# 数据分析与处理技术

## 时间序列

# 一、时间序列工具

加载工具包：forecast
加载案例工具包：fpp2
加载工具包：GGally

切换环境到fpp2，其中包含了关于时间序列教学用的大量案例数据

时间序列标记为 $y_t$ 其中t为时间下标

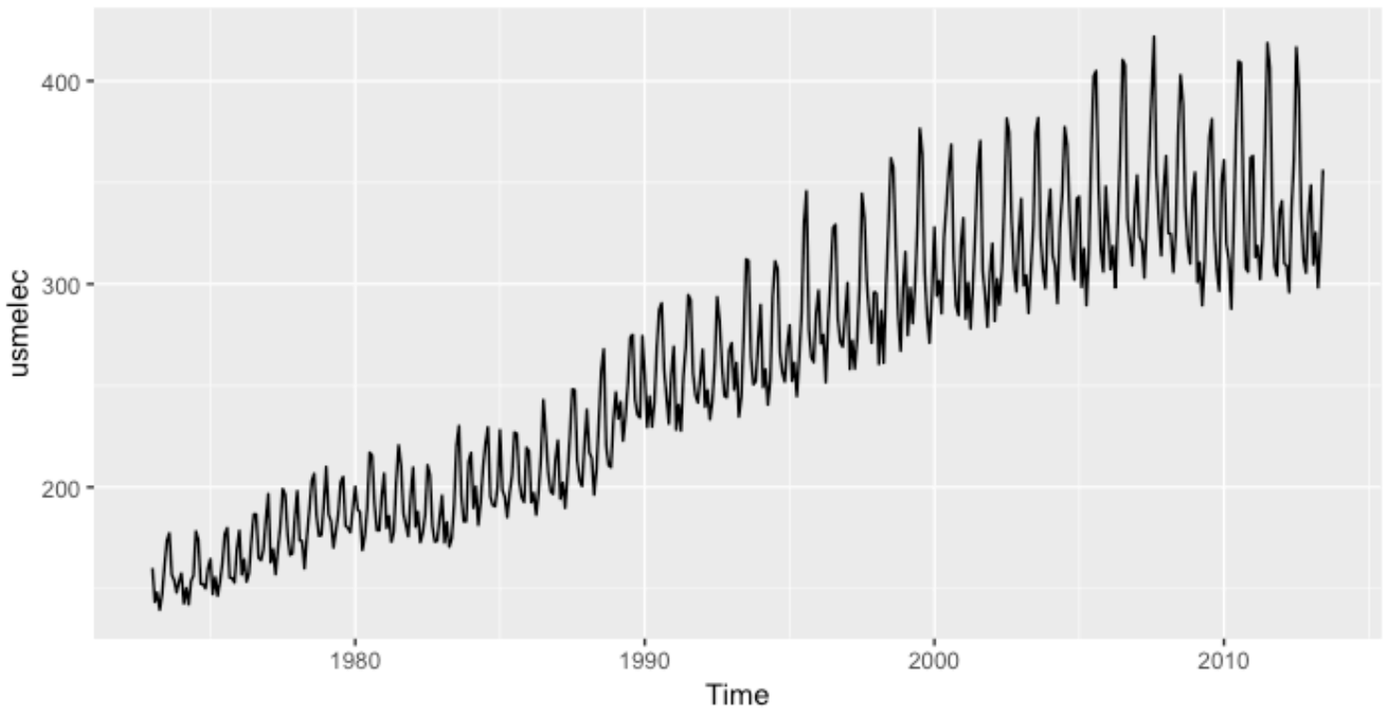
| package:fpp2 | |
|---|---|
| Data | |
| elecdaily | Time-Series [1:365, 1:3] |
| prison | Time-Series [1:48, 1:32] |
| prisonLF | 1536 obs. of 5 variables |
| uschange | Time-Series [1:187, 1:5] |
| Values | |

# 可视化工具分析时间序列特征

autoplot自动识别变量类型，做时间序列散点图。

```
> autoplot(elec)

> autoplot(a10)

> autoplot(h02)
```

autoplot是ggplot2包中一个自动化绘图函数，与ggplot2语法一致




与ggplot()函数类似，一个图形中只有第一个图层用autoplot，之后图层添加序列使用autolayer代替。

# 一个时间序列建模预测和检验基本过程——指数平滑法

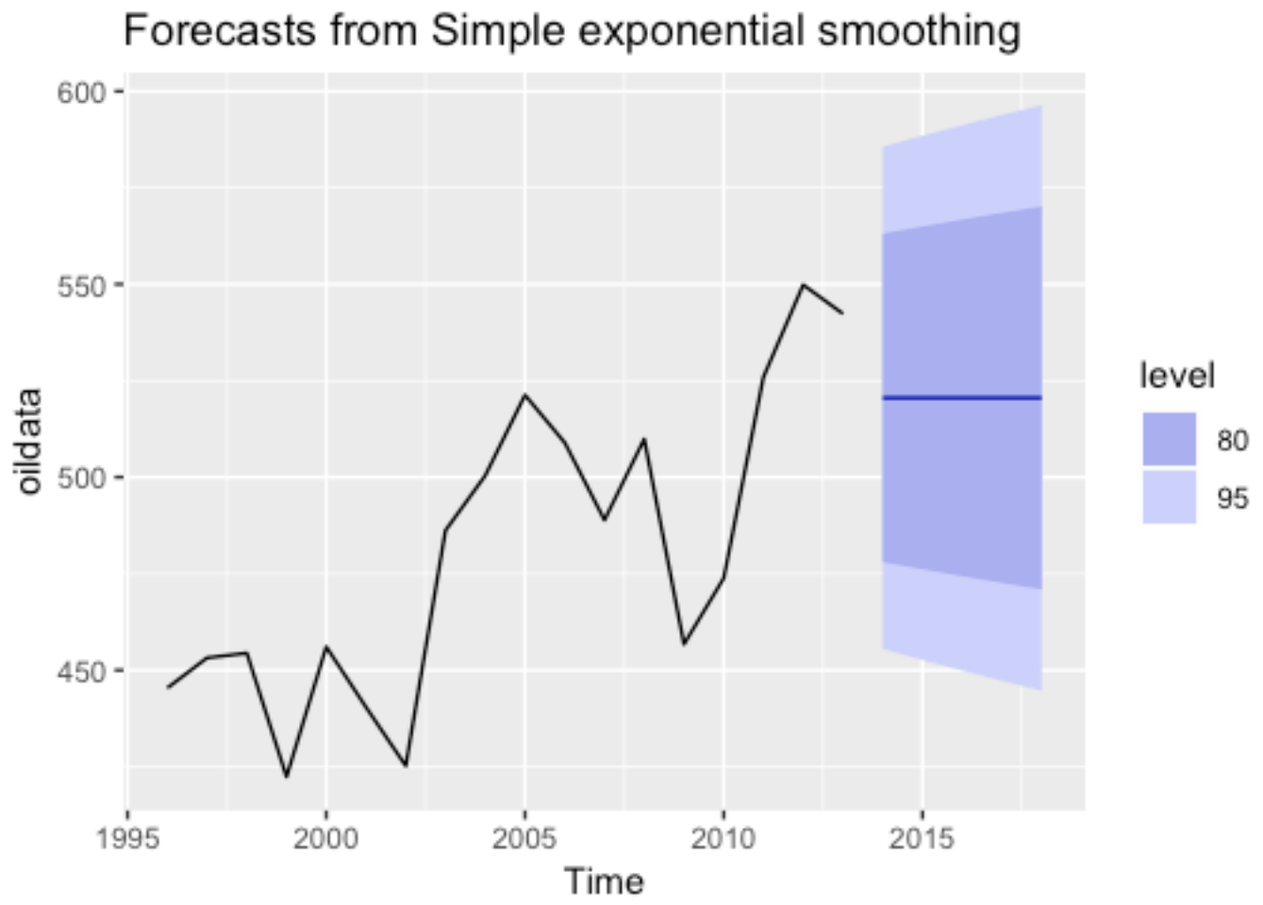
用下边案例说明通常步骤

```
oildata=window(oil,start=1996)

fc=ses(oildata,h=5,alpha = 0.3)

autoplot(fc)
```

截取1992年以后的石油价格数据，用指数平滑法做5期的预测，并可视化

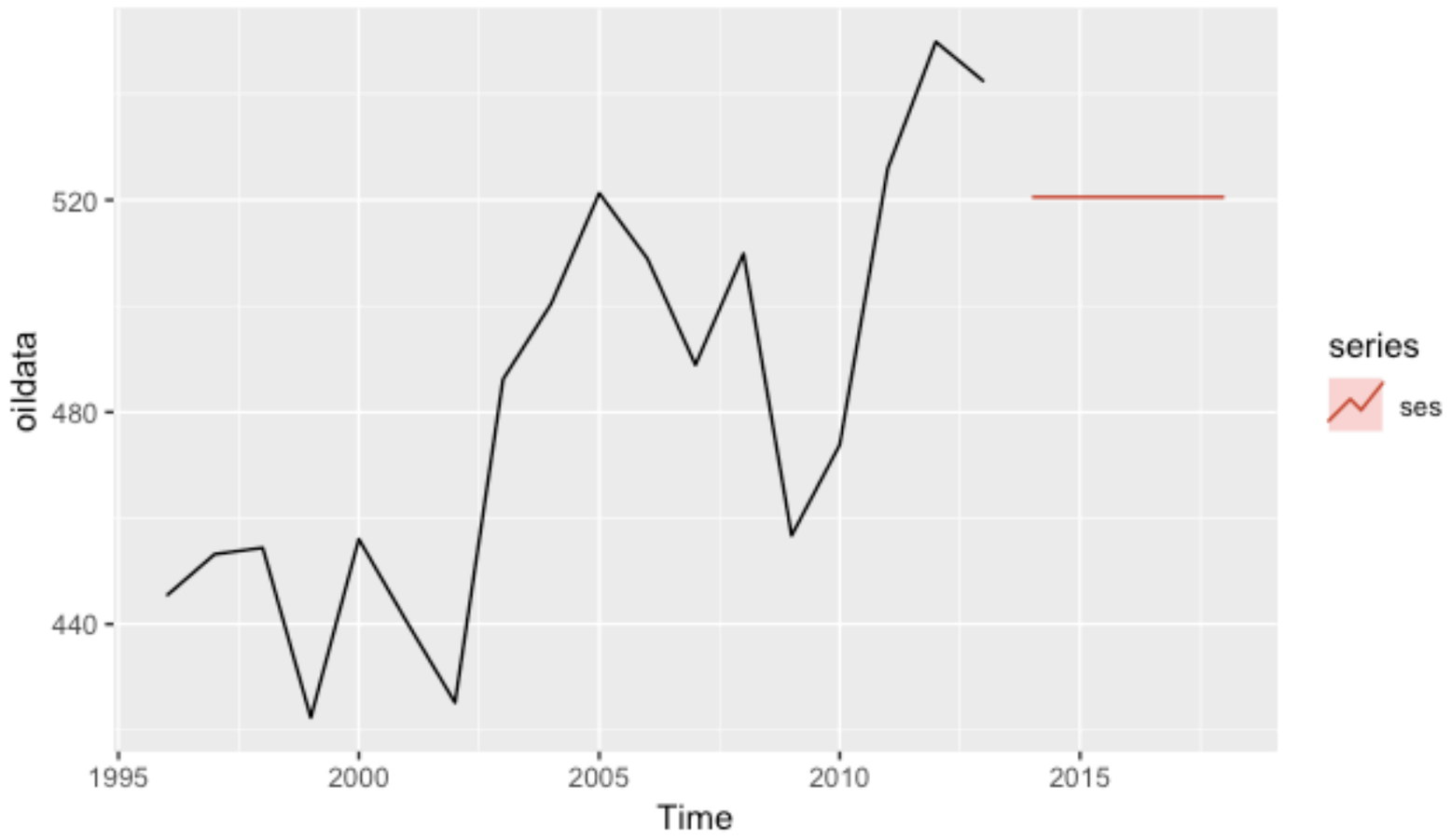
```
> round(accuracy(fc),2)
                ME   RMSE    MAE  MPE MAPE MASE ACF1
Training set 13.02 31.28 25.49 2.34 5.16 1.06 0.35
```

accuracy用来检测模型的拟合精度，有时为了读取方便用round限制四舍五入为2位小数



autolayer会为每一个自动图层添加图例，并且会自动识别时间序列和预测模型，按照规范将模型输出在同一个图片中

```
autoplot(oildata)+
    autolayer(fc,series='ses',PI=F)+
    guides(colour=guide_legend(title='series'))+
    ylab('Oil(millions of tonnes)')+xlab('Year')+
    ggtitle('Oil production in Saudi Arabia from 1996 to 2013')
```



