1 2 9 0
Departamento de Matemática
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Universidade de Coimbra

Séries — Exercícios resolvidos

Coleção de exercícios resolvidos para Análise Matemática II, das Licenciaturas em Engenharia de Ciências de Dados e Engenharia Informática.

Jorge Sentieiro Neves

3 de Abril de 2022

Séries Numéricas

Calcule a soma das seguintes séries.

F1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}+3^n}{4^{n-1}}$;

F2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-2^n}{3^n \cdot 5^{n+1}}$;

F3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-4^n}{3^{2n}}$;

F4. $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty} \frac{3}{n^2-3n}$;

F5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[\sin\left(\tfrac{\pi}{n}\right) - \sin\left(\tfrac{\pi}{n+3}\right)\right]$;

F6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi(n+1)}{3}\right)}{n+1} - \frac{\cos\left(\frac{\pi n}{3}\right)}{n}\right]$;

F7. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$;

F8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+n(n+1)}{n(n+1)2^n}$.

F9. Determine a natureza e, se possível, a soma da seguinte série numérica:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi \cdot 2^n} + \frac{1}{\arctan(n+1)} - \frac{1}{\arctan(n+2)} \right).$$

Estude a natureza das seguintes séries numéricas.

F10. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n+3^n}{2^n}$;

F11. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n}+4^{n+1}}{5^n}$;

F12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{1+n!}$;

F13. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+\sqrt{n}}{n^3+1}$;

F14. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1/n}{\ln(n)}$;

F15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{n^2}}$;

F16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n+1}{n!}\right)^n$;

F17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2+(-1)^n}{n}\right)^n$;

F18. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^2-2}{(n+2)!}$;

F19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2+1}$.

Soluções:

F1. A série dada pode decompor-se em duas séries geométricas:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}+3^n}{4^{n-1}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^2\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}3\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}.$$

Se $\sum^{\infty} a_n$ e $\sum^{\infty} b_n$ são duas séries convergentes então a série $\sum^{\infty}(a_n+b_n)$ também é convergente e a sua soma é soma das duas somas das séries.

A série geométrica $\sum_{n=p}^{\infty} ar^n$ é convergente se e só se $|r|<1$. Nesse caso, a sua soma é dada pela fórmula:
$$\frac{a_p}{1-r}.$$

Trata-se da soma de duas séries geométricas de razão $-1/4$ e $3/4$, respetivamente. Como $|-1/4|, |3/4|<1$ estas duas séries geométricas são ambas convergentes. Logo:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}+3\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}=\frac{-4}{1+\frac{1}{4}}+3\cdot\frac{4/3}{1-3/4}=-\frac{16}{5}+\frac{16}{1}=\frac{64}{5}.$$

F2. Dado que:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-2^n}{3^n\cdot 5^{n+1}}&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n\cdot 5^{n+1}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^n\cdot 5^{n+1}}\\&=\frac{1}{5}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3\cdot 5}\right)^n-\frac{1}{5}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3\cdot 5}\right)^n,\end{aligned}$$

a série é a diferença de duas séries geométricas de razões $r_1=\frac{1}{15}$ e $r_2=\frac{2}{15}$. Como $|r_1|<1$ e $|r_2|<1$, tratam-se de duas séries convergente e logo a série dada é também convergente. Temos:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-2^n}{3^n\cdot 5^{n+1}}=\frac{1}{5}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3\cdot 5}\right)^n-\frac{1}{5}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3\cdot 5}\right)^n$$
$$=\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{\frac{1}{15}}{1-\frac{1}{15}}\right)-\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{\frac{2}{15}}{1-\frac{2}{15}}\right)=\frac{1}{15}\left(\frac{1}{14}-\frac{2}{13}\right)=-\frac{1}{182}.$$

F3. Observemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1-4^n}{3^{2n}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{9^n}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{9^n},$$

ou seja a série é a diferença de duas séries geométricas de razão $\frac{1}{9}$ e $\frac{4}{9}$, respetivamente. Como os módulos das razões são ambos inferiores a 1, ambas as séries são convergentes e logo a série em causa também. A sua soma é:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{9^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{9^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{9}} - \frac{1}{1-\frac{4}{9}} = \frac{9}{8} - \frac{9}{5} = -\frac{27}{40}.$$

F4. Notemos que

$$\frac{3}{n^2-3n} = \frac{1}{n-3} - \frac{1}{n}.$$

e que, portanto, a série é da forma $\sum_{n=4}^{\infty}(u_n - u_{n+3})$ com $u_n = \frac{1}{n-3}$. Trata-se de uma série telescópica. Como $\lim u_n = 0$ a série é convergente e a sua soma é:

$$u_4 + u_5 + u_6 - 3\lim u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6} - 3 \cdot 0 = \frac{11}{6}.$$

Uma série telescópica $\sum_{n=q}^{\infty}(u_n - u_{n+p})$ é convergente se u_n for uma sucessão convergente. Nesse caso a sua soma é $u_q - \lim u_n$, se $p=1$, e se $p>1$ é: $(u_q + \cdots + u_{q+p-1}) - p \lim u_n$

F5. A série dada é telescópica, pois é da forma $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n - u_{n+3})$, com $u_n = \sin(\pi/n)$. Como $\lim u_n = \lim \sin(\pi/n) = \sin(0) = 0$, deduz-se que u_n é convergente e logo a série também o é. A soma desta série é então:

$$u_1 + u_2 + u_3 - 3\lim u_n = \sin(\pi) + \sin(\pi/2) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

F6. A série é da forma -$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n - u_{n+p})$, com $p = 1$ e $u_n = \frac{\cos\left(\frac{\pi n}{3}\right)}{n}$. Trata-se de uma série simétrica de uma série telescópica. A série telescópica é convergente se e só se $\lim u_n$ existir e pertencer a $\mathbb{R}$. Como u_n é o produto de uma sucessão limitada, $\cos(\frac{\pi n}{3})$, por $\frac{1}{n}$, que converge para 0, deduz-se que $\lim u_n = 0$ e conclui-se que a série é convergente. A soma da série telescópica é:

$$u_1 - \lim u_n = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2},$$

e logo a soma da série em questão é $-\frac{1}{2}$.

