Chapter 3. Pricing by No-Arbitrage

假设： $\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$， $\mathbb{P}$ 为 Ω 上的给定概率测度，且 $\mathbb{P}(\{\omega_i\})>0$, $i=1,\cdots,n$.

$S_t: \Omega \to \mathbb{R}$, $t=0,1,\cdots,T$： 股票价格演化过程，

$\mathcal{F}_0 = \{\phi, \Omega\}$， $\mathcal{F}_t = \sigma(S_0, S_1, \cdots, S_t)$， $t=1,\cdots,T$： S 生成的信息流

$\mathcal{H} = \{ H = (H_t)_{t=1,\cdots,T}$： H 为可预测过程 (predictable process)，即
H_t 关于 $\mathcal{F}_{t-1}$ 可测 对任何 $t=1,\cdots,T$ 成立$\}$.

使用 chapter 2 里的记号，令

$$K = \left\{ \int_0^T H\,dS : H \in \mathcal{H} \right\}$$

$\int_0^T H\,dS$：起始资本为 0 的投资组合 H 在时间终点 T 的价值

对于 $a \in \mathbb{R}$，令 $K_a = a + K = \left\{ a + \int_0^T H\,dS : H \in \mathcal{H} \right\}$. 显然，

$a + \int_0^T H\,dS$ 描述的是 起始资本为 a 的 投资组合 H 在时间终点 T 的价值.

若 $f \in K_a$， 那么存在某个交易策略/投资组合 H 使得

$$f = a + \int_0^T H\,dS.$$

换句话说， f 可以通过 使用启动资金 a，交易策略/投资组合 H 投资股市 S 被复刻 (replicate). 在这种情形下，我们称 投资组合/交易策略 H 为 金融产品 f 的 对冲策略 (Hedging Strategy)，"启动资金/初始资本" a 为 金融产品 f 的 ($t=0$ 时刻) 公平价格 (fair price). 我们称这样的 $f \in K_a$ 为 " contingent claim attainable at price a".

例子： Cox-Ross-Rubinstein 模型上的欧式期权(European Call option)

$$\begin{cases} S_0 = 1, \quad \dfrac{S_t}{S_{t-1}} = Y_t, \quad t = 1, 2, \cdots, T, \\ Y_t = 1+a \text{ 或 } 1+b, \quad a < 0 < b, \quad t = 1, 2, \cdots, T. \end{cases}$$

由 Chapter 2 的例子 1 (第12页) 可知该市场存在唯一的等价鞅测度 $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}^e(S)$ 满足：

$Y_1, Y_2, \cdots, Y_T$ 在 $\mathbb{Q}$ 下独立，且

$$\mathbb{Q}[Y_1 = 1+a] = \cdots = \mathbb{Q}[Y_T = 1+a] = \frac{b}{b-a},$$

$$\mathbb{Q}[Y_1 = 1+b] = \cdots = \mathbb{Q}[Y_T = 1+b] = \frac{-a}{b-a}.$$

我们可以证明：该市场上的欧式期权(European Call option)

$$\max(S_T - v, 0) = (S_T - v)^+ \in K_a$$

且它的公平价格 $a = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(S_T - v)^+]$. 并且我们还可以求出该欧式期权的对冲策略(Hedging strategy) H，即 $a + \int_0^T H\,dS = (S_T - v)^+$. //

令 $C = \{ g \in L^0(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P}) :$ 存在某个 $f \in K$ 使得 $f \geq g \}$.

类似地，对于 $a \in \mathbb{R}$，令 $C_a = a + C = \{ a + g : g \in C \}$.

显然，若 $g \in C_a$，那么存在某个交易策略/投资组合 H 使得

$$g \leq a + \int_0^T H\,dS.$$

这意味着，通过起始资金 a 与交易策略 H（投资至股市 S）可以在复刻 (replicate) 金融产品 g 之外还有盈余. 因此我们称 $g \in C_a$ 为: "contingent claim super-replicable at price a".

本章的主要内容即是研究资产定价 (Pricing of Assets)，对冲策略设计与无套利 (No Arbitrage) 条件之间的关系. 这里

- "资产定价" 指找到金融产品 f 的 "公平价格" a;

- "对冲策略" 指交易策略 H 使得 $f = a + \int_0^T H\,dS$.

