Peter Bernhard:

KOMPAKTKURS FORMALE LOGIK

Die Logik muss für sich selber sorgen.
Ludwig Wittgenstein

Inhalt

1
Aussagenlogik

1.1 Logik als Theorie formal gültiger Schlüsse

Glauben Sie, dass Sie gerade ein Lehrbuch für formale Logik lesen? Wenn ja, warum? Können Sie Gründe dafür angeben?

Auf den folgenden Seiten wird die formale Logik als eine Theorie über das folgerichtige Argumentieren entwickelt. Argumente sind sprachliche Gebilde, die dazu verwendet werden, eine Meinung kund zu tun unter gleichzeitiger Angabe der Gründe. Beispiele für Argumente sind etwa:

- „Dieses Buch trägt im Titel den Ausdruck ‚formale Logik', außerdem enthält es jede Menge logischer Formeln, also ist es ein Lehrbuch für formale Logik."
- „In der Einleitung dieses Buches wird behauptet, dass es sich um ein Lehrbuch für formale Logik handelt. Daraus folgt: Dieses Buch ist ein Lehrbuch für formale Logik."

Argumente werden in der Logik auch als *Schlüsse* bezeichnet. Die Aussage, für die dabei versucht wird zu argumentieren, nennt man *Konklusion* und die dafür angeführten Gründe *Prämissen*. In der Logik versteht man also unter einem Schluss eine Folge von Aussagen, die sich in Prämissen und eine Konklusion einteilen lassen. Im Gegensatz dazu wird in der Umgangssprache unter einem Schluss häufig auch eine Konklusion allein verstanden. Der besseren Übersicht wegen empfiehlt es sich, jede Prämisse und die Konklusion eines Schlusses in einzelne Zeilen untereinander zu schreiben. Das erste der oben angeführten Argumente erhält somit die folgende Gestalt:

Dieses Buch trägt im Titel den Ausdruck „formale Logik".
Dieses Buch enthält jede Menge logischer Formeln.
———————————————————
Dieses Buch ist ein Lehrbuch für formale Logik.

Der Strich trennt die Prämissen von der Konklusion *graphisch* voneinander. *Verbal* könnte er mit einem Ausdruck wie „also", „deshalb", „somit" oder „daraus folgt" wiedergegeben werden.

Logik ist eine Theorie des Schließens (oder Schlussfolgerns), genau genommen des *folgerichtigen* Schließens, d. h. die Logik ist ein Instrument, um zu erklären, wann der Übergang von Prämissen zu einer Konklusion gerechtfertigt ist und in welcher Hinsicht dieser Übergang gerechtfertigt ist. Erfolgt dieser Übergang zwingend notwendig, so ist er Gegenstand der *deduktiven* Logik, erfolgt er nur mit einem gewissen Grad an Wahrscheinlichkeit, so ist er Gegenstand der *induktiven* Logik. Wir werden uns ausschließlich mit der *deduktiven* Logik befassen, so dass die Ausdrücke „Logik“ und „deduktive Logik“ hier synonym verwendet werden.

Vom Standpunkt der deduktiven Logik lautet also die uns interessierende Frage hinsichtlich des oben angeführten Schlusses: Folgt diese Konklusion *zwingend* aus den angeführten Prämissen? Offensichtlich nicht, denn es ist vorstellbar, dass sich die Konklusion trotz der angeführten Gründe als falsch herausstellt. So könnte ich mir ja einfach einen schlechten Scherz erlaubt haben oder ich könnte zwar der Meinung sein, ein Lehrbuch der formalen Logik verfasst zu haben, jedoch nicht wissen, was Logik eigentlich ist (ein zugegebenermaßen komplizierter Fall, aber ich denke, dass er nicht zutrifft). D. h. der Schluss könnte auf eine Weise erweitert werden, durch die die Konklusion zumindest zweifelhaft würde:

Dieses Buch trägt im Titel den Ausdruck „formale Logik“.
Dieses Buch enthält jede Menge logischer Formeln.
Der Autor dieses Buches hat sich einen schlechten Scherz erlaubt.

Dieses Buch ist ein Lehrbuch für formale Logik.

Einen Schluss, der erst durch die Ergänzung einer oder mehrerer Prämissen zwingend gültig wird, bezeichnet man als *Enthymem*. Der weiter oben angeführte Schluss ist offensichtlich ein Enthymem. Wie könnte nun dieses Enthymem ergänzt werden, so dass die Konklusion mit absoluter Sicherheit aus den Prämissen folgt? Eine Möglichkeit wäre z. B. die Anfügung folgender Prämisse: „Wenn dieses Buch eine Menge logischer Formeln enthält, dann ist es ein Lehrbuch für formale Logik“. Der Schluss würde dann wie folgt lauten:

Wenn dieses Buch eine Menge logischer Formeln enthält, dann ist es ein Lehrbuch für formale Logik.
Dieses Buch trägt im Titel den Ausdruck „formale Logik“.
Dieses Buch enthält eine Menge logischer Formeln.

Dieses Buch ist ein Lehrbuch für formale Logik.

In diesem Falle würden bereits die erste und die dritte Prämisse genügen, um die Konklusion behaupten zu können:

Wenn dieses Buch eine Menge logischer Formeln enthält, dann ist es ein Lehrbuch für formale Logik.
Dieses Buch enthält eine Menge logischer Formeln.

Dieses Buch ist ein Lehrbuch für formale Logik.

Was die Gültigkeit dieses Schlusses über alle Zweifel erhaben macht, ist seine *Form*. D. h., wenn man eine Aussage der Form „Wenn p, dann q“ behauptet und eine weitere Aussage der Form „p“, dann ist man zweifellos berechtigt, auch eine Aussage der Form „q“ zu behaupten, was sich folgendermaßen darstellen lässt:

Wenn p, dann q
p
---
q

In diesem Schluss steht p für die Aussage, dass das vorliegende Buch eine Menge logischer Formeln enthält, und q steht für die Aussage, die der Satz „dieses Buch ist ein Lehrbuch für formale Logik“ zum Ausdruck bringt. Für die Frage nach der Korrektheit dieses Schlusses spielt es jedoch keine Rolle, für welche konkreten Aussagen p und q stehen. Da es dabei nur auf *die Form* des Schlusses ankommt, bezeichnet man den obigen Schluss als *formal gültig*. Dass die formale Gültigkeit eines Schlusses unabhängig davon ist, wofür die darin vorkommenden Aussagen stehen, bedeutet, dass diese Aussagen auch falsch sein können, was im obigen Fall ja durchaus denkbar ist. So ist auch der folgende Schluss korrekt, da er dem formal gültigen Schema von oben entspricht:

Wenn München an der Nordsee liegt, dann hat es einen Hafen.
München liegt an der Nordsee.

München hat einen Hafen.

Eine mittels „wenn–dann“ gebildete Aussage bezeichnet man in der Logik als *Subjunktion*[1] und der darin vorkommende Subjunktionsausdruck „wenn–dann“ als einen *Junktor*.[2] Für die leichtere Handhabbarkeit der Junktoren empfiehlt es sich, diese mit Hilfe eigener Symbole darzustellen. Symbolisiert man den Junktor „wenn–dann“ durch einen Pfeil, so kann man den obigen Schluss auch so darstellen:

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ p \\ \hline q \end{array}$$

Das Vorderglied einer Subjunktion, hier die Aussage p, wird auch als „Antecedens“ und das Hinterglied (hier q) auch als „Succedens“ bezeichnet. Der Ausdruck „wenn–dann“ ist in der Logik standardisiert, d. h. jede formgleiche Aussage der Umgangssprache wird mit eben diesem Ausdruck wiedergegeben. Insofern bildet diese Standardisierung eine Einschränkung gegenüber den Ausdrucksmöglichkeiten der Umgangssprache und ist in gewisser Weise das Ergebnis einer Interpretation. In vielen Fällen ist dies unproblematisch, da sich die Mehrheit einer Sprachgemeinschaft meist darüber einig ist, welcher Satz welche Aussage zum Ausdruck bringt. So entsprechen die folgenden Aussagen in der Logik alle einem „Wenn p, dann q“:

---

[1] Auch „Konditional“ oder „(materiale) Implikation“ genannt.

[2] Der Ausdruck „Junktor“ stammt vom lateinischen „iungere“, was u. a. „verbinden“ oder „vereinigen“ bedeutet. In der Tat werden ja durch den Ausdruck „wenn–dann“ zwei Aussagen miteinander zu einer neuen. zusammengesetzten Aussage verbunden.

– „Wenn er es lange genug sucht, so wird er es finden.“

– „Im Winter schneit es.“

– „Selbst wenn er es weiß, wird er kommen.“

– „Es wird glatt, falls es noch kälter wird.“

Da verschiedene Formulierungen der Umgangssprache mit demselben Junktor ausgedrückt werden und von der Bedeutung dieses Junktors die Gültigkeit bestimmter Schlüsse mit abhängt, ist jede Standardisierung zugleich eine *Normierung*. Insofern kann die Logik als Theorie des normierten, d. h. regelgeleiteten Gebrauchs bestimmter Junktoren verstanden werden.

