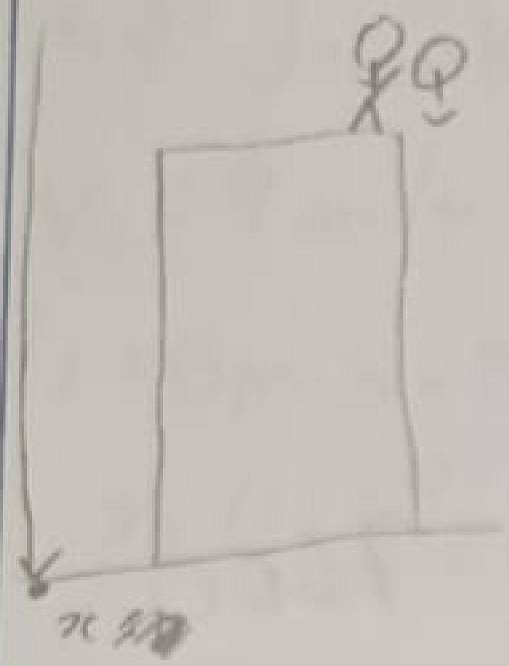


$x(t) = h + 12{,}25t - 5t^2$ m

$v(t) = 12{,}25 - 10t$ m/s

$a = -10$ m/s²

b) $x(0) = h$

$x(4{,}25) = \cancel{h}^{0} + 12{,}25(4{,}25) - 5(4{,}25)^2$

$= \cancel{h}^{0} - 38{,}25$

$0 = h + 12{,}25(4{,}25) - 5(4{,}25)^2$

$\Leftrightarrow h = 38{,}25$ m

c) $v(t) = \frac{dx}{dt} = v_0 - gt$

$12{,}25 - 10t = 0$

$\Leftrightarrow 10t = 12{,}25$

$\Leftrightarrow t = 1{,}225$

$x(1{,}225) = 45{,}8$ m

d) $v(4,25) = 12,25 - 10 \cdot (4,25)$
$= -30,25 \text{ m/s}$

6. -> $m = 5 \text{ kg}$
$F_x \quad x(t) = 0,18t^2 - 0,03t^3$ (SI)

a) $F_{res} = F_x \qquad F_{res} = m \cdot a$

$F_x = m \cdot a$

$v(t) = x(t)' = 0,36t - 0,09t^2$
$a(t) = v(t)' = 0,36 - 0,18t$

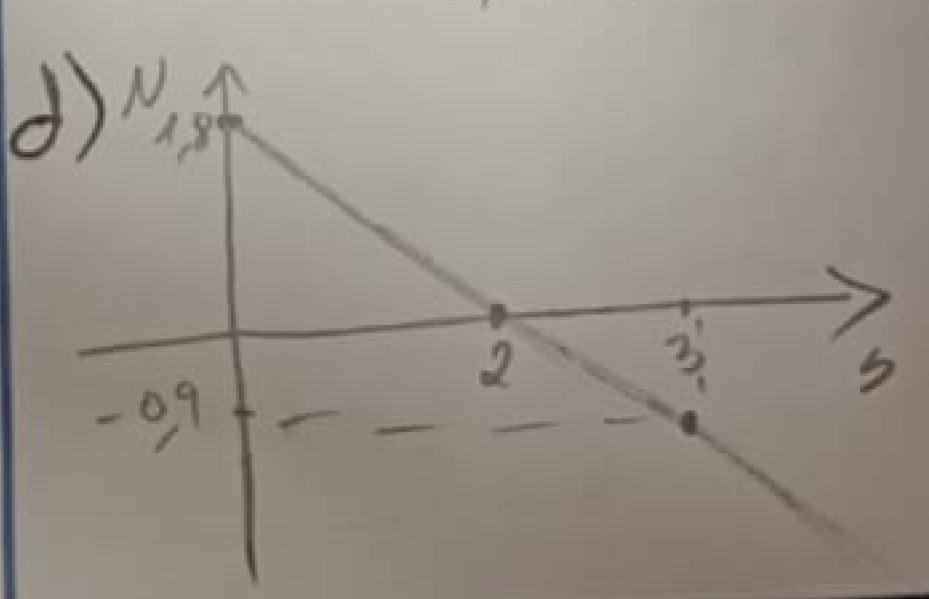
$F_x = 5 \cdot (0,36 - 0,18t)$
$= (1,8 - 0,9t) \text{ N}$

b) $v(0) = 0,36 \cdot 0 - 0,09 \cdot 0^2$
$= 0$

$F_x(0) = 1,8 - 0,9 \cdot 0$
$= 1,8 \text{ N}$

R: Desloca-se para o sentido negativo, visto que a velocidade dá negativa

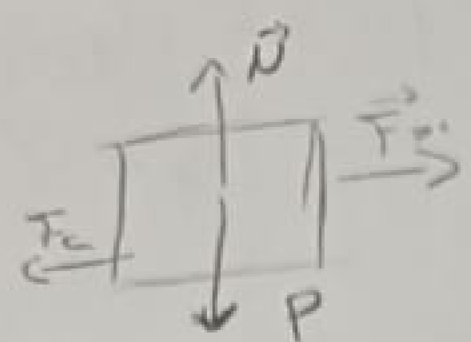
c) $t = 3 \text{ s}$
$F_x(3) = 1,8 - 0,9 \cdot 3$
$= -0,9 \text{ N}$

d) 

$1,8 - 0,9t = 0$
$\Leftrightarrow 0,9t = 1,8$
$\Leftrightarrow t = 2 \text{ s}$

Folha 1

5. -> $m = 50\,Kg$



$F_{resul} = m.a$

$F_{resul} = F_x - F_a$

$F_x - F_a = m.a$

$(=) F_x - F_a = 50.0$

$(=) F_x = F_a$

$(=) 100N = F_a$

$F_x = F_a$

$(=) 200N = F_a$

$F_x - F_a = m.a$

$(=) 220 - F_a = 50.0,1$

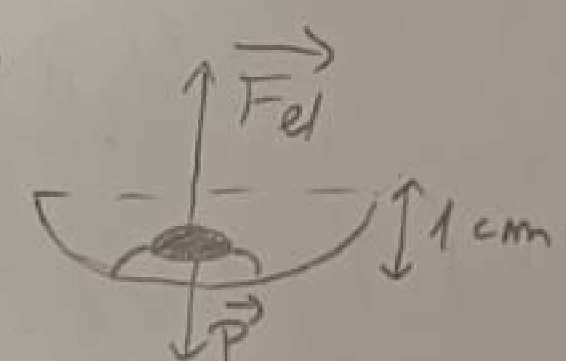
$(=) -F_a = 5 - 220$

$(=) F_a = 215N$

R: $\vec{F_a}$ é respetivamente 100N, 200N e 215N.

7. -> $g = 10m/s$ $\Delta z = 1cm$

a) Equilíbrio : $F_{res} = 0$



$\vec{P} = -mg\,\hat{e}_z$

$\vec{F_{el}} = -Kz\,\hat{e}_z$

$F_{res} = -mg - K\underbrace{z}_{1cm} (=) 0 = -mg - Kz (=) mg = -Kz$

$(=) \frac{K}{m} = -\frac{g}{z} (=) \frac{g}{|z|} = \frac{10}{0,01} = 1000\,N m^{-1} Kg^{-1}$

b) $w = \sqrt{\frac{K}{m}} (=) w = \sqrt{1000}\,rad/s^{-1}$

$f = \frac{w}{2\pi} (=) f = \frac{\sqrt{1000}}{2\pi} (=) f = 5Hz$

c) $a(0) = ?$

$a(t) = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \phi)$

$$\left(\begin{array}{l} = -\omega^2 x = -\frac{kx}{m} \\ ma = -kx = F_{el} \end{array} \right)$$

$a(0) = -A\omega^2 \sin(\phi)$

$= -0{,}1 \cdot 2\pi^2 \cdot \sin(\frac{\pi}{2})$

$= -3{,}95 \ m/s^2$

d) $x(t) = 0$

$0{,}1 \sin(2\pi t + \frac{\pi}{2}) = 0$

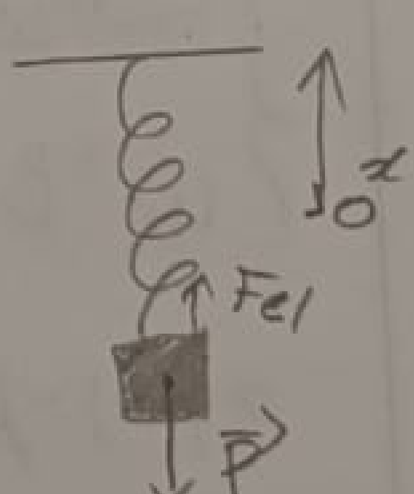
$\Leftrightarrow 2\pi t + \frac{\pi}{2} = 0 \Leftrightarrow 2\pi t = -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{4}$ ✗