F7. Solução: $1/2$. [Sugestão: Tente escrever o termo geral da série como $u_n - u_{n+1}$, para uma sucessão u_n apropriada.]

F8. Solução: 2.

F9. Esta série é a soma de uma série geométrica (de razão $\frac{1}{2}$) com uma série telescópica com $u_n = \frac{1}{\arctan(n+1)}$ e $p = 1$. Como $|1/2| < 1$ a série geométrica é convergente. Uma vez que $\lim u_n = \lim \frac{1}{\arctan(n+1)} = \frac{2}{\pi}$ a série telescópica é convergente. Assim sendo, a série dada é convergente. A soma é:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi\cdot 2^n}+\frac{1}{\arctan(n+1)}-\frac{1}{\arctan(n+2)}\right)\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\pi\cdot 2^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\arctan(n+1)}-\frac{1}{\arctan(n+2)}\right)\\
&=\tfrac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}+\frac{1}{\arctan(1)}-1\cdot\lim u_n\\
&=\tfrac{2}{\pi}+\tfrac{4}{\pi}-\tfrac{2}{\pi}=\tfrac{4}{\pi}.
\end{aligned}$$

F10. Esta série é a soma de duas séries:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n+3^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

A primeira é uma série alternada com $b_n = \frac{1}{2^n}$. Como $\lim b_n = 0$ e b_n é decrescente, pelo Critério de Leibniz, ela é convergente. (Note-se que ela é também uma série geométrica de razão $-\frac{1}{2}$ e logo, como $|-\frac{1}{2}| < 1$, é convergente.) Por outro lado a segunda série é geométrica de razão $r = \frac{3}{2} \geq 1$ e logo é divergente. A série dada é então divergente.

Critério de Leibniz:
Dada uma série alternada:
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n,$$
com $b_n \geq 0$, se:
(i) b_n for decrescente;
(ii) $\lim b_n = 0$;
então a série converge.

F11. Temos:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{2n}+4^{n+1}}{5^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{2n}}{5^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^{n+1}}{5^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{9}{5}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}4\left(\frac{4}{5}\right)^n,$$

que é uma soma de duas sérias geométricas, a primeira de razão $\frac{9}{5} \geq 1$ que é divergente e a sgunda de razão $\frac{4}{5} < 1$ que é convergente. Assim, a série inicial é divergente.

F12. Estudemos o limite do temo geral da série:

$$\lim\frac{n!}{1+n!}=\lim\frac{1}{\frac{1}{n!}+1}=\frac{1}{0+1}=1,$$

uma vez que $n! \geq n$ nos dá $\lim n! = +\infty$. Pelo critério para a divergência, se o termo geral não tem limite zero a série é divergente.

F13. Comparemos o termo geral da série dada com a sucessão $\frac{1}{n^2}$ (que se obtém tomando no numerador e no denominador do termo geral as maiores potências de n). Temos

$$\lim \frac{n+\sqrt{n}}{n^3+1} \cdot \left(\frac{1}{n^2}\right)^{-1} = \lim \frac{n^3+n^2\sqrt{n}}{n^3+1} = \lim \frac{n^3\left(1+\frac{\sqrt{n}}{n}\right)}{n^3\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}$$
$$= \lim \frac{1+\sqrt{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n^3}} = \frac{1+0}{1+0} = 1 \neq 0, +\infty.$$

Logo, pelo 2.º critério de comparação, a série do enunciado é da mesma natureza da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (desprezando o primeiro termo da série dada). Como esta segunda série é uma série de Riemann com $\alpha = 2 > 1$, ela é convergente e logo a série inicial também.

Uma série de Riemann é uma série da forma:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}.$$
Uma série de Riemann é convergente sse $\alpha > 1$.

F14. O termo geral da série é da forma $\frac{f'(n)}{f(n)}$ para $f(x) = \ln(x)$. Usemos o critério do integral. Por este critério, a série tem a natureza do integral impróprio de primeira espécie $\int_2^{\infty} \frac{1/x}{\ln x}\,dx$. Por definição, temos:

$$\int_2^{\infty} \frac{1/x}{\ln x}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_2^{t} \frac{1/x}{\ln x}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \left(\ln(\ln(x))\right]_2^t$$
$$= \lim_{t\to+\infty} \ln(\ln(x)) - \ln(\ln(2)) = +\infty.$$

Conclui-se que a série é divergente.

F15. Solução: Série convergente. [Sugestão: use o critério do integral.]

F16. Usemos o Teste da Raiz. Temos:

$$\lim \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n!}\right)^n} = \lim \frac{n+1}{n!} = \lim \frac{1+\frac{1}{n}}{(n-1)!} = \frac{1}{+\infty} = 0 < 1.$$

Logo a série é absolutamente convergente.

Teste da Raiz (Critério de Cauchy): Se
$$\lim \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$
então $\sum a_n$ é absolutamente convergente. (Quando o limite não existe ou é 1 nada se conclui e quando ele é > 1 a série é divergente.)

F17. O termo geral da série dada é ≥ 0 (verifique). Podemos, pois, usar o Teste da Raiz, sem usar o módulo. Solução: absolutamente convergente. (Justifique bem o cálculo do limite.)

