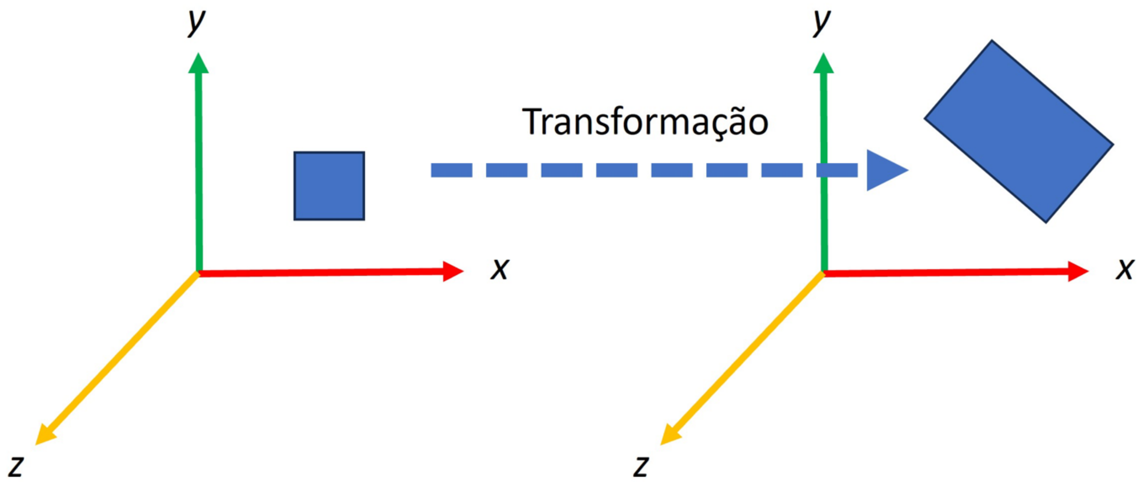
Computação Gráfica - LEI - 2024

André Perrotta (avperrotta@dei.uc.pt), Hugo Amaro (hamaro@dei.uc.pt)

T02: Transformações geométricas

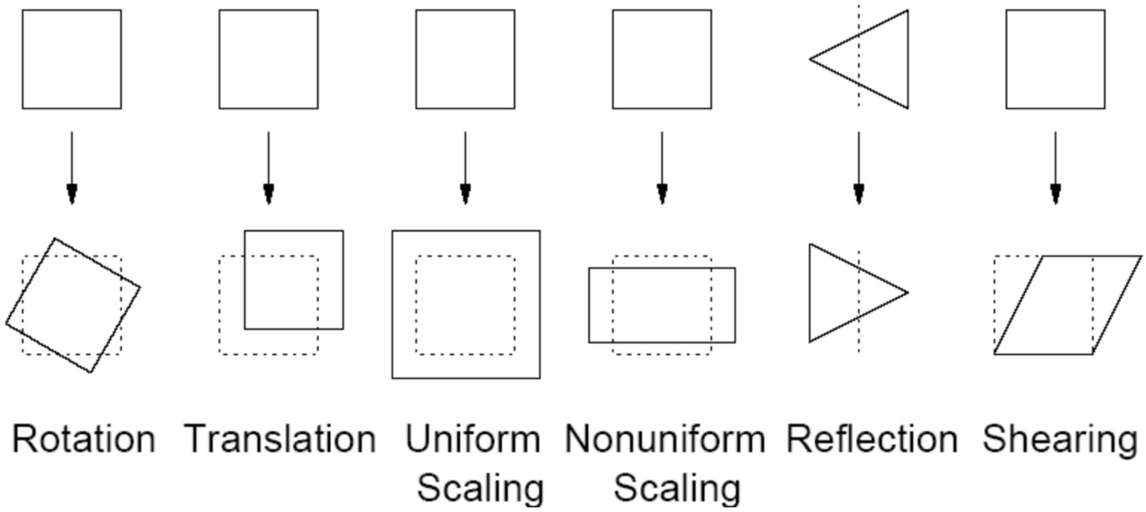
Ponto de partida:

conseguir transformar objetos de forma eficiente, através de uma operação que permita transformar e des-transformar utilizando o mesmo tipo de operador.