$\Leftrightarrow 2\pi t + \frac{\pi}{2} = \pi \Leftrightarrow 2\pi t = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow t = \frac{1}{4} s$

e) Alterar $x(0)$ e $v(0)$ $\Rightarrow$ Altera A e ϕ

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2 \cdot \pi$ não dependem das condições iniciais

10. $\rightarrow m = 0{,}25 kg$ $k = 9{,}9 N/m$



a)
Equilíbrio

$F_{res} = 0 = -mg - kx \Leftrightarrow kx = -mg$

$\Leftrightarrow x = -\frac{mg}{k} \Leftrightarrow x = -0{,}5 m$

b) $x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \phi)$

$x(t) = ?$

2ª Lei de Newton

$$F_{res} = m \cdot a$$

$$-mg - kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x - g$$

Solução geral

$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi) + B$$

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \phi)$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2\sin(\omega t + \phi)$$

$$= -\omega^2(x - B)$$

substituindo na equação diferencial

$$-\omega^2(x - B) = -\frac{k}{m}x - g$$

$$\begin{cases} -\omega^2 x = -\frac{k}{m}x \\ \omega^2 B = -g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega = \sqrt{k/m} \\ B = \frac{-g}{\omega^2} = -\frac{mg}{k} = x_0 \end{cases}$$

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \phi) + x_0$$

$$= A\sin(\omega t + \phi)$$

$$\underbrace{x(t) - x_0}_{\text{afastamento em relação ao equilíbrio}} = A\sin(\omega t + \phi)$$

$\omega = 2\pi$

$x(0) = x_0 = A \cdot \sin(\phi) = 0,1$

$v(0) = A\omega \cos(\phi) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} A = 0,1m \\ \phi = \pi/2 \end{cases}$

11. → a) F, visto que é a derivada de v, ficando uma constante, ou seja, num mesmo instante pode ainda ter aceleração mesmo que seja negativa

b) F, se a força que atua sobre ela for a Fe, por exemplo, o corpo irá ter sentido contrário

c) V

d) F

e) F

Ficha 2

2.->c) $v_0 = 7 m/s$ $W_p \neq 0$

$$Em^P = U_g^P + E_c^P = m \cdot g \cdot h_p + \frac{1}{2} m \cdot v_0^2$$

Quando o corpo anda até chegar à altura máxima o corpo vai perdendo velocidade, portanto, quando $h_{máx}$, $v=0$

$$E_m = m \cdot g \cdot h_{máx} + \frac{1}{2} \cdot m \cdot 0$$
$$= m \cdot g \cdot h_{máx}$$

Por conservação da energia mecânica

$$Em^P = Em \text{ (em } h_{máx})$$

isto visto que $Em_i = Em_f$

$$\frac{1}{2} \cdot \cancel{m} \cdot v_0^{P^2} + \cancel{m} \cdot g \cdot h^P = \cancel{m} \cdot g \cdot h_{máx}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(v_P)^2}{2} + g \cdot h^P = g \cdot h_{máx}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(v_P)^2}{2g} + h^P = h_{máx}$$

$v_0 = 7 m/s$

$$\frac{(7)^2}{2 \cdot 10} + 5 = h_{máx}$$

$$\Leftrightarrow h_{máx} \simeq 7,45 m$$

O corpo oscila entre pontos com 7,45 m de altura

b) $v_0 = 12 \, m/s$

$$h_{máx} = \frac{(12)^2}{2.10} + 5$$

$\Leftrightarrow h_{máx} \simeq 12,2$

O corpo atinge o ponto Q e continua a mover-se

c) $h_{máx} = \frac{(v_0)^2}{2 \cdot g} + h_P$

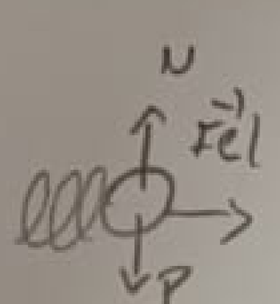
$$\Leftrightarrow 10 = \frac{(v_0)^2}{2.10} + 5$$

$\Leftrightarrow \frac{5}{1} = \frac{(v_0)^2}{20} \Leftrightarrow v_0^2 = 100 \Leftrightarrow v_0 = 10 \, m/s$

Para ultrapassar terá que ter 10m/s ou mais.

3. → $m_e = 0,2 \, Kg$ $K = 200 \, N/m$ $h = 0,6 \, m$ $g = 10 \, m/s^2$

$x_1 = 0,2$ $h_2 = 0,2 \, m$



$N = P = 0$

a) $F_{el} = -0,2 \times 200$

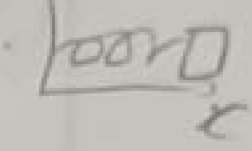
$= 40 \, N$

$F_{res} = F_{el}$

$\Leftrightarrow m \cdot a = 40 \, N \Leftrightarrow a = 200 \, m/s^2$

$v(t) = v_0 + \frac{1}{2} \cdot a_0 \cdot 2t$

9.→ $m = 0{,}25\ Kg$ $x(0) = 0{,}1\ m$ $v(0) = 0\ m/s$

posição de equilíbrio: $x = 0$ | $T = 1s$ MHS. 

a) $K = ?$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} \Leftrightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\ rad/s$$

$$\Leftrightarrow \omega^2 = \frac{K}{m} \Leftrightarrow \omega^2 m = K$$

$$\Leftrightarrow (2\pi)^2 \cdot 0{,}1 = K \Leftrightarrow K = 9{,}9\ N/m$$

b) $x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \phi)$

$$x(0) = A \cdot \sin(\phi) = 0{,}1$$

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \phi)$$

$$v(0) = A\omega \cos(\phi)\ m/s$$

$$\begin{cases} A \sin\phi = 0{,}1 & (1) \\ A\omega \cos\phi = 0 & (2) \end{cases}$$

Dividindo (2) por (1)

$$\frac{\cancel{A}\,\omega \cos(\phi)}{\cancel{A} \sin(\phi)} = \frac{0}{0{,}1}$$

$$\Leftrightarrow \omega\underbrace{\frac{\cos(\phi)}{\sin(\phi)}}_{\to cotg} = 0$$

$$\Leftrightarrow \omega \cdot cotg(\phi) = 0$$

$$\Leftrightarrow \phi = \frac{\pi}{2} \lor \phi = -\frac{\pi}{2}$$

$A \cdot \sin = 0{,}1 \Leftrightarrow A \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0{,}1 \Leftrightarrow A = 0{,}1\ m$

$$\boxed{x(t) = 0{,}1 \cdot \sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right) m}$$

c) Pontos de inversão : $v=0$ $E_c=0$

$\Updownarrow$

compressão máxima de cada mola

$E_m = U$

② $E_m^{(2)} = U_{el}^{(2)} + U_g^{(2)} = \frac{1}{2} \cdot K \cdot x^2 + m \cdot g \cdot \frac{h}{3}$

① $E_m^{(1)} = U_{el}^{(1)} + \cancel{U_g^{(1)}}^{0} = \frac{1}{2} \cdot K x_{1\,max}^2$

Logo,

$\frac{1}{2} K \cdot x_{2\,máx}^2 + m \cdot g \cdot \frac{h}{3} = \frac{1}{2} K x_{máx}^2$

$(=) \; x_{2\,máx}^2 + \frac{2}{3} \cdot \frac{mgh}{K} = x_{1\,máx}^2$

$\Rightarrow x_{1\,máx} > x_{2\,máx}$ independente das condições iniciais

Neste caso, o instante inicial coincide com o ponto de compressão máxima da mola 1, visto que $v_i=0$
(nem sempre é assim!!!)

