

**Lógica elementar:** programa Boole

1. Abra o Boole e construa a tabela de verdade da proposição

$$\neg(p \wedge (\neg p \vee (q \wedge r))) \vee q.$$

Para isso, escreva a fórmula no topo direito da tabela (usando a barra de ferramentas). Se a fórmula estiver bem formada, o “(1)” acima dela passa a verde (note que **as variáveis proposicionais têm que ser escritas obrigatoriamente em maiúsculas:**  $A, B, C, \dots, P, Q, R, \dots$ ). Em seguida, insira à esquerda, as colunas das diversas variáveis proposicionais (colunas de referência) com a ajuda das instruções **Add Column Before** ou **Add Column After** e preencha-as com os diversos valores lógicos de verdade (pode fazer isso automaticamente com a tecla **Fill Ref Cols**). Depois preencha os valores de verdade T e F nas outras colunas por baixo da fórmula, de acordo com as respectivas operações lógicas. Quando a tabela estiver completa, clique no botão **Verify Table** para verificar se todos os valores estão correctos.

Depois de ter uma tabela completa e correcta, clique no botão **Assessment** por baixo da barra de ferramentas. Aqui deverá responder a um questionário sobre se a proposição é uma tautologia. Verifique se a sua resposta está correcta em **Verify Assess**.

2. Use o Boole para construir as tabelas de verdade das seguintes proposições e indique se são tautologias.

- (a)  $\neg(P \wedge \neg Q \wedge \neg P)$ .
- (b)  $P \vee \neg(Q \vee \neg(R \wedge P))$ .
- (c)  $\neg(\neg A \vee \neg(B \wedge C) \vee (A \wedge B))$ .
- (d)  $\neg((\neg A \vee B) \wedge \neg(C \wedge D))$ .

3. Com a ajuda do Boole determine as tabelas de verdade do Exercício 9 (Folha 1-TP).

4. Revisite os problemas 11 e 13 (1-TP), agora com a ajuda do Boole.

5. Confirme com o Boole as suas respostas ao Exercício 20 (1-TP).

6. Seleccione a opção correcta quanto à validade de cada uma das deduções seguintes (V: dedução válida; F: dedução falaciosa):

**V   F**

- (a) De  $p \vee q$  e  $\neg p$  deduz-se  $q$ .
- (b) De  $p \vee q$  e  $q$  deduz-se  $\neg p$ .
- (c) De  $\neg(p \vee q)$  deduz-se  $\neg p$ .
- (d) De  $\neg(p \wedge q)$  deduz-se  $\neg q$ .
- (e) De  $p \vee q$  e  $q \rightarrow r$  deduz-se  $p \vee r$ .

<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

## Lógica elementar: programa Tarski World

1. Um mundo de Tarski (tridimensional) consiste num tabuleiro de xadrez ( $8 \times 8$ ) juntamente com figuras geométricas diversas: tetraedros, cubos, e dodecaedros, dispostas nas casas do tabuleiro. Relativamente a estas figuras consideram-se os seguintes predicados unários, binários e ternários, que descrevem o tamanho, o tamanho relativo e posição relativa:

### Predicados unários

Sentença atómica	Interpretação
$Tet(a)$	$a$ é um tetraedro
$Cube(a)$	$a$ é um cubo
$Dodec(a)$	$a$ é um dodecaedro
$Small(a)$	$a$ é pequeno
$Medium(a)$	$a$ é médio
$Large(a)$	$a$ é grande

### Predicados binários

Sentença atómica	Interpretação
$SameSize(a, b)$	$a$ tem o mesmo tamanho que $b$
$SameShape(a, b)$	$a$ tem a mesma forma que $b$
$Larger(a, b)$	$a$ é maior que $b$
$Smaller(a, b)$	$a$ é menor que $b$
$SameCol(a, b)$	$a$ está na mesma coluna que $b$
$SameRow(a, b)$	$a$ está na mesma linha que $b$
$Adjoins(a, b)$	$a$ e $b$ estão localizados em casas adjacentes (mas não na diagonal)
$LeftOf(a, b)$	$a$ está numa coluna à esquerda de $b$
$RightOf(a, b)$	$a$ está numa coluna à direita de $b$
$FrontOf(a, b)$	$a$ está numa linha à frente de $b$
$BackOf(a, b)$	$a$ está numa linha atrás de $b$










### Predicados ternários










Sentença atómica	Interpretação
$Between(a, b, c)$	$a$ , $b$ e $c$ estão na mesma coluna, linha ou diagonal, e $a$ está entre $b$ e $c$ .

- (a) Para se familiarizar com o Tarski World abra-o e carregue os ficheiros Wittgenstein's World e Wittgenstein's Sentences (na pasta TW Exercises). Nestes ficheiros verá um mundo de blocos geométricos e uma lista de sentenças atómicas (algumas delas têm comentários). Percorra essa lista e tente calcular mentalmente o correspondente valor lógico nesse mundo. Use o botão **Verify** para verificar se a sua resposta está correcta ou não. Se ficar surpreendido por alguma resposta, tente ver porque errou, comparando a sua interpretação do predicado com a definição exacta do predicado.
- (b) Em seguida, mude o mundo de Wittgenstein de diversas maneiras, alterando os objectos e as suas posições, observando o que acontece ao valor lógico das diversas sentenças.  
[Objectivo: ajudá-lo a memorizar a interpretação de cada um dos predicados do Tarski World; só deverá avançar depois de dominar bem a lista de predicados e as suas interpretações.]

