由定理 3.2 可知，若市场 S 是完备的，即 $\mathcal{M}^e(S) = \{\mathbb{Q}\}$ 仅包含一个等价鞅测度，那么任何 contingent claim $f: \Omega \to \mathbb{R}$，（f 关于 $\mathcal{F}_T$ 可测）均可表示为

$$f = a + \int_0^T H\,dS, \qquad a \in \mathbb{R}, \quad H \in \mathcal{H}.$$

此时 f 在 $t=0$ 时刻的公平价格为 $a = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f]$. 那么，若市场 S 不完备，该如何确定 f 在 $t=0$ 时刻的公平价格？

定义 3.9（公平价格，fair price / arbitrage-free price）. 设市场 S 无套利，设 $f: \Omega \to \mathbb{R}$（f 关于 $\mathcal{F}_T$ 可测）为一个 contingent claim. 那么 $a \in \mathbb{R}$ 是 f（在 $t=0$ 时刻）的公平价格（fair price，arbitrage-free price），当且仅当 给 f（在 $t=0$ 时刻）定价为 a 之后，包含该 contingent claim f 与原市场 S 的新市场中没有套利机会. 在数学上，这个条件为：

$$K^{f,a} = \operatorname{span}\{f-a,\ K\} = \left\{\lambda(f-a) + \mu\int_0^T H\,dS:\ \lambda \in \mathbb{R},\ \mu \in \mathbb{R},\ H \in \mathcal{H}\right\}$$

满足 $K^{f,a} \cap L_+^0 = \{0\}$.

定理 3.10: 假设市场 S 无套利，$f: \Omega \to \mathbb{R}$（关于 $\mathcal{F}_T$ 可测）为一个 contingent claim.

定义

$$\underline{\pi}(f) = \inf\{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f]:\ \mathbb{Q} \in \mathcal{M}^e(S)\},$$

$$\overline{\pi}(f) = \sup\{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f]:\ \mathbb{Q} \in \mathcal{M}^e(S)\}.$$

(1) 如果 $\underline{\pi}(f) = \overline{\pi}(f) = \pi(f)$，那么 f 可以被表示为 $f = \pi(f) + \int_0^T H\,dS$ 对某个 $H \in \mathcal{H}$. 此时 $\pi(f)$ 为唯一的公平价格.

(2) 如果 $\underline{\pi}(f) < \overline{\pi}(f)$，那么有 $(\underline{\pi}(f), \overline{\pi}(f)) = \{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f]:\ \mathbb{Q} \in \mathcal{M}^e(S)\}$，此时 $a \in \mathbb{R}$ 为 f 的一个公平价格当且仅当 $a \in (\underline{\pi}(f), \overline{\pi}(f))$.

证明:

(1) 若 $\underline{\pi}(f)=\overline{\pi}(f)=\pi(f)$, 那么对任何 $\mathbb{Q}\in\mathcal{M}^e(S)$, 都有

$$\pi(f) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f].$$

也即, $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f-\pi(f)]=0$ 对任何 $\mathbb{Q}\in\mathcal{M}^e(S)$ 均成立. 因此, 由推论3.8可得

$f-\pi(f)\in K$, 即存在某个 $H\in\mathcal{H}$ 使得 $f-\pi(f)=\int_0^T H\,dS$. 故表达式

$$f = \pi(f) + \int_0^T H\,dS \text{ 成立.}$$

(2) 现在假设 $\underline{\pi}(f)<\overline{\pi}(f)$. 令 $I=\{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f]:\mathbb{Q}\in\mathcal{M}^e(S)\}$. 易验证 I 为 $\mathbb{R}$ 里的一个区间 (interval), 即若 $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_1}[f]\in I$, $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_2}[f]\in I$ $(\mathbb{Q}_1,\mathbb{Q}_2\in\mathcal{M}^e(S))$, 那么对任何 $\lambda\in[0,1]$, 均有 $\lambda\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_1}[f]+(1-\lambda)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_2}[f]\in I$. (留作习题).