F18. Usemos o teste da razão. Como a série tem termos positivos (verifique), podemos dispensar os módulos. Temos:

$$\lim \frac{(n+1)^2-2}{(n+3)!} \cdot \frac{(n+2)!}{n^2-2} = \lim \frac{n^2+2n-1}{n^2-2} \cdot \frac{1}{n+3} = 1 \cdot 0 = 0.$$

Deduz-se que a série é absolutamente convergente. Nota: usando séries telescópicas adequadas é possível calcular a soma desta série. [Usando como sugestão a resolução do exercício F7, verifique que o valor da soma é $1/6$.]

Teste da Razão (Critério d' Alembert): Se

$$\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$$

então $\sum a_n$ é absolutamente convergente. (Quando o limite não existe ou é 1 nada se conclui e quando ele é > 1 a série é divergente.)

F19. Usemos o Critério d'Alembert para deduzir a natureza desta série. Sendo $a_n = \frac{n!}{n^2+1}$, temos:

$$\lim |a_{n+1}| \cdot |a_n|^{-1} = \lim \frac{(n+1)!}{(n+1)^2+1} \cdot \frac{n^2+1}{n!} = \lim \frac{(n+1) \cdot n! \cdot (n^2+1)}{(n^2+2n+2) \cdot n!}$$

$$= \lim \frac{n^3+n^2+n+1}{n^2+2n+1} = +\infty.$$

Logo, pelo Critério d'Alembert, a série é divergente.

Séries de Potências

Calcule o domínio de convergência da série de potências:

G1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}(x-1)^n$;

G2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n}}(x+1)^n$;

G3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\big(x+1\big)^n}{n\,3^n}$;

G4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 2^n}{n^2+1} \cdot x^n$;

G5. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}(x-3)^n$;

G6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n}}(x+1)^n$;

G7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}(x-2)^n$;

G8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}(x+2)^n$;

G9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(2x-1)^n$.

G10. Seja D o domínio de convergência de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{(-2)^{n-1}}{n}(x+1)^n$ e $f\colon D \to \mathbb{R}$ a função soma.

(a) Determine D.

(b) Determine uma expressão para $f(x)$.

G11. Considere a função dada por $f\colon \mathbb{R}\backslash\{-2,2\} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{x}{4-x^2}$.

(a) Desenvolva f em série de potências de base x, indicando a validade do desenvolvimento.

(b) Calcule as derivadas de ordem 2015 e 2016 de $f(x)$.

G12. Considere a função dada por $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{1}{5+x^2}$.

(a) Desenvolva f em série de potências de centro em $x_0 = 0$, indicando o domínio de validade.

(b) Calcule as derivadas de ordem 2017 e 2018 de f em $x_0 = 0$.

G13. Considere a série de potências $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 2^n}(x-3)^n$.

(a) Determine o seu domínio de convergência.

(b) Mostre que, para todo o x pertencente ao intervalo de convergência, a série tem soma $f(x) = \ln\big(1 + \frac{x-3}{2}\big)$.

G14. Determine o desenvolvimento em série de potências da função dada por $f(x) = \ln(4+x^2)$, e indique o domínio de validade da representação.

G15. Sejam $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dadas por $f(x) = \frac{1}{1+x^4}$ e $g(x) = \arctan(x^2)$.

(a) Desenvolva f em série de potências de x e indique o domínio de validade do desenvolvimento.

(b) Desenvolva g em série de potências de x e indique o domínio de validade do desenvolvimento.

(c) Calcule $g^{(33)}(0)$ e $g^{(34)}(0)$.

G16. Considere a função $f\colon \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right\} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{x}{1-3x^2}$.

(a) Calcule um desenvolvimento de f em série de potências de x, dando o domínio de validade.

(b) Calcule o polinómio de Taylor de ordem 3 de f, no ponto $x_0 = 0$.

G17. Seja f a função soma de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^n}(2x+1)^n$.

(a) Determine o domínio de convergência da série.

(b) Determine a derivada de ordem 2017 de f em $x = -\frac{1}{2}$.

(c) Determine a expressão na variável x de f.

(d) Determine a derivada de ordem 2017 de f em $x = 0$.

Soluções:

G1. Fixemos $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ e denotemos $a_n = \frac{2^n}{n}(x-1)^n$. Temos:

$$\lim |a_{n+1}||a_n|^{-1} = \lim \left|\frac{2^{n+1}(x-1)^{n+1}}{n+1}\right| \left|\frac{n}{2^n(x-1)^n}\right|$$

$$= \lim \frac{2n}{n+1}|x-1| = 2|x-1|.$$

Ora pelo Critério d'Alembert, se $2|x-1| > 1$ a série é divergente e se $2|x-1| < 1 \iff x \in \left]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right[$ a série é absolutamente convergente. Resta analisar os extremos deste intervalo. Para $x = 1/2$ temos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}(-1/2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

O Critério d'Alembert diz que se existir
$$\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$
e ele for < 1 então a série $\sum a_n$ é absolutamente convergente. Caso ele seja > 1 então a série é divergente. Se o limite não existir, ou existir mas for igual a 1, nada se conclui.

que é simétrica da série harmónica alternada e portanto uma série convergente. Para $x = 3/2$ obtém-se:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}(1/2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

que é a série harmónica e como tal é divergente. Em conclusão, o domínio de convergência é $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right[$.

