Производная функции в комбинаторике

Автор: Алибек Оразалин

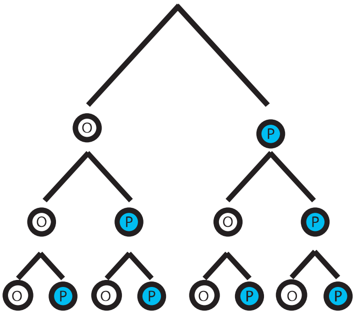
Редакторы: Азамат Атабаев, Наргиз Асқарбекқызы

Временами (на самом деле почти всегда) комбинаторика и алгебра переплетаются в нескольких аспектах, создавая нечто красивое. Одной из таких тем является производная функция. Конечно, большинство знакомых под этой темой представляют суммы бесконечных последовательностей и тому подобное, однако с помощью производных функций последовательностей можно алгебраически интерпретировать некоторые комбинаторные конструкции, и даже доказывать утверждения. В данной рубрике читетель немного (вот прям немного) может познакомиться с данной темой.

Всем известно определение многочлена - сумма x-в в каких то натуральных степенях с каким-то коэффициентом:

$$P(x)= a_n x^n + a_{(n-1)} x^{(n-1)} + \ldots + a_1 x + a_0,\ n \in N$$

Далее мы будем преобразовывать комбинаторные понятия в «язык полиномов». Разберем простой пример - подбрасывание монеты. Каждый раз мы получим либо орла, либо решку. Давайте мы подбросим монету 3 раза и наблюдать за итогом. Можно легко понять, что количество исходов с решкой, полученной три раза равно одному; два раза - трём; один раз - трём; ни разу не получить решку можно лишь одним исходом.



Решки	0	1	2	3
Исходы	1	3	3	1

Как бы преобразовать это в многочлен? Возьмем x^k за исход, в котором мы получим k решек. Тогда наш многочлен примет вид:

$$P(x)=1x^3+3x^2+3x+1x^0$$

Это, естественно, напоминает нам формулу раскрытия суммы кубов:

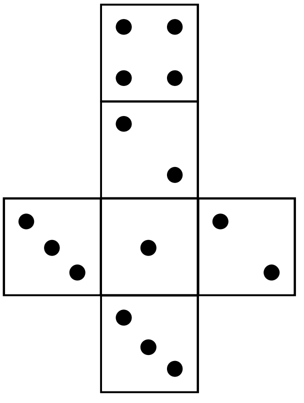
$$P(x)=(1+x)^3=(1+x)(1+x)(1+x)$$

Бинго! Теперь все имеет смысл в нашей расстановке. Единица в скобках отвечает за «орел», а x за «решку». Степень 3 это число подбрасываний монеты. Если бы мы подбросили монету n раз, то наши орлы и решки распределялись бы так:

$$Pn(x)=(1+x)^n$$

Казалось бы, такие многочлены нужны только для подсчета количества способов чего-либо. На самом деле, это далеко не так. Даже в простых примерах мы сможем найти достаточно интересные результаты.

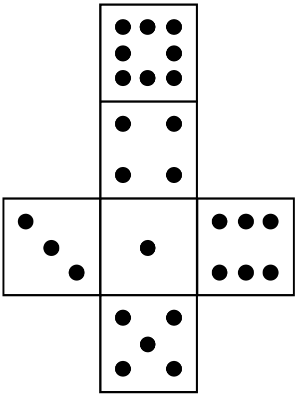
Игральные кости Зихермана (Sicherman's Dice)



Всем известно, что в настольных играх как «Монополия» фигурируют две игральные кости - в каждой по шесть граней с очками от одного до шести.

Вы кидаете кости и получаете определенные очки в кубиках, после чего суммируете числа. В целом, вы можете получить любой результат от двух до двенадцати, причем у каждого числа есть своя вероятность. Казалось бы, стандартные игральные кости должны быть в своем роде «уникальными».

Однако существует еще одна (причем ровно одна!) конфигурация чисел, что вероятность того, что вы получите такой же исход, одинакова. Проще говоря, если у вас вероятность получения k очков с помощью стандартных костей равна s(k), есть другая кость с такой же вероятностью.



Эти кости называются игральными костями Зихермана, с двумя разными кубиками, состоящий из чисел 1, 2, 2, 3, 3, 4 и 1, 3, 4, 5, 6, 8.

Интригующе, не так ли? Скажу более в этой рубрике, почему это так.

Если описать x^k как исход получения k очков после двух бросков игральных костей, то наш многочлен можно описать следующим образом:

$$P(x)=(x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)\times(x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)$$

то есть в первой и второй скобке мы можем «дать» иксу степень от одного до шести, что и задает наши очки. Далее будем делать, как ни странно, алгебраические преобразования. Поделим на скобки следующее выражение:

$$q(x)=(x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)$$

Можно отдельно сгруппировать по $x^1+x^2+x^3$ и получить:

$$q(x)=(x^1+x^2+x^3)(1+x^3)$$

Используя формулу сокращенного умножения:

$$q(x)=x(1+x+x^2)(1+x)(1-x+x^2)$$

Тогда,

$$P(x)=x^2(1+x+x^2)^2(1+x)^2(1-x+x^2)^2$$

Наша задача - привести нижнее выражение к виду, в котором P(x) равен произведению двух непостоянных многочленов с неотрицательными целыми коэффициентами:

$$P(x)=H(x)R(x)$$

У H(x) и R(x) сумма коэффициентов должна быть равна шести, ведь граней в кубе всего шесть. Хоть перебор будет нудным, но все же вышеупомянутые два замечания его уменьшат. Если вы попробуете сами, то убедитесь что единственным правильным разложением будет следующее:

$$H(x)=x(1+x)(1+x+x^2)$$

и

$$R(x)=x(1+x)(1+x+x^2)(1-x+x^2)^2$$

После раскрытия:

$$H(x)=x+2x^2+2x^3+x^4=x+x^2+x^2+x^3+x^3+x^4$$

и

$$R(x)=x+x^3+x^4+x^5+x^6+x^8$$

Итого:

$$P(x)=(x+x^2+x^2+x^3+x^3+x^4)\times(x+x^3+x^4+x^5+x^6+x^8)$$

Теперь нужно вернуть нашему многочлену комбинаторный смысл: он описывает два кубика с числами 1, 2, 2, 3, 3, 4 и 1, 3, 4, 5, 6, 8.

Бинго! Некоторые могут задасться вопросом - почему вероятности же одинаковые?

Очень просто - это один и тот же многочлен! Ведь если мы в обоих видах все раскроем, мы получим совпадающие полиномы.

Ура - теперь нам можно играть в Монополию с другими кубиками!

Постойте - в Монополии же правило о двойном ходе с дублем, который дает дополнительный ход - а в наших кубиках такого нет. Черт!

Опишем всю важность многочленов в данной задаче. Несмотря на то, что она комбинаторная и больше на вероятность, тем не менее без алгебраического представления в задаче было бы очень тяжело (с человеческой точки зрения) как найти другую конфигурацию кубиков, так и доказать ее. Нам бы пришлось разбирать каждый случай по разу без многочленов. А так, мы во много раз упростили задачу.

Такие исследование можно делать и со многими другими игральными вещами. Игральные тетраэдры, октаэдры и другие многогранники очень часто встречаются.

Вывод:

Это прекрасный пример переплетения комбинаторики с другим разделом математики.

На самом деле их очень много. Преобразование в векторное пространство или же в бинарную строку, и бесчисленное множество других тем.