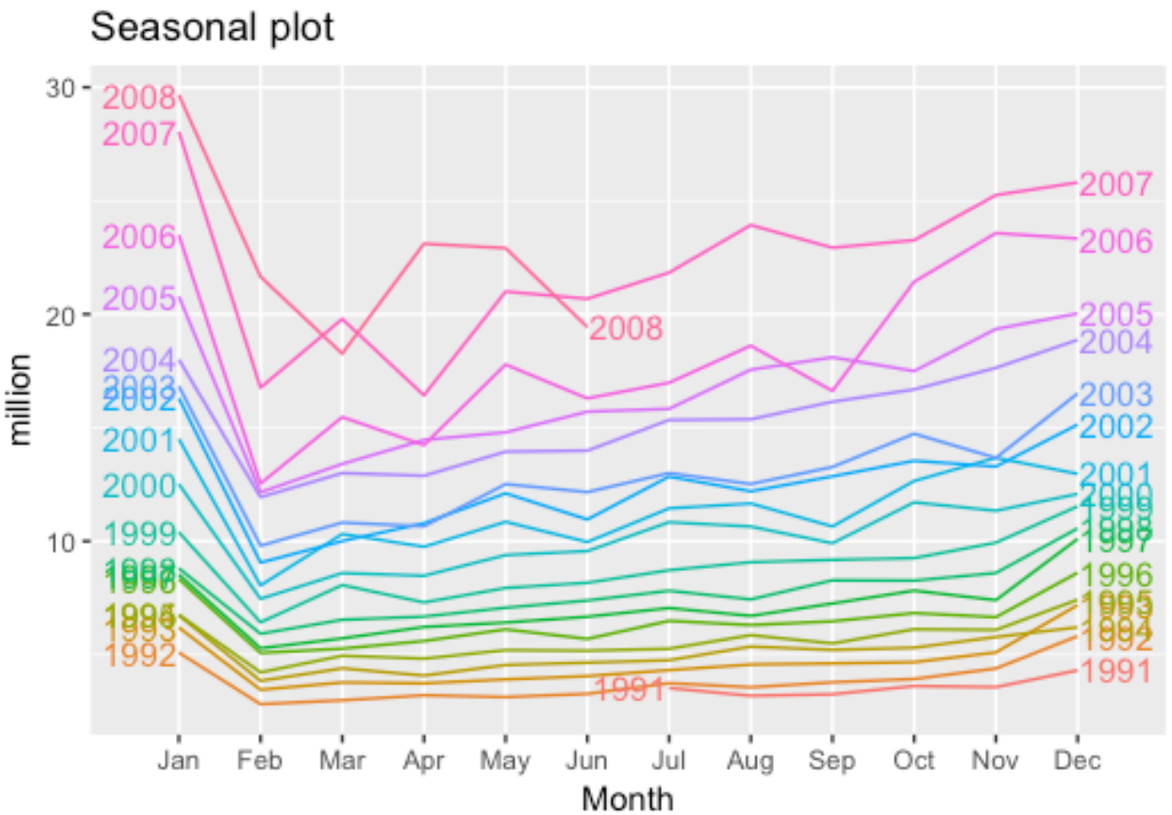
# 季节性趋势分析

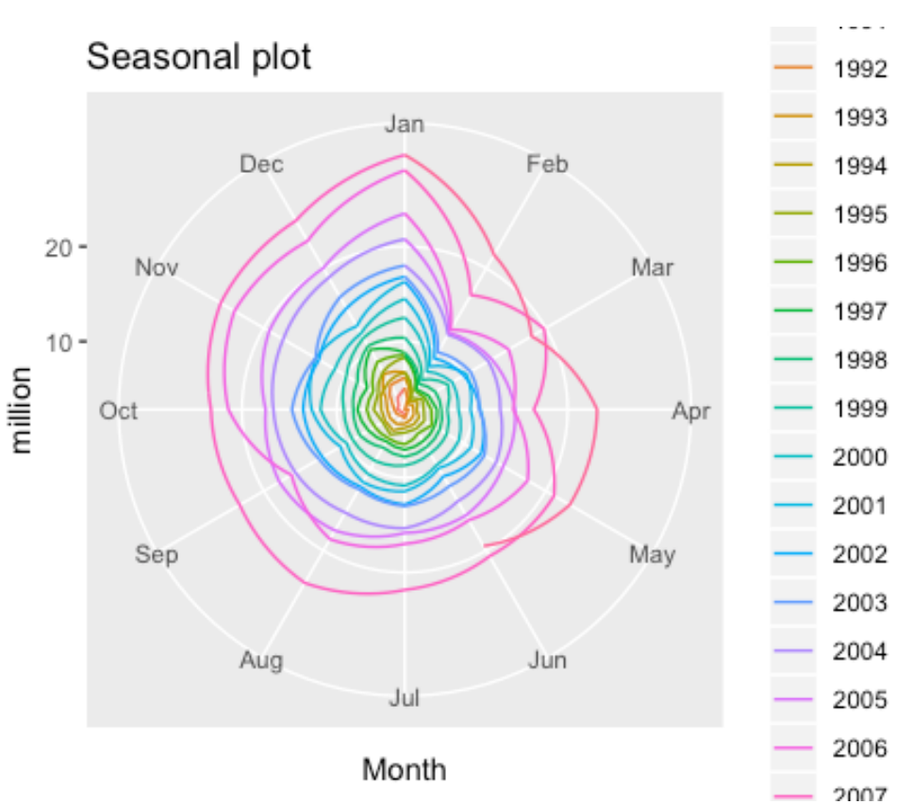
Seasonal（季节变动趋势）是时间序列的一个关键特征，数据在一年内随着月份、周、日发生看似不规则变化，但每年都会重复类似特征。

```
ggseasonplot(a10,year.labels = T,year.labels.left = T)+
ylab('million')+
ggtitle('Seasonal plot')
```

```
ggseasonplot(a10,polar = T)+
ylab('million')+
ggtitle('Seasonal plot')
```

