接下来我们介绍一个经常出现在交易策略构建中的数学概念：停时 (stopping time).

定义 1.18：设 $(\Omega, \mathbb{F}=(\mathcal{F}_t)_{t=0,1,\cdots,T}, \mathbb{P})$ 为一个概率空间. 若一个定义在 Ω 上，取值在 $\{0,1,\cdots,T,\infty\}$ 的函数 $\tau: \Omega \to \{0,1,\cdots,T,\infty\}$ 满足

对任何 $n=0,1,\cdots,T$，$\quad \underbrace{\{\tau = n\}}_{\{\omega\in\Omega:\ \tau(\omega)=n\}} \in \mathcal{F}_n$

对 $n=\infty$，$\quad \{\tau=\infty\} \in \mathcal{F}_T$，

那么我们称 τ 为一个停时 (stopping time) 或 $\mathbb{F}$-停时.

在金融数学里，我们用停时 τ 来描述"更改交易策略的时间"，或者说，τ 代表"原有交易策略停止使用，更换新的交易方式的时间".

例子：(1) $\tau(\omega)=n$，$\omega\in\Omega$：常数型的时间映射显然是一个停时.

(2) 设 $(S_t)_{t=0,1,\cdots,T}$ 为股票价格演化过程. 设 $0\le a<b<\infty$，为给定的常数. 我们考虑："在股票价格跌至 a 或以下时买，在股票价格升至 b 或 b 以上时卖"的低买高卖策略. 在这个策略里，我们需要以下停时：

$$\tau_1(\omega) = \begin{cases} \inf\{m\ge 0:\ S_m(\omega)\le a\}: & \text{第1次价格} \le a \text{ 的时刻} \\ \inf\phi = +\infty: & \text{若价格在 } 0,\cdots,T \text{ 时刻都不跌至 } a \text{ 或 } a \text{ 以下，则} =+\infty. \end{cases}$$

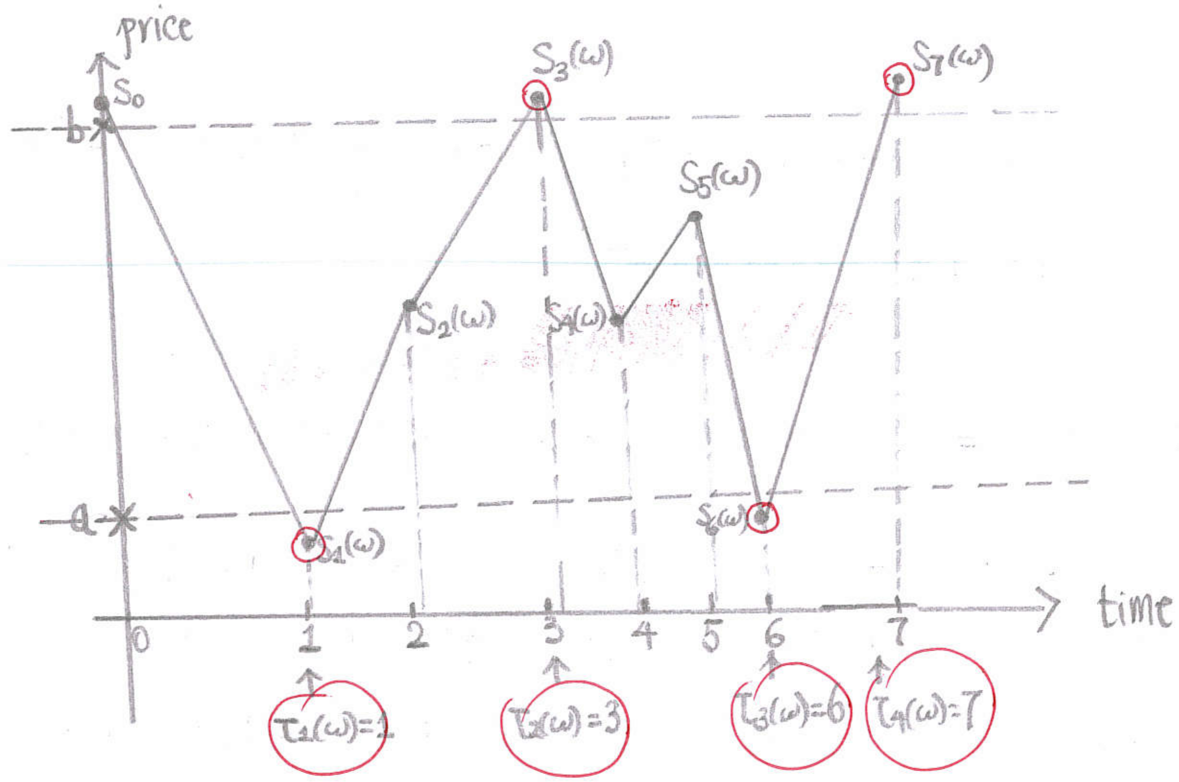
$$\tau_2(\omega) = \begin{cases} \inf\{m>\tau_1(\omega):\ S_m(\omega)\ge b\}: & \text{在 } \tau_1 \text{ 之后，价格首次} \ge b \text{ 的时刻} \\ \inf\phi = +\infty: & \text{若价格在 } \tau_1(\omega) \text{ 之后到 } T \text{ 时刻为止都没有} \ge b\text{，则} = +\infty. \end{cases}$$