$x_1 = x_{1\,máx} = 0{,}2\,m$

$x_{2\,máx} = \sqrt{x_1^2 - \frac{2}{3}\frac{mgh}{K}} \simeq 0{,}19\,m$

5. $\rightarrow$ $U_g(r) = -\frac{GM_m}{r}$ exata

$U_g(h) \simeq m \cdot g \cdot h$ aproximada

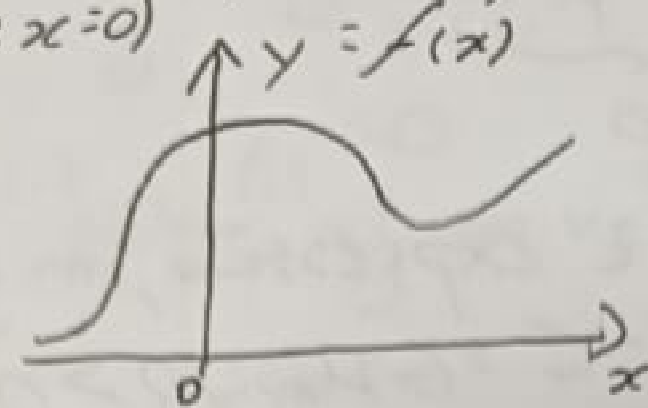
distância ao centro da Terra $r = \underbrace{R}_{\text{raio da Terra}} + h$ $R = 6378\,Km$ $h \ll R$

$U_g(r) = -\frac{GMm}{R+h} = -\frac{GMm}{R(1+\underbrace{\frac{h}{R}}_{\ll 1})}$

$x \equiv \frac{h}{R} << 1$

$f(x) = \frac{1}{1+x}$

Série de Taylor $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \dots$
(em torno de $x=0$)



$$y \simeq \underset{\substack{\downarrow \\ \text{declive}}}{f'(0)}\,x + \underset{\substack{\downarrow \\ \text{ordenada na origem}}}{f(0)}$$

$f(0) = 1$

$f'(x) = -1(1+x)^{-2}$ $\quad f'(0) = -1$

$f(x) \simeq 1 - x$

$$U_g \simeq -\frac{GMm}{R}(1-\underset{h/R}{x}) = \underbrace{-\frac{GMm}{R}}_{\text{constante}=C} + \frac{\overset{=g=9{,}8\,m/s^2}{\widetilde{GM}}m}{R^2}h \simeq m.g.h + C$$

Recordemos que a energia potencial está definida a menos de uma constante.

Se escolhermos $h=0$ como referência $U_g(h=0)=0$

$C = 0$

c) $U_g(r) = -\frac{GMm}{r} < 0$ $\quad$ * na expressão exata estamos a "escolher" infinito e na aproximada escolhemos o ponto h

$U_g(h) = m.g.h > 0$

Na expressão exata

$\lim_{r \to \infty} U_g(r) = 0$

Na expressão aproximada

$U(h=0) = 0$

$$U_g \simeq -\frac{GMm}{R} + m \cdot g \cdot h$$

$$\simeq -\frac{GMm}{R} + m \cdot \frac{GM}{R^2} \cdot h$$

$$\simeq \underbrace{-\frac{GMm}{R}}_{<0} \underbrace{\left(1 - \frac{h}{R}\right)}_{>0} < 0 \ !$$

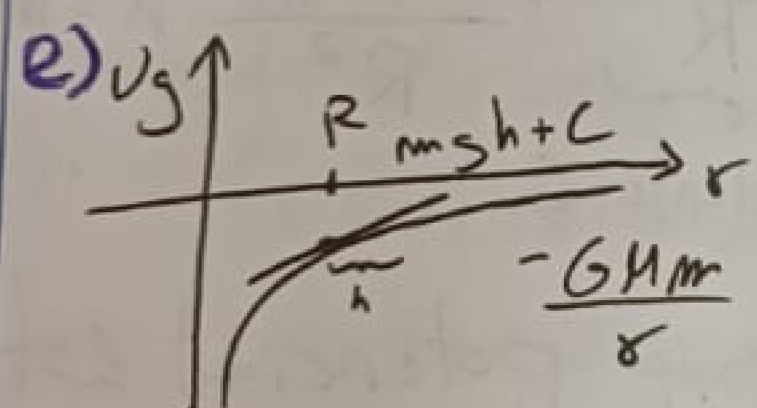
Para chegar à expressão, m.g.h, acrescentámos uma constante $-C = GMm/R > 0$ para mudar o ponto de referência para $h = 0$.

d) $U(r) \xrightarrow[r \to \infty]{} 0$

$U(h) \xrightarrow[h \to \infty]{} \infty$

Não podemos tomar o limite $h \to \infty$ na expressão aproximada porque esta só é válida para

$$h << R$$

e) 

f) $h^{máx} = 8622 \text{ Km} > R$

↳ ponto de inversão $(v = 0)$

$$U_g = -\frac{GMm}{r}$$

$$r_{máx} = R + h_{máx} = 15000 \text{ Km}$$

$$E_m = \underset{0}{\underset{\shortparallel}{E_c}} + U_g = -\frac{GMm}{r_{máx}} =$$

$$= E_c(r) = GMm\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{h_{máx}}\right)$$

g) Velocidade de escape

Para que o corpo não volte a cair, o ponto de inversão ($v=0$) tem de ser infinito

$$E_m = E_c + U_g = \lim_{r\to\infty} -\frac{GMm}{r}$$

$$\overset{\parallel}{0} \qquad = 0$$

$$E_m^{(i)} = E_c^{(i)} + U_g^{(i)} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_e^2 - \frac{GMm}{R} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \cancel{m} \cdot v_e^2 = \frac{GM\cancel{m}}{R}$$

$$\Leftrightarrow v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \simeq 11,2 \text{ Km/s}$$

h) $v < c = 300\,000$ Km/s

$$v_e < c \Leftrightarrow \sqrt{\frac{2GM}{R}} < c$$

$$\Leftrightarrow \frac{2GM}{R} < c^2$$

$$R > \frac{2GM}{c^2} \equiv R_s = \text{raio de Schwarzschild}$$

(raio de um buraco negro)

$R_s \simeq 9$ mm (Terra)

$R_s \simeq 3$ Km

6. → a) F $E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$

b) V

$$U_g(r) = -\frac{GMm}{r} + c$$

$$U_g(\underset{\underset{h=0}{\Updownarrow}}{r=R}) = 0 \Leftrightarrow c = \frac{GMm}{R}$$

$$U_g(r) = -GMm\underbrace{\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)}_{<0} > 0$$

$$\lim_{r\to\infty} U_g(r) = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow U_g = -\frac{GMm}{r} < 0$$