G2. Fixemos $x \neq -1$ e seja $a_n = \frac{2^n}{\sqrt{n}}(x+1)^n$. Temos:

$$\begin{aligned}\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \lim \left|\frac{2^{n+1}}{\sqrt{n+1}}(x+1)^{n+1}\right| \cdot \left|\frac{\sqrt{n}}{2^n(x+1)^n}\right| \\ &= 2|x+1| \lim \frac{1}{\sqrt{1+1/n}} = 2|x+1|.\end{aligned}$$

Logo pelo critério d'Alembert, a série é absolutamente convergente se se tiver $2|x+1| < 1$ e divergente se $2|x+1| > 1$.

$$\begin{aligned}2|x+1| < 1 &\iff |x+1| < \tfrac{1}{2} \iff -\tfrac{1}{2} < x+1 < \tfrac{1}{2} \\ &\iff -\tfrac{3}{2} < x < -\tfrac{1}{2} \iff x \in \left]-\tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2}\right[.\end{aligned}$$

Analisemos a convergência nos extremos. Para $x = -\frac{3}{2}$ obtém-se:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n}}\left(-\frac{3}{2}+1\right)^n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n}}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{(-1)^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}},\end{aligned}$$

que é uma série alternada com $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Como

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \sqrt{\frac{n}{n+1}} < 1,$$

a sucessão b_n é decrescente. Além disso $\lim b_n = \frac{1}{+\infty} = 0$. Conclui-se, pelo critério de Leibniz, que a série converge para $x = -\frac{3}{2}$. Para $x = -\frac{1}{2}$

obtém-se:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n}} \left(-\frac{1}{2}+1\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}},$$

que é uma série de Riemann com $\alpha = \frac{1}{2} \leq 1$ e portanto uma série divergente. Em conclusão, o domínio de convergência da série de potências dada é $\left[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right[$.

G3. Fixemos $x \neq -1$ e denotemos o termo geral da série por $a_n = \frac{(x+1)^n}{n3^n}$. Apliquemos o critério d'Alembert:

$$\lim |a_{n+1}| \cdot |a_n|^{-1} = \lim \frac{|x+1|^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}} \cdot \frac{n3^n}{|x+1|^n} = \lim |x+1| \frac{n}{3(n+1)}$$

$$= \frac{|x+1|}{3} \lim \frac{n}{n+1} = \frac{|x+1|}{3}.$$

Deduz-se que a série é absolutamente convergente para

$$\frac{|x+1|}{3} < 1 \iff |x+1| < 3 \iff -3 < x+1 < 3 \iff -4 < x < 2.$$

Estudemos a convergência nos extremos. Para $x = -4$ obtém-se a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n},$$

que, sendo simétrica da série harmónica alternada, trata-se de uma série convergente. Para $x = 2$ obtém-se a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

que, sendo a série harmónica, é divergente. Em conclusão, o domínio de convergência é $[-4, 3[$.

G4. Fixemos $x \neq 0$ e seja a_n o termo geral da série. Temos:

$$\begin{aligned}\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \lim \frac{(n+1)2^{n+1}|x|^{n+1}}{(n+1)^2+1} \cdot \frac{n^2+1}{n2^n|x|^n} \\ &= \lim \frac{n^2+1}{(n+1)^2+1} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot 2|x| \\ &= 1 \cdot 1 \cdot 2|x| = 2|x|.\end{aligned}$$

De acordo com o Critério d'Alembert, se

$$2|x| < 1 \iff |x| < 1/2 \iff x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[,$$

a série converge e se

$$2|x| > 1 \iff x \in \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[,$$

a série diverge. Analisemos agora os casos extremos. Para $x = -\frac{1}{2}$ obtém-se a série:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 2^n}{n^2+1} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}(-1)^n,$$

que é uma série alternada com $b_n = \frac{n}{n^2+1}$. Usemos o critério de Leibniz. Temos:

$$\lim b_n = \lim \frac{n}{n^2+1} = \lim \frac{1}{n+\frac{1}{n}} = 0.$$

Por outro lado,

$$b_{n+1} - b_n = \frac{n+1}{(n+1)^2+1} - \frac{n}{n^2+1} == \frac{-2n^2+1}{((n+1)^2+1)(n^2+1)}.$$

Ora $1-2n^2 < 0$ pois $n \geq 1$, logo b_n é decrescente. Cumprindo-se as duas condições do Critério de Leibniz pode concluir-se que a série é convergente em $x = -\frac{1}{2}$. Para $x = \frac{1}{2}$ obtém-se:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 2^n}{n^2+1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}.$$

Usemos o segundo critério de comparação comparando com o termo geral $\frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$. Temos:

$$\lim \frac{\frac{n}{n^2+1}}{\frac{1}{n}} = \lim \frac{n^2}{n^2+1} = 1.$$

Assim, a série que se obtém para $x = \frac{1}{2}$ é da mesma natureza da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ que é uma série divergente (é a série harmónica).

Em conclusão o domínio de convergência é $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$.

G5. Fixemos $x \neq 3$ e apliquemos o Critério d'Alembert:

$$\lim \left|\frac{n+1}{2^{n+1}}(x-3)^{n+1}\right| \cdot \left|\frac{2^n}{n \cdot (x-3)^n}\right| = \lim \frac{n+1}{n} \cdot \frac{|x-3|}{2} = \frac{|x-3|}{2}.$$

Logo a série é absolutamente convergente se

$$\frac{|x-3|}{2} < 1 \iff |x-3| < 2 \iff -2 < x-3 < 2 \iff x \in]1, 5[.$$

Estudemos agora a convergência nos extremos deste intervalo. Para $x = 1$ obtém-se a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}(-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} n(-1)^n,$$

que é divergente pois o seu termo geral não é convergente (para zero). Em $x = 5$ obtém-se:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}(2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} n,$$

que também é divergente pois o termo geral tem limite $+\infty$ e não zero, como é condição necessária para a convergência. O domínio de convergência da série de potências é: $]1, 5[$.