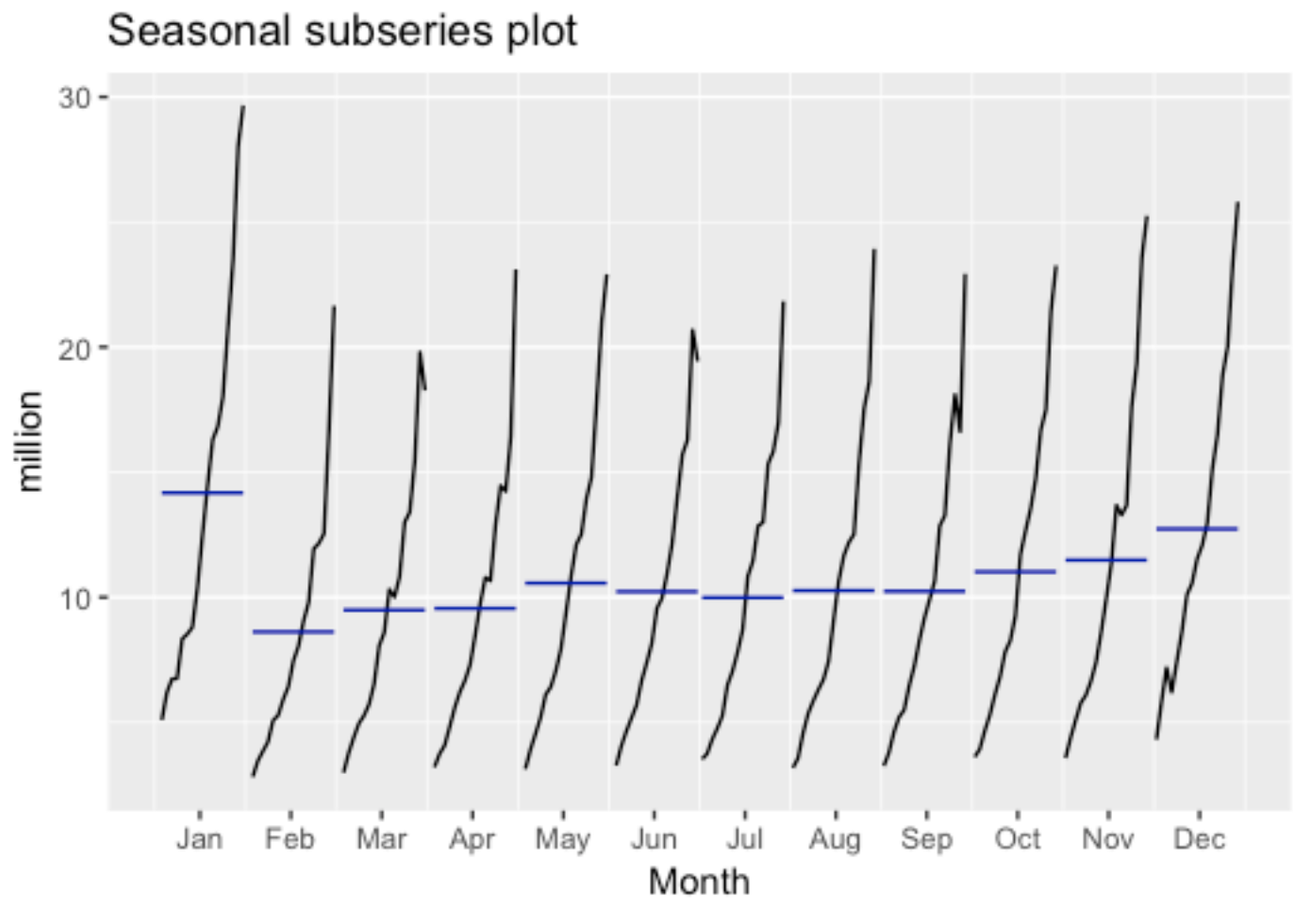
forecast包提供了一套对接ggplot2语法的时间序列专用可视化工具



# 季节子序列

```
ggsubseriesplot(a10)+
ylab('million')+
ggtitle('Seasonal subseries plot')
```



# 趋势-周期分解

时间序列的特征可以大致分成如下几类

Trend：长期趋势，记做T

Seasonal：季节变动S

Cyclic：周期趋势C

剩余的特征被作为剩余量记做Remainder，即R

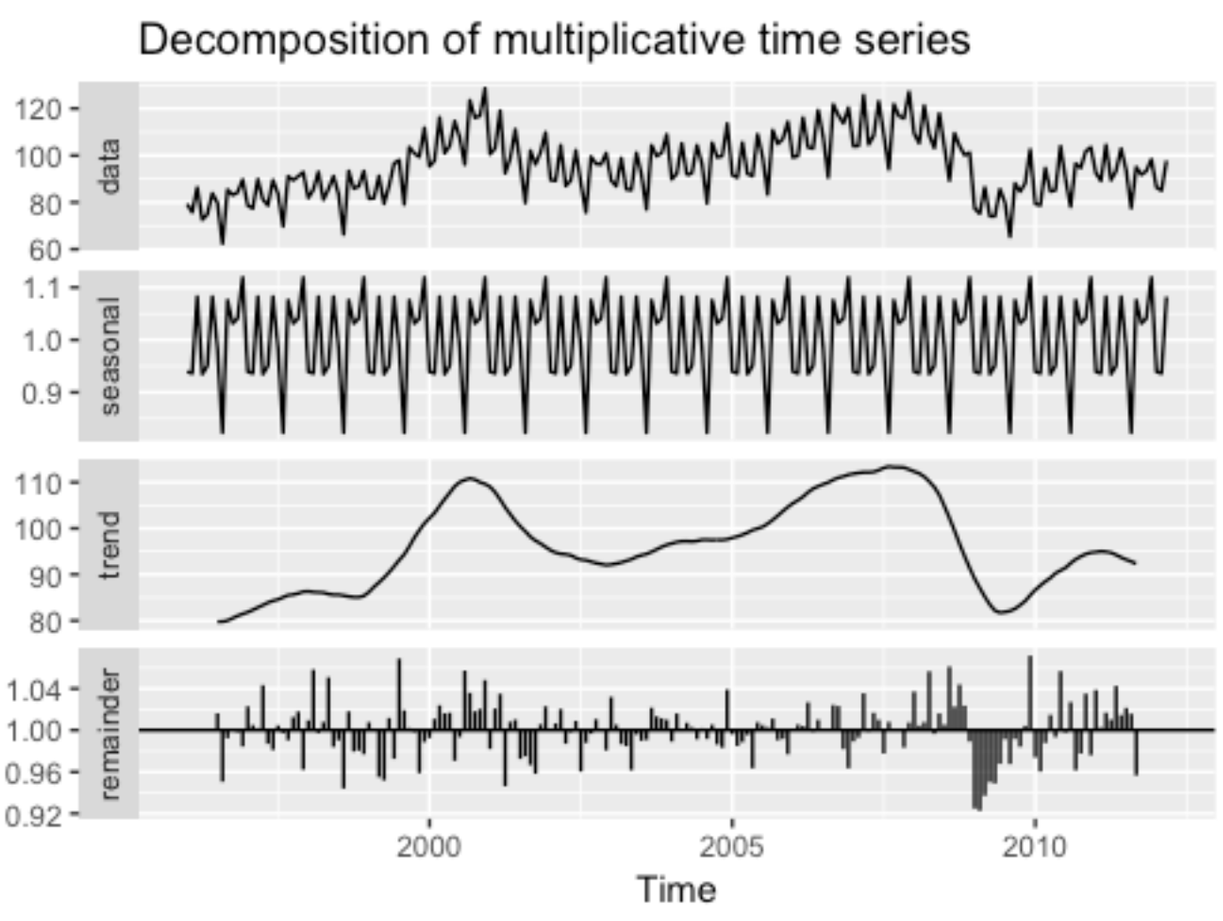
由于C通常长于两年，与T特征可以合并为T-C特征，也简化记为T

时间序列通常可以分为长期趋势、季节变动和周期趋势，但分解方法则有加法型 $y_t = S_t + T_t + R_t,$

和乘法型 $y_t = S_t \times T_t \times R_t.$

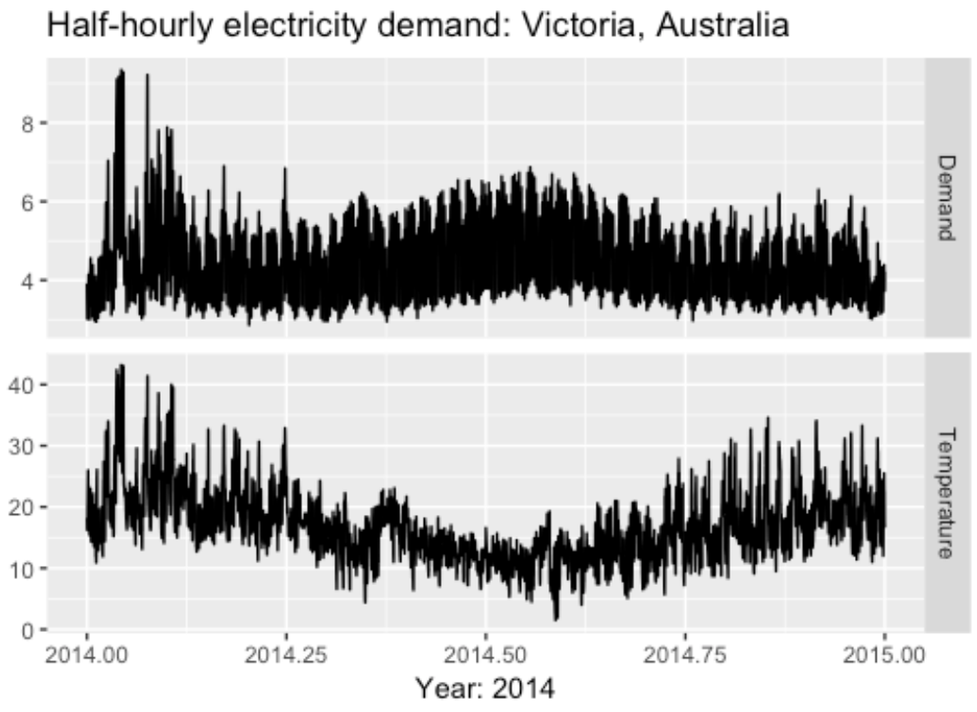
decompose函数能够依据加法规则或乘法规则分离提取数据的趋势

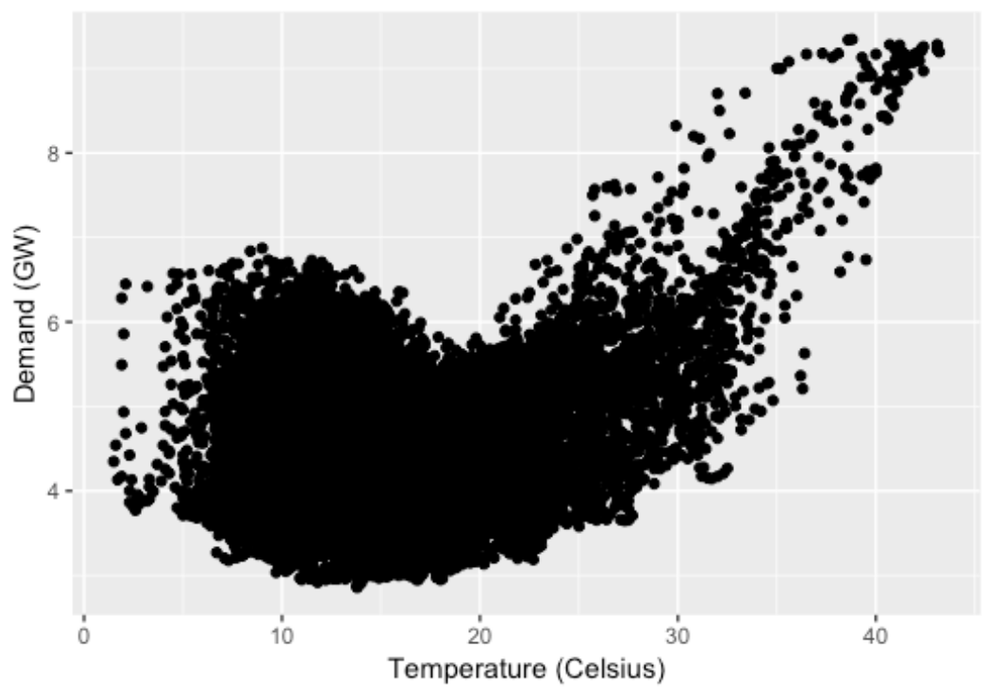
```
deseries=decompose(elecequip,type='multiplicative')
autoplot(deseries)
```



# 相关对比分析

```
autoplot(elecdemand[,c("Demand","Temperature")], facets=TRUE) +
    xlab("Year: 2014") + ylab("") +
    ggtitle("Half-hourly electricity demand: Victoria, Australia")
```

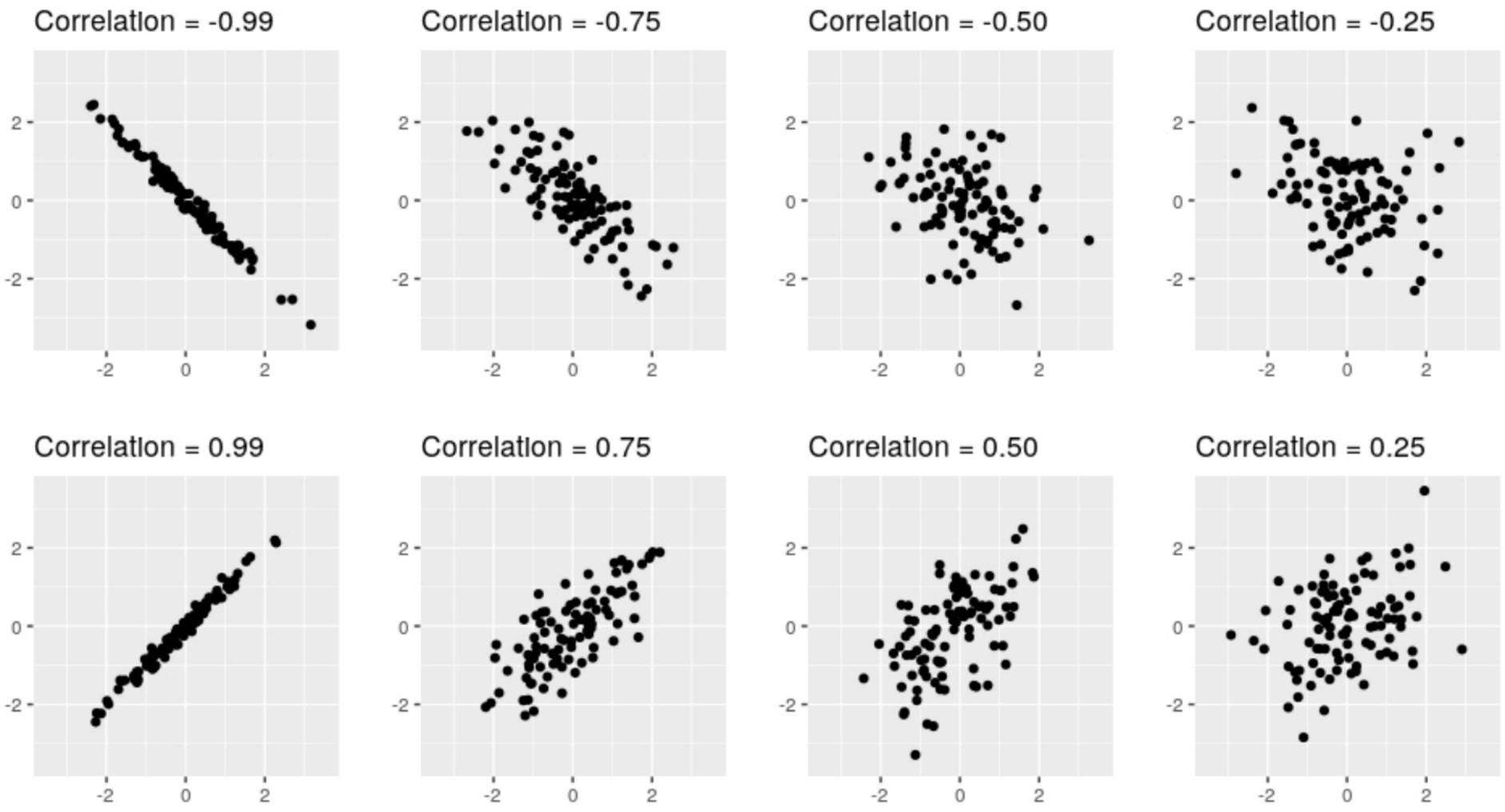



```
qplot(Temperature, Demand, data=as.data.frame(elecdemand)) +
    ylab("Demand (GW)") + xlab("Temperature (Celsius)")
```

