Ano lectivo 2020/21 **Teste 2 D de Estruturas Discretas**

Lic.ª Eng. Informática da FCTUC 15/12/2020 *Duração: 1:00*

Nome completo:

Número de estudante:

Justifique convenientemente as suas respostas e indique os cálculos.

1. Use a indução matemática para provar a igualdade

$$\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = n(n+1)(n+2)/3, \quad \text{para } n \geq 1.$$

Queremos provar que a afirmação $P(n) : \sum_{i=1}^{n} i(i+1) = n(n+1)(n+2)/3$, *é verdadeira para todo o* $n \geq 1$.

Passo básico: Para $n = 1$, $P(1) : 1 \times (1+1) = \frac{1(1+1)(1+2)}{3}$ *é verdadeira.*

Passo indutivo: $P(k) \to P(k+1)$ *é verdadeira para todo o* $k \geq 1$.

Hipótese indutiva: Seja $k \geq 1$ *e suponhamos* $P(k)$: $\sum_{i=1}^{k} i(i+1) = k(k+1)(k+2)/3$ *verdadeira.*

Tese: Queremos provar que $P(k+1)$ *é verdadeira.*

Isto é, $\sum_{i=1}^{k+1} i(i+1) = (k+1)(k+2)(k+3)/3$ *verifica-se.*

Usando a hipótese indutiva, $\sum_{i=1}^{k+1} i(i+1) = \sum_{i=1}^{k} i(i+1) + (k+1)(k+2) = k(k+1)(k+2)/3 + (k+1)(k+2) =$
$= (k+1)(k+2)(k/3+1) = (k+1)(k+2)(k+3)/3.$

2. Calcule:

(a) Usando a identidade em (1), $\sum_{i=0}^{n}[i(i+1)+2] = \sum_{i=0}^{n} i(i+1) + \sum_{i=0}^{n} 2 = \sum_{i=1}^{n} i(i+1) + 2(n+1) =$
$= n(n+1)(n+2)/3 + 2(n+1) = (n+1)[2 + n(n+2)/3]$, para $n \geq 1$.

(b) Sabendo que $\sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)/2$, vem que $\sum_{i=1}^{777}\sum_{j=3}^{199}(-1)^j 4i = \sum_{i=1}^{777} 4i \times \sum_{j=3}^{199}(-1)^j = 4\sum_{i=1}^{777} i \times$
$\sum_{j=3}^{199}(-1)^j = -4\dfrac{777 \times 778}{2} = -2 \times 777 \times 778.$

3. Escreva a seguinte expressão usando a notação abreviada de somatório

$$\frac{x}{1+2} + \frac{x^2}{2+3} + \frac{(x^2)^3}{3+4} + \frac{((x^2)^3)^4}{4+5} + \frac{(((x^2)^3)^4)^5}{5+6} = \sum_{i=1}^{5} \frac{x^{i!}}{i+(i+1)} = \sum_{i=1}^{5} \frac{x^{i!}}{2i+1}.$$

4. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e seja $G = (V, E)$ o grafo cuja matriz de adjacência relativamente à marcação de vértices v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 é A

(a) Quantas arestas tem o grafo G? *É igual à soma das entradas abaixo (ou acima) da diagonal principal da matriz A:* $2 + 5 + 2 + 1 + 2 + 3 = 15$.

(b) O que conta a entrada $(2, 3)$ da matriz A^{444}? (Não calcule essa entrada.)

Conta o número de caminhos de comprimento 444 que ligam v_2 a v_3.

(c) Quantos caminhos de comprimento 3 ligam v_2 a v_3?

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 35 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 18 \times 2 + 35 \times 5 = 211.$$

(d) Mostre que o grafo é bipartido indicando uma bipartição do conjunto dos vértices. $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} = V_1 \cup V_2$ *onde* $V_1 = \{v_1, v_2\}$ *e* $V_2 = \{v_3, v_4, v_5\}$ *são conjuntos de vértices disjuntos e toda a aresta em E é constituída por um vértice de V_1 e um vértice de V_2. Basta analisar a diagonal e a parte acima da diagonal da matriz A. De facto analisando a diagonal e a parte acima da diagonal da matriz A, G não tem lacetes porque a diagonal de A é constituída apenas por zeros, v_3, v_4, v_5 são vértices dois a dois não adjacentes porque as entradas* $(3, 4), (3, 5)$ *e* $(4, 5)$ *da matriz A são nulas, e v_1 e v_2 também não são adjacentes porque a entrada* $(1, 2)$ *de A é nula.*