随机积分简介

目录

1 连续时间上的随机过程

假设$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\infty)}, \mathbb{P})$为一个给定的概率空间，$\mathcal{F}$为给定的$\sigma$代数，$\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\infty)}$为给定的一个filtration，$\mathbb{P}$为给定概率测度。令$\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$为$\mathbb{R}_+ := [0,\infty)$上的Borel σ-代数。任何关于$\mathcal{F}\times\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$可测的实数值函数

$$X : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad (\omega, t) \mapsto X(\omega, t)$$

都被称为$\mathbb{R}_+$上的**随机过程**。通常我们将$X(\omega,t)$**记为**$X_t(\omega)$。我们称随机过程X适应于(adapted to)$\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$，如果对于任何时间$t \geq 0$，随机变量$X_t : \Omega \to \mathbb{R}, \omega \mapsto X_t(\omega)$关于$\mathcal{F}_t$可测。我们称随机过程$X$为连续的随机过程，如果对于每个$\omega \in \Omega$，函数

$$t \mapsto X_t(\omega) = X(\omega, t)$$

关于时间$t \in \mathbb{R}_+$连续。我们也称函数$t \mapsto X_t(\omega)$为X在场景ω发生时的轨道(trajectory, sample path)。在本课程中，我们仅考虑**适应于$\mathbb{F}$且连续的随机过程**X，并将其也写为$X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$或$X = (X_t)_{t\geq 0}$。

注意，对于任何适应于$\mathbb{F}$且连续的随机过程X，令$C := C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$为所有定义在$\mathbb{R}_+$的连续实数值函数的集合，那么我们可以将$X$视为取值在$C$上的随机变量，即

$$X : \Omega \to C, \quad X(\omega) \in C, \quad X(\omega)(t) = X(\omega, t) = X_t(\omega) \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

我们称空间C为**canonical space**。在C上我们定义所谓的**canonical process**$Y: C \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$，满足

$$\forall w \in C, \quad Y(w,t) = Y_t(w) := w(t).$$

即对于任何定义在$\mathbb{R}_+$上的连续函数$w \in C$，$Y_t(w)$给出了函数w在t上的取值$w(t)$。显然对于$\mathcal{G}_t = \sigma(Y_s, s \le t)$，我们有$Y$适应于$(\mathcal{G}_t)_{t\ge 0}$并且$Y$是一个连续的随机过程。

我们定义$\mathcal{G} = \sigma(Y_t, t \ge 0)$为$C$上的**canonical σ-algebra**。若X为定义在另一个概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\infty)}, \mathbb{P})$上的连续随机过程，那么定义在$\mathcal{G}$上的概率测度

$$\mathbb{Q} := X_\sharp(\mathbb{P}), \quad \forall A \in \mathcal{G}, \quad \mathbb{Q}(A) := \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\})$$

被称为**随机过程X的分布(law of X)**。

练习： 假设X是定义在$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\infty)}, \mathbb{P})$上的布朗运动(Brownian motion)，那么对于$W_0 := X_\sharp(\mathbb{P})$，canonical process $Y = (Y_t)_{t\ge 0}$为定义在$(C, \mathcal{G}, (\mathcal{G}_t)_{t\in[0,\infty)}, W_0)$上的布朗运动。我们称$W_0$为Wiener measure。

注意以上定义对取值在$\mathbb{R}^d$上的随机过程X依然适用。此时只需将C改为$C = C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$。

2 连续时间上的鞅

假设$X = (X_t)_{t\ge 0}$为定义在$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\infty)}, \mathbb{P})$上的一个适应于$\mathbb{F}$且连续的随机过程。我们称其为一个连续鞅(continuous martingale)，如果它满足：

1. 对任何$t \ge 0$，X_t关于$\mathcal{F}_t$可测，即对任何Borel集合$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$，$X_t^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega : X_t(\omega) \in A\} \in \mathcal{F}_t$ (该性质其实是要求X适应于$\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\ge 0}$)；
2. 对任何$t \ge 0$，$\mathbb{E}[|X_t|] < \infty$ (可积性)；
3. 对任何$s < t$，$\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s$ (鞅性质)；
4. 对任何$\omega \in \Omega$，$t \in [0,\infty) \mapsto X_t(\omega) \in \mathbb{R}$为一个关于$t$的连续函数 (该性质其实是要求$X$是连续的随机过程)。

除此之外，假设$X_t, t \ge 0$满足

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ = [0, \infty), \quad \mathbb{E}[X_t^2] < \infty.$$

若X满足以上性质，那么称其为**continuous square integrable martingale**。

Definition 2.1. 令$\mathcal{D}_n(t) = \{0 = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_{k_n}^n = t\}$，$n \geq 1$为时间区间$[0, t]$的一组划分，且$|\mathcal{D}_n(t)| = \max_{k=0,\ldots,k_n-1} |t_{k+1}^n - t_k^n| \to 0$(当$n \to \infty$)。那么对任何*continuous square integrable martingale*，存在一个连续的随机过程$[X, X]_t$满足

$$\mathbb{P} - \lim_{n\to\infty} \sum_{k\in\mathcal{D}_n(t)} (X_{t_{k+1}^n} - X_{t_k^n})^2 = [X, X]_t,$$

即$\sum_{k\in\mathcal{D}_n(t)} (X_{t_{k+1}^n} - X_{t_k^n})^2$**依测度收敛于**$[X, X]_t$。此外，对任何$t \in \mathbb{R}_+$，$[X, X]_t$关于$\mathcal{F}_t$可测；并且$t \mapsto [X, X]_t(\omega)$为递增函数，即对于$s \leq t$，$[X, X]_s(\omega) \leq [X, X]_t(\omega)$。我们称随机过程$[X, X]_t, t \geq 0$为$X$的**二阶变分*(quadratic variation)***。
若$Y_t, t \geq 0$为另一个*continuous square integrable martingale*，那么存在一个连续的随机过程$[X, Y]_t$满足

$$\mathbb{P} - \lim_{n\to\infty} \sum_{k\in\mathcal{D}_n(t)} (X_{t_{k+1}^n} - X_{t_k^n})(Y_{t_{k+1}^n} - Y_{t_k^n}) = [X, Y]_t,$$