G6. Fixemos $x \neq -1$, seja a_n o termo geral da série e usemos o critério d'Alembert.

$$\lim |a_{n+1}| \cdot |a_n|^{-1} = \lim \frac{2^{n+1}}{\sqrt{n+1}}|x+1|^{n+1} \cdot \frac{\sqrt{n}}{2^n|x+1|^n}$$
$$= 2|x+1| \lim \sqrt{\frac{n}{n+1}} = 2|x+1|.$$

Logo, pelo critério d'Alembert, se $2|x+1| < 1$ a série é absolutamente convergente e se $2|x+1| > 1$ a série é divergente. Temos:

$$2|x{+}1| < 1 \iff |x{+}1| < \tfrac{1}{2} \iff -\tfrac{1}{2} < x{+}1 < \tfrac{1}{2} \iff -\tfrac{3}{2} < x < -\tfrac{1}{2}.$$

Resta então estudar a natureza da série quando $x = -\frac{3}{2}$ e $x = -\frac{1}{2}$. Para $x = -\frac{3}{2}$ obtém-se:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n}} \left(-\frac{3}{2}+1\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(-1)^n}{2^n\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}},$$

que é uma série alternada com $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. A sucessão b_n é decrescente (pois $\sqrt{n}$ é crescente) e o seu limite é $\frac{1}{+\infty} = 0$. Logo, pelo critério de Leibniz, a série acima é convergente. Para $x = -\frac{1}{2}$ obtém-se:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n}} \left(-\frac{1}{2}+1\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}},$$

que é uma série de Riemann com $p = \frac{1}{2} \leq 1$, que, de acordo com um resultado estudado, é divergente. Em conclusão, o domínio de convergência da série inicial é $\big[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\big[$.

G7. Solução: $[1, 3]$.

G8. Solução: $\{-2\}$.

G9. Solução: $[0, 1[$. (Qual é a sucessão dos coeficientes?)

G10. (a) Fixemos $x \neq -1$ e seja a_n o termo geral da série. Temos

$$\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim \frac{2^n n |x+1|^{n+1}}{(n+1)2^{n-1}|x+1|^n} = \lim \frac{2n}{n+1}|x+1| = 2|x+1|.$$

Logo, pelo Critério d'Alembert, a série é absolutamente convergente se $2|x+1| < 1$ e divergente se $2|x+1| > 1$. Assim, o interior do domínio de convergência é: $]-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}[$. Resta analisar os extremos deste intervalo. Para $x = -\frac{3}{2}$ temos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{(-2)^{n-1}}{n} \left(-\tfrac{1}{2}\right)^n = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

que é múltipla da série harmónica. Logo em $x = -\frac{3}{2}$ a série de potências diverge. Para $x = -\frac{1}{2}$ temos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{n-1}}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

que é múltipla da série harmónica alternada. Logo em $x = -\frac{1}{2}$ a série de potências converge. Em conclusão, temos $D =]-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}]$.

(b) Consideremos, em primeiro lugar $x \in]-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}[$. Neste intervalo podemos derivar a série termo a termo:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-2)^{n-1}(x+1)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-2(x+1))^{n-1} \\ &= \frac{1}{1+2(x+1)} = \frac{1}{3+2x}. \end{aligned}$$

Logo $f(x) = \frac{1}{2}\ln(3+2x) + C$, para uma certa constante e para todo o $x \in]-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}[$. A constante pode determinar-se fazendo $x = -1$ na série dada. Deduz-se desse cálculo que $f(-1) = 0$ e logo

Se $x \in]-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}[$ então tem-se $|3+2x| = 3+2x$.

$$\frac{1}{2}\ln(3-2) + C = 0 \implies C = 0.$$

Finalmente para podermos dizer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{n-1}}{n}(x+1)^n = \frac{1}{2}\ln(3+2x)$$

para todo o $x \in D =]-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}]$, basta invocar o Teorema de Abel, notando que $\frac{1}{2}\ln(3+2x)$ é uma função contínua em $x = -\frac{1}{2}$.

G11. (a) Temos:

$$f(x) = \frac{x}{4-x^2} = \frac{x}{4} \cdot \frac{1}{1-\frac{x^2}{4}} = \frac{x}{4} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{4^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2^{2n+2}},$$

que é um desenvolvimento válido para:

$$\left|\frac{x^2}{4}\right| < 1 \iff |x| < 2 \iff x \in]-2, 2[.$$

(b) O desenvolvimento na alínea anterior coincide com a série de Mac-

Laurin de $f(x)$, em particular temos $\frac{1}{2^{2n+2}}$ é o coeficiente de Taylor de ordem $2n+1$ de $f(x)$ e todos os restantes coeficientes de Taylor são nulos. Como $2015 = 2n+1 \iff n = 1007$, o coeficiente c_{2015} não é nulo. Obtém-se:

$$c_{2015} = \frac{1}{2^{2016}} \iff f^{(2015)}(0) = \frac{2015!}{2^{2016}}.$$

Como $2016 = 2n+1 \iff 2n = 2015$ é impossível, temos

$$c_{2016} = 0 \iff f^{(2016)}(0) = 0.$$

G12. (a) Usando a fórmula para a soma de uma série geométrica, obtém-se:

$$f(x) = \frac{1}{5+x^2} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1-(-\frac{x^2}{5})} = \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x^2}{5}\right)^n = \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{5^{n+1}},$$

que é um desenvolvimento válido para $\left|-\frac{x^2}{5}\right| < 1 \iff |x| < \sqrt{5} \iff x \in]-\sqrt{5}, \sqrt{5}[$.

