Lic.ª Eng. Informática 23/11/2016 **Frequência B1 - Estruturas Discretas** *Duração: 2h00m*

Nome completo:

Número de estudante:

Nas questões 4, 5 e 6 justifique convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos. Nas questões 1, 2 e 3, uma resposta certa terá a cotação máxima que lhe for atribuída, e uma resposta errada terá o valor negativo da metade dessa cotação.

1. Seja g a proposição *"A equipa ganha"*, t a proposição *"Estou triste"*, v a proposição *"Vou viajar"*, e l a proposição *"O cão ladra"*. Considere o seguinte argumento lógico:

   Para o cão ladrar é condição suficiente que eu esteja triste. O cão não ladra. A equipa ganha ou estou triste. A equipa ganha só se vou viajar. Portanto, vou viajar.

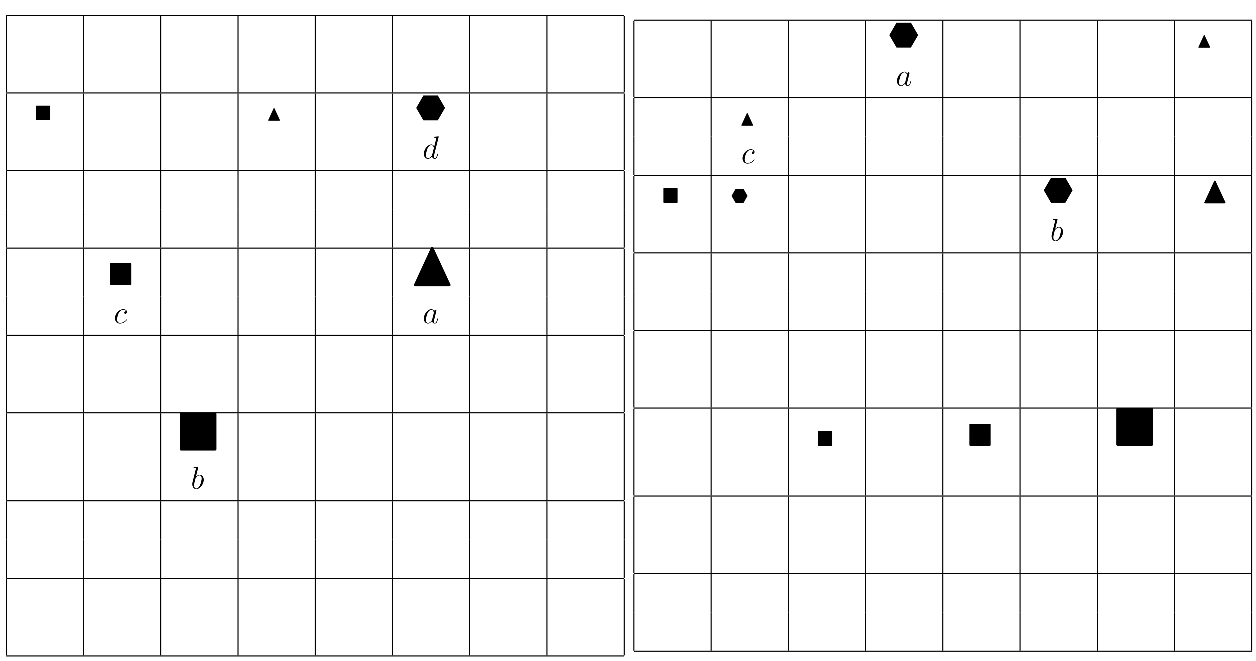
   Valide com **X** a fórmula proposicional abaixo que formaliza este argumento lógico:

   (a) $(l \to t) \wedge \neg l \wedge (g \vee t) \wedge (v \to g) \to v.$ $\boxed{X}$

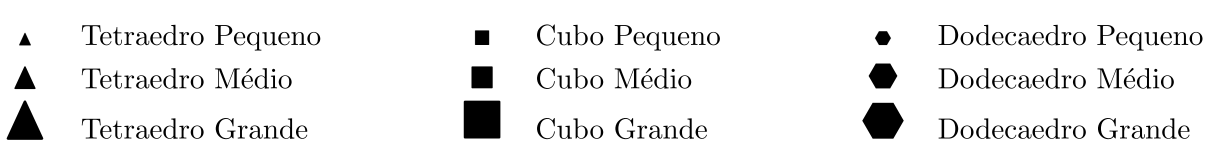
   (b) $(t \to l) \wedge \neg l \wedge (g \vee t) \wedge (g \to v) \to v.$ $\boxed{X}$

2. (a) Indique o valor lógico (V: verdade; F: falso) das seguintes sentenças nos mundos A e B abaixo.