对任何$t \in \mathbb{R}_+$，$[X, Y]_t$关于$\mathcal{F}_t$可测；并且$t \mapsto [X, Y]_t(\omega)$在任何有限时间区间$[0, T]$上都有有限的一阶变分*(total variation)*，即对于$T > 0$，

$$\|[X, Y](\omega)\|_{1\text{-}var,T} := \lim_{n\to\infty} \sum_{k\in\mathcal{D}_n(T)} |[X, Y]_{t_{k+1}^n}(\omega) - [X, Y]_{t_k^n}(\omega)| < \infty.$$

我们称随机过程$[X, Y]_t, t \geq 0$为X与Y的**二阶协变分*(quadratic covariation)***。
注意$[X, X]_0 = 0$。

Theorem 2.2. 对于任何*continuous square integrable martingale*$X_t, t \geq 0$，都有

$$X_t^2 - [X, X]_t, t \geq 0$$

是一个*martingale*。
对于任何*continuous square integrable martingales*$X_t, t \geq 0$与$Y_t, t \geq 0$，都有

$$X_t Y_t - [X, Y]_t, t \geq 0$$

是一个*martingale*。
特别地，如果$X_0 = 0, Y_0 = 0$，对任何$t \geq 0$，都有

$$\mathbb{E}[X_t^2] = \mathbb{E}[[X, X]_t], \quad \mathbb{E}[X_t Y_t] = \mathbb{E}[[X, Y]_t].$$

3 可求长的随机过程

假设$A = (A_t)_{t\geq 0}$为定义在$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\infty)}, \mathbb{P})$上的一个适应于$\mathbb{F}$且连续的随机过程。我们称其为一个可求长的随机过程/具有有限一阶变分的随机过程(finite variation process)，如果它满足：

- 对任何$t \geq 0$，$\|A(\omega)\|_{\text{1-var},t} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k\in\mathcal{D}_n(t)} |A_{t^n_{k+1}}(\omega) - A_{t^n_k}(\omega)| < \infty$。

容易证明，对于任何可求长的随机过程A，它的一阶变分所形成的的随机过程

$$(\omega, t) \mapsto \|A(\omega)\|_{\text{1-var},t}$$

适应于$\mathbb{F}$且连续，并且对任何$s < t$，都有$\|A(\omega)\|_{\text{1-var},t} \geq \|A(\omega)\|_{\text{1-var},s}$，即$t \mapsto \|A(\omega)\|_{\text{1-var},t}$对任何$\omega \in \Omega$都是关于时间$t$的递增函数。像$\|A(\omega)\|_{\text{1-var},t}$这样具有递增轨道的随机过程被称为递增的随机过程，类似地我们可定义递减的随机过程。**显然任何递增或者递减的随机过程都是可求长的随机过程。**

练习： 证明对任何可求长的随机过程A，都存在两个递增的随机过程B和C使得

$$A_t(\omega) = B_t(\omega) - C_t(\omega)$$

对任何$(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+$成立。

注意，对任何递增的随机过程A，任何$\omega \in \Omega$，我们可以定义一个$\mathbb{R}_+$上的**测度**，记为$dA_t(\omega)$，它满足对于任何区间$[s, t]$，

$$dA_t(\omega)([s, t]) := A_t(\omega) - A_s(\omega).$$

由于这样的区间$[s, t]$生成了整个$\mathbb{R}_+$上的Borel σ代数$\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$，我们知道$dA_t(\omega)$可以定义在整个$\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$上。

Definition 3.1. 对于一个随机过程$H = H(\omega, t)$，一个**递增**的随机过程$A(\omega, t)$，我们称H**关于**A**可积**，记为$H \in L^1(A)$，如果对于任何$\omega \in \Omega$，任何$t > 0$，都有

$$\int_0^t |H_s(\omega)| dA_s(\omega) = \int_{[0,t]} |H_s(\omega)| dA_s(\omega) < \infty.$$

这里$\int_0^t |H_s(\omega)| dA_s(\omega)$是*Lebesgue积分*。类似地，对于一个随机过程$H = H(\omega, t)$，一个**可求长**的随机过程$A(\omega, t)$，我们称H**关于**A**可积**，记为$H \in L^1(A)$，如果对于任何$\omega \in \Omega$，任何$t > 0$，都有

$$\int_0^t |H_s(\omega)| dB_s(\omega) < \infty, \quad \int_0^t |H_s(\omega)| dC_s(\omega) < \infty,$$

这里B和C为递增随机过程且满足$A = B - C$，见之前的练习题。
对于可求长的随机过程A以及$H \in L^1(A)$，可知*Lebesgue*积分$\int_0^t H_s(\omega) dA_s(\omega) = \int_{[0,t]} H_s(\omega) dA_s(\omega)$存在。我们称这样得到的随机过程

$$\int_0^\cdot H_s dA_s(\omega, t) = (\int_0^t H_s dA_s)(\omega) := \int_0^t H_s(\omega) dA_s(\omega)$$

为H关于A的随机积分(*stochastic integral*)。

显然，如果$H = H(\omega, t)$为连续的随机过程，那么这样的$H \in L^1(A)$对任何可求长的随机过程A成立。因为

- 因为$t \mapsto H_t(\omega)$关于t连续，所以对任何$\omega \in \Omega$，$H_t(\omega)$是关于t的可测函数；
- 因为$t \mapsto H_t(\omega)$关于t连续，而连续函数在任何紧致的集合$[0, t]$上有限，故有

$$\int_0^t |H_s(\omega)| dA_s(\omega) \leq \sup_{s \in [0,t]} |H_s(\omega)| (\|B(\omega)\|_{\text{1-var},t} + \|C(\omega)\|_{\text{1-var},t}) < \infty.$$

这里我们注意，对于可求长的随机过程A以及关于A可积的随机过程H，它们之间的随机积分

$$\left(\int_0^t H_s dA_s\right)(\omega) := \int_0^t H_s(\omega) dA_s(\omega)$$

是逐轨道(path by path)定义的 (逐轨道的意思是可以对任何一个$\omega \in \Omega$进行积分$(\int_0^t H_s dA_s)(\omega)$的定义)。

练习： 对任何适应于$\mathbb{F}$且连续的可求长过程A，若$H \in L^1(A)$额外满足H适应于$\mathbb{F}$，那么随机积分$\int_0^{\cdot} H_s dA_s(\omega, t)$也适应于$\mathbb{F}$且连续。

