

Algoritmos e complexidade

1. Exprima as seguintes expressões usando a notação abreviada de somatório:

(a) $\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{n!} \quad (n \geq 2).$

(b) $\frac{1}{3!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{3!} \quad (20 \text{ parcelas}).$

(c) $1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49.$

(d) $1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + 5^3 - 6^3 + 7^3.$

(e) $3 + 5 + 11 + 29 + \cdots + (2 + 3^n).$

(f) $\frac{1}{n} + \frac{2}{n+1} + \frac{3}{n+2} + \cdots + \frac{n+1}{2n}.$

(g) $n - \frac{n+1}{2!} + \frac{n+2}{4!} - \frac{n+3}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{2n}{(2n)!}.$

2. Qual é o valor dos seguintes somatórios?

(a) $\sum_{i=1}^5 i^2$ (b) $\sum_{j=4}^8 (-1)^j$ (c) $\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 ij$ (d) $\sum_{s \in \{0,2,4\}} s$ (e) $\sum_{s \in \{1,3,5,7\}} \frac{1}{s}$ (f) $\sum_{k=0}^4 k!$

3. Qual é o valor dos seguintes somatórios duplos?

(a) $\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 (i+j)$ (b) $\sum_{i=0}^{20} \sum_{j=0}^{30} (2i+3j)$ (c) $\sum_{i=1}^{300} \sum_{j=0}^{200} i$ (d) $\sum_{i=0}^{200} \sum_{j=1}^{300} ij$ (e) $\sum_{i=1}^{300} \sum_{j=1}^{200} (i-j)$
 (f) $\sum_{i=0}^{200} \sum_{j=0}^{300} (3i+2j)$ (g) $\sum_{i=1}^{300} \sum_{j=0}^{200} j$ (h) $\sum_{i=0}^{20} \sum_{j=1}^{30} i^2 j^3$

4. (a) Calcule a soma dos primeiros 100 termos da progressão aritmética de razão $r = \frac{1}{2}$ e primeiro termo $a = 1$.

(b) Calcule $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 1 + \frac{4}{3} + \cdots + 10.$

5. Mostre que $\sum_{j=1}^n (a_j - a_{j-1}) = a_n - a_0$ para qualquer sequência de números reais a_0, a_1, \dots, a_n .

6. Calcule: (a) $\sum_{i=1}^{100} \sum_{j=1}^{51} [i \cos(j\pi)].$ (b) $\sum_{i=1}^{100} \sum_{j=1}^{51} [i(\cos(j\pi) - \cos((j-1)\pi))].$

7. Use a identidade

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

e o exercício 5 para calcular

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}.$$

8. Some ambos os membros da identidade $k^2 - (k - 1)^2 = 2k - 1$ desde $k = 1$ até $k = n$ e use o Exercício 5 para obter:

- (a) uma fórmula para $\sum_{k=1}^n (2k - 1)$. (b) uma fórmula para $\sum_{k=1}^n k$.

9. Considere o algoritmo seguinte que permite calcular o valor da função *soma* em cada inteiro positivo n dado.

```

procedure soma ( $n$ : inteiro positivo)
  soma := 0    {valor inicial da soma}
  for  $i := 1$  to  $n$ 
    for  $j := 1$  to  $i$ 
      soma := soma + 1;

```

Calcule *soma*(3) e *soma*(n) para um n arbitrário.

10. Qual é o tempo de execução de um programa que efectua $2n^2 + 2^n$ operações, cada uma demorando 10^{-9} segundos, para os seguintes valores de n ?

- (a) $n = 10$ (b) $n = 20$ (c) $n = 50$ (d) $n = 100$

11. Qual é o valor máximo de n para que um programa que efectua $f(n)$ operações, cada uma demorando 10^{-9} segundos, não demore mais que um segundo a ser executado, nos seguintes casos?

- (a) $f(n) = \log_{10} n$ (b) $f(n) = n$ (c) $f(n) = n^2$ (d) $f(n) = 2^n$ (e) $f(n) = n!$

12. O algoritmo usual para calcular o valor de um polinómio $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ em $x = c$ pode ser expresso por

```

procedure polinomio( $c, a_0, a_1, \dots, a_n$ : números reais)
  potencia := 1
   $y := a_0$ 
  for  $i := 1$  to  $n$ 
  begin
    potencia := potencia *  $c$ 
     $y := y + a_i * \textit{potencia}$ 
  end { $y = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \dots + a_1 c + a_0$ }

```

onde o valor final de y é o valor do polinómio em $x = c$.

- (a) Calcule $3x^2 + x + 1$ em $x = 2$, percorrendo todos os passos do algoritmo.
 (b) Quantas multiplicações e adições são feitas para determinar o valor de um polinómio de grau n em $x = c$? (Não conte as adições usadas para incrementar a variável do ciclo.)

13. Há um método mais eficiente (em termos do número de multiplicações e adições efectuada) para calcular valores de polinómios do que o descrito no exercício anterior (cf. apontamentos, p. 42). É o chamado *método de Horner*:

```

procedure Horner( $c, a_0, a_1, \dots, a_n$ : números reais)
   $y := a_n$ 
  for  $i := 1$  to  $n$ 
     $y := y * c + a_{n-i}$ 
  { $y = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \dots + a_1 c + a_0$ }

```

- (a) Calcule $3x^2 + x + 1$ em $x = 2$, percorrendo todos os passos do algoritmo.
- (b) Quantas multiplicações e adições são feitas para determinar o valor de um polinómio de grau n em $x = c$? (Não conte adições usadas para incrementar a variável do ciclo.)
14. O problema de localizar um elemento numa lista ordenada (ou de determinar que ele não está na lista) pode ser resolvido pelos dois algoritmos seguintes (o primeiro, chamado *procura linear*, localiza um inteiro x numa lista de inteiros distintos de comprimento n ; o segundo, chamado *procura binária*, localiza um inteiro x numa lista de inteiros ordenados por ordem crescente).

```

procedure procura linear( $x$ : inteiro,  $a_1, a_2, \dots, a_n$ : inteiros distintos)
   $i := 1$ 
  while ( $i \leq n$  and  $x \neq a_i$ )
     $i := i + 1$ 
  if  $i \leq n$  then  $lugar := i$ 
  else  $lugar := 0$ 
  { $lugar$  é o índice do termo igual a  $x$ , ou é 0 se  $x$  não for encontrado}

```

```

procedure procura binária( $x$ : inteiro,  $a_1, a_2, \dots, a_n$ : inteiros crescentes)
   $i := 1$  { $i$  é o limite esquerdo do intervalo de procura}
   $j := n$  { $j$  é o limite direito do intervalo de procura}
  while  $i < j$ 
  begin
     $m := \lfloor (i + j) / 2 \rfloor$ 
    if  $x > a_m$  then  $i := m + 1$ 
    else  $j := m$ 
  end
  if  $x = a_i$  then  $lugar := i$ 
  else  $lugar := 0$ 
  { $lugar$  é o índice do termo igual a  $x$ , ou é 0 se  $x$  não for encontrado}

```

Liste todos os passos para procurar o número 9 na sequência 1, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 11 usando

- (a) procura linear (b) procura binária.

15. Suponha que se sabe que um determinado elemento está entre os primeiros quatro elementos de uma lista de 32 elementos. O que deveremos fazer para encontrar esse elemento mais rapidamente, uma procura linear ou uma procura binária?
16. Determine a complexidade dos algoritmos de procura linear e procura binária na pior situação.