c) F $h >> R$ $U_g \simeq m \cdot g \cdot h$

Ficha 1

4. ->
a) 1000 Kg, 2 Kg/s, $v = 1\,m/s$

$P_i = 1000$ $P_f =$

tem 1000 mais 2Kg por s

$m = (1000 + 2t)$ Kg

$\boxed{p = m \cdot v}$

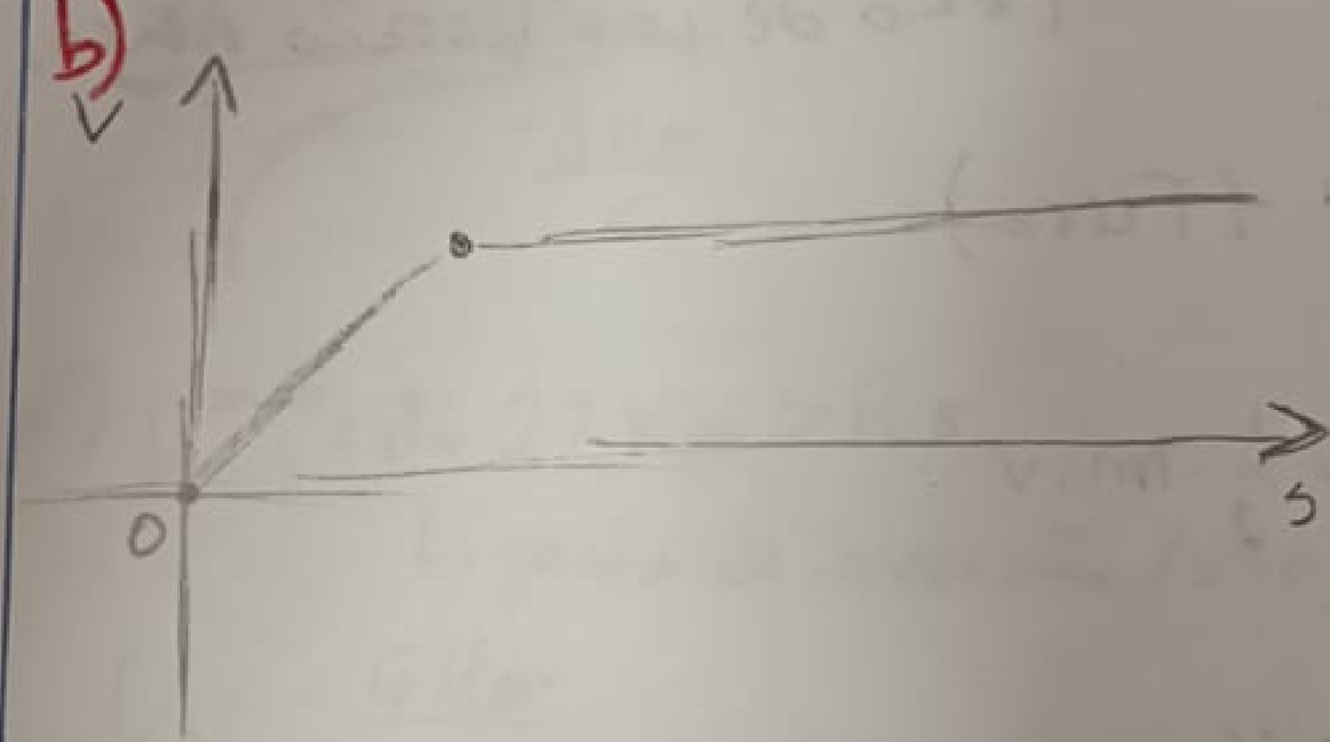
$f'(x)$

$P_f = (1000 + 2t)v$

$(1000 + 2t)v = 1000$

$$v = \frac{1000}{1000 + 2t}$$

b)



c) $F(t)$ $v = v_0 = 1\,m/s$

$$a = \frac{-2 \cdot 1000}{(1000+2t)^2}$$ $F_r = m \cdot a$

$$= \frac{-2000}{(1000+2t)^2}$$

Folha 2

7.→ $m = 0,1\,Kg$ $x_0 = 0,5\,m$ $v_0 = 0\,m/s$

$U(x) = 20x^2$ → energia potencial elástica

a) $E_m = E_m^i$

$= E_c^i + U^i$

$= 0 + U(x_0)$

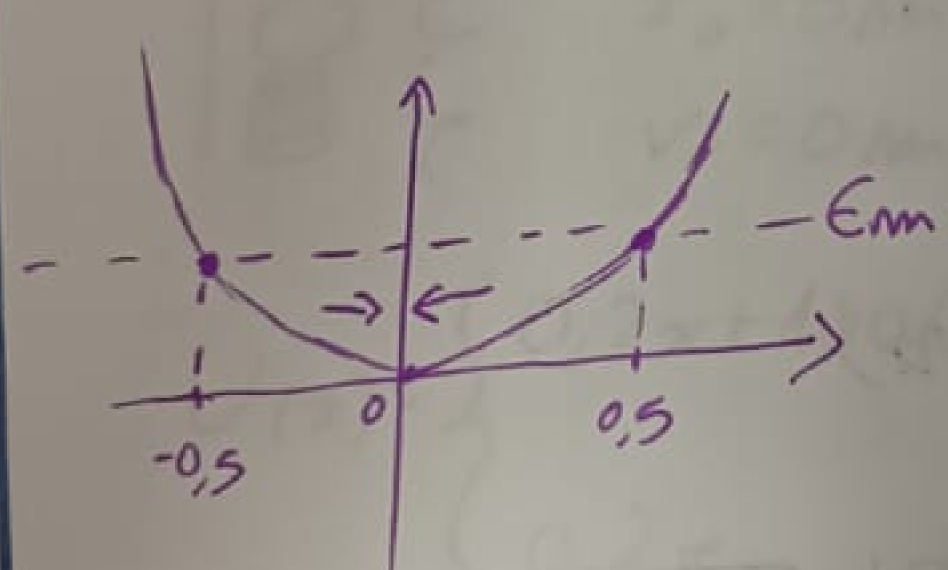
$= 20 \times 0,5^2 = 5J$

b) Pontos de inversão: $v = 0 \Rightarrow E_c = 0$

$F_N = U(x)$

$\Leftrightarrow 5 = 20x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = -\frac{1}{2}$



$x(t) = A.\sin(\omega t + \phi)$

$A = 0,5m$

c) $F(x = -0,25) = ?$ $a(x = -0,25) = ?$

$F = -\frac{dU}{dx} = -40x = -Kx$

$\Rightarrow K = 40\,N/m$

$F(-0,25) = -40 \times (-0,25) = 10N$

$a(-0,25) = \frac{F(-0,25)}{m} = \frac{10}{0,1} = 100\,m/s^2$

Folha 2

3. → $m = 0{,}2\ Kg$ $x_1 = 0{,}2\ m$ $v_i = 0$ $K = 200\ N/m$ $h = 0{,}6$
$h = h/3$

a) $E_m = E_c + U$
gravítica: $U_g = m g h$
elástica: $U_{el} = \frac{1}{2} \cdot K \cdot x^2$
↳ alteração do comprimento de uma das molas

$$E_m = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + m g h + \frac{1}{2} K x^2$$

Como não há atrito a energia mecânica (em) é conservada. Vamos calculá-la no instante inicial

. $E_{c_i} = 0\ J$ $\cdot U_g = 0\ J$

$$U_{el} = \frac{1}{2} K x_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 200 \times 0{,}2^2$$
$$= 4\ J$$

Para atingir a segunda mola, a esfera tem de ultrapassar a barreira:

$$E_m > E_m^{\text{min,barreira}} = \underbrace{E_c}_{=0} + m \cdot g \cdot h = 0{,}2 \times 10 \times 0{,}6$$
$$= 1{,}2\ J$$

Ou seja $4 > 1{,}2$ verifica-se.

b) Momento em que toca na segunda mola → $x_2 = 0$ (porque só toca, não chega a comprimir quando só toca)

$$E_m = E_c + m \cdot g \cdot \frac{h}{3} + \underbrace{U_{el}}_{0} = E_m^i$$

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + m \cdot g \cdot \frac{h}{3} = E_{m_i}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \times 0{,}2 \cdot v^2 + 0{,}2 \times 10 \times \frac{0{,}6}{3} = 4$$

$$\Leftrightarrow 0{,}1 v^2 + 0{,}4 = 4 \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{3{,}6}{0{,}1}} = 6\ m/s$$

$v_0 = 0$

$E_m = U(x_0) = 20x_0^2 = 11,25$

$\Leftrightarrow x = \pm 0,75\,m$

$A = 0,75\,m$

---

2) $x_0 = 0,5\,m$

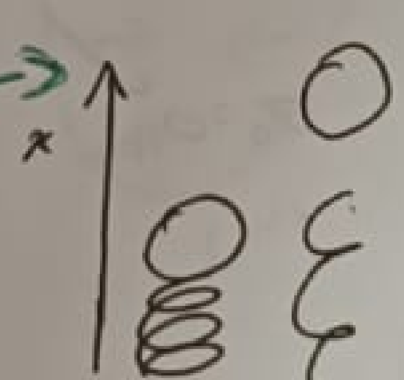
$E_m = E_c^i + U^i = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 + \underbrace{20x_0^2}_{5}$

$\Leftrightarrow 11,25 = \frac{1}{2} \cdot 0,1 \cdot v_0^2 + 5$

$\Leftrightarrow v_0 = \pm\sqrt{\frac{2(11,25-5)}{0,1}} = \pm\sqrt{\frac{12,5}{0,1}} = \pm\sqrt{12,5}$

$= \pm 5\sqrt{5}$

9.