4 Itô 积分

接下来我们想对给定的一个continuous square integrable martingale 定义随机积分。然而以下定理告诉我们，这样的随机积分一般无法逐轨道地定义。

Theorem 4.1. *如果一个continuous square integrable martingale，记为X，可求长，那么必然有$X_t = X_0$ (almost surely)对任何$t \in \mathbb{R}_+$成立。*

证明. 通过考虑$X_t - X_0$，我们不妨假设$X_0 = 0$。由于X_t^2的期望存在，对给定的时间$t > 0$以及任何划分$\mathcal{D}(t) = \{0 = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_{k_n}^n = t\}$，都有

$$\mathbb{E}[X_t^2] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=0}^{k_n - 1} (X_{t_{k+1}^n} - X_{t_k^n})\right)^2\right].$$

注意，对于任何$k \geq j+1$，由X的鞅性质，即$\mathbb{E}[X_{t_{k+1}^n} - X_{t_k^n} | \mathcal{F}_{t_{j+1}^n}] = X_{t_{j+1}^n} - X_{t_{j+1}^n} = 0$可得

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(X_{t_{k+1}^n} - X_{t_k^n})(X_{t_{j+1}^n} - X_{t_j^n})] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_{t_{k+1}^n} - X_{t_k^n} | \mathcal{F}_{t_{j+1}^n}](X_{t_{j+1}^n} - X_{t_j^n})] \\
&= \mathbb{E}[(X_{t_{j+1}^n} - X_{t_{j+1}^n})(X_{t_{j+1}^n} - X_{t_j^n})] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

因此，容易验证

$$\mathbb{E}\bigg[\bigg(\sum_{k=0}^{k_n-1}(X_{t_{k+1}^n}-X_{t_k^n})\bigg)^2\bigg]=\mathbb{E}\bigg[\sum_{k=0}^{k_n-1}(X_{t_{k+1}^n}-X_{t_k^n})^2\bigg].$$

显然，对于每个$k=0,\dots,k_n-1$，都有(注意我们这里为了记号简单，省去了ω)

$$\sum_{k=0}^{k_n-1}(X_{t_{k+1}^n}-X_{t_k^n})^2\le\sup_{k=0,\dots,k_n-1}|X_{t_{k+1}^n}-X_{t_k^n}|\sum_{k=0}^{k_n-1}|X_{t_{k+1}^n}-X_{t_k^n}|\le\sup_{k=0,\dots,k_n-1}|X_{t_{k+1}^n}-X_{t_k^n}|\|X\|_{\text{1-var},t}.$$

由于X具有连续的轨道，若$|\mathcal{D}(t)|\to 0$，那么$\lim_{n\to\infty}\sup_{k=0,\dots,k_n-1}|X_{t_{k+1}^n}(\omega)-X_{t_k^n}(\omega)|=0$；由于假设$X$可求长，因此$\|X(\omega)\|_{\text{1-var},t}<\infty$。综上，对任何$\omega\in\Omega$，都有

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{k=0,\dots,k_n-1}|X_{t_{k+1}^n}-X_{t_k^n}|\|X\|_{\text{1-var},t}=0.$$

另一方面，我们假设存在一个整数m使得对任何$\omega\in\Omega$，都有

$$\|X\|_{\text{1-var},t}\le m.$$

在这种假设下，可知

$$\sup_{k=0,\dots,k_n-1}|X_{t_{k+1}^n}-X_{t_k^n}|\|X\|_{\text{1-var},t}\le\sup_{k=0,\dots,k_n-1}(|X_{t_{k+1}^n}|+|X_{t_k^n}|)m\le 2m^2,$$

故由控制收敛定理(dominated convergence theorem)可得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_t^2]&=\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\bigg[\bigg(\sum_{k=0}^{k_n-1}(X_{t_{k+1}^n}-X_{t_k^n})\bigg)^2\bigg]\\&=\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\bigg[\sum_{k=0}^{k_n-1}(X_{t_{k+1}^n}-X_{t_k^n})^2\bigg]\\&=\mathbb{E}\bigg[\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{k_n-1}(X_{t_{k+1}^n}-X_{t_k^n})^2\bigg]\\&=0.\end{aligned}$$

这当然意味着$X_t=0$。

对于一般的X，对每个整数$m\ge 1$，定义停时

$$\tau_m(\omega):=\inf\{t\ge 0:\|X(\omega)\|_{\text{1-var},t}\le m\}.$$

那么对于停止于τ_m的随机过程$X^{\tau_m}(\omega,t)=X(\omega,\tau(\omega)\wedge t)(r\wedge t:=\min(r,t))$，在任何时间区间$[0,t]$上它依然是一个连续鞅(这个结论被称为optional stopping theorem)，并且显然有$\|X^{\tau_m}(\omega)\|_{\text{1-var},t}\le m$对任何$\omega\in\Omega$都成立。因此由以上分析可知对任何$\tau_m$都有

$$X_t^{\tau_m}=X_{t\wedge\tau_m}=0.$$

容易验证$\lim_{m\to\infty}\tau_m=\infty$，因此可得

$$\lim_{m\to\infty} X_{t\wedge\tau_m}=X_t=0.$$

证毕。 $\square$

以上证明中使用停时部分的技巧叫做局部化(localization)。

以上定理告诉我们，由于连续鞅X不可求长，我们无法对关于连续鞅的积分$\int_0^t H_s dX_s$进行逐轨道的定义，因为即使是Lebesgue积分也无法处理这种情况。因此，我们需要对连续鞅构造一种全新的积分定义方式，即Itô积分。

Basic Processes 一个定义在$(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{F}=(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+},\mathbb{P})$上的随机过程$H(\omega,t)$被称为一个basic process，若它可以表示为

$$H(\omega,t)=C(\omega)1_{(a,b]}(t),$$

其中$a<b$为$\mathbb{R}_+$中的两个实数，$C:\Omega\to\mathbb{R}$为关于$\mathcal{F}_a$可测的有界随机变量。我们用Λ_0指代所有basic process的集合。对于basic process $H=C1_{(a,b]}$，我们定义随机积分$\int_0^\infty H_t dX_t$为以下随机变量

$$\int_0^\infty H_s dX_s(\omega):=C(\omega)(X_b(\omega)-X_a(\omega)).$$

对于任何时间$t\geq 0$，我们定义

$$\int_0^t H_s dX_s(\omega):=\int_0^\infty H_s 1_{[0,t]}(s)dX_s(\omega)=C(\omega)(X_{b\wedge t}(\omega)-X_{a\wedge t}(\omega)).$$

