Vieta Jumping

Автор: Бектемисов Тамирлан

Редактор: Олжабаев Асылбек

Каждому из Вас знакомо это удовольствие от решения математических задач, которые долго не получались. Эмоции усиливаются вдвойне, если решение получилось нестандартным, но элегантным и понятным настолько, что его можно объяснить и шестикласснику. Именно о такой задаче сегодня и пойдет речь – задаче, которая была предложена в 1988 году на IMO[1] шестой, самой сложной задачей. Задаче, которая долгое время считалась сложнейшей из шестых, одной из самых необычных из предложенных за все время, но в тоже время имеющей простое и короткое решение, умещающееся на одной странице.

IMO 1988, Задача 6. Пусть a и b — положительные целые числа такие, что ab +1 делит $a^2 + b^2$***. Докажите, что*** $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ ***- полный квадрат.***

Выглядит довольно просто, не так ли? Однако именно этим и славится IMO – часто предложенные задачи просты в формулировке, но требуют знаний и навыков, далеко выходящих за рамки школьной программы.

Итак, чем же интересна данная задача?

Она была предложена западногерманским математиком Стефаном Беком на 29-ой IMO в Канберре. Никто из шести членов австралийской задачной комиссии не смог решить эту задачу, после чего она была отправлена четырем самым известным австралийским математикам — специалистам в этой области. Им было предложено работать над ней **в течение шести часов.** Ни один из них не смог решить её за это время. Задачная комиссия представила ее в жюри, отметив двумя звездочками, что означало, что задача сверхсложная. Однако после долгого обсуждения жюри все-таки отважилось поставить ее в качестве последней.

Стоит отметить, что на самой олимпиаде участникам предлагается **4,5 часа на решение трех задач** в туре, а не одной. Неужели кому-то и в правду хватило времени для преодоления задачи, не поддавшейся лучшим ученым страны? Да, и даже не одному человеку.

[1] Международная математическая олимпиада (IMO) - ежегодная математическая олимпиада для школьников, старейшая из международных предметных олимпиад.
Участникам предлагается решить 6 задач (по три задачи в день, в течение двух дней подряд), каждая из которых оценивается в 7 баллов, так что возможный максимум — 42 балла. 1-я и 4-я задачи классифицируются как лёгкие, 2-я и 5-я — как средние, 3-я и 6-я — как тяжёлые.

Одиннадцать школьников дали идеальные решения. В оправдание не справившихся с задачей жюри следует отметить, что среди этих учащихся были будущие обладатель Филдсовской премии Нго Бао Тяу, профессор Стенфордского университета Рави Вакил и профессор Миллсовского колледжа Звезделина Станкова. Одному из решивших, Эммануилу Атанасову, хватило одной странички для оформления этой задачи, за что он был удостоен специального приза.

Так как же они побороли этого монстра, не подавшегося сильнейшим математикам Австралии? Конечно же, все решения разные, но базируются они на одном и том же – **методе спуска по Виета**.

Так что же это такое?

Спуском по Виета или прыжками Виета (Vieta jumping) называется метод доказательства, используемый в теории чисел. Наиболее часто он применяется в задачах, в которых дано соотношение между двумя натуральными числами и требуется доказать некоторое связанное с ними утверждение. Существует несколько вариаций метода прыжков Виета, которые так или иначе связаны с идеей бесконечного спуска, где из данного решения уравнения находится новое (меньшее) решение с помощью формул Виета.

Для наглядности давайте разберем решение сегодняшнего примера и сформулируем основные этапы доказательства.

БАРАБАННАЯ ДРОБЬ РЕШЕНИЕ

IMO 1988, Задача 6. Пусть a и b — положительные целые числа такие, что ab +1 делит $a^2 + b^2$. Докажите, что $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ - полный квадрат.

Итак, пусть

$$k = \frac{a^2+b^2}{ab+1}.$$

Предположим, что ***k*** не является точным квадратом. Зафиксируем такое ***k*** и рассмотрим множество всех пар чисел (***a***;***b***), удовлетворяющих этому равенству, то есть рассмотрим множество всех решений уравнения $k = \frac{a^2+b^2}{ab+1}$. Назовем это множество множеством ***S***.