1.1.1 Regeln für den Gebrauch von Junktoren

Auf welche Weise ist nun der Gebrauch des Junktors „wenn–dann“ in der Logik normiert? Betrachten wir dazu noch einmal den obigen Schluss. Für eine bessere Bezugnahme nummerieren wir die einzelnen Zeilen:

$$\begin{array}{ll} (1) & \mathrm{p} \rightarrow \mathrm{q} \\ (2) & \mathrm{p} \\ \hline (3) & \mathrm{q} \end{array}$$

Die beiden Aussagen in den Zeilen (1) und (2) bilden die Prämissen für die Konklusion in Zeile (3). Wenn wir jede Prämisse mit einem „A“ kennzeichnen („A“ wie „Annahme“), dann können wir auf den Strich, der ja die Prämissen von der Konklusion trennt, verzichten:

$$\begin{array}{lll} (1) & \mathrm{p} \rightarrow \mathrm{q} & \mathrm{A} \\ (2) & \mathrm{p} & \mathrm{A} \\ (3) & \mathrm{q} & \end{array}$$

Unsere Frage nach dem normierten Gebrauch des Subjunktionsausdrucks lässt sich nun folgendermaßen beantworten: Wenn man eine Subjunktion $\mathrm{p} \rightarrow \mathrm{q}$ und eine weitere Aussage p behauptet, dann ist man auch berechtigt, die Aussage q zu behaupten, oder etwas kürzer: Unter der Annahme, dass „$\mathrm{p} \rightarrow \mathrm{q}$“ und „p“, gilt auch „q“. Da diese Regel es erlaubt, die Subjunktion von Zeile (1) „aufzulösen“, bezeichnet man sie als Regel der *Subjunktionsbeseitigung* und symbolisiert die Anwendung dieser Regel mit „$\rightarrow$B“. Der obige Schluss erhält nun folgende Gestalt:

$$\begin{array}{lll} (1) & \mathrm{p} \rightarrow \mathrm{q} & \mathrm{A} \\ (2) & \mathrm{p} & \mathrm{A} \\ (3) & \mathrm{q} & \rightarrow\mathrm{B} \end{array}$$

Die Regel der Subjunktionsbeseitigung ist natürlich auch in komplexeren Zusammenhängen erlaubt:

(1)	$p \rightarrow q$	A
(2)	r	A
(3)	p	A
(4)	s	A
(5)	q	$\rightarrow$B

Um auch hier sofort sehen zu können, aufgrund welcher Aussagen die Regel angewendet wurde, fügt man dem Symbol für die Subjunktionsbeseitigung noch die Nummern derjenigen Zeilen hinzu, in denen die beteiligten Aussagen stehen, in diesem Falle also 1 und 3:

(1)	$p \rightarrow q$	A
(2)	r	A
(3)	p	A
(4)	s	A
(5)	q	$\rightarrow$B,1, 3

Der Ausdruck „und“ bildet ebenfalls einen Junktor. Wie im Falle von „wenn–dann“ verbindet auch dieser Junktor zwei Aussagen, z. B. p und q miteinander, so dass eine neue Aussage „p und q“ entsteht. Einen Ausdruck der Form „p und q“ bezeichnet man in der Logik als *Konjunktion* und symbolisiert den darin vorkommenden Ausdruck „und“ mit dem Zeichen „$\wedge$“. Wie für den Gebrauch von Subjunktionen gibt es auch für den Gebrauch von Konjunktionen eine Regel, die angibt, auf welche Weise sie sich in einer Argumentation beseitigen lassen. Die Regel der *Konjunktionsbeseitigung* (nachfolgend durch „$\wedge$B“ symbolisiert) normiert das intuitive Verständnis, dass jemand, der eine Konjunktion behauptet, auch berechtigt ist, ein beliebiges einzelnes Konjunktionsglied dieser Konjunktion zu behaupten. Folgende Schlüsse sind also formal gültig:

$$\frac{p \wedge q}{p} \qquad \frac{p \wedge q}{q}$$

Für die Regel der Konjunktionsbeseitigung gibt es demnach zwei Varianten:

I)	(1)	$p \wedge q$	A	II)	(1)	$p \wedge q$	A
	(2)	p	$\wedge$B,1		(2)	q	$\wedge$B, 1

Wie „wenn–dann“, so bildet auch die Wendung „und“ eine standardisierte Formulierung in der Logik, so dass z. B. folgende Aussagen der Umgangssprache mit „p und q“ wiedergegeben werden:

– „Dieses Buch enthält Formeln und ist ein Lehrbuch für formale Logik.“

- „Es war bereits Frühling, aber es schneite.“
- „Sie ging groß Essen obwohl sie kaum noch Geld hatte.“
- „In diesem Hotel gibt es sowohl Einbett- als auch Doppelzimmer.“

1.1.1.1 Das Notieren der Voraussetzungen

Betrachten wir folgenden Schluss: „Wenn Aristoteles die *Analytica Priora* schrieb, dann kann er als der Begründer der formalen Logik gelten. Aristoteles schrieb die *Analytica Priora* und Boethius schrieb *De consolatione philosophiae*. Also schrieb Aristotels die *Analytica Priora*. Somit kann Aristoteles als der Begründer der formalen Logik gelten.“

Notiert man „a“ für die Aussage des Satzes „Aristoteles schrieb die *Analytica Priora*“, „b“ für die Aussage des Satzes „Boethius schrieb *De consolatione philosophiae*“ und „f“ für „Aristoteles kann als der Begründer der formalen Logik gelten“, so erhält der obige Schluss folgende Form:

$$\begin{array}{lll} (1) & \mathrm{a} \to \mathrm{f} & \mathrm{A} \\ (2) & \mathrm{a} \wedge \mathrm{b} & \mathrm{A} \\ (3) & \mathrm{a} & \wedge\mathrm{B}, 2 \\ (4) & \mathrm{f} & \to\mathrm{B}, 1, 3 \end{array}$$

Da sich die Subjunktionsbeseitigung in Zeile (4) auf die Aussagen der Zeilen (1) und (3) bezieht, scheint die Konklusion von den Annahmen „a → f“ und „a“ abzuhängen. Tatsächlich ist dies jedoch nur indirekt der Fall, da die Aussage „a“ in Zeile (3) selbst wieder abhängt von der Annahme in Zeile (2). Um die Abhängigkeitsverhältnisse auch in komplexeren Zusammenhängen stets unzweideutig bestimmen zu können, notiert man vor jede Zeile die Nummern derjenigen Zeilen, von denen die Aussage der betreffenden Zeile abhängt. So hängt im obigen Beispiel das a in Zeile (3) von der Konjunktion in Zeile (2) ab, da es ja *aufgrund* dieser Konjunktion gilt. Zeile (3) erhält demnach folgende Gestalt:

$$\begin{array}{llll} 2 & (3) & \mathrm{a} & \wedge\mathrm{B}, 2 \end{array}$$

Da die Aussage in Zeile (4) mit Hilfe der Aussage in Zeile (3) gebildet wird und die Aussage in Zeile (3) von der Aussage in Zeile (2) abhängt, muss auch die Aussage in Zeile (4) von der Aussage in Zeile (2) abhängen:

$$\begin{array}{llll} 2 & (4) & \mathrm{f} & \to\mathrm{B}, 1, 3 \end{array}$$

Die Aussage in Zeile (4) hängt aber auch noch von der Aussage in Zeile (1) ab. Da die Aussage in Zeile (1) eine Annahme bildet, hängt sie trivialerweise von keiner anderen Aussage außer von sich selbst ab. Der gesamte Schluss hat also die folgende endgültige Gestalt:

1	(1)	$a \to f$	A
2	(2)	$a \wedge b$	A
2	(3)	a	$\wedge$B, 2
1,2	(4)	f	$\to$B, 1, 3

Mit Hilfe dieser Darstellungsform sind wir nun in der Lage, die Regeln des Gebrauchs von Junktoren in einer exakteren Form anzugeben.

1.1.1.2 Regeln für die Subjunktion

a) Subjunktionsbeseitigung $\to$B

Die Regel der Subjunktionsbeseitung besagt: *Unter der Annahme einer Subjunktion und einer weiteren Aussage, die das Antecedens dieser Subjunktion bildet, darf auf das Succedens dieser Subjunktion geschlossen werden.*

Die Anwendbarkeit dieser Regel ist völlig unabhängig davon, für welche konkreten Aussagen das Antecedens und das Succedens stehen. Die Formbuchstaben in der Darstellung dieser Regel dürfen deshalb keine Abkürzungen für konkrete Aussagen bilden, sondern müssen Platzhalter für beliebige Aussagen sein. Diese Platzhalter sind demnach metasprachliche Mitteilungszeichen für beliebige Aussagen einer gegebenen Objektsprache, weshalb sie als *Aussagenvariablen* bezeichnet werden. Nachfolgend werden Aussagenvariablen mit Großbuchstaben P, Q, R usw. dargestellt. Die folgende Darstellung der Subjunktionseinführungsregel ist also kein Schluss, sondern eine *Schlussform*, denn die Zeichen „P“ und „Q“ sind Variablen – sie stehen nicht für *bestimmte*, sondern für *beliebige* Aussagen.
Für die Anwendbarkeit der Subjunktionsbeseitigung ist die Reihenfolge der beiden vorausgesetzten Aussagen unerheblich, so dass sich diese Regel in den folgenden zwei Varianten darstellen lässt (wobei die Subjunktion bei der Regelanwendung stets zuerst genannt wird, d. h. in der ersten Variante steht bei „$\to$B“ die Zeile (k) vor der Zeile (l), während bei der zweiten Variante zuerst Zeile (l) genannt wird):

(I)

$k_1,\ldots,k_r$	(k)	$P \to Q$	
$l_1,\ldots,l_s$	(l)	P	
$k_1,\ldots,l_s$	(m)	Q	$\to$B, k, l

(II)

$k_1,\ldots,k_r$	(k)	P	
$l_1,\ldots,l_s$	(l)	$P \to Q$	
$k_1,\ldots,l_s$	(m)	Q	$\to$B, l, k

Die Buchstaben k, l, und m stehen für beliebige natürliche Zahlen, die die Zeilennummern angeben, so dass $k < l < m$. Entsprechend stehen die Sequenzen vor den Zeilennummerierungen ($k_1,\ldots,k_r$ usw.) für die Zeilennummern, von denen die jeweilige Zeile abhängt, so dass $k_1 < k_2 < \ldots < k_r \leq k$ usw. (bei $k_1 = k_2 = \ldots = k_r = k$ würde es sich um eine Annahme in Zeile (k) handeln).