(b) A série do desenvolvimento anterior coincide com a série de Taylor de $f(x)$ em torno de $x_0 = 0$. Logo os seus coeficientes são dados pela fórmula:

$$c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.$$

Para $k = 2018$, o coeficiente c_{2018} aparece na série anterior quando n satisfaz: $2018 = 2n \iff n = 1009$. Logo

$$c_{2018} = \frac{(-1)^{1009}}{5^{1010}} \implies f^{(2018)}(0) = -\frac{2018!}{5^{1010}}.$$

Para $k = 2017$, o coeficiente c_{2017} aparece na série anterior quando n satisfaz: $2017 = 2n$, que é impossível com n inteiro, pelo que $c_{2017} = 0$, ou seja $f^{(2017)}(0) = 0$.

G13. (a) Fixemos $x \neq 3$ e seja $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 2^n}(x-3)^n$.

$$\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim \frac{|x-3|^{n+1}}{(n+1)\cdot 2^{n+1}} \cdot \frac{n \cdot 2^n}{|x-3|^n} = \frac{|x-3|}{2} \lim \frac{n}{n+1} = \frac{|x-3|}{2}.$$

Pelo Critério d'Alembert, se

$$\frac{|x-3|}{2} < 1 \iff |x-3| < 2 \iff x \in \,]1,5[$$

a série converge absolutamente e se

$$\frac{|x-3|}{2} > 1 \iff x \in \,]-\infty, 1[\cup]5, +\infty[$$

a série diverge. Analisemos a convergência nos extremos do intervalo $]1,5[$. Em $x=1$ obtém-se a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(-2)^n}{n \cdot 2^n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

que é simétrica da série harmónica e portanto divergente. Para $x=5$ obtém-se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2)^n}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n},$$

que é a série harmónica alternada, que é convergente. Conclui-se que o domínio de convergência é $]1,5]$.

(b) Derivando a série no intervalo aberto $]1,5[$, obtém-se:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 2^n} n \cdot (x-3)^{n-1} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{x-3}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{x-3}{2}}.$$

Logo, no intervalo aberto $]1,5[$ a soma da série dada é

$$\ln\left|1+\tfrac{x-3}{2}\right| + C = \ln\left(1+\tfrac{x-3}{2}\right) + C,$$

para todo o $x \in]1,5[$, com $C \in \mathbb{R}$. Fazendo $x=3$ na série inicial obtém-se 0, logo

$$\ln(1+0) + C = 0 \iff C = 0.$$

Assim, deduz-se que a série dada tem soma a sunção $f(x) = \ln\left(1+\frac{x-3}{2}\right)$ para $x \in \,]1,5[$. Como, pelo Teorema de Abel, a série converge uniformemente em $]1,5]$ e $\ln\left(1+\frac{x-3}{2}\right)$ é contínua também em $x=5$, deduz-se que a soma da série é dada portanto $f(x) = \ln\left(1+\frac{x-3}{2}\right)$, para todo o

$x \in]1, 5]$.

G14. Temos $f'(x) = \frac{2x}{4+x^2}$. Desenvolvamos $\frac{1}{4+x^2}$ em série de potências:

$$\frac{1}{4+x^2} = \frac{1}{4\left[1-\left(-\frac{x^2}{4}\right)\right]} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{4^n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{4^{n+1}},$$

que é válido para $\left|-\frac{x^2}{4}\right| \leq 1 \iff x \in]-2, 2[$. Deduz-se que:

$$f'(x) = \frac{2x}{4+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\cdot(-1)^n\cdot x^{2n+1}}{4^{n+1}},$$

e logo:

$$f(x) = \ln(4+x^2) = C + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\cdot(-1)^n\cdot x^{2n+2}}{(2n+2)\cdot 4^{n+1}},$$

para certo $C \in \mathbb{R}$. Determinemos o valor de C. Façamos $x = 0$ acima:

$$\ln(4) = C + 0 \iff C = \ln(4).$$

Tem-se então:

$$\ln(4+x^2) = \ln(4) + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\cdot(-1)^n\cdot x^{2n+2}}{(2n+2)\cdot 4^{n+1}},$$

que é válido em $]-2, 2[$. Averiguemos agora se há convergência da série nos extremos do intervalo. Para $x = -2$ obtém-se:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(-2)^{2n+2}}{(2n+2)\cdot 4^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n+3}}{(2n+2)\cdot 2^{2n+2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}$$

que é divergente, uma vez que, a menos de mudança de variável, é a série harmónica. Para $x = 2$ obtém-se igualmente a série harmónica, pelo que a série de potências também aí é divergente. Assim, não é possível usar o Teorema de Abel para estender o domínio de validade anterior.

G15. (a) Usando a série geométrica obtém-se:

$$\frac{1}{1+x^4} = \frac{1}{1-(-x^4)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^4)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{4n}$$

que é um desenvolvimento válido para

$$|-x^4| < 1 \iff |x|^4 < 1 \iff |x| < 1 \iff x \in]-1,1[.$$

(b) Temos $g'(x) = \frac{2x}{1+x^4}$ e logo, usando o resultado da alínea anterior, obtém-se:

$$\frac{2x}{1+x^4} = 2x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{4n} = \sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n x^{4n+1},$$

para todo o $x \in]-1,1[$. Primitivando esta série termo a termo, obtém-se:

$$\arctan(x^2) + C = \sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n \int x^{4n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{4n+2} x^{4n+2},$$

para todo o $x \in]-1,1[$; sendo esta uma série com raio de convergência igual à anterior, ou seja, 1. Resta determinar a constante e averiguar a convergência nos extremos. Fazendo $x = 0 \in]-1,1[$ obtém-se

$$\arctan(0) + C = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{4n+2} 0^{4n+2} \iff C = 0.$$