由于随机变量C关于$\mathcal{F}_a$可测且有界(即$\|C\|_{L^\infty(\mathbb{P})}<\infty$)，且由Theorem 2.2中提及的性质$X_t^2-[X,X]_t,t\geq 0$为连续鞅，我们容易验证：

- 对任何$t\geq 0$，$\omega\mapsto\int_0^t H_s dX_s(\omega)$关于$\mathcal{F}_t$可测；
- 对于任何$\omega\in\Omega$，$t\mapsto\int_0^t H_s dX_s(\omega)=C(\omega)(X_{b\wedge t}(\omega)-X_{a\wedge t}(\omega))$关于时间$t$连续；

- 计算可得

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[(\int_0^\infty H_s dX_s)^2] &= \mathbb{E}[C^2(X_b - X_a)^2] \\
&= \mathbb{E}[C^2\mathbb{E}[(X_b - X_a)^2|\mathcal{F}_a]] \\
&= \mathbb{E}[C^2\mathbb{E}[(X_b^2 - 2X_bX_a + X_a^2|\mathcal{F}_a]] \\
&= \mathbb{E}[C^2(\mathbb{E}[X_b^2|\mathcal{F}_a] - 2\mathbb{E}[X_b|\mathcal{F}_a]X_a + X_a^2)] \\
&= \mathbb{E}[C^2(\mathbb{E}[X_b^2|\mathcal{F}_a] - 2X_a^2 + X_a^2)] \quad (\mathbb{E}[X_b|\mathcal{F}_a] = X_a) \\
&= \mathbb{E}[C^2(\mathbb{E}[X_b^2|\mathcal{F}_a] - X_a^2)] \\
&= \mathbb{E}[C^2(\underbrace{\mathbb{E}[X_b^2 - [X,X]_b|\mathcal{F}_a]}_{(=X_a^2-[X,X]_a)} - X_a^2 + \mathbb{E}[[X,X]_b|\mathcal{F}_a])] \\
&= \mathbb{E}[C^2(X_a^2 - [X,X]_a - X_a^2 + \mathbb{E}[[X,X]_b|\mathcal{F}_a])] \\
&= \mathbb{E}[C^2(\mathbb{E}[[X,X]_b - [X,X]_a|\mathcal{F}_a])] \\
&= \mathbb{E}[C^2([X,X]_b - [X,X]_a)] \\
&= \mathbb{E}[\int_0^\infty H_s^2 d[X,X]_s].
\end{aligned}
$$

类似可证，对于任何时间$t \geq 0$都有

$$\mathbb{E}[(\int_0^t H_s dX_s)^2] = \mathbb{E}[\int_0^t H_s^2 d[X,X]_s].$$

以上计算告诉我们，对于basic process $H : \Omega\times\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$， $H(\omega,t) = C(\omega)1_{(a,b]}(t)$，由于$X$是continuous square integrable martingale因此由Theorem 2.2满足$\mathbb{E}[[X,X]_b - [X,X]_a] = \mathbb{E}[[X,X]_b] - \mathbb{E}[[X,X]_a] = \mathbb{E}[X_b^2] - \mathbb{E}[X_a^2] < \infty$，我们有

$$\mathbb{E}[(\int_0^\infty H_s dX_s)^2] = \mathbb{E}[\int_0^\infty H_s^2 d[X,X]_s] \leq \|C\|^2_{L^\infty(\mathbb{P})}\mathbb{E}[[X,X]_b - [X,X]_a] < \infty,$$

也即

1. $H \in \Lambda_0 \subset L^2(\Omega\times\mathbb{R}_+, \mathcal{F}\times\mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \mathbb{P}\times[X,X])$，这里$[X,X]\times\mathbb{P}$是定义在$\mathcal{F}\times\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$的一个测度，它满足对于任何$E\in\mathcal{F}, F\in\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$，

$$(\mathbb{P}\times[X,X])(E\times F) = \int_{\omega\in E}\int_{t\in F} d[X,X]_t(\omega)d\mathbb{P}(\omega).$$

2. $\int_0^\infty H_s dX_s \in L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$且有

$$\left\| \int_0^\infty H_s dX_s \right\|_{L^2(\mathbb{P})} = \|H\|_{L^2([X,X]\times\mathbb{P})}.$$

我们用$I_X : \Lambda_0 \to L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$来指代随机积分映射

$$I_X(H) = \int_0^\infty H_s dX_s.$$

那么以上等式可以记为

$$\|I_X(H)\|_{L^2(\mathbb{P})} = \|H\|_{L^2([X,X]\times\mathbb{P})}.$$

- $\int_0^t H_s dX_s = C(X_{b\wedge t} - X_{a\wedge t}), t \geq 0$是一个鞅。

综上，我们得到的这个**随机积分**$\int_0^t H_s dX_s, t \geq 0$**与**$X$**一样，是一个continuous square integrable martingale**。那么由Theorem 2.2可知存在它的二阶变分$[\int_0^\cdot H_s dX_s, \int_0^\cdot H_s dX_s]$。

练习： 证明对于任何的basic process $H \in \Lambda_0$ 都有

$$(\int_0^t H_s dX_s)^2 - \int_0^t H_s^2 d[X,X]_s, \quad t \geq 0$$

是一个连续鞅，因此$[\int_0^\cdot H_s dX_s, \int_0^\cdot H_s dX_s]_t = \int_0^t H_s^2 d[X,X]_s$。类似地，对任何$H \in \Lambda_0$与$K \in \Lambda_0$，我们有$HK(\omega,t) = H(\omega,t)K(\omega,t)$也是一个basic process，且

$$(\int_0^t H_s dX_s)(\int_0^t K_s dX_s) - \int_0^t H_s K_s d[X,X]_s, \quad t \geq 0$$

是一个连续鞅，因此$[\int_0^\cdot H_s dX_s, \int_0^\cdot K_s dX_s]_t = \int_0^t H_s K_s d[X,X]_s$。