首先我们有如下结果（作为 Fundamental Theorem of Asset Pricing 的推论）:

推论3.1: 假设市场 S 无套利 (No Arbitrage). 设 $f \in K_a$ 为某个 "contingent claim attainable at price a"，即存在 $a \in \mathbb{R}$ 及某个 $H \in \mathcal{H}$ 使得

$$f = a + \int_0^T H\,dS.$$

那么这样的 a 与 $\left(\int_0^t H\,dS\right)_{t=0,1,\cdots,T}$ 是唯一的，且对任何等价鞅测度 $\mathbb{Q} \in M^e(S)$，都有

$$a = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f], \qquad a + \int_0^t H\,dS = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f \mid \mathcal{F}_t], \qquad t = 1, 2, \cdots, T.$$

证明: 首先证明唯一性. 假设 $f = a^1 + \int_0^T H^1 dS = a^2 + \int_0^T H^2 dS$，不妨令 $a^1 > a^2$. 那么

$$0 < a^1 - a^2 = \int_0^T (H^2 - H^1)\,dS.$$

这显然意味着 $H^2 - H^1$ 是一个套利机会，与市场 S 上无套利的假设矛盾. 因此 $a^1 = a^2$ 必须成立.

此时我们有

$$f = a + \int_0^T H^1 dS = a + \int_0^T H^2 dS \quad (a = a^1 = a^2).$$

假设存在 $t = 1, 2, \cdots, T$ 使得 $\int_0^t H^1 dS \neq \int_0^t H^2 dS$，即

$$\mathbb{P}\left[\int_0^t H^1 dS - \int_0^t H^2 dS \neq 0 \right] > 0.$$

由于

$$\mathbb{P}\left[\int_0^t H^1 dS - \int_0^t H^2 dS \neq 0 \right] = \mathbb{P}\left[\left\{ \int_0^t H^1 dS - \int_0^t H^2 dS > 0 \right\} \cup \left\{ \int_0^t H^1 dS - \int_0^t H^2 dS < 0 \right\} \right]$$

$$= \mathbb{P}\left[\int_0^t H^1 dS - \int_0^t H^2 dS > 0 \right] + \mathbb{P}\left[\int_0^t H^1 dS - \int_0^t H^2 dS < 0 \right] > 0,$$

必然有 $\mathbb{P}\left[\int_0^t H^1 dS - \int_0^t H^2 dS > 0 \right] > 0$ 或 $\mathbb{P}\left[\int_0^t H^1 dS - \int_0^t H^2 dS < 0 \right] > 0$ 其中之一成立. 故不妨设 $\mathbb{P}\left[\int_0^t H^1 dS - \int_0^t H^2 dS > 0 \right] > 0$.

令 $A = \left\{ \int_0^t H^1 dS - \int_0^t H^2 dS > 0 \right\}$. 显然 $A \in \mathcal{F}_t$. 现在定义一个新的交易策略

$$\widetilde{H}_k = \begin{cases} 0, & 1 \leq k \leq t \\ (H^2_k - H^1_k) \mathbb{1}_A, & k = t+1, \cdots, T. \end{cases}$$

利用 $A \in \mathcal{F}_t$ 及 $H^1 - H^2$ 为可预测过程的条件，易验证 $\widetilde{H}_k$，$k = 1, \cdots, T$ 也为一个可预测过程，且由以上定义，有：

$$\int_0^T \widetilde{H} \, dS = \sum_{k=t+1}^{T} (H^2_k - H^1_k) \mathbb{1}_A (S_k - S_{k-1})$$

$$= \mathbb{1}_A \left(\int_0^T (H^2 - H^1) dS - \int_0^t (H^2 - H^1) dS \right).$$

由于 $f = a + \int_0^T H^1 dS = a + \int_0^T H^2 dS$，可得：

$$\int_0^T (H^2 - H^1)\, dS = 0.$$

因此 $$\int_0^T \widetilde{H}\, dS = 1_A \int_0^t -(H^2 - H^1)\, dS = 1_A \int_0^t (H^1 - H^2) dS.$$