Ou seja, transformar significa:

- transladar (translate)
- escalar (scale)
- rotacionar (rotate)
- distorcer (shear)
- espelhar (reflect)



Podemos classificar as transformações de várias formas. No nosso contexto, as classificações mais importantes são:

- **Transformações Euclideanas (ou transformações de corpo rígido)**
  - Preservação de ângulos e distâncias entre vértices e arestas
    - Rotação, Translação, Reflexão
- **Transformações Afim (afine)**
  - Preservação de paralelismo
    - Escala uniforme, *shearing*
- **Transformações Lineares**
  - Preservação da origem
    - (exemplo) Rotação

Numa perspetiva matemática, uma transformação é uma operação que aplicada em um ponto $A = (x, y, z)$ resulta em outro ponto $A' = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$.

$A' = TA$ onde T é o operador.

Exemplo: translação

$$\begin{cases} \tilde{x} = x + t_x \\ \tilde{y} = y + t_y \\ \tilde{z} = z + t_z \end{cases}$$

em notação matricial, isso pode ser escrito como:

$$\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix}$$

Exemplo: escala uniforme

$$\begin{cases} \tilde{x} = xS \\ \tilde{y} = yS \\ \tilde{z} = zS \end{cases}$$

em notação matricial:

$$\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Reparando na forma matricial da translação e escala, percebemos que estas não permitem a criação de um operador T que permita realizar ambas transformações. Ou seja, não conseguimos:

$\tilde{p} = Tp$

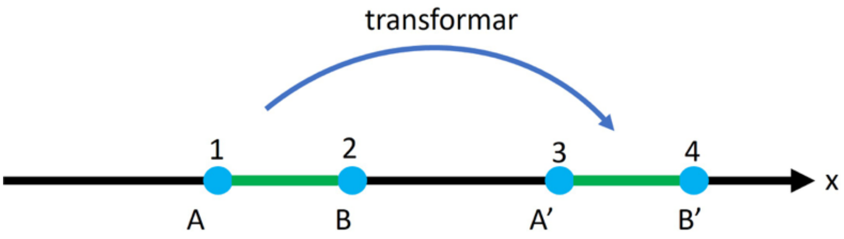
para toda e qualquer transformação.

Este problema, já foi resolvido pelo matemático *August Mobius(1790-1886)*. Ele criou um sistema de coordenadas que, para além de outras funcionalidades (por exemplo a ideia de pontos no infinito), permite realizar qualquer transformação geométrica com operadores matriciais de mesma dimensão.

Este sistema utiliza o que vamos definir como **COORDENADAS HOMOGÊNEAS**.

Para entender este conceito vamos analisar um caso em 1D e depois extrapolar para 2 e 3 dimensões.

Queremos aplicar uma transformação T aos pontos $A = (1)$ e $B = (2)$ de tal forma que o segmento resultante é determidado pelos pontos $A' = (4)$ e $B' = (5)$.



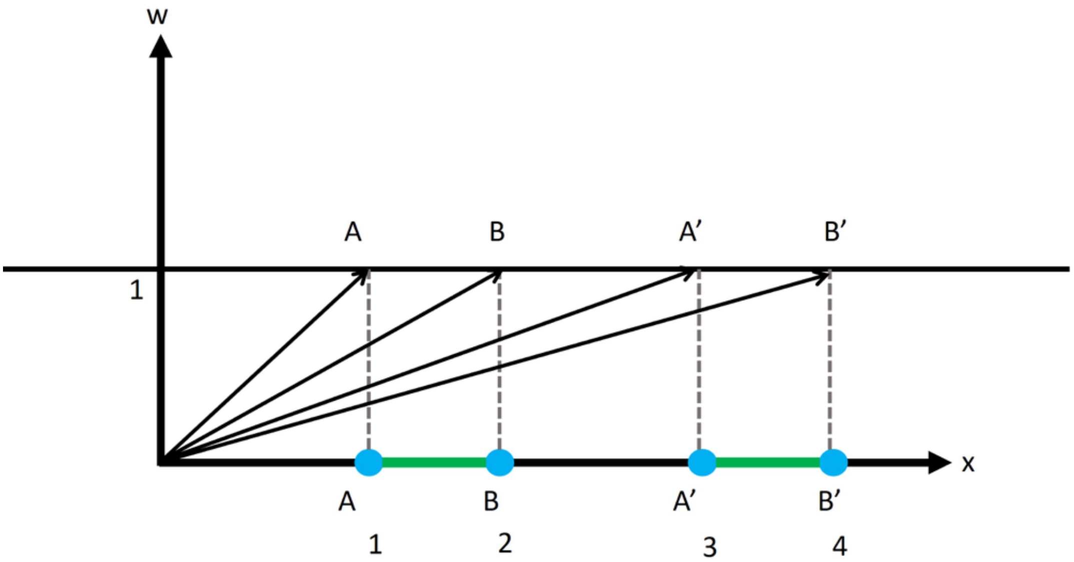
ou seja, queremos:

