$$\mathbb{E}[X|B] = \frac{1}{\mathbb{P}(B)}\mathbb{E}[X\mathbb{1}_B] = \frac{1}{\mathbb{P}(\{\omega_{i_1}\})+\cdots+\mathbb{P}(\{\omega_{i_k}\})}\Big(X(\omega_{i_1})\mathbb{P}(\{\omega_{i_1}\})+\cdots+ X(\omega_{i_k})\mathbb{P}(\{\omega_{i_k}\})\Big).$$

显然，$\mathbb{P}(A|B)$ 表示：在事件 B 发生的前提下，事件 A 发生的概率；

$\mathbb{E}[X|B]$ 表示：在事件 B 发生的前提下，X 的期望.

定义1.20：设 $X: \Omega \to \mathbb{R}$ 为一个关于 σ 代数 $\mathcal{F}$ 可测的可积随机变量，即 $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$，设 $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ 为一个包含于 $\mathcal{F}$ 的 σ 代数.

若一个随机变量 $Z: \Omega \to \mathbb{R}$ 满足：

(1) Z 关于 $\mathcal{G}$ 可测；

(2) 对任何 $B \in \mathcal{G}$ 有：

$$\mathbb{E}[X\mathbb{1}_B] = \mathbb{E}[Z\mathbb{1}_B],$$

则称 Z 为 X 关于 $\mathcal{G}$ 的条件期望，并记为

$$Z = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}].$$

在本课程中主要考虑 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$ 为有限集合的情况. 此时任何随机变量 $X: \Omega \to \mathbb{R}$ 都满足可积(integrable)条件. 另外，若 $\mathcal{G} = \sigma(A_1, \cdots, A_m)$ 为包含事件 $A_1, \cdots, A_m$ 最小的 σ 代数，且 $A_1, \cdots, A_m$ 互斥(pairwise disjoint)，即 $A_i \cap A_j = \phi$ 对任何 $i \neq j$ 成立，且 $A_1 \cup \cdots \cup A_m = \Omega$，那么 $Z = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ 可被表示为：

$$Z = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{E}[X|A_i]\mathbb{1}_{A_i} = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\mathbb{P}(A_i)}\mathbb{E}[X\mathbb{1}_{A_i}]\mathbb{1}_{A_i}.$$

证明: 首先, $Z = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{E}[X|A_i] \mathbb{1}_{A_i}$ 必然关于σ代数 $\mathcal{G}$ 可测, 因为:

$A_1, A_2, \cdots, A_m$ 互斥 且 $A_1 \cup \cdots \cup A_m = \Omega$ $\Rightarrow$ Z 取值在集合 $\{\mathbb{E}[X|A_1], \cdots, \mathbb{E}[X|A_m]\}$ 上,

且 $Z(\omega) = \mathbb{E}[X|A_i]$ 当且仅当 $\omega \in A_i$.

因此 $\{Z = \mathbb{E}[X|A_i]\} = A_i \in \mathcal{G} = \sigma(A_1, \cdots, A_n)$ 对任何 $i = 1, \cdots, m$ 成立.

这意味着 Z 关于 $\mathcal{G} = \sigma(A_1, \cdots, A_m)$ 可测.

现任取 $A_k \in \mathcal{G} = \sigma(A_1, \cdots, A_m)$, $k = 1, \cdots, m$, 则有:

$$\mathbb{E}[Z \mathbb{1}_{A_k}] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{m} \mathbb{E}[X|A_i] \mathbb{1}_{A_i}\right) \mathbb{1}_{A_k}\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{m} \mathbb{E}[X|A_i] \left(\mathbb{1}_{A_i} \mathbb{1}_{A_k}\right)\right].$$

由于 $\mathbb{1}_{A_i}(\omega) \mathbb{1}_{A_k}(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{当 } \omega \in A_i \cap A_k \text{ 时;} \\ 0, & \text{其它情况} \end{cases}$, 我们有 $\mathbb{1}_{A_i} \mathbb{1}_{A_k} = \mathbb{1}_{A_i \cap A_k}$;

