Resolução dos exercícios da Folha 2 não resolvidos nas aulas

1. X pode tomar os valores 0, 1 e 2. Consideremos os acontecimentos:

A: "a componente A funciona"

B: "a componente B funciona"

Estes acontecimentos são independentes e tem-se $P(\overline{A}) = 0.1$ e $P(\overline{B}) = 0.05$, pelo que $P(A) = 0.9$ e $P(B) = 0.95$. Então

- $P(X = 0) = P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A})\, P(\overline{B}) = 0.005$, porque $\overline{A}$ e $\overline{B}$ são independentes;
- $P(X = 1) = P\left((A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)\right) = P(A)\, P(\overline{B}) + P(\overline{A})\, P(B) = 0.14$, porque $(A \cap \overline{B}) \cap (\overline{A} \cap B) = \emptyset$ e pela independência;
- $P(X = 2) = P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0.855$.

Note-se que $P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 1$. Então X é uma v.a. discreta de suporte $S_X = \{0, 1, 2\}$ e função de probabilidade dada por $f_X(x) = P(X = x) = \begin{cases} 0.005, & x = 0 \\ 0.14, & x = 1 \\ 0.855, & x = 2 \\ 0, & x \in \mathbb{R} \backslash \{0, 1, 2\} \end{cases}$

2.a) X é uma v.a. discreta com suporte $S_X = \{1, 2, 3, 4\}$, sendo a sua f.d. dada por
$\forall x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = \displaystyle\sum_{a \in]-\infty, x] \cap S_X} P(X = a)$.

Concretamente:

- $x < 1 \Rightarrow]-\infty, x] \cap S_X = \emptyset \Rightarrow F_X(x) = 0$
- $1 \leq x < 2 \Rightarrow]-\infty, x] \cap S_X = \{1\} \Rightarrow F_X(x) = P(X = 1) = f_X(1) = 0.1$
- $2 \leq x < 3 \Rightarrow]-\infty, x] \cap S_X = \{1, 2\} \Rightarrow F_X(x) = P(X = 1) + P(X = 2) = f_X(1) + f_X(2) = 0.3$
- $3 \leq x < 4 \Rightarrow]-\infty, x] \cap S_X = \{1, 2, 3\} \Rightarrow F_X(x) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 0.6$
- $x \geq 4 \Rightarrow]-\infty, x] \cap S_X = S_X \Rightarrow F_X(x) = P(X \in S_X) = 1$

Assim,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 0.1, & 1 \leq x < 2 \\ 0.3, & 2 \leq x < 3 \\ 0.6, & 3 \leq x < 4 \\ 1, & x \geq 3 \end{cases}$$

2.b) Valor médio de X:

$$E(X) = \sum_{x \in S_X} x\, P(X = x) = P(X = 1) + 2P(X = 2) + 3P(X = 3) + 4P(X = 4) = 3$$

Desvio padrão de X:

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{E(X^2) - (E(X))^2}$$

Tem-se

$$E(X^2) = \sum_{x \in S_X} x^2\, P(X = x) = P(X = 1) + 2^2 P(X = 2) + 3^2 P(X = 3) + 4^2 P(X = 4) = 10,$$

pelo que

$$\sigma_X = \sqrt{10 - 3^2} = 1$$

4.a) Como $S_X = \{-1, 1, 2\}$, tem-se

$$P(X=-1)+P(X=1)+P(X=2)=1 \Leftrightarrow P(X=2)=0.3.$$

A f.d. de X é dada por

$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \displaystyle\sum_{a \in]-\infty, x] \cap S_X} P(X=a).$

Concretamente:

- $x < -1 \Rightarrow]-\infty, x] \cap S_X = \emptyset \Rightarrow F_X(x) = 0$
- $-1 \leq x < 1 \Rightarrow]-\infty, x] \cap S_X = \{-1\} \Rightarrow F_X(x) = P(X=-1) = 0.4$
- $1 \leq x < 2 \Rightarrow]-\infty, x] \cap S_X = \{-1, 1\} \Rightarrow F_X(x) = P(X=-1)+P(X=1) = 0.7$
- $x \geq 2 \Rightarrow]-\infty, x] \cap S_X = S_X \Rightarrow F_X(x) = P(X \in S_X) = 1$

Assim,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ 0.4, & -1 \leq x < 1 \\ 0.7, & 1 \leq x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

4.c) Na alínea b), obtém-se $E(X) = 0.5$. Então $Y = |X - 0.5|$, pelo que

- $X = -1 \Rightarrow Y = 1.5$
- $X = 1 \Rightarrow Y = 0.5$
- $X = 2 \Rightarrow Y = 1.5$

