

**Justifique** convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos.

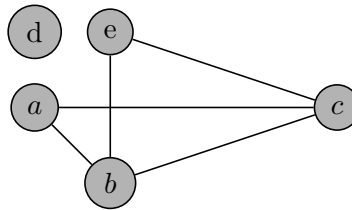
**Nota:**  $C(n, k)$  e  $\binom{n}{k}$  denotam o mesmo número.

1. (a) Use o algoritmo de Euclides para mostrar que existem inteiros  $a$  e  $b$  tais que

$$\text{mdc}(31, 15) = 15a + 31b.$$

- (b) Determine as soluções da congruência  $15x \equiv_{31} 2$  no conjunto  $\{-5, -4, -3, -1, 0, 1, 2, \dots, 28, 29, 30\}$ .

2. (a) Escreva a matriz de adjacência do grafo



Use essa matriz para determinar o número de caminhos de comprimento três do vértice  $b$  para o vértice  $a$ .

- (b) Use o *método de demonstração por redução ao absurdo*, para mostrar que se um grafo  $G$  simples, com  $n$  vértices, tem pelo menos  $\binom{n-1}{2} + 1$  arestas, então é conexo.
- (c) Dê um exemplo de um grafo simples com cinco vértices e desconexo que tenha  $\binom{4}{2}$  arestas.
3. Existe alguma árvore de 14 vértices com um vértice de grau 7 e apenas 6 vértices de grau 1?
4. (a) Quantas permutações de 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 existem de tal modo que 7 precede 6 e 6 precede 1?
- (b) Qual é o coeficiente de  $\frac{1}{x^2}$  na expansão de  $\frac{(x+1)^{99}}{x^{99}}$ ?
5. Quantos números com exactamente 14 factores primos podemos formar com os primos 5, 7, 11, 13 e 17 sabendo que o primo 7 tem multiplicidade pelo menos três e o primo 11 aparece exactamente duas vezes?

**Cotação:**

1-1.0+1.2

2- 1.5+1.2+0.5

3-1.2

4-1.1+1.1

5-1.2