作为特例，如果X是布朗运动，那么$[X,X]_t = t$。此时我们有

$$\|I_X(H)\|_{L^2(\mathbb{P})} = \|H\|_{L^2(dt\times\mathbb{P})}$$

Simple Processes 一个定义在$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}, \mathbb{P})$上的随机过程$H(\omega,t)$被称为一个simple process，若存在若干个basic processes $H^1, H^2, \ldots, H^n \in \Lambda_0$使得

$$H(\omega,t) = H^1(\omega,t) + H^2(\omega,t) + \ldots + H^n(\omega,t).$$

我们将所有simple processes 的集合记为Λ_1。假设$H^1(\omega,t) = C(\omega)1_{(a,b]}(t)$，$H^2(\omega,t) = D(\omega)1_{(c,d]}(t)$，假如$a < c < b < d$，那么我们可以将$H^1(\omega,t) + H^2(\omega,t)$表示为

$$H^1(\omega,t) + H^2(\omega,t) = C(\omega)1_{(a,c]}(t) + (C(\omega) + D(\omega))1_{(c,b]}(t) + D(\omega)1_{(b,d]}(t),$$

其中时间区间$(a,c]$，$(c,b]$与$(b,d]$互斥。因此以上计算暗示我们不妨假设$H(\omega,t) = H^1(\omega,t)+H^2(\omega,t)+\ldots+H^n(\omega,t)$中出现的basic processes $H^i(\omega,t) = C_i(\omega)1_{(a_i,b_i]}(t)$，$i = 1,\ldots,n$满足$(a_i,b_i] \cap (a_j,b_j] = \emptyset$，当$i \neq j$时。

对于$H\in\Lambda_1$且$H(\omega,t)=H^1(\omega,t)+H^2(\omega,t)+\ldots+H^n(\omega,t)$, 我们直接定义它关于$X$的随机积分为

$$I_X(H)=\int_0^\infty H_s dX_s=\sum_{i=1}^n\int_0^\infty H_s^i dX_s=\sum_{i=1}^n I_X(H^i).$$

由于我们可以假设$H(\omega,t)=H^1(\omega,t)+H^2(\omega,t)+\ldots+H^n(\omega,t)$中出现的basic processes $H^i(\omega,t)=C_i(\omega)1_{(a_i,b_i]}(t)$，$i=1,\ldots,n$满足$(a_i,b_i]\cap(a_j,b_j]=\emptyset$(当$i\neq j$时)，当$H(\omega,t)=0$对所有$(\omega,t)\in\Omega\times\mathbb{R}_+$成立时，则必然有$H^i(\omega,t)=0$对所有$(\omega,t)\in\Omega\times\mathbb{R}_+$和所有$i=1,\ldots,n$成立。显然后者又说明$I_X(H^i)(\omega)=0$对任何$\omega\in\Omega$和任何$i=1,\ldots,n$成立，即我们得到

$$\forall(\omega,t)\in\Omega\times\mathbb{R}_+,H(\omega,t)=0\Rightarrow\forall\omega\in\Omega,I_X(H)(\omega)=\sum_{i=1}^n I_X(H^i)(\omega)=0.$$

以上分析告诉我们：

- 如果$H(\omega,t)=H^1(\omega,t)+H^2(\omega,t)+\ldots+H^n(\omega,t)$，$H^i\in\Lambda_0$，$i=1,\ldots,n$，同时$H(\omega,t)=K^1(\omega,t)+K^2(\omega,t)+\ldots+K^m(\omega,t)$，$K^j\in\Lambda_0$，$j=1,\ldots,m$，那么由于$0=H-H=\sum_{i=1}^n H^i-\sum_{j=1}^m K^j$，我们有

$$0=I_X(0)=I_X(\sum_{i=1}^n H^i-\sum_{j=1}^m K^j)\underbrace{=}_{\text{根据simple process的随机积分的定义}}I_X(\sum_{i=1}^n H^i)-I_X(\sum_{j=1}^m K^j),$$

即$I_X(\sum_{i=1}^n H^i)=I_X(\sum_{j=1}^m K^j)$。因此$I_X(H)$在$H\in\Lambda_1$上的定义不依赖于$H$具体是如何表达为若干 basic processes 之和的。

与 basic process 的情形一样，随机积分$I_X(H)$，$H\in\Lambda_1$满足以下所有性质：

Theorem 4.2. 对于任何 *continuous square integrable martingale* X，都有

1. $\Lambda_1\subset L^2(\Omega\times\mathbb{R}_+,\mathcal{F}\times\mathcal{B}(\mathbb{R}_+),[X,X]\times\mathbb{P})$是一个向量空间，$I_X:\Lambda_1\to L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$是一个线性映射；
2. $I_X(H)_t:=I_X(H1_{[0,t]})=\int_0^t H_s dX_s,t\geq 0$也是一个*continuous square integrable martingale*；
3. 对任何$H\in\Lambda_1,K\in\Lambda_1$，有

$$\|H-K\|_{L^2([X,X]\times\mathbb{P})}=\|I_X(H-K)\|_{L^2(\mathbb{P})}=\|I_X(H)-I_X(K)\|_{L^2(\mathbb{P})}.$$

   这个等式也被称为*Itô isometry*.
4. 对任何$H\in\Lambda_1,K\in\Lambda_1$，都有

$$I_X(H)_tI_X(K)_t-\int_0^t H_sK_sd[X,X]_s,\quad t\geq 0\quad (I_X(H)_t=\int_0^t H_sdX_s)$$

   是一个连续鞅，因此$[\int_0^\cdot H_sdX_s,\int_0^\cdot K_sdX_s]_t=\int_0^t H_sK_sd[X,X]_s$。

由于$I_X:\Lambda_1\subset L^2(\Omega\times\mathbb{R}_+,\mathcal{F}\times\mathcal{B}(\mathbb{R}_+),[X,X]\times\mathbb{P})\to L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$是一个等距线性映射，我们知道它可以被拓展到$\Lambda_1$在$L^2(\Omega\times\mathbb{R}_+,\mathcal{F}\times\mathcal{B}(\mathbb{R}_+),[X,X]\times\mathbb{P})$里的关于$L^2([X,X]\times\mathbb{P})$的闭包上，且拓展后的线性映射依然是等距映射。我们将该闭包记为$\bar{\Lambda}_1$，且将拓展后的$I_X:\bar{\Lambda}_1\to L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$依然记为$I_X$。