又由于 $A_i \cap A_k = \phi$ 对任何 $i \neq k$ 成立, 我们可得到:

$$\sum_{i=1}^{m} \mathbb{E}[X|A_i] \mathbb{1}_{A_i} \mathbb{1}_{A_k} = \mathbb{E}[X|A_k] \mathbb{1}_{A_k}.$$

因此, $\mathbb{E}[Z \mathbb{1}_{A_k}] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X|A_k] \mathbb{1}_{A_k}\right]$

$$\overset{\mathbb{E}[X|A_k]\text{为一个常数}}{=} \underbrace{\mathbb{E}[X|A_k]}_{= \mathbb{E}[X \mathbb{1}_{A_k}] \frac{1}{\mathbb{P}(A_k)}} \left(\underbrace{\mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_k}]}_{= \mathbb{P}(A_k)}\right) = \mathbb{E}[X \mathbb{1}_{A_k}] \frac{1}{\cancel{\mathbb{P}(A_k)}} \times \cancel{\mathbb{P}(A_k)}$$

$$= \mathbb{E}[X \mathbb{1}_{A_k}].$$

易验证，若 $A_1, \cdots, A_m$ 互斥且 $A_1 \cup \cdots \cup A_m = \Omega$，则

$$\mathcal{G} = \sigma(A_1, \cdots, A_m) = \{\phi, \Omega, A_1, \cdots, A_m, A_i \cup A_j,\ i,j = 1, \cdots, m,$$
$$A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup A_{i_3},\ i_1, i_2, i_3 = 1, \cdots, m,$$
$$\vdots$$
$$A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \cdots \cup A_{i_{m-1}},\ i_1, \cdots, i_{m-1} = 1, \cdots, m\}.$$

因此，$\mathbb{E}[Z \mathbb{1}_{A_k}] = \mathbb{E}[X \mathbb{1}_{A_k}]$ 对任何 $k = 1, \cdots, m$ 成立 已经可以保证

$$\mathbb{E}[Z \mathbb{1}_B] = \mathbb{E}[X \mathbb{1}_B] \quad \text{对任何 } B \in \mathcal{G} \text{ 成立.}$$

(比如，取 $\underset{(i \neq j)}{B = A_i \cup A_j}$，则有 $\mathbb{E}[Z \mathbb{1}_{A_i \cup A_j}] = \mathbb{E}[Z(\mathbb{1}_{A_i} + \mathbb{1}_{A_j})]$

$$= \mathbb{E}[Z \mathbb{1}_{A_i}] + \mathbb{E}[Z \mathbb{1}_{A_j}]$$

$$= \mathbb{E}[X \mathbb{1}_{A_i}] + \mathbb{E}[X \mathbb{1}_{A_j}] = \mathbb{E}[X(\mathbb{1}_{A_i} + \mathbb{1}_{A_j})]$$

$$= \mathbb{E}[X \mathbb{1}_{A_i \cup A_j}].)$$

现在我们可以推出 $Z = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$. □

例子：(1) $\mathcal{G} = \{\phi, \Omega\}$.

对任何随机变量 $X: \Omega \to \mathbb{R}$，我们有

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \underbrace{\mathbb{E}[X|\phi]\mathbb{1}_\phi}_{=0} + \underbrace{\mathbb{E}[X|\Omega]}_{= \frac{\mathbb{E}[X \mathbb{1}_\Omega]}{\mathbb{P}(\Omega) = 1}} \mathbb{1}_\Omega = \mathbb{E}[X]$$

(因为 $\mathbb{1}_\Omega(\omega) = 1$ 对一切 $\omega \in \Omega$ 成立).

以上结果说明：当 $\mathcal{G}$ 为平凡σ代数时，X 关于 $\mathcal{G}$ 的条件期望为 X 本身的期望.

(2) 设 $\Omega=\{\omega_1,\cdots,\omega_n\}$，$\mathcal{G}=2^{\Omega}=\sigma(\{\omega_1\},\cdots,\{\omega_n\})$.