$$\begin{cases} A' = TA \\ B' = TB \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 = T \cdot 1 \\ 4 = T \cdot 2 \end{cases}$$

Claramente não existe solução para este sistema!

Mobius, percebeu que aumentando a dimensionalidade do problema (e juntamente do sistema de coordenadas), utilizando uma projeção dos ponto nessa nova dimensão, este problema passa a ter solução.



$A = (x) \rightarrow A = (x, w) = (1, 1)$

$B = (x) \rightarrow B = (x, w) = (2, 1)$

$A' = (x) \rightarrow A' = (x, w) = (3, 1)$

$B' = (x) \rightarrow B' = (x, w) = (4, 1)$

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{21} \\ T_{12} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{21} \\ T_{12} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{21} \\ T_{12} & T_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A componente w é dita homogênea, pois não importa seu valor ($\forall w > 0 \in \mathbb{R}$), as coordenadas resultantes serão sempre proporcionais. Sempre posso utilizar $w = 1$, basta ter que $(x/w, y/w, z/w, w)$.

No caso de $w = 0$, a projeção possível para os ponto é no infinito. A interpretação geométrica dessa situação é que um ponto $(x, y, z, 0)$ é na verdade um vetor. As componentes representam somente a sua direcionalidade (e sentido).

No contexto da computação gráfica, as coordenadas homogênas permitem resolver as transformações de maneira elegante, utilizando uma única operação matricial para qualquer transformação. Mais ainda, as matrizes resultantes são quadradas (4x4) e permitem a operação inversa $TT^{-1} = I$ onde I é a matriz identidade.

Podemos então definir as matrizes de transformações:

Translação 3D:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

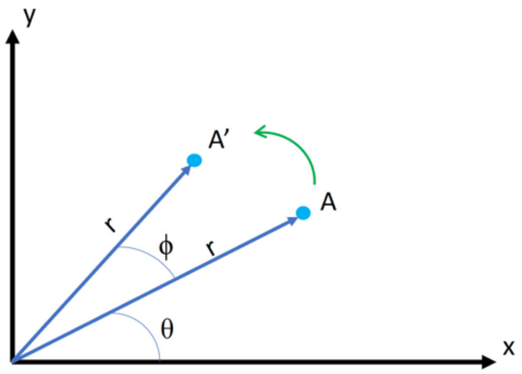
$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -T_x \\ 0 & 1 & 0 & -T_y \\ 0 & 0 & 1 & -T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Escala 3D:

$$S = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{S_x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{S_y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{S_z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotação 2D



$$A = (x, y)$$

$$A' = (x', y')$$

$$\begin{cases} x = rcos(\theta) \\ y = rsin(\theta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = rcos(\theta + \phi) \\ y' = rsin(\theta + \phi) \end{cases}$$

$$x' = r[cos(\theta)cos(\phi) - sin(\theta)sin(\phi)] = xcos(\phi) - ysin(\phi)$$
$$y' = r[sin(\theta)cos(\phi) + cos(\theta)sin(\phi)] = xsin(phi) + ycos(\phi)$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xcos(\phi) & -ysin(\phi) \\ xsin(\phi) & ycos(\phi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(\phi) & -sin(\phi) \\ sin(\phi) & cos(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

extrapolando para coordenadas homogêneas:

$$R = \begin{bmatrix} cos(\phi) & -sin(\phi) & 0 \\ sin(\phi) & cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotação 3D:

Podemos considerar a rotação 2D como uma rotação 3D em torno do eixo $\hat{z}$ e extrapolar a matriz.