2. Para simplificar, representaremos um mundo de Tarski na folha de papel (bidimensional) num tabuleiro de xadrez ( $8 \times 8$ ) com quadrados (representarão os cubos), triângulos (representarão os tetraedros), e hexágonos (representarão os dodecaedros), dispostos nas casas do tabuleiro. Por exemplo:

### O mundo de Wittgenstein

	 <i>d</i>			 <i>e</i>			 <i>f</i>
			 <i>c</i>				
	 <i>a</i>			 <i>b</i>			

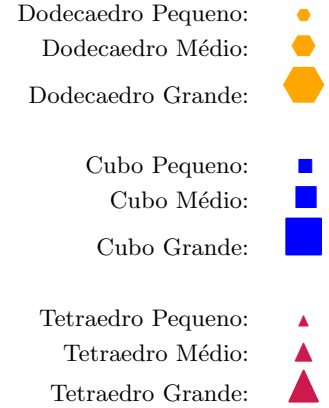
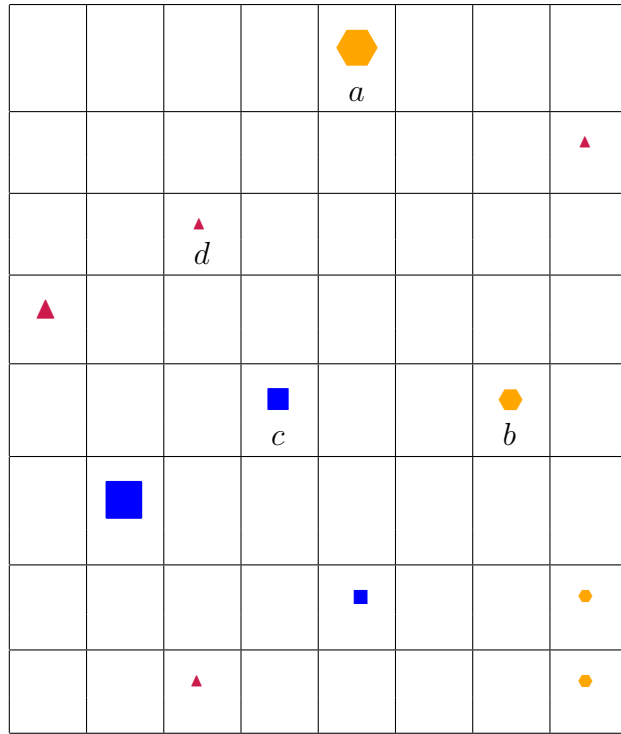
Dodecaedro Pequeno:	
Dodecaedro Médio:	
Dodecaedro Grande:	
Cubo Pequeno:	
Cubo Médio:	
Cubo Grande:	
Tetraedro Pequeno:	
Tetraedro Médio:	
Tetraedro Grande:	

- (a) Quais das sentenças seguintes são verdadeiras no mundo de Wittgenstein ?

1.  $Tet(f) \wedge Small(f)$ .
2.  $Tet(f) \wedge Large(f)$ .
3.  $Tet(f) \wedge \neg Small(f)$ .
4.  $Tet(f) \wedge \neg Large(f)$ .
5.  $\neg Tet(f) \wedge \neg Small(f)$ .
6.  $\neg Tet(f) \wedge \neg Large(f)$ .
7.  $\neg(Tet(f) \wedge Small(f))$ .
8.  $\neg(Tet(f) \wedge Large(f))$ .
9.  $\neg(\neg Tet(f) \wedge \neg Small(f))$ .
10.  $\neg(\neg Tet(f) \wedge \neg Large(f))$ .
11.  $LeftOf(a, c) \vee LeftOf(c, b) \vee \neg Between(c, a, b)$ .
12.  $\neg\neg(BackOf(e, b) \wedge \neg FrontOf(c, b))$ .
13.  $BackOf(d, a) \wedge LeftOf(d, e) \wedge FrontOf(b, e) \wedge Between(c, d, b)$ .
14.  $Smaller(c, e) \vee \neg(Cube(a) \vee Cube(d))$ .
15.  $\neg(\neg Dodec(e) \vee \neg\neg Tet(f))$ .

- (b) Qual é o número máximo de sentenças que pode tornar verdadeiras num só mundo mudando o tamanho ou a forma de  $f$  (ou ambos)?

