

Grafos

1. Desenhe todos os grafos não dirigidos simples conexos, não isomorfos entre si, de n vértices, para
 - (a) $n = 2$.
 - (b) $n = 3$.
 - (c) $n = 4$.

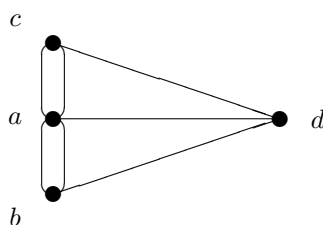
2. Seja G um grafo simples com vértices v_1, v_2, \dots, v_n .

- (a) Que pode dizer sobre a soma dos elementos de cada linha e de cada coluna da matriz de incidência de G ?
- (b) Mostre que o número de elementos não-nulos da matriz de adjacência de G é igual ao número de elementos não-nulos da matriz de incidência.

3. Considere um grafo simples conexo $G = (V, A)$ com 5 vértices, cuja matriz de adjacência relativamente à marcação de vértices v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 é a seguinte:

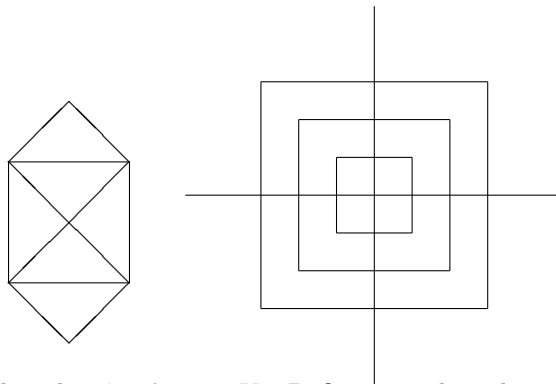
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- (a) Qual é a sequência de graus dos vértices de G ?
 - (b) Existem caminhos $v_4 - v_5$ de comprimento 2? E de comprimentos 3 e 4? Quantos?
 - (c) Mostre que G não é euleriano. É semi-euleriano? (isto é, tem um caminho euleriano aberto?)
4. Quantos vértices poderá ter um grafo simples regular com 24 arestas?
 5. Considere o seguinte grafo G :

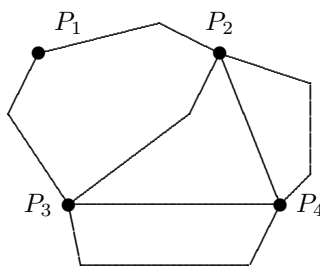


- (a) G é euleriano?
- (b) Qual o menor número de arestas que tenho de acrescentar ao grafo G de forma a conseguir desenhá-lo sem levantar o lápis do papel e sem tornar a passar por uma linha previamente traçada?

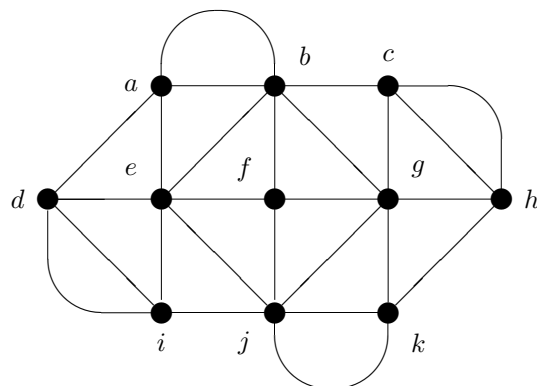
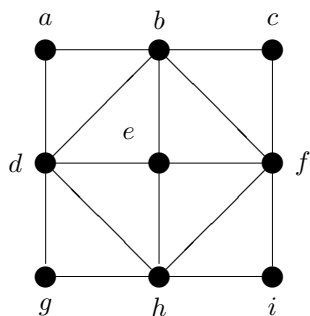
6. Quais dos seguintes desenhos podem ser feitos sem levantar a ponta do lápis do papel e sem tornar a passar por uma linha previamente traçada?



