Ano lectivo 2020/21 **Teste 2 A de Estruturas Discretas**

Lic.ª Eng. Informática da FCTUC 10/12/2020 *Duração: 1:00*

Nome completo:

Número de estudante:

Justifique convenientemente as suas respostas e indique os cálculos.

1. Use a indução matemática para provar a igualdade

$$1 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2, \quad \text{para } n \geq 1.$$

2. Calcule:

(a) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}(\frac{i}{3}+1)$, para $n \geq 1$.

(b) $\displaystyle\sum_{i=3}^{27}\sum_{j=1}^{50}(-1)^i 4j^3$.

3. Escreva a seguinte expressão usando a notação abreviada de somatório

$$\frac{3x}{1\times 2} - \frac{5x^2}{2\times 3} + \frac{7x^3}{3\times 4} - \frac{9x^4}{4\times 5} + \frac{11x^5}{5\times 6} - \frac{13x^6}{6\times 7} = \sum_{i=1}^{6}(-1)^{i+1}\frac{(2i+1)x^i}{i(i+1)} = \sum_{i=0}^{5}(-1)^i\frac{(2i+3)x^{i+1}}{(i+1)(i+2)}.$$

4. Considere a seguinte matriz onde a é um parâmetro inteiro não negativo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & 2 & 0 & 3 \\ a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Considere $a = 2$ e seja o grafo $G = (V, E)$ cuja matriz de adjacência relativamente à marcação de vértices v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 é A

(i) Qual é a sequência de graus de G?

$$g(v_1) = 7, g(v_2) = 2, g(v_3) = 3, g(v_4) = 4, g(v_5) = 6$$

(ii) O que conta a entrada $(4, 3)$ da matriz A^{1500}? (Não calcule essa entrada.) *Conta o número de caminhos de comprimento 1500 que ligam v_4 a v_3.*

(iii) Quantos caminhos de comprimento 3 ligam v_4 a v_3?

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 0 & 0 & 10 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 32.$$

(b) Determine todos os valores de a para o quais o grafo com matriz de adjacência A tem um número par de arestas.

$$\frac{2a+5+3+4+6}{2} = \#E \Leftrightarrow \frac{2a+18}{2} = a+9 = \#E$$

O cardinal de E, $\#E$, isto é, o número de arestas de G é par se e só se a é um número ímpar positivo. Logo $a = 2k+1$ sendo k um inteiro não negativo qualquer.