Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

ESTATÍSTICA

LEI e LECD

Ano letivo: 2023/2024 **Folha 2**

II. Variáveis Aleatórias Reais

1. Um circuito elétrico é constituído por duas componentes, A e B, que funcionam independentemente uma da outra e em paralelo. A componente A avaria com probabilidade 0.1 e a componente B avaria com probabilidade 0.05. Obtenha a função de probabilidade da variável aleatória (v.a.) X que representa o número de componentes em funcionamento no circuito.

2. Seja X uma v.a. discreta com função de probabilidade $f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{10}, & x \in \{1,2,3,4\} \\ 0, & x \in \mathbb{R}\backslash\{1,2,3,4\} \end{cases}$.

a) Obtenha a função de distribuição de X.

b) Determine o valor médio e o desvio padrão de X.

3. Fazem-se duas repetições sucessivas da experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um número inteiro entre 1 e 3 (inclusive). Seja X a v.a. que representa a diferença entre o menor dos números obtidos e 2.

a) Determine a função de probabilidade de X.

b) Determine a função de distribuição de X e represente-a graficamente.

c) Em média, qual é a diferença entre o menor dos números obtidos e 2? Calcule o correspondente desvio padrão.

d) Obtenha a função de probabilidade da v.a. $Y = |X^2 - 1|$ e calcule o seu valor médio por dois processos diferentes.

e) Determine o primeiro quartil e a mediana de X.

f) Determine o quantil de ordem $\frac{8}{9}$ de X.

4. Seja X uma v.a. discreta com suporte $S_X = \{-1, 1, 2\}$ e tal que $P(X = -1) = 0.4$ e $P(X = 1) = 0.3$.

a) Obtenha a função de distribuição de X.

b) Calcule $E(3 - 2X)$ e $V(3 - 2X)$.

c) Obtenha a função de probabilidade da variável aleatória $Y = |X - E(X)|$.

5. A diferença entre o número de dias que uma tarefa demora a realizar e o número de dias previsto para a sua realização é uma variável aleatória real discreta, X, com função de distribuição

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ 0.05, & -1 \leq x < 0 \\ 0.7, & 0 \leq x < 1 \\ 0.9, & 1 \leq x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}.$$

a) Determine o percentil 70 e o terceiro quartil de X.

b) Determine a função de probabilidade de X.

c) Calcule $P(0 \leq X < 2 / X \geq 0)$.

d) Calcule a probabilidade de a diferença referida distar do seu valor médio mais do que 1 dia.

e) Calcule o desvio padrão e o momento simples de ordem 3 de X.

6. A probabilidade de um doente se restabelecer, quando submetido a determinado tratamento, é igual a 0.8. Admita que os doentes reagem ao tratamento independentemente uns dos outros. Relativamente aos 6 próximos doentes a serem submetidos ao referido tratamento, calcule a probabilidade de:

a) 4 doentes se restabelecerem;

b) quando muito 3 doentes se restabelecerem;

c) pelo menos um doente se restabelecer;

d) mais de 4 doentes não se restabelecerem.

7. Sabe-se que num lote de 100 peças existem 2 que são defeituosas. Desse lote retiram-se, uma a uma e com reposição, n peças. O lote é rejeitado se nestas peças houver alguma peça defeituosa.

a) Calcule a probabilidade de o lote ser rejeitado, no caso de $n = 10$.

b) Qual deverá ser o maior valor de n por forma a que a probabilidade de o lote ser rejeitado seja inferior a 0.05?

8. Na sala do Núcleo de Estudantes de uma Licenciatura em Engenharia existem 6 calculadoras para emprestar aos estudantes, das quais 2 não estão a funcionar. Selecionam-se aleatoriamente 3 dessas calculadoras, para emprestar. Seja X a variável aleatória que representa o número de calculadoras que não funcionam no conjunto das 3 selecionadas. Determine a função de probabilidade de X.

9. A produção de batatas de uma cooperativa agrícola é comercializada em embalagens de $2kg$. A cooperativa põe à venda um lote de 50 embalagens de batatas, mas sabe que 8 dessas embalagens pesam menos de $2kg$.

Um supermercado está interessado em comprar o referido lote, mas decide não efetuar a compra se numa amostra de 10 embalagens de batatas do lote forem encontradas pelo menos duas que pesem menos de $2kg$. Calcule a probabilidade de a compra não se efetuar.

10. Numa fábrica são produzidos chips de memória para serem usados na montagem de computadores pessoais. Os chips fabricados são sujeitos a uma inspeção que não é completamente eficaz. Concretamente, sabe-se que 2% dos chips defeituosos são aprovados na inspeção, enquanto que, no caso dos chips não defeituosos, a percentagem de aprovações é de 97%. Sabe-se ainda que 92.25% dos chips fabricados são aprovados pela inspeção.

a) Escolhe-se ao acaso um dos chips produzidos naquela fábrica.

