Chapter 4. Utility Maximization / 效用最大化

如之前设定，$\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$，$\mathbb{P}$ 为 Ω 上的一个概率测度.

$S = (S_t)_{t=0,\cdots,T}$：股票价格演化过程，

$S_t : \Omega \to \mathbb{R}$.

$\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t=0,\cdots,T}$：由 S 生成的信息流 (filtration).

我们将一直假设市场 S 满足无套利条件 (No Arbitrage). 特别地，由 Fundamental Theorem of Asset Pricing (定理2.6) 可知此时存在一个等价鞅测度 (Equivalent Martingale Measure) $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}^e(S)$.

现在我们考虑一个"效用函数" (utility function) $U : [0, \infty) \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$，$U(x)$ 代表在 T 时刻，市场参与者 (agent) 的最终财富为 x 时所感受到的"幸福感".

我们假设 U 满足以下条件：

关于 U 的设定 4.1：

(1) $U : [0, \infty) \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ 为严格递增函数，

(2) U 在 $(0, \infty)$ 上连续可微 (continuously differentiable)，即对于任何 $x \in (0, \infty)$，导数 $U'(x)$ 存在且 $U'(x)$ 为关于 x 的连续函数，

(3) $U : [0, \infty) \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ 为凹函数 (concave function)，即对任何 $x, y \in [0, \infty)$，$\lambda \in [0, 1]$，

$$U(\lambda x + (1-\lambda) y) \geq \lambda U(x) + (1-\lambda) U(y).$$

特别地，$U'(x)$ 为严格递减函数，

(4) $U'(\infty) := \lim_{x\to\infty} U'(x) = 0$,

(5) $U(x) > -\infty$ 对任何 $x \in (0,\infty)$ 成立，且满足 Inada 条件：

$$U'(0) := \lim_{x\downarrow 0} U'(x) = +\infty.$$

例子 4.2：以下函数满足设定 4.1（请验证！）

- $$U(x) \begin{cases} = \ln(x), & x > 0, \\ = -\infty, & x = 0. \end{cases}$$

- $$U(x) = \frac{x^{a}}{a}, \qquad a \in (0,1).$$

令 $\mathcal{H}$ 代表所有可预测过程 (Predictable process) 的集合，我们想要优化的目标函数（也被称为价值函数 value function）有以下表示：

$$u(x) = \sup_{H\in\mathcal{H}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[U\left(x + \int_0^T H\,dS\right)\right], \qquad x \in [0,\infty).$$

显然，$u(x)$ 所代表的经济含义是：在起始资金为 x 的前提下，通过寻找最优的投资策略 $\widehat{H}(x)$ 以最大化 T 时刻的平均效用值.

我们首先考虑这个优化问题在完备市场 (Complete Market) 的假设下的解决思路.

4.1. 效用最大化问题 — 完备市场

我们假设市场 S 是完备的(Complete) 即，S 无套利，且 $\mathcal{M}^e(S) = \{\mathbb{Q}\}$ 仅包含一个唯一的等价鞅测度 (Equivalent Martingale Measure).

由定理3.2可知，此时任何 $\mathcal{F}_T$ 可测的随机变量 $X: \Omega \to \mathbb{R}$ 均可以被表示为

$$X = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X] + \int_0^T H\,dS. \quad (H \text{ 为某个可预测过程})$$

这意味着我们有：对任何起始资金 $x \geq 0$,

$$K(x) \overset{\text{定义}}{:=} \left\{ x + \int_0^T H\,dS : H \in \mathcal{H} \right\}$$

$$= \left\{ X : \Omega \to \mathbb{R}\ (\mathcal{F}_T \text{可测}) : \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X] = x \right\},$$

且显然有

$$u(x) = \sup_{H \in \mathcal{H}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[U\left(x + \int_0^T H\,dS\right)\right]$$

$$= \sup_{X \in K(x)} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U(X)].$$

对于 $X \in K(x)$，将 $X(\omega_i)$ 记为 ξ_i，$i = 1, \cdots, n$；同时令 $q_i = \mathbb{Q}(\{\omega_i\})$，$i = 1, \cdots, n$，

那么此时约束条件 $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X] = x$ 可被表示为：

$$\sum_{i=1}^n q_i \xi_i = q_1\xi_1 + \cdots + q_n\xi_n = x,$$

从而我们得到，价值函数 $u(x)$ 实际上对应优化问题：

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U(X)] = \sum_{i=1}^{n} p_i U(\xi_i) \longrightarrow \max!$$

(即寻找最优的 $\hat{\xi}_1, \cdots, \hat{\xi}_n$ 使 $\sum_{i=1}^{n} p_i U(\hat{\xi}_i) \geq \sum_{i=1}^{n} p_i U(\xi_i)$ 对任何 $(\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$)

$$p_i = \mathbb{P}(\{\omega_i\}), \quad i = 1, \cdots, n$$

(这里令 $U(x) = -\infty$ 对任何 $x < 0$).

