Lic.ª Eng. Informática 10/01/2022 **Frequência - Estruturas Discretas** *Duração: 1h30m*

Nome completo:

Número de estudante:

Nas questões **1**, **2** e **3** indique apenas a resposta nos locais indicados. Nas questões **4**, **5** e **6 justifique** convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos.

Nota: *$C(n,k)$ e $\binom{n}{k}$ denotam o mesmo número.*

1. Em cada alínea, assinale, com uma cruz **X**, **todas** as opções correctas.

   (a) $mdc(3^{999}+5, 3^{999}+6)$ é igual a

   3 $\square$ 1 $\boxed{\text{X}}$ 3^{999} $\square$

   (b) O número de sequências binárias (palavras no alfabeto $\{0,1\}$) de comprimento 15 em que o número de zeros é exactamente igual a 9, é

   $\binom{15}{9}$ $\boxed{\text{X}}$ $\binom{15}{6}$ $\boxed{\text{X}}$ $6!9!$ $\square$

   (c) O número máximo de arestas de um grafo simples com 65 vértices é

   $\binom{65}{2}$ $\boxed{\text{X}}$ $\frac{65\times 64}{2}$ $\boxed{X}$ $64+63+\binom{63}{2}$ $\boxed{\text{X}}$

2. Indique na caixa à direita,

   (a) o coeficiente de x^{127} no desenvolvimento de $(x+1)^{327}$. $\boxed{\binom{327}{127}}$

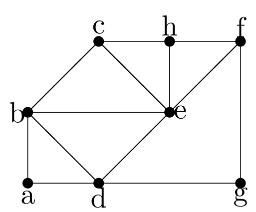
   (b) o número de divisores de $21\times 170\times 101\times 19$ que têm exactamente 5 factores na sua factorização em primos? $\boxed{\binom{7}{5}}$

   `Factorização em números ímpares` $21\times 170\times 101\times 19\times = 3\times 7\times 5\times 2\times 17\times 101\times 19.$

   (c) o número de soluções $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7)$, em inteiros não negativos, da equação $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7 = 9.$

   $\boxed{\binom{15}{9} = \binom{9+7-1}{9}}$

3. Acrescente um número mínimo de arestas ao grafo abaixo de modo a que o grafo resultante seja



semieuleriano.

`O grafo tem 4 vértices de grau ímpar c,e,h,f. Basta acrescentar uma aresta formada por dois vértices de grau ímpar, resultando deste modo um grafo com exactamente dois vértices de grau ímpar que é consequentemente semieuleriano. Por exemplo, acrescente-se a aresta` $\{c,f\}$.

4. (a) Resolva a congruência $6x \equiv_{23} -6$ em $\mathbb{Z}$.

$$6x \equiv_{23} -6 \Leftrightarrow 4 \times 6x \equiv_{23} 4 \times (-6) \Leftrightarrow x \equiv_{23} -1$$

`Soluções inteiras:` $\{-1 + 23k : k \in \mathbb{Z}\}$.

(b) Descodifique a mensagem “XGRRQ”, que foi encriptada com a função

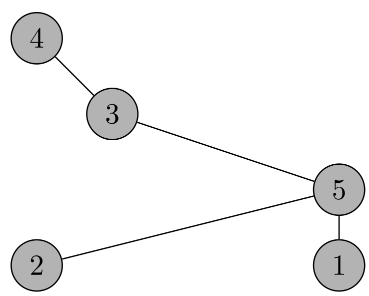
$$f(p) = (6p + 6) \bmod 23,$$

identificando as 23 letras do alfabeto pelos inteiros $0, 1, 2, \ldots, 22$ (como mostra a figura).

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	X	Z
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22

$f^{-1}(p) = 4p - 1$ `mod` 23. `Mensagem dsencriptada:PASSO.`

5. Considere o grafo G



(a) Escreva a matriz A de adjacência do grafo G.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) Sendo A a matriz calculada em (a), o que enumera a entrada $(5, 5)$ da matriz A^{14}?

`A entrada` $(5,5)$ `da matriz` A^{14} `conta o número de caminhos de comprimento 14 que ligam o vértice` 5 `a si próprio. Ou seja, o número de caminhos fechados de comprimento 14 com início e fim no vértice` 5.

(c) **Use a matriz A de adjacência do grafo** G, calculada em (a), para determinar o número de caminhos fechados de comprimento quatro com início e fim no vértice 5.

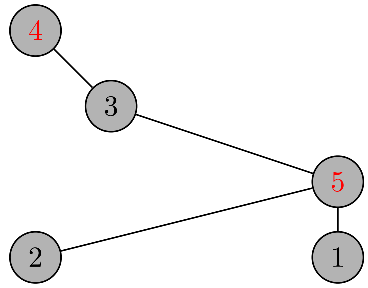
`A entrada` $(5,5)$ `da matriz` A^4 `conta o número de caminhos de comprimento 4 que ligam o vértice` 5 `a si próprio. A entrada` $(5,5)$ `de` A^4 `é igual a`

$$\texttt{(linha 5 de } A\texttt{)} \times A^2 \times \texttt{ (coluna 5 de } A\texttt{)} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times A \times A \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \times A \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 10$$

(d) O grafo G acima é bipartido? Caso seja, exiba uma bipartição.

G é uma árvore porque é conexo e sem ciclos, portanto, é um grafo bipartido. Uma bipartição de G é, por exemplo, definida pela seguinte coloração dos vértices:



Os vértices 4 e 5 a vermelho e os restantes a preto: vértices adjacentes não têm a mesma cor.

6. Qual é o número máximo de vértices de grau 5 que uma árvore com 13 vértices pode ter? Indique uma árvore nessas condições.

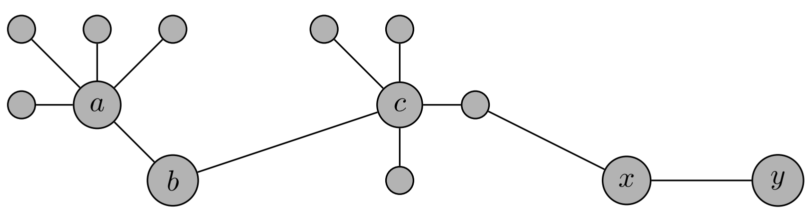
Seja T uma árvore com 13 vértices onde k vértices $v_1, v_2, \ldots, v_k$ têm grau 5. Então pelo lema dos apertos de mão

$$g(v_1) + \cdots + g(v_k) + \sum_{i=k+1}^{13} g(v_i) = 2(13-1) \Leftrightarrow 5k + \sum_{i=k+1}^{13} g(v_i) = 24$$

Como numa árvore com mais do que 1 vértice todos vértices têm grau ≥ 1 porque é um grafo conexo, vem que

$$24 = 5k + \sum_{i=k+1}^{13} g(v_i) \geq 5k + 13 - k \Leftrightarrow 24 - 13 \geq 4k \Leftrightarrow 4k \leq 11.$$

Ou seja, k é no máximo 2. De facto existe uma árvore com 13 vértices e 2 vértices de grau 5. Por exemplo,



Cotação:

1) 0.5+0.7+0.75
2) 0.7+ 0.75+ 0.7
3) 0.5
4) 1.9
5) 2.5
6)1.0