金融数学导论复习题库

目录

1 基础知识

1. (离散时间上)金融市场模型的数学定义：Ω：样本空间，$\mathbb{F} = (\mathbb{F}_t)_{t\in I}(I = \{0, 1, \ldots, T\})$：域流/信息流(filtration)，$\mathbb{P}$：概率测度。
2. 可预测过程(predictable process)的定义，自负盈亏的交易策略(self-financing strategy)的定义，停时(stopping time)的定义，随机积分(stochastic integral)的定义。
3. 条件期望(conditional expectation)的数学定义与一系列重要性质，比如tower property，鞅(martingale)的定义。
4. 如何用停时表达一个低买高卖的交易策略：第一次作业第三题，第四题。

2 无套利与资产定价基本定理

1. 套利(arbitrage)与无套利(No arbitrage)的数学定义，用集合$K = \{\int_0^T H_t dS_t : H \text{ is predictable}\}$与$L^0_+ = \{f : \Omega \to \mathbb{R} : f(\omega) \geq 0 \quad \forall \omega \in \Omega\}$来表示套利与无套利。

2. 等价鞅测度(equivalent martingale measure)的定义。
3. 讲义4，定理2.5的全部证明过程：
   对于一个与$\mathbb{P}$等价的概率测度$\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$，以下说法等价：
   - $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}^e(S)$，即$\mathbb{Q}$是一个等价鞅测度；
   - $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f] = 0$对任何$f \in K$成立。
   - $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[g] \leq 0$对任何$f \in C$成立。$C = \{g : \Omega \to \mathbb{R} : g \leq f$ 对某个 $f \in K\}$。
4. 在给定Hahn-Banach separation theorem的前提下，证明资产定价基本定理(Fundamental Theorem of Asset Pricing)。即讲义4，定理2.6的证明。
5. Cox-Ross-Rubinstein模型的数学描述以及该市场上等价鞅测度的具体表示。

3 完备市场上的金融衍生品定价

1. 证明：若市场S无套利，那么对于随机变量$f = a + \int_0^T H_t dS_t$，$H_t, t = 1, \ldots, T$为某个可预测过程，必然有$a = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f]$，$\int_0^t H_s dS_s = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f|\mathcal{F}_t]$对任何$t = 1, \ldots, T$以及任何$\mathbb{Q} \in \mathcal{M}^e(S)$成立，且这样的实数$a$是唯一的。见讲义5，推论3.1。
2. 完备市场(complete market)的定义与等价条件：S是一个完备市场当且仅当仅存在一个等价鞅测度当且仅当任何$\mathcal{F}_T$可测的随机变量f都可以表示为$f = a + \int_0^T H_t dS_t$，$H$为某个可预测过程。见讲义5定理3.2。该定理的证明不要求掌握。
3. Cox-Ross-Rubinstein市场上欧式期权的定价与对冲策略计算，即，计算$a = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(S_T - v)^+]$以及求出一个可预测过程$H$使得$(S_T - v)^+ = a + \int_0^T H_t dS_t$。见讲义5。

4 效用最大化问题

1. 效用函数U需要满足的假设：U为严格递增，连续可微的凹函数，$U'(\infty) = \lim_{x \to \infty} U'(x) = 0$，$U'(0) = \lim_{x \to 0} U'(x) = \infty$。
2. 完备市场上效用最大化问题的求解过程：
   - 解释为何求解$u(x) = \sup_{H:\,\text{可预测过程}} \mathbb{E}[U(x + \int_0^T H dS)]$等价于求解线性规划问题
   $$\sup_{(\xi_1, \ldots, \xi_n) : \sum_{i=1}^n q_i \xi_i = x} \sum_{i=1}^n U(\xi_i) p_i,$$
   $p_i = \mathbb{P}(\omega_i)$，$q_i = \mathbb{Q}(\omega_i)$，$i = 1, \ldots, n$。
   - 以上最大化问题对应的Lagrangian函数的具体表示。

- U的共轭函数V的数学定义，对特殊效用函数$U(x) = \ln(x)$或者$U(x) = x^\alpha/\alpha$求解V的表达式以及V'的表达式。即第四次作业，第二题。
- 效用最大化问题$u(x) = \sum_{i=1}^n U(\hat{\xi}_i)$的解$\hat{\xi}_i(x)$，$i = 1, \ldots, n$的表示以及具体推导过程。特别地，解释为何$\hat{\xi}_i = (U')^{-1}(\hat{y}(x)\frac{q_i}{p_i})$以及$\hat{y}(x)$是什么。见讲义7的全部内容。

3. 第四次作业第三题。

5 美式期权定价问题

1. Snell envelope的定义以及它的重要性质，即讲义9，定理4.10的内容以及证明。特别地，能够证明对于$\nu_1, \nu_2 \in \mathcal{M}_{t+1}$，存在停时$\nu_3 \in \mathcal{M}_{t+1}$使得

$$\mathbb{E}[Z_{\nu_3}|\mathcal{F}_{t+1}] = \max\{\mathbb{E}[Z_{\nu_1}|\mathcal{F}_{t+1}], \mathbb{E}[Z_{\nu_2}|\mathcal{F}_{t+1}]\}.$$

2. 令$U_t, t = 0, \ldots, T$为随机过程$Z_t, t = 0, \ldots, T$的 Snell envelope。证明$\nu^* = \inf\{t = 0, \ldots, T : U_t = Z_t\}$为最优停时$\sup_\tau \mathbb{E}[Z_\tau]$的最优停时。见讲义9，定理4.12.

6 布朗运动与连续时间上的随机计算

1. 布朗运动的原始定义，布朗运动作为一个特殊的高斯过程的定义。布朗运动的二阶变分(quadratic variation)$[X, X]_t = t$的证明。
2. Basic process, simple process的定义，progressively measurable process的定义，知道如何证明basic process, simple process, 连续且适应于域流的随机过程是progressively measurable的。见随机积分讲义第11页。
3. 随机积分讲义Theorem 4.1的证明。
4. 能够简单描述itô isometry以及如何利用其对连续鞅进行随机积分的定义。
5. 伊藤公式(Itô formula)的内容。能够计算一些简单的情况，比如对于$S_t = at + bW_t$，计算$\sin(S_t)$。

7 Black-Scholes公式

1. 知道Black-Scholes市场的数学定义，知道如何验证$\tilde{S}_t = \exp(\sigma W_t - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t)$是B-S市场上的随机微分方程的解。
2. B-S公式推导的基本步骤。比如在已知W_t^*是$\mathbb{Q}$-布朗运动的情况下，如何计算出B-S公式$V_t^C = \mathbb{E}_\mathbb{Q}[(S_T^1 - K)^+|\mathcal{F}_t]$，$S_t^1 = \exp(\sigma W_t^* - \frac{1}{2}\sigma^2 t)$。