对任何随机变量 $X:\Omega\to\mathbb{R}$，我们有：（假设 $\mathbb{P}(\{\omega_i\})>0$ 对 $i=1,\cdots,n$ 成立）

$$\mathbb{E}[X\mid\mathcal{G}]=\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\mathbb{E}[X\mid\{\omega_i\}]}_{\frac{1}{\mathbb{P}(\{\omega_i\})}\mathbb{E}[X\mathbb{1}_{\{\omega_i\}}]}\mathbb{1}_{\{\omega_i\}}.$$

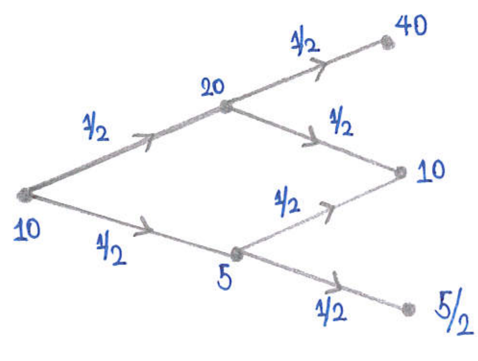
由于 $X(\omega)\underbrace{\mathbb{1}_{\{\omega_i\}}(\omega)}_{=\begin{cases}1, & 若\ \omega=\omega_i;\\ 0, & 若\ \omega\neq\omega_i\end{cases}}=X(\omega_i)\mathbb{1}_{\{\omega_i\}}(\omega)$，$\mathbb{E}[X\mathbb{1}_{\{\omega_i\}}]=\mathbb{E}[X(\omega_i)\mathbb{1}_{\{\omega_i\}}]$

$=X(\omega_i)\mathbb{P}(\{\omega_i\})$，我们又得到：

$$\mathbb{E}[X\mid\mathcal{G}]=\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\mathbb{E}[X\mid\{\omega_i\}]}_{=\frac{1}{\mathbb{P}(\{\omega_i\})}X(\omega_i)\mathbb{P}(\{\omega_i\})}\mathbb{1}_{\{\omega_i\}}=\sum_{i=1}^{n}X(\omega_i)\mathbb{1}_{\{\omega_i\}}=X.$$

以上结果说明：当 $\mathcal{G}$ 为所有子集的集合时，X 关于 $\mathcal{G}$ 的条件期望为 X 本身.

(3)



$\Omega=\{\omega_1=(10,20,40),\ \omega_2=(10,20,10),$
$\omega_3=(10,5,10),\ \omega_4=(10,5,\frac{5}{2})\}$.

$\mathcal{F}_0=\{\phi,\Omega\}$,

$\mathcal{F}_1=\{\phi,\Omega,A_1=\{\omega_1,\omega_2\},A_2=\{\omega_3,\omega_4\}\}=\sigma(A_1,A_2)$,

$\mathcal{F}_2=2^{\Omega}=\sigma(\{\omega_1\},\{\omega_2\},\{\omega_3\},\{\omega_4\})$.

$\mathbb{P}(\{\omega_1\})=\mathbb{P}(\{\omega_2\})=\mathbb{P}(\{\omega_3\})=\mathbb{P}(\{\omega_4\})=\frac{1}{4}$.

S_0, S_1, S_2：股票价格演化过程.

我们计算：(1) $\mathbb{E}[S_1 \mid \mathcal{F}_0] \underset{\mathcal{F}_0=\{\phi,\Omega\}}{\overset{\uparrow}{=}} \mathbb{E}[S_1] = S_1(\omega_1)\mathbb{P}(\{\omega_1\}) + S_1(\omega_2)\mathbb{P}(\{\omega_2\}) + S_1(\omega_3)\mathbb{P}(\{\omega_3\}) + S_1(\omega_4)\mathbb{P}(\{\omega_4\})$

$$= 20\times\frac{1}{4} + 20\times\frac{1}{4} + 5\times\frac{1}{4} + 5\times\frac{1}{4}$$

$$= 12.5.$$

$$\mathbb{E}[S_2 \mid \mathcal{F}_0] = \mathbb{E}[S_2] = \sum_{i=1}^{4} S_2(\omega_i)\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = \frac{1}{4}\left(40+10+10+\frac{5}{2}\right) = 15.625.$$