Analisemos agora a convergência da série nos extremos do intervalo. Em $x = -1$ obtém-se a série numérica:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{4n+2}(-1)^{4n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

que é alternada, da forma $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n b_n$ com $b_n = \frac{1}{2n+1}$. Como

$$\frac{1}{2(n+1)+1} < \frac{1}{2n+1}$$

b_n é uma sucessão decrescente. Tem-se também $\lim b_n = \frac{1}{+\infty} = 0$ e logo pelo, Critério de Leibniz, a série é convergente. Em $x = 1$ obtém-se a mesma série e logo temos também convergência. Como em $x = -1$ e em $x = 1$ a função $g(x) = \arctan(x^2)$ é contínua deduz-se pelo teorema de

Abel que o domínio de validade do desenvolvimento

$$\arctan(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{4n+2} x^{4n+2},$$

é $[-1, 1]$.

(c) Sabemos que o desenvolvimento anterior coincide com a série de MacLaurin de $g(x)$. Assim os coeficientes da série são os coeficiente de Taylor em 0: o coeficiente de x^k na série é $\frac{g^{(k)}(0)}{k!}$. Logo $g^{(33)}(0)/33!$ é coeficiente na série da potência x^{33}. Ora $33 = 4n + 2 \iff n = \frac{31}{4}$ que não é inteiro. Logo x^{33} não ocorre na série e como tal $g^{(33)}(0) = 0$. Por outro lado $g^{(34)}(0)/34!$ é o coeficiente na série da potência x^{34}. Como $4n + 2 = 34 \iff n = 8$ obtém-se $g^{(34)}(0) = 34!\frac{2}{34} = 2 \cdot 33!$.

G16. (a) Usemos o desenvolvimento dado pela série geométrica. Temos:

$$f(x) = x \cdot \frac{1}{1-3x^2} = x\sum_{n=0}^{\infty}(3x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^{2n+1},$$

que é um desenvolvimento válido para $|3x^2| < 1 \iff |x| < \frac{\sqrt{3}}{3} \iff x \in \left]-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right[$.

(b) Uma vez que a série do desenvolvimento da alínea (a) é a série de Taylor de f em torno de $x_0 = 0$, o polinómio de Taylor de ordem 3 de f em torno de $x_0 = 0$ obtém-se truncando essa série no termo de ordem 3. Assim, como:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^{2n+1} = x + 3x^3 + 3^2x^5 + \cdots = 0 + x + 0x^2 + 3x^3 + 0x^4 + 3^2x^5 + \cdots$$

obtém-se $P_{3,0} = x + 3x^3$.

Nota: alternativamente, podem-se calcular c_0, c_1, c_2, c_3 a partir da definição.

G17. Soluções:

(a) $[-2, 1[$; (b) $2016! \cdot (2/3)^{2017}$; (c) $f(x) = -\frac{1}{2}\ln(2-2x)$; (d) $2016! \cdot \frac{1}{2}$.

Séries de Fourier

H1. Determine a série de Fourier da função periódica de período 2π dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } -\pi \leq x < 0; \\ 0, & \text{se } 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

H2. Calcule a série de Fourier da função periódica de período 2π dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ -1, & \text{se } x \in]-\pi, -\frac{\pi}{2}] \cup [\frac{\pi}{2}, \pi]. \end{cases}$$

H3. Determine a série de Fourier da função periódica de período 2π dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in]-1, 1[; \\ 0, & \text{se } x \in [-\pi, -1] \cup [1, \pi[. \end{cases}$$

H4. Determine a série de Fourier da função periódica de período 2 dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 3, & \text{se } \quad 0 \leq x < 1 \\ -1, & \text{se } -1 \leq x < 0. \end{cases}$$

H5. Seja f a função periódica, com $T = 2\pi$, dada por $f(x) = -x$ em $]-\pi, \pi]$.

(a) Determine a série de Fourier de f.

(b) Esboce o gráfico da função $S(x)$, que é soma da série de Fourier de f no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$.

H6. Considere a função periódica, de período 4, dada no intervalo $[-2, 2[$ por:

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{se } \quad 0 \leq x < 2 \\ 1, & \text{se } -2 \leq x < 0. \end{cases}$$

(a) Mostre que a série de Fourier de f é: $\dfrac{3}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^{n+1}}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)$.

(b) Esboce o gráfico da função soma da série de Fourier, no intervalo $]-4, 4[$.

Soluções:

H1. Como $T = 2\pi$ os coeficientes de Fourier são dados pelas fórmulas:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx;$$

Temos então:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 1dx = \frac{1}{\pi}\,[x]_{-\pi}^{0} = 1;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{0}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}(0-0)\right) = 0;$$

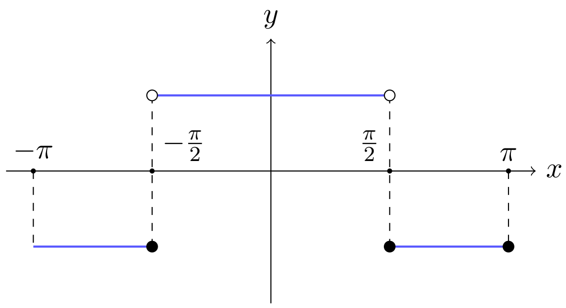
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\sin(nx)dx = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{0}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}(-1+(-1)^n)\right) = \frac{(-1)^n-1}{n\pi};$$

Logo a série de Fourier é:

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n-1}{n\pi}\right]\sin(nx).$$

H2. O gráfico da restrição de f ao intervalo $]-\pi,\pi]$ ajuda a simplificar o cálculo dos coeficientes de Fourier:



