ln(u)$ et donc $F'(x) = \frac{u'}{u} = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$.

— $F(x) = \exp(\frac{1}{x})$ alors en posant $u = \frac{1}{x}$ (et donc $u' = -\frac{1}{x^2}$), on a $F(x) = \exp(u)$ et donc $F'(x) = u'\exp(u) = -\frac{1}{x^2}\exp(\frac{1}{x})$.

— $F(x) = \sqrt{\ln(x)}$ alors en posant $u = \ln(x)$ (et donc $u' = \frac{1}{x}$), on a $F(x) = \sqrt{u}$ et donc $F'(x) = \frac{1}{2}\frac{u'}{\sqrt{u}} = \frac{1}{2}\frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt{\ln(x)}}$.