$m = 0,02\,Kg$

$x_0 = 0\,m$

$v_0 = 0\,m/s$

$$U(x) = \begin{cases} 0,2x + 100(x-0,02)^2 & \text{para } 0 \leq x \leq 0,02 \\ 0,2x & \text{para } x \geq 0,02 \end{cases}$$

$U_g = m \cdot g \cdot h = m \cdot g \cdot x = 0,02 \cdot 10x = 0,2x$

$U_{el} = \underbrace{\frac{1}{2} K}_{100} (x - x_{eq})^2$

↳ ponto de equilíbrio da mola (tem comprimento natural)

$K = 200\,N/m$ $\boxed{x_{eq}} = 0,02\,m$

x x a) $E_m = E_c + U = U(x_0 = 0) =$
$\overset{\shortparallel}{0}$
$= 100\,(0-0{,}02)^2 = 0{,}04\ J$

b) $x_{máx} = ?$ $\Rightarrow v = 0$
pontos de inversão

$E_m = U(x_{máx})$

$0{,}04 = 0{,}2\,x_{máx} \Rightarrow x_{max} = 0{,}2\ m$

não está ligado à mola

Partícula oscila entre os pontos de de inversão

$x_0 = 0\ m$ $x_{máx} = 0{,}2\ m$

c) $F(x=0{,}01) = ?$ $F = -\dfrac{dU}{dx}$

$F(x=0{,}04) = ?$

$$F = \begin{cases} -0{,}2 - 200\,(x-0{,}02) \\ -0{,}2 \end{cases}$$

$F(x=0{,}01) = -0{,}2 - 200\,(0{,}01 - 0{,}02)$
$= -0{,}2 + 2$
$= 1{,}8\ N$

$F(x=0{,}04) = -0{,}2$

$a = \dfrac{F}{m}$

d) $K = 200\ N/m$

e) $F(x_{eq}) = 0 = -\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x = x_{eq}}$

$-0,2 - 200(x - 0,02) = 0$

$200(x - 0,02) = -0,2 \Leftrightarrow x_{eq} = 0,019\ m$

Em $x_{eq}^{mola} = 0,02$, $F_{el} = 0 \Rightarrow$ mola tem comprimento natural

Em $x_{eq} = 0,019$ $|F_{el}| = |P| \Rightarrow F = 0$

$$U'' = \frac{d^2U}{dx^2} = \begin{cases} 0 + 200, & x \leq 0,02 \\ 0, & x > 0,02 \end{cases}$$

$$\frac{d^2U}{dx^2}(x = x_{eq} = 200 > 0 \Rightarrow \text{mínimo}$$

$x_{eq} = 0,019$

↓ ponto de equilíbrio estável

f) $E_c(x = 0,02) = E_m - U(x = 0,02)$

$= 0,04 - 0,2 \times 0,02 = 0,036\ J$

$E_c^{máx} = U^{min} \Rightarrow x = x_{eq} = 0,019\ m$

↓ nem sempre é 0

d) $K = 200\ N/m$

e) $F(x_{eq}) = 0 = -\left.\dfrac{dU}{dx}\right|_{x = x_{eq}}$

$-0{,}2 - 200(x - 0{,}02) = 0$

$200(x - 0{,}02) = -0{,}2 \Leftrightarrow x_{eq} = 0{,}019\,m$

Em $x_{eq}^{mola} = 0{,}02$, $F_{el} = 0 \Rightarrow$ mola tem comprimento natural

Em $x_{eq} = 0{,}019$ $|F_{el}| = |P| \Rightarrow F = 0$

$$U'' = \frac{d^2U}{dx^2} = \begin{cases} 0 + 200 & , x \leq 0{,}02 \\ 0 & , x > 0{,}02 \end{cases}$$

$$\frac{d^2U}{dx^2}(\underbrace{x = x_{eq}}_{= 0{,}019} = 200 > 0 \Rightarrow \text{mínimo}$$

$\downarrow$

ponto de equilíbrio estável

f) $E_c(x = 0{,}02) = E_m - U(x = 0{,}02)$

$= 0{,}04 - 0{,}2 \times 0{,}02 = 0{,}036\,J$

$E_c^{máx} = U^{min} \Rightarrow x = x_{eq} = 0{,}019\,m$

$\downarrow$

nem sempre é 0

10. → $m = 2\,Kg$

$$U_{(x)} = \begin{cases} 7{,}75 - 3x, & 0 \leq x \leq 1{,}5 & \text{I} \\ 1 + (x-3)^2, & 1{,}5 \leq x \leq 4{,}5 & \text{II} \\ 5{,}5 - (x-6)^2, & 4{,}5 \leq x \leq 8{,}3 & \text{III} \\ 0 & & \text{IV} \end{cases}$$

a) Pontos de equilíbrio: $\frac{dU}{dx} = 0$

$$\frac{dU}{dx} = \begin{cases} -3 & \text{I} \\ 2(x-3) & \text{II} \Rightarrow \overset{\text{mínimo}}{x = 3}, \text{estável} \\ -2(x-6) & \text{III} \Rightarrow \underset{\text{máximo}}{x = 6}, \text{instável} \\ 0 & \text{IV} \end{cases}$$

$$\frac{d^2U}{dx^2} = \begin{cases} 0 & \text{I} \\ 2 & \text{II} \to x = 3 \text{ estável} \\ -2 & \text{III} \to x = 6 \text{ instável} \\ 0 & \text{IV} \end{cases}$$

b) $x_0 = 5\,m$ $\quad v_0 = 0\,m/s$

(i) $E_m = \underset{0}{E_c^i} + \underset{\text{III}}{U^i} = 5{,}5 - (5-6)^2 = 4{,}5\,J$

(ii) $a = \frac{F}{m}$ $\quad F = -\frac{dU}{dx} = 2(x_0 - 6)$

$= -2\,N$

$a = \frac{F}{m} = \frac{-2}{2} = -1\,m/s^2$

d) No ponto $x=0, F=0 \Rightarrow$ ponto de equilíbrio

$$F \begin{cases} >0, & x<0 \\ <0, & x>0 \end{cases} \Rightarrow \text{estável}$$

e) $v = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \phi)$ $\quad E_c^{max} = E_m - U_{min} = 5$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot m v^2_{máx} = 5$

$v_{máx} \Rightarrow \cos(\omega t + \phi) = 1$ $\quad \Leftrightarrow v_{máx} = 10 \text{ m/s}$

$\Downarrow$

$\sin(\omega t + \phi) = 0 \Rightarrow x = 0$

$v_{máx} \Rightarrow E_c^{máx} \Rightarrow U^{min} \Rightarrow x = 0$

$\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow 40x = 0$, que vai dar ao mesmo daquilo que foi feito anteriormente

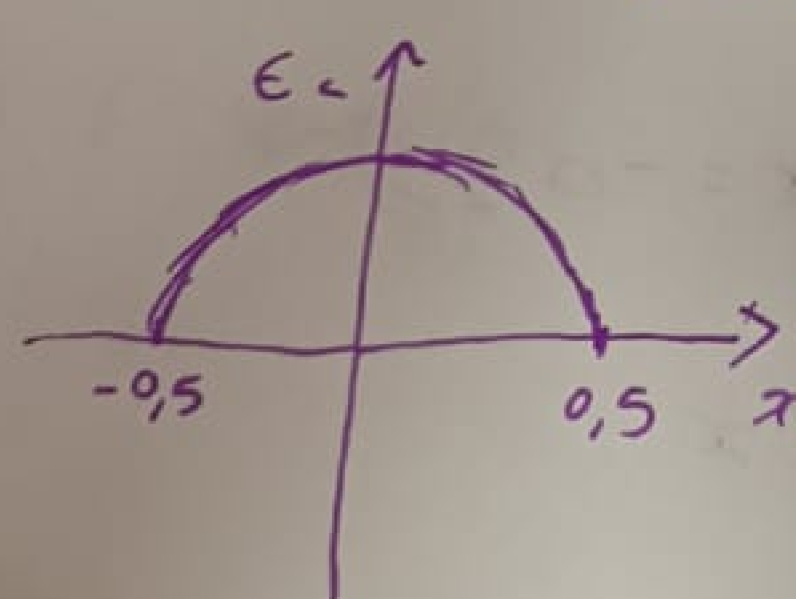
f) $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{40}{0,1}} = 20 \text{ rad/s}$

$= 20 \text{ s}^{-1}$

$= 20 \text{ Hz}$

g) $E_c(x) = E_m - U_c(x)$

$= 5 - 20x^2$



$\boxed{E_c \geq 0 !!!}$

h) $E_m = 11,25 \text{ J}$

Duas hipóteses:

1) aumentar x_0 (U^i)

2) Aumentar v_0 (E_c^i)

Folha 3 (1, 2, 3, 7 e 8)

1. → onda transversal numa corda

$$y(x,t) = 0,2 \sin(4\pi x + 2\pi t)$$

$\downarrow$

Φ

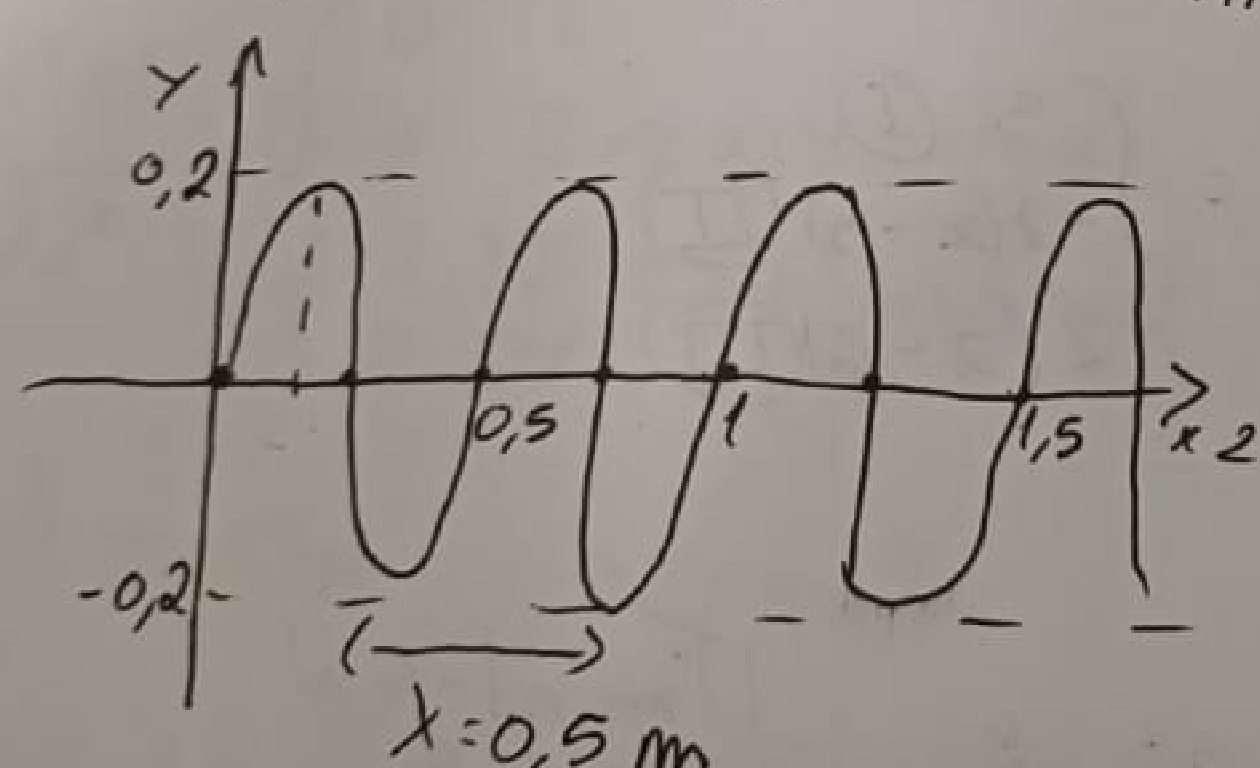
a) $t = 1s$

$$y(x, t=1) = 0,2 \sin(4\pi x + 2\pi) = 0,2 \sin(4\pi x)$$

$K \equiv$ número de onda

$K = 4\pi$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Leftrightarrow 4\pi = \frac{2\pi}{\lambda} \Leftrightarrow \lambda = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2} = 0,5m$$



$$\sin(4\pi x) = 1$$

$$4\pi x = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{8}$$

b) $x = 0$

$$y(x=0, t) = 0,2 \sin(\underbrace{2\pi t}_{w = 2\pi}) \Rightarrow \text{MHS}$$

$$f = \frac{w}{2\pi} = 1 Hz = 1 s^{-1}$$

c) Dois pontos em posição de fase

$$y(x_1,t) = -y(x_2,t)$$

$$0,2\sin(\pi x_1 + 2\pi t)$$

$$= -0,2\sin(4\pi x_2 + 2\pi t)$$

$$= 0,2\sin(4\pi x_2 + 2\pi t + \pi)$$

$$4\pi x_1 + \cancel{2\pi t} = 4\pi x_2 + \cancel{2\pi t} + \pi$$

$$\Leftrightarrow 4\pi x_1 = 4\pi x_2 + \pi$$

$$\Leftrightarrow x_1 = \frac{\cancel{4\pi}\, x_2}{\cancel{4\pi}} + \frac{\cancel{\pi}}{4\cancel{\pi}}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = x_2 + \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x_1 - x_2 = \frac{1}{4}}$$

d) e)

$$v = \frac{w}{k} = \lambda f$$

$$k = 4\pi \quad w = 2\pi \quad \therefore v = \frac{2\cancel{\pi}}{4\cancel{\pi}} = 0,5\ m/s$$

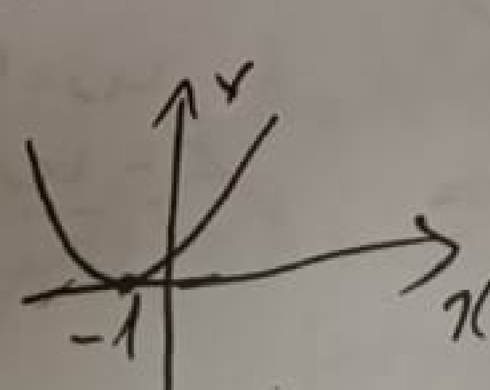
$A\sin(kx + wt + \delta) \rightarrow$ propaga no sentido negativo ao eixo x

progressiva $v \neq 0$ (translações)

$y = x^2$

$y = (x-1)^2$

$\hookrightarrow wt$



$y = (x+1)^2$

2.-> $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ $=0,5$ $=L$

μ = massa/comprimento

$\mu = 1 kg/m$

$v^2 = \frac{T}{\mu} \Leftrightarrow T = v^2 \mu = 0,25 N$

3.-> $y(t) = 0,25 \sin(4\pi t)$, $x=0$ (porque é numa fonte)

$v = 5 m/s$ $\quad x = 10 m$

a) $y_{max} = 0,25 m$

$\sin(\underbrace{4\pi t}_{\frac{\pi}{2}}) = 1$

$4\pi \cdot t = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow t = \frac{1}{8} = 0,125 s$

b) $x=0$

$v_y = \frac{dy}{dt} = 0,25 \times 4\pi \cos(4\pi t)$
$= \pi \cos(4\pi t)$

$v_y^{max} = \frac{dy}{dt}\bigg|_{max} = \pi$

c) A onda viaja com uma velocidade de 5 m/s logo, demora $\frac{10}{5} = 2s$ a percorrer 10 m e chegar à outra extremidade da corda

d) $\lambda = ?$ $\quad A = ?$ $\quad f = ?$ → determinado pela fonte (motor)

determinado pelo meio (corda)
→ $v = \lambda f$
$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{5}{2} = 2,5 m$

$A = 0,25$

$\omega = 4\pi$
$f = \frac{\omega}{2\pi} = 2 Hz$

7.→ $y_i = A\cos(500\pi t)$

$= A\cdot\sin(\underbrace{300\pi t}_{\omega t} + \frac{\pi}{2})$

a) $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{500\pi}{2\pi} = 250\,Hz$

$\omega = 500\pi$ (fonte)

$v = \lambda f \Leftrightarrow \lambda = \frac{v}{f} = \frac{25}{250} = 0{,}1\,m$

b) $y_1(x_1,t) = A\cdot\sin(Kx_1 - \omega t + \delta)$

$K = \frac{2\pi}{\lambda} = 20\pi = A\sin(20\pi x_1 - 500\pi t + \frac{\pi}{2})$

$y_2(x_2,t) = A\sin(20\pi x_2 - 500\pi + \frac{\pi}{2})$

c) $\overline{OQ} = 1{,}05\,m$

diferença de fase $= \underbrace{(Kx_2 - \omega t + \delta)}_{\text{fase da onda 2 em O}} - \underbrace{(Kx_1 - \omega t + \delta)}_{\text{fase da onda 1 em O}}$