由 A 的定义，可知若 $\underbrace{\omega \in A}_{\Downarrow}$，有 $\left(\int_0^T \widetilde{H} dS\right)(\omega) = \underbrace{1_A(\omega)}_{=1}\left(\int_0^t (H^1 - H^2) dS\right)(\omega)$

$$\left(\int_0^T H^1 dS\right)(\omega) - \left(\int_0^T H^2 dS\right)(\omega) > 0$$

$$= \left(\int_0^t H^1 dS - \int_0^t H^2 dS\right)(\omega)$$

$$> 0,$$

若 $\omega \notin A$，则显然 $\left(\int_0^T \widetilde{H} dS\right)(\omega) = \underbrace{1_A(\omega)}_{=0}\left(\int_0^t (H^1 - H^2) dS\right)(\omega) = 0.$

因此，$\int_0^T \widetilde{H}\, dS$ 满足：$\left(\int_0^T \widetilde{H} dS\right)(\omega) \geq 0$ 对任何 $\omega \in \Omega$ 成立，且

$$\mathbb{P}\left[\int_0^T \widetilde{H} dS > 0\right] \geq \mathbb{P}[A] > 0.$$

故 $\widetilde{H}$ 为市场 S 上的一个套利机会，与假设"无套利"矛盾。因此必有

$$\int_0^t H^1 dS = \int_0^t H^2 dS \quad \text{对任何 } t = 1, \cdots, T \text{ 成立}.$$

最后，由于 $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}^e(S)$，即 S 为关于 $\mathbb{Q}$ 的鞅，我们有

$$\int_0^t H dS, \quad t = 0, 1, \cdots, T \text{ 也为关于 } \mathbb{Q} \text{ 的鞅（见第3次作业，习题2），}$$

因此若 $f = a + \int_0^T H dS$，可推出：对任何 $t = 0, 1, \cdots, T$，

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f \mid \mathcal{F}_t] = a + \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\int_0^T H dS \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right]$$

$$= a + \int_0^t H dS,$$

且 $a = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f \mid \mathcal{F}_0] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f]$，因为 $\mathcal{F}_0 = \{\phi, \Omega\}$ 且 $\int_0^t H\,dS = 0$ 若 $t=0$.

$\square$

现在我们回到 Cox-Ross-Rubinstein 模型上的欧式期权定价与对冲问题.

已知 $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}^e(S)$ 为唯一鞅测度，且：

$$\begin{cases} Y_1, Y_2, \cdots, Y_T \text{ 在 } \mathbb{Q} \text{ 下独立}, \\ \mathbb{Q}[Y_1 = 1+a] = \cdots = \mathbb{Q}[Y_T = 1+a] = \frac{b}{b-a}, \\ \mathbb{Q}[Y_1 = 1+b] = \cdots = \mathbb{Q}[Y_T = 1+b] = \frac{-a}{b-a}. \end{cases}$$

$f(\omega) = (S_T(\omega) - v)^+$，为欧式期权 (European Call option) 在 T 时刻的价值.

由以上推论 3.1 可知，若 $(S_T - v)^+ = a + \int_0^T H\,dS$，那么必然有

$$\underline{a = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(S_T - v)^+]}\ ; \quad \underline{a + \int_0^t H\,dS = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(S_T - v)^+ \mid \mathcal{F}_t]}, \quad t = 1, \cdots, T.$$

因此，要求出 a 与 H，需要计算 $\underline{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(S_T - v)^+]}$ 与 $\underline{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(S_T - v)^+ \mid \mathcal{F}_t]}$，$t = 1, \cdots, T$.

对任何 $t = 0, 1, \cdots, T$，令 $Z_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(S_T - v)^+ \mid \mathcal{F}_t]$.

由于 $S_T = S_t \prod_{k=t+1}^{T} Y_k$，我们有

$$\begin{aligned} Z_t(\omega) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(S_T - v)^+ \mid \mathcal{F}_t](\omega) \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big[\Big(S_t \prod_{k=t+1}^{T} Y_k - v\Big)^+ \Big| \mathcal{F}_t\Big](\omega), \end{aligned}$$

$\big(\mathcal{F}_t = \sigma(Y_1, \cdots, Y_t),\ t = 1, \cdots, T, \quad \mathcal{F}_0 = \{\phi, \Omega\}\big)$.