先证明 a 是 f 的一个公平价格 当且仅当 $a\in I$:

若 $a\in I$, 那么存在某个 $\mathbb{Q}\in\mathcal{M}^e(S)$ 使得 $a=\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f]$, 此时必有 $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f-a]=0$.
这意味着若 $f-a\geq 0$, 必有 $f-a=0$. 因而 $K^{f,a}\cap L_+^0=\{0\}$, (验证该推导!)
故由定义3.9可得, a 为 f 的一个公平价格.

反之, 若 a 是 f 的一个公平价格, 那么 $K^{f,a}\cap L_+^0=\{0\}$. 由定理2.6 (Fundamental Theorem of Asset Pricing) 可知, 此时存在一个等价概率测度使得

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[g]=0 \quad \text{对任何 } g\in K^{f,a} \text{ 成立.}$$

由于 $g\in K^{f,a}$ 可被表示为 $g=\lambda(f-a)+\mu\int_0^T H\,dS$, $H\in\mathcal{H}$, $\lambda\in\mathbb{R}$, $\mu\in\mathbb{R}$,

以上等式意味着:

(i) 取 $\lambda=1$, $\mu=0$: $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f-a]=0 \Rightarrow a=\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f]$;

(ii) 取 $\lambda=0$, $\mu=1$: $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\int_0^T H\,dS]=0$ 对任何 $H\in\mathcal{H}$ $\Rightarrow$ $\mathbb{Q}\in\mathcal{M}^e(S)$ 为 S 的等价鞅测度 (利用定理2.5).

综上，可得此时 $a = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f] \in I$（因为 $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}^e(S)$）.

接下来证明 $I = \{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f] : \mathbb{Q} \in \mathcal{M}^e(S)\} = (\underline{\pi}(f), \overline{\pi}(f))$. 显然，由 $\underline{\pi}(f)$ 与 $\overline{\pi}(f)$ 的定义可知，I 中包含的任何元素 $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f]$ 均满足 $\underline{\pi}(f) \leq \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f] \leq \overline{\pi}(f)$. 我们需要排除"边界情况" $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f] = \underline{\pi}(f)$ 与 $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f] = \overline{\pi}(f)$.

假设 $a = \mathbb{E}_{\hat{\mathbb{Q}}}[f] = \overline{\pi}(f)$ 对某个 $\hat{\mathbb{Q}} \in \mathcal{M}^e(S)$ 成立. 那么，因为 $\overline{\pi}(f) = \sup\{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f] : \mathbb{Q} \in \mathcal{M}^e(S)\}$，对任何 $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}^e(S)$，必有

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f - \overline{\pi}(f)] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f] - \overline{\pi}(f) \leq 0 \text{ 成立.}$$

由定理 3.6，该条件等价于说 $f - \overline{\pi}(f) \in C$. 由 C 的定义，有在某个 $g \in K$ 使得 $g \geq f - \overline{\pi}(f)$. 由于 $\hat{\mathbb{Q}} \in \mathcal{M}^e(S)$，由定理 2.5 可知 $\mathbb{E}_{\hat{\mathbb{Q}}}[g] = 0$. 故

$$0 = \mathbb{E}_{\hat{\mathbb{Q}}}[g] \underset{\substack{\uparrow \\ \text{因为 } g \geq f - \overline{\pi}(f)}}{\geq} \mathbb{E}_{\hat{\mathbb{Q}}}[f - \overline{\pi}(f)] = \mathbb{E}_{\hat{\mathbb{Q}}}[f] - \overline{\pi}(f) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{因为已假设 } \overline{\pi}(f) = \mathbb{E}_{\hat{\mathbb{Q}}}[f].}}{=} 0.$$

这意味着 $0 = \mathbb{E}_{\hat{\mathbb{Q}}}[g - (f - \overline{\pi}(f))]$ 对非负值的随机变量 $g - (f - \overline{\pi}(f))$ 成立. 由于 $\hat{\mathbb{Q}}$ 为等价测度，以上等式意味着

$$g(\omega) = f(\omega) - \overline{\pi}(f) \text{ 对任何 } \omega \in \Omega \text{ 成立.}$$