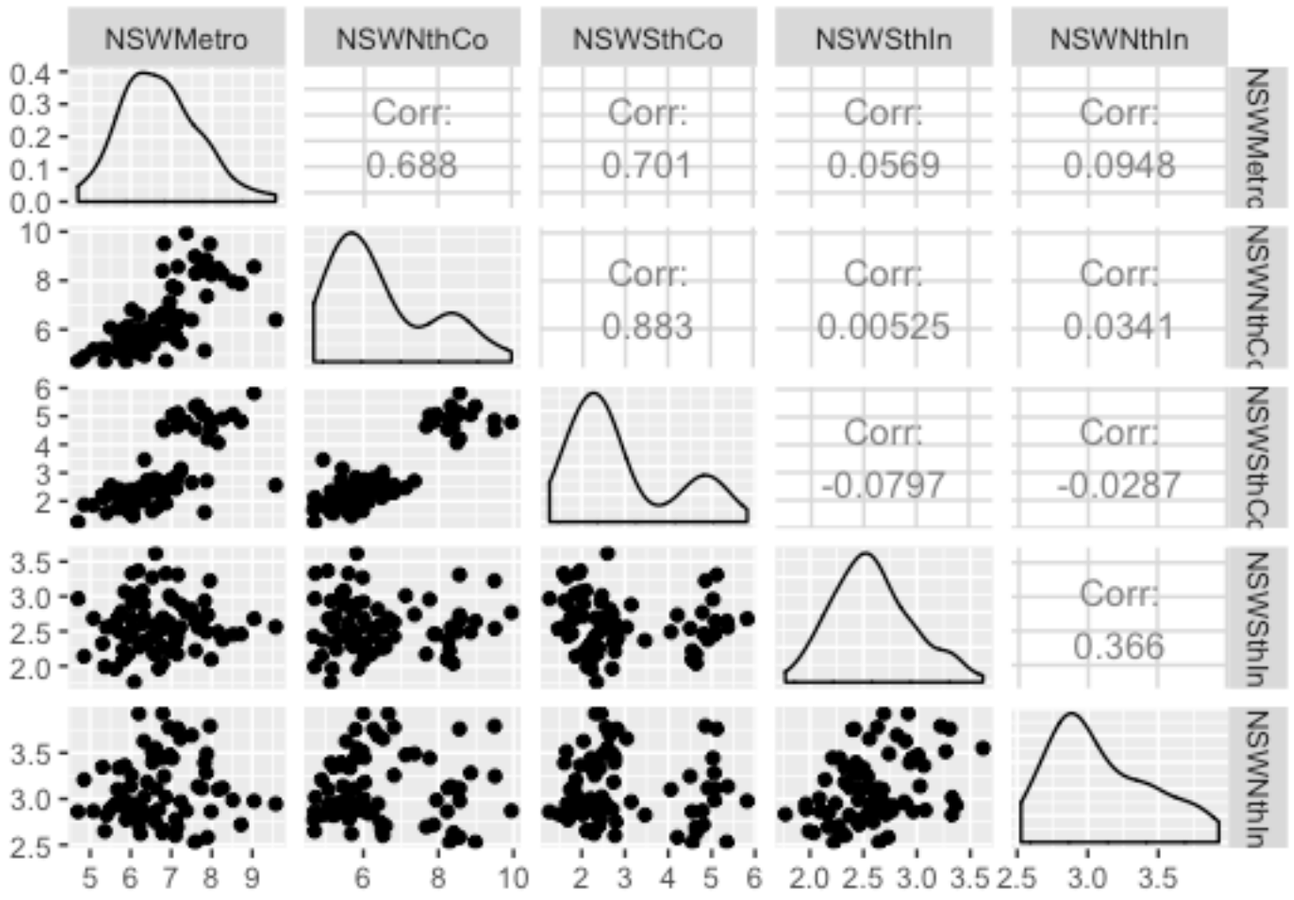
从直观上感受不同水平的相关系数反应的序列关联性特征
下列用随机数做出了从弱相关到强相关(0.25到0.99)的四类正负相关序列散点图，观察不同系数水平代表的情景。

$$r = \frac{\sum(x_t - \bar{x})(y_t - \bar{y})}{\sqrt{\sum(x_t - \bar{x})^2}\sqrt{\sum(y_t - \bar{y})^2}}.$$



```
  autoplot(visnights[,1:5], facets=TRUE) +
      ylab("Number of visitor nights each quarter (millions)")
```

```
library(GGally)

ggpairs(as.data.frame(visnights[,1:5]))
```



时间序列中一个重要的解释因子是自身滞后量，即 $y_t$ $y_{t-k}$ 之间的相关程度

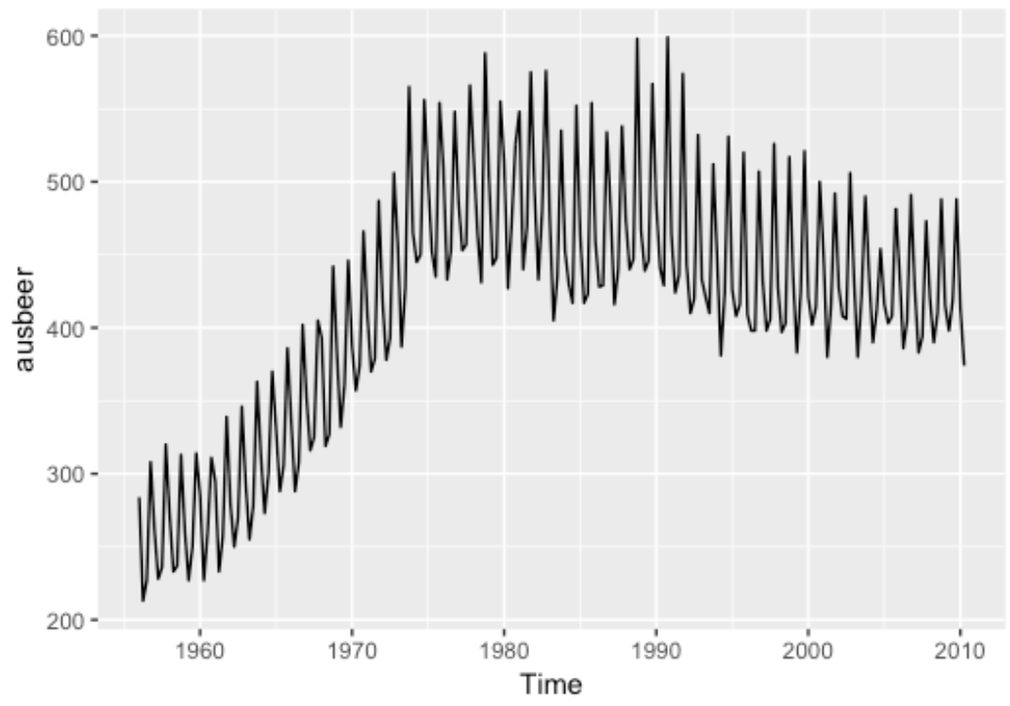
为了凸出季节周期带来的相关性，从ausbeer数据中截出1992年滞后的数据如下

```
beer2 <- window(ausbeer, start=1992)
```

数据集具体内容为：

```
     Qtr1 Qtr2 Qtr3 Qtr4
1992  443  410  420  532
1993  433  421  410  512
1994  449  381  423  531
1995  426  408  416  520
1996  409  398  398  507
1997  432  398  406  526
1998  428  397  403  517
1999  435  383  424  521
2000  421  402  414  500
2001  451  380  416  492
2002  428  408  406  506
2003  435  380  421  490
2004  435  390  412  454
2005  416  403  408  482
2006  438  386  405  491
2007  427  383  394  473
2008  420  390  410  488
2009  415  398  419  488
2010  414  374
```

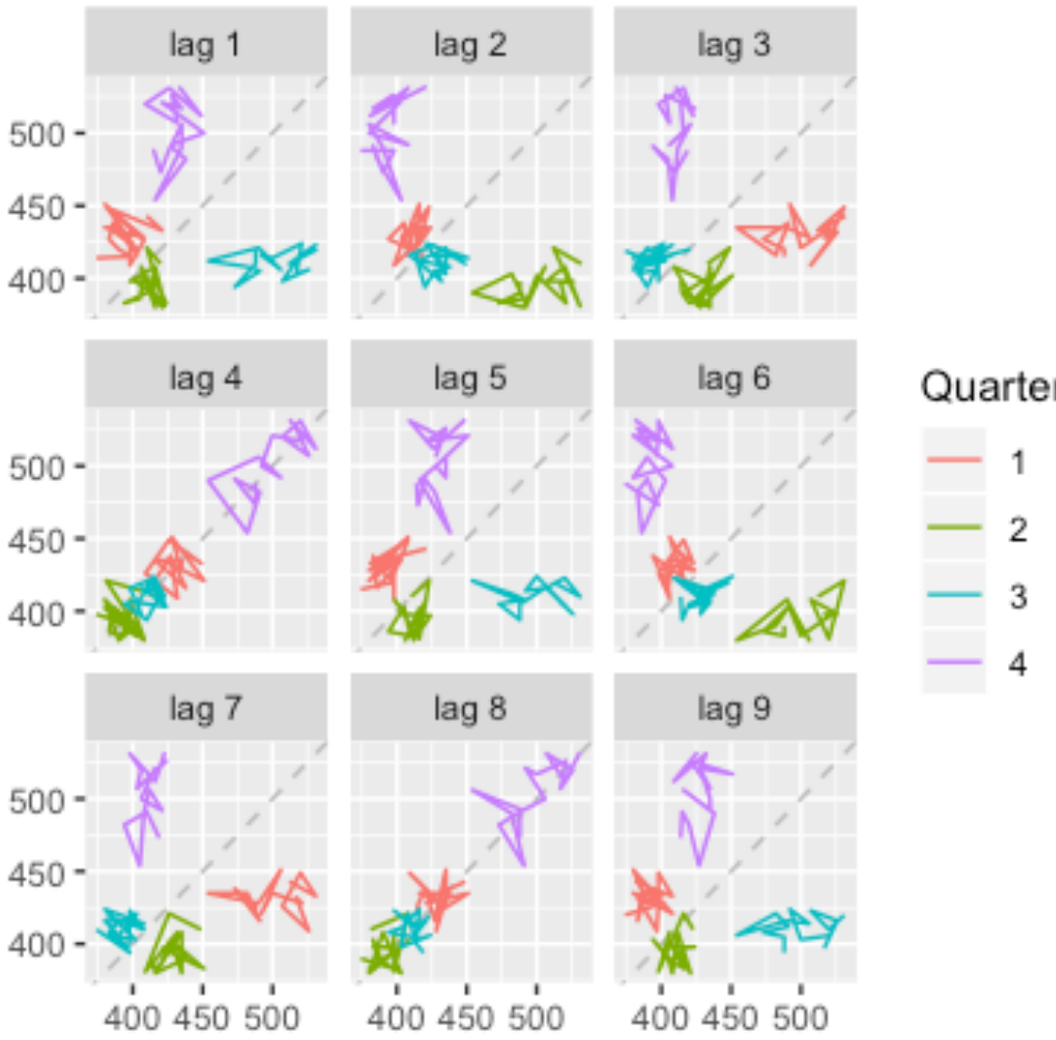
```
autoplot(ausbeer)
```



```
gglagplot(beer2)
```

