例子 4.6 (The CRR Model: one-period).

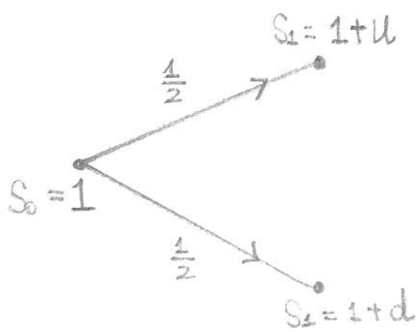
考虑以下金融模型:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}, \qquad \mathbb{P}(\{\omega_1\}) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(\{\omega_2\}) = \frac{1}{2},$$

$$S_0 \equiv 1, \qquad S_1(\omega_1) = 1+u, \qquad S_1(\omega_2) = 1+d, \quad \text{且} -1<d<0<u.$$

我们知道在该市场上存在唯一的等价鞅测度 $\mathbb{Q}$ 满足

$$\mathbb{Q}(\{\omega_1\}) = q = \frac{-d}{u-d}, \qquad \mathbb{Q}(\{\omega_2\}) = 1-q = \frac{u}{u-d}.$$



现选取效用函数 $U(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$, $x \geq 0$; 并固定某个起始资金 $x>0$. 考虑优化问题

$$u(x) = \sup_{H \in \mathcal{H}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[U\left(x + \int_0^1 H\,dS\right)\right].$$

显然, 由于 $T=1$, $\int_0^1 H\,dS = H_1(S_1 - S_0)$; 又由于 H_1 为 $\mathcal{F}_0$ 可测且 $\mathcal{F}_0 = \{\phi, \Omega\}$, 可知 $H_1(\omega_1) = H_1(\omega_2)$, 即任何 $H \in \mathcal{H}$ 都是一个常数. 我们的目标是求出最优策略 $\hat{H} \in \mathbb{R}$ 使得

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U(x + \hat{H}(S_1 - S_0))] \geq \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U(x + H(S_1 - S_0))]$$

对一切 $H \in \mathbb{R}$ 成立.

1. 由 $\mathcal{U}(x)=\frac{x^2}{2}$ 可求得其共轭函数 $V(y)=-\frac{y^\beta}{\beta}$, $\beta=\frac{2}{2-1}$.

2. 由于 $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}(\omega_1)=\frac{\mathbb{Q}(\{\omega_1\})}{\mathbb{P}(\{\omega_1\})}=\frac{q}{\frac{1}{2}}=2q$,

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}(\omega_2)=\frac{\mathbb{Q}(\{\omega_2\})}{\mathbb{P}(\{\omega_2\})}=\frac{1-q}{\frac{1}{2}}=2(1-q),$$

可求得

$$V(y)=\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[V\left(y\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right)\right]=\frac{1}{2}V(y(2q))+\frac{1}{2}V(y(2(1-q)))$$

$$\underset{\text{代入 } V(y)=-\frac{y^\beta}{\beta}}{\uparrow}{=}\quad C_V\, V(y),$$

这里 $C_V=\frac{1}{2}\left((2q)^\beta+(2(1-q))^\beta\right)$.

由于 $\mathcal{U}$ 与 V 互为共轭，我们有 $c\,\mathcal{U}(\frac{x}{c})$ 与 $cV(y)$ 互为共轭. 因此可得到 $V(y)$ 的共轭 $u(x)$ $\left(u(x)=\sup\limits_{H\in\mathbb{R}}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathcal{U}(x+H(S_1-S_0))]\right)$ 必满足

$$u(x)=C_V\,\mathcal{U}\left(\frac{x}{C_V}\right)\underset{\mathcal{U}(\frac{x}{C_V})=\frac{1}{2}(\frac{x}{C_V})^2}{\uparrow}{=}C_V^{\,1-2}\,\mathcal{U}(x)=C_u\,\mathcal{U}(x),$$

此处 $C_u=C_V^{\,1-2}=\left[\frac{1}{2}\left((2q)^\beta+(2(1-q))^\beta\right)\right]^{1-2}$.

因此，利用关系 $\hat{y}(x)=u'(x)=C_u\,\mathcal{U}'(x)$ (注意，$\hat{y}(x)$ 为函数 $V(y)+xy$ 的极值点，即 $V'(\hat{y}(x))=-x$) 可得到以下结果.

3. $\hat{X}(x) = (U')^{-1}\left(\hat{y}(x)\frac{dQ}{dP}\right)$

$$= (U')^{-1}\left(C_u U'(x)\frac{dQ}{dP}\right)$$

$$\overset{(U')^{-1}=-V',\ V(y)=-\frac{y^\beta}{\beta},\ \beta=\frac{\alpha}{\alpha-1}\ \Rightarrow\ V'(y)=-y^{\frac{1}{\alpha-1}}}{=} -V'(U'(x))\, C_u^{\frac{1}{\alpha-1}}\left(\frac{dQ}{dP}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

$$\overset{C_u=C_V^{1-\alpha}}{=} x\, C_V^{-1}\left(\frac{dQ}{dP}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}.$$

即:

$$\hat{X}(x)(\omega_1) = x\,C_V^{-1}(2q)^{\frac{1}{\alpha-1}},\qquad \hat{X}(x)(\omega_2) = x\,C_V^{-1}(2(1-q))^{\frac{1}{\alpha-1}}.$$

4. 由于 $\hat{X}(x) = x + \hat{H}(S_1 - S_0)$, 可知:

$$\hat{X}(x)(\omega_1) = x + \hat{H}(S_1(\omega_1) - 1)$$

$$= x + \hat{H}(1+u-1) = x + \hat{H}u = x\,C_V^{-1}(2q)^{\frac{1}{\alpha-1}},$$

即 $\hat{H} = x\left[C_V^{-1}(2q)^{\frac{1}{\alpha-1}} - 1\right]u^{-1}$.

类似，利用 $\hat{X}(x)(\omega_2) = x + \hat{H}d = x\,C_V^{-1}(2(1-q))^{\frac{1}{\alpha-1}}$ 可得

$$\hat{H} = x\left[C_V^{-1}(2(1-q))^{\frac{1}{\alpha-1}} - 1\right]d^{-1}.$$

因此，最优投资策略 $\hat{H}$ 已被求出.

推论 4.7: 保持之前的记号:

$$L(\xi_1, \cdots, \xi_n, y) = \sum_{i=1}^{n} p_i U(\xi_i) - y\left(\sum_{i=1}^{n} q_i \xi_i - x\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i \left(U(\xi_i) - y \frac{q_i}{p_i} \xi_i \right) + yx,$$

$$\Phi(y) = \sup_{\xi_1, \cdots, \xi_n} L(\xi_1, \cdots, \xi_n, y).$$

那么有:

$$u(x) = \begin{cases} \sup\limits_{\xi_1, \cdots, \xi_n} \sum_{i=1}^{n} p_i U(\xi_i) \\ \text{约束条件: } \sum_{i=1}^{n} \xi_i q_i = x \end{cases} = \inf_{y>0} \Phi(y)$$

$$= \inf_{y>0} \sup_{\xi_1, \cdots, \xi_n} L(\xi_1, \cdots, \xi_n, y)$$

$$= \sup_{\xi_1, \cdots, \xi_n} \inf_{y>0} L(\xi_1, \cdots, \xi_n, y).$$

证明: 在定理4.5中已证得 $u(x) = \inf_{y>0} \Phi(y) = \inf\limits_{y>0} \sup\limits_{\xi_1, \cdots, \xi_n} L(\xi_1, \cdots, \xi_n, y)$.