Sentenças	**A**	**B**
$\neg(Tet(a) \leftrightarrow \exists x\ Smaller(x, a))$	F	V
$\forall x \forall y\ (\neg SameShape(x, y) \vee Tet(y) \vee Cube(x))$	F	F
$\exists x(Dodec(x) \wedge SameRow(x, b))$	F	V



Mundo A **Mundo B**



(b) Nos casos em que a fórmula 2 é falsa indique objectos x e y que a não satisfazem: No mundo A $x = d = y$ e no mundo B $x = a$, $y = b$.

3. Indique a opção correcta quanto à validade de cada uma das deduções seguintes (V: dedução válida, F: dedução falaciosa):

	V	F
(a) De $p \vee \neg q$ e $\neg q$ deduz-se p.		X
(b) $a \to b \equiv \neg a \vee b \vee F \equiv a \wedge \neg b \to F$.	X	
(c) De $\neg(\neg a \to (b \to \neg c))$ deduz-se $a \to (\neg b \to c)$.	X	

`¬(¬a → (b → ¬c)) → (a → (¬b → c))` é uma tautologia porque nunca se tem $V \to F$. $a \to (\neg b \to c)$ é apenas falsa quando $a \equiv V$, $b \equiv F$, $c \equiv F$, isto é, $V \to (V \to F)) \equiv V \to F \equiv F$. Neste caso, $\neg(\neg a \to (b \to \neg c)) \equiv \neg(F \to (b \to \neg c) \equiv \neg V \equiv F$.

	V	F
(d) $a \to (b \to c) \equiv b \to (a \to c)$.	X	

4. Considere a função $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por

$$h(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ n^2 + h(n-1) & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

   (a) A partir desta definição, calcule $h(4)$.

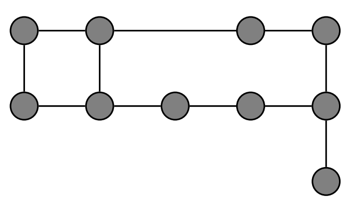
   (b) Escreva agora a definição de $h(n)$ na forma de um somatório.

   (c) Usando o método de indução matemática, prove que $h(n) = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

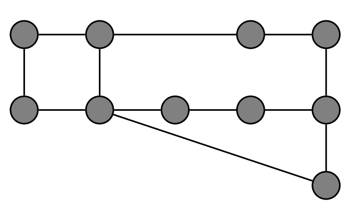
   (d) (i) Calcule $\displaystyle\sum_{i=1}^{15} i^2$.

   (ii) Usando propriedades dos somatórios mostre que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

5. Qual é o menor número de arestas que tenho de acrescentar ao grafo seguinte de forma a conseguir desenhá-lo sem levantar o lápis do papel e sem tornar a passar por uma linha previamente traçada?



O grafo tem três vértices de grau 3 e 1 de grau 1. Basta acrescentar uma aresta a ligar dois vértices de grau ímpar. Por exemplo, conforme figura abaixo, a ligar um vértice de grau um a vértice de grau 3, para obter um grafo semi-euleriano. Ficamos apenas com dois vértices de grau ímpar.



6. Considere a matriz A onde a e b são parâmetros inteiros não negativos

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & 2 & 0 & 2 \\ a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & b \\ 2 & 0 & 1 & b & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Considere $a = b = 16$ em A e seja G o grafo com essa matriz de adjacência.

(i) Qual é a sequência dos graus de G?

(ii) Qual é o número de arestas de G?

(iii) O grafo G é euleriano? É semi-euleriano?

(b) Dê valores a a e b em A de modo a que o grafo com essa matriz de adjacência seja euleriano.