Поскольку множество натуральных чисел ограниченно снизу (любое натуральное число больше нуля), мы можем найти во множестве ***S*** пару (a_0, b_0), для которой сумма $a_0 + b_0$ минимальна. Так как уравнение симметрично относительно переменных, предположим, что $a_0 \geq b_0$. Перепишем исходное уравнение:

$$k(a_0b_0 + 1) = a_0^2 + b_0^2$$

$$ka_0b_0 + k = a_0^2 + b_0^2$$

$$a_0^2 + ka_0b_0 + b_0^2 - k = 0.$$

А теперь рассмотрим это выражение как квадратное уравнение относительно a_0:

$$x^2 + x \cdot kb_0 + b_0^2 - k = 0 \quad (*)$$

Мы знаем, что a_0 является решением уравнения (*). Пусть a_1 - второй корень этого уравнения. Тогда из теоремы Виета следует, что

$$\begin{cases} a_0 + a_1 = kb_0 \\ a_0 a_1 = b_0^2 - k \end{cases}. \quad (**)$$

Первое уравнение системы (**) означает, что $a_1 = kb_1 - a_0$, и так как все числа в правой части целые, то и a_1 **– целое**.

Рассмотрим второе уравнение. Допустим, что $a_1 < 0$, тогда при подстановке a_1 в (*) получаем

$0 = a_1^2 - ka_1b_0 + b_0^2 - k$, так как a_1 является корнем;

$0 = a_1^2 - ka_1b_0 + b_0^2 - k \geq a_1^2 + k + b_0^2 - k$, так как $-ka_1b_0 \geq k$ вследствие отрицательности a_1;

$0 = a_1^2 - ka_1b_0 + b_0^2 - k \geq a_1^2 + k + b_0^2 - k = a_1^2 + b_0^2 > 0$, потому что b_0 положительное;

$0 > 0$.

Противоречие. Значит a_1 неотрицательное. Пусть $a_1 > 0$, тогда пара (a_1, b_0) подходит нашему изначальному уравнению в силу положительности a_1.

Вспомним, что мы брали (a_0, b_0), как пару из множества S с наименьшей суммой. Следовательно,

$$b_0 + a_1 \geq b_0 + a_0$$
$$a_1 \geq a_0$$

Из теоремы Виета мы знаем, что $a_0 a_1 = b_0^2 - kb_0$, что можно записать как

$$a_1 = \frac{b_0^2 - k}{a_0}.$$

Значит

$$\frac{b_0^2 - k}{a_0} \geq a_0,$$

то есть $b_0^2 - k \geq a_0^2$. Так как $k > 0$, можно сделать вывод, что $b_0^2 > a_0^2$, что невозможно, так как изначально мы положили, что $a_0 \geq b_0$.

Противоречие. Значит, a_1-неположительное. До этого мы получили, что оно неотрицательное. Значит $a_1 = 0$. Тогда из теоремы Виета получаем

$$a_0 a_1 = b_0^2 - k$$
$$0 = b_0^2 - k$$
$$k = b_0^2,$$

что и требовалось доказать.

После разбора может показаться, что задача легкая, однако не стоит забывать о том, что в 1988 году уровень задач был ниже. Кроме того, догадаться до этого, для того времени новаторского, решения, тем более на олимпиаде, под высоким давлением, тоже очень не просто. И чтобы Вы сами всегда могли, так сказать, удачно попрыгать по корням, давайте поймем, где и как их использовать.

Шпаргалка и домашнее задание

Как было сказано выше, метод прыжков Виета может быть применён в задачах, в которых из делимости некоторого выражения ***A*** на выражение ***B*** необходимо вывести некоторую информацию про, собственно, **число *A/B***. В связи с этим узнать задачи, скорее всего решающиеся спуском по Виета, несложно.

Решение спуском по Виета, как правило, состоит из **9 опорных шагов:**

1. Предполагаем, что требуемое утверждение неверно;
2. Среди всех пар натуральных чисел (***a***,***b***), удовлетворяющих данному условию, находим ту, которая имеет наименьшую сумму;
3. Упорядочиваем: ***a*** ≥ ***b*** (если можем; чаще всего можем);
4. Рассматриваем выражение как квадратное уравнение относительно одной из переменных (скажем, a), а затем записываем для a и еще одного корня a_1 теорему Виета;
5. Доказываем, что $a_1 \in Z$;
6. Доказываем, что $a_1 \in N$;
7. В силу выбора пары понимаем, что $a_1 \geq a$;
8. Получаем противоречие;
9. **Profit!**

Но не все так просто. Сказать легко, но с реализацией могут возникнуть сложности. Поэтому для закрепления попробуйте сами решить пару примеров.

Про пару натуральных чисел (***a***,***b***) известно, что $a^2 + b^2 + 1 \vdots ab$. Докажите, что $\frac{a^2 + b^2}{ab} = 3$.

Про пару нечетных натуральных чисел (***a***,***b***) известно, что $a^2 + b^2 + 1 \vdots 2ab + 1$. Докажите, что ***a*** = ***b***.