⋮

$$\tau_{2k-1}(\omega) = \begin{cases} \inf\{m > \tau_{2k-2}(\omega) : S_m(\omega) \le a\} : & \text{上一次(即}\overset{\text{价格}\ge b}{\tau_{2k-2}(\omega)}\text{)之后, 价格首次} \le a \text{ 的时刻} \\ \inf \phi = +\infty \end{cases}$$

$k \ge 1$, $\tau_0(\omega) = 0$

$$\tau_{2k}(\omega) = \begin{cases} \inf\{m > \tau_{2k-1}(\omega) : S_m(\omega) \ge b\} : & \text{上一次(即}\tau_{2k-1}(\omega)\text{)价格} \le a \text{ 之后, 价格首次} \ge b \text{ 的时刻.} \\ \inf \phi = +\infty \end{cases}$$



先来证明: 对于 $\mathcal{F}_t = \sigma(S_0, S_1, \cdots, S_t)$, $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t=0,1,\cdots,T}$, 以上的所有 $\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_{2k-1}, \tau_{2k}, \cdots$ 均为 $\mathbb{F}$-停时.

从 τ_1 开始: 对 $n = 1, \cdots, T$, 由于

$$\{\tau_1 = n\} = \{\omega \in \Omega : \tau_1(\omega) = n\} = \{\omega \in \Omega : S_0(\omega) > a, \cdots, S_{n-1}(\omega) > a, S_n(\omega) \le a\}$$

$$= \underbrace{\{S_0 > a\}}_{\in \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_n} \cap \underbrace{\{S_1 > a\}}_{\in \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_n} \cap \cdots \cap \underbrace{\{S_{n-1} > a\}}_{\in \mathcal{F}_{n-1} \subset \mathcal{F}_n} \cap \underbrace{\{S_n \le a\}}_{\in \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_n} \in \mathcal{F}_n,$$

对于 $n=0$，有：

$$\{\tau_1=0\}=\{\omega\in\Omega:\ \tau_1(\omega)=0\}=\{\omega\in\Omega:\ S_0(\omega)\le a\}\in\mathcal{F}_0.$$

对于 $n=+\infty$，有：

$$\{\tau_1=+\infty\}=\{\omega\in\Omega:\ \tau_1(\omega)=+\infty\}=\{\omega\in\Omega:\ S_0(\omega)>a,\cdots,S_T(\omega)>a\}\in\mathcal{F}_T.$$

$$\{\omega\in\Omega:\ S_0(\omega)>a,\cdots,S_T(\omega)>a\}=\{S_0>a\}\cap\cdots\cap\{S_T>a\}$$

因此由定义1.18可知，τ_1 是一个 $\mathbb{F}$-停时.

现在我们证明 τ_2 也是一个 $\mathbb{F}$-停时：由 τ_2 的定义：

$$\tau_2(\omega)=\inf\{m>\tau_1(\omega):\ S_m(\omega)\geqslant b\},$$

可知 $\tau_2(\omega)$ 可以取值：$1,2,\cdots,T,+\infty$，即 $\tau_2(\omega)\neq 0$.

首先考虑 $\{\tau_2=1\}=\{\omega\in\Omega:\ \tau_2(\omega)=1\}$. 显然，若 $\omega\in\Omega$ 使得 $\tau_2(\omega)=1$，那么 $\tau_1(\omega)=0$，因此 $\{\omega\in\Omega:\ \tau_2(\omega)=1\}=\{\omega\in\Omega:\ \tau_1(\omega)=0\}\cap\{\omega\in\Omega:S_1(\omega)\geq b\}$.