(2) $\mathbb{E}[S_2 \mid \mathcal{F}_1] \overset{\mathcal{F}_1=\sigma(A_1,A_2)}{=} \mathbb{E}[S_2 \mid A_1]\mathbb{1}_{A_1} + \mathbb{E}[S_2 \mid A_2]\mathbb{1}_{A_2}.$

$$\mathbb{E}[S_2 \mid A_1] = \mathbb{E}[S_2\mathbb{1}_{A_1}]/\underbrace{\mathbb{P}(A_1)}_{=\frac{1}{2}} = 2\,\mathbb{E}[S_2\mathbb{1}_{A_1}] \underset{A_1=\{\omega_1,\omega_2\}}{\overset{\uparrow}{=}} 2\left(S_2(\omega_1)\mathbb{P}(\{\omega_1\}) + S_2(\omega_2)\mathbb{P}(\{\omega_2\})\right)$$

$$= 2\left(40\times\frac{1}{4} + 10\times\frac{1}{4}\right) = 25;$$

$$\mathbb{E}[S_2 \mid A_2] = \mathbb{E}[S_2\mathbb{1}_{A_2}]/\underbrace{\mathbb{P}(A_2)}_{=\frac{1}{2}} = 2\,\mathbb{E}[S_2\mathbb{1}_{A_2}] \underset{A_2=\{\omega_3,\omega_4\}}{\overset{\uparrow}{=}} 2\left(S_2(\omega_3)\mathbb{P}(\{\omega_3\}) + S_2(\omega_4)\mathbb{P}(\{\omega_4\})\right)$$

$$= 2\left(10\times\frac{1}{4} + \frac{5}{2}\times\frac{1}{4}\right) = 6.25.$$

$$\Rightarrow \underline{\mathbb{E}[S_2 \mid \mathcal{F}_1] = 25\,\mathbb{1}_{A_1} + 6.25\,\mathbb{1}_{A_2}}.$$

当事件A_1发生时，可知$t=2$时刻的股票平均价格为$25=\frac{1}{2}(40+10)$

当事件A_2发生时，可知$t=2$时刻的股票平均价格为$6.25=\frac{1}{2}(10+\frac{5}{2})$.

定理 1.21. 设 $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 为一个可积随机变量，$\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ 为包含于 $\mathcal{F}$ 的一个 σ代数.

(1) 存在 $Z = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ 为 X 关于 $\mathcal{G}$ 的条件期望.

(2) 若 Z 与 Z' 为 X 关于 $\mathcal{G}$ 的条件期望，那么 $Z = Z'$（$\mathbb{P}$-a.s. / 几乎处处相等).

(3) 若 $X \geq 0$，则 $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \geq 0$ ($\mathbb{P}$-a.s.).

(4) 若 $Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$，$a$，$b$ 为实数，则

$$\mathbb{E}[aX + bY \mid \mathcal{G}] = a\,\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] + b\,\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}] \quad (\mathbb{P}\text{-a.s.})$$

(5) 若 $Y: \Omega \to \mathbb{R}$ 满足 $XY \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 且 Y 关于 $\mathcal{G}$ 可测，那么

$$\mathbb{E}[XY|\mathcal{G}] = Y\,\mathbb{E}[X|\mathcal{G}].$$

(6) $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]] = \mathbb{E}[X]$.

(7) 若 $\mathcal{H} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{F}$，$\mathcal{H}$ 为包含于 $\mathcal{G}$ 的一个 σ代数，那么

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \mid \mathcal{H}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{H}], \quad \text{(Tower Property)}.$$

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{H}] \mid \mathcal{G}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{H}].$$

(8) 设 $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为一个凸函数 (Convex function)，即对任何 $x, y \in \mathbb{R}$，$\lambda \in [0,1]$，有 $\varphi(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(y)$，且 $\varphi(X) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$，那么有

$$\mathbb{E}[\varphi(X) \mid \mathcal{F}] \geq \varphi(\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]). \quad \text{(条件 Jensen 不等式)}.$$

令 $\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$ 为有限集合，且 $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) > 0$ 对一切 $i = 1, \cdots, n$.

