■ 연습 문제들

- 문제 1: $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$임을 증명하라

<문제3을 풀기위한 사전 지식>

문제 1. $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$ 임을 증명하라.

$${}_nC_k + {}_nC_{k-1}$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!\,k!} + \frac{n!}{(n-k+1)!\,(k-1)!}$$

$$= \frac{(n! \times (n-k+1)) + (n! \times k)}{(n-k+1)!\,k!} = \frac{n! \times (n \cancel{-k} + 1 \cancel{+k})}{(n-k+1)!\,k!}$$

$$= \frac{(n+1)!}{(n-k+1)!\,k!} = {}_{n+1}C_k$$

- 문제 2: 수학적 귀납법으로 $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$임을 증명하라

문제 2. 수학적 귀납법으로 $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$임을 증명하라.

i) $n=1$일 때

$$(x+y) = \sum_{k=0}^{1}\left({}_1C_k \cdot x^{1-k} \cdot y^k\right)$$

$$= {}_1C_0 \cdot x^1 \cdot y^0 + {}_1C_1 \cdot x^0 \cdot y^1$$

$$= x+y$$

$\therefore$ 성립한다

ii) n일 때 참이라고 가정

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \cdot x^{n-k} \cdot y^k$$

$$= {}_nC_0 \cdot x^n \cdot y^0 + {}_nC_1 \cdot x^{n-1} \cdot y^1 + {}_nC_2 \cdot x^{n-2} \cdot y^2 + \cdots + {}_nC_n \cdot x^0 \cdot y^n$$

$$(x+y)^n \times (x+y)$$

$$= ({}_nC_0 \cdot x^n y^0 + {}_nC_1 \cdot x^{n-1} y^1 + {}_nC_2 \cdot x^{n-2} y^2 + \cdots + {}_nC_n \cdot x^0 \cdot y^n) \times (x+y)$$

$$= {}_nC_0 \cdot x^{n+1} \cdot y^0 + {}_nC_1 \cdot x^n \cdot y^1 + {}_nC_2 \cdot x^{n-1} \cdot y^2 + \cdots + {}_nC_n \cdot x^1 \cdot y^n$$

$$+ {}_nC_0 \cdot x^n \cdot y^1 + {}_nC_1 \cdot x^{n-1} y^2 + \cdots + {}_nC_{n-1} \cdot x^1 \cdot y^n + {}_nC_n x^0 \cdot y^{n+1}$$

$$= {}_{n+1}C_0 \cdot x^{n+1} y^0 + {}_{n+1}C_1 x^n y^1 + {}_{n+1}C_2 x^{n-1} y^2 + \cdots + {}_{n+1}C_n x^1 y^n + {}_{n+1}C_{n+1} x^0 \cdot y^{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} {}_{n+1}C_k \cdot x^{n+1-k} \cdot y^k = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} x^{n+1-k} \cdot y^k$$

$\therefore$ 모든 자연수 n에 대하여 성립!

- 문제 3: 위의 결과를 이용해서 n개의 원소를 가진 집합의 가능한 부분집합의 종류는 2^n개임을 증명하라

문제 3. 위의 결과를 이용해서 n개의 원소를 가진 집합의 가능한 부분집합의 종류는 2^n개임을 증명하라.

원소의 개수가 0개인 부분집합의 개수 = $\binom{n}{0}$

원소의 개수가 1개인 부분집합의 개수 = $\binom{n}{1}$

$\vdots$

원소의 개수가 n개인 부분집합의 개수 = $\binom{n}{n}$

$$\therefore \text{총합} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 1^{n-k} \cdot 1^{k} = (1+1)^n = 2^n$$