显然，由于 $S_t = \underbrace{S_0}_{=1} \prod_{k=1}^{t} Y_k$，$S_t$ 必然关于 $\mathcal{F}_t = \sigma(Y_1, \cdots, Y_t)$ 可测，

因此可以得到：

$$Z_t(\omega) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big[\big(\underbrace{S_t(\omega)}_{\substack{\text{在信息集合}\mathcal{F}_t\text{下，}\\ \text{我们明确知道}S_t\text{的取值}}} \prod_{k=t+1}^{T} Y_k - v \big)^+ \,\Big|\, \mathcal{F}_t \Big](\omega)$$

由于 $Y_{t+1}, \cdots, Y_T$ 与 $Y_1, \cdots, Y_t$ 在 $\mathbb{Q}$ 下面独立，且 $\mathcal{F}_t = \sigma(Y_1, \cdots, Y_t)$

$$= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big[\big(S_t(\omega) \prod_{k=t+1}^{T} Y_k - v \big)^+ \Big] = C(t, S_t(\omega)),$$

这里 $C(t, x) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big[\big(x \prod_{k=t+1}^{T} Y_k - v \big)^+ \Big]$. 显然，由于 $Y_{t+1}, \cdots, Y_T$ 为 $\mathbb{Q}$ 下独立的随机变量且 $\mathbb{Q}[Y_{t+1} = 1+a] = \cdots = \mathbb{Q}[Y_T = 1+a] = \frac{b}{b-a}$,

$$\mathbb{Q}[Y_{t+1} = 1+b] = \cdots = \mathbb{Q}[Y_T = 1+b] = \frac{-a}{b-a},$$

可得

$$C(t, x) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big[\big(x \prod_{k=t+1}^{T} Y_k - v \big)^+ \Big] = \sum_{j=0}^{T-t} \binom{T-t}{j} \left(\frac{b}{b-a}\right)^j \left(\frac{-a}{b-a}\right)^{T-t-j} \left(x(1+a)^j (1+b)^{N-t-j} - v \right)^+$$

由以上，可知，若 H 满足

$$a + \int_0^t H\, dS = Z_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\big[(S_T - v)^+ \,|\, \mathcal{F}_t \big] \text{ 对 } t = 1, \cdots, T \text{ 成立},$$

那么：

$$\int_0^t H\, dS - \int_0^{t-1} H\, dS = H_t (S_t - S_{t-1}) = Z_t - Z_{t-1}$$

$$= C(t, S_t) - C(t-1, S_{t-1}),$$

由于 $S_t = S_{t-1} Y_t$，又有：

$$H_t (S_t - S_{t-1}) = H_t (S_{t-1} Y_t - S_{t-1}) = H_t S_{t-1} (Y_t - 1),$$

即：

$$H_t S_{t-1} (Y_t - 1) = c(t, S_{t-1} Y_t) - c(t-1, S_{t-1}).$$

由于 $H_t S_{t-1}$ 关于 $\mathcal{F}_{t-1}$ 可测，Y_t 与 $\mathcal{F}_{t-1} = \sigma(Y_1, \cdots, Y_{t-1})$ 独立(关于 $\mathbb{Q}$)，

以上等式意味着（$H_t S_{t-1}$ 的取值与 Y_t 的取值无关）

$$\begin{cases} H_t S_{t-1} (\underset{\text{当 } Y_t = 1+a \text{ 时}}{1+a} - 1) = c(t, S_{t-1}(1+a)) - c(t-1, S_{t-1}), \\ H_t S_{t-1} (\underset{\text{当 } Y_t = 1+b \text{ 时}}{1+b} - 1) = c(t, S_{t-1}(1+b)) - c(t-1, S_{t-1}). \end{cases}$$

因此可推出：

$$H_t = \frac{c(t, S_{t-1}(1+b)) - c(t, S_{t-1}(1+a))}{(b-a) S_{t-1}}, \quad t = 1, \cdots, T,$$

为欧式期权 $(S_T - V)^+$ 的对冲策略.

下面我们证明以下重要结果:

定理 3.2 (完备金融市场): 假设市场 S 满足无套利 (No Arbitrage) 条件. 那么以下说法等价:

(i) 有且只有一个等价鞅测度 $\mathbb{Q}$,

(ii) 任何 $\mathcal{F}_T$ 可测的随机变量 f 都可以表示为

$$f = a + \int_0^T H\,dS, \quad a \in \mathbb{R},\ H \in \mathcal{H} \text{ (为某个可预测过程)}$$

(即 $f \in K_a$ 对某个 $a \in \mathbb{R}$).