Portanto, o suporte de Y deverá ser $\{0.5, 1.5\}$.

$$\begin{aligned} P(Y=0.5) &= P(|X-0.5| = 0.5) = P(X-0.5 = -0.5 \vee X - 0.5 = 0.5) \\ &= P(X=0) + P(X=1) = 0 + 0.3 = 0.3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(Y=1.5) &= P(|X-0.5| = 1.5) = P(X-0.5 = -1.5 \vee X - 0.5 = 1.5) \\ &= P(X=-1) + P(X=2) = 0.4 + 0.3 = 0.7 \end{aligned}$$

Confirma-se que $S_Y = \{0.5, 1.5\}$, uma vez que $P(Y=0.5)+P(Y=1.5)=1$ (com $P(Y=0.5)>0$ e $P(Y=1.5)>0$). A função de probabilidade de Y é dada por

$$f_Y(y) = P(Y=y) = \begin{cases} 0.3, & y = 0.5 \\ 0.7, & y = 1.5 \\ 0, & y \in \mathbb{R} \backslash \{0.5, 1.5\} \end{cases}$$

5.a) Percentil 70 de X é todo o número real x tal que $F_X(x^-) \leq 0.7$ e $F_X(x) \geq 0.7$. Tem-se

- $F_X(0^-) = 0.05 < 0.7$ e $F_X(0) = 0.7$
- $F_X(1^-) = 0.7$ e $F_X(1) = 0.9 > 0.7$
- $\forall x \in]0,1[,\ F_X(x^-) = 0.7$ e $F_X(x) = 0.7$

Então, todos os valores do intervalo $[0,1]$ verificam a definição de percentil 70 de X. Não há outros valores que verifiquem a definição, porque, se $x < 0$, então falha a segunda condição da definição; se $x > 1$, então falha a primeira condição da definição. Assim, todos os valores do intervalo $[0,1]$ são percentil 70 de X e não há outros valores nessas condições.

Terceiro quartil de X é todo o número real x tal que $F_X(x^-) \leq 0.75$ e $F_X(x) \geq 0.75$. Tem-se $F_X(1^-) = 0.7 < 0.75$ e $F_X(1) = 0.9 > 0.75$. Portanto, $x = 1$ verifica a definição de terceiro quartil de X. Não há outros valores que verifiquem a definição, porque, se $x < 1$, então falha a segunda condição da definição; se $x > 1$, então falha a primeira condição da definição. Conclui-se deste modo que o terceiro quartil de X é único e igual a 1 ($Q_3 = 1$).

5.c) Na alínea b) concluiu-se que a função de probabilidade de X é dada por

$$f_X(x) = P(X = x) = \begin{cases} 0.05, & x = -1 \\ 0.65, & x = 0 \\ 0.2, & x = 1 \\ 0.1, & x = 2 \\ 0, & x \in \mathbb{R} \backslash \{-1, 0, 1, 2\} \end{cases}$$

Então

$$\begin{aligned} P(0 \leq X < 2/X \geq 0) &= \frac{P(\{0 \leq X < 2\} \cap \{X \geq 0\})}{P(X \geq 0)} = \frac{P(0 \leq X < 2)}{P(X \geq 0)} \\ &= \frac{P(X = 0) + P(X = 1)}{P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)} = \frac{0.65 + 0.2}{0.65 + 0.2 + 0.1} = \frac{85}{95} = \frac{17}{19} \end{aligned}$$

Como alternativa, pode ser usada a função de distribuição para calcular as probabilidades:

$$\begin{aligned} P(0 \leq X < 2/X \geq 0) &= \frac{P(\{0 \leq X < 2\} \cap \{X \geq 0\})}{P(X \geq 0)} = \frac{P(0 \leq X < 2)}{1 - P(X < 0)} \\ &= \frac{P(X < 2) - P(X < 0)}{1 - P(X < 0)} = \frac{F_X(2^-) - F_X(0^-)}{1 - F_X(0^-)} \\ &= \frac{0.9 - 0.05}{1 - 0.05} = \frac{85}{95} = \frac{17}{19} \end{aligned}$$

5.e) Desvio padrão de X: $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$, com $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.

$E(X) = \sum_{x \in S_X} xP(X = x) = (-1) \times 0.05 + 0 + 0.2 + 2 \times 0.1 = 0.35$ (já calculado na alínea d).)

