Raciocínio matemático, indução e recursão

1. Mostre que a proposição $P(0)$ é verdadeira, para as seguintes proposições $P(n)$:

   (a) $P(n)$: Se $n > 1$ então $n^2 > n$.

   (b) $P(n)$: Se a e b são inteiros positivos com $a \geq b$, então $a^n \geq b^n$.

2. Será correcto assumir que se $\neg p$ é verdadeira então $\neg q$ é verdadeira, usando o facto de que $p \to q$ é verdadeira?

3. Apresente uma prova por contradição do teorema "Se $3n + 2$ é ímpar, então n é ímpar."

4. Sejam p a proposição "$n \equiv_3 1$" e q a proposição "$n^2 \equiv_3 1$". A implicação $p \to q$, que é "se $n \equiv_3 1$, então $n^2 \equiv_3 1$" é verdadeira. Se q é verdadeira, ou seja, $n^2 \equiv_3 1$, decorre daí que p é verdadeira, isto é, que $n \equiv_3 1$?

5. As demonstrações das seguintes proposições estão erradas!

   P1: *Seja x um número real diferente de 4. Se $\dfrac{2x-5}{x-4} = 3$, então $x = 7$.*

   Dem: Suponhamos que $x = 7$. Então $\dfrac{2x-5}{x-4} = \dfrac{2 \cdot 7 - 5}{7-4} = \dfrac{9}{3} = 3$. Portanto, se $\dfrac{2x-5}{x-4} = 3$, então $x = 7$. $\square$

   P2: *Sejam x e y dois números reais tais que $x + y = 10$. Então $x \neq 3$ e $y \neq 8$.*

   Dem: Suponhamos por absurdo que $x = 3$ e $y = 8$. Então $x + y = 11$, o que contraria a hipótese de que $x + y = 10$. Logo $x \neq 3$ e $y \neq 8$. $\square$

   (a) Indique onde está o erro de raciocínio em cada uma delas.

   (b) Indique se estas proposições são verdadeiras ou não e, no caso afirmativo, apresente uma demonstração correcta.

6. Prove que o quadrado de um número par é par usando

   (a) uma prova directa.

   (b) uma prova por contradição.

7. Para que inteiros não negativos n é válida a desigualdade $2n + 3 \leq 2^n$? Justifique a sua resposta usando indução matemática.

8. Prove, por indução matemática, que, para qualquer inteiro positivo n:

   (a) A soma dos primeiros n inteiros positivos é igual a $(n^2 + n)/2$.

   (b) $n < 2^n$.

   (c) $n^3 - n$ é divisível por 3.

   (d) $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.

9. Prove que para todos os números naturais

$$\sum_{i=0}^{n}(2i+1) = (n+1)^2.$$

10. Recorde que a sucessão de Fibonacci se define recursivamente por: $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, e $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$, para $n \geq 2$.

    (a) Determine $f(3)$.

    (b) Mostre que para todo o $n \geq 1$ se verifica a igualdade $f(4n) = 3f(4n-3) + 2f(4n-4)$.

    (c) Prove, usando o princípio de indução matemática, que $f(4n)$ é múltiplo de 3 para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

11. A seguinte "prova" por indução sobre n de que $3^n = 1$ para todo o inteiro $n \geq 0$ tem um erro:

Passo inicial:	$3^0 = 1$ é verdadeiro por definição de 3^0.
Hipótese de indução:	$3^k = 1$ para todo o inteiro $0 \leq k \leq n$.
Passo indutivo:	$3^{n+1} = 3^{2n-(n-1)} = \dfrac{3^n \times 3^n}{3^{n-1}} = \dfrac{1 \times 1}{1} = 1.$

Em qual das seguintes hipóteses consiste o erro? (Justifique sucintamente.)

(A) A formulação da hipótese de indução está errada.

(B) A igualdade

$$3^{2n-(n-1)} = \frac{3^n \times 3^n}{3^{n-1}}$$

não se verifica para todos os números naturais.

(C) A igualdade $3^{n+1} = 3^{2n-(n-1)}$ não se verifica para todos os números naturais.

(D) O passo indutivo não funciona para todos os $n \geq 0$ porque para $n + 1 = 1$ não podemos concluir a igualdade

$$\frac{3^n \times 3^n}{3^{n-1}} = \frac{1 \times 1}{1}$$

a partir da hipótese de indução.

(E) O passo indutivo não funciona para todos os $n \geq 0$ porque para $n + 1 = 2$ não podemos concluir a igualdade

$$\frac{3^n \times 3^n}{3^{n-1}} = \frac{1 \times 1}{1}$$

da hipótese de indução.