Ano lectivo 2020/21 **Teste 2 B de Estruturas Discretas**

Lic.ª Eng. Informática da FCTUC 10/12/2020 *Duração: 1:00*

Nome completo:

Número de estudante:

Justifique convenientemente as suas respostas e indique os cálculos.

1. Use a indução matemática para provar a igualdade

$$1 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2, \text{ para } n \geq 1.$$

Queremos provar que a afirmação $P(n) : 1 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ *é verdadeira para todo o* $n \geq 1$*.*

Passo básico: Para $n = 1$*,* $P(1) : 1^3 = \left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2$ *é verdadeira.*

Passo indutivo: $P(k) \to P(k+1)$ *é verdadeira para todo o* $k \geq 1$*.*

Hipótese indutiva: Seja $k \geq 1$ *e suponhamos* $P(k)$*:* $1 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2$ *verdadeira.*

Tese: Queremos provar que $P(k+1)$ *é verdadeira.*

Isto é, $1 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2$ *verifica-se.*

Usando a hipótese indutiva, $1 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 + (k+1)^3 =$

$= (k+1)^2[\frac{k^2}{4} + (k+1)] = (k+1)^2\, \frac{k^2+4k+4}{4} = (k+1)^2\, \frac{(k+2)^2}{4} = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2.$

2. Calcule:

(a) *Sabendo que* $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)/2$*, vem que* $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}(1 + \frac{i}{4}) = \sum_{i=0}^{n} 1 + \sum_{i=0}^{n} \frac{i}{4} = (n+1) + \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{n} i =$

$\displaystyle= (n+1) + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} i = (n+1) + \frac{n(n+1)}{4 \times 2} = \frac{8(n+1) + n(n+1)}{8} = \frac{(n+1)(8+n)}{8}$*, para* $n \geq 1$*.*

(b) *Usando a identidade da soma dos primeiros* n *cubos em* (1)*, e calculando*

$\displaystyle\sum_{j=3}^{21}(-1)^j = \sum_{j=3}^{20}(-1)^j + (-1)^{21} = 0 - 1 = -1$*, obtemos*

$$\sum_{i=1}^{51}\sum_{j=3}^{21}(-1)^j 5i^3 = \sum_{i=1}^{51} 5i^3 \times \sum_{j=3}^{21}(-1)^j = 5\sum_{i=1}^{51} i^3 \times \sum_{j=3}^{21}(-1)^j = -5\left(\frac{51 \times 52}{2}\right)^2.$$

3. Escreva a seguinte expressão usando a notação abreviada de somatório

$$-\frac{3x^2}{1 \times 2} + \frac{5x^3}{2 \times 3} - \frac{7x^4}{3 \times 4} + \frac{9x^5}{4 \times 5} - \frac{11x^6}{5 \times 6} + \frac{13x^7}{6 \times 7} - \frac{15x^8}{7 \times 8} = \sum_{i=0}^{6}(-1)^{i+1}\frac{(2i+3)x^{i+2}}{(i+1)(i+2)} = \sum_{i=1}^{7}(-1)^i\frac{(2i+1)x^{i+1}}{i(i+1)}.$$

4. Considere a seguinte matriz onde b é um parâmetro inteiro não negativo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & b & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Considere $b = 2$ e seja o grafo $G = (V, E)$ cuja matriz de adjacência relativamente à marcação de vértices v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 é A

(i) Qual é a sequência de graus de G?

$$g(v_1) = 7, g(v_2) = 2, g(v_3) = 5, g(v_4) = 4, g(v_5) = 4.$$

(ii) O que conta a entrada $(3, 4)$ da matriz A^{551}? (Não calcule essa entrada.)
Conta o número de caminhos de comprimento 551 que ligam v_3 a v_4.

(iii) Quantos caminhos de comprimento 3 ligam v_3 a v_4?

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 13 & 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 48.$$

(b) Determine todos os valores de b para o quais o grafo com matriz de adjacência A tem um número ímpar de arestas.

$$\frac{2b + 18}{2} = b + 9 = \#E$$

O cardinal de E, $\#E$, ou seja, o número de arestas de E, é ímpar se e só se b é um número par não negativo. Logo $b = 2k$ sendo k um inteiro não negativo qualquer.