

**Justifique** convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos.

**Nota:**  $C(n, k)$  e  $\binom{n}{k}$  denotam o mesmo número.

1. Sem usar tabelas de verdade, mostre que  $a \rightarrow (\neg b \rightarrow (a \wedge \neg b))$  é uma tautologia.

*Método de Quine:*  $A = a \rightarrow (\neg b \rightarrow (a \wedge \neg b))$

$$A(a/V) = V \rightarrow (\neg b \rightarrow (V \wedge \neg b)) \equiv \neg b \rightarrow (V \wedge \neg b) \equiv \neg b \rightarrow \neg b \equiv V$$

$$A(a/F) = F \rightarrow (\neg b \rightarrow (F \wedge \neg b)) \equiv V$$

**Nota.**  $F \rightarrow p \equiv V$

*Alternativa:*

$$a \rightarrow (\neg b \rightarrow (a \wedge \neg b)) \equiv \neg(\neg b \rightarrow (a \wedge \neg b)) \rightarrow \neg a \equiv \neg b \wedge \neg(a \wedge \neg b) \rightarrow \neg a \equiv \neg b \wedge (\neg a \vee b) \rightarrow \neg a \equiv V$$

**Nota:** *SD (silogismo disjuntivo):*  $\neg b \wedge (\neg a \vee b) \rightarrow \neg a$  é uma tautologia.

2. (a) Escreva uma fórmula que corresponda à negação da seguinte fórmula no mundo Tarski:

$$\exists x \forall y [x \neq y \rightarrow \text{Smaller}(x, y) \vee \text{Smaller}(y, x)]$$

$$\forall x \exists y [x \neq y \wedge \text{SameSize}(x, y)]$$

- (b) Construa um mundo Tarski com três objectos distintos onde a negação da fórmula anterior seja verdadeira.

*Três objectos distintos quaisquer com o mesmo tamanho.*

3. Verifique se o seguinte argumento está correcto:

*É necessário que eu esteja feliz para eu cantar. Existe um rato em casa ou estou triste. Eu canto. Então, existe um rato em casa.*

*Consideremos as seguintes proposições:*

*C: Eu canto*

*F: Estou feliz.*

*R: Existe um rato em casa*

*O argumento acima corresponde à seguinte fórmula*

$$[(C \rightarrow F) \wedge (R \vee \neg F) \wedge C] \rightarrow R$$

*O argumento está correcto se a fórmula for uma tautologia. Podemos verificar que é uma tautologia, por dedução formal da conclusão R, a partir das premissas, usando silogismos.*

1.  $C \rightarrow F$       *Premissa*
2.  $R \vee \neg F$     *Premissa*
3.  $C$               *Premissa*
4.  $F$               *De 1, 3 e MP (silogismo modus ponens)*
5.  $R$               *De 2, 4 e SD (silogismo disjuntivo) CQD*

*SD:  $(a \vee b) \wedge \neg b \rightarrow a$  tautologia*

*MT:  $(a \rightarrow b) \wedge \neg b \rightarrow \neg a$  tautologia*

*MP:  $(a \rightarrow b) \wedge a \rightarrow b$  tautologia*

*Conjunção:*

$$\begin{array}{c} a \\ b. \\ \hline a \wedge b \quad \therefore \end{array}$$

4. Calcule

$$(a) \sum_{i=0}^n [i!i - 2i + 5!] = (n+1)! - 1 - n(n+1) + 5!(n+1), \text{ para } n \geq 0.$$

$$\begin{aligned} (b) \sum_{i=1}^{277} \sum_{j=0}^{50} (1 + (-1)^i)(2^{j+1} - 2^j) &= \sum_{i=1}^{277} (1 + (-1)^i) \sum_{j=0}^{50} (2^{j+1} - 2^j) \\ &= \left[ \sum_{i \text{ par}, 1 \leq i \leq 276} (1 + (-1)^i) + \sum_{i \text{ ímpar}, 1 \leq i \leq 276} (1 + (-1)^i) + (1 + (-1)^{277}) \right] \times (2^{51} - 1) \\ &= 276/2 \times 2(2^{51} - 1) = 276(2^{51} - 1) \end{aligned}$$

5. Escreva a expressão abaixo usando a notação abreviada de somatório

$$\frac{1}{2^{55} + 1} + \frac{2}{2^{55} + 2} + \frac{3}{2^{55} + 3} + \cdots + \frac{2^{55}}{2^{56}} + \frac{2^{55} + 1}{2^{56} + 1} + \frac{2^{55} + 2}{2^{56} + 2} = \sum_{i=1}^{2^{55}+2} \frac{i}{2^{55} + i}.$$

**Cotação:**

1-1.4

2- 1.0+0.7

3- 1.8

4-1.5

5-1.3+1.3

6-1.0