约束条件: $\sum_{i=1}^{n} q_i \xi_i = X$.

($(\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ 必须满足 $\xi_1 q_1 + \cdots + \xi_n q_n = X$).

要解决这类优化问题，我们引入 Lagrangian 函数

$$L(\xi_1, \cdots, \xi_n, y) = \sum_{i=1}^{n} p_i U(\xi_i) - y\left(\sum_{i=1}^{n} q_i \xi_i - X\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i\left(U(\xi_i) - y \frac{q_i}{p_i} \xi_i\right) + yX,$$

这里 $y \geq 0$ 即是 Lagrangian multiplier.

令 $\Phi(y) = \sup\limits_{\xi_1, \cdots, \xi_n} L(\xi_1, \cdots, \xi_n, y), \quad y \geq 0.$

显然，若 $y \geq 0$ 固定，则 $\Phi(y) = \sup\limits_{\xi_1, \cdots, \xi_n} \sum_{i=1}^{n} p_i\left(U(\xi_i) - y \frac{q_i}{p_i} \xi_i\right) + yX$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[\sup_{\xi_i \geq 0}\left(U(\xi_i) - y \frac{q_i}{p_i} \xi_i\right)\right] p_i + yX.$$

我们将要证明

$$\left(\inf_{y>0} \Phi(y) = u(X),\right)$$

且 $\inf_{y>0} \Phi(y)$ 的极小值点 $\hat{y}$ $\left(= \hat{y}(x)\right)$ 满足:

注意 $\hat{y}$ 依赖于 x

令 $\hat{\xi}_1 = (U')^{-1}\left(\hat{y}\frac{q_1}{p_1}\right)$, $\cdots$, $\hat{\xi}_n = (U')^{-1}\left(\hat{y}\frac{q_n}{p_n}\right)$,

那么 $(\hat{\xi}_1, \cdots, \hat{\xi}_n, \hat{y})$ 是函数 $L(\xi_1, \cdots, \xi_n, y)$ 的极值点, 即

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i} L(\xi_1, \cdots, \xi_n, y)\Big|_{(\hat{\xi}_1, \cdots, \hat{\xi}_n, \hat{y})} = 0, \qquad i = 1, \cdots, n,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} L(\xi_1, \cdots, \xi_n, y)\Big|_{(\hat{\xi}_1, \cdots, \hat{\xi}_n, \hat{y})} = 0,$$

且 $\hat{\xi}_1 q_1 + \cdots + \hat{\xi}_n q_n = x$.

因此, $(\hat{\xi}_1, \cdots, \hat{\xi}_n)$ 是优化问题 $u(x) = \max_{(\xi_1, \cdots, \xi_n)} \sum_{i=1}^{n} p_i U(\xi_i)$ 在约束条件 $\sum_{i=1}^{n} q_i \xi_i = x$

下的一组最优解.

基于以上事实, 我们研究的重心现在转移至函数 $\Phi(y)$ 上. 由于已知

$$\Phi(y) = \sum_{i=1}^{n} \left[\sup_{\xi_i \geq 0} \left(U(\xi_i) - y\frac{q_i}{p_i}\xi_i\right)\right] p_i + yx,$$

我们不妨先研究优化问题

$$V(\eta) := \sup_{\xi \geq 0} \left(U(\xi) - \eta\xi\right), \qquad \eta \geq 0.$$

$$\Updownarrow$$

对应

$$\sup_{\xi_i \geq 0} \left(U(\xi_i) - y\frac{q_i}{p_i}\xi_i\right), \quad i = 1, \cdots, n,$$

显然此处 $\eta = y\frac{q_i}{p_i}$.

定义4.3：
$$V(\eta) = \sup_{\xi \geq 0} [U(\xi) - \eta\xi], \quad \eta \geq 0$$
被称为函数 U 的共轭函数（Conjugate）.