b) Subjunktionseinführung →E

Wie es eine Regel für die Beseitigung einer Subjunktion gibt, so gibt es auch eine Regel für die *Einführung* einer Subjunktion. Die Funktionsweise der Subjunktionseinführung lässt sich anhand des obigen Schlusses über den Begründer der formalen Logik leicht verständlich machen. Vergegenwärtigen wir uns noch einmal die Argumentation:

1	(1)	$a \to f$	A
2	(2)	$a \wedge b$	A
2	(3)	a	$\wedge$B, 2
1, 2	(4)	f	→B, 1, 3

Wie gesagt, zeigen die Ziffern vor den einzelnen Zeilennummern die bestehenden Abhängigkeitsverhältnisse an. So bedeutet z. B. die Ziffer 2 vor Zeile (3), dass die Aussage „a“ von der Aussage abhängt, die sich in Zeile (2) befindet, also von der Aussage „$a \wedge b$“. Dieses Abhängigkeitsverhältnis lässt sich durch folgende Aussage ausdrücken: „Wenn ‚a und b‘, dann ‚a‘ “, oder: „$(a \wedge b) \to a$“. Das Explizitmachen dieses Abhängigkeitsverhältnisses besteht also in der Einführung einer Subjunktion, weshalb es als „Subjunktionseinführung“ bezeichnet wird und mit „→E“ symbolisiert wird.

Im Falle einer Subjunktionseinführung wird also eine Voraussetzung einer Aussage mit Hilfe der Subjunktion explizit gemacht. Wie schon im Falle von →B notiert man bei der Anwendung der Subjunktionseinführung außer „→E“ die Zeilennummer, auf die die Regel angewendet wird, außerdem die Ziffer derjenigen Zeile, in der die Annahme steht, die in der nun formulierten Subjunktion das Antecedens bildet. Diese Zeilenangabe wird unterstrichen. Da das Abhängigkeitsverhältnis nun durch die Subjunktion ausgedrückt wird, verschwindet das Antecedens (= die unterstrichene Ziffer) bei den Annahmen. Die obige Argumentation könnte also wie folgt fortgesetzt werden:

1	(1)	$a \to f$	A
2	(2)	$a \wedge b$	A
2	(3)	a	$\wedge$B, 2
1, 2	(4)	f	→B, 1, 3
	(5)	$(a \wedge b) \to a$	→E, $\underline{2}$, 3

In Zeile (5) „wandert“ also die Voraussetzung aus Zeile (2) (d. h. die Konjunktion „$a \wedge b$“) als Antecedens in den Aussageteil hinein:

I)	2	(5)	a	
II)		(5)	$2 \to a$	
III)		(5)	$(a \wedge b) \to a$	→E, $\underline{2}$, 3

Zeile (5) hängt nun von keiner weiteren Aussage mehr ab, was nicht bei jeder Anwendung von →E der Fall ist, wie ein möglicher Fortgang der Argumentation zeigt:

$$2 \quad (6) \quad (a \to f) \to f \quad \to\text{E}, \underline{1}, 4$$

Da die Aussage in Zeile (6) auch nach →E eine Voraussetzung hat – die Aussage von Zeile (2) – kann natürlich noch einmal die Regel der Subjunktionseinführung angewendet werden:

$$(7) \quad (a \wedge b) \to ((a \to f) \to f) \quad \to\text{E}, \underline{2}, 6$$

Die Regel der Subjunktionseinführung lautet also wie folgt: *Dass eine Aussage von einer anderen Aussage abhängt, lässt sich durch eine Subjunktion ausdrücken, in der diejenige Aussage, von der die andere Aussage abhängt, das Antecedens und die abhängige Aussage das Succedens bilden*:

$$\begin{array}{rcll} k & (k) & P & A^{3} \\ l_1,\ldots,l_s,\ k & (l) & Q & \\ l_1,\ldots,l_s & (m) & P \to Q & \to\text{E}, \underline{k}, l \end{array}$$

1.1.1.3 Regeln für die Konjunktion

a) Konjunktionsbeseitigung ∧B

Die bereits informell eingeführte Regel der Konjunktionsbeseitigung besagt: *Von einer Konjunktion darf auf jedes einzelne Konjunktionsglied geschlossen werden.* Mit den uns nun zur Verfügung stehenden Mitteln, kann die Konjunktionsbeseitungsregel in den beiden Varianten ihres Auftretens so dargestellt werden:

(I)

$$\begin{array}{lcll} k_1,\ldots,k_r & (k) & P \wedge Q & \\ k_1,\ldots,k_r & (l) & P & \wedge\text{B}, k \end{array}$$

(II)

$$\begin{array}{lcll} k_1,\ldots,k_r & (k) & P \wedge Q & \\ k_1,\ldots,k_r & (l) & Q & \wedge\text{B}, k \end{array}$$

b) Konjunktionseinführung ∧E

Die Regel der Konjunktionseinführung besagt: *Unter der Annahme einer Aussage und einer weiteren Annahme einer weiteren Aussage, darf auf die Konjunktion dieser beiden Aussagen geschlossen werden.* Wie die Regel der Konjunktionsbeseitugung hat auch diese zwei Varianten:

[3] Notabene: Nur Annahmen können durch →E derart erfasst werden, dass sie nach dieser Regelanwendung das Antecedens bilden. Warum wohl?

(I)	(II)
P	Q
Q	P
P und Q	P und Q

Die Reihenfolge der Glieder der eingeführten Konjunktion wird durch die Reihenfolge der genannten Zeilennummern nach $\wedge$E festgelegt:

(I)

$k_1, \ldots, k_r$	(k)	P	
$l_1, \ldots, l_s$	(l)	Q	
$k_1, \ldots, l_s$	(m)	$P \wedge Q$	$\wedge$E, k, l

(II)

$k_1, \ldots, k_r$	(k)	Q	
$l_1, \ldots, k_s$	(l)	P	
$k_1, \ldots, l_s$	(m)	$P \wedge Q$	$\wedge$E, l, k

1.1.1.4 Aufgaben

Beurteilen Sie mit Hilfe der oben eingeführten Darstellungsform und aufgrund der vorgenommenen Normierung des Gebrauchs von Subjunktionen und Konjunktionen folgende Schlüsse.

a) „Wenn Venedig am Meer liegt, dann kann man dort auch baden. Venedig liegt am Meer. Demnach kann man in Venedig baden.“

b) „Wenn Frege die *Begriffsschrift* schrieb, dann kann er als der Begründer der modernen Logik gelten. Hier steht, dass Frege die *Begriffsschrift*, und Wittgenstein den *Tractatus* schrieb. Es steht demnach fest, dass Frege die *Begriffsschrift* schrieb. Daraus folgt: Frege kann als der Begründer der modernen Logik gelten.“

c) Ist diese Argumentation korrekt? Wenn nicht, korrigieren Sie sie.

1	(1)	$a \wedge b$	A
2	(2)	c	A
1, 2	(3)	$(a \wedge b) \wedge c$	$\wedge$E, 1, 2
1, 2	(4)	$a \wedge b$	$\wedge$B, 3
1	(5)	$c \rightarrow (a \wedge b)$	$\rightarrow$E, $\underline{2}$, 4

1.1.1.5 Regeln für die Negation

Unter einer Negation versteht man eine *verneinte Aussage*, wie „Wir hatten kein schönes Wetter“, „Rohe Oliven sind ungeniesbar“ oder „Die Mutter ist es nicht.“[4] Aussagen dieser Form werden in der Logik mit „Nicht p“ wiedergegeben und als Negationen bezeichnet, deren Gebrauch – wie schon im

[4] Dieses Beispiel stammt aus Sigmund Freuds Aufsatz „Die Verneinung“ (GW III, 373–377). Der Satz wurde von einem Patienten geäußert, der eine ihm im Traum erschienene

Falle von Subjunktion und Konjunktion – durch eine Beseitigungs- und eine Einführungsregel festgelegt ist. Obwohl der Negationsausdruck „Nicht“, der durch das Zeichen „¬“ symbolisiert wird, keine zwei Aussagen zu einer komplexeren Aussage verbindet, wird auch er als Junktor bezeichnet, was nicht weiter verwirren sollte, da Atome ja auch nicht unteilbar sind.

a) Negationsbeseitigung ¬¬B

$$\frac{\text{Nicht nicht P}}{\text{P}}$$

Diese Regel, die auch als *duplex negatio affirmat* („doppelte Verneinung bejaht“) bezeichnet wird, besagt: *Von einer zweifach negierten Aussage darf auf die unnegierte Aussage geschlossen werden*:

$$\begin{array}{llll} \mathrm{k_1,\ldots,k_r} & \mathrm{(k)} & \neg\neg \mathrm{P} & \\ \mathrm{k_1,\ldots,k_r} & \mathrm{(l)} & \mathrm{P} & \neg\neg\mathrm{B, k} \end{array}$$

Die Umgangssprache variiert hier sowohl im Ausdruck als auch in der Bedeutung erheblich. So findet man Aussagen der Form „Nicht nicht p“ höchst selten; häufiger sind hingegen mit dem Präfix „un-“ gebildete Aussagen, wie „Das ist nicht uninteressant“ (= „Das ist interessant“), oder die Nachstellung der zweiten Verneinung, wie „Nicht mitmachen gab’s nicht“ (= „Es gab nur mitmachen“). Mit Hilfe der letzteren Form werden zum Teil (vorwiegend in Dialekten) auch *Verstärkungen* ausgedrückt, wie in den Aussagen „Der hat keinen Mut nicht“ (= „Er hat überhaupt keinen Mut“) oder „Das kann keiner nicht verstehen“ (= „Es ist gänzlich unverständlich“). Diese Verwendungsweise wird also durch die hier vorgestellte Regel der Negationsbeseitigung ausgeschlossen.

b) Negationseinführung ¬E

$$\frac{\text{Wenn P, dann Q und nicht Q}}{\text{Nicht P}}$$

Die Negationseinführungsregel, auch als *reductio ad absurdum* bezeichnet, lautet: *Von einer Subjunktion, deren Succedens eine Konjunktion von einer Aussage und deren Negation bildet, darf auf das negierte Antecedens dieser Subjunktion geschlossen werden*:

Person identifizieren sollte. Bei dieser spontan gegebenen Antwort kann man nach Freud sicher sein, dass es die Mutter war. Dies ist ein Beispiel dafür, wie die zugrunde liegende tiefenpsychologische Form von der uns interessierenden logischen Form abweichen kann.

