Lic.ª Eng. Informática 01/02/2021 **Exame de Recurso A-Parte 1- Estruturas Discretas**
Duração: 1h15m

Justifique convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos.

Nota: $C(n,k)$ *e* $\binom{n}{k}$ *denotam o mesmo número.*

1. Sem usar tabelas de verdade, mostre que $(b \to c) \to (a \wedge b \to a \wedge c)$ é uma tautologia.

   Usando o método de Quine:

$$A = (b \to c) \to (a \wedge b \to a \wedge c)$$

$$A(a/V) \equiv (b \to c) \to (V \wedge b \to V \wedge c) \equiv (b \to c) \to (b \to c) \equiv V.$$

$$A(a/F) \equiv (b \to c) \to (F \wedge b \to F \wedge c) \equiv (b \to c) \to (F \to F) \equiv (b \to c) \to V \equiv V.$$

   Note que $p \to p \equiv V$ *porque* $F \to F \equiv V \to V \equiv V$*. Além disso,* $p \to V \equiv V$*.*

   Logo, A *é uma tautologia.*

   Alternativa, dedução formal:

   $(b \to c) \to (a \wedge b \to a \wedge c) \equiv \neg(a \wedge b \to a \wedge c) \to \neg(b \to c) \equiv a \wedge b \wedge (\neg a \vee \neg c) \to (b \wedge \neg c)$

   Queremos provar que $a \wedge b \wedge (\neg a \vee \neg c) \to (b \wedge \neg c)$ *é um argumento correcto, isto é, uma tautologia.*

   1.a *Premissa*

   2.b *Premissa*

   3.$\neg a \vee \neg c$ *Premissa*

   4.$\neg c$ *De 1, 3 e SD (silogismo disjuntivo)*

   5.$b \wedge \neg c$, *De 2 e 4, Conj. (silogismo conjuntivo.) CQD*

   `Nota:` $\neg(a \to b) \equiv a \wedge \neg b$.

2. (a) Escreva uma fórmula que corresponda à negação da seguinte fórmula no mundo Tarski:

$$\forall x[Dodec(x) \to \exists y(Cube(y) \wedge SameSize(x,y))].$$

$$\neg\left(\forall x[Dodec(x) \to \exists y(Cube(y) \wedge SameSize(x,y))]\right) \equiv \exists x[Dodec(x) \wedge \forall y(\neg Cube(y) \vee \neg SameSize(x,y))].$$

   (b) Construa um mundo Tarski com três objectos distintos onde a negação da fórmula anterior seja verdadeira.

   `1 dodecaedro e mais dois objectos em que nenhum deles é um cubo do mesmo tamanho do dodecaedro.`

3. Verifique se o seguinte argumento está correcto:

   `É necessário que eu esteja feliz para eu cantar. Existe um rato em casa ou estou feliz. Estou triste. Então, existe um rato em casa e eu não canto.`

Consideremos as proposições:

C: Eu canto

F: Estou feliz

R: Existe um rato em casa

O texto em português acima corresponde à seguinte fórmula:

$$(C \to F) \wedge (R \vee F) \wedge \neg F \to (R \wedge \neg C).$$

O argumento está correcto se a fórmula for uma tautologia. Podemos verificar que é uma tautologia, por dedução formal da conclusão $R \wedge \neg C$*, a partir das premissas usando silogismos.*

1. $C \to F$ *Premissa*
2. $R \vee F$ *Premissa*
3. $\neg F$ *Premissa*
4. R *De 2, 3, e SD (Silogismo Disjuntivo)*
5. $\neg C$ *De 1, 3 e MT (Silogismo Modus Tollens)*
6. $R \wedge \neg C$ *De 4, 5 e Conj. (Conjunção). CQD.*

Nota*:*

SD: $(a \vee b) \wedge \neg b \to a$ *tautologia*

MT: $(a \to b) \wedge \neg b \to \neg a$ *tautologia*

Conjunção:

a
$b.$

$a \wedge b \quad \therefore$

4. Use a indução matemática para provar a igualdade

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}, \text{ para } n \geq 1.$$

5. Calcule

(a) $\sum_{i=2}^{n} \left[\frac{1}{i(i+1)} + 2i + 1\right] = \frac{n}{n+1} - \frac{1}{2} + 2\left(\frac{n(n+1)}{2} - 1\right) + n - 1 = \frac{n}{n+1} - \frac{1}{2} + n(n+1) - 2 + n - 1,\ n \geq 2.$

(b) $\sum_{i=2}^{278}\sum_{j=1}^{57} (-1)^i \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}\right) = \sum_{i=2}^{278}(-1)^i \sum_{j=1}^{57}\left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}\right) = \left(\sum_{i=2}^{277}(-1)^i + (-1)^{278}\right)\sum_{j=1}^{57} -\left(\frac{1}{j+1} - \frac{1}{j}\right)$

$$= 1 \times \sum_{j=1}^{57} -\left(\frac{1}{j+1} - \frac{1}{j}\right) = -(\frac{1}{58} - 1) = 1 - \frac{1}{58}.$$

6. Escreva a expressão abaixo, usando a notação abreviada de somatório

$$\binom{51}{0}51! - \binom{51}{1}50! + \binom{51}{2}49! - \cdots + \binom{51}{44}7! - \binom{51}{45}6! + \binom{51}{46}5! = \sum_{i=0}^{46}\binom{51}{i}(51-i)!.$$

Cotação:

1-1.4

2- 1.0+0.7

3- 1.8

4-1.5

5-1.3+1.3

6-1.0