此时 $a = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f]$, $\int_0^t H\,dS$, $t = 0, \cdots, T$ 满足

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f \mid \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f] + \int_0^t H\,dS.$$

以上 (i) 或 (ii) 条件成立时, 我们称该市场 S 为完备市场 (Complete financial market).

由于 $\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$, 如同我们证明 Fundamental Theorem of Asset Pricing 一样,
我们将任何定义在 Ω 上的随机变量 $f: \Omega \to \mathbb{R}$ 等同于 $\mathbb{R}^n$ 里的向量, 即

$$\begin{cases} f: \Omega \to \mathbb{R} \ \text{ 被视为 } \ (f(\omega_1), \cdots, f(\omega_n)) \in \mathbb{R}^n, \\ \vec{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ \text{ 被视为 } \ f: \Omega \to \mathbb{R},\ f(\omega_1) = x_1, \cdots, f(\omega_n) = x_n. \end{cases}$$

在这种关系下, K, K_a, C, C_a 均被视为 $\mathbb{R}^n$ 里的子集.

令 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的欧式内积, 即对 $\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = \vec{x} \cdot \vec{y}.$$

定义 3.3 (Polar 与 Bipolar): 设 $A \subset \mathbb{R}^n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 里的子集.

A 的 Polar $A^\circ = \{ \vec{y} \in \mathbb{R}^n : \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \leq 1$ 对任何 $\vec{x} \in A \}$;

A 的 bipolar $A^{\circ\circ} = (A^\circ)^\circ = \{ \vec{z} \in \mathbb{R}^n : \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle \leq 1$ 对任何 $\vec{y} \in A^\circ \}$.

习题: 若 A 为一个锥 (cone), 即若 $\vec{x} \in A$, 则对任何 $a \geq 0$, 有 $a\vec{x} \in A$,

那么 $A^\circ = \{ \vec{y} \in \mathbb{R}^n : \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \leq 0$ 对任何 $\vec{x} \in A \}$.

定理 3.4 (Bipolar Theorem): 设 $A \subset \mathbb{R}^n$ 为一个凸集 (convex set), 那么

$A^{\circ\circ} = \overline{A} = A$ 的闭包 $= \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n :$ 存在 $x_n \in A,\ n \geq 1$, 使得 $x_n \xrightarrow{n \to \infty} x \}$.

我们定义了集合 $C = \{ g : \Omega \to \mathbb{R} :$ 存在某个 $f \in K$ 使得 $f \geq g \}$, 并将其视为 $\mathbb{R}^n$ 中的一个子集.

定理 3.5: 假设 $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$. 将 $C = \{ g : \Omega \to \mathbb{R} :$ 存在某个 $f \in K$ 使得 $f \geq g \}$ 视为 $\mathbb{R}^n$ 里的子集. 那么

(i) C 为一个凸锥 (convex cone), 即 C 为凸集且为一个锥.

(ii) $C = \overline{C}$, 即 C 为一个闭集.

由于 C 为一个凸锥, 我们有 $C^\circ = \{ \vec{y} \in \mathbb{R}^n : \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \leq 0$ 对任何 $\vec{x} \in C \}$.

由于 $C = \overline{C}$, 利用 Bipolar Theorem (定理 3.4) 可得: $C^{\circ\circ} = \overline{C} = C$.

利用以上结果，我们可以证明：

定理 3.6. 令 $\mathcal{M}^a(S) = \{\mathbb{Q}$：$\Omega$上的概率测度，且 $S=(S_t)_{t=0,\cdots,T}$ 为关于$\mathbb{Q}$的鞅$\}$，
$\mathcal{M}^e(S) = \{\mathbb{Q}$：$\mathbb{Q}$是$\mathbb{P}$的等价测度(即 $\mathbb{Q}(\{\omega_i\})>0$ 对 $i=1,\cdots,n$ 成立)，且
$S=(S_t)_{t=0,\cdots,T}$ 为关于$\mathbb{Q}$的鞅$\}$.

令 $g:\Omega\to\mathbb{R}$ 为任一随机变量.

