

Nome completo:**Número de estudante:**

Justifique convenientemente as suas respostas e indique os cálculos.

1. Use a indução matemática para provar a igualdade

$$\sum_{i=1}^n i(i+1) = n(n+1)(n+2)/3, \text{ para } n \geq 1.$$

2. Calcule:

$$(a) \sum_{i=0}^n [1 + i(i+1)], \text{ para } n \geq 1.$$

$$(b) \sum_{i=1}^{199} \sum_{j=3}^{21} (-1)^j \frac{i}{5}.$$

3. Escreva a seguinte expressão usando a notação abreviada de somatório

$$\frac{x}{1} + \frac{x^2}{1+2} + \frac{(x^2)^3}{2+3} + \frac{((x^2)^3)^4}{3+4} + \frac{(((x^2)^3)^4)^5}{4+5} + \frac{((((x^2)^3)^4)^5)^6}{5+6} = \sum_{i=0}^5 \frac{x^{(i+1)!}}{i + (i+1)} = \sum_{i=1}^6 \frac{x^{i!}}{2i-1}.$$

4. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

e seja $G = (V, E)$ o grafo cuja matriz de adjacência relativamente à marcação de vértices v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 é A

- (a) Quantas arestas tem o grafo
- G
- ?

É igual à soma das entradas acima (ou abaixo) da diagonal principal da matriz A : $2 + 5 + 2 + 1 + 2 + 3 = 15$.

- (b) O que conta a entrada
- $(1, 5)$
- da matriz
- A^{555}
- ?

Conta o número de caminhos de comprimento 555 que ligam v_1 a v_5 .

- (c) Quantos caminhos de comprimento 3 ligam
- v_1
- a
- v_5
- ?

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 & 9 & 19 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 29 \times 5 + 9 + 19 \times 3 = 211.$$

(d) Mostre que o grafo G é bipartido indicando uma bipartição dos vértices.

$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} = V_1 \cup V_2$ onde $V_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ e $V_2 = \{v_4, v_5\}$ são conjuntos de vértices disjuntos e toda a aresta em E é constituída por um vértice de V_1 e um vértice de V_2 . Basta analisar a diagonal e a parte acima da diagonal da matriz A . De facto analisando a diagonal e a parte acima da diagonal da matriz A , G não tem lacetes porque a diagonal de A é constituída apenas por zeros, v_1, v_2, v_3 são vértices dois a dois não adjacentes porque as entradas $(1, 2)$, $(1, 3)$ e $(2, 3)$ da matriz A são nulas, e v_4 e v_5 também não são adjacentes porque a entrada $(4, 5)$ de A é nula.