这里最重要也是最复杂的任务是如何精确描述$\bar{\Lambda}_1$。实际上经过一系列冗长的证明，我们可以得到

$$\bar{\Lambda}_1=L^2(\Omega\times\mathbb{R}_+,\mathcal{P},[X,X]\times\mathbb{P}).$$

这里的σ代数$\mathcal{P}$的定义是

$$\mathcal{P}=\{A\in\mathcal{F}\times\mathcal{B}(\mathbb{R}_+):\forall t\in\mathbb{R}_+,A\cap(\Omega\times[0,t])\in\mathcal{F}_t\times\mathcal{B}([0,t])\}.$$

$\mathcal{P}$里的元素被称为 **progressively measurable set**，一个关于$\mathcal{P}$可测的随机过程$H:\Omega\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$被称为 progressively measurable process。在课堂上我们已经验证了以下随机过程关于$\mathcal{P}$可测。

1. 任何 basic process $H\in\Lambda_0$ 关于$\mathcal{P}$可测；
2. 任何 simple process $H\in\Lambda_1$ 关于$\mathcal{P}$可测；
3. 任何适应于$\mathbb{F}$且连续的随机过程H关于$\mathcal{P}$可测，因为这样的H可以被一系列 simple processes $H^n\in\Lambda_1$，$n\geq 1$ 逐点逼近：

   $$\forall(\omega,t)\in\Omega\times\mathbb{R}_+,\ \lim_{n\to\infty}H^n(\omega,t)=H(\omega,t).$$

   比如我们可以定义

   $$H^n(\omega,t):=\sum_{k=0}^{n2^n-1}\max(\min(H(\omega,\frac{k}{2^n}),n),-n)1_{(\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}]}(t)+H(\omega,n)1_{(n,\infty)}.\tag{4.1}$$

因此，任何适应于$\mathbb{F}$且连续的随机过程H，只要它满足

$$\|H\|^2_{L^2([X,X]\times\mathbb{P})}=\mathbb{E}[\int_0^\infty H_s^2d[X,X]_s]<\infty,$$

那么它就属于$\bar{\Lambda}_1$，并且对于任何在$L^2([X,X]\times\mathbb{P})$空间里逼近它的 simple processes $H^n\in\Lambda_1$，都有

$$I_X(H)=\int_0^\infty H_sdX_s:=\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty H_s^ndX_s=\lim_{n\to\infty}I_X(H^n),$$

即$\lim_{n\to\infty}\|I_X(H)-I_X(H^n)\|_{L^2(\mathbb{P})}=0$，或者说$I_X(H)=\int_0^\infty H_sdX_s$是$I_X(H^n)$，$n\geq 1$在$L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$空间里的极限点。

为了记号方便，我们用Λ_2指代$\bar{\Lambda}_1$，即

$$\Lambda_2 = L^2(\Omega \times \mathbb{R}_+, \mathcal{P}, [X, X] \times \mathbb{P}).$$

由以上讨论，随机积分$I_X(H)$对任何$H \in \Lambda_2$都可以定义，并且Theorem 4.2中关于随机积分的性质对$H \in \Lambda_2$全部成立。我们总结为以下定理：

Theorem 4.3. 对于任何 *continuous square integrable martingale* X，都有

1. $I_X : \Lambda_2 \to L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$是一个线性映射；
2. $I_X(H)_t := I_X(H1_{[0,t]}) = \int_0^t H_s dX_s, t \geq 0$也是一个*continuous square integrable martingale*；
3. 对任何$H \in \Lambda_2, K \in \Lambda_2$，有

$$\|H - K\|_{L^2([X,X]\times\mathbb{P})} = \|I_X(H - K)\|_{L^2(\mathbb{P})} = \|I_X(H) - I_X(K)\|_{L^2(\mathbb{P})}.$$

   这个等式也被称为*Itô isometry*.

4. 对任何$H \in \Lambda_2, K \in \Lambda_2$，都有

$$I_X(H)_t I_X(K)_t - \int_0^t H_s K_s d[X, X]_s, \quad t \geq 0 \quad (I_X(H)_t = \int_0^t H_s dX_s)$$

   是一个连续鞅，因此$[\int_0^\cdot H_s dX_s, \int_0^\cdot K_s dX_s]_t = \int_0^t H_s K_s d[X, X]_s$。

Remark 4.4. 假设$H^n, n \geq 1$是一组 *simple processes* 且满足

$$\lim_{n\to\infty} \|H^n - H\|_{L^2([X,X]\times\mathbb{P})} = 0.$$

那么除了$\lim_{n\to\infty} \|I_X(H^n) - I_X(H)\|_{L^2(\mathbb{P})} = 0$，对任何$T > 0$我们实际上还有

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\sup_{t\in[0,T]} |I_X(H^n)_t - I_X(H)_t|^2] = 0.$$

由于L^2收敛保证了依测度收敛，因此以上等式告诉我们

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[\sup_{t\in[0,T]} |I_X(H^n)_t - I_X(H)_t| > \varepsilon] = 0,$$

以上事实被称为随机积分$I_X(H^n)_t$在任何紧致时间区间上依测度一致收敛于$I_X(H)_t$，英文为*convergence in probability uniformly on compact interval*，简称为 ***u.c.p.*收敛**。以上结果基于著名的*Doob maximal inequality*，即对于任何*continuous square integrable martingale* M，任何$T > 0$，都有

$$\mathbb{E}[\sup_{t\in[0,T]} |M_t|^2] \leq 4\mathbb{E}[|M_T|^2].$$

随机积分的局部化定义 截止到目前，我们知道任何$H \in \Lambda_2 = L^2(\Omega\times\mathbb{R}_+, \mathcal{P}, [X,X]\times\mathbb{P})$，我们都可以定义它对于某个 continuous square integrable martingale X的随机积分。然而，这个$L^2([X,X]\times\mathbb{P})$的可积要求依然过于严苛，为了能让随机积分对更一般的H可以定义，我们采用了以下局部化的方法。

我们定义

$$\Lambda_{2,\mathrm{loc}} = \{H : \Omega\times\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} : H \text{ 关于 } \mathcal{P} \text{ 可测，且存在一组停时 } (\tau_m)_{m\geq 1},\ \lim_{m\to\infty}\tau_m = \infty,$$
$$\forall m \geq 1, X^{\tau_m} \text{ 是 continuous square integrable martingale}, H \in L^2([X^{\tau_m}, X^{\tau_m}]\times\mathbb{P})\}.$$