(i) Verifique que a probabilidade do chip ser defeituoso é 0.05.

(ii) Determine a probabilidade de o chip ser defeituoso ou não ser aprovado na inspeção.

b) Em 20 chips retirados ao acaso dos mais de 2100 fabricados num certo período, qual é a probabilidade de haver pelo menos 3 defeituosos?

11. Um programa de computador gera aleatoriamente um número inteiro entre 0 a 9 (inclusive). Esta operação é repetida consecutivamente até ocorrer um dos números 0 ou 5. Seja X a v.a. que representa o número de vezes que a referida operação é realizada.

a) Determine a função de probabilidade de X.

b) Calcule $P(X \geq 5)$.

12. O número de partículas emitidas, num período de 10 segundos, por determinada fonte radioativa é uma v.a.r., X, que segue uma distribuição de Poisson e verifica $E(X^2) = 6$.

a) Calcule:

(i) $P(X \leq 4)$; **(ii)** $P(X = 4)$; **(iii)** $P(X \geq 5)$; **(iv)** $P(1 < X \leq 4)$;
(v) $P(2 \leq X \leq 4)$; **(vi)** $P(2 \leq X < 5)$; **(vii)** $P(1 < X < 5)$; **(viii)** $P(X \geq 13)$.

b) Supõe-se que a emissão de partículas se processa de forma independente.

Observada a emissão de partículas durante 5 períodos consecutivos de 10 segundos, determine a probabilidade de

(i) no total, serem emitidas pelo menos 8 partículas, sabendo que foram emitidas menos de 12;

(ii) em pelo menos um desses períodos não serem emitidas partículas.

Soluções (a resolução completa dos problemas inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação de todos os cálculos efectuados):

1. $f_X(x) = \begin{cases} 0.005, & x=0 \\ 0.14, & x=1 \\ 0.855, & x=2 \\ 0, & x \in \mathbb{R}\backslash\{0,1,2\} \end{cases}$ **2.a)** $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x<1 \\ 0.1, & 1 \le x < 2 \\ 0.3, & 2 \le x < 3 \\ 0.6, & 3 \le x < 4 \\ 1, & x \ge 3 \end{cases}$ **2.b)** $3,\ 1$

3.a) $f_X(x) = \begin{cases} 5/9, & x=-1 \\ 1/3, & x=0 \\ 1/9 & x=1 \\ 0, & x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,0,1\} \end{cases}$ **3.b)** $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x<-1 \\ 5/9, & -1 \le x < 0 \\ 8/9, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$

3.c) $-4/9,\ \sqrt{38}/9$ **3.d)** $f_Y(y) = \begin{cases} 2/3, & y=0 \\ 1/3, & y=1 \\ 0, & y \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\} \end{cases}$, $E(Y)=1/3$ **3.e)** $Q_1=-1,\ Md=-1$ **3.f)** $[0,1]$

4.a) $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x<-1 \\ 0.4, & -1 \le x < 1 \\ 0.7, & 1 \le x < 2 \\ 1, & x \ge 2 \end{cases}$ **4.b)** $2,\ 6.6$ **4.c)** $f_Y(y) = \begin{cases} 0.7, & y=1.5 \\ 0.3, & y=0.5 \\ 0, & y \in \mathbb{R}\backslash\{0.5,1.5\} \end{cases}$

5.a) $[0,1]$, 1 **5.b)** $f_X(x) = \begin{cases} 0.05, & x=-1 \\ 0.65, & x=0 \\ 0.2, & x=1 \\ 0.1, & x=2 \\ 0, & x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,0,1,2\} \end{cases}$ **5.c)** $\frac{17}{19}$ **5.d)** 0.15 **5.e)** $\sqrt{0.5275}$, 0.95

6.a) 0.24576 **6.b)** 0.09888 **6.c)** 0.999936 **6.d)** 0.0016

7.a) 0.183 **7.b)** 2 **8.** $f_X(x) = \begin{cases} 0.2, & x \in \{0,2\} \\ 0.6, & x=1 \\ 0, & x \in \mathbb{R}\backslash\{0,1,2\} \end{cases}$

9. 0.5095 **10.a)(ii)** 0.0785 **10.b)** 0.0755

11.a) $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{x-1}, & x \in \mathbb{N} \\ 0\,, & x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{N} \end{cases}$ **11.b)** 0.4096

12.a)(i) 0.9473 **(ii)** 0.0902 **(iii)** 0.0527 **(iv)** até **(vii)** 0.5413 **(viii)** 0 **12.b)(i)** 0.6838 **12.b)(ii)** 0.5166