$$R_{\hat{z}} = \begin{bmatrix} cos(\phi) & -sin(\phi) & 0 & 0 \\ sin(\phi) & cos(\phi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_{\hat{z}}^{-1} = \begin{bmatrix} cos(\phi) & sin(\phi) & 0 & 0 \\ -sin(\phi) & cos(\phi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Utilizando a mesma lógica, podemos definir as rotações em torno de $\hat{x}$ e $\hat{y}$

$$R_{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\theta) & -sin(\theta) & 0 \\ 0 & sin(\theta) & cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_{\hat{x}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\theta) & sin(\theta) & 0 \\ 0 & -sin(\theta) & cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

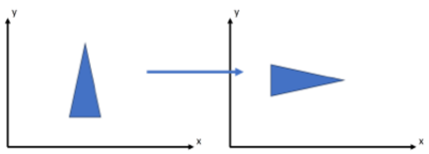
$$R_{\hat{y}} = \begin{bmatrix} cos(\omega) & 0 & sin(\omega) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -sin(\omega) & 0 & cos(\omega) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

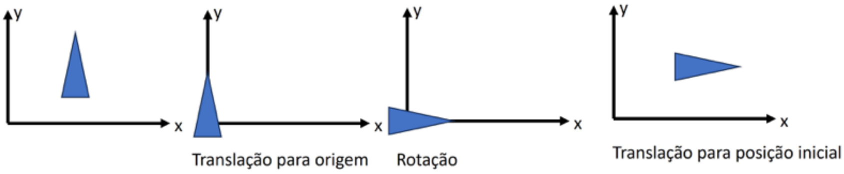
$$R_{\hat{y}}^{-1} = \begin{bmatrix} cos(\omega) & 0 & -sin(\omega) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ sin(\omega) & 0 & cos(\omega) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Uma consideração fundamental sobre as rotações:

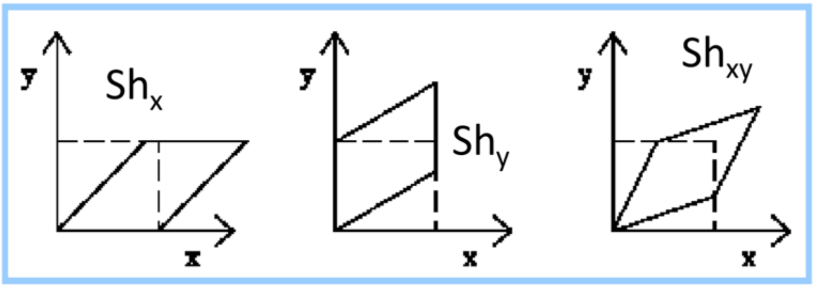
As rotações são sempre operadas em torno da origem!

para rotacionar um objeto (que está deslocado da origem) em torno de seu próprio eixo, tenho que realizar mais operações:





Shear 2D



$$Sh_x = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Sh_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Sh_{xy} = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

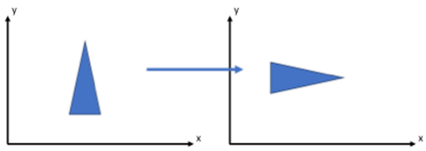
$$Sh_{xy}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-ab} & \frac{-a}{1-ab} & 0 \\ \frac{-b}{1-ab} & \frac{1}{1-ab} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

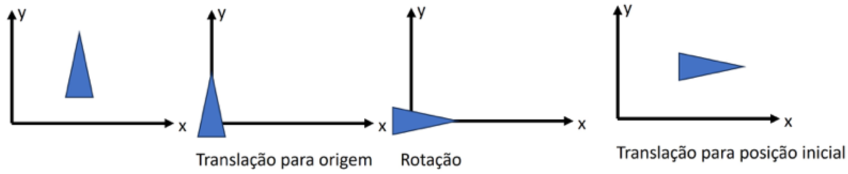
Ordem de transformações

Multiplicação de matrizes **não** é comutativa:

$$M_1 M_2 \neq M_2 M_1$$

Vamos rever o caso utilizado para demonstrar a rotação





Temos 3 operações:

1. Translação T_1
2. Rotação R_2
3. Translação T_3

Se quisermos combinar as transformações numa só matriz M:

Dado o ponto P pertencente ao triângulo temos:

$$P' = T_1 P$$
$$P'' = R_2 P'$$
$$P''' = T_3 P''$$

$MP = T_3 R_2 T_1 P$

$M = T_3 R_2 T_1$

ou seja:

Ao combinar as transformações, montamos as multiplicações das matrizes da direita para a esquerda. A primeira transformação é a última antes de multiplicarmos pelo ponto original.