故只需证明

$$u(x) = \sup_{\xi_1, \cdots, \xi_n} \inf_{y>0} L(\xi_1, \cdots, \xi_n, y).$$

令 $\Phi(\xi_1, \cdots, \xi_n) = \inf\limits_{y>0} L(\xi_1, \cdots, \xi_n, y)$, 那么必然有:

$$\sup_{\xi_1, \cdots, \xi_n} \Phi(\xi_1, \cdots, \xi_n) = \sup_{\substack{\xi_1, \cdots, \xi_n, \\ \sum_{i=1}^{n} \xi_i q_i \le x}} \sum_{i=1}^{n} p_i U(\xi_i).$$

这是因为若 $(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ 满足 $\sum_{i=1}^n \xi_i q_i \le x$，那么

$$\Phi(\xi_1,\cdots,\xi_n)=\inf_{y>0}\left(\sum_{i=1}^n p_i\ U(\xi_i)\ -\ y\,(\underbrace{\sum_{i=1}^n q_i\xi_i-x}_{\le 0})\right)$$

$$\overset{\downarrow\, y=0}{=}\quad \sum_{i=1}^n p_i\,U(\xi_i),$$

若 $(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ 满足 $\sum_{i=1}^n \xi_i q_i > x$，那么

$$\Phi(\xi_1,\cdots,\xi_n)=\inf_{y>0}\left(\sum_{i=1}^n p_i\,U(\xi_i)\ -\ y\,(\underbrace{\sum_{i=1}^n q_i\xi_i-x}_{>0})\right)$$

$$\overset{\downarrow\, y\to\infty}{=}\quad -\infty\,.$$

另一方面，由于 $U(x)$ 为增函数，易知

$$\sup_{\xi_1,\cdots,\xi_n,\ \sum_{i=1}^n \xi_i q_i\le x}\ \sum_{i=1}^n p_i\,U(\xi_i)\ =\ \sup_{\xi_1,\cdots,\xi_n,\ \sum_{i=1}^n \xi_i q_i = x}\ \sum_{i=1}^n p_i\,U(\xi_i)\ =\ U(x).$$

$\square$

例子 4.8：（The CRR Model: Multiperiods）.

$T \geq 1$, $\quad S_0 = 1$,

$S_t = S_{t-1} Y_t$, $\quad t = 1, \cdots, T$,

这里 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_T$ 在概率测度 $\mathbb{P}$ 下独立（independent），且满足

$$\mathbb{P}[Y_1 = 1+u] = \cdots = \mathbb{P}[Y_T = 1+u] = \frac{1}{2},$$

$$\mathbb{P}[Y_1 = 1+d] = \cdots = \mathbb{P}[Y_T = 1+d] = \frac{1}{2},$$

$(-1 < d < 0 < u)$.

令 $\mathcal{F}_t = \sigma(Y_1, \cdots, Y_t)$, $\quad t = 1, \cdots, T$, $\quad \mathcal{F}_0 = \{\phi, \Omega\}$.

我们已知该市场 S（即 CRR 模型）为完备市场，其对应的等价鞅测度 $\mathbb{Q}$ 满足

$$\mathbb{Q}[Y_t = 1+u] = q = \frac{-d}{u-d}, \qquad \mathbb{Q}[Y_t = 1+d] = 1-q = \frac{u}{u-d}$$

对任何 $t = 1, \cdots, T$ 成立.

与例子 4.6 一样，我们考虑效用函数 $U(x) = \frac{x^a}{a}$, $\quad x \geq 0$, $\quad a \in (0, 1)$.

其对应的效用最大化问题为：

$$u(x) = \sup_{H = (H_t)_{t=1,\cdots,T} \in \mathcal{H}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[U\left(x + \int_0^T H\, dS\right)\right]$$

$$= \sup_{H \in \mathcal{H}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[U\left(x + \sum_{t=1}^{T} H_t (S_t - S_{t-1})\right)\right].$$

我们想要计算出 $u(x)$ 以及求得最优投资策略 $\hat{H} \in \mathcal{H}$. 为此，我们使用动态规划原理（Dynamic Programming Principle）将该多阶段优化问题转化为如例子 4.6 的单阶段优化问题.