$k_1, \ldots, k_r$	(k)	$P \to (Q \wedge \neg Q)$	
$k_1, \ldots, k_r$	(l)	$\neg P$	$\neg E$, k

Die Regel der Negationseinführung versucht das intuitive Verständnis wiederzugeben, wonach eine Aussage, aus der sich etwas offensichtlich Falsches schließen lässt, nicht richtig sein kann. Was im übrigen für alle Regeln gilt, gilt für die Regel der Negationseinführung vielleicht in besonderem Maße, dass sich nämlich Einsicht in die Nützlichkeit, sowie ein volles Verständnis erst bei der Anwendung ergeben.

1.1.1.6 Aufgaben

Beurteilen Sie mit Hilfe der oben eingeführten Darstellungsform und aufgrund der vorgenommenen Normierungen die Gültigkeit der folgenden Schlüsse.

a) „Atome sind nicht unteilbar. Also sind sie teilbar."

b) „Wenn mein Vorlesungsskript stimmt, dann hat er gesagt, dass das Gute existiert und dass es nicht existiert. Also stimmt mein Vorlesungsskript nicht."

c) „Hier steht zwar, dass sowohl das Weltbild von Ptolomäus, als auch das Weltbild von Kopernikus richtig ist, aber das kann unmöglich stimmen; denn wenn das Ptolomäische Weltbild richtig ist, dann dreht sich die Sonne um die Erde, was sie im Kopernischen Weltbild nicht tut."

1.1.1.7 Regeln für die Adjunktion

Als *Adjunktionen* werden Aussagen bezeichnet, die zwei Möglichkeiten behaupten, ohne auszuschließen, dass auch beide bestehen können. Der durch „oder" standardisierte Adjunktionsausdruck wird deshalb auch *einschließendes Oder* genannt, im Gegensatz zum *auschließenden Oder*, das zwei miteinander unverträgliche Alternativen behauptet (siehe weiter unten). Umgangssprachliche Beispiele für Adjunktionen sind etwa „Sie ist wohl sehr fleißig oder hoch begabt", „Was den Atomismus und die Ideenlehre betrifft, so stammt mindestens eine davon aus Indien" oder „Geld muss man haben, es sei denn, man hat Beziehungen". Das Zeichen „$\vee$" für den Adjunktionsausdruck ist eine Stilisierung des ersten Buchstabens des lateinischen *vel* (= „oder").

a) Adjunktionsbeseitigung ∨B

(I)	(II)
P oder Q	P oder Q
Nicht P	Nicht Q
Q	P

Die Adjunktionsbeseitigungsregel lautet: *Von einer Adjunktion und einem negierten Adjunktionsglied darf auf das andere Adjunktionsglied geschlossen werden*. Wie bei der Konjunktionsbeseitung gibt es von dieser Regel also zwei Varianten:

(I)

$$\begin{array}{rlll} k_1,\ldots,k_r & (k) & P \vee Q & \\ l_1,\ldots,l_s & (l) & \neg P & \\ k_1,\ldots,l_s & (m) & Q & \vee B, k, l \end{array}$$

(II)

$$\begin{array}{rlll} k_1,\ldots,k_r & (k) & P \vee Q & \\ l_1,\ldots,l_s & (l) & \neg Q & \\ k_1,\ldots,l_s & (m) & P & \vee B, k, l \end{array}$$

Natürlich können die Aussagen der Zeilen (k) und (l) auch vertauscht vorkommen. Bei der Adjunktionsbeseitigung wird jedoch immer zuerst die Adjunktion genannt:

(Ia)

$$\begin{array}{rlll} k_1,\ldots,k_r & (k) & \neg P & \\ l_1,\ldots,l_s & (l) & P \vee Q & \\ k_1,\ldots,l_s & (m) & Q & \vee B, l, k \end{array}$$

(IIa)

$$\begin{array}{rlll} k_1,\ldots,k_r & (k) & \neg Q & \\ l_1,\ldots,l_s & (l) & P \vee Q & \\ k_1,\ldots,l_s & (m) & P & \vee B, l, k \end{array}$$

b) Adjunktionseinführung ∨E

P
P oder Q

Die Regel der Adjunktionseinführung lautet: *Von einer Aussage darf auf eine Adjunktion geschlossen werden, die diese Aussage als ein Adjunktionsglied hat*:

(I)

$$\begin{array}{rlll} k_1,\ldots,k_r & (k) & P & \\ k_1,\ldots,k_r & (l) & P \vee Q & \vee E, k \end{array}$$

(II)

$$\begin{array}{rlll} k_1,\ldots,k_r & (k) & P & \\ k_1,\ldots,k_r & (l) & Q \vee P & \vee E, k \end{array}$$

Die auf den ersten Blick vielleicht etwas befremdende Regel der Adjunktionseinführung verdeutlicht man sich am besten daran, dass eine mit „oder“ gebildete Aussage weniger sagt (und in diesem informationstheoretischen Sinn schwächer ist) als jedes einzelne Adjunktionsglied dieser Aussage. Es ist deshalb möglich, von jedem Adjunktionsglied auf die (weniger informative) Adjunktion zu schließen. Als Schluss wird diese Regel höchst selten verwendet, jedoch kann sie innerhalb komplexerer Argumentationen eine wichtige Rolle spielen.

1.1.1.8 Regeln für die Äquivalenz

Behauptet man, dass eine Aussage genau dann gilt, wenn eine weitere Aussage gilt, dann spricht man in der Logik von einer *Äquivalenz*. Äquivalenzen werden z. T. mit der Wendung „ist äquivalent mit" ausgedrückt, wie in der Aussage „Die Tatsache, dass Franken keine Bayern sind, ist äquivalent mit der Tatsache, dass Bayern keine Franken sind". Aber auch „wenn, und nur wenn" oder „genau dann, wenn" sind dafür gebräuchlich, wie in „Die Prüfung gilt als bestanden wenn, und nur wenn alle drei Teilprüfungen bestanden sind" oder „Man hat genau dann gewonnen, wenn man exakt 100 Punkte erreicht". Der Ausdruck „genau dann, wenn" – symbolisiert durch „$\leftrightarrow$" – soll hier als Standardformulierung für Äquivalenzen verwendet werden. Der Doppelpfeil gibt einen symbolischen Hinweis darauf, wie der Gebrauch von Äquivalenzen normiert ist, nämlich als Subjunktion in beide Richtungen, weshalb Äquivalenzen manchmal auch als „Bisubjunktionen" bezeichnet werden.

a) Äquivalenzbeseitigung $\leftrightarrow$B

$$\text{(I)}\quad \frac{\text{P genau dann, wenn Q}}{\text{Wenn P, dann Q}} \qquad \text{(II)}\quad \frac{\text{P genau dann, wenn Q}}{\text{Wenn Q, dann P}}$$

Die Regel der Äquivalenzbeseitung besagt: *Von einer Äquivalenz darf auf eine Subjunktion geschlossen werden, die ein Äquivalenzglied zum Succedens und das andere zum Antecedens hat*:

(I)

$k_1,\ldots,k_r$	(k)	$P \leftrightarrow Q$	
$k_1,\ldots,k_r$	(l)	$P \rightarrow Q$	$\leftrightarrow$B, k

(II)

$k_1,\ldots,k_r$	(k)	$P \leftrightarrow Q$	
$k_1,\ldots,k_r$	(l)	$Q \rightarrow P$	$\leftrightarrow$B, k

b) Äquivalenzseinführung $\leftrightarrow$E

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Wenn P, dann Q}\\ \text{Wenn Q, dann P}\end{array}}{\text{P genau dann, wenn Q}}$$

Die Äquivalenzeinführungsregel besagt: *Von zwei Subjunktionen, die sich nur durch die Reihenfolge ihrer Subjunktionsglieder unterscheiden, darf auf eine Äquivalenz geschlossen werden, die diese Subjunktionsglieder als Äquivalenzglieder besitzt*:

$$\begin{array}{rlll} k_1,\ldots,k_r & (k) & P \to Q & \\ l_1,\ldots,l_s & (l) & Q \to P & \\ k_1,\ldots,l_s & (m) & P \leftrightarrow Q & \leftrightarrow E, k, l \end{array}$$

1.1.1.9 Regeln für die Kontravalenz

Im Gegensatz zum einschließenden Oder der Adjunktion wird das ausschließende Oder als *Kontravalenz* bezeichnet. Während der mit „oder“ standardisierte Adjunktionsausdruck („$\vee$“) also dem lateinischen *vel* entspricht, entspricht der mit „entweder–oder“ standardisierte Kontravalenzausdruck („$\nleftrightarrow$“) dem lateinischen *aut–aut*. Kontravalenzen sind demnach z. B. „Entweder wird sie in der nächsten halben Stunde hier eintreffen, oder sie hat ihren Zug verpasst“, oder „Von den beiden angegebenen Antworten ist genau eine richtig“. Sowohl die Kontravalenz, als auch die Adjunktion werden manchmal als „Disjunktion“ bezeichnet.