Trata-se, pois, de uma função par em $]-\pi,\pi]$, pelo que se conclui imediatamente que $b_n = 0$, para todo $n \geq 1$. Calculemos os restantes coeficientes:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(nx)\,dx - \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos(nx)\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{4}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right).
\end{aligned}$$

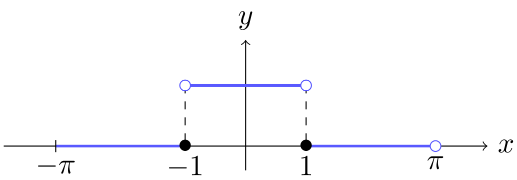
Logo a série de Fourier de f é:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cos(nx).$$

Ainda que não seja pedido, como $\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ é zero para n par e, para $n = 2k+1$, com $k \geq 0$, vale $(-1)^k$, esta série pode escrever-se de forma mais simplificada, fazendo a mudança de variável $n = 2k+1$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{(2k+1)\pi}\cos((2k+1)x).$$

H3. O gráfico em baixo, da função em causa no intervalo $]-\pi, \pi[$, revela que ela é uma função par. Deduz-se então que $b_n = 0$, para todo o $n \geq 1$. Calculemos os restantes coeficientes:



$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} 1\,dx = \frac{1}{\pi}(1-(-1)) = \frac{2}{\pi};$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\cos(nx) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{n\pi}(\sin(n)-\sin(-n)) = \frac{2\sin(n)}{n\pi}.$$

Logo a série de Fourier da função é:

$$\frac{1}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin(n)}{n\pi}\cos(nx).$$

H4. Temos:

$$a_0 = \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0}(-1)dx + \int_{0}^{1} 3dx = -1+3 = 2;$$

$$a_n = \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\cos\left(n\frac{2\pi}{2}x\right)\,dx$$

$$= -\int_{-1}^{0}\cos(n\pi x)\,dx + 3\int_{0}^{1}\cos(n\pi x)\,dx$$

$$= 2\int_{0}^{1}\cos(n\pi x)\,dx = \left(\frac{\sin(n\pi x)}{n\pi}\right]_{0}^{1} = 0;$$

$$b_n = \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\sin(n\pi x)\,dx$$

$$= -\int_{-1}^{0}\sin(n\pi x)\,dx + 3\int_{0}^{1}\sin(n\pi x)\,dx$$

$$= 4\int_{0}^{1}\sin(n\pi x)\,dx = 4\left(-\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi}\right]_{0}^{1}$$

$$= \frac{4}{n\pi}(1-\cos(n\pi)) = \frac{4}{n\pi}(1+(-1)^{n+1}).$$

E assim, a série de Fourier pretendida é:

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n\pi}(1+(-1)^{n+1})\sin(n\pi x).$$

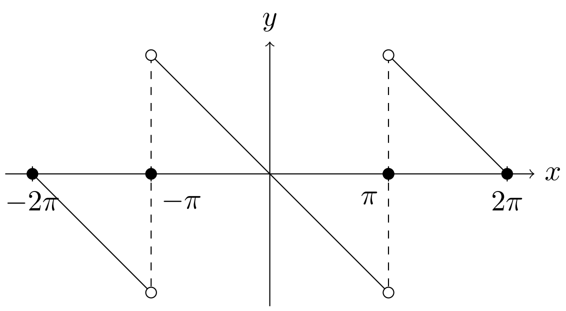
H5. (a) A função é ímpar em $]-\pi,\pi[$, logo, dos coeficiente de Fourier, apenas há que calcular b_n; os restantes são nulos. Temos:

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(-x)\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}(-x)\sin(nx)\,dx \\
&\overset{\text{PpP}}{=} \frac{2}{\pi}\left[x\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos(nx)}{n} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi(-1)^n}{n}\right) - \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(nx)}{n^2}\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{2(-1)^n}{n}.
\end{aligned}$$

Logo a série de Fourier é:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{n}\sin(nx).$$

(b) Basta prolongar $-x$, $x\in]-\pi,\pi[$ por periodicidade a $[-2\pi,2\pi]$, tendo em conta que, pelo Teorema da convergência da série de Fourier, nos pontos de descontinuidade se toma a média aritmética dos limites laterais:



H6. (a) Temos:

$$a_0 = \frac{2}{4}\int_{2}^{2} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0}1dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2}2dx = 1+2 = 3;$$

$$a_n = \frac{2}{4}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\left(n\frac{\pi}{2}x\right)\,dx =$$

$$\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}\cos\left(n\frac{\pi}{2}x\right)\,dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2}2\cos\left(n\frac{\pi}{2}x\right)\,dx =$$

$$\frac{3}{2}\int_{0}^{2}\cos\left(n\frac{\pi}{2}x\right)\,dx = \frac{3}{2}\left(\frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}x\right)}{\frac{n\pi}{2}}\right]_0^2 = 0;$$

$$b_n = \frac{2}{4}\int_{-2}^{2} f(x)\sin\left(n\frac{\pi}{2}x\right)dx =$$

$$\frac{1}{2}\int_{-2}^{0} \sin\left(n\frac{\pi}{2}x\right)dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2} 2\sin\left(n\frac{\pi}{2}x\right)dx =$$

$$\frac{1}{2}\int_{0}^{2} f(x)\sin\left(n\frac{\pi}{2}x\right)dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos\left(n\frac{\pi}{2}x\right)}{\frac{n\pi}{2}}\right]_0^2 =$$

$$\frac{1}{n\pi}(1-\cos(n\pi)) = \frac{1+(-1)^{n+1}}{n\pi}.$$

Logo a série de Fourier de f é:

$$\frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right).$$

(b) O gráfico pedido é: