Contagem

1. Quantas cadeias de bits de comprimento sete existem?

2. Numa determinada linguagem de computação, o nome das variáveis é uma palavra com um ou dois caracteres alfanuméricos, onde as letras maiúsculas e minúsculas não são distinguidas (um caracter *alfanumérico* é uma das 26 letras do alfabeto inglês ou um dos 10 algarismos). Além disso, o nome deve começar por uma letra e deve ser diferente de cinco cadeias de dois caracteres reservados para comandos de programação. Com quantas variáveis diferentes poderemos trabalhar?

3. A *password* de um computador é formada por uma letra seguida de 3 ou 4 algarismos. Qual é o número total de *passwords* que é possível formar?

4. A um número como 19977991, que lido da direita para a esquerda, coincide com o número original, chama-se *capicua*. Quantas capicuas de 7 algarismos, com 4 algarismos diferentes, existem?

5. Chamemos *número simples* a um número inteiro positivo formado apenas pelos algarismos 1 ou 2 (ou ambos). Quantos números simples existem, inferiores a um milhão?

6. De quantas maneiras podemos seleccionar 4 jogadores, a partir de uma equipa de 10 jogadores, para jogarem 4 jogos de ténis, sendo os jogos ordenados?

7. Calcule o número de equipas de 8 jogadores que é possível formar com 3 portugueses e não mais do que 2 brasileiros, escolhidos entre 10 portugueses, 10 brasileiros e 10 espanhóis.

8. Quantos números de 3 algarismos se podem formar com os algarismo 1,2,3,4,5,6:

   (a) sem repetição de algarismos? (b) podendo haver repetição de algarismos?

   (c) de modo que sejam pares? (d) de modo que sejam pares e constituídos por algarismos distintos?

9. Aplicando os princípios da adição e/ou da multiplicação determine:

   (a) quantos números de 4 algarismos se podem formar com os algarismos $1, 2, \ldots, 9$, de modo que nenhum deles tenha algarismos repetidos e todos contenham o algarismo 5.

   (b) quantos números maiores do que 500 se podem formar com 3 algarismos, nos quais o primeiro algarismo é diferente do último.

10. Em cada uma das alíneas seguintes responda com uma das seguintes alternativas:

    $$C(7,3), \overline{C}(7,3), P(7,3), \overline{P}(7,3).$$

    De quantas maneiras diferentes podemos distribuir 3 bolas iguais, coloridas, por 7 caixas diferentes (numeradas de 1 a 7) se:

    (a) as bolas forem todas da mesma cor e for possível colocar mais do que uma bola em cada caixa.

    (b) as bolas forem todas da mesma cor e não for possível colocar mais do que uma bola em cada caixa.

    (c) as bolas forem todas de cores diferentes e for possível colocar mais do que uma bola em cada caixa.

(d) as bolas forem todas de cores diferentes e não for possível colocar mais do que uma bola em cada caixa.

11. Quantas funções existem de um conjunto com m elementos para um conjunto de n elementos? Quantas delas são injectivas?

12. Com um alfabeto com 11 consoantes e 4 vogais, quantas sequências de 6 letras podemos formar:

    (a) que contenham exactamente uma vogal?

    (b) que contenham exactamente duas vogais?

13. Calcule:

    (a) $C(11, 3)$ e $\overline{C}(4, 8)$.

    (b) o coeficiente de x^3y^8 no desenvolvimento de $(x + y)^{11}$.

    (c) o número de maneiras de distribuir 8 bolas iguais por 4 caixas numeradas $1, 2, 3, 4$.

    (d) o número de soluções inteiras não negativas (para x_1, x_2, x_3, x_4) da equação $x_1+x_2+x_3+x_4 = 8$.

14. O Departamento de Criptografia dos Serviços Secretos foi encarregado de encriptar uma mensagem que será enviada ao seu agente secreto ABC. A mensagem a transmitir é composta por 12 símbolos distintos mais 45 espaços em branco iguais.

    Quantas mensagens diferentes (de comprimento 57) podem ser formadas com esses 12 símbolos e 45 espaços em branco?

    (Note que a mensagem pode começar ou terminar com espaços em branco.)

15. Se os conjuntos A e B têm, respectivamente, 6909 e 1107 elementos, e $A \cap B$ tem 225 elementos, quantos elementos possui $A \cup B$?

16. Calcule o cardinal do conjunto S, sabendo que os conjuntos $S \cup T$, T e $S \cap T$ têm, respectivamente, 36, 19 e 8 elementos.

17. O Clube Pitágoras tem 100 sócios do sexo feminino e 80 sócios do sexo masculino. O Clube Euclides tem 80 sócios do sexo feminino e 100 sócios do sexo masculino. Existem exactamente 60 raparigas que são sócias de ambos os clubes. O número total de pessoas que pertencem a pelo menos um dos clubes é igual a 230. Quantos rapazes são sócios do Clube Pitágoras e não são sócios do Clube Euclides?

18. Seja $X = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$

    (a) Quantos elementos de X são divisíveis por 2?

    (b) Quantos elementos de X são divisíveis por 3?

    (c) Quantos elementos de X são divisíveis por 5?

    (d) Quantos elementos de X não são divisíveis por 2, nem por 3 e nem por 5?

19. Uma pessoa escreveu 5 cartas diferentes a 5 amigos e fechou-as nos envelopes sem reparar que os envelopes já tinham os endereços escritos. Qual é a probabilidade de:

    (a) nenhuma carta corresponder ao envelope onde foi colocada?

    (b) exactamente 2 amigos receberem as cartas que lhes eram destinadas?

20. Qual é a probabilidade de um inteiro entre 1 e 10000, escolhido ao acaso, não ser quadrado perfeito nem cubo perfeito?

21. Seja $a_{n+1} - ca_n = 0$ ($n \geq 0$) uma relação de recorrência. Sabendo que $a_3 = 153/49$ e $a_5 = 1377/2401$, determine c.

22. Suponha que tem um robô capaz de dar passos de um ou de dois metros. Exprima por meio de uma relação de recorrência o número p_n de modos diferentes que o robô possui para percorrer n metros.

23. Uma pessoa deposita 1000 Euros numa conta a prazo, com juro anual de 4%.

    (a) Determine uma relação de recorrência para o valor existente na conta ao fim de n anos.

    (b) Determine uma fórmula explícita para esse valor.

    (c) Quanto dinheiro terá a conta ao fim de 100 anos ?

24. Recorde que a sucessão de Fibonacci se define recursivamente por: $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, e $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$ para $n \geq 2$.

    (a) Determine $f(3)$.

    (b) Mostre que para todo o $n \geq 1$ se verifica a igualdade $f(4n) = 3f(4n-3) + 2f(4n-4)$.

    (c) Prove, usando o princípio de indução matemática, que $f(4n)$ é múltiplo de 3 para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

25. Num determinado algoritmo, o valor de uma variável s vai variando de acordo com a seguinte regra: em cada passo n ($n \geq 2$), o valor de s (que denotamos por s_n) é igual ao dobro do valor de s dois passos antes menos o valor de s no passo anterior.

    (a) Sabendo que $s_0 = 1$ e $s_1 = 2$, enumere os primeiros 6 valores da sequência $(s_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$.

    (b) Determine (de forma explícita) o valor de s_n para qualquer n.

    (c) E se $s_0 = s_1 = 1$, qual é o valor de s_n?

26. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja a_n o número de sequências ordenadas com elementos iguais a 1 ou 2 cuja soma é igual a n. Determine a_n para qualquer $n \in \mathbb{N}$.