3. Determine o valor lógico das afirmações seguintes relativas ao mundo



V F

- (a)  $Dodec(a) \wedge \neg Large(a)$   
 (b)  $\forall x (\neg Dodec(x) \rightarrow Cube(c))$   
 (c)  $\exists y \forall x (Tet(x) \rightarrow Smaller(x, y))$   
 (d)  $\forall x (Small(x) \rightarrow \exists y (x \neq y \wedge SameCol(x, y)))$


4. Construa um mundo no qual as seguintes sentenças sejam simultaneamente verdadeiras:

$Tet(a)$ ,  $Medium(a)$ ,  $Dodec(b)$ ,  $Cube(c)$ ,  $FrontOf(a, b)$ ,  $Between(a, b, c)$ ,  $a = d$ ,  $Larger(a, b)$ ,  $Smaller(a, c)$ ,  $LeftOf(b, c)$ .

5. Abra os ficheiros **Lestrade's Sentences** e **Lestrade's World**. Reparará que nenhum dos objectos neste mundo tem nome. Atribua nomes aos objectos de modo que todas as sentenças na lista se tornem verdadeiras.
6. Observe a diferença entre os predicados *Larger* e *BackOf*: um determinado cubo *a* ser maior ou não que outro cubo *b* é um facto óbvio, de resposta precisa, independente da perspectiva com que olhemos para o mundo; mas saber se *a* está atrás de *b* já depende da perspectiva: se rodarmos o mundo  $90^\circ$ , a resposta poderá mudar.

Abra os ficheiros **Austin's Sentences** e **Wittgenstein's World**.

- (a) Determine o valor lógico das sentenças neste mundo e confira que são os seguintes:

	Original	Rodado $90^\circ$	Rodado $180^\circ$	Rodado $270^\circ$
1.	F			
2.	F			
3.	V			
4.	F			
5.	V			
6.	F			

- (b) Rode o mundo  $90^\circ$  e torne a avaliar as sentenças, juntando os resultados à tabela. Repita o processo até dar uma volta completa.
- (c) Junte uma sétima sentença à lista com o seguinte padrão:  $V \ F \ V \ F$ .
- (d) Existem sentenças atômicas nesta linguagem que produzam uma linha com o padrão  $F \ V \ F \ F \ ?$
- (e) Existem sentenças atômicas nesta linguagem que produzam uma linha com exactamente três  $V$  ?

7. Construa um mundo em que todas as sentenças seguintes são verdadeiras:

- (a)  $Dodec(a) \wedge Cube(b)$ .
- (b)  $FrontOf(b, a) \wedge LeftOf(d, b) \wedge BackOf(f, d) \wedge RightOf(a, f)$ .
- (c)  $Tet(c) \wedge Tet(e) \wedge LeftOf(c, d)$ .
- (d)  $\neg LeftOf(c, e) \wedge \neg LeftOf(e, c)$ .
- (e)  $Between(d, b, c) \wedge \neg Between(d, c, a)$ .
- (f)  $\neg Cube(b) \vee (Cube(d) \wedge BackOf(d, b))$ .
- (g)  $(Small(c) \wedge FrontOf(c, b)) \vee Cube(d)$ .
- (h)  $Larger(f, a) \wedge Larger(a, b)$ .
- (i)  $\neg (Smaller(c, a) \vee Smaller(a, c))$ .
- (j)  $Larger(d, b) \wedge Larger(f, d) \wedge \neg (Larger(e, d) \vee Larger(d, e))$ .

8. Considere as premissas seguintes:

1.  $Tet(b)$ .
  2.  $Cube(c)$ .
  3.  $Larger(c, b) \vee (b = c)$ .
- (a) Determine se cada uma das sentenças seguintes é consequência tautológica das premissas dadas, justificando cuidadosamente as suas respostas:
    - (i)  $Smaller(b, c)$ .
    - (ii)  $Larger(c, b) \vee (Tet(b) \wedge b = c)$ .
    - (iii)  $\neg (Larger(c, b) \wedge \neg Larger(c, b))$ .
  - (b) Considerando a interpretação usual, no mundo de **Tarski**, dos predicados considerados, determine se a sentença

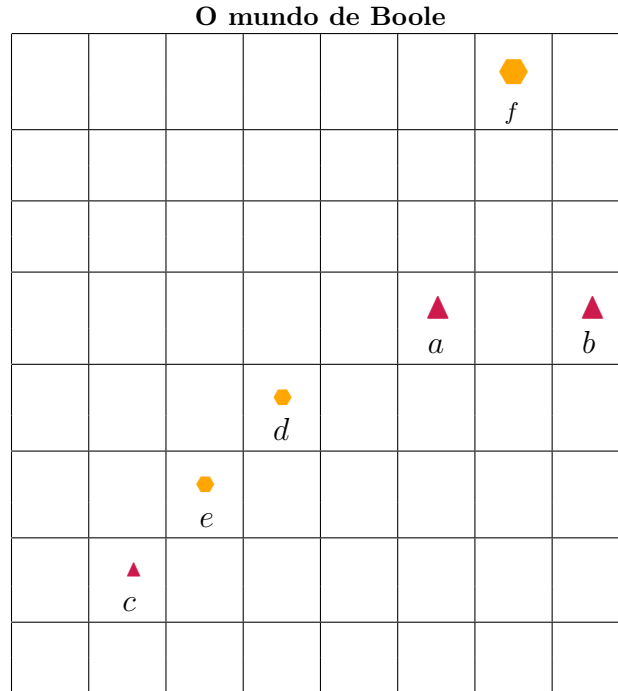
$$(Tet(b) \wedge Small(b)) \vee (Cube(c) \wedge Medium(c))$$

é consequência lógica das premissas consideradas. Em caso afirmativo, justifique cuidadosamente a sua resposta. Se não for, construa um mundo — recorrendo ao software **Tarski World** — no qual as premissas sejam verdadeiras e a conclusão seja falsa.