若 U 满足设定4.1，那么容易证明它的共轭函数 V 满足：

- $V(\eta) \in \mathbb{R}$ 对任何 $\eta \in (0,\infty)$,
- $V(\eta)$ 在 $(0,\infty)$ 上连续可微，
- $V(\eta)$ 在 $(0,\infty)$ 上为凸函数（convex function），$V'(\eta)$ 为严格递增，
- $V'(0) = \lim_{\eta \downarrow 0} V'(\eta) = -\infty$, $\quad \lim_{\eta \to \infty} V'(y) \left(=: V(\infty)\right) = 0$,

$$\lim_{y \to \infty} V(y) \left(=: V(\infty)\right) = \lim_{x \to 0} U(x).$$

以下结果为凸分析的经典结论：

定理4.4： 若 U 满足设定4.1，那么它的共轭 $V(\eta) = \sup_{\xi \geq 0} [U(\xi) - \eta\xi]$, $\eta \geq 0$

满足以上性质，且有
$$U(\xi) = \inf_{\eta \geq 0} [V(\eta) + \eta\xi], \qquad \xi \in [0,\infty).$$

此外， $-V'$ 是 U' 的逆映射，即 $-V'(\eta) = (U')^{-1}(\eta)$.

为了简单表示，我们令 $I = -V' = (U')^{-1}$.

由于

$$\Phi(y) = \sum_{i=1}^{n} p_i \Big(\underbrace{\sup_{\xi_i > 0} \big[U(\xi_i) - (y \tfrac{q_i}{p_i}) \xi_i \big]}_{= V(y \frac{q_i}{p_i})} \Big) + yX,$$

利用 V 的定义可得:

$$\Phi(y) = \sum_{i=1}^{n} p_i V\Big(y \frac{q_i}{p_i}\Big) + yX.$$

令 $v(y) := \sum_{i=1}^{n} p_i V(y \frac{q_i}{p_i})$，则显然有 $v(y) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[V(y \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}})]$，且

$$\Phi(y) = v(y) + Xy.$$

由于 V 在 $(0,\infty)$ 上连续可微，易推导出 $v(y) = \sum_{i=1}^{n} p_i V(y \frac{q_i}{p_i})$ 也在 $y \in (0,\infty)$ 上连续可微.

此时，优化问题 $\inf_{y>0} \Phi(y)$ 可以被表示为

$$\inf_{y>0} \Phi(y) = \inf_{y>0} \big(v(y) + Xy \big).$$

由于 V 在 $(0,\infty)$ 上连续可微，$y \mapsto v(y) + Xy$ 在 $y \in (0,\infty)$ 上有(唯一)极值点 $\hat{y}$ $(= \hat{y}(X))$ 使得 $v'(\hat{y}(X)) = -X$. 易验证

$$\begin{aligned} \inf_{y>0} \Phi(y) = \inf_{y>0} \big(v(y) + Xy \big) &= v(\hat{y}(X)) + X\hat{y}(X) \\ &= \Phi(\hat{y}(X)) \\ &= \sup_{\xi_1, \cdots, \xi_n} L(\xi_1, \cdots, \xi_n, \hat{y}(X)). \end{aligned}$$

由于 $L(\xi_1, \cdots, \xi_n, \hat{y}(x)) = \sum_{i=1}^{n} p_i \left(U(\xi_i) - \hat{y}(x) \frac{q_i}{p_i} \xi_i \right) + xy$,

易求得其极值点为

$$U'(\hat{\xi}_1) = \hat{y}(x) \frac{q_1}{p_1} \quad \Rightarrow \quad \hat{\xi}_1 = (U')^{-1}\left(\hat{y}(x)\frac{q_1}{p_1}\right) = I\left(\hat{y}(x)\frac{q_1}{p_1}\right),$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$U'(\hat{\xi}_n) = \hat{y}(x) \frac{q_n}{p_n} \quad \Rightarrow \quad \hat{\xi}_n = (U')^{-1}\left(\hat{y}(x)\frac{q_n}{p_n}\right) = I\left(\hat{y}(x)\frac{q_n}{p_n}\right).$$

特别地，我们有：

$$\inf_{y>0} \Phi(y) = \Phi(\hat{y}(x)) = \sup_{\xi_1, \cdots, \xi_n} L(\xi_1, \cdots, \xi_n, \hat{y}(x)) = L(\hat{\xi}_1, \cdots, \hat{\xi}_n, \hat{y}(x)).$$

注意，由于 $\hat{y}(x)$ 满足

$$V'(\hat{y}(x)) = -x,$$

即 $\sum_{i=1}^{n} p_i V'\left(\hat{y}(x)\frac{q_i}{p_i}\right)\frac{q_i}{p_i} = -x$ （利用 $V(y) = \sum_{i=1}^{n} p_i V\left(y\frac{q_i}{p_i}\right)$），

可知 $\sum_{i=1}^{n} q_i (-V')\left(\hat{y}(x)\frac{q_i}{p_i}\right) = x$.