由于 τ_1 已被证明是一个 $\mathbb{F}$-停时，我们有 $\{\tau_1=0\}\in\mathcal{F}_0$；由于 S_1 关于 $\mathcal{F}_1$ 可测，有 $\{S_1\geq b\}\in\mathcal{F}_1$. 因此利用 $\mathcal{F}_0\subset\mathcal{F}_1$ 可得

$$\{\tau_2=1\}=\underset{\substack{\uparrow\\ \in\mathcal{F}_0\subset\mathcal{F}_1}}{\{\tau_1=0\}}\cap\underset{\substack{\uparrow\\ \in\mathcal{F}_1}}{\{S_1\geq b\}}\in\mathcal{F}_1.$$

现在考虑 $\{\tau_2=2\}=\{\omega\in\Omega:\ \tau_2(\omega)=2\}$. 若 $\omega\in\Omega$ 使得 $\tau_2(\omega)=2$，那么有以下两种可能：(1) $\tau_1(\omega)=1$，$S_2(\omega)\geq b$；

或 (2) $\tau_1(\omega)=0$，$S_1(\omega)<b$，$S_2(\omega)\geq b$.

因此，可得：

$$\{\tau_2 = 2\} = \Big(\{\tau_1 = 1\} \cap \{S_2 \geq b\}\Big) \cup \Big(\{\tau_1 = 0\} \cap \{S_1 < b\} \cap \{S_2 \geq b\}\Big)$$

由于 τ_1 是一个 $\mathbb{F}$-停时，我们有：$\{\tau_1 = 1\} \in \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$，又由于 S_2 关于 $\mathcal{F}_2$ 可测，可知 $\{S_2 \geq b\} \in \mathcal{F}_2$，因而 $\{\tau_1 = 1\} \cap \{S_2 \geq b\} \in \mathcal{F}_2$.

同样可证明 $\underset{\uparrow \atop \in \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1}{\{\tau_1 = 0\}} \cap \underset{\uparrow \atop \in \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2}{\{S_1 < b\}} \cap \underset{\uparrow \atop \in \mathcal{F}_2}{\{S_2 \geq b\}} \in \mathcal{F}_2$.

由以上所有，可得 $\{\tau_2 = 2\} \in \mathcal{F}_2$.

类似可证明，$\{\tau_2 = n\} \in \mathcal{F}_n$ 对一切 $n = 1, 2, \cdots, T$ 均成立.

由于

$$\begin{aligned}\{\tau_2 = \infty\} = {} & \{\omega \in \Omega : \underset{\uparrow \in \mathcal{F}_T}{\tau_1(\omega) = +\infty}\} \cup \{\omega \in \Omega : \underset{\uparrow \in \mathcal{F}_T}{\tau_1(\omega) = 1}, S_2(\omega) < b, \cdots, S_T(\omega) < b\} \\ & \cup \{\omega \in \Omega : \underset{\uparrow \in \mathcal{F}_T}{\tau_1(\omega) = 2}, S_3(\omega) < b, \cdots, S_T(\omega) < b\} \\ & \vdots \\ & \cup \{\omega \in \Omega : \underset{\uparrow \mathcal{F}_T}{\tau_1(\omega) = T-1}, S_T(\omega) > b\} \\ & \cup \{\omega \in \Omega : \underset{\uparrow \in \mathcal{F}_T}{\tau_1(\omega) = T}\},\end{aligned}$$

我们也有：$\{\tau_2 = \infty\} \in \mathcal{F}_T$.

综上，可得，τ_2 为一个 $\mathbb{F}$-停时.

利用以上方法，我们可以通过归纳法 (induction) 证明所有

$\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_{2k-1}, \tau_{2k}, \cdots$ 均为 $\mathbb{F}$-停时.

$\square$

注意：在以上证明中我们使用了以下两个事实：

(1) 设 $\mathcal{F}$ 为一个σ代数，$A_1, \cdots, A_m \in \mathcal{F}$。那么

$A_1 \cap \cdots \cap A_m \in \mathcal{F}$.

证明：由于 $\mathcal{F}$ 为一个σ代数，$A_1, \cdots, A_m \in \mathcal{F} \Rightarrow A_1^c, \cdots, A_m^c \in \mathcal{F}$.

$$\Rightarrow A_1^c \cup \cdots \cup A_m^c \in \mathcal{F}$$

$$\Rightarrow (A_1^c \cup \cdots \cup A_m^c)^c \in \mathcal{F}$$

$$\Rightarrow (A_1^c)^c \cap \cdots \cap (A_m^c)^c \in \mathcal{F}$$

$$\Rightarrow A_1 \cap \cdots \cap A_m \in \mathcal{F}.$$

□

练习：证明 $(B_1 \cup \cdots \cup B_m)^c = B_1^c \cap \cdots \cap B_m^c$,

以及 $(A^c)^c = A$.