若 S 市场满足无套利(No Arbitrage)条件，那么以下说法等价：

(i) $g\in C$，

(ii) $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[g]\le 0$ 对任何 $\mathbb{Q}\in\mathcal{M}^a(S)$ 成立，

(iii) $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[g]\le 0$ 对任何 $\mathbb{Q}\in\mathcal{M}^e(S)$ 成立.

证明：(i) $\Rightarrow$ (ii)：由定理 2.5 可知，任何$\mathbb{Q}\in\mathcal{M}^a(S)$都满足

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[g]\le 0 \quad (\text{若 } g\in C).$$

(ii) $\Rightarrow$ (i)：对任何$\mathbb{Q}\in\mathcal{M}^a(S)$，我们将其视为$\mathbb{R}^n$里的一个向量，即

$$\mathbb{Q}\mapsto(\mathbb{Q}(\{\omega_1\}),\cdots,\mathbb{Q}(\{\omega_n\}))\in\mathbb{R}^n.$$

对任何 $h\in C$，将其视为 $(h(\omega_1),\cdots,h(\omega_n))\in\mathbb{R}^n$ 后，可知

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[h] = h(\omega_1)\mathbb{Q}(\{\omega_1\})+\cdots+h(\omega_n)\mathbb{Q}(\{\omega_n\})$$

$$=\langle(h(\omega_1),\cdots,h(\omega_n)),(\mathbb{Q}(\{\omega_1\}),\cdots,\mathbb{Q}(\{\omega_n\}))\rangle.$$

由定理 2.5 可知 $\mathbb{Q}\in\mathcal{M}^a(S) \iff \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[h]\le 0$ 对任何 $h\in C$ 成立.

即，$\langle(h(\omega_1),\cdots,h(\omega_n)),(\mathbb{Q}(\{\omega_1\}),\cdots,\mathbb{Q}(\{\omega_n\}))\rangle\le 0$

$$\overset{C\text{为凸锥}}{\Longrightarrow} \mathbb{Q}=(\mathbb{Q}(\{\omega_1\}),\cdots,\mathbb{Q}(\{\omega_n\}))\in C^{\circ},$$

这里 C 被视为 $\{(h(\omega_1),\cdots,h(\omega_n))\in\mathbb{R}^n: h\in C\}\subset\mathbb{R}^n$.

另一方面，设 $\vec{q}=(q_1,\cdots,q_n)\in C^{\circ}$，即对任何 $h\in C$，

$$h(\omega_1)q_1+\cdots+h(\omega_n)q_n\le 0 \text{ 成立.}$$

由 C 的定义可知 $L^0_-(\Omega,\mathcal{F}_T,\mathbb{P})\subset C$，即任何 $\{\vec{x}=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n:\ x_1\le 0,\ x_2\le 0,\ \cdots,x_n\le 0\}$ 属于 C. 那么取

$$\begin{cases} h(\omega_1)=-1, & h(\omega_2)=0, & \cdots, & h(\omega_n)=0 \\ h(\omega_1)=0, & h(\omega_2)=-1, & \cdots, & h(\omega_n)=0 \\ \vdots & & & \vdots \\ h(\omega_1)=0, & h(\omega_2)=0, & \cdots, & h(\omega_n)=-1 \end{cases}$$

，由以上条件可得

$$q_1\ge 0,\qquad q_2\ge 0,\qquad \cdots,\qquad q_n\ge 0.$$

若 $\vec{q}=(q_1,\cdots,q_n)\neq\vec{0}=(0,\cdots,0)$，那么必有某个 $q_i>0$（同时其它 $q_j\ge 0$），此时 $u=q_1+\cdots+q_n>0$. 定义 $\mathbb{Q}^{\vec{q}}$ 为 Ω 上的概率测度满足

$$\mathbb{Q}^{\vec{q}}(\{\omega_1\})=\frac{1}{u}q_1,\quad\cdots,\quad \mathbb{Q}^{\vec{q}}(\{\omega_n\})=\frac{1}{u}q_n,$$

那么对任何 $h\in C$，都有 $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^{\vec{q}}}[h]=\frac{1}{u}(h(\omega_1)q_1+\cdots+h(\omega_n)q_n)\le 0$ 成立.

由定理 2.5 可得 $\mathbb{Q}^{\vec{q}}\in\mathcal{M}^a(S)$. 即，$\vec{q}=(q_1,\cdots,q_n)=u\,\mathbb{Q}^{\vec{q}}$，$\mathbb{Q}^{\vec{q}}\in\mathcal{M}^a(S)$.