(1) 假设我们在 $T-1$ 时刻拥有资金 $x \geq 0$ 进入市场. 显然, 在 $T-1$ 时刻我们明确知晓股票价格 $S_{T-1}(\omega)$(以及 $S_{T-2}, \cdots, S_1, S_0$), 又由于 $S_T = S_{T-1} Y_T$, Y_T 与 $T-1$ 时刻市场上可用的信息集合 $\mathcal{F}_{T-1} = \sigma(Y_1, \cdots, Y_{T-1})$ 关于 $\mathbb{P}$ 独立, 我们有以下结论:

在 $T-1$ 时刻, 市场从 $T-1$ 时刻到 T 时刻的演化过程等价于市场从 0 时刻到 1 时刻的演化过程, 唯一的区别是后者的起始股票价格是 $S_{T-1}(\omega)$.

因此, 在 0 时刻来看, 若我们在 $T-1$ 时刻拥有资金 x, 那么从 $T-1$ 时刻到 T 时刻这段时间我们要做的是最大化以下条件期望:

$$\boxed{u_{T-1}(x)(\omega) = \sup_{H_T:\ \mathcal{F}_{T-1}\text{-可测}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[U(x + H_T(S_T - S_{T-1})) \mid \mathcal{F}_{T-1} \right](\omega)}$$

$\Updownarrow$

即, 在 $T-1$ 时刻, 利用 $T-1$ 时刻市场上可用的信息 $\mathcal{F}_{T-1}$, 构建最优交易策略 $\hat{H}_T$ (反映为 $\hat{H}_T$ 必须关于 $\mathcal{F}_{T-1}$-可测) 最大化 $T-1 \to T$ 时刻的平均效用.

显然, 由于 CRR 模型假设 Y_T 与 $\mathcal{F}_{T-1}$ 关于 $\mathbb{P}$ 独立, 且 Y_T 与 Y_1 在 $\mathbb{P}$ 下的分布一致, 且 H_T 与 S_{T-1} 均关于 $\mathcal{F}_{T-1}$ 可测, 对于任意给定的场景 $\omega \in \Omega$, 有:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[U(x + H_T(S_T - S_{T-1})) \mid \mathcal{F}_{T-1} \right](\omega) \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[U(x + H_T(\omega)(S_{T-1}(\omega) Y_T - S_{T-1}(\omega))) \right] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[U(x + \overset{h = H_T(\omega)}{\overset{\downarrow}{h}}(\tilde{S}_1 - \tilde{S}_0)) \right], \quad \tilde{S}_0 = S_{T-1}(\omega), \quad \tilde{S}_1 = \tilde{S}_0 Y_1.
\end{aligned}$$

这意味着, 当 $\omega \in \Omega$ 固定时,

$$u_{T-1}(x)(\omega) = \sup_{H_T:\ \mathcal{F}_{T-1}\text{-可测}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[U(x + H_T(S_T - S_{T-1})) \mid \mathcal{F}_{T-1} \right](\omega)$$

$$= \sup_{h\in\mathbb{R}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U(x+h(\tilde{S}_1-\tilde{S}_0))], \quad \tilde{S}_0 = S_{T-1}(\omega),$$

也即，我们实际上回到了例子4.6中的单阶段(one-period) CRR模型！唯一的区别在于例子4.6中 $\tilde{S}_0=1$，此处我们有 $\tilde{S}_0 = S_{T-1}(\omega)$.

现在我们进行与例子4.6中所示一样的计算(只需注意 $\tilde{S}_0 = S_{T-1}(\omega)$)，可立刻得到：

- $$u_{T-1}(x)(\omega) = \sup_{h\in\mathbb{R}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U(x+h(\tilde{S}_1-\tilde{S}_0))]$$
$$= c_u U(x), \qquad c_u = \left[\tfrac{1}{2}\left((2q)^{\beta}+(2(1-q))^{\beta}\right)\right]^{1-\alpha}$$