对 $X: \Omega \to \mathbb{R}$，定义它的 L^2 范数 (L^2 norm) 为:

$$\|X\|_{L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})} = \left(X(\omega_1)^2 \mathbb{P}(\{\omega_1\}) + \cdots + X(\omega_n)^2 \mathbb{P}(\{\omega_n\}) \right)^{1/2} = \left(\mathbb{E}[X^2]\right)^{1/2}$$

对 $X, Y: \Omega \to \mathbb{R}$，它们之间的 L^2 距离 (L^2 distance) 为:

$$\|X - Y\|_{L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})} = \left(\left(X(\omega_1) - Y(\omega_1)\right)^2 \mathbb{P}(\{\omega_1\}) + \cdots + \left(X(\omega_n) - Y(\omega_n)\right)^2 \mathbb{P}(\{\omega_n\}) \right)^{1/2}.$$

$$= \mathbb{E}[|X|]$$

相应的，我们定义 X 的 L^1 norm 与 X 与 Y 之间的 L^1 distance 为:

$$\|X\|_{L^1(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})} = |X(\omega_1)| \mathbb{P}(\{\omega_1\}) + \cdots + |X(\omega_n)| \mathbb{P}(\{\omega_n\}),$$

$$\|X - Y\|_{L^1(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})} = |X(\omega_1) - Y(\omega_1)| \mathbb{P}(\{\omega_1\}) + \cdots + |X(\omega_n) - Y(\omega_n)| \mathbb{P}(\{\omega_n\}).$$

下面这个定理揭示了条件期望的几何与经济上的意义:

定理 1.22: 设 $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$，即 $\|X\|_{L^2} < \infty$；$\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ 为一个包含于 $\mathcal{F}$ 的 σ 代数. 那么对于任何关于 $\mathcal{G}$ 可测且 L^2 可积的随机变量 Z (即 $\|Z\|_{L^2} < \infty$)，有:

$$\|X - Z\|_{L^2} \geq \|X - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\|_{L^2}.$$

这意味着，$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ 是在信息集合为 $\mathcal{G}$ 的情况下对 X 最好的预测 (关于 L^2 距离).

证明: 首先，由条件 Jensen 不等式 ($x \mapsto x^2$ 为凸函数)，可得

$$\left(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\right)^2 \leq \mathbb{E}[(X)^2 | \mathcal{G}].$$

又由定理 1.21 (6)，可得 $\mathbb{E}[(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}])^2] \leq \mathbb{E}[\mathbb{E}[X^2|\mathcal{G}]] = \mathbb{E}[X^2] \underset{\substack{\uparrow \\ \text{因为假设 } X \in L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})}}{<} \infty$

这意味着 条件期望 $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \in L^2$.

设 Z 关于 $\mathcal{G}$ 可测，且 $\|Z\|_{L^2} = \mathbb{E}[|Z|^2]^{\frac{1}{2}} < \infty$. 那么有：

$$\mathbb{E}[(X-Z)^2] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] + \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] - Z)^2]$$

$$= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}])^2] + 2\,\underline{\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}])(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] - Z)]}$$

$$+ \mathbb{E}[(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] - Z)^2].$$

注意：$\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}])(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] - Z)] = \mathbb{E}[X(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] - Z)] - \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}](\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] - Z)]$

由 <u>定理 1.21 (5)</u> 可得：

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}](\underbrace{\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] - Z}_{\text{关于 } \mathcal{G} \text{ 可测}}) = \mathbb{E}[X(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] - Z) \,|\, \mathcal{G}],$$

由 <u>定理 1.21 (6)</u> 可得：$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}](\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] - Z)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] - Z) \,|\, \mathcal{G}]]$

$$= \mathbb{E}[X(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] - Z)].$$

因此 $\underline{\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}])(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] - Z)]} = \mathbb{E}[X(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] - Z)] - \underbrace{\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}](\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] - Z)]}_{= \mathbb{E}[X(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] - Z)]}$

$$= \underline{0}.$$

因此 $\mathbb{E}[(X-Z)^2] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}])^2] + \mathbb{E}[(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] - Z)^2].$

显然，$\mathbb{E}[(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] - Z)^2] \geq 0$ ($= 0$ 当且仅当 $Z = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$)，故：

$$\mathbb{E}[(X-Z)^2] \geq \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X|\mathcal{G}])^2],$$

且"="成立当且仅当 $Z=\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$.