由于 $I = -V'$，若 $\hat{\xi}_i = I\left(\hat{y}(x)\frac{q_i}{p_i}\right)$，$i = 1, \cdots, n$，那么必有：

$$\sum_{i=1}^{n} q_i \hat{\xi}_i = \sum_{i=1}^{n} q_i (-V')\left(\hat{y}(x)\frac{q_i}{p_i}\right) = x.$$

因此 $(\hat{\xi}_1, \cdots, \hat{\xi}_n)$ 满足约束条件 $\sum_{i=1}^{n} q_i \hat{\xi}_i = x$. 由此又得到：

$$L(\hat{\xi}_1, \cdots, \hat{\xi}_n, \hat{y}(x)) = \sum_{i=1}^{n} p_i U(\hat{\xi}_i) - \hat{y}(x) \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} q_i \hat{\xi}_i - x\right)}_{=0}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i U(\hat{\xi}_i).$$

现在我们证明：

$$u(x)=\begin{cases}\sup\limits_{\xi_1,\cdots,\xi_n} \sum_{i=1}^n p_i U(\xi_i) \\ \text{约束条件：} \sum_{i=1}^n q_i \xi_i = x\end{cases}$$

$$=\sum_{i=1}^n p_i U(\hat{\xi}_i) = L(\hat{\xi}_1,\cdots,\hat{\xi}_n,\hat{y}(x)).$$

显然，由于 $\sum_{i=1}^n q_i \hat{\xi}_i = x$，必有 $u(x) \geqslant \sum_{i=1}^n p_i U(\hat{\xi}_i) = L(\hat{\xi}_1,\cdots,\hat{\xi}_n,\hat{y}(x))$.

另一方面，对任何满足约束条件 $\sum_{i=1}^n q_i \xi_i = x$ 的 $(\xi_1,\cdots,\xi_n)$，必然有

$$\sum_{i=1}^n p_i U(\xi_i) \leq L(\xi_1,\cdots,\xi_n,\hat{y}(x)) \leq L(\hat{\xi}_1,\cdots,\hat{\xi}_n,\hat{y}(x)),$$

因为 $L(\hat{\xi}_1,\cdots,\hat{\xi}_n,\hat{y}(x)) = \sup\limits_{(\xi_1,\cdots,\xi_n)} L(\xi_1,\cdots,\xi_n,\hat{y}(x))$.

因此 $u(x)=\begin{cases}\sup\limits_{\xi_1,\cdots,\xi_n} \sum_{i=1}^n p_i U(\xi_i) \\ \sum_{i=1}^n q_i \xi_i = x\end{cases} \leq L(\hat{\xi}_1,\cdots,\hat{\xi}_n,\hat{y}(x)).$

从而有

$$u(x) = L(\hat{\xi}_1,\cdots,\hat{\xi}_n,\hat{y}(x)) = \inf_{y>0} \Phi(y) = \inf_{y>0}\left(V(y)+xy\right).$$

$$= V(\hat{y}(x)) + x\hat{y}(x).$$

我们将以上分析得到的结果总结为以下定理：

定理 4.5（完备市场上的效用最大化）:

假设市场 S 满足无套利且 $\mathcal{M}^e(S)=\{\mathbb{Q}\}$，即 S 为一个完备市场. 假设效用函数

$U:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ 满足设定 4.1.

令 $K(x)=\left\{x+\int_0^T H\,dS : H\in\mathcal{H}\right\}=\left\{X:\Omega\to\mathbb{R}: \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X]=x\right\}$.

令 $u(x)=\sup\limits_{H\in\mathcal{H}}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[U\left(x+\int_0^T H\,dS\right)\right]=\sup\limits_{X\in K(x)}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U(X)]$，　$x\geq 0$.

令 $v(y)=\sum\limits_{i=1}^n p_i V\left(y\frac{q_i}{p_i}\right)=\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[V\left(y\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right)\right]$，这里

$V(\eta)=\sup\limits_{\xi\geq 0}\left(U(\xi)-\eta\xi\right)$，$\eta\geq 0$ 为 U 的共轭函数.