- 最优投资策略 $$\hat{h} = \hat{H}_T(\omega) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{因为此时} \\ \tilde{S}_0 = S_{T-1}(\omega)}}{=} \frac{x[c_v^{-1}(2(1-q))^{\frac{1}{\alpha-1}}-1]\,d^{-1}}{S_{T-1}(\omega)},$$

$$c_v = \tfrac{1}{2}\left((2q)^{\beta}+(2(1-q))^{\beta}\right).$$

(2) 现在假设我们在T-2时刻拥有资金 $x\geq 0$ 进入市场。假设我们在T-2时刻使用了某投资策略 H_{T-1} (显然 H_{T-1} 关于 $\mathcal{F}_{T-2}$ 可测)，那么该投资策略会导致我们在T-1时刻所拥有的可使用资金为

$$x + H_{T-1}(S_{T-1}-S_{T-2}).$$

在这种情况下，在T-1时刻我们所面临的优化问题显然是

$$u_{T-1}(x+H_{T-1}(S_{T-1}-S_{T-2})) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{由步骤(1)所得}}}{=} c_u U(x+H_{T-1}(S_{T-1}-S_{T-2}))$$

因此，在 0 时刻来看的话，若我们在 T-2 时刻拥有资金 x，那么我们那时所要解决的问题是

$$u_{T-2}(x)(\omega) = \sup_{H_{T-1}:\ \mathcal{F}_{T-2}\text{可测}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[u_{T-1}(x + H_{T-1}(S_{T-1} - S_{T-2})) \mid \mathcal{F}_{T-2}](\omega)$$

由于 $S_{T-1} = S_{T-2} Y_{T-1}$，$Y_{T-1}$ 与 $\mathcal{F}_{T-2}$ 关于 $\mathbb{P}$ 独立，Y_{T-1} 与 Y_1 在 $\mathbb{P}$ 下的分布一致，且 H_{T-1} 与 S_{T-2} 均关于 $\mathcal{F}_{T-2}$ 可测，对于任意给定的 $\omega \in \Omega$，有：

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[u_{T-1}(x + H_{T-1}(S_{T-1} - S_{T-2})) \mid \mathcal{F}_{T-2}](\omega) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[u_{T-1}(x + H_{T-1}(\omega)(S_{T-2}(\omega) Y_{T-1} - S_{T-2}(\omega)))]$$

$$\overset{h = H_{T-1}(\omega)}{=} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[u_{T-1}(x + h(\tilde{S}_1 - \tilde{S}_0))], \quad \tilde{S}_0 = S_{T-2}(\omega),\ \tilde{S}_1 = \tilde{S}_0 Y_1.$$

因此，对任何 $\omega \in \Omega$，

$$u_{T-2}(x)(\omega) = \sup_{H_{T-1}:\ \mathcal{F}_{T-2}\text{-可测}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[u_{T-1}(x + H_{T-1}(S_{T-1} - S_{T-2})) \mid \mathcal{F}_{T-2}](\omega)$$

$$= \sup_{h \in \mathbb{R}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[u_{T-1}(x + h(\tilde{S}_1 - \tilde{S}_0))]$$

$$\overset{u_{T-1}(y) = c_u U(y)\text{，由步骤(1)所得}}{=} \sup_{h \in \mathbb{R}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[c_u U(x + h(\tilde{S}_1 - \tilde{S}_0))],$$

也即，我们实际上又回到了例子 4.6 中所示的情况，区别在于此处 $\tilde{S}_0 = S_{T-2}(\omega)$，且效用函数由 U 变为 $c_u U$。那么利用例子 4.6 中的计算，可立即得到：

· $u_{T-2}(x)(\omega) = C_u\left(C_u U(x)\right) = C_u^2\, U(x)$,

· 最优投资策略 $\hat{h} = \hat{H}_{T-1}(\omega) = \dfrac{x\left[C_v^{-1}\left(2(1-q)\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} - 1\right] d^{-1}}{S_{T-2}(\omega)}$