a) Kontravalenzbeseitigung $\nleftrightarrow$B

$$\text{(I)}\quad \frac{\text{Entweder P oder Q}}{\text{Wenn P, dann nicht Q}} \qquad \text{(II)}\quad \frac{\text{Entweder P oder Q}}{\text{Wenn nicht P, dann Q}}$$

Die Regel der Kontravalenzbeseitigung lautet: *Von einer Kontravalenz darf auf eine Subjunktion geschlossen werden, die ein negiertes Kontravalenzglied entweder zum Antecedens oder zum Succedens hat*:

(I)

$$\begin{array}{rlll} k_1,\ldots,k_r & (k) & P \nleftrightarrow Q & \\ k_1,\ldots,k_r & (l) & P \to \neg Q & \nleftrightarrow B, k \end{array}$$

(II)

$$\begin{array}{rlll} k_1,\ldots,k_r & (k) & P \nleftrightarrow Q & \\ k_1,\ldots,k_r & (l) & \neg P \to Q & \nleftrightarrow B, k \end{array}$$

b) Kontravalenzseinführung $\nleftrightarrow$E

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Wenn P, dann nicht Q}\\ \text{Wenn nicht P, dann Q}\end{array}}{\text{Entweder P oder Q}}$$

Die Regel der Kontravalenzeinführung besagt: *Von einer Subjunktion mit negiertem Succedens und einer weiteren Subjunktion, die die Negation des Antecedens der ersten Subjunktion zum Antecedens und das unnegierte Succedens der ersten Subjunktion zum Succedens hat, darf auf eine Kontravalenz geschlossen werden, deren Kontravalenzglieder das unnegierte Antecedens und das unnegierte Succedens der beiden Subjunktionen bilden*:

$\mathrm{k}_1,\ldots,\mathrm{k}_\mathrm{r}$	(k)	$\mathrm{P} \rightarrow \neg\mathrm{Q}$	
$\mathrm{l}_1,\ldots,\mathrm{l}_\mathrm{s}$	(l)	$\neg\mathrm{P} \rightarrow \mathrm{Q}$	
$\mathrm{k}_1,\ldots,\mathrm{l}_\mathrm{s}$	(m)	$\mathrm{P} \nleftrightarrow \mathrm{Q}$	$\nleftrightarrow$E, k, l

1.1.1.10 Aufgaben

Beurteilen Sie mit Hilfe der oben eingeführten Darstellungsform und aufgrund der vorgenommenen Normierungen die Gültigkeit der folgenden Schlüsse.

a) „Wenn die Verordnung in Kraft tritt, dann haben ihr mindestens zwei Drittel zugestimmt. Wenn der Verordnung mindestens zwei Drittel zugestimmt haben, dann tritt sie in Kraft. Demnach gilt: Die Verordnung tritt genau dann in Kraft, wenn ihr mindestens zwei Drittel zugestimmt haben.“

b) „Wenn die Verordnung in Kraft tritt, dann wurde sie von mindestens einem Drittel nicht abgelehnt. Wenn die Verordnung nicht in Kraft tritt, dann wurde sie von mindestens einem Drittel abgelehnt. Daraus folgt: Entweder tritt die Verordnung in Kraft, oder mindestens ein Drittel hat sie abgelehnt.“

c) „Entweder es regnet, oder es regnet nicht. Nun regnet es. Also regnet es nicht, denn (bei ‚r‘ für ‚Es regnet‘):

1	(1)	$\mathrm{r} \nleftrightarrow \neg\mathrm{r}$	A
2	(2)	r	A
1	(3)	$\mathrm{r} \rightarrow \neg\mathrm{r}$	$\nleftrightarrow$B, 1
1, 2	(4)	$\neg\mathrm{r}$	$\rightarrow$B, 3, 2

d) „Tina bringt Ulla oder Claudia mit. Ulla ist Krank. Also bringt Tina Claudia mit.“ (Bevor Sie loslegen: Wäre es mit der ersten Aussage vereinbar, dass Tina Ulla *und* Claudia mitbringt?)

1.1.1.11 Die Bindungsstärke der Junktoren

Bisher haben wir bei der formalen Wiedergabe umgangssprachlicher Aussagen runde Klammern zur Strukturierung verwendet (wie sie ja in der

Schriftsprache des Deutschen auch verwendet werden, wo außerdem noch andere Zeichen diese Funktion erfüllen, wie Punkte, Kommata usw.). Diese Gebrauchsweise wird auch weiterhin beibehalten, wobei fortan auch eckige Klammern zu diesem Zweck verwendet werden dürfen. Runde und eckige Klammern sollen in der formalen Schreibweise als *Gruppierungszeichen* dienen. Auf die Gruppierungszeichen kann überall dort verzichtet werden, wo der Ausdruck schon eindeutig strukturiert ist. Eine solche Eindeutigkeit kann allein schon deshalb vorliegen, weil die einzelnen Junktoren unterschiedliche *Bindungsstärken* besitzen. Die Reihenfolge der Bindungsstärke ist $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\nleftrightarrow$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, wobei $\neg$ am stärksten und $\leftrightarrow$ am schwächsten bindet. Da die Klammereinsparungsregel eine Kann-Bestimmung ist, dürfen Klammern auch in Ausdrücken verwendet werden, wo sie sich aufgrund der Bindungsstärke als redundant erweisen.

Das Konzept, verschiedenen Verknüpfungszeichen unterschiedliche Bindungsstärken zuzuweisen, ist den meisten Lesern vermutlich aus der Mathematik bekannt, wo die Formel „Punktrechnung vor Strichrechnung" besagt, dass beispielsweise der Term $x \cdot y + z$ als $(x \cdot y) + z$, und nicht als $x \cdot (y + z)$ zu lesen ist.

1.1.1.12 Aufgaben

Geben Sie die folgenden Ausdrücke mit Klammern wieder, wenn sie klammerfrei sind und so weit wie möglich ohne Klammern wieder, wenn sie mit Klammern gebildet sind. Der jeweilige Sinn der Ausdrücke darf sich dabei nicht ändern.

a) $\mathrm{a} \rightarrow \mathrm{b} \vee \mathrm{c}$

b) $\mathrm{a} \wedge \mathrm{b} \vee \mathrm{c} \nleftrightarrow \mathrm{d}$

c) $\mathrm{d} \nleftrightarrow \mathrm{e} \leftrightarrow \neg \mathrm{f}$

d) $(\mathrm{a} \wedge \mathrm{b}) \rightarrow \mathrm{d}$

e) $(\mathrm{a} \leftrightarrow \mathrm{b}) \nleftrightarrow [\,\mathrm{d} \vee (\neg \mathrm{a} \wedge \mathrm{b})\,]$

1.1.2 Ein Kalkül des natürlichen Schließens

Auf den vorangehenden Seiten wurde die Gültigkeit von Schlüssen auf deren formale Gültigkeit zurückgeführt. Es zeigte sich, dass die formale Gültigkeit auf der Verwendungsweise bestimmter Partikel, die wir als „Junktoren" bezeichneten, beruht, da diese die Form von Aussagen festlegen und die Aussageform wiederum bestimmt, welche Aussagen mit welcher Form daraus erschlossen werden können. Den alltäglichen intuitiven Gebrauch dieser Formwörter haben wir expliziert, indem wir für jedes dieser Wörter eine sog. Einführungsregel und eine sog. Beseitigungsregel formulierten, wobei die Einführungsregeln angeben, wann *auf* eine komplexere Aussage geschlossen werden darf und die Beseitigungsregeln angeben, wann *aus* einer komplexeren Aussage geschlossen werden darf. Die Gesamtheit dieser Regeln bildet den *(aussagenlogischen) Kalkül des Natürlichen Schließens*, kurz *KNS*. Ganz allgemein ist ein Kalkül ein Herstellungsverfahren von Zeichenreihen. Tatsächlich sind wir mit Hilfe unserer Regeln in der Lage, bestimmte Zeichenreihen in beliebiger Anzahl zu erzeugen. Unsere Zeichen sind jedoch bereits gedeutete Zeichen, sie stehen für Formen von natürlichsprachlichen Aussagen. Insofern beansprucht der hier eingeführte Kalkül ein Kalkül des *natürlichen Schließens* zu sein, d. h. der Form natürlichsprachlicher Argumentation zu entsprechen.[5] Der KNS spricht also *über* die Umgangssprache, indem er Regeln *für* diese angibt; er ist damit eine Methode, die Frage nach der formalen Gültigkeit von Schlüssen zu entscheiden.

