Lic.ª Eng. Informática 06/01/2021 **Frequência - Estruturas Discretas** *Duração: 1h30m*

Nome completo:

Número de estudante:

> Nas questões **3**, **4** e **5 justifique** convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos.

Nota: $C(n,k)$ *e* $\binom{n}{k}$ *denotam o mesmo número.*

1. Em cada alínea, assinale, com uma cruz **X**, **todas** as opções correctas. (**V** significa afirmação verdadeira, **F** afirmação falsa.)

   (a) $mdc(127998, 127999) = 1$.

V	**F**
X	

   $1 = 127999 + (-1)127998 \Rightarrow mdc(127998, 127999) = 1$

   (b) O número de sequências binárias (palavras no alfabeto 0 e 1) de comprimento 15, nas quais a primeira entrada é 1 e o número de zeros é exactamente igual a 9, é

   $\binom{14}{9}$ [X] $\binom{14}{5}$ [X] *nenhuma das anteriores* [ ]

   `A palavra tem comprimento 15 e como a primeira entrada é igual 1, ficam disponíveis 14 entradas para colocar 9 zeros. O número de maneiras de colocar esses 9 zeros é equivalente ao número de maneiras de escollher 9 entradas de entre 14 para colocar esses zeros ficando as restantes 5 posições para serem ocupadas por 1's. O número de maneiras de escolher 9 posições de entre 14 é` $\binom{14}{9}$ `o qual é o mesmo que o número de maneiras de escolher 5 posições para colocar os 1's de entre 14 posições` $\binom{14}{5}$.

   (c) O número de arestas do grafo completo K_n é

   $n-1+\binom{n-1}{2}$ [X] $\frac{n(n+1)}{2}$ [ ] $\sum_{i=1}^{n-1} i$ [X]

   grafo K_n é o grafo completo com n vértices. Isto é, é um grafo simples com n vértices onde dois quaisquer vértices distintos formam uma aresta. O número total de arestas de K_n é igual ao número de subconjuntos com dois elementos que podemos formar num conjunto V com n vértices. Isto é, $\binom{n}{2}$. Temos as seguintes igualdades:

   $$\binom{n}{2} = \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} = n-1+\binom{n-1}{2} = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}.$$

2. Indique,

   (a) na caixa à direita, o coeficiente de $x^{126}y^{200}$ no desenvolvimento de $(x+y)^{326}$.

   $\boxed{\binom{126+200}{200} = \binom{126+200}{126} = \frac{326!}{126!200!}}$

   $$(x+y)^{326} = \sum_{i=0}^{326} \binom{326}{i} x^i y^{326-i}$$

(b) no espaço a tracejado, a soma

$$\sum_{i=0}^{326}(-1)^i\binom{326}{i}=0$$

Do binómio de Newton com $y=1$, temos $(x+1)^{326}=\sum_{i=0}^{326}\binom{326}{i}x^i1^{326-i}=\sum_{i=0}^{326}\binom{326}{i}x^i$,

e fazendo agora $x=-1$, obtemos $0=(-1+1)^{326}=\sum_{i=0}^{326}\binom{326}{i}(-1)^i=\sum_{i=0}^{326}(-1)^i\binom{326}{i}$.

(c) na caixa à direita, o número de soluções (x_1,x_2,x_3,x_4), em inteiros positivos, da equação $x_1+x_2+x_3+x_4=19$.

$$\overline{C}(4,15)=C(18,3)=\binom{15+4-1}{15}=\binom{15+4-1}{4-1}=\binom{18}{3}=\binom{18}{15}=\frac{18!}{3!15!}=\frac{18.17.16}{3!}=\frac{2.3^2.17.16}{3!}=3.17.16=816$$

O número de soluções (x_1,x_2,x_3,x_4) em inteiros positivos da equação $x_1+x_2+x_3+x_4=19$ é o mesmo que o número de soluções (x_1,x_2,x_3,x_4) em inteiros da equação $x_1+x_2+x_3+x_4=19$ sujeita a $x_1\geq 1,x_2\geq 1,x_3\geq 1,x_4\geq 1$.

Ou seja, escrevendo $x_i=y_i+1$ com $y_i\geq 0$, para $i=1,2,3,4$, temos $y_1+1+y_2+1+y_3+1+y_4+1=19$ sujeita a $y_i\geq 0$, $i=1,2,3,4$. Portanto, o número de soluções (x_1,x_2,x_3,x_4), em inteiros positivos, da equação $x_1+x_2+x_3+x_4=19$. é o mesmo que o número de soluções em inteiros (y_1,y_2,y_3,y_4) não negativos da equação $y_1+1+y_2+1+y_3+1+y_4+1=19\Leftrightarrow y_1+y_2+y_3+y_4=19-4=15$.

O número de soluções (y_1,y_2,y_3,y_4) em inteiros não negativos da equação $y_1+y_2+y_3+y_4=15$ é igual ao número de palavras de comprimento 15+3 no alfabeto $\{+,1\}$ com exactamente 3, +'s e 15, 1's. Ou seja, $\binom{15+3}{3}=\binom{15+3}{15}$.