因为此时

$\tilde{S}_0 = S_{T-2}(\omega)$

注意：在 T-2 时刻拥有资金 x 的情况下使用投资策略 $\hat{H}_{T-1}(\omega)$，在 T-1 时刻的可用资金将变为 $x + \hat{H}_{T-1}(\omega)\left(S_{T-1}(\omega) - S_{T-2}(\omega)\right)$，那么将其作为资金 x 代入到步骤(1)中所求出的 T-1 时刻最优投资策略 $\hat{H}_T(\omega)$ 的表达式，可得此时

$$\hat{H}_T(\omega) = \frac{\left(x + \hat{H}_{T-1}(\omega)\left(S_{T-1}(\omega) - S_{T-2}(\omega)\right)\right)\left[C_v^{-1}\left(2(1-q)\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} - 1\right] d^{-1}}{S_{T-1}(\omega)}$$

$$= \frac{\left(x + \dfrac{x\left[C_v^{-1}\left(2(1-q)\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} - 1\right] d^{-1}}{S_{T-2}(\omega)}\left(S_{T-1}(\omega) - S_{T-2}(\omega)\right)\right)\left[C_v^{-1}\left(2(1-q)\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} - 1\right] d^{-1}}{S_{T-1}(\omega)}.$$

⋮

(T-t)：以此类推，若我们在 t 时刻拥有资金 $x \geq 0$ 进入市场，那么我们所需要优化的目标会是：

$$u_t(x)(\omega) = \sup_{H_{t+1}:\ \mathcal{F}_t\text{-可测}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[u_{t+1}\left(x + H_{t+1}(S_{t+1} - S_t)\right) \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right](\omega)$$

利用归纳法，易求得

· $u_t(x)(\omega) = C_u^{T-t}\, U(x)$,

· $\hat{H}_{t+1}(\omega) = \dfrac{x\left[C_v^{-1}\left(2(1-q)\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} - 1\right] d^{-1}}{S_t(\omega)}$,

· $$\hat{H}_{t+2}(\omega) = \frac{(x + \hat{H}_t(\omega)(S_{t+1}(\omega) - S_t(\omega)))[C_v^{-1}(2(1-q))^{\frac{1}{\alpha-1}} - 1]d^{-1}}{S_{t+1}(\omega)},$$

⋮

· $$\hat{H}_T(\omega) = \frac{(x + \hat{H}_{T-1}(\omega)(S_{T-1}(\omega) - S_{T-2}(\omega)))[C_v^{-1}(2(1-q))^{\frac{1}{\alpha-1}} - 1]d^{-1}}{S_{T-1}(\omega)}.$$

⋮

(T): 最后，在0时刻我们拥有资金 $x \geq 0$ 的情况下，我们所要优化的目标必然为

$$U_0(x) = U(x) = \sup_{H_1:\, \mathcal{F}_0\text{-可测}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U_1(x + H_1(S_1 - \underset{1}{\overset{\shortparallel}{S_0}}))]$$

$$\left(= \sup_{H = (H_t)_{t=1,\cdots,T} \in \mathcal{H}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U(x + \sum_{t=1}^{T} H_t(S_t - S_{t-1}))] \right)$$

$$\overset{\text{归纳法}}{=} C_u^T U(x),$$

最优投资策略为：

$$\hat{H}_1(\omega) = x[C_v^{-1}(2(1-q))^{\frac{1}{\alpha-1}} - 1]d^{-1},$$

$$\hat{H}_2(\omega) = \frac{(x + \hat{H}_1(\omega)(S_1(\omega) - 1))[C_v^{-1}(2(1-q))^{\frac{1}{\alpha-1}}]d^{-1}}{S_1(\omega)},$$

⋮

$$\hat{H}_T(\omega) = \frac{(x + \hat{H}_{T-1}(\omega)(S_{T-1}(\omega) - S_{T-2}(\omega)))[C_v^{-1}(2(1-q))^{\frac{1}{\alpha-1}}]d^{-1}}{S_{T-1}(\omega)}.$$

以上解题方式被称为动态规划原则(Dynamic Progamming Principle).