若 $\vec{q}=(q_1,\cdots,q_n)=\vec{0}=(0,\cdots,0)$，那么显然此时 $\vec{q}=0\cdot\mathbb{Q}$ 对任何 $\mathbb{Q}\in\mathcal{M}^a(S)$ 成立.（注意，由于 S 满足无套利条件，故必存在某个 $\mathbb{Q}\in\mathcal{M}^e(S)\subset\mathcal{M}^a(S)$）. 这意味着

$$\boxed{C^{\circ}=\{a\mathbb{Q}:\ a\ge 0,\ \mathbb{Q}\in\mathcal{M}^a(S)\}}$$

由假设 (i)，$g=(g(\omega_1),\cdots,g(\omega_n))\in\mathbb{R}^n$ 满足

$$\underset{\text{对任何 }\mathbb{Q}\in\mathcal{M}^a(S)}{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[g]\le 0}=\underset{\text{对任何 }\mathbb{Q}\in\mathcal{M}^a(S)}{\langle(g(\omega_1),\cdots,g(\omega_n)),(\mathbb{Q}(\{\omega_1\}),\cdots,\mathbb{Q}(\{\omega_n\}))\rangle\le 0},$$

那么必然有 $\langle(g(\omega_1),\cdots,g(\omega_n)),\ a(\mathbb{Q}(\{\omega_1\}),\cdots,\mathbb{Q}(\{\omega_n\}))\rangle\le 0$

对任何 $a\ge 0$，任何 $\mathbb{Q}\in\mathcal{M}^a(S)$

这意味着

$$(g(\omega_1), \cdots, g(\omega_n)) \in \{ a\mathbb{Q} : a \ge 0, \mathbb{Q} \in \mathcal{M}^a(S)\}^\circ$$

$$= (C^\circ)^\circ = C^{\circ\circ}.$$

由 Bipolar Theorem (定理 3.4) 与定理 3.5 可得:

$$g = (g(\omega_1), \cdots, g(\omega_n)) \in C^{\circ\circ} = \overline{C} = C.$$

因此 (ii) $\Rightarrow$ (i).

(ii) $\Rightarrow$ (iii): 由于 $\mathcal{M}^e(S) \subset \mathcal{M}^a(S)$, 显然有 (ii) $\Rightarrow$ (iii).

(iii) $\Rightarrow$ (ii): 由于 S 满足无套利, 故由 Fundamental Theorem of Asset Pricing 可得存在一个 $\mathbb{Q}^* \in \mathcal{M}^e(S)$. 令 $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}^a(S)$. 对任何 $0 < \lambda \le 1$, 可证明

$$\lambda \mathbb{Q}^* + (1-\lambda)\mathbb{Q} \in \mathcal{M}^e(S).$$

由 (iii), 对任何 $0<\lambda\le 1$, 任何 $g \in C$, 都有

$$\mathbb{E}_{\lambda\mathbb{Q}^* + (1-\lambda)\mathbb{Q}}[g] = \left\langle (g(\omega_1), \cdots, g(\omega_n)), \begin{pmatrix} \lambda\mathbb{Q}^*(\{\omega_1\}) + (1-\lambda)\mathbb{Q}(\{\omega_1\}), \\ \vdots \\ \lambda\mathbb{Q}^*(\{\omega_n\}) + (1-\lambda)\mathbb{Q}(\{\omega_n\}) \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\le 0.$$

令 $\lambda \downarrow 0$, 可得

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[g] \le 0.$$

$\square$

引理 3.7: 若 S 满足无套利条件 (No Arbitrage)，那么

$$C \cap (-C) = K, \quad \text{这里 } -C = \{-h : h \in C\}.$$

证明：由于 K 是一个向量空间，若 $f \in K$ 则 $-f \in K$. 又由于 $K \subset C$，可得 $K \subset -C$.

因此 $K \subset C \cap (-C)$ 显然成立.

现假设 $g \in C \cap (-C)$. 由于 $g \in C$，存在 $f_1 \in K$, $h_1 \in L_+^0$ 使得 $f_1 - h_1 = g$.