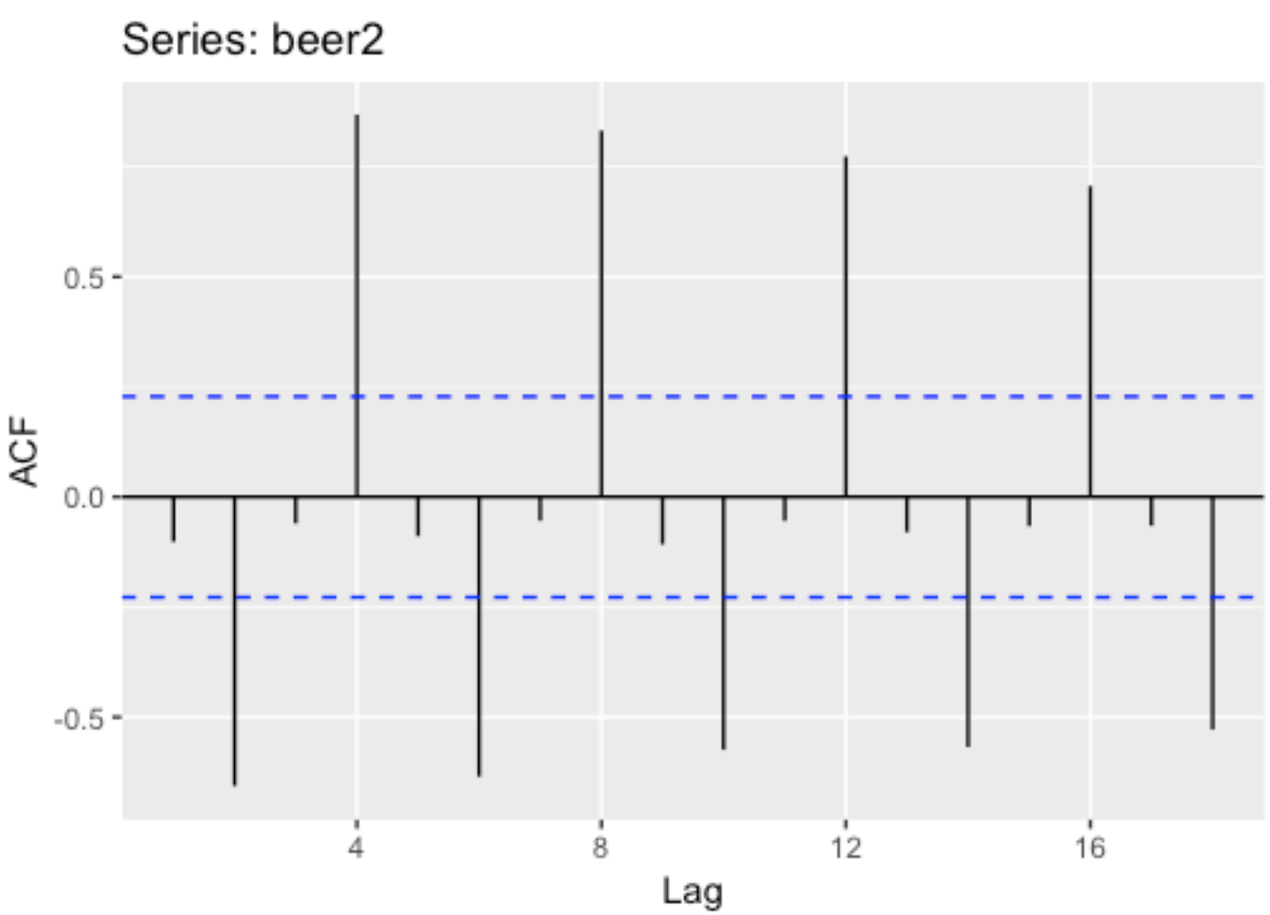
那么相差4个时间单位数据到底有多大相关性?

每隔4个时间单位就呈现出规则的相关特征



ACF图列出了更长滞后期的具体相关系数数值，如下图

```
ggAcf(beer2)
```



# 白噪声与残差

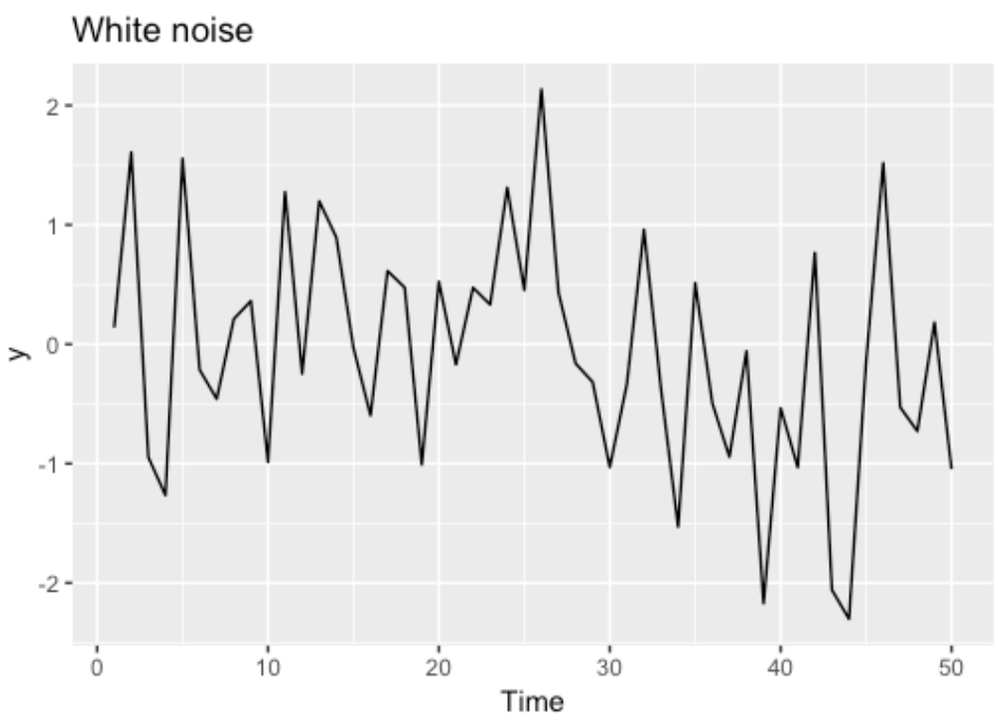
时间序列中没有显示出明显自相关特征的变动称为白噪声

当时间序列中具有明显规则的特征被分解出来之后，剩下的无法解释的部分成为噪声数据，即无法解释的随机事件。

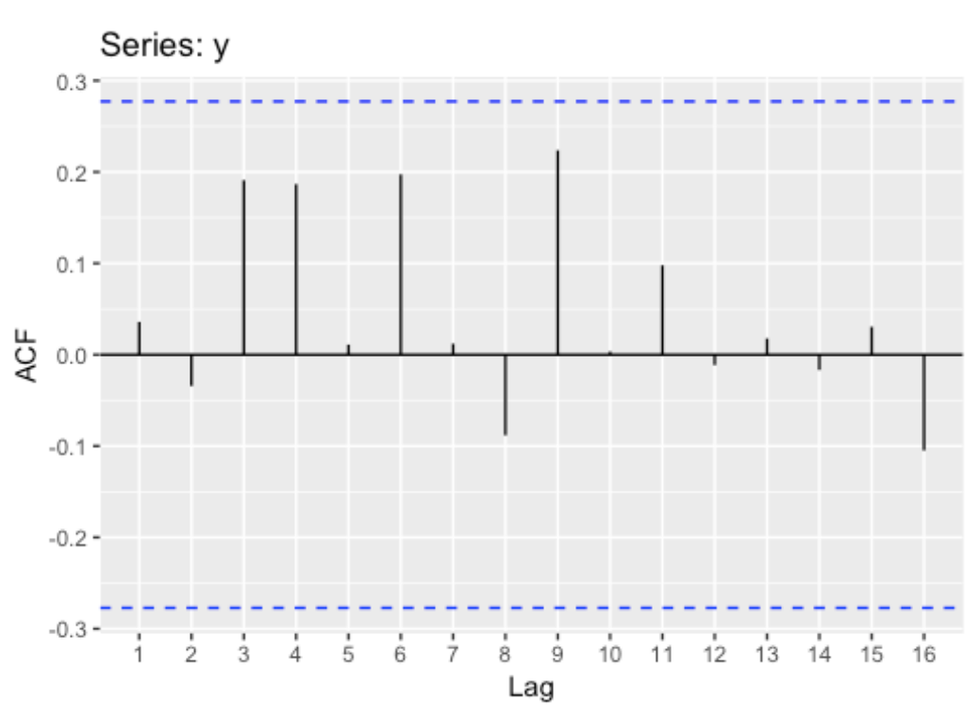
白噪声作为建模分析的剩余部分，最好的状态是不再含有明显的自相关，这可以通过残差的ACF图来检验

对于白噪声，我们希望序列的自相关能够降低到0，但这显然不现实，即使是真正的随机数也会产生一定的自相关性。
观察如下随机数生成的一个白噪声序列

```
y <- ts(rnorm(50))
autoplot(y) + ggtitle("White noise")
```