$= K(x_2 - x_1) = 20\pi\,(1{,}05 - 1) = 20\pi \times 0{,}05$

$= \pi$

↓

oposição de fase

$y_0(t) = y_1(x_1,t) + y_2(x_2,t)$

$= A\sin(20\pi x_1 - 500\pi t + \frac{\pi}{2}) + A\sin(30\pi x_2 - 500\pi t + \frac{\pi}{2})$

$= A\sin(20\pi x_1 - 500\pi t + \frac{\pi}{2}) + A\sin(20\pi x_1 - 500\pi t + \frac{\pi}{2} + \pi)$

$y_0(t) = A\sin(20\pi x_1 - 500\pi t + \frac{\pi}{2}) - A\sin(20\pi x_1 - 500\pi t + \frac{\pi}{2}) = 0$

interferência destrutiva

e) oscilação em fase no ponto O → interferência construtiva

⇓

diferença de fase $K(x_2-x_1)=2\pi n \quad n=1,2,3,\dots$

$x_1 = 1m$

$20\pi(x_2-x_1)=2\pi n$

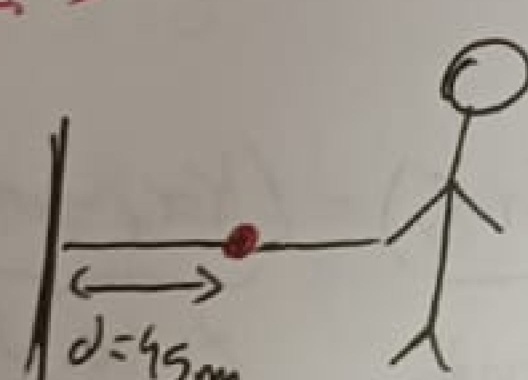
$\Leftrightarrow x_2-x_1=0{,}1n$

$\cos\theta=\frac{1}{x_2} \Leftrightarrow x_2=\frac{1}{\cos\theta}$

$\frac{1}{\cos\theta}-1=0{,}1n$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\cos\theta}=1+0{,}1n \Leftrightarrow \boxed{\cos\theta=\frac{1}{1+0{,}1n}}$

8->



$v=0{,}72$

Para determinadas frequências o ponto vermelho é uma extremidade fixa da corda => ondas estacionárias harmónicas

$L=d$

$KL=n\pi$

$K=\frac{2\pi}{\lambda}$

$\frac{2\pi}{\lambda}\cdot L=n\pi \Leftrightarrow \lambda=\frac{2L}{n} \quad n=1,2,3\dots$

$v=f\lambda \Leftrightarrow f=\frac{v}{\lambda}=\frac{v}{2L}n$

$f_1=\frac{v}{2L}=\frac{0{,}72}{2\times 0{,}45}=0{,}8Hz$

$f_n=nf_1$

9. → $L = 0{,}5\,m$ $\mu = 2\times10^{-2}\,kg/m$ $f_1 = 800\,Hz$

a) $v = ?$ $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ $f_n = \frac{v}{2L}(n)$.

$f_1 = \frac{v}{2L}(n=1)$

$\Leftrightarrow v = 2L f_1 = 800\,m/s$

b) $T = ?$

$v^2 = \frac{T}{\mu} \Leftrightarrow T = \mu . v^2$

$= 2\times10^{-2}\times800^2$

$= 12800\,N$

c) $n=4$ $\lambda_4 = ?$

$f_4 = \frac{v}{2L}\times4 = \frac{2v}{L}$

$\lambda_4 = \frac{v}{f_4} = \frac{v}{\frac{2v}{L}} = \frac{L}{2} = 0{,}25\,m$

$\lambda f = v$

d) $v_{som} = 1500\,m/s$ (na água) (é a densidade da água que vai mexer)

vibração da corda → ondas estacionárias

⇓

fonte de ondas sonoras $f_{som} = f_1 = 800\,Hz$

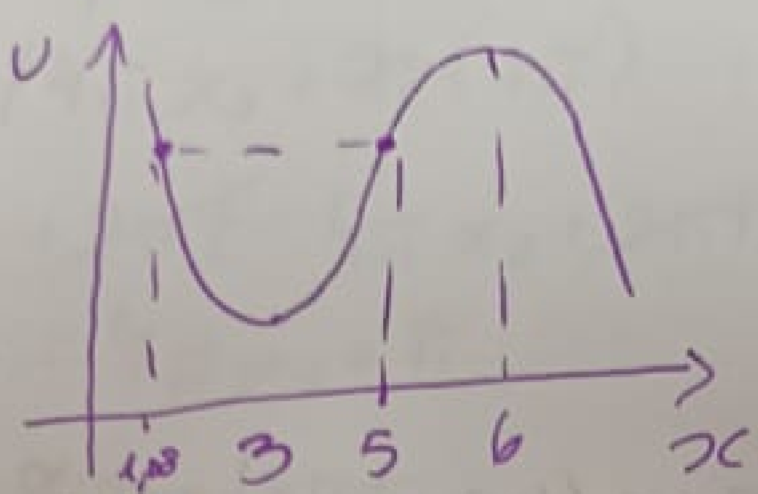
frequência ⟷ fonte

λ ⟷ meio → $\lambda_{som} = \frac{v_{som}}{f_1} \Leftrightarrow \lambda = \frac{1500}{800} \Leftrightarrow \lambda = 1{,}875\,m$

(iii) x_{min} e $x_{máx}$ → pontos de inversão

$E_m = U(x) = 4{,}5\ J$

$x = 5m$

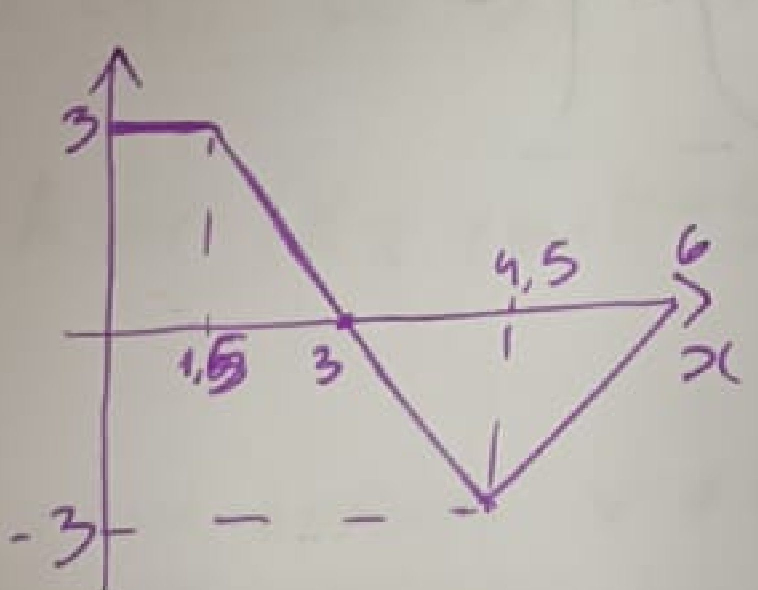


(I) $7{,}75 - 3x = 4{,}5 \Rightarrow x_{min} = 1{,}08\ m$

(iv) $E_c^{máx} = E_m - U_{min} = 4{,}5 - \underbrace{1}_{\neq 0} = 3{,}5\ J$

$x = 3$

(v) $F = -\dfrac{dU}{dx} = \begin{cases} 3 & \text{(I)} \\ -2(x-3) & \text{(II)} \\ 2(x-6) & \text{(III)} \end{cases}$



$|F_{min}| = 0\ N$

$|F_{máx}| = 3N$

(vi) $x_0 = 5m$

$E_m \geq U(6) = 5{,}5\ J$

$\frac{1}{2} \cdot m v_0^2 + \underbrace{U(5)}_{4,5} \geq 5{,}5$

$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot v_0^2 \geq 5{,}5 - 4{,}5 = 1 \Rightarrow \boxed{v_0^2 \geq 1}$ ⇒ não interessa o sentido

$|V_0| > 1m/s$, a velocidade mínima tem que ser 1m/s

$I_2 = I_1 \underbrace{\cos^2(45)}_{1/2} = \frac{I_1}{2} = \frac{I_0}{4}$

$I_2 = I_1 \underbrace{\cos^2(45°)}_{1/2} = \frac{I_1}{2} = \frac{I_0}{4}$

$I_3 = I_2 \underbrace{\cos^2(45°)}_{1/2} = \frac{1}{2} I_2 = \frac{I_0}{8}$

Com $\theta = 30°$ | Porque a intensidade vai com o quadrado da amplitude

$I_2 = I_1 \cdot \underbrace{\cos^2(30°)}_{3/4} = \frac{3}{4} I_1 = \frac{3}{8} I_0$