由于 $g \in -C$，即 $-g \in C$，存在 $f_2 \in K$，$h_2 \in L_+^0$ 使得 $f_2 - h_2 = -g$，即

$g = -f_2 + h_2$. 注意 $-f_2 \in K$. 由于 $g = f_1 - h_1 = -f_2 + h_2$，有：

$$f_1 + f_2 = h_1 + h_2 \in L_+^0 \text{ (由于 } h_1 \in L_+^0,\ h_2 \in L_+^0).$$

由于 $f_1 + f_2 \in K$，且无套利条件使得 $K \cap L_+^0 = \{0\}$，可得 $h_1 + h_2 = 0$，即 $h_1 = 0$，$h_2 = 0$.

因此 $g = f_1 = -f_2 \in K$. 这代表 $C \cap (-C) \subset K$. □

推论 3.8: 令 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ 为随机变量. 若 S 满足无套利条件，那么以下说法等价：

(i) $f \in K$,

(ii) $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f] = 0$ 对任何 $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}^a(S)$ 成立,

(iii) $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f] = 0$ 对任何 $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}^e(S)$ 成立.

证明：由于 $K = C \cap (-C)$ (引理 3.7)，利用定理 3.6 易证得

$$f \in K \iff f \in C,\ f \in -C \iff \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f] \le 0,\ \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[-f] \le 0 \text{ 对任何 } \mathbb{Q} \in \mathcal{M}^a(S) \text{ 成立}$$

$$\iff \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f] \le 0,\ \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[-f] \le 0 \text{ 对任何 } \mathbb{Q} \in \mathcal{M}^e(S) \text{ 成立}.$$

显然 $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f] \le 0$ 与 $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[-f] \le 0$ 同时成立当且仅当 $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f] = 0$. □

现在我们证明本章的主要定理 3.2 (完备金融市场):

(i) $\Rightarrow$ (ii): 假设存在唯一一个等价鞅测度 $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}^e(S)$. 那么对于任何 $\mathcal{F}_T$ 可测的随机变量 $f: \Omega \to \mathbb{R}$, 有

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f]] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f] - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f] = 0.$$

即, 令 $a = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f]$, 我们有

$$\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{Q}}}[f-a] = 0 \quad \text{对所有 } \tilde{\mathbb{Q}} \in \mathcal{M}^e(S) \text{ 成立 (因为 } \mathcal{M}^e(S) \text{ 仅包含一个元素 } \mathbb{Q}).$$

由推论 3.8 可得 $f - a \in K$, 或 $f \in a + K = K_a$. 由 K_a 的定义可知, 存在一个可预测过程 $H \in \mathcal{H}$ 使得 $f = a + \int_0^T H\,dS$. 这意味着 (ii) 成立.

(ii) $\Rightarrow$ (i): 假设任何 $\mathcal{F}_T$ 可测的随机变量 $f: \Omega \to \mathbb{R}$ 均可以被表示为

$$f = a + \int_0^T H\,dS \quad \text{对某个 } a \in \mathbb{R} \text{ 以及某个可预测过程 } H \in \mathcal{H}.$$

由于已假设市场 S 无套利, 推论 3.1 告诉我们这样的常数 $a \in \mathbb{R}$ 是唯一的, 且对任何 $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}^e(S)$, 都有 $a = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f]$. 因此, 若 $\mathbb{Q}_1 \in \mathcal{M}^e(S)$, $\mathbb{Q}_2 \in \mathcal{M}^e(S)$, 我们有: 对任何 $\mathcal{F}_T$ 可测的随机变量 $f: \Omega \to \mathcal{F}_T$, 都有

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_1}[f] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_2}[f] \quad (= a, \text{ 若 } f = a + \int_0^T H\,dS).$$

特别地, 对任何 $A \in \mathcal{F}_T$, $\mathbb{1}_A$ 为 $\mathcal{F}_T$ 可测, 故有:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_1}[\mathbb{1}_A] = \mathbb{Q}_1(A) = \mathbb{Q}_2(A) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_2}[\mathbb{1}_A].$$

因此 $\mathbb{Q}_1 = \mathbb{Q}_2$, 即, $\mathcal{M}^e(S)$ 只包含一个元素 $\{\mathbb{Q}\}$. 这证明了 (ii) $\Rightarrow$ (i) 成立.

该定理的其它内容已在推论 3.1 中被证明.

$\square$