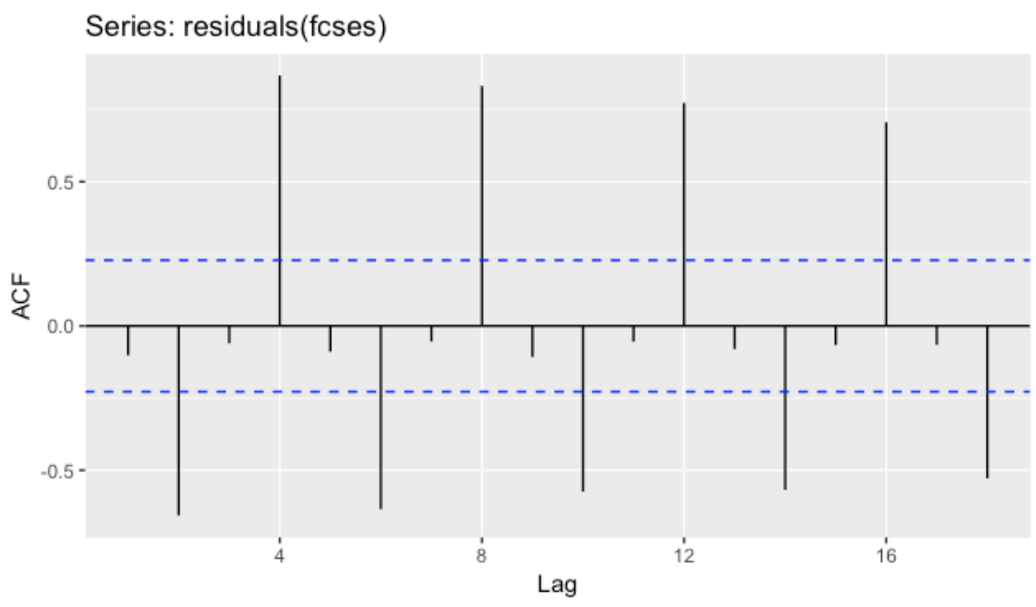



```
ggAcf(y)
```

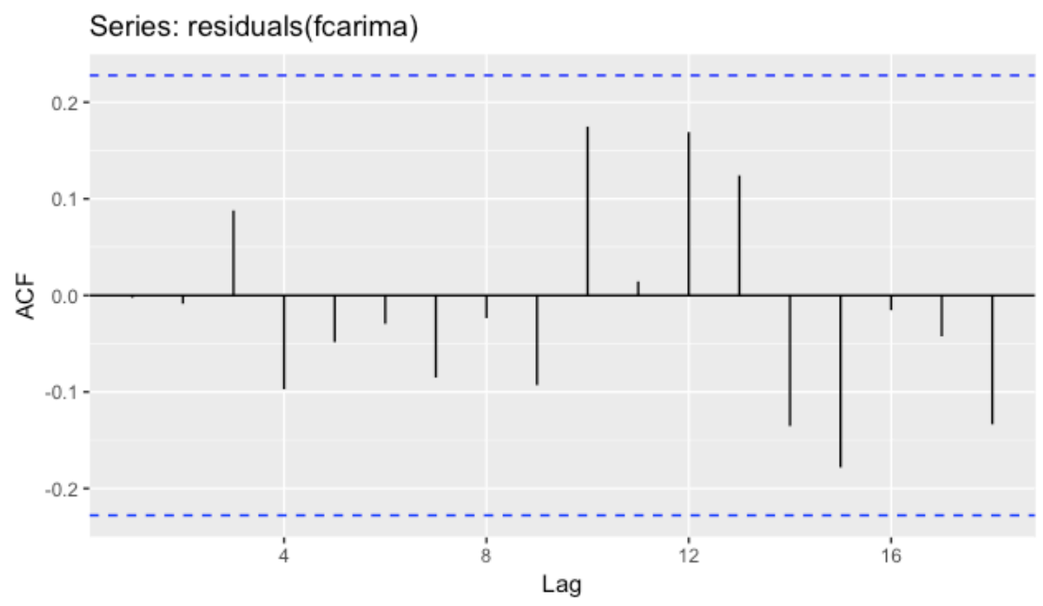


当残差ACF图中仍然有很高自相关性时，也就意味着还有更多规律没有被模型提取出来，如下是简单指数平滑法和优化的arima(滞后移动平均自回归)模型的残差检验

```
fcses=ses(beer2,15)
ggAcf(residuals(fcses))
```




```
fcarima=auto.arima(beer2)
ggAcf(residuals(fcarima))
```




forecast包也开发了完整的残差检验函数chekresiduals，直接将函数作用于训练模型之上

```
checkresiduals(fcses)

checkresiduals(fcarima)
```

# 三、简单模型

综合过去所有数据，利用均值做平均是常用的一种预测方法，但也有它明显的局限性

```
> mean(beer2)
[1] 433.5135
> meanf(beer2,1)
        Point Forecast    Lo 80    Hi 80   Lo 95    Hi 95
2010 Q3       433.5135 377.2457 489.7813 346.801 520.2261
```

naive方法则简单用最末值做预测

```
> naive(beer2,1)
```

```
> rwf(beer2,1)
```

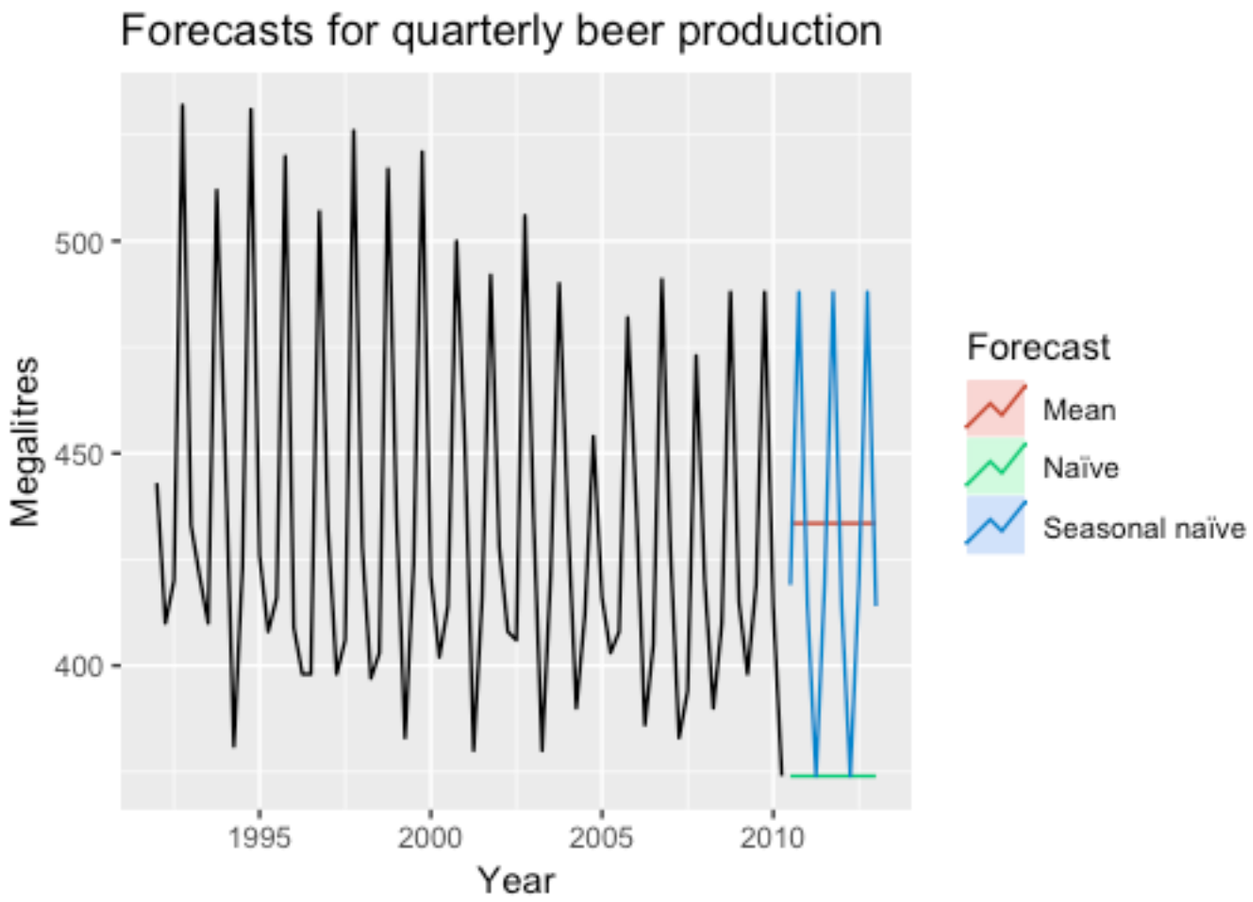
naive方法也叫做random walk forecast

以季节变动为基础的naive方法

```
> snaive(y,1)
```

加入趋势漂移的naive预测

```
> rwf(y,1,drift = T)
```




练习：尝试对fpp2中goog200序列用meanf,naive和趋势漂移的naive方法做预测并做图

```
autoplot(beer2) +
    autolayer(meanf(beer2, h=11),
              series="Mean", PI=FALSE) +
    autolayer(naive(beer2, h=11),
              series="Naïve", PI=FALSE) +
    autolayer(snaive(beer2, h=11),
              series="Seasonal naïve", PI=FALSE) +
    ggtitle("Forecasts for quarterly beer production") +
    xlab("Year") + ylab("Megalitres") +
    guides(colour=guide_legend(title="Forecast"))
```

autoplot只能有一个，下一个自适应图层需要变成autolayer

# 时间项回归

趋势与季节性是时间序列要考虑的首要特征，线性回归可以时间项作为自变量做回归预测，如 $y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_t,$

在趋势项基础上加入按日期周期型出现的季节调整项如下

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 d_{2,t} + \beta_3 d_{3,t} + \beta_4 d_{4,t} + \varepsilon_t,$$

在周期非常明显时，人为做出一系列周期变量数据进入回归建模

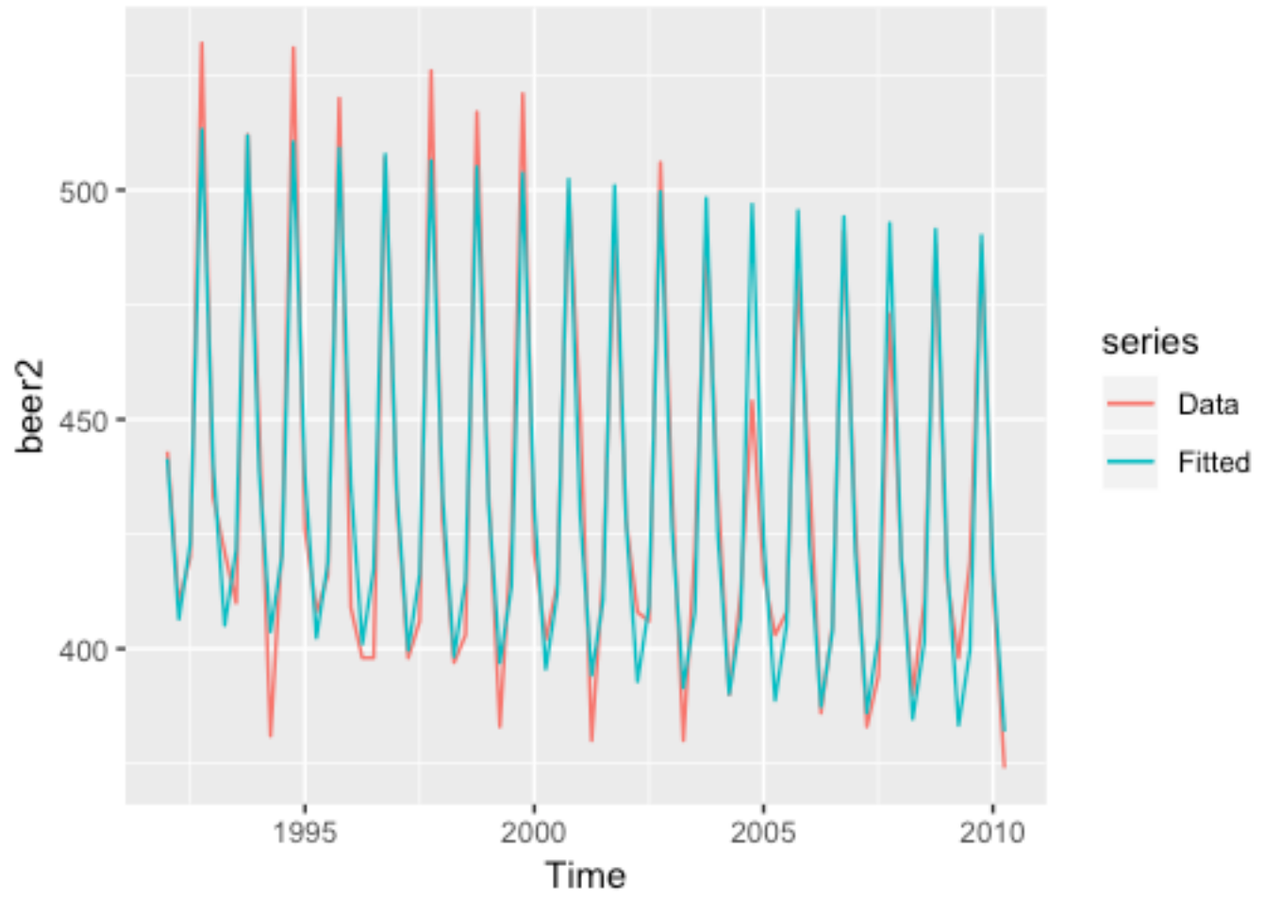
| | $d_{1,t}$ | $d_{2,t}$ | $d_{3,t}$ | $d_{4,t}$ | $d_{5,t}$ | $d_{6,t}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Monday | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Tuesday | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Wednesday | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| Thursday | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| Friday | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| Saturday | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| Sunday | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Monday | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |

线性回归+周期项的方法在forecast包中有对应工具，省去了手动设置周期数据的麻烦

```
fit=tslm(beer2~trend+season)
```

做出图形对比

```
autoplot(beer2, series="Data") +
    autolayer(fit$fitted.values, series="Fitted")
```

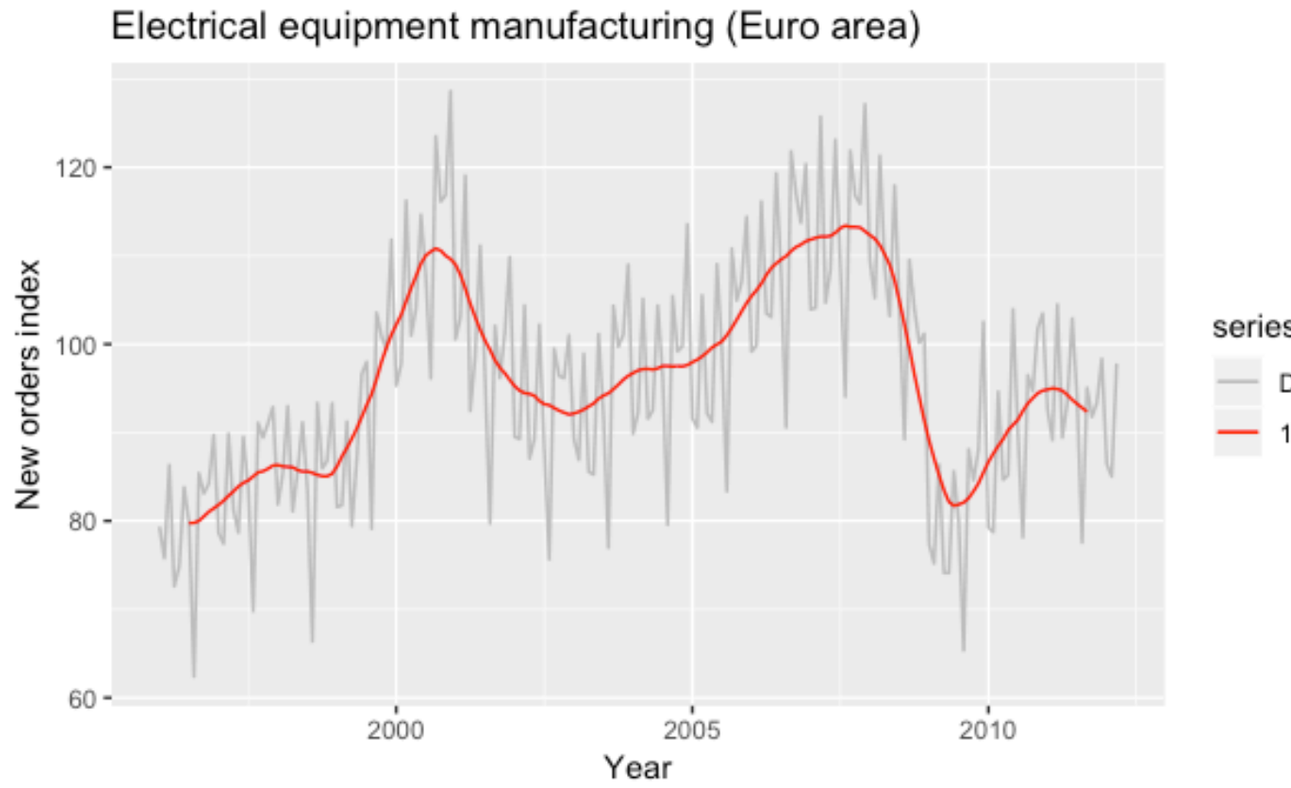


# 四、时间序列模型

## 移动平均

移动平均方法能够抹平由于周期带来的数据波动，这中特性为提取趋势带来了方便

$$\hat{y}_{T+h|T} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t,$$




```
autoplot(elecequip, series="Data") +
    autolayer(ma(elecequip, 12), series="12-MA") +
    xlab("Year") + ylab("New orders index") +
    ggtitle("Electrical equipment manufacturing (Euro area)") +
    scale_colour_manual(values=c("Data"="grey","12-MA"="red"),
                        breaks=c("Data","12-MA"))
```

# 指数平滑法

移动平均实际将所有参与平滑的数据当作相等作用看待，而naive方法则认为最新的数据会最接近未来预测值，结合两者想法另最末的数据权重高，越远的数据权重越低，做出一种变权平均的效果。

$$\hat{y}_{T+1|T} = \alpha y_T + \alpha(1-\alpha)y_{T-1} + \alpha(1-\alpha)^2 y_{T-2} + \cdots$$

```
oildata=window(oil,start=1996)
```

截取oil数据集(年度石油产量数据)1996年后的部分

```
fc=ses(oildata,h=5,alpha = 0.3)

autoplot(fc)
```

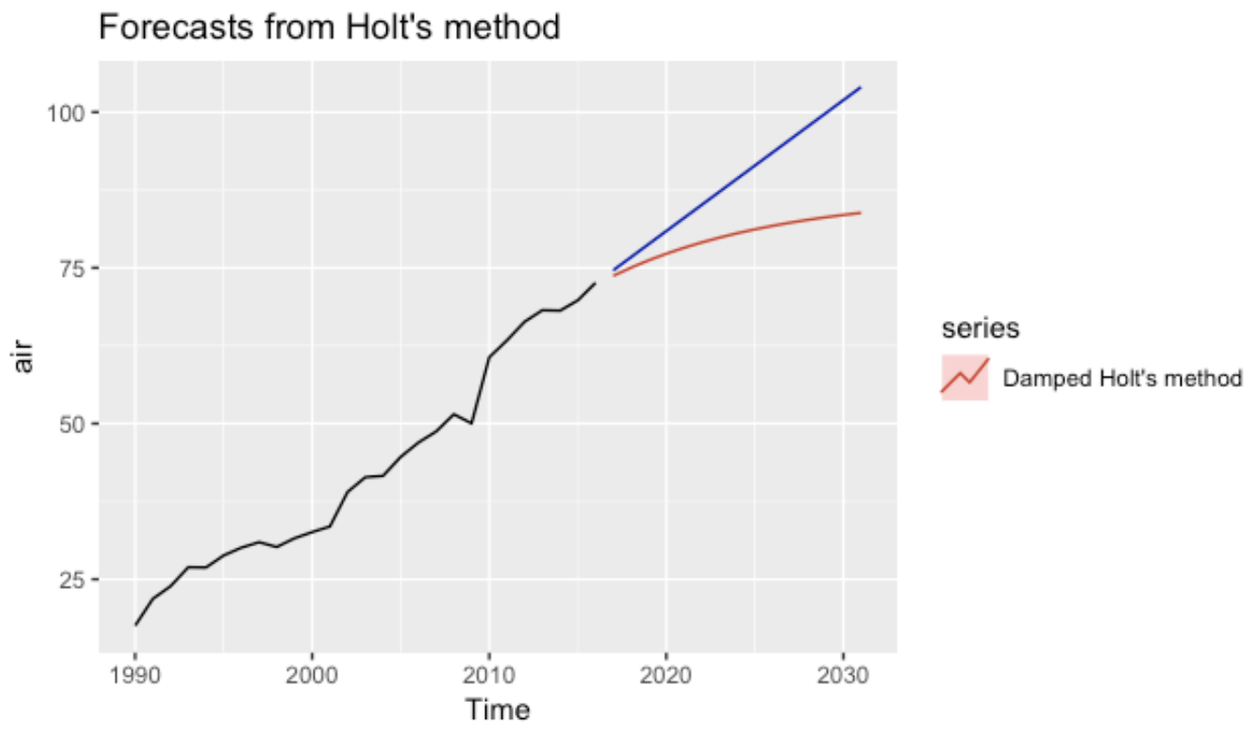
指数平滑法适用于趋势并不太明显的

# 带趋势的指数平滑法——Holt's 线性趋势法

指数平滑基础上改进的线性趋势法解决带有明显增长趋势的问题，公式如下

$$\hat{y}_{t+h|t} = \ell_t + hb_t$$
$$\ell_t = \alpha y_t + (1-\alpha)(\ell_{t-1} + b_{t-1})$$
$$b_t = \beta^*(\ell_t - \ell_{t-1}) + (1-\beta^*)b_{t-1}$$

```
air=window(ausair,start=1990)
fc=holt(air,h=5)
```




但holt线性趋势会无限制增长，这不符合常识，任何增长都会遇到瓶颈，然后逐步放缓。阻滞线性趋势模型在holt模型基础上对预测加入了放缓增长因素

```
fc1<- holt(air, h=15)
fc2<- holt(air,damped = T,phi=0.9, h=15)
```

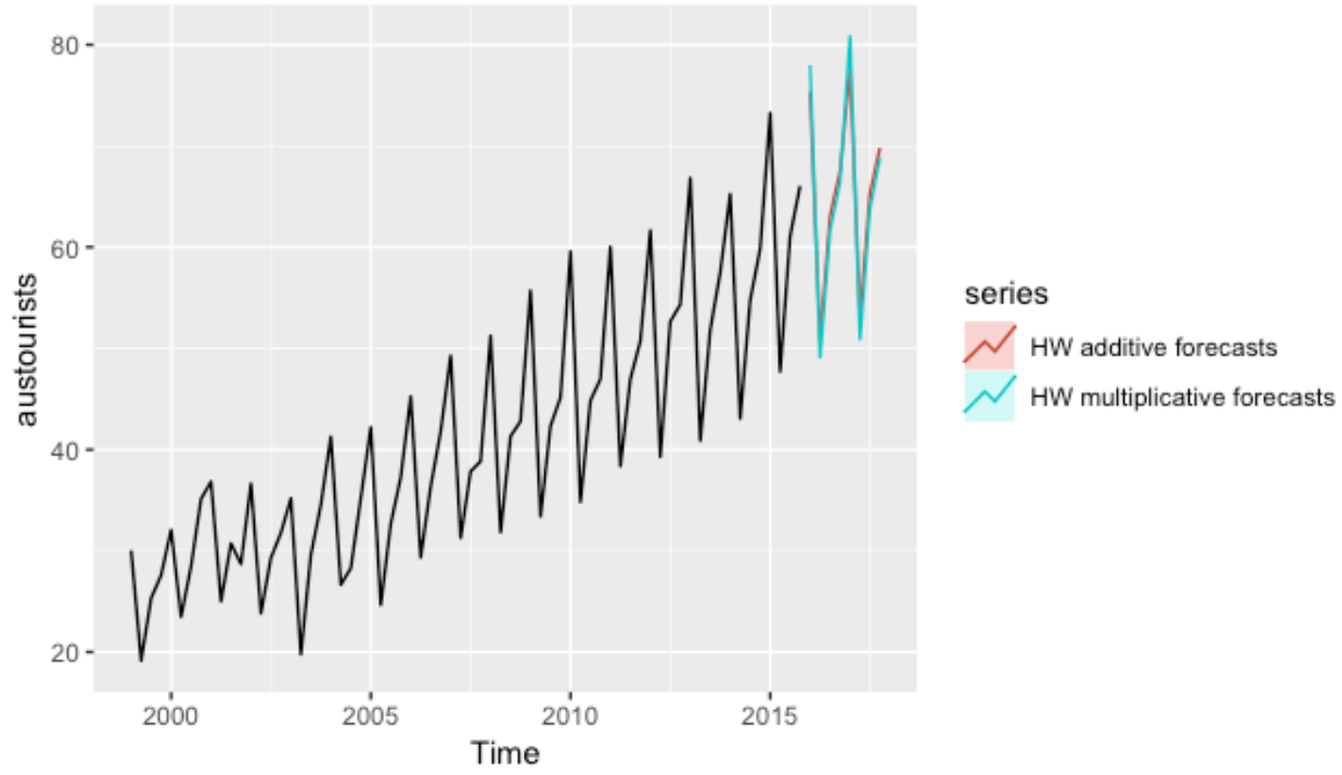
```
autoplot(fc1,series="Holt's method", PI=FALSE) +
  autolayer(fc2, series="Damped Holt's method", PI=FALSE)
```