Es ist durchaus denkbar (und immer wieder vorgekommen), dass jemand den Vorwurf erhebt, die hier vorgestellten Gebrauchsregeln der Junktoren unterstellten unhinterfragt eine „normative Kraft des Faktischen,“ indem sie die Rolle der Junktoren in tatsächlichen Argumentationen zu Vorschriften korrekten Schlussfolgerns erklärten. Und wenn nun jemand nicht bereit wäre, diese Regeln anzuerkennen, hieße das nicht, dass eine argumentative Auseinandersetzung mit dieser Person unmöglich wäre? Das heißt es nicht. Vorausgesetzt, diese Person ist bereit zu argumentieren, d. h. irgendwelchen (widerspruchsfreien) Regeln zu folgen, und vorausgesetzt, diese Person ist bereit, diese Regeln zu nennen, so ist eine Argumentation mit ihr möglich. Für argumentative Auseinandersetzung ist es also hinreichend, ein (widerspruchsfreies) Regelwerk anzuerkennen und dieses Regelwerk explizit angeben zu können.[6]

Ein weiterer Einwand gegen das Konzept, mit einem Kalkül der hier vorgestellten Art umgangssprachlich formulierte Argumentationen zu bewerten, zielt auf die Legitimität der dabei vorzunehmenden „Übersetzung“ in standardisierte Formen. Dazu ist zu sagen, dass solche Übersetzungen in den Fällen, in denen sich der Autor des Argumentes dazu äußern kann, unproblematisch sind. Anders liegt die Sache natürlich, wenn ein Rückfragen

[5] Der KNS stammt ursprünglich von Gerhard Gentzen und wurde von Hans Hermes und Willard van Orman Quine weiterentwickelt. Unabhängig von Gentzen entwarf auch Stanisłav Jaśkowsky einen KNS (vgl. Gerhard Gentzen, „Untersuchungen über das logische Schließen“, *Mathematische Zeitschrift* 39 (1934), 176–210; wieder abgedr. in Karel Berka/Lothar Kreiser (Hg.), *Logik-Texte. Kommentierte Auswahl zur Geschichte der modernen Logik*, Akademie-Verlag: Berlin 1971, 192–253; Stanisłav Jaśkowsky, „On the Rules of Suppositions in Formal Logic“, *Studia Logica* (Old Series) 1 (1934), 5–32; wieder abgedr. in: Storrs McCall (Hg.), *Polish Logic 1920–1939*, Clarendon: Oxford 1967, 232–258; Francis Jeffrey Pelletier, „A Brief History of Natural Deduction“, *History and Philosophy of Logic*, 20 (1999), 1–31).

[6] Dieses *Toleranzprinzip* wurde formuliert von Rudolf Carnap in *Die logische Syntax der Sprache*, Springer: Wien 1934, S. 45.

unmöglich ist, etwa weil das Argument einem Text entstammt, dessen Autor längst verstorben ist. In diesen Fällen bleibt in der Tat eine gewisse Unsicherheit hinsichtlich der Adäquatheit der vorgenommenen Übersetzung. Nicht umsonst gibt es eine eigenständige Disziplin – die Hermeneutik – die sich mit dem Problem des Verständnisses von Texten befasst. Die verbleibende Unsicherheit kann einen jedoch nicht von dem Versuch entbinden, die Intentionen des Autors zu rekonstruieren und insofern es um die argumentative Seite des Verständnisses geht, ist die Logik dafür ein geeignetes Mittel. Im übrigen können sich Übersetzungen dazu eignen, die Bedeutung einer oder mehrerer Aussagen erst klar heraus zu stellen. Dass eine solche Überlegung nicht auf die formale Logik beschränkt ist, zeigt die Auseinandersetzung des Philosophen Martin Heidegger mit dem Germanisten Emil Staiger um die richtige Lesart einer Zeile aus einem Gedicht von Mörike.[7]

1.1.2.1 Ableitungen, Beweise, Theoreme

Mit Hilfe des KNS dargestellte Schlüsse sollen von nun an *Ableitungen* genannt werden und die Aussage „Aus den Prämissen P_1 bis P_n ist die Konklusion K ableitbar“ soll geschrieben werden als „$P_1, \ldots, P_n \vdash K$“, wobei eine Zeichenfolge dieser Form von nun als *Sequenz* bezeichnet werden soll. Eine Ableitung ist also eine *Folge von Aussagen im KNS mit mindestens einer Regelanwendung*.

Da die Regel der Subjunktionseinführung eine Voraussetzung eliminiert (nämlich diejenige, die dann das Vorderglied der neuen Subjunktion bildet), sind in einer Ableitung Zeilen denkbar, die keinerlei Voraussetzungen mehr besitzen, wie nachfolgend die Zeile (3):

1	(1)	$P \wedge Q$	A
1	(2)	P	$\wedge$B, 1
	(3)	$(P \wedge Q) \rightarrow P$[8]	$\rightarrow$E, $\underline{1}$, 2

Eine Ableitung, die mit einer voraussetzungslosen Zeile endet, heiße *Beweis*, und die Aussage, die in dieser letzten, voraussetzungslosen Zeile steht, heiße *Theorem*. Ein Beweis ist also eine Ableitung, deren letzte Zeile von nichts abhängt, und ein Theorem ist eine Aussage in der letzten Zeile eines Beweises. Es gelten demnach folgende Verhältnisse:

[7] Vgl. Martin Heidegger, *GA* 13, Klostermann: Frankfurt/Main 1983, 93–109.

[8] In diesem Ausdruck hätte aufgrund der höheren Bindungsstärke der Konjunktion gegenüber der Subjunktion auf die Klammern verzichtet werden können.

<u>Ableitung</u>	<u>Beweis</u>
„K ist (aus P) ableitbar" („$\mathrm{P} \vdash \mathrm{K}$")	„K ist beweisbar" („$\vdash \mathrm{K}$")

$$\begin{array}{lll} & (1) & \mathrm{P} \quad \text{(Prämisse)} \\ & \vdots & \\ \ldots & (n) & \mathrm{K} \quad \text{(Konklusion)} \end{array} \qquad \begin{array}{lll} & (1) & \mathrm{P} \quad \text{(Prämisse)} \\ & \vdots & \\ \emptyset & (n) & \mathrm{K} \quad \text{(Konklusion = Theorem)} \end{array}$$

Ein Beispiel für ein Theorem im KNS ist der sog. „Satz von der Identität"[9], der nachfolgend mit „SVI" wiedergegeben werden soll und die Form „$\mathrm{P} \rightarrow \mathrm{P}$" besitzt. Der Beweis für den Satz von der Identität (also der Beweis für die Sequenz $\vdash \mathrm{P} \rightarrow \mathrm{P}$) ist relativ überschaubar:

$$\begin{array}{llll} 1 & (1) & \mathrm{P} & \mathrm{A} \\ & (2) & \mathrm{P} \rightarrow \mathrm{P} & \rightarrow\mathrm{E}, \underline{1}, 1 \end{array}$$

Von einem Theorem soll gelten, dass es an jeder Stelle einer Ableitung eingeführt werden darf. Die Regel der Theoremeinführung lautet also:

$$(k) \quad \mathrm{TH} \quad \mathrm{KTH}$$

„TH" steht hier für das Theorem und „KTH" für das Kürzel des Theorems. Ein weiteres Theorem des KNS ist der sog. „Satz vom (ausgeschlossenen) Widerspruch", (auch „principium contradictionis exclusi") kurz „SVW", mit der Form „$\neg(\mathrm{P} \wedge \neg\mathrm{P})$". Auch dieses Theorem lässt sich ohne größeren Aufwand beweisen:

$$\begin{array}{llll} 1 & (1) & \mathrm{P} \wedge \neg\mathrm{P} & \mathrm{A} \\ & (2) & (\mathrm{P} \wedge \neg\mathrm{P}) \rightarrow (\mathrm{P} \wedge \neg\mathrm{P}) & \rightarrow\mathrm{E}, \underline{1}, 1 \\ & (3) & \neg(\mathrm{P} \wedge \neg\mathrm{P}) & \neg\mathrm{E}, 2 \end{array}$$

Als drittes und letztes Theorem sei hier der sog. „Satz vom (ausgeschlossenen) Dritten" (auch „tertium non datur") genannt, das wir künftig mit „SVD" abkürzen wollen und die Form „$\mathrm{P} \vee \neg\mathrm{P}$" besitzt.

1.1.2.2 Aufgaben

Geben Sie für die folgenden Sequenzen Ableitungen im KNS:

a) $\mathrm{P} \rightarrow \mathrm{P} \vdash \mathrm{P} \leftrightarrow \mathrm{P}$

b) $\vdash \mathrm{P} \leftrightarrow \mathrm{P}$

[9] Die Bezeichnung „Satz" wird hier aus rein historischen Gründen verwendet; unter einem Theorem im KNS sei stets eine Aussageform verstanden.

c) $\vdash P \vee \neg P$, beginnen Sie hier mit den folgenden Zeilen:

1	(1)	$\neg(P \vee \neg P)$	A
2	(2)	P	A

d) $P \wedge Q \vdash P \vee Q$

e) $\neg P \wedge \neg Q \vdash \neg P \vee \neg Q$

1.1.2.3 Indirektes Schlussfolgern

Die Verwendungsweise der Negation, wie wir sie in den Regeln der Negationseinführung und der Negationsbeseitigung expliziert haben, ermöglicht es, grundsätzlich auf zwei verschiedenen Wegen zu einer Konklusion zu gelangen. Dies kann einerseits *direkt* geschehen, so dass die Konklusion im Verlauf der Argumentation sozusagen Stück für Stück „zusammengebaut" wird. Auf diese Weise konnten die meisten der bislang betrachteten Schlüsse konstruiert werden. Es wurde aber auch schon von einer anderen Argumentationsstrategie Gebrauch gemacht, z. B. beim Beweis des Satzes vom Widerspruch (oder beim Beweis des SVD). Dort wurde zunächst die Negation des Satzes angenommen und gezeigt, dass diese Annahme einen Widerspruch impliziert, weshalb die Annahme mittels Negationseinführung negiert werden konnte. Es ist diese Strategie, weswegen die Negationseinführungsregel von alters her als „reductio ad absurdum" bezeichnet wird. Ein solches *indirektes* Vorgehen gründet auf folgender Strategie: Soll auf eine Aussage P geschlossen werden, so nimmt man zunächst $\neg P$ an mit dem Ziel, eine Aussage der Form $P \rightarrow (Q \wedge \neg Q)$ zu erhalten, so dass sich die Regel der Negationseinführung anwenden lässt. Der Versuch einer indirekten Schlussfolgerung zielt also auf folgenden Argumentationsverlauf:

	(m)	$\neg P$	
	$\vdots$		
…, m, …	(n-3)	$Q \wedge \neg Q$	$\wedge$E, …
	(n-2)	$\neg P \rightarrow (Q \wedge \neg Q)$	$\rightarrow$E, $\underline{m}$, n-3
	(n-1)	$\neg\neg P$	$\neg$E, n-2
	(n)	P	$\neg\neg$B, n-1

Steht die abzuleitende Aussage P in der letzten Zeile (n) der Ableitung, so haben die letzten vier Zeilen meist die angegebene Gestalt. Hängt die Zeile (n-3) von der Aussage der Zeile (m) allein ab, so handelt es sich um einen Beweis. Ein indirektes Vorgehen ist selbstverständlich auch dann möglich, wenn auf eine Aussage der Form $\neg P$ geschlossen werden soll. In diesem Fall ist eine Aussage der Form P (oder $\neg\neg P$) als Annahme zu setzen und auf einen Widerspruch zu führen. Der letzte Schritt der Negationsbeseitigung kann dann im Falle von P als Annahme entfallen.

