Ano lectivo 2021/22 **Exame de Recurso de Estruturas Discretas**

Lic.ª Eng. Informática da FCTUC *3-2-2021* *Duração: 2:30*

Nome completo:

Número de estudante:

Este teste tem 9 perguntas. Na perguntas 1 e 2 responda apenas ao que lhe é pedido nos lugares indicados para o efeito. Nas restantes perguntas deverá justificar a sua resposta e indicar os cálculos.

Nota: *$C(n,k)$ e $\binom{n}{k}$ denotam o mesmo número.*

1. Indique na caixa à direita,

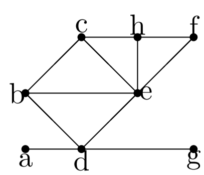
   (a) o coeficiente de $\frac{1}{x^{127}}$ no desenvolvimento de $\frac{(x+1)^{327}}{x^{327}}$.

   (b) o número de divisores de $39 \times 170 \times 101 \times 19$ que têm exactamente 4 factores na sua factorização em primos?

   (c) o número de soluções $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)$, para $x_i \geq 2$, $1 \leq i \leq 7$, da equação

   $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 19$.

2. Acrescente um número mínimo de arestas ao grafo abaixo de modo a que o grafo resultante seja semieuleriano.



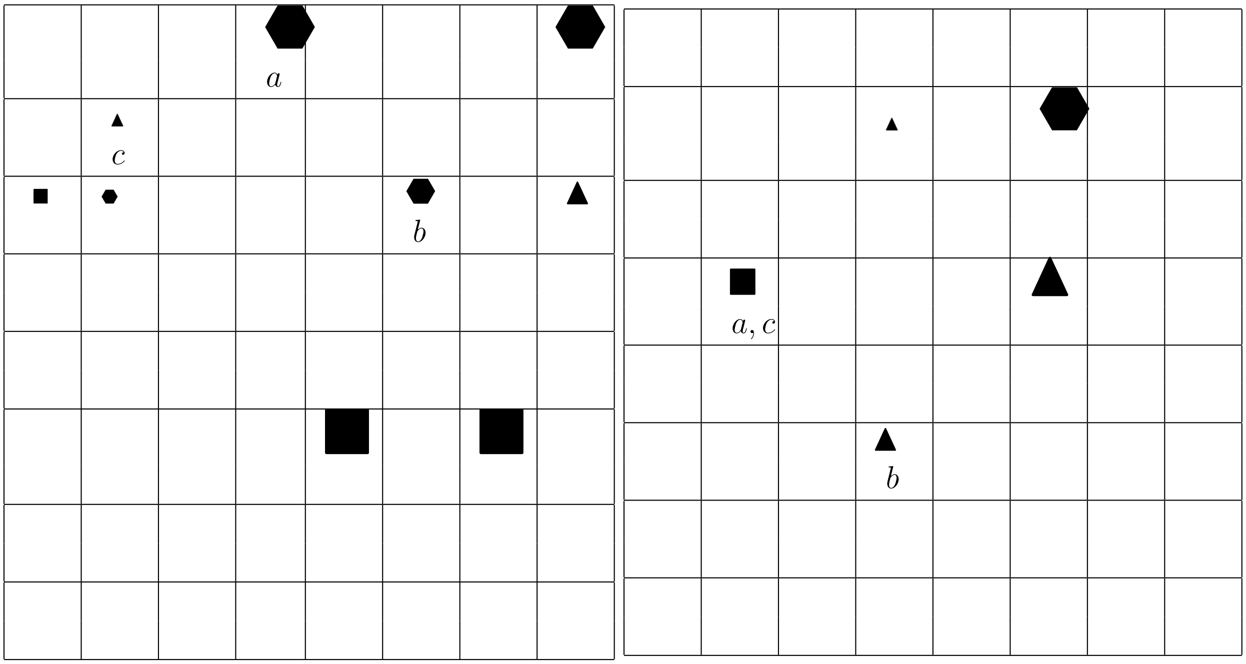
3. Prove que $(c \vee \neg a) \wedge (c \rightarrow e) \wedge (\neg a \rightarrow g) \wedge \neg g \rightarrow e$ é uma tautologia usando uma prova por contradição.

4. Determine uma fórmula que não contenha o operador $\neg$ que corresponda à negação da fórmula,

$$\forall x \forall y \Big[(x \neq y \wedge Dodec(x) \wedge Dodec(y)) \rightarrow \neg SameSize(x,y) \Big]$$

5. Indique o valor lógico (V: verdade; F: falso) das seguintes sentenças nos mundos A e B abaixo.

Sentenças	**A**	**B**
$\neg\big[Tet(b) \rightarrow RightOf(b,a))\big]$		
$\exists x LeftOf(x,a) \wedge \exists x(Dodec(x) \wedge Large(x)\big)$		
$\neg\big[\exists x RightOf(c,x) \leftrightarrow (Tet(a) \vee Tet(c))\big]$		
$\forall x \forall y \Big[(x \neq y \wedge Dodec(x) \wedge Dodec(y)) \rightarrow \neg SameSize(x,y) \Big]$		



Mundo A **Mundo B**

Tetraedro Pequeno	Cubo Pequeno	Dodecaedro Pequeno
Tetraedro Médio	Cubo Médio	Dodecaedro Médio
Tetraedro Grande	Cubo Grande	Dodecaedro Grande

6. Use a indução matemática para provar a igualdade $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2^j} = \frac{2^n - 1}{2^n}$, para $n \geq 1$.

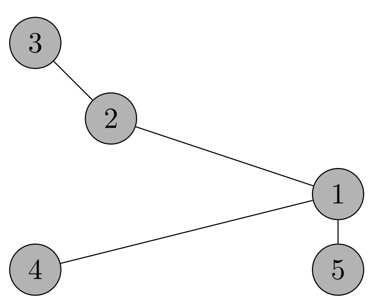
7. (a) Calcule $\displaystyle\sum_{i=0}^{30} \sum_{j=2}^{42} 3i(j-2) + \sum_{j=1}^{56} \frac{1}{2^j}$.

   (b) Use o **algoritmo de Euclides** para determinar a e b tais que $mdc(31, 15) = 31a + 15b$.

   (c) Determine a solução da congruência $22x \equiv_{29} 28$ em $\mathbb{Z}_{29}$.

8. Quantos números com exactamente 27 factores primos podemos formar com os números inteiros positivos primos que não excedem 20 sabendo que o primo 11 tem multiplicidade pelo menos três e o primo 7 aparece exactamente duas vezes?

9. (a) Considere o grafo G anbaixo e escreva a sua matriz A de adjacência.



   (b) **Use a matriz A de adjacência do grafo G**, calculada em (a), para determinar o número de caminhos fechados de comprimento cinco com início e fim no vértice 1.

   (c) O grafo G acima é bipartido? Caso seja, exiba uma bipartição.