# Holt-Winter季节模型

Holt-Winter模型在Holt模型基础上解决了数据既带有明显季节性又复合了强烈趋势的问题

Holt-Winter模型需要通过将数据T-S特征分解后建模，从而出现加法型’additive’和乘法型’multiplicative’两种模型

```
fit1=hw(austourists,seasonal = 'additive')
fit2=hw(austourists,seasonal = 'multiplicative')
```




```
autoplot(austourists)+
    autolayer(fit1, series="HW additive forecasts", PI=FALSE) +
    autolayer(fit2, series="HW multiplicative forecasts",PI=FALSE)
```

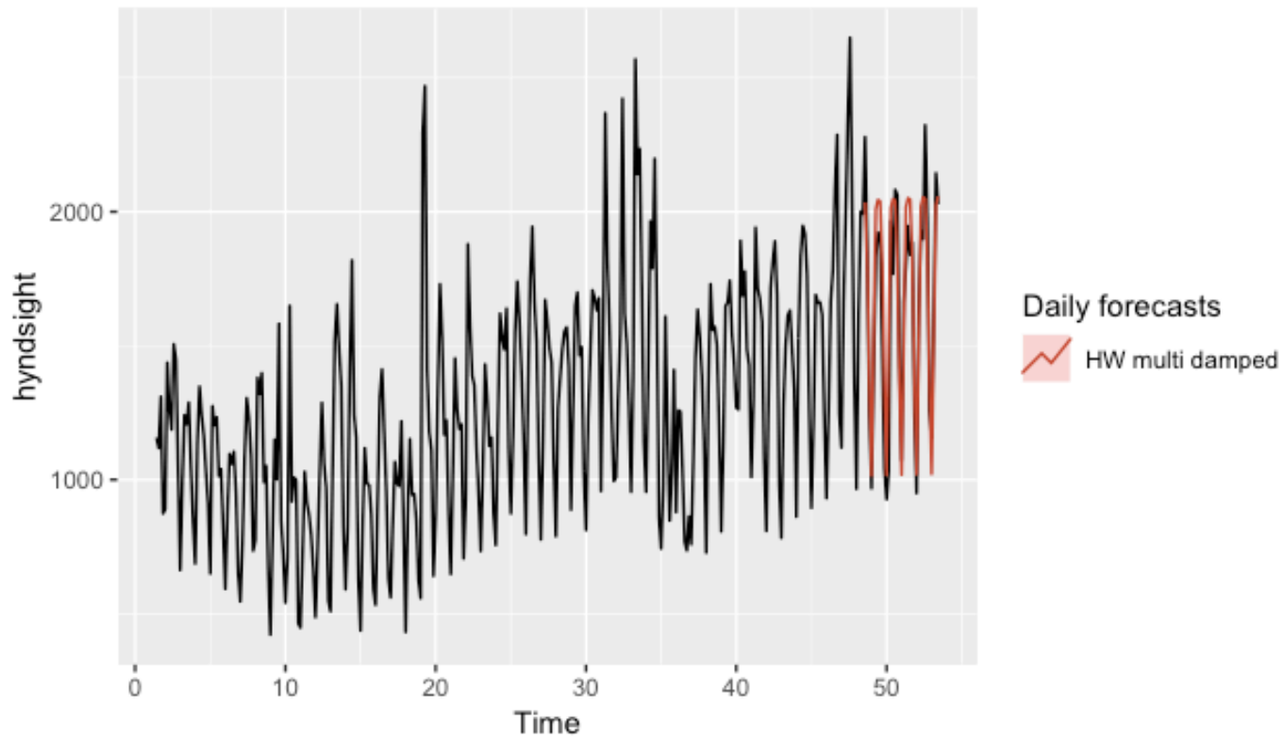
# 带阻滞的Holt-Winter季节模型

Holt-Winter模型同样集成了Holt模型的阻滞增长特点，在hw函数中存在与holt模型同样的阻滞逻辑参数

```
fc <- hw(subset(hyndsight,end=length(hyndsight)-35),
         damped = TRUE, seasonal="multiplicative", h=35)
```

为了检验预测效果，我们空出35个数据，其余数据用于训练模型

```
autoplot(hyndsight) +
    autolayer(fc, series="HW multi damped", PI=FALSE)+
guides(colour=guide_legend(title="Daily forecasts"))
```



# 差分移动平均自回归模型-Arima

前述模型都是建立在趋势较为明显的基础上，当趋势越来越复杂，直接在原始序列上做任何模型都失去了意义，并且T-C特征也无法再混合在一起

为了能预测复杂趋势特征，我们需要更多的观察角度去找到可描述的趋势特征。为此，转向在数据的差分上做分析，即前后数据之差，也叫做随机游走(random walk)

原序列

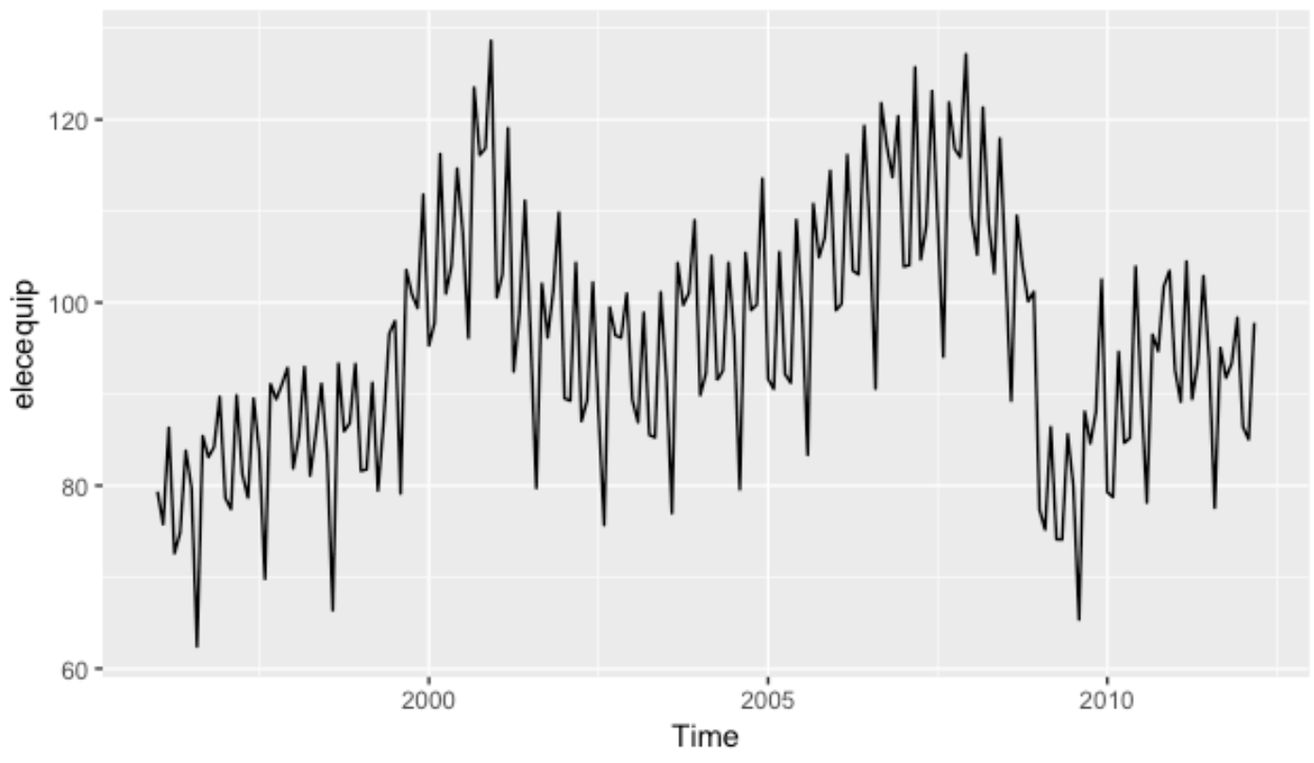
$$y_t$$

一阶差分量

$$y'_t = y_t - y_{t-1}$$

二阶差分量

$$y''_t = y'_t - y'_{t-1}$$




思考差分和导数的关系

随机漫步random walk

一阶平稳　一阶平稳对应了前变用到的所有模型

一阶差分量 $y'_t = y_t - y_{t-1}$ 为了方便记做 $y_t - y_{t-1} = \varepsilon_t$

如果一阶差分序列是平稳的，即 $y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$ 呈现出高度相关或者加入常数后 $y_t - y_{t-1} = c + \varepsilon_t \quad \text{or} \quad y_t = c + y_{t-1} + \varepsilon_t$ 残差也是高度相关，则意味着序列趋势是增长或者下降。如果在一阶差分找不到规律，则需要高阶或者季节性差分中寻找。

## 二阶平稳

当我们在一阶序列中找不到平稳状态，则进入二阶差分寻找平稳性。

$$\begin{aligned} y_t'' &= y_t' - y_{t-1}' \\ &= (y_t - y_{t-1}) - (y_{t-1} - y_{t-2}) \\ &= y_t - 2y_{t-1} + y_{t-2}. \end{aligned}$$

## 季节平稳

除连续的差分外，季节性差分平稳性也是考虑的角度之一。如滞后m期做差分。$y_t' = y_t - y_{t-m}$ 或形式变为 $y_t = y_{t-m} + \varepsilon_t$

# 移动平均模型

Moving average model(简称MA)不同于AR用滞后变量做回归，MA用白噪声作为自变量做回归，阶数q指模型中的滞后变量个数。

$$y_t = c + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

# 自回归模型

Autoregression model(简称AR)利用序列自身的滞后期作为自变量做回归，它的阶数p指模型中的自回归变量个数，记做AR(p)

$$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$

# 差分移动平均自回归模型

ARIMA(p,d,q)模型则是综合了AR和MA模型，其中p为自回归项数、q是移动平均项数，d则是差分阶数

确定各参数最合适的取值是一个不太容易的事情，forecast包中给出一个自动定参数的auto.arima函数，按照数据特征进行优化个参数。

```
fc=auto.arima(elecequip)

autoplot(forecast(fc,15))
```

arima模型相对于前变的简单模型要复杂的多，auto.arima或arima做出的结果仅是对模型的训练，而非直接给出预测结果，需要用forecast函数再做一次预测，类似于线性回归里的prediction函数