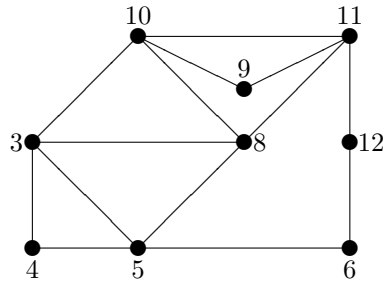
7. (a) Desenhe o grafo completo de três vértices, K_3 . Defina caminho euleriano e diga, justificando, se K_3 possui um caminho euleriano.
- (b) Diga, justificando, quais os grafos completos K_n ($n \geq 1$) que têm um caminho euleriano.
8. Este ano o cortejo da Queima das Fitas deve percorrer uma só vez todas as ruas da área representada, partindo de uma das praças P_1, P_2, P_3 ou P_4 e regressando à mesma praça.



- (a) Diga se é possível encontrar um percurso nestas condições. Se a sua resposta for afirmativa, copie a figura para o seu papel, e represente-o.
- (b) Determine a matriz de adjacências do grafo.
9. Qual dos seguintes grafos é euleriano? Exiba um caminho euleriano desse grafo.



10. O grafo



é euleriano. Determine um seu caminho euleriano e uma sua partição em ciclos.

11. Seja G um grafo simples euleriano. Consideremos $L(G)$ o grafo definido do seguinte modo:

(a) $V(L(G)) = A(G)$;

(b) $\{a_i, a_j\} \in A(L(G))$ se e só se a_i e a_j forem, em G , arestas incidentes no mesmo vértice.

Prove que $L(G)$ também é euleriano.

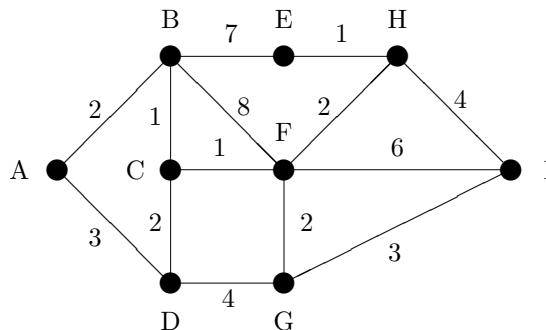
12. Os custos de ligação (em milhares de euros) entre 7 acampamentos no deserto, $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7$, e uma fonte de água F são dados pelo seguinte quadro (onde a cruz \times significa que, por razões de ordem técnica, é impossível ligar os dois pontos respectivos):

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
F	1	4	6	\times	\times	\times	\times
A_1		5	\times	2	4	\times	\times
A_2			2	\times	7	4	\times
A_3				\times	\times	6	\times
A_4					1	\times	7
A_5						3	5
A_6							2

(a) Qual é o custo mínimo de ligar a fonte F ao acampamento A_7 ?

(b) Para esse custo, qual é o número máximo de acampamentos que será possível irrigar?

13. Determine o caminho mais curto de A para I em



14. Enumere todas as árvores com 5 arestas (nenhum par de árvores nessa lista poderá ser isomorfo).
15. Quantos vértices de grau 1 tem uma árvore com dois vértices de grau 2, quatro vértices de grau 3, três vértices de grau 4 e nenhum de grau superior a 4?
16. Seja G uma árvore com 7 vértices.
 - (a) Diga, justificando sucintamente, se as afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas:
 - (i) G pode ter todos os vértices de grau 1.
 - (ii) G pode ter dois vértices de grau 1 e cinco de grau 2.
 - (iii) G pode ter cinco vértices de grau 1 e dois de grau 2.
 - (b) Quantos vértices de grau 1 terá G se tiver dois vértices de grau 3?
17. Poderá haver uma árvore com 13 vértices, dois dos quais de grau 7?
18. Mostre que qualquer árvore é um grafo bipartido. Quais são os grafos bipartidos completos que são árvores?