9. Diga em que casos as “conclusões” são consequências lógicas das premissas. Para cada caso em que isso não aconteça, construa um mundo (isto é, um *contra-exemplo*) no qual as premissas sejam verdadeiras e a conclusão falsa.

- (a) Premissa:  $LeftOf(a, b)$ . Conclusão:  $RightOf(b, a)$ .
- (b) Premissas:  $LeftOf(a, b)$ ,  $b = c$ . Conclusão:  $RightOf(c, a)$ .
- (c) Premissas:  $LeftOf(a, b)$ ,  $RightOf(c, a)$ . Conclusão:  $LeftOf(b, c)$ .

- (d) Premissas:  $BackOf(a, b)$ ,  $FrontOf(a, c)$ . Conclusão:  $FrontOf(b, c)$ .
- (e) Premissas:  $Between(b, a, c)$ ,  $LeftOf(a, c)$ . Conclusão:  $LeftOf(a, b)$ . (Recorde que  $Between(b, a, c)$  significa que  $b$  está entre  $a$  e  $c$ , na mesma linha, diagonal ou coluna.)
10. (a) Descreva cada uma das propriedades seguintes do mundo de Boole, com sentenças da linguagem de primeira ordem do **Tarski** (use os predicados referidos em exercícios anteriores):
1.  $f$  não está à frente de  $a$ .
  2.  $f$  está à direita de  $a$  e à esquerda de  $b$ .
  3.  $f$  está atrás ou é mais pequeno do que  $a$ .
  4.  $e$  e  $d$  estão ambos entre  $c$  e  $a$ .
  5. Nem  $e$  nem  $d$  são maiores que  $c$ .
  6.  $c$  nem é maior nem é mais pequeno do que  $e$ .
  7.  $c$  é mais pequeno do que  $a$ , mas maior do que  $e$ .
  8.  $c$  está à frente de  $a$ ; além disso, é mais pequeno do que  $f$ .



- (b) Neste mundo apenas uma das frases seguintes é verdadeira. Qual? Traduza essa frase para a linguagem da lógica de primeira ordem.
1.  $a$  é pequeno ou  $c$  e  $d$  são ambos grandes.
  2.  $d$  e  $e$  estão ambos atrás de  $b$ .
  3.  $d$  e  $e$  estão ambos atrás de  $b$  e não são maiores do que ele.
  4.  $d$  e  $c$  são quadrados; além disso, nenhum deles é médio.
  5. Nem  $e$  nem  $a$  estão à direita de  $c$  nem à esquerda de  $b$ .
  6.  $e$  não é grande ou está atrás de  $a$ .
  7.  $c$  nem está entre  $a$  e  $b$  nem está à frente deles.
  8.  $a$  e  $e$  são ambos triângulos, ou  $a$  e  $f$  são-no ambos.
  9.  $c$  está entre  $d$  e  $f$  ou é mais pequeno do que os dois.

11. Determine o valor lógico das sentenças seguintes no mundo de Wittgenstein (Exercício 2).

- (a)  $(Tet(a) \wedge Cube(c)) \rightarrow Dodec(d)$ .
- (b)  $Cube(c) \rightarrow (Large(c) \rightarrow (Cube(c) \wedge Large(c)))$ .
- (c)  $\neg(Tet(a) \rightarrow Large(a)) \rightarrow (Tet(a) \wedge \neg Large(a))$ .
- (d)  $\neg(Large(a) \leftrightarrow Small(b))$ .
- (e)  $[Small(c) \wedge (Cube(a) \vee Cube(d))] \leftrightarrow [(Small(c) \wedge Cube(a)) \vee (Small(c) \wedge Cube(d))]$ .
- (f)  $Cube(a) \leftrightarrow (Cube(c) \leftrightarrow Large(c))$ .

