Lic.ª Eng. Informática   23/11/2016   **Frequência A1 - Estruturas Discretas**   *Duração: 2h00m*

Nome completo:

Número de estudante:

Nas questões 4, 5 e 6 justifique convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos. Nas questões 1, 2 e 3, uma resposta certa terá a cotação máxima que lhe for atribuída, e uma resposta errada terá o valor negativo da metade dessa cotação.

1. Seja g a proposição *"A equipa ganha"*, t a proposição *"Estou triste"*, c a proposição *"Vou ao cinema"*, e l a proposição *"O cão ladra"*. Considere o seguinte argumento lógico:

   A equipa ganha ou estou triste. A equipa ganha só se vou ao cinema. Para o cão ladrar é condição suficiente que eu esteja triste. O cão não ladra. Portanto, vou ao cinema.

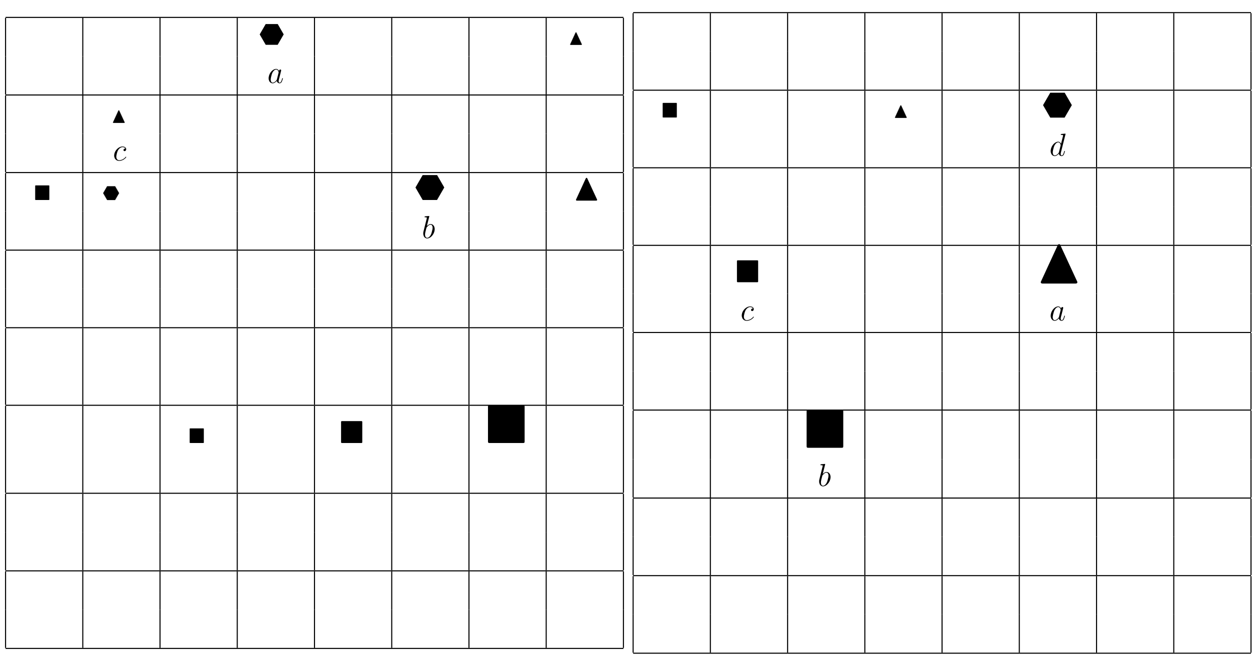
   Valide com **X** a fórmula proposicional abaixo que formaliza este argumento lógico:

   (a) $(g \vee t) \wedge (g \to c) \wedge (t \to l) \wedge \neg l \to c.$ $\boxed{X}$

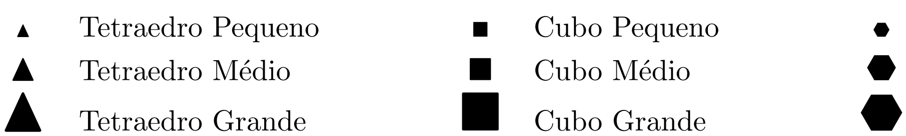
   (b) $(g \vee t) \wedge (c \to g) \wedge (l \to t) \wedge \neg l \to c.$ $\boxed{}$

2. (a) Indique o valor lógico (V: verdade; F: falso) das seguintes sentenças nos mundos A e B abaixo.

Sentenças	**A**	**B**
$\neg(Tet(a) \leftrightarrow \exists x\ Smaller(x,a))$	V	F
$\exists x(Dodec(x) \wedge SameRow(x,b))$	V	F
$\forall x \forall y\ (\neg SameShape(x,y) \vee Tet(y) \vee Cube(x))$	F	F



Mundo A   **Mundo B**



Tetraedro Pequeno   Cubo Pequeno   Dodecaedro Pequeno
Tetraedro Médio   Cubo Médio   Dodecaedro Médio
Tetraedro Grande   Cubo Grande   Dodecaedro Grande

(b) Nos casos em que a fórmula 3 é falsa indique objectos x e y que a não satisfazem: Mundo A, $x = a, y = b$, mundo B, $x = y = d$.