(2) S_m 为 $\mathcal{F}_m$-可测 $\Rightarrow$ $\{S_m \le c\} \in \mathcal{F}_m$, $\{S_m < c\} \in \mathcal{F}_m$,

$\{S_m \ge c\} \in \mathcal{F}_m$, $\{S_m > c\} \in \mathcal{F}_m$

对任何实数 c 都成立.

证明：首先证明 $\{a \le S_m \le b\} \in \mathcal{F}_m$ 对于任何实数 $a \le b$ 成立.

根据"可测"的定义，对任何 $a \le b$ 与任何正整数 k，我们有

$$\{\omega \in \Omega: \ a - \tfrac{1}{k} < S_m(\omega) < b + \tfrac{1}{k}\} \in \mathcal{F}_m.$$

显然，$\bigcap_{k=1}^{\infty} \{\omega \in \Omega: \ a - \tfrac{1}{k} < S_m(\omega) < b + \tfrac{1}{k}\} \in \mathcal{F}_m$ （练习，见(1)的证明）.

同时，我们还有

$$\bigcap_{k=1}^{\infty}\{\omega\in\Omega:\ a-\tfrac{1}{k}<S_m(\omega)<b+\tfrac{1}{k}\}=\{\omega\in\Omega:\ a\le S_m(\omega)\le b\}.$$

因此，$\{\omega\in\Omega:\ a\le S_m(\omega)\le b\}\in\mathcal{F}_m$ 成立.

由此可以推出：

$$\{\omega\in\Omega:\ S_m(\omega)\le c\}=\{\omega\in\Omega:\ -\infty<S_m(\omega)\le c\}$$

$$=\bigcup_{\substack{a<c;\\ \text{且}a\text{为有理数}}}\underbrace{\{\omega\in\Omega:\ a\le S_m(\omega)\le c\}}_{\in\mathcal{F}_m}$$

$$\in\mathcal{F}_m,$$

这里我们利用了有理数可数(countable)的性质与有理数在实数里稠密(dense)的性质.

显然，$\{\omega\in\Omega:\ S_m(\omega)\le c\}\in\mathcal{F}_m \Rightarrow \{\omega\in\Omega:\ S_m(\omega)>c\}=\{\omega\in\Omega:\ S_m(\omega)\le c\}^{c}$ $\in\mathcal{F}_m$ 成立.

同样，我们可以推出：

$$\{\omega\in\Omega:\ S_m(\omega)\ge c\}=\{\omega\in\Omega:\ c\le S_m(\omega)<+\infty\}$$

$$=\bigcup_{\substack{b>c;\\ \text{且}b\text{为有理数}}}\underbrace{\{\omega\in\Omega:\ c\le S_m(\omega)\le b\}}_{\in\mathcal{F}_m}\in\mathcal{F}_m.$$

因此 $\{\omega\in\Omega:\ S_m(\omega)<c\}=\{\omega\in\Omega:\ S_m(\omega)\ge c\}^{c}\in\mathcal{F}_m$ 成立.

实际上，我们可以证明：S_m 为 $\mathcal{F}_m$-可测

$$\Longleftrightarrow \{a < S_m < b\} \in \mathcal{F}_m,$$

$$\{a \le S_m \le b\} \in \mathcal{F}_m,$$

$$\{a < S_m \le b\} \in \mathcal{F}_m,$$

$$\{a \le S_m < b\} \in \mathcal{F}_m$$ 对任何 $a<b$ 成立.

□

回到例子(2). 我们现在利用停时 $\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_{2k-1}, \tau_{2k}, \cdots$ 给出能够实现"在股票价格 $\le a$ 时买入，在股票价格 $\ge b$ 时卖出"的策略的数学描述.

定义 1.19：设 $(\Omega, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t=0,1,\cdots,T}, \mathbb{P})$ 为一个概率空间，$A \in \mathcal{F}_T$ 为一事件(event). 我们用 $\mathbb{1}_A : \Omega \to \{0,1\}$ 指代事件 A 的指标函数 (indicator function)，即

$$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{若 } \omega \in A; \\ 0, & \text{若 } \omega \notin A. \end{cases}$$

利用指标函数我们定义以下随机过程：

$$H_m = \mathbb{1}_{\bigcup_{k=1}^{\infty}\{\tau_{2k-1} \le m-1 < \tau_{2k}\}}, \qquad m = 1, 2, \cdots, T$$

$$= \begin{cases} 1, & \text{若 } \tau_{2k-1}(\omega) \le m-1 < \tau_{2k}(\omega) \text{ 对某个 } k=1,2,\cdots, \text{成立}. \\ 0, & \text{若 } \tau_{2k}(\omega) \le m-1 < \tau_{2k-1}(\omega) \text{ 对某个 } k=1,2,\cdots, \text{成立}. \end{cases}$$