Alternativamente, é o número de maneiras de distribuir 19 bolas iguais por 4 caixas distintas colocando pelo menos 1 bola em cada caixa. Comecemos então por colocar 1 bola em cada caixa. Sobram 15 bolas iguais para distribuir por 4 caixas distintas. Portanto, é o mesmo que o número de maneiras de distribuir 15 bolas iguais por 4 caixas distintas.

3. (a) Resolva a congruência $8x\equiv_{23}-8$ em $\mathbb{Z}$.

O inverso de 8 em $\mathbb{Z}_{23}$ é 3: $3\times 8=24\equiv_{23}1$. Então $8x\equiv_{23}-8\Leftrightarrow 3\times 8x\equiv_{23}3\times(-8)\Leftrightarrow x\equiv_{23}-1$. O conjunto das soluções em $\mathbb{Z}$ é $\{-1+23k:k\in\mathbb{Z}\}$.

(b) Descodifique a mensagem "GVU", que foi encriptada com a função

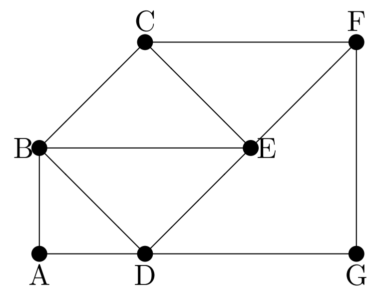
$$f(p)=(8p+8)\bmod 23,$$

identificando as 23 letras do alfabeto pelos inteiros $0,1,2,\ldots,22$ (como mostra a figura).

A função descodificadora é dada por $f^{-1}(p)=3p-1 \bmod 23$. A mensagem descodificada é ''SOL''.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	X	Z
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22

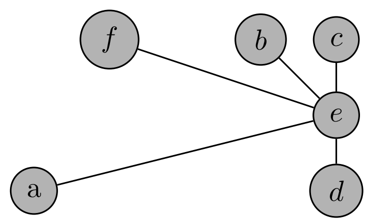
4. (a) O grafo



é semieuleriano. Justifique. Acrescente um número mínimo de arestas de modo a que o grafo resultante seja euleriano.

O grafo é semieuleriano porque é conexo e existem exactamente dois vértices, C e F, de grau ímpar: C e F têm grau 3. Basta acrescentar a aresta $\{C, F\}$ a G para os vértices C e F terem grau 4, par, e deste modo obter um grafo conexo com todos os vértices de grau par, ou seja , euleriano.

(b) (i) O grafo abaixo é uma árvore?



Sim, é um grafo conexo e sem ciclos, logo é uma árvore.

(ii) O grafo em (i) é bipartido completo? Caso seja, exiba uma bipartição.

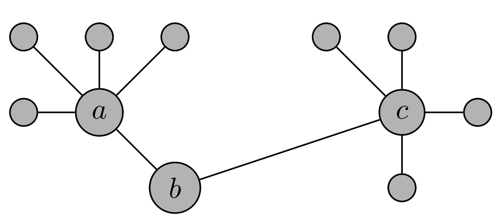
O grafo é bipartido com a seguite bipartição dos vértices:
$\{a, b, c, d, e, f\} = \{e\} \cup \{a, b, c, d, f\}$ existindo apenas arestas do vértice e para cada um dos restantes vértices $\{a, b, c, d, f\}$, e exactamente uma aresta entre esses pares de vértices, $\{\{e, a\}, \{e, b\}, \{e, c\}, \{e, d\}, \{e, f\}\}$. Logo, o grafo é o grafo bipartido completo, $K_{1,5}$.

(c) Pode haver uma árvore com 11 vértices sendo dois deles de grau 5?

Pelo Lema dos apertos de mão: $2 \times 5 + \sum_{i=1}^{9} g(v_i) = 2(11 - 1) = 20 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{9} g(v_i) = 10$

Restam 10 unidades de grau para distruibuir por 9 vértices. Algebricamente, podemos ter a seguinte distribuição: 8 vértices de grau 1 e 1 vértice de grau 2, $1+1+1+1+1+1+1+1+2 \times 1 = 10$, Ou seja, temos a seguinte distribuição dos graus pelos $\mathbf{11} = \mathbf{2}+\mathbf{8}+\mathbf{1}$ vértices, $\mathbf{2}\times 5+\mathbf{8}\times 1+\mathbf{1}\times 2 = 20$. Existe alguma árvore nestas condições? Isto é, uma árvore com 2 vértices de grau 5, 8 vértices de grau 1, e 1 vértice de grau 2?

Sim, por exemplo,



5. Quantos divisores de 130×231 têm exactamente 4 factores na sua factorização em primos?

Consideremos a factorização em primos $130\times 231 = 13\times 10\times 231 = 13\times 2\times 5\times 3\times 7\times 11$. Os primos que aparecem na factorização em primos de 130×231 são $2, 3, 5, 7, 11, 13$, cada um com multiplocidade 1. Todo o divisor de 130×231 com 4 factores primos será constituído por 4 elementos escolhidos no conjunto $\{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$. Assim o número de divisores de 130×231 com 4 factores primos é $\binom{6}{2} = \binom{6}{4} = 5.6/2 = 15$.

Cotação:

1) 0.5+0.5+0.5

2) 0.6+0.7+0.7

3) 2.25

4) 1+1+1

5) 1.25