3. Indique a opção correcta quanto à validade de cada uma das deduções seguintes (V: dedução válida, F: dedução falaciosa):

V	F

(a) $a \wedge \neg b \to F \equiv \neg a \vee b \vee F \equiv a \to b$.

X	

(b) De $p \vee \neg q$ e $\neg q$ deduz-se p.

	X

`não é uma tautologia.`

(c) $\neg(\neg a \to (b \to \neg c)) \equiv a \to (\neg b \to c)$.

	X

`não é uma tautologia.`

`Por exemplo, se` $a \equiv V$ `,` $b \equiv V$ `, tem-se`
$\neg(\neg a \to (b \to \neg c)) \equiv \neg(F \to (V \to \neg c)) \equiv \neg V \equiv F$ `e`
$a \to (\neg b \to c) \equiv V \to (F \to c) \equiv V \to V \equiv V$`.`

(d) De $a \to (b \to c)$ deduz-se $b \to (a \to c)$.

X	

$$\neg a \vee (\neg b \vee c) \equiv \neg b \vee (\neg a \vee c)$$

4. Considere a função $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por

$$h(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ n^2 + h(n-1) & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(a) A partir desta definição, calcule $h(4)$.

$$h(1) = 1,\ h(2) = 1 + 2^2,\ h(3) = 3^2 + 2^2 + 1,\ h(4) = 4^2 + 3^2 + 2^2 + 1.$$

(b) Escreva agora a definição de $h(n)$ na forma de um somatório.

$$h(n) = \sum_{k=1}^{n} k^2.$$

(c) Usando o método de indução matemática, prove que $h(n) = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

`Veja-se a resolução nos apontamentos de apoio do curso, pp 33.`

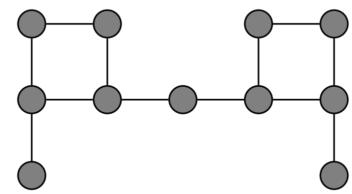
(d) (i) Calcule $\displaystyle\sum_{i=1}^{20} i^2$.

`Usando as alíneas` (b), (c)`,` $\displaystyle\sum_{i=1}^{20} i^2 = h(20) = 20(20+1)(2 \times 20 + 1)/6$`.`

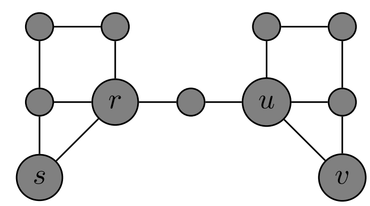
(ii) Usando propriedades dos somatórios mostre que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

$$\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + n(n+1)/2$$
$$= n(n+1)(2n+1) + 3n(n+1)/6$$
$$= n(n+1)(2n+1+3)/6 = n(n+1)(n+2)/3.$$

5. Qual é o menor número de arestas que tenho de acrescentar ao grafo seguinte de forma a conseguir desenhá-lo sem levantar o lápis do papel e sem tornar a passar por uma linha previamente traçada?



O grafo tem dois vértices de grau 1 e quatro de grau 3. Basta acrescentar duas arestas, por exemplo, conforme figura abaixo, cada uma delas a ligar um vértice de grau um a vértice de grau 3, para obter um grafo semi-euleriano. Ficamos apenas com dois vértices de grau ímpar.



6. Considere a matriz A onde a e b são parâmetros inteiros não negativos

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & 2 & 0 & 2 \\ a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & b \\ 2 & 0 & 1 & b & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Considere $a = b = 16$ em A e seja G o grafo com essa matriz de adjacência.

(i) Qual é a sequência dos graus de G?

$$16 + 2 + 2 = 20,\ 16,\ 2 + 1 + 1 = 4,\ 1 + 16 = 17,\ 2 + 1 + 16 = 19$$

(ii) Qual é o número de arestas de G?

$$\frac{16 + 2 + 2 + 16 + 2 + 1 + 1 + 1 + 16 + 2 + 1 + 16}{2} = \frac{76}{2} = 38.$$

(iii) O grafo G é euleriano?

Não, porque existem vértices de grau ímpar: um de grau 17 e outro de grau 19. Um grafo conexo é euleriano sse todos os vértices têm grau par.

É semi-euleriano?

Sim, porque existem exactamente dois vértices de grau ímpar.

(b) Dê valores a a e b em A de modo a que o grafo com essa matriz de adjacência seja euleriano.

Por exemplo, $a = 2$ (ou outro número par positivo), e $b = 1$ (ou outro número ímpar positivo).