No OpenGl isto funciona também desta maneira. Vamos ver (na TP/PL) que posso criar uma pilha (stack) de transformações, que são aplicadas "de trás para frente" (a primeira multiplicação é a última transformação antes do desenho da geometria).

Alguns exercícios relacionados com o tema:

Exame normal LEI 2022-2023

2.2

Considere uma matriz M, em coordenadas homogéneas, em que os parâmetros h e w são não nulos. Esta matriz poderá representar alguma transformação: rotação, translação, escala, distorção, projeção? Em caso afirmativo caracterize devidamente a transformação em causa. Em caso negativo, justifique a razão dessa impossibilidade.

$$M = \begin{bmatrix} h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{h}{w} \end{bmatrix}$$

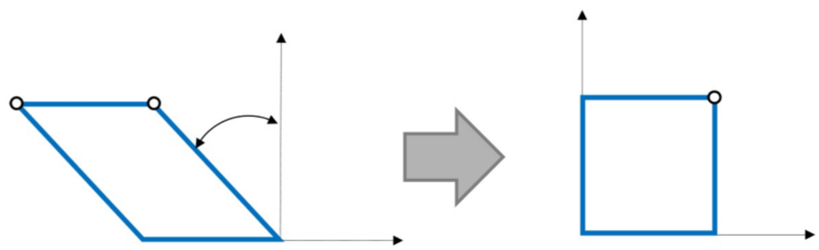
solução:

Para obtermos a matriz em coordenadas homogêneas $(w = 1)$ basta multiplicar $M = \frac{w}{h} \cdot M$ e ficamos com:

$$M = \begin{bmatrix} w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{w}{h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \text{matriz de escala}$$

2.4

Considere uma transformação, que permite obter o objeto da direita em função do objeto da esquerda. Acha possível determinar uma transformação que permita obter o resultado pretendido? Em caso afirmativo, caracterize devidamente as operações em causa e a ordem pela qual são efetuadas. Em caso negativo, justifique a razão dessa impossibilidade.



solução:

sim, é possivel:

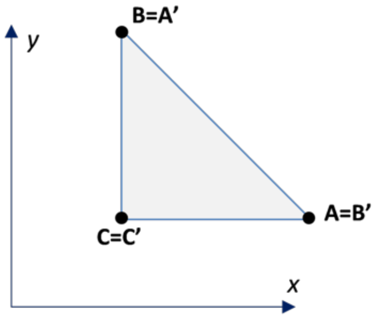
1. Shear em x
2. Translate em x

Mini-teste 1 2021

2.2

Considere a seguinte situação ilustrada na figura. Pretende-se "virar ao contrário" um triângulo ABC (isósceles em $\overline{AC} = \overline{BC}$), de tal forma que os vértices A e B troquem de lugar entre si, mantendo o vértice C fixo. Considere que pode apenas usar transformações elementares a duas dimensões, isto é, Translate(x,y), RotacaoEixoZ(graus), Escala(x,y). Nestas condições acha que será possível conseguir determinar uma matriz de transformação capaz de implementar essa operação (transformar o triângulo ABC no triângulo A'B'C como descrito)?

- Em caso positivo, indique quais as operações elementares em causa e a ordem pela qual devem ser executadas.
- Em caso negativo, diga qual a razão dessa impossibilidade.



solução:

Sim, é possível:

1. Escala(-1, 1, 1)
2. rotaciona 90° no sentido horário

In [1]:
```
! jupyter nbconvert --to html CG_LEI_2024_T02-transformacoes.ipynb
```

```
[NbConvertApp] Converting notebook CG_LEI_2023_T02-transformacoes.ipynb to
html
[NbConvertApp] Writing 625599 bytes to CG_LEI_2023_T02-transformacoes.html
```

In [ ]: