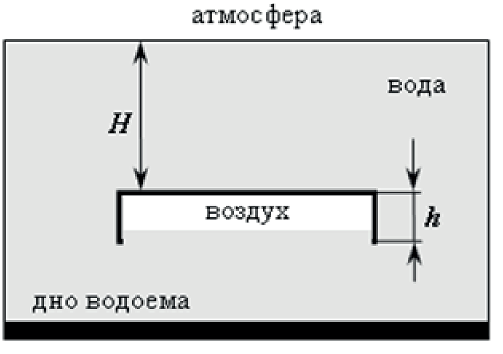
Пираты Карибского моря: масса мертвеца

Автор: Атабаев Азамат
Редактор: Олжабаев Асылбек

В погоне за кинематографичностью определенных сцен режиссеры иногда забывают о здравом смысле и простых законах физики (Sci-Fi здесь ни при чем). В этой статье мы ознакомимся с одним из таких примеров, который был настолько грубым, что организаторы Казахстанской Республиканской Олимпиады по физике в 2012 году включили его как задачу для 10 классов.

Вот и сама задача:

Задача 3. Пираты Карибского моря.



В приключенческом фильме «Пираты Карибского моря. Сундук мертвеца» два главных героя, капитан Джек Воробей и Уильям Тернер, прошли по дну водоема, используя следующий прием. Они перевернули лодку вверх дном и погрузили ее в воду, а затем использовали запертый воздух для дыхания под водой.

В данной задаче Вам предлагается проанализировать этот метод с физической точки зрения. Будем считать, что лодка прямоугольная, имеет поперечное сечение S=1.0 м^2, высоту h=0.50 м и массу m=30 кг. Дно лодки находится на расстоянии H=10 м от поверхности воды, плотность воды ρ_o=1000 кг/м^3, средняя плотность тела человека ρ=1036 кг/м^3, плотность дерева, из которого изготовлена лодка, $\rho_д$=700 кг/м^3, ускорение свободного падения g=9.80 м/с^2, универсальная газовая постоянная R=8.31 Дж/(моль·К), атмосферное давление p=1.01 X 10^5 Па, молярная масса воздуха μ=29 г/моль. Температуру всюду считайте одинаковой и равной T=293 К.

1. Найдите силу давления воды на дно лодки.
2. Найдите плотность воздуха внутри лодки.
3. Какой суммарной массой должны обладать капитан Джек Воробей и Уильям Тернер для того, чтобы они могли идти по дну водоема с такой лодкой?

Прежде чем мы перейдем к решению, я хотел бы предложить Вам попытаться решить эту задачу самим. Вы получите намного больше удовольствия от того, что решите сами, чем, если прочитаете объяснение.

Если у вас возникли трудности, не переживайте: сейчас пойдут подсказки, которые должны восполнить пробел в знаниях хотя бы для этой задачи.

Подсказки (по пунктам задачи):

1. Гидростатическое давление – это давление на дно столба жидкости, которое подчиняется следующей формуле: $p = g{\cdot}\rho{\cdot}h$, где g – ускорение свободного падения, ρ – плотность жидкости, h – высота столба жидкости.

   Аналогично это работает для столба газа в атмосфере, только плотность воздуха заметно меняется с высотой. Известно, однако, давление воздуха на поверхности Земли. Оно называется атмосферным давлением.

2. Идеальный газ в сосуде подчиняется следующему уравнению: $p{\cdot}V = n{\cdot}R{\cdot}T$ (уравнение Менделеева-Клапейрона), где p – давление газа (направлено во все стороны), V – объем сосуда, n – количество молей воздуха, R - универсальная газовая постоянная (R = 8,31 Дж/(моль·К)), T – температура в Кельвинах (для перевода из градусов Цельсия в Кельвины нужно прибавить 273,15).

   При погружении, чтобы компенсировать давление, воздух внутри лодки сожмется и поэтому внутрь лодки попадёт небольшой объем воды.

   Внутреннюю и внешнюю часть лодки можно рассмотреть как сообщающиеся сосуды (давление снаружи и внутри должно быть одинаково).

3. Чтобы лодка не утащила героев на дно и не подняла на поверхность, суммарная сила, действующая на лодку сверху и снизу, должна быть равна нулю. Здесь также нужно учитывать давление, которое было найдено в пункте 1. $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{S}$, где $\boldsymbol{F}$ – сила, $\boldsymbol{p}$ – давление, $\boldsymbol{S}$- площадь, которая находится под давлением.

Disclaimer: Сейчас вы увидите длинные трехэтажные формулы, однако не бойтесь их. Во время решения вам не обязательно постоянно расписывать каждую переменную. Вы можете делать промежуточные вычисления, чтобы было легче.

Решение:

1) Давление на глубине равно

$$p_{â} = p_0 + \rho g H \,, \tag{1}$$

а значит сила давления воды на дно лодки

$$F = p_{â} S = (p_0 + \rho g H) S = 2.0 \times 10^5 \text{ Н.} \tag{2}$$

2) Так как температура известна, то для определения плотности достаточно знать давление воздуха внутри лодки. В начальном состоянии до опускания лодки в воду воздух имеет давление $\boldsymbol{p_o}$ и занимает объем $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{Sh}$. По уравнению состояния Клайперона-Клаузиуса

$$p_0 S h = \nu R T \,, \tag{3}$$

где $\boldsymbol{\nu}$ - число молей.
Пусть при погружении лодки вверх дном вода попадёт внутрь лодки так, что воздух займёт некоторую высоту $\boldsymbol{x}$, меньшую $\boldsymbol{h}$. Тогда давление воздуха внутри лодки равно

$$p = p_0 + \rho_0 g (H + x) \tag{4}$$

и воздух занимает объем

$$V = Sx \,. \tag{5}$$

По уравнению состояния Клайперона-Клаузиуса

$$(p_0 + \rho_0 g (H + x)) S x = \nu R T \,, \tag{6}$$

тогда решая совместно (3) и (6), находим

$$x = \frac{H}{2}\left[\sqrt{\left(1 + \frac{p_0}{\rho_0 g H}\right)^2 + 4\frac{p_0 h}{\rho_0 g H^2}} - 1 - \frac{p_0}{\rho_0 g H}\right], \tag{7}$$

$$p = \frac{p_0}{2}\left[1 + \frac{\rho_0 g H}{p_0} + \sqrt{\left(1 + \frac{\rho_0 g H}{p_0}\right)^2 + 4\frac{\rho_0 g h}{p_0}}\right]. \tag{8}$$

Отсюда находим плотность воздуха под лодкой:

$$\rho_{air} = \frac{\mu p_0}{2RT}\left[1 + \frac{\rho_0 gH}{p_0} + \sqrt{\left(1 + \frac{\rho_0 gH}{p_0}\right)^2 + 4\frac{\rho_0 gh}{p_0}}\right] = 2.4 \text{ кг/м3.} \qquad (9)$$

3) Рассмотрим баланс сил, действующих на пиратов и лодку. Пусть суммарная масса пиратов равна $\boldsymbol{M}$ и они тянут лодку вниз с некоторой силой $\boldsymbol{F}$. Эта сила не может превысить веса пиратов

$$F_{ò} = Mg \qquad (10)$$

за вычетом силы Архимеда

$$F_A = \rho_0 gV = Mg\frac{\rho_0}{\rho}\ , \qquad (11)$$

так как иначе пираты бы всплыли вместе с лодкой.
Таким образом

$$F = F_{ò} - F_A = Mg\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right) . \qquad (12)$$

Аналогично, на лодку действуют сила тяжести и сила Архимеда

$$F_{ò\,1} = mg\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_{ä}}\right) , \qquad (13)$$

сила, вызванная разностью давлений на дно лодки снизу и сверху

$$F_0 = (p - p_{â})S \qquad (14)$$

и, по третьему закону Ньютона, все та же сила $\boldsymbol{F}$.
Окончательно

$$F_0 = F_{ò\,1} + F\ . \qquad (15)$$

Решая совместно составленные уравнения, получим

$$M = \frac{p_0 S}{g\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)}\left(\frac{1}{2}\left[\sqrt{\left(1 + \frac{\rho_0 gH}{p_0}\right)^2 + 4\frac{\rho_0 gh}{p_0}} - 1 - \frac{\rho_0 gH}{p_0}\right] - 1\right) -$$

$$-m\frac{\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_{ä}}\right)}{\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)} = 5.2\times 10^2 \text{ кг.} \qquad (16)$$

Таким образом можно заключить, что ситуация из фильма не могла произойти в реальности, так как пиратов вытолкнула бы на поверхность сила Архимеда. Это и понятно: на практике мы знаем, что достаточно самого небольшого баллона с воздухом, чтобы спокойно плавать, без всякого риска утонуть.

Вот так можно легко проверить, обманывают вас в фильмах или нет. Несмотря на то, что эта задача была всего лишь сильным упрощением ситуации в фильме (форма лодки и объем, занимаемый героями, не были учтены), она наглядно показала, что всегда найдется человек, который сможет найти, к чему придраться, и показать это остальным.

Если вам понравилась подобная тема, рекомендую ознакомиться с youtube каналом The Film Theorists. Автор канала рассматривает теории о сюжетах фильмов, но иногда рассматривает более физические и важные для человечества вопросы, как: «Какая скорость у ежа Соника?», «Что будет если Ванпанчмен ударит щит капитана Америки?» и «Как можно научно объяснить магию воды из Аватара?».