12. Indique, com uma cruz, todas as traduções correctas (na linguagem da lógica de primeira ordem do Tarski) das seguintes sentenças:

(a) **Não é verdade que  $c$  seja um tetraedro grande.**

- |   |   |
|---|---|
| <input type="checkbox"/> $\neg(Tet(c) \vee Large(c))$     | <input type="checkbox"/> $\neg Tet(c) \wedge \neg Large(c)$ |
| <input type="checkbox"/> $\neg Tet(c) \vee \neg Large(c)$ | <input type="checkbox"/> $\neg(Tet(c) \wedge Large(c))$     |

(b)  **$d$  está na linha de  $b$ , a não ser que ambos os objectos sejam dodecaedros.**

- |  |  |
|--|--|
| <input type="checkbox"/> $SameRow(d, b) \vee Dodec(d \wedge b)$          | <input type="checkbox"/> $SameRow(d, b) \vee Dodec(d) \wedge Dodec(b)$   |
| <input type="checkbox"/> $SameRow(d, b) \vee (Dodec(d) \wedge Dodec(b))$ | <input type="checkbox"/> $SameRow(d, b) \wedge Dodec(d) \wedge Dodec(b)$ |

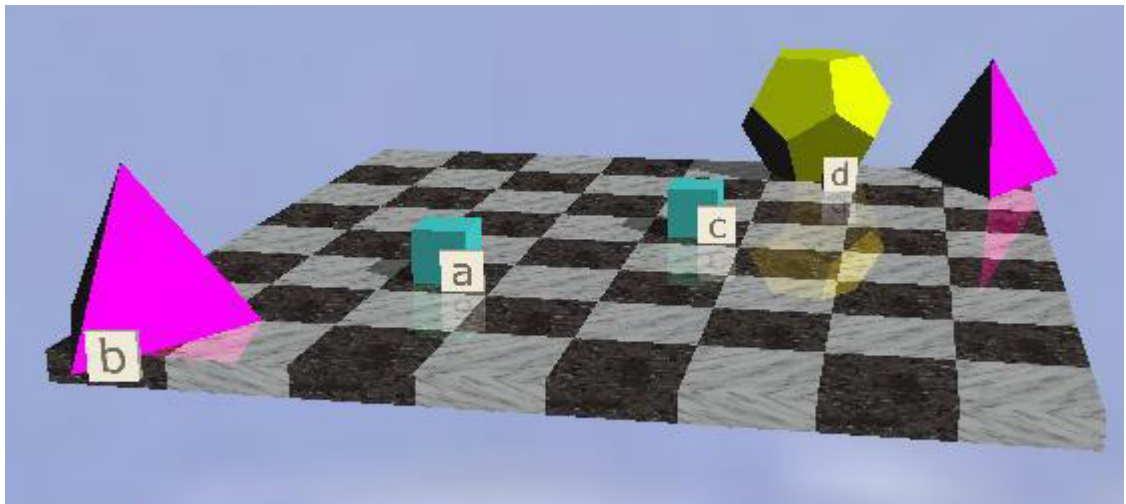
13. Traduza cada uma das seguintes sentenças da linguagem Tarski para Português.

- (a)  $Tet(a) \leftrightarrow Tet(b)$ .
- (b)  $Larger(a, a)$ .
- (c)  $\neg(Tet(f) \wedge Cube(a))$ .
- (d)  $LeftOf(a, b) \wedge Tet(b) \vee Cube(a)$ .
- (e)  $\exists x(Cube(x) \wedge Small(x))$ .
- (f)  $\forall z(Tet(z) \rightarrow Medium(z))$ .
- (g)  $\exists x(Tet(x) \wedge \forall z(Cube(z) \rightarrow FrontOf(x, z)))$ .
- (h)  $\forall x \forall y(BackOf(x, y) \rightarrow Larger(x, y))$ .

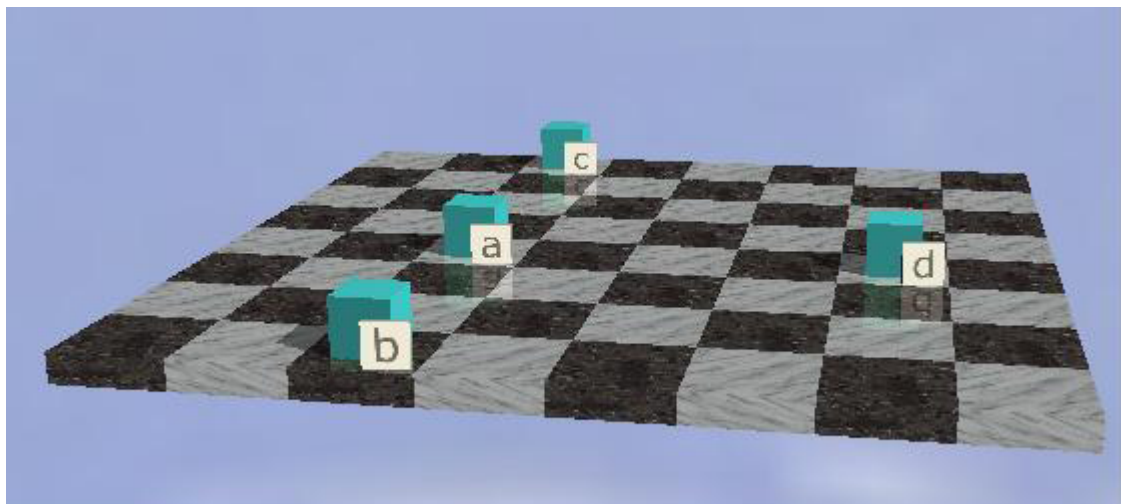
14. Avalie da verdade ou falsidade das seguintes sentenças nos mundos A, B, C (em baixo), preenchendo a seguinte tabela com **V**'s (verdade) e **F**'s (falso):

Sentenças	A	B	C
$Cube(a) \vee Tet(b)$			
$a \neq d$			
$Between(a, b, c) \rightarrow (Small(a) \wedge Large(b))$			
$\neg(Large(b) \rightarrow Small(d))$			
$\forall x(Dodec(x) \rightarrow Large(x))$			
$\exists x(Tet(x) \wedge RightOf(x, a) \wedge \neg Small(x))$			
$\forall x(Cube(x) \wedge Small(x))$			
$\forall x \forall y((Cube(x) \wedge Tet(y)) \rightarrow Smaller(x, y))$			
$\exists x(Tet(x) \wedge Large(x) \wedge \forall z(Cube(z) \rightarrow Between(z, x, b)))$			
$\forall z[Cube(z) \rightarrow \exists x(Tet(x) \wedge Large(x) \wedge \forall w(LeftOf(w, z) \rightarrow Between(z, x, w)))]$			

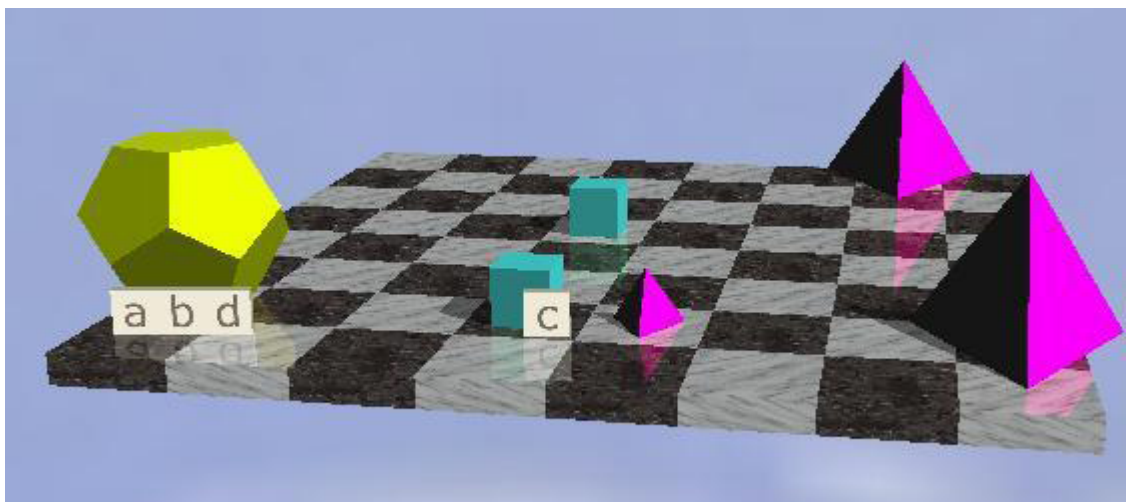
Mundo A



Mundo B



Mundo C

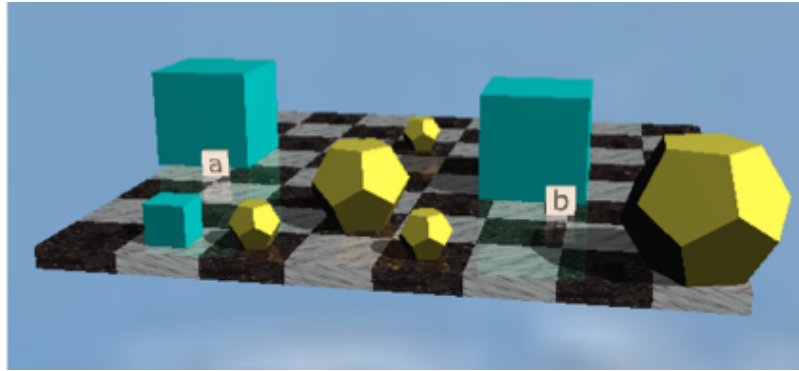




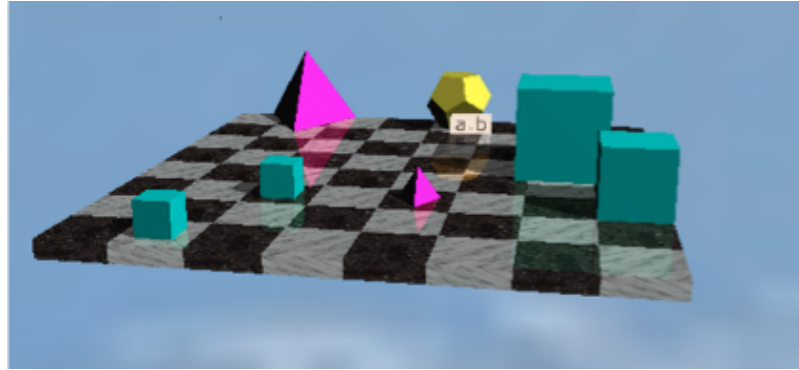
15. Avalie da verdade ou falsidade das seguintes sentenças nos mundos A, B, C (em baixo), preenchendo a seguinte tabela com **V**'s (verdade) e **F**'s (falso):

