Aula #4 - 30/09/2022

Departamento de Engenharia Informática da Universidade de Coimbra

Estruturas Discretas 2022/23 $\boxed{\text{Folha 1 - TP}}$

Lógica proposicional

18. Demonstre a utilidade do método de Quine na averiguação se a fbf seguinte é uma tautologia, contradição ou contingência:

$$A = (p \to q) \to (p \vee r \to q \vee r).$$

$$\begin{aligned}
A(r/V) &= (p \to q) \to (p \vee V \to q \vee V) \\
&\equiv (p \to q) \to (V \to V) \\
&\equiv (p \to q) \to V \\
&\equiv V
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A(r/F) &= (p \to q) \to (p \vee F \to q \vee F) \\
&\equiv (p \to q) \to (p \to q) \\
&\equiv V
\end{aligned}$$

$s \to s \equiv \neg s \vee s \equiv V$

Como $A(r/V)$ e $A(r/F)$ são tautologias, concluimos que a fbf A é uma tautologia.

Note que se usar o método de Quine nas variáveis p ou q a prova não é tão imediata:

$$\begin{aligned}
A(q/V) &= (p \to V) \to (p \vee r \to V \vee r) \\
&\equiv V \to (p \vee r \to V) \\
&\equiv V \to V \\
&\equiv V
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A(q/F) &\equiv (p \to F) \to (p \vee r \to F \vee r) \\
&\equiv \neg p \to (p \vee r \to r) \\
&\equiv p \vee (p \vee r \to r) \\
&\equiv p \vee (\neg(p \vee r) \vee r) \\
&\equiv (p \vee r) \vee \neg(p \vee r) \\
&\equiv V
\end{aligned}$$

associatividade e comutatividade da $\vee$

lei do terceiro excluido

21. Verifique se o argumento seguinte está correcto (isto é, se a conclusão é logicamente implicada pela conjunção das hipóteses).

Se o orçamento não for cortado, uma condição necessária e suficiente para os preços permanecerem estáveis é que os impostos sejam aumentados. Os impostos serão aumentados somente se o orçamento não for cortado. Se os preços permanecerem estáveis, os impostos não serão aumentados. Portanto os impostos não serão aumentados.

p = "corta-se o orçamento"
q = "preços estáveis"
r = "impostos aumentam"

Relembra
$p \to q$
p só se q

1. $\neg p \to (q \leftrightarrow r)$
2. $r \to \neg p$
3. $q \to \neg r$

---

4. $\neg r$

O argumento é lógico se a implicação:

$$A = \boxed{(\neg p \to (q \leftrightarrow r)) \wedge (r \to \neg p) \wedge (q \to \neg r) \to \neg r}$$

for uma tautologia.

Vamos usar o método de Quine:

$$A(r/_V) = (\neg p \to (q \leftrightarrow V)) \wedge (V \to \neg p) \wedge (q \to F) \to F$$
$$\equiv (\neg p \to q) \wedge \neg p \wedge \neg q \to F$$
$$\equiv \neg((\neg p \to q) \wedge \neg p \wedge \neg q)$$
$$\equiv \neg(p \vee q) \vee p \vee q$$
$$\equiv \neg(p \vee q) \vee (p \vee q)$$
$$\equiv V$$

Não esqueças
$p \to V \equiv V$
$V \to p \equiv p$
$p \to F \equiv \neg p$
$F \to p \equiv V$

$$A(r/_F) = (\neg p \to (q \leftrightarrow F)) \wedge (F \to \neg p) \wedge (q \to V) \to V$$
$$\equiv V$$

Como $A(r/_V)$ e $A(r/_F)$ são tautologias, concluimos que a fbf A é uma tautologia.

22. Decida se $p \vee \neg s$ é consequência tautológica das premissas $p \vee \neg q$, $q \vee r$ e $r \vee s$.

Temos de averiguar se a fbf

$$A = (p \vee \neg q) \wedge (q \vee r) \wedge (r \vee s) \longrightarrow p \vee \neg s$$

é ou não uma tautologia.

Vamos usar o método de Quine:

$$A_{(r/V)} \equiv (p \vee \neg q) \wedge \underbrace{(q \vee V)}_{V} \wedge \underbrace{(r \vee V)}_{V} \longrightarrow p \vee \neg s$$

$$\equiv p \vee \neg q \longrightarrow p \vee \neg s$$

$$\equiv \neg(p \vee \neg q) \vee p \vee \neg s$$

$$\equiv (\neg p \wedge q) \vee p \vee \neg s$$

$$\equiv (\neg p \vee p) \wedge (q \vee p) \vee \neg s$$

$$\equiv V \wedge (q \vee p) \vee \neg s$$

$$\equiv q \vee p \vee \neg s$$

Podemos concluir que A não é uma tautologia pois A é falsa quando

$$\begin{cases} r \equiv V \\ p \equiv F \\ q \equiv F \\ s \equiv V \end{cases}$$

23. Encontre uma fórmula restrita (isto é, contendo apenas os conectivos $\neg$, $\wedge$ e $\vee$) correspondente à função de verdade $f(p,q,r)$ dada pela tabela

p	q	r	$f(p,q,r)$	Partes FND	Partes FNC
V	V	V	V	$p \wedge q \wedge r$	
F	V	V	F		$p \vee \neg q \vee \neg r$
V	F	V	F		$\neg p \vee q \vee \neg r$
F	F	V	F		$p \vee q \vee \neg r$
V	V	F	F		$\neg p \vee \neg q \vee r$
F	V	F	F		$p \vee \neg q \vee r$
V	F	F	V	$p \wedge \neg q \wedge \neg r$	
F	F	F	F		$p \vee q \vee r$

Temos

$$f(p,q,r) = (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$$ FND

$$f(p,q,r) = (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$$ FND

forma normal disjuntiva

ou ainda

$$f(p,q,r) = (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee q \vee \neg r)$$
$$\wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee q \vee r)$$

FNC

forma normal conjuntiva

24. Seja f a função lógica dada pela tabela

p	q	r	$f(p,q,r)$	Partes FND	Partes FNC
F	F	F	F		$p \vee q \vee r$
F	F	V	V	$\neg p \wedge \neg q \wedge r$	
F	V	F	F		$p \vee \neg q \vee r$
F	V	V	F		$p \vee \neg q \vee \neg r$
V	F	F	V	$p \wedge \neg q \wedge \neg r$	
V	F	V	F		$\neg p \vee q \vee \neg r$
V	V	F	F		$\neg p \vee \neg q \vee r$
V	V	V	V	$p \wedge q \wedge r$	

(a) Determine a forma normal disjuntiva de f.

a) $f(p,q,r) = (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$
$\vee (p \wedge q \wedge r)$

(b) Determine a forma normal conjuntiva de f.

b) $f(p,q,r) = (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \vee (p \vee \neg q \vee \neg r)$
$\wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$