1.1.2.4 Aufgaben

Beurteilen Sie mit Hilfe des KNS die folgenden Schlüsse:

a) „Sie kommen um 18 Uhr oder sie haben den Zug nicht mehr erreicht. Sie haben den Zug aber erreicht. Also kommen sie um 18 Uhr.“

b) „Wenn sowohl das Flusswasser als auch das Grundwasser verseucht sind, dann ist der Landstrich unbewohnbar. Der Landstrich ist aber seit Jahrzehnten bewohnt. Demnach ist zumindest nicht beides verseucht.“

c) „Kant war ein deutscher Philosoph und Hegel war ein deutscher Philosoph. Wenn Hegel ein deutscher Philosoph war, dann schrieb er auf deutsch. Wenn Hegel auf deutsch schrieb, dann ist er verständlich. Also ist Hegel verständlich.“

1.1.2.5 Grundregeln und zulässige Regeln des KNS

Die bisher eingeführten Regeln sollen *die Grundregeln* des KNS genannt werden. Sie legen den Gebrauch der gängigsten Junktoren fest. Die Menge der Grundregeln ist hinreichend, um jeden Schluss auf seine (aussagenlogische) Gültigkeit zu prüfen. Für die Ableitungspraxis empfiehlt es sich allerdings, weitere Regeln zu besitzen, die als „Abkürzungen“ innerhalb von Ableitungen fungieren. Solche *zulässige Regeln* erlauben den Übergang von einem Ausdruck im KNS zu einem anderen Ausdruck im KNS, der gerechtfertigt werden kann allein unter Verwendung der Grundregeln. Exakt beschreiben lassen sich zulässige Regeln als *theoretisch überflüssig und praktisch unentbehrlich*. Die erste dieser Regeln, die wir betrachten wollen, ist das so genannte „Stabilitätsprinzip“, kurz „SP“, das durch die Gültigkeit der Sequenz $\mathrm{P} \vdash \neg\neg\mathrm{P}$ gerechtfertigt ist:

1	(1)	P	A
2	(2)	$\neg\mathrm{P}$	A
1, 2	(3)	$\mathrm{P} \wedge \neg\mathrm{P}$	$\wedge$E, 1, 2
1	(4)	$\neg\mathrm{P} \to (\mathrm{P} \wedge \neg\mathrm{P})$	$\to$E, $\underline{2}$, 3
1	(5)	$\neg\neg\mathrm{P}$	$\neg$E, 4

Die zulässige Regel des Stabilitätsprinzips lautet demnach: *Jede Aussage darf doppelt negiert werden*:

$\mathrm{k}_1, \ldots, \mathrm{k}_\mathrm{s}$	(k)	P	
$\mathrm{k}_1, \ldots, \mathrm{k}_\mathrm{s}$	(l)	$\neg\neg\mathrm{P}$	SP, k

Eine weitere zulässige Regel bildet die „Hypothetische Abschwächung“, kurz „HA“, die besagt, dass vor jede Aussage ein beliebiges Antecedens gestellt werden kann:

$$\begin{array}{rcll} k_1,\ldots,k_s & (k) & P & \\ k_1,\ldots,k_s & (l) & Q \rightarrow P & \mathrm{HA}, k \end{array}$$

Diese Regel mag auf den ersten Blick kontraintuitiv erscheinen, die recht übersichtliche Ableitung von $Q \rightarrow P$ aus P zeigt jedoch deren Richtigkeit:

$$\begin{array}{rcll} 1 & (1) & P & \mathrm{A} \\ 2 & (2) & Q & \mathrm{A} \\ 1,2 & (3) & P \wedge Q & \wedge\mathrm{E}, 1, 2 \\ 1,2 & (4) & P & \wedge\mathrm{B}, 3 \\ 1 & (5) & Q \rightarrow P & \rightarrow\mathrm{E}, \underline{2}, 4 \end{array}$$

Im Gegensatz zur HA ist der „Kettenschluss“ (KS), d. h. $P \rightarrow Q,\ Q \rightarrow R \vdash P \rightarrow R$, nahezu jedermann einsichtig:

$$\begin{array}{rcll} k_1,\ldots,k_r & (k) & P \rightarrow Q & \\ l_1,\ldots,l_s & (l) & Q \rightarrow R & \\ k_1,\ldots,l_s & (m) & P \rightarrow R & \mathrm{KS}, k, l \end{array}$$

Eine weitere Regel im KNS ist der „Modus tollens“ (MT), der besagt, dass $P \rightarrow Q,\ \neg Q \vdash \neg P$:

$$\begin{array}{rcll} k_1,\ldots,k_r & (k) & P \rightarrow Q & \\ l_1,\ldots,l_s & (l) & \neg Q & \\ k_1,\ldots,l_s & (m) & \neg P & \mathrm{MT}, k, l \end{array}$$

Der „Disjunktive Syllogismus“ (DS) besagt $P \nleftrightarrow Q,\ P \vdash \neg Q$ bzw. $P \nleftrightarrow Q,\ Q \vdash \neg P$:

(I)

$$\begin{array}{rcll} k_1,\ldots,k_r & (k) & P \nleftrightarrow Q & \\ l_1,\ldots,l_r & (l) & P & \\ k_1,\ldots,l_r & (m) & \neg Q & \mathrm{DS}, k, l \end{array}$$

(II)

$$\begin{array}{rcll} k_1,\ldots,k_r & (k) & P \nleftrightarrow Q & \\ l_1,\ldots,l_r & (l) & Q & \\ k_1,\ldots,l_r & (m) & \neg P & \mathrm{DS}, k, l \end{array}$$

Die (aussagenlogische) Kontraposition (KP) besagt $P \rightarrow Q \dashv\vdash \neg Q \rightarrow \neg P$ (das Zeichen $\dashv\vdash$ bedeutet, dass die Sequenz *in beide Richtungen* laufen soll, so dass die Regel zwei Anwendungsfälle kennt, nämlich $P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P$ sowie $\neg Q \rightarrow \neg P \vdash P \rightarrow Q$):

(I)

$$\begin{array}{rcll} k_1,\ldots,k_r & (k) & P \rightarrow Q & \\ k_1,\ldots,k_r & (k) & \neg Q \rightarrow \neg P & \mathrm{KP}, k \end{array}$$

(II)

$$\begin{array}{rcll} k_1,\ldots,k_r & (k) & \neg Q \rightarrow \neg P & \\ k_1,\ldots,k_r & (k) & P \rightarrow Q & \mathrm{KP}, k \end{array}$$

Das konstruktive Dilemma (KD) besagt $P \vee Q$, $P \to R$, $Q \to R \vdash R$:

$k_1,\dots,k_r$	(k)	$P \vee Q$	
$l_1,\dots,l_s$	(l)	$P \to R$	
$m_1,\dots,m_s$	(m)	$Q \to R$	
$k_1,\dots,m_s$	(n)	R	KD, k, l, m

Die letzten hier eingeführten zulässigen Regeln sind die beiden „De Morganschen Regeln"[10] (DM), die durch die Sequenzen $\neg(P \wedge Q) \dashv\vdash \neg P \vee \neg Q$ und $\neg P \wedge \neg Q \dashv\vdash \neg(P \vee Q)$ ausgedrückt werden können und folgende Übergänge in einer Ableitung erlauben:

(Ia)

$k_1,\dots,k_r$	(k)	$\neg(P \wedge Q)$	
$k_1,\dots,k_r$	(l)	$\neg P \vee \neg Q$	DM, k

(Ib)

$k_1,\dots,k_r$	(k)	$\neg P \vee \neg Q$	
$k_1,\dots,k_r$	(l)	$\neg(P \wedge Q)$	DM, k

(IIa)

$k_1,\dots,k_r$	(k)	$\neg P \wedge \neg Q$	
$k_1,\dots,k_r$	(l)	$\neg(P \vee Q)$	DM, k

(IIb)

$k_1,\dots,k_r$	(k)	$\neg(P \vee Q)$	
$k_1,\dots,k_r$	(l)	$\neg P \wedge \neg Q)$	DM, k

Jede Regel, gleichgültig ob Grundregel oder zulässige Regel, kann, sofern die Voraussetzungen erfüllt sind, beliebig oft angewendet werden; auch kann jedes Theorem beliebig oft eingeführt werden. Das mag in den meisten Fällen sinnlos erscheinen (ist es tatsächlich auch), aber es ist erlaubt, da ja dadurch nichts Falsches entsteht. So ist das nachfolgende „bunte Treiben" vom formalen Standpunkt durchaus korrekt, wenn auch nicht gerade zielführend:

[10] Benannt nach dem englischen Logiker Augustus De Morgan (1806–1871).