Sentenças	A	B	C
$SameShape(a, b) \wedge \neg Large(a)$			
$Dodec(b) \rightarrow Dodec(a)$			
$LeftOf(a, b) \vee a \neq b$			
$\neg(Dodec(b) \leftrightarrow LeftOf(b, a))$			
$\exists x(Cube(x) \wedge Small(x))$			
$\forall x((Cube(x) \wedge LeftOf(x, b)) \rightarrow Small(x))$			
$\exists x(Cube(x) \wedge Large(x)) \wedge \exists x LeftOf(x, b)$			
$\forall x \forall y((Cube(x) \wedge Cube(y) \wedge x \neq y) \rightarrow \neg SameSize(x, y))$			
$\forall x(Cube(x) \rightarrow \exists y(Dodec(y) \wedge SameSize(y, x)))$			
$\exists x(Cube(x) \wedge \forall w(Dodec(w) \rightarrow \exists z(LeftOf(x, z) \wedge LeftOf(z, w))))$			

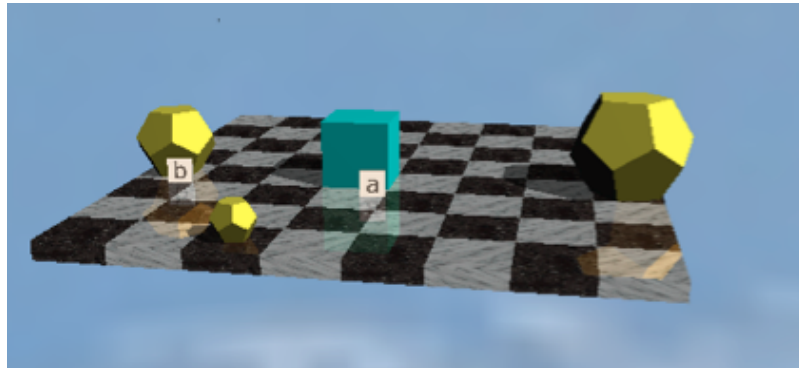
Mundo A



Mundo B



Mundo C

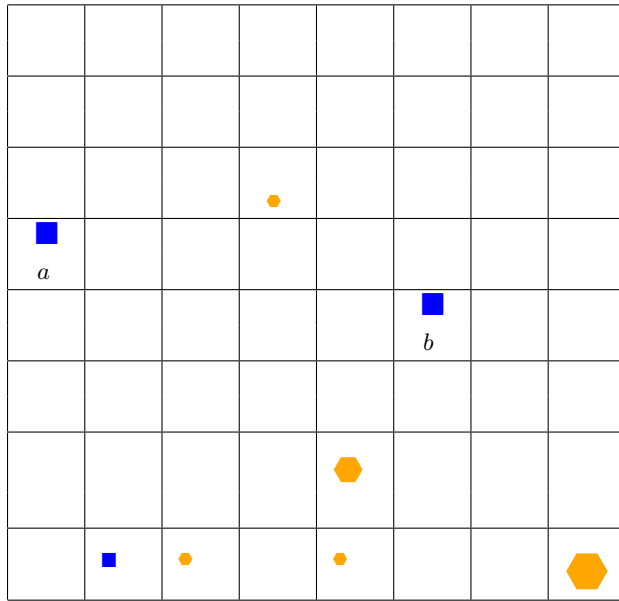


16. (a) Avalie da verdade ou falsidade das seguintes cinco sentenças nos mundos A e B abaixo, preenchendo a seguinte tabela com **V**'s (verdade) e **F**'s (falso):

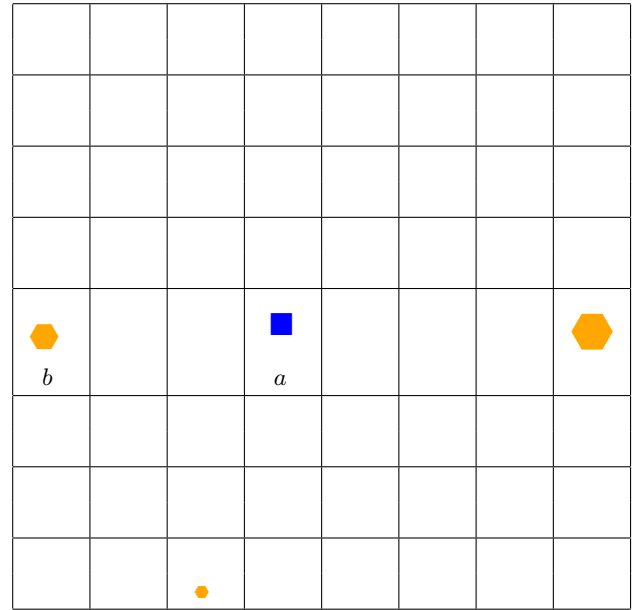
Sentenças	A	B
$Dodec(b) \rightarrow (Dodec(a) \vee Large(a))$		
$\neg(Cube(a) \wedge Cube(b))$		
$\forall x((Cube(x) \wedge RightOf(b, x)) \rightarrow Small(x))$		
$\exists y \forall x (Dodec(x) \rightarrow RightOf(x, y))$		
$\exists x [Cube(x) \wedge \forall y (Dodec(y) \rightarrow \exists z (z \neq y \wedge (SameRow(z, y) \vee RightOf(z, x))))]$		

- (b) O que precisa de mudar em **A** e **B** para que as 3 primeiras fórmulas sejam todas verdadeiras?