$E(X^2) = \sum_{x \in S_X} x^2 P(X = x) = (-1)^2 \times 0.05 + 0 + 0.2 + 2^2 \times 0.1 = 0.65$

Então $V(X) = 0.65 - (0.35)^2 = 0.5275$, pelo que $\sigma_X = \sqrt{0.5275}$.

O momento simples de ordem 3 de X corresponde a $E(X^3)$.

$E(X^3) = \sum_{x \in S_X} x^3 P(X = x) = (-1)^3 \times 0.05 + 0 + 0.2 + 2^3 \times 0.1 = 0.95$.

7.b) Consideremos a v.a.

$X =$"número de peças defeituosas entre as n selecionadas (com reposição)"

Os resultados das tiragens são independentes (tiragens com reposição) e a probabilidade de sair uma peça defeituosa em cada tiragem é 0.02.

Então $X \sim \mathcal{B}(n, 0.02)$.

Pede-se o maior valor de n tal que $P(X \geq 1) < 0.05$.

Tem-se $P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - {}^n\mathcal{C}_0\,(0.02)^0\,(0.98)^{n-0} = 1 - (0.98)^n$.

Assim,

$P(X \geq 1) < 0.05 \Leftrightarrow (0.98)^n > 0.95 \Leftrightarrow \ln(0.98)^n > \ln 0.95 \Leftrightarrow n \ln 0.98 > \ln 0.95 \Leftrightarrow n < \frac{\ln 0.95}{\ln 0.98} \simeq 2.54$, pelo que o maior valor de n nas condições indicadas no enunciado é 2.

Nota: na resolução da inequação em ordem a n, usou-se o facto de se ter $\ln 0.98 < 0$.

9. Consideremos a v.a.

$X =$"número de embalagens com menos de 2 kg entre as 10 analisadas"

Tem-se $X \sim \mathcal{H}(10, 50, 8)$ (tiragens sem reposição). Então

$$P(X = x) = \frac{{}^{8}\mathcal{C}_x \; {}^{42}\mathcal{C}_{10-x}}{{}^{50}\mathcal{C}_{10}}, \quad x \in \{0, 1, ..., 8\}.$$

Pede-se $P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1))$, porque $S_X = \{0, 1, ..., 8\}$. Assim,

$$P(X \geq 2) = 1 - \frac{{}^{42}\mathcal{C}_{10} + 8 \times {}^{42}\mathcal{C}_9}{{}^{50}\mathcal{C}_{10}} \simeq 0.5095.$$

10.a(i) Considerem-se os acontecimentos

$D =$"o chip é defeituoso"
$A =$"o chip é aprovado na inspeção"

Tem-se $P(A/D) = 0.02,\ P(A/\overline{D}) = 0.97,\ P(A) = 0.9225$. Pede-se $P(D)$.

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap (D \cup \overline{D})) \;=\; P(A \cap D) + P(A \cap \overline{D}) \\ &= P(A/D)\, P(D) + P(A/\overline{D})\, P(\overline{D}) \\ &= P(A/D)\, P(D) + P(A/\overline{D})\, (1 - P(D)) \\ &= 0.02\, P(D) + 0.97 - 0.97\, P(D), \end{aligned}$$

o que é equivalente a

$$0.9225 = 0.97 - 0.95\, P(D) \Leftrightarrow P(D) \;=\; 0.05.$$

10.a(ii) $P(D \cup \overline{A}) = P(D) + P(\overline{A}) - P(D \cap \overline{A}) = 0.05 + 1 - 0.9225 - (P(D) - P(D \cap A)) = 0.0785$, atendendo a que $P(D \cap A) = P(A/D)\, P(D) = 0.02 \times 0.05 = 0.001$.

12.a(vi) $P(2 \leq X < 5) = P(1 < X \leq 4)$: igual a (iv)

12.a(vii) $P(1 < X < 5) = P(1 < X \leq 4)$: igual a (iv)

12.b(ii) Seja $Y =$"número de períodos, em 5, nos quais não são emitidas partículas".

Pede-se $P(Y \geq 1)$.

A emissão de partículas processa-se de forma independente e a probabilidade de não serem emitidas partículas num período de 10 segundos é $P(X = 0) = 0.1353$ (recorde-se que $X \sim \mathcal{P}(2)$).

Então $Y \sim \mathcal{B}(5, 0.1353)$, pelo que

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y < 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - {}^{5}\mathcal{C}_0\, (0.1353)^0\, (1 - 0.1353)^{5-0} \simeq 0.5166.$$