□

定义 1.23: 设 $(S_0, S_1, \cdots, S_T)$ 为定义在 $(\Omega, \mathbb{F}=(\mathcal{F}_t)_{t=0,1,\cdots,T}, \mathbb{P})$ 上的随机过程,(即 S_t 关于 $\mathcal{F}_t$ 可测,对所有 $t=0,1,\cdots,T$). 假设 $S_0\in L^1$, $S_1\in L^1$, $\cdots$, $S_T\in L^1$. 我们说 $(S_0, S_1, \cdots, S_T)$ 为关于信息流 $\mathbb{F}$ 与测度 $\mathbb{P}$ 的鞅 (martingale) 当它满足:

$$\mathbb{E}[S_t \mid \mathcal{F}_{t-1}] = S_{t-1} \quad \text{对任何 } t=1,2,\cdots,T \text{ 成立}.$$

由 Tower Property (定理 1.21 (7)), 可知对任何 $s\leq t$, 都有

$$\mathbb{E}[S_t \mid \mathcal{F}_s] = S_s.$$

若 $(S_0, S_1, \cdots, S_T)$ 为一个股票价格演化过程, 该随机过程是一个鞅 (martingale) 说明, 在 $t-1$ 时刻, 利用 $t-1$ 时刻可用的信息 $\mathcal{F}_{t-1}$, 对股票在 t 时刻价格的最佳预测恰好是股票在 $t-1$ 时刻的价格:

$$\mathbb{E}[S_t \mid \mathcal{F}_{t-1}] = S_{t-1}.$$

且该性质对任何时刻 $t=1,\cdots,T$ 均成立.

显然, 这也说明: $\mathbb{E}[S_t - S_{t-1} \mid \mathcal{F}_{t-1}] = 0$, 即, 基于 $t-1$ 时刻的信息 $\mathcal{F}_{t-1}$, 股价从 $t-1$ 时刻到 t 时刻的平均变动预计为 0.

这是否说明, 若股价演化过程是一个鞅, 那么这个股票不存在任何套利的空间?

→ 待回答.

定义 1.24. 假设随机过程 $(S_0, S_1, \cdots, S_T)$ 满足：S_t 关于 $\mathcal{F}_t$ 可测 $(t=0,1,\cdots,T)$，且 $S_0 \in L^1, \cdots, S_T \in L^1$.

(1) $(S_0, S_1, \cdots, S_T)$ 是一个(关于 $\mathbb{F}$ 与 $\mathbb{P}$) 下鞅 (submartingale)，当它满足：

$$\mathbb{E}[S_t \mid \mathcal{F}_{t-1}] \geq S_{t-1} \quad \text{对所有 } t=1,\cdots,T \text{ 成立;}$$

(2) $(S_0, S_1, \cdots, S_T)$ 是一个(关于 $\mathbb{F}$ 与 $\mathbb{P}$) 上鞅 (supermartingale)，当它满足：

$$\mathbb{E}[S_t \mid \mathcal{F}_{t-1}] \leq S_{t-1} \quad \text{对所有 } t=1,\cdots,T \text{ 成立.}$$

显然，若 $(S_0, S_1, \cdots, S_T)$ 为一个下鞅，则 $(-S_0, -S_1, \cdots, -S_T)$ 为一个上鞅，反之亦然.

若 $(S_0, S_1, \cdots, S_T)$ 同时是下鞅与上鞅，则它是鞅.

习题：利用条件 Jensen 不等式 (定理 1.21 (8)) 证明：

若 $(S_0, S_1, \cdots, S_T)$ 为一个鞅，且 $S_0 \in L^2$, $S_1 \in L^2$, $\cdots$, $S_T \in L^2$.
那么 $(|S_0|, |S_1|, \cdots, |S_T|)$ 与 $(S_0^2, S_1^2, \cdots, S_T^2)$ 是下鞅 (submartingale).