我们有以下结论:

(i)　$u(x)=\inf\limits_{y>0}\left(v(y)+xy\right)$，　$v(y)=\sup\limits_{x>0}\left(u(x)-xy\right)$，

即 u 与 v 互为共轭.

(ii)　$u(x)=\sup\limits_{X\in K(x)}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U(X)]$ 对应的最优解 $\hat{X}(x)\in K(x)$ 满足:

$$\begin{cases}\hat{X}(x)(\omega_i)=\hat{\xi}_i=I\left(\hat{y}(x)\frac{q_i}{p_i}\right), & i=1,\cdots,n,\quad I=(U')^{-1},\\ \sum\limits_{i=1}^n q_i\hat{\xi}_i=x,\end{cases}$$

$\hat{y}(x)$ 满足 $v'(\hat{y}(x))=-x$，即 $\sum\limits_{i=1}^n q_i(-V')\left(\hat{y}(x)\frac{q_i}{p_i}\right)=x$.

(iii)　$u'(x)=\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[U'(\hat{X}(x))\right]$，　$v'(y)=\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[V'\left(y\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right)\right]$.

证明：（i）我们已经推导出 $u(x) = \inf_{y>0}(V(y) + xy)$，见第9页. 由此利用凸分析里的经典结果（不要求掌握）可直接得到 $V(y) = \sup_{x>0}(u(x) - xy)$.

（ii）已在第9页中证明.

（iii）$V(y) = \sum_{i=1}^{n} p_i V\left(y\frac{q_i}{p_i}\right)$，故 $V'(y) = \sum_{i=1}^{n} \cancel{p_i} V'\left(y\frac{q_i}{p_i}\right)\frac{q_i}{\cancel{p_i}} = \sum_{i=1}^{n} q_i V'\left(y\frac{q_i}{p_i}\right)$，

显然 $\sum_{i=1}^{n} q_i V'\left(y\frac{q_i}{p_i}\right) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[V'\left(y\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right)\right]$.

由于 $u(x) = \inf\limits_{y>0}(V(y)+xy) = V(\hat{y}(x)) + x\hat{y}(x)$，见第9页，我们有：

$$u'(x) = V'(\hat{y}(x))\,\hat{y}'(x) + x\hat{y}'(x) + \hat{y}(x).$$

因为 $V'(\hat{y}(x)) = -x$（见第8页），显然又有：

$$u'(x) = -x\cancel{\hat{y}'(x)} + x\cancel{\hat{y}'(x)} + \hat{y}(x) = \hat{y}(x).$$

又由（ii），即 $\hat{X}(x) = I\left(\hat{y}(x)\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right)$，$I = (U')^{-1}$，可得：

$$\hat{y}(x)\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = U'(\hat{X}(x)),$$

综上，可得：

$$u'(x) = \hat{y}(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{因为}\hat{y}(x)\text{为常数}}}{=} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\hat{y}(x)] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\hat{y}(x)\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U'(\hat{X}(x))].$$

故证毕.

□

总结：要解决完备市场上的效用最大化问题，我们依次进行以下步骤：

1. 求出效用函数 U 的共轭 $V(\eta)=\sup_{\xi\geq 0}\left(U(\xi)-\eta\xi\right)$，$\eta\geq 0$.

2. 求出函数 $v(y)=\sum_{i=1}^{n}p_i V\left(y\frac{q_i}{p_i}\right)$ 的导数 $v'(y)$，从而求出函数 $v(y)+xy$ 在 $y>0$ 上的极值点 $\hat{y}(x)$，即解方程

$$v'(\hat{y}(x))=-x.$$

或求出 $u(x)$，利用关系 $\hat{y}(x)=u'(x)$ 求出 $\hat{y}(x)$.

3. 求出 $I=(U')^{-1}$，即 U' 的逆映射，利用步骤 2 中得到的 $\hat{y}(x)$ 依次计算

$$\hat{\xi}_1=I\left(\hat{y}(x)\frac{q_1}{p_1}\right),\quad \cdots,\quad \hat{\xi}_n=I\left(\hat{y}(x)\frac{q_n}{p_n}\right).$$

4. $\hat{X}(x)(\omega_i)=\hat{\xi}_i(x)$，$i=1,\cdots,n$ 即是 $u(x)=\sup_{X\in K(x)}\mathbb{E}_{P}[U(X)]$ 在 $K(x)$ 中的最优解；且 $u(x)=\sum_{i=1}^{n}p_i U(\hat{\xi}_i(x))$ 为最大平均效用.