Mundo A



Mundo B



▲ Tetraedro Pequeno  
▲ Tetraedro Médio  
▲ Tetraedro Grande

■ Cubo Pequeno  
■ Cubo Médio  
■ Cubo Grande

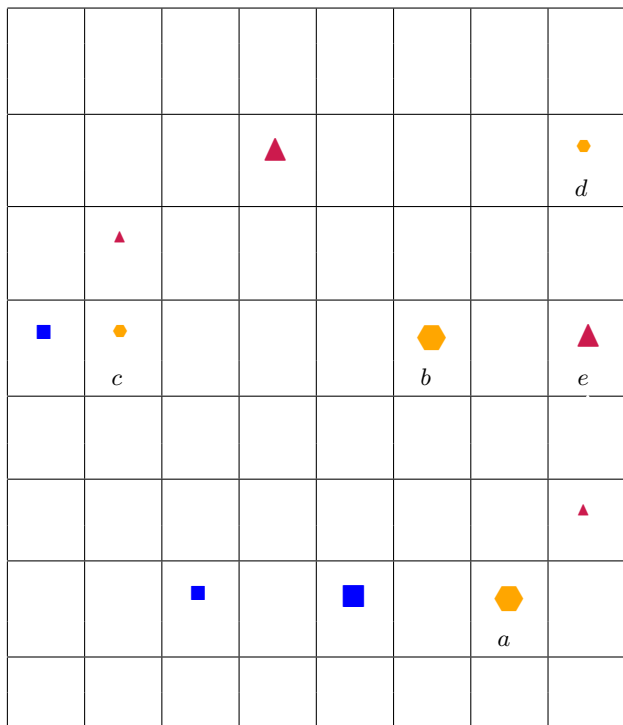
● Dodecaedro Pequeno  
● Dodecaedro Médio  
● Dodecaedro Grande

17. (a) Indique o valor lógico das seguintes sentenças nos mundos **A** e **B** abaixo.

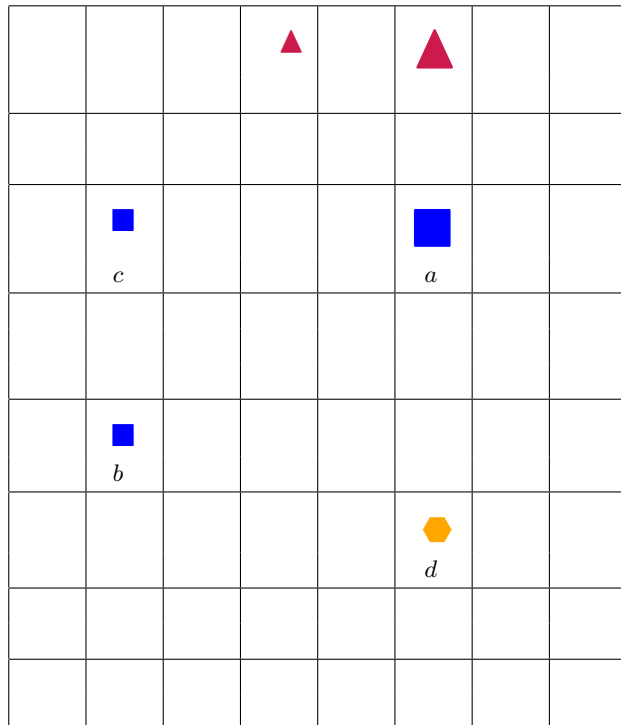
Sentenças	A	B
$Dodec(a) \leftrightarrow SameRow(b, c)$		
$\forall x \forall y (SameShape(x, y) \wedge SameCol(x, y) \rightarrow SameSize(x, y))$		
$\forall x (Cube(x) \rightarrow \exists y (Dodec(y) \wedge LeftOf(x, y)))$		
$\neg \exists x (Dodec(x) \wedge SameRow(x, b))$		
$\forall x \forall y (\neg SameShape(y, x) \vee Tet(y) \vee Cube(x))$		

- (b) Nos casos em que a fórmula 5 é falsa, indique todos os pares de objectos  $x$  e  $y$  que a não satisfazem.

(c) Mostre que a negação da fórmula 5 é equivalente a  $\exists x \exists y (Dodec(x) \wedge Dodec(y))$ .



Mundo A



Mundo B