Lic.ª Eng. Informática 01/02/2021 **Exame de Recurso A-Parte 2- Estruturas Discretas**

Duração: 1h15m

Justifique convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos.

Nota: *$C(n,k)$ e $\binom{n}{k}$ denotam o mesmo número.*

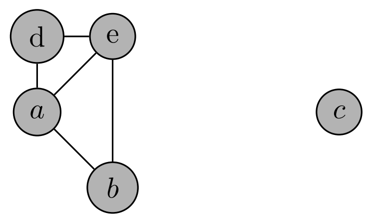
1. (a) Use o algoritmo de Euclides para determinar inteiros a e b tais que o

$$mdc(29, 15) = 15a + 29b.$$

Ver versão C.

(b) Determine as soluções da congruência $15x \equiv_{29} 28$ no conjunto $\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots, 28\}$.
Ver versão C.

2. (a) Escreva a matriz de adjacência do grafo



Use essa matriz para determinar o número de caminhos de comprimento três do vértice b para o vértice a.

Ver versão C.

(b) Use o *método de demonstração por redução ao absurdo*, para mostrar que se um grafo G simples, com n vértices, tem pelo menos $\binom{n-1}{2} + 1$ arestas, então é conexo.

(c) Dê um exemplo de um grafo simples com cinco vértices e desconexo que tenha $\binom{4}{2}$ arestas.
Ver versão C.

3. Existe alguma árvore de 8 vértices com um vértice de grau 5 e apenas 4 vértices de grau 1?

Ver versão C

4. (a) Quantas permutações de $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ existem de tal modo que 5 preceda 6 e 6 preceda 7?
Vamos formar todas as palavras de comprimento 8 no alfabeto $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ *sem repetição de letras onde o 5 fica imediatamente antes do 6 e o 6 imediatamente antes do 7. Comecemos por escolher 3 lugares consecutivos para colocar o 5 antes do 6 e imediatamente a seguir o 7. De quantas maneiras o podemos fazer?*

5 – – – – – – –

– 5 – – – – – –

– – 5 – – – – –

– – – 5 – – – –

– – – – 5 – – –

– – – – – 5 – –

O 5 pode ficar em todas as 8 posições excepto nas duas últimas que serão ocupadas por 6 e7. No total temos 6 maneiras de o fazer. Os restantes 5 lugares livres são para colocar as 5 restantes letras, havendo 5! maneiras de o fazer.

No total existem $6 \times 5!$ *palavras.*

Alternativamente, chamando A ao bloco 567, é o mesmo que contar todas as permutações dos 6 elementos A,1,2,3,4,8. No total 6! maneiras.

Nota

Se " precede" for entendido como "antes" e não "imediatamente antes", então temos apenas de escolher 3 posições para 5, 6 e 7, por esta ordem, de entre 8 posições, ou seja, $\binom{8}{3}$ *posições. Neste caso, temos* $\binom{8}{3}5!$ *palavras.*

(b) Qual é o coeficiente de $\frac{1}{x^3}$ na expansão de $\dfrac{(x+1)^{100}}{x^{100}}$?

Ver versão C.

5. Quantos números com exactamente 10 factores primos podemos formar com os primos $3, 5, 7, 11$ e 13 sabendo que o primo 5 tem multiplicidade pelo menos dois e o primo 13 aparece exactamente uma vez?

   Ver versão C.

Cotação:

1-1.0+1.2

2- 1.5+1.2+0.5

3-1.2

4-1.1+1.1

5-1.2