$I_3 = I_2 \underbrace{\cos^2(60°)}_{1/4} = \frac{I_2}{4} = \frac{3}{32} I_0$

---

18. → a) F, a frequência não muda

b) $n = \frac{c}{v}$ $\lambda' = \frac{v}{f}$ $\lambda = \frac{c}{f}$

$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{v/\cancel{f}}{c/\cancel{f}} = \frac{v}{c} = \frac{1}{n}$ $\lambda' = \frac{\lambda}{n}$

$f = \frac{1}{}$

R: V

c) F, $n\lambda = d \cdot \sin\theta$

$\sin\theta = \frac{n\lambda}{d} < 1$

$n = 1 \Rightarrow \lambda < d$

se for muito menor $\lambda << d \Rightarrow \theta << 1$

d) F, $I_1 = I_0 \cos^2 90° = 0$

SOH
CAH
TOA

13.→ Rede de difração

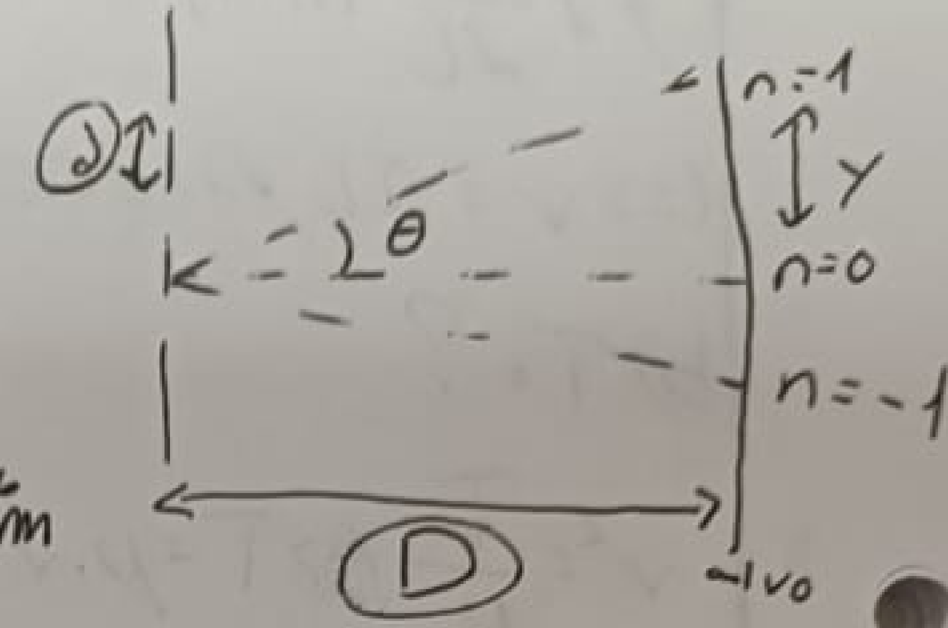
8000 linhas/cm
fendas

$\lambda_{VE} = 656\,nm \quad \lambda_{Vi} = 410\,nm$

$D = 1\,m$

$n\lambda = d \sin\theta$

$\frac{1^a\ ordem}{n=1}$



$d = \frac{1\,cm}{8000} = \frac{0{,}01}{8000} = 1{,}25 \times 10^{-6}\,m$

$= 1{,}25 \times 10^{-6} \times 10^{9}\,nm$

$= 1250\,nm$

$tg\,\theta = \frac{y}{D}$

$\Leftrightarrow y = D\,tg\,\theta$

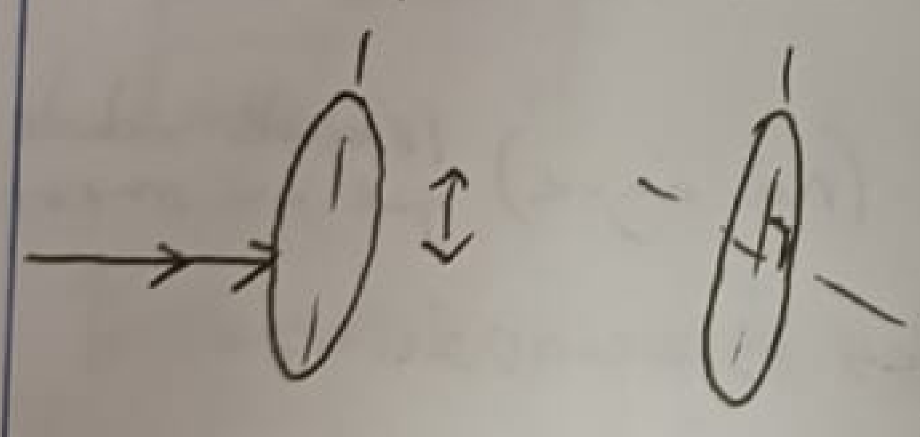
$\sin\theta = \frac{\lambda}{d} \Leftrightarrow \theta = \sin^{-1}\left(\frac{\lambda}{d}\right)$

$Y_{VE} = D\,tg\left(\sin^{-1}\left(\frac{\lambda_{VE}}{d}\right)\right) =$

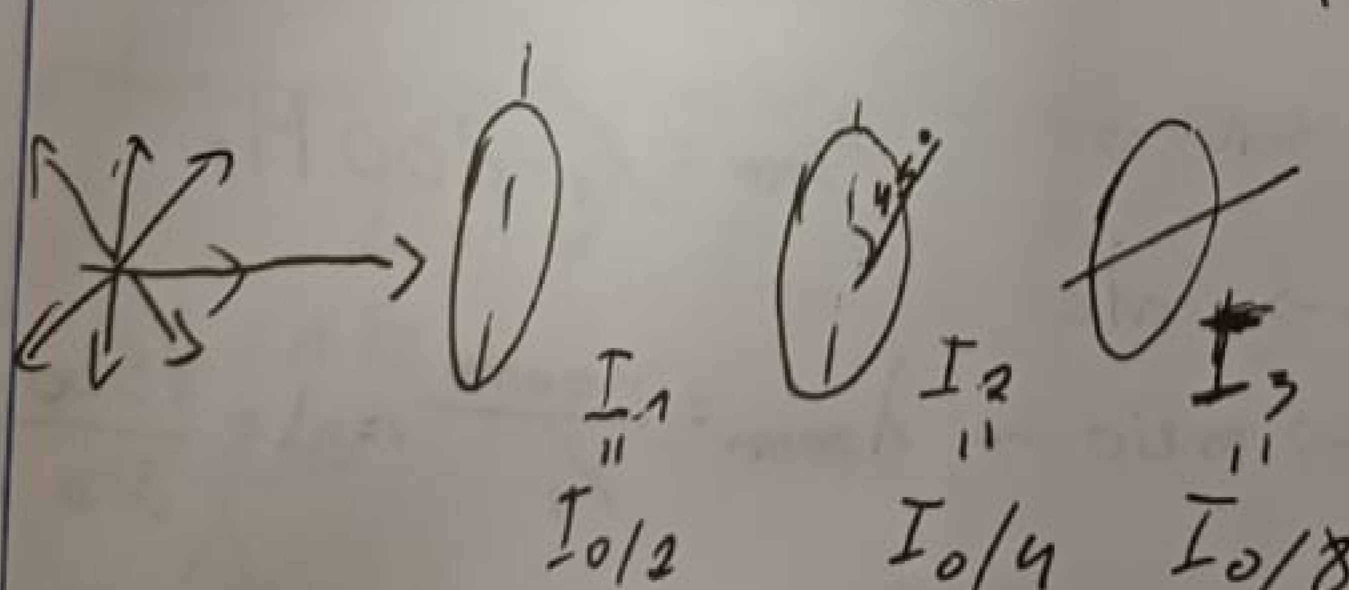
$= 1 \times tg\left(\sin^{-1}\left(\frac{656}{1250}\right)\right) = 0{,}62\,m = 62\,cm$

* fazer o mesmo para o violeta

15.→ $I_1 = I_0 \cdot \cos^2\theta$



Para que não passe radiação após os 2 polarizadores, os eixos de transmissão têm de ser perpendiculares entre si



$I_1 = I_0 \langle \cos^2\theta \rangle = \frac{I_0}{2}$
↓
média