如果$H \in \Lambda_{2,\mathrm{loc}}$，那么由于对每个停时$\tau_m$都有$X^{\tau_m}$是一个 continuous square integrable martingale 且$H \in L^2(\Omega\times\mathbb{R}_+, \mathcal{P}, [X^{\tau_m}, X^{\tau_m}]\times\mathbb{P})$，由Theorem 4.3 我们知道随机积分

$$\int_0^t H_s dX_s^{\tau_m}, t \geq 0$$

对每一个$m \geq 1$都成立，且这些随机积分都是 continuous square integrable martingale。现在我们定义H关于X在时间t处的随机积分为

$$\int_0^t H_s dX_s := \lim_{m\to\infty}\int_0^t H_s dX_s^{\tau_m}.$$

如果H是一个 simple process，那么不难看出如果$\tau_m(\omega) > t$且$\tau_n(\omega) > t$，那么有$\int_0^t H_s dX_s^{\tau_m}(\omega) = \int_0^t H_s dX_s^{\tau_n}(\omega)$。因此利用$\lim_{m\to\infty}\tau_m = \infty$的假设我们可以证明$\lim_{m\to\infty}\int_0^t H_s dX_s^{\tau_m}$必然存在。注意，由于对任何停时$\tau_m$，以上关于随机积分的定义告诉我们

$$\int_0^{t\wedge\tau_m} H_s dX_s = \int_0^t H_s dX_s^{\tau_m}, t \geq 0,$$

也即**停止于τ_m的随机积分$\int_0^{t\wedge\tau_m} H_s dX_s, t \geq 0$是一个 continuous square integrable martingale**。因此这样的得到的随机积分$\int_0^t H_s dX_s, t \geq 0$被称为局部鞅(local martingale)。

Definition 4.5. 一个连续的随机过程X被称为一个连续的局部鞅，如果存在一组停时$\tau_m, m \geq 1$使得$\lim_{m\to\infty}\tau_m = \infty$且对每个$m \geq 1$，都有$X^{\tau_m}$是一个连续鞅。

重要例子： 假设H是一个适应于$\mathbb{F}$的连续随机过程，那么我们知道它必然关于$\mathcal{P}$可测。对于一个给定的 continuous square integrable martingale X，对自然数$m \geq 1$我们定义停时

$$\tau_m := \inf\{t \geq 0 : [X,X]_t \geq m, |H_t| \geq m\}.$$

由于$[X^{\tau_m}, X^{\tau_m}]_s = [X,X]_s^{\tau_m} \leq m$(这一点由quadratic variation的定义非常容易看出来)以及$|H_{s\wedge\tau_m}| \leq m$对任何$s \geq 0$都成立，并且显然有$d[X,X]_s^{\tau_m} = 0$对任何$s > \tau_m$成

立，我们必然有

$$\mathbb{E}[\int_0^\infty H_s^2 d[X^{\tau_m}, X^{\tau_m}]_s] = \mathbb{E}[\int_0^{\tau_m} H_s^2 d[X, X]_s^{\tau_m}] \leq m^3 < \infty.$$

除此之外，由optional stopping theorem可知X^{τ_m}仍然是一个 continuous square integrable martingale；并且容易验证$\lim_{m\to\infty}\tau_m = \infty$。因此这样的$H$满足$\Lambda_{2,\mathrm{loc}}$的所有条件，从而有$H \in \Lambda_{2,\mathrm{loc}}$。

5 半鞅与半鞅的随机积分

事实上 Black-Scholes 模型中的股票价格并不是一个鞅，也不是一个可求长的随机过程，而是两者的混合物，被称之为半鞅(semimartingale)。

Definition 5.1. *一个连续的随机过程X被称为连续半鞅，如果存在一个连续的局部鞅M和一个可求长随机过程A(满足$A_0 = 0$)使得*

$$X = M + A.$$

注意以上分解是唯一的：假如$X = N + B = M + A$且$B_0 = 0$，那么$M - N = B - A$是一个可求长的连续鞅。因此根据Theorem 4.1可知$M - N = 0 = A - B$，因此$A = B$且$M = N$。

现在我们假设一个连续半鞅$X = M + A$可以拆分为一个continuous square integrable martingale M与一个可求长随机过程A，我们称一个**随机过程H关于X可积**，如果它满足

1. $H \in L^1(A)$，即对于任何$\omega \in \Omega$，任何$t \geq 0$，都有$\int_0^t |H_s(\omega)| dA_s(\omega) < \infty$；
2. $H \in \Lambda_{2,\mathrm{loc}}(M)$，即存在一组停时$\tau_m, m \geq 1$使得$H \in L^2(\Omega \times \mathbb{R}_+, \mathcal{P}, [M^{\tau_m}, M^{\tau_m}] \times \mathbb{P})$对任何$m \geq 1$成立，且$\lim_{m\to\infty}\tau_m = \infty$。

对这样的H，我们定义$\int_0^t H_s dX_s, t \geq 0$为

$$\int_0^t H_s dX_s = \int_0^t H_s dM_s + \int_0^t H_s dA_s,$$

这里$\int_0^t H_s dM_s$是对鞅M所定义的随机积分，即$\int_0^t H_s dM_s = I_M(H)_t$，$\int_0^t H_s dA_s$是正常的Lebesgue积分。

显然，由随机积分的局部化定义可知$\int_0^t H_s dX_s, t \geq 0$是一个连续的局部鞅，同时容易验证$\int_0^t H_s dA_s, t \geq 0$是一个可求长的随机过程，**因此随机积分$\int_0^t H_s dX_s, t \geq 0$依然是一个连续半鞅。**

最后我们介绍著名的Itô 公式(Itô formula):

Theorem 5.2. 令X为一个连续的半鞅，$X = M + A$，其中M为*continuous square integrable martingale*，A为可求长随机过程，令$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$为一个$C^2$函数。那么$f(X_t), t \geq 0$依然是一个连续的半鞅，且满足

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t Df(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t D^2f(X_s)d[M,M]_s.$$