由于 $\{H_m = 1\} = \{\omega \in \Omega: \ \tau_{2k-1}(\omega) \le m-1 < \tau_{2k}(\omega)$ 对某个 $k=1,2,\cdots$ 成立$\}$

$$= \bigcup_{k=1}^{\infty} \{\omega \in \Omega: \ \tau_{2k-1}(\omega) \le m-1 < \tau_{2k}(\omega)\}$$

$$= \bigcup_{k=1}^{\infty} \{\tau_{2k-1} \le m-1\} \cap \{\tau_{2k} \le m-1\}^c,$$

且 τ_{2k-1}, τ_{2k} 为 $\mathbb{F}$-停时 ($\Rightarrow$ $\{\tau_{2k-1} \le m-1\} \in \mathcal{F}_{m-1}$, $\{\tau_{2k} \le m-1\} \in \mathcal{F}_{m-1}$

$\Rightarrow$ $\{\tau_{2k-1} \le m-1\} \in \mathcal{F}_{m-1}$, $\{\tau_{2k} \le m-1\}^c \in \mathcal{F}_{m-1}$),

我们有: $\{H_m = 1\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \underbrace{\{\tau_{2k-1} \le m-1\}}_{\in \mathcal{F}_{m-1}} \cap \underbrace{\{\tau_{2k} \le m-1\}^c}_{\in \mathcal{F}_{m-1}} \in \mathcal{F}_{m-1}$;

以及 $\{H_m = 0\} = \{H_m = 1\}^c \in \mathcal{F}_{m-1}$.

因此, H_m 关于 $\mathcal{F}_{m-1}$ 可测. 这意味着 $(H_m)_{m=1,2,\cdots,T}$ 为可预测过程,

可以做为交易策略, 见定义 1.10.

现在我们来分析 $(H_m)_{m=1,2,\cdots,T}$ 的金融含义. 由于 τ_{2k-1} 代表股票价格第 k 次 $\le a$ 的时刻, τ_{2k} 代表股票价格在 τ_{2k-1} 之后第 1 次 $\ge b$ 的时刻, 以及 H_m 实际上描述的是 $m-1$ 时刻的决定, 我们可以看出:

$H_m(\omega) = 1$ $\Leftrightarrow$ $\tau_{2k-1}(\omega) \le m-1 < \tau_{2k}(\omega)$ 对某个 $k \ge 1$

$\Leftrightarrow$ $m-1$ 时刻在第 k 次股票价格 $\le a$ (含) 与下一次股票价格 $\ge b$ 之间 (对某个 $k \ge 1$)

$\Leftrightarrow$ 在第 k 次股票价格 $\le a$ (含) 与下一次股票价格 $\ge b$ 之间的这段时间, 买入且持有一个单位的股票 (对某个 $k \ge 1$)

$H_m(\omega)=0 \iff \tau_{2k}(\omega) \le m-1 < \tau_{2k-1}(\omega)$ 对某个 $k\ge 1$

$\iff$ $m-1$ 时刻在第 k 次股票价格 $\ge b$ 与下一次股票价格 $\le a$ 之间（对某个 $k\ge 1$）

$\iff$ 在股票价格 $\ge b$ 时卖掉手中已持有的一个单位股票，直到股票价格 $\le a$ 之前，不再做任何行动(等待).

因而，$H_m = \mathbb{1}_{\bigcup_{k=1}^{\infty}\{\tau_{2k-1} \le m-1 < \tau_{2k}\}}$，$m=1,2,\cdots,T$ 描述了"在股票价格 $\le a$ 时买入一股，在股票价格 $\ge b$ 时清仓"的交易策略.

1.3. 条件概率，条件期望与鞅 (Conditional Probability, Conditional expectation, and Martingale)

设 $(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$ 为一个概率空间，$A\in\mathcal{F}_T$，$B\in\mathcal{F}_T$ 为两个事件且 $\mathbb{P}(B)>0$.

A 关于 B 的条件概率为:

$$\mathbb{P}(A\mid B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

假设 $X:\Omega\to\mathbb{R}$ 为一个关于 $\mathcal{F}_T$ 可测的随机变量，则 X 关于 B 的条件期望为:

$$\mathbb{E}[X\mid B] = \frac{\mathbb{E}[X\mathbb{1}_B]}{\mathbb{P}(B)}.$$

若 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$ 为有限概率空间，且假设

$$B=\{\omega_{i_1},\cdots,\omega_{i_k}\},\quad i_1,\cdots,i_k\in\{1,2,\cdots,n\},$$

那么，