由于 $g \in K$，存在一个 $H \in \mathcal{H}$，使得 $\int_0^T H\,dS = f - \overline{\pi}(f)$，即

$$f = \overline{\pi}(f) + \int_0^T H\,dS.$$

然而，如果 $f = \overline{\pi}(f) + \int_0^T H\,dS$，那么由推论 3.1 可知

$$\overline{\pi}(f) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f] \text{ 对任何 } \mathbb{Q} \in \mathcal{M}^e(S) \text{ 都成立.}$$

这与假设 $\underline{\pi}(f) < \overline{\pi}(f)$ 矛盾！因此不存在任何 $\hat{\mathbb{Q}} \in \mathcal{M}^e(S)$ 可以使得 $\mathbb{E}_{\hat{\mathbb{Q}}}[f] = \overline{\pi}(f)$.

类似可证明，不存在任何 $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}^e(S)$ 能使得 $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f] = \underline{\pi}(f)$. 因此可得：

$$I = \{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f] : \mathbb{Q} \in \mathcal{M}^e(S)\} = (\underline{\pi}(f), \overline{\pi}(f))$$

在 $\underline{\pi}(f) < \overline{\pi}(f)$ 时成立.

□

<u>定理 3.11</u> (Superreplication). 假设市场 S 无套利，$f : \Omega \to \mathbb{R}$ ($\mathcal{F}_T$ 可测) 为一个 contingent claim. 令 $\mathcal{M}^a(S) = \{\mathbb{Q} : S$ 为关于 $\mathbb{Q}$ 的鞅$\}$，$\mathcal{M}^e(S) = \{\mathbb{Q} : \mathbb{Q}$ 与 $\mathbb{P}$ 等价，且 S 为关于 $\mathbb{Q}$ 的鞅$\}$. 那么，

$$\begin{aligned}\overline{\pi}(f) &= \sup\{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f] : \mathbb{Q} \in \mathcal{M}^e(S)\} \\ &= \max\{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f] : \mathbb{Q} \in \mathcal{M}^a(S)\} \\ &= \inf\{a \in \mathbb{R} : \text{存在某个 } h \in K \text{ 使得 } a + h \geq f\}.\end{aligned}$$

证明：由定理 3.10 的证明可知，$f - \overline{\pi}(f) \in C$. 因此

$$\begin{aligned} f &= \overline{\pi}(f) + g && \text{对某个 } g \in C \\ &= \overline{\pi}(f) + h - \eta && \text{对某个 } h \in K,\ \eta \in L^0_+ \\ &\leq \overline{\pi}(f) + h && \text{对某个 } h \in K. \end{aligned}$$

即，$\overline{\pi}(f) \geq \inf\{a \in \mathbb{R} : \text{存在某个 } h \in K \text{ 使得 } a + h \geq f\}$.

若 $a < \overline{\pi}(f)$，那么由于 $\overline{\pi}(f) = \sup\{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f] : \mathbb{Q} \in \mathcal{M}^e(S)\}$，必存在某个 $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}^e(S)$ 使得 $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f] > a$. 由于 $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\int_0^T H\,dS] = 0$ 对任何 $H \in \mathcal{H}$ 成立（见定理 2.5），对任何 $h = \int_0^T H\,dS \in K$，有：

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[a + h] = a < \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f].$$

这意味着不存在 $h\in K$ 能够使得 $f \le a+h$. 因此,

$$\overline{\pi}(f) = \inf\{a\in\mathbb{R}: 存在\ h\in K, 使得\ a+h \ge f\}.$$

关于 $\sup\{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f]: \mathbb{Q}\in\mathcal{M}^e(S)\} = \max\{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f]: \mathbb{Q}\in\mathcal{M}^a(S)\}$, 见习题.

□