这里我们不提供完整的证明，只做以下几点注解：

1. 由于$Df(X_t), t \geq 0$显然是个适应于$\mathbb{F}$且连续的随机过程，由13页上提及的重要例子可知这样的随机过程$Df(X_t), t \geq 0 \in \Lambda_{2,\mathrm{loc}}(M)$。另一方面容易验证$Df(X_t), t \geq 0 \in L^1(A)$。因此$Df(X_t), t \geq 0$关于$X$可积且$\int_0^t Df(X_s)dX_s = \int_0^t Df(X_s)dM_s + \int_0^t Df(X_s)dA_s$。这又暗示了连续半鞅$f(X_t)$的分解为

$$f(X_t) = \underbrace{\int_0^t Df(X_s)dM_s}_{\text{局部鞅}} + \underbrace{\left(f(X_0) + \int_0^t Df(X_s)dA_s + \frac{1}{2}\int_0^t D^2f(X_s)d[M,M]_s\right)}_{\text{可求长}}.$$

2. Itô 公式的证明基于二阶泰勒展开。比如对于$t = 1$，对任何$n \geq 1$，都有

$$f(X_1) - f(X_0) = \sum_{k=0}^{2^n-1}(f(X_{\frac{k+1}{2^n}}) - f(X_{\frac{k}{2^n}}));$$

对每个k利用二阶泰勒展开可得

$$\begin{aligned} f(X_{\frac{k+1}{2^n}}) - f(X_{\frac{k}{2^n}}) &= Df(X_{\frac{k}{2^n}})(X_{\frac{k+1}{2^n}} - X_{\frac{k}{2^n}}) + \frac{1}{2}D^2f(X_{\frac{k}{2^n}})(X_{\frac{k+1}{2^n}} - X_{\frac{k}{2^n}})^2 \\ &\quad + o(|X_{\frac{k+1}{2^n}} - X_{\frac{k}{2^n}}|^2) \\ &= Df(X_{\frac{k}{2^n}})(M_{\frac{k+1}{2^n}} - M_{\frac{k}{2^n}}) + Df(X_{\frac{k}{2^n}})(A_{\frac{k+1}{2^n}} - A_{\frac{k}{2^n}}) \\ &\quad + \frac{1}{2}D^2f(X_{\frac{k}{2^n}})(X_{\frac{k+1}{2^n}} - X_{\frac{k}{2^n}})^2 \\ &\quad + o(|X_{\frac{k+1}{2^n}} - X_{\frac{k}{2^n}}|^2), \end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned} f(X_1) - f(X_0) = \sum_{k=0}^{2^n-1} \Big[& Df(X_{\frac{k}{2^n}})(M_{\frac{k+1}{2^n}} - M_{\frac{k}{2^n}}) + Df(X_{\frac{k}{2^n}})(A_{\frac{k+1}{2^n}} - A_{\frac{k}{2^n}}) \\ & + \frac{1}{2}D^2f(X_{\frac{k}{2^n}})(X_{\frac{k+1}{2^n}} - X_{\frac{k}{2^n}})^2 \\ & + o(|X_{\frac{k+1}{2^n}} - X_{\frac{k}{2^n}}|^2)\Big] \end{aligned}$$

首先，由于$Df(X)$是适应于$\mathbb{F}$且连续的随机过程，由(4.1)可知 simple processes $H^n := \sum_{k=0}^{2^n-1} Df(X_{\frac{k}{2^n}})1_{(\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}]}$ 逐点逼近于$Df(X)$，因此由Remark 4.4可知

$$\sum_{k=0}^{2^n-1} Df(X_{\frac{k}{2^n}})(M_{\frac{k+1}{2^n}} - M_{\frac{k}{2^n}}) = I_M(H^n)_1 \to \int_0^1 Df(X_s)dM_s$$

随着$n \to \infty$(依测度收敛)。另一方面，由于A为可求长的随机过程，容易验证

$$\sum_{k=0}^{2^n-1} Df(X_{\frac{k}{2^n}})(A_{\frac{k+1}{2^n}} - A_{\frac{k}{2^n}}) \to \int_0^1 Df(X_s)dA_s$$

随着$n \to \infty$(实际上后者其实可以用黎曼积分定义)。
由于$X = M + A$，我们有

$$\sum_{k=0}^{2^n-1}(X_{\frac{k+1}{2^n}}-X_{\frac{k}{2^n}})^2 = \sum_{k=0}^{2^n-1}(M_{\frac{k+1}{2^n}}-M_{\frac{k}{2^n}})^2+2\sum_{k=0}^{2^n-1}(M_{\frac{k+1}{2^n}}-M_{\frac{k}{2^n}})(A_{\frac{k+1}{2^n}}-A_{\frac{k}{2^n}})+\sum_{k=0}^{2^n-1}(A_{\frac{k+1}{2^n}}-A_{\frac{k}{2^n}})^2.$$

由于A可求长且M为连续随机过程，容易证明

$$\lim_{n\to\infty}(M_{\frac{k+1}{2^n}} - M_{\frac{k}{2^n}})(A_{\frac{k+1}{2^n}} - A_{\frac{k}{2^n}}) \leq \lim_{n\to\infty} \sup_{k=0,\ldots,2^n-1} |M_{\frac{k+1}{2^n}} - M_{\frac{k}{2^n}}| \|A\|_{\text{1-var},1} = 0,$$

类似可得

$$\lim_{n\to\infty}(A_{\frac{k+1}{2^n}} - A_{\frac{k}{2^n}})^2 = 0.$$

又由于$\sum_{k=0}^{2^n-1}(M_{\frac{k+1}{2^n}} - M_{\frac{k}{2^n}})^2 \to [M,M]_1$(这是quadratic variation的定义)，以上计算告诉我们

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2^n-1} D^2f(X_{\frac{k}{2^n}})(X_{\frac{k+1}{2^n}} - X_{\frac{k}{2^n}})^2 = \frac{1}{2}\int_0^1 D^2f(X_s)d[M,M]_s.$$

同理可证

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{2^n-1} o(|X_{\frac{k+1}{2^n}} - X_{\frac{k}{2^n}}|^2) = 0.$$

因此可得

$$\begin{aligned} f(X_1) - f(X_0) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{2^n-1}(f(X_{\frac{k+1}{2^n}}) - f(X_{\frac{k}{2^n}})) &= \int_0^t Df(X_s)dM_s + \int_0^t Df(X_s)dA_s \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t D^2f(X_s)d[M,M]_s \\ &= \int_0^t Df(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t D^2f(X_s)d[M,M]_s. \end{aligned}$$