1	(1)	a	A
2	(2)	b	A
1,2	(3)	$a \wedge b$	$\wedge$E, 1, 2
1,2	(4)	$b \wedge (a \wedge b)$	$\wedge$E, 2, 3
1,2	(5)	$[b \wedge (a \wedge b)] \wedge a$	$\wedge$E, 4, 1
2	(6)	$a \to [b \wedge (a \wedge b)] \wedge a$	$\to$E, $\underline{1}$, 5
	(7)	$b \to [a \to [b \wedge (a \wedge b)] \wedge a]$	$\to$E, $\underline{2}$, 6
1,2	(8)	$b \vee c$	$\vee$E, 2
1,2	(9)	$b \vee c$	$\vee$E, 2
	(10)	$(b \to a) \vee \neg(b \to a)$	SVD
	(11)	$(b \to a) \vee \neg(b \to a)$	SVD
1,2	(12)	$(b \wedge g) \to (b \vee c)$	HA, 8
1,2	(13)	$(a \wedge f) \to (b \vee c)$	HA, 8
14	(14)	$(b \to a) \vee \neg(b \to a)$	A
15	(15)	b	A
16	(16)	$a \wedge b$	A
1,2	(17)	$\neg b \vee \neg(a \wedge b)$	DM, 4
1,2	(18)	$\neg b \vee \neg(a \wedge b)$	DM, 4
19	(19)	$\neg b \vee \neg(a \wedge b)$	A
16	(20)	a	$\wedge$B, 16

1.1.2.6 Aufgaben

a) Beweisen Sie KS, MT, DS, KP, KD und DM.

b) Beurteilen Sie mit Hilfe des KNS den folgenden Schluss: „Der Beweis ist sophistisch oder Achilles holt die Schildkröte ein. Wenn Achilles die Schildkröte einholt, dann versagt die Logik. Die Mathematiker haben alles geprüft und die Logik versagt nicht. Also ist der Beweis sophistisch."

1.2 Logik als Theorie formal wahrer Aussagen

1.2.1 Wahrheitswerttabellen

In Kapitel 1.1 wurde Logik als eine Theorie über die *Gültigkeit von Argumenten* eingeführt, in der bestimmte *Regelanwendungen* im Mittelpunkt der Betrachtung stehen. Man kann Logik aber auch als eine Theorie über die *Wahrheit von Aussagen* betrachten. Auch bei diesem Ansatz stehen die Junktoren im Mittelpunkt, denn sie sind es, die über die Wahrheit einer zusammengesetzten Aussage entscheiden. Sie tun dies aufgrund der Wahrheit bzw. Falschheit der Teilaussagen. So ist beispielsweise eine Konjunktion genau dann wahr, wenn ihre beiden Teilaussagen wahr sind. Geht man davon aus, dass jede Aussage entweder wahr oder falsch ist (oder anders ausgedrückt: dass jede Aussage genau einen der beiden *Wahrheitswerte* „wahr“ oder „falsch“ besitzt), dann muss man bei einer Konjunktion (überhaupt bei jeder aus zwei Teilaussagen bestehenden Aussage) insgesamt vier Fälle bezüglich der Wahrheitswertverteilung unterscheiden: (1) beide Teilaussagen können wahr sein, (2) die erste Teilaussage kann wahr, die zweite falsch sein, (3) die erste kann falsch, die zweite wahr sein, (4) beide Teilaussagen können falsch sein.

Diese Verteilung und die entsprechende Zuordnung des Wahrheitswertes lässt sich übersichtlicher in tabellarischer Form darstellen. Dabei soll im Folgenden „wahr“ mit „1“ und „falsch“ mit „0“ abgekürzt werden, so dass sich für eine Konjunktion folgende Tabelle ergibt:

P	Q	P ∧ Q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Diese so genannte *Wahrheitswerttabelle* bringt auf übersichtliche Weise die Bedeutung einer Konjunktion zum Ausdruck, nämlich dass von insgesamt vier möglichen Fällen nur die als wahr behauptet wird, bei der beide Teilaussagen wahr sind. So ist die Aussage „Die Erde ist ein Planet und kreist um die Sonne“ nur dann wahr, wenn sowohl wahr ist, dass die Erde ein Planet ist, als auch, dass die Erde um die Sonne kreist. Im Gegensatz dazu ist die Aussage „Die Erde ist ein Planet oder kreist um die Sonne“ bereits dann wahr, wenn die Erde ein Planet ist oder wenn sie um die Sonne kreist, da eine Adjunktion die folgende *Wahrheitswertverteilung* besitzt:

P	Q	P ∨ Q
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Entsprechend lassen sich auch die anderen bislang verwendeten Junktoren – Kontravalenz, Äquivalenz und Subjunktion beschreiben. Bei der unmittelbaren Nebeneinanderstellung werden auch die spezifischen Unterschiede zwischen diesen Junktoren deutlich. So zeigt sich in der nachfolgenden Tabelle, inwiefern die Kontravalenz als das Gegenteil der Äquivalenz anzusehen ist (was auch dem dafür verwendeten Zeichen des durchgestrichenen Doppelpfeils zum Ausdruck kommt) und was wiederum die Äquivalenz – also das „genau dann, wenn“ – von der Subjunktion – also dem „wenn-dann“ unterscheidet:

P	Q	$P \not\leftrightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$	$P \rightarrow Q$
1	1	0	1	1
1	0	1	0	0
0	1	1	0	1
0	0	0	1	1

Die Negation ist ein einstelliger Junktor, da sie sich nur auf eine Aussage bezieht. Deshalb benötigt die sie definierende Tabelle weniger Zeilen:

P	$\neg P$
1	0
0	1

Diese in tabellarischer Form gegebenen Festlegungen bilden zugleich Vorschriften für die Bestimmung von *Wahrheitswertverläufen* komplexerer Aussagen, wie das folgende Beispiel zeigt:[11]

P	Q	$P \rightarrow Q$	$(P \rightarrow Q) \wedge P$	$[(P \rightarrow Q) \wedge P] \rightarrow Q$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

Die Tatsache, dass bei diesem Beispiel in der letzten Spalte nur Einsen stehen bedeutet, dass eine Aussage der Form $[(P \rightarrow Q) \wedge P] \rightarrow Q$ immer wahr ist, gleichgültig welche Wahrheitswerte die einzelnen Teilaussagen besitzen. Solche Aussagen nennt man *formal wahre Aussagen* (deshalb, weil sie allein schon aufgrund ihrer Form wahr sind) bzw. *Tautologien*. Dementsprechend spricht man von *formal falschen Aussagen* bzw. von *Kontradiktionen*, wenn die Aussage zu einer Spalte gehört, die ausschließlich aus Nullen besteht. Wie die folgende Tabelle zeigt, liegt ein solcher Fall z. B. bei $\neg(P \rightarrow P)$ vor:

P	P	$P \rightarrow P$	$\neg(P \rightarrow P)$
1	1	1	0
0	0	1	0

In diesem Falle kann man auf die zweite Spalte verzichten, und kürzer schreiben:

[11] Das Beispiel verdeutlicht auch, wie sich die Größe einer Wahrheitswerttabelle bemisst. Die Höhe wird allein durch die Anzahl der *verschiedenen* Variablen bestimmt (bei n *verschiedenen* Variablen ergeben sich 2^n Zeilen), die Breite durch die Anzahl der *verschiedenen* Variablen plus die Anzahl der Junktoren in der längsten Aussage (bei n *verschiedenen* Variablen und m Junktoren ergeben sich $m + n$ Spalten).

P	P → P	¬(P → P)
1	1	0
0	1	0

Enthält eine Spalte sowohl Einsen als auch Nullen, so bezeichnet man die zugehörige Aussage als *kontingent*. Ein Beispiel dafür wäre etwa eine Aussage der Form (P ∧ Q) ↔ ¬R:

P	Q	R	P ∧ Q	¬R	(P ∧ Q) ↔ ¬R
1	1	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0
0	0	1	0	0	1
0	0	0	0	1	0

Mit Hilfe von Wahrheitswerttabellen lassen sich auch Schlüsse auf ihre Gültigkeit prüfen, denn wenn ein Schluss der Form „$P_1, \ldots, P_n \vdash K$“ formal gültig ist, dann ist die Aussage der Form „$P_1 \wedge \ldots \wedge P_n \rightarrow K$“ formal wahr; dementsprechend ist bei der wechselseitigen Ableitbarkeit „$P_1, \ldots, P_n \dashv\vdash K$“ die Aussage der Form „$P_1 \wedge \ldots \wedge P_n \leftrightarrow K$“ formal wahr. So kann man aufgrund der bereits gezeigten Ableitung von P ↮ Q, P ⊢ ¬Q (Disjunktiver Syllogismus) davon ausgehen, dass die entsprechende Aussage der Form [(P ↮ Q) ∧ P] → ¬Q tautologisch ist, was in der Tat der Fall ist:

P	Q	P ↮ Q	(P ↮ Q) ∧ P	¬Q	[(P ↮ Q) ∧ P] → ¬Q
1	1	0	0	0	1
1	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1
0	0	0	0	1	1

1.2.2 Aufgaben

a) Erstellen Sie Wahrheitswerttabellen für KS, MT, DS, KP, KD und DM.

b) Beurteilen Sie mit Hilfe von Wahrheitswerttabellen die folgenden Aussageformen:

1. $(P \wedge Q) \rightarrow Q$
2. $(P \wedge Q) \rightarrow (P \vee Q)$
3. $(P \wedge Q) \rightarrow [P \rightarrow ((Q \wedge Q) \vee \neg P)]$
4. $[P \rightarrow (Q \rightarrow R)] \rightarrow [Q \rightarrow (P \rightarrow R)]$

5. $(P \to P) \to (P \leftrightarrow P)$
6. $P \to (P \leftrightarrow P)$
7. $(\neg P \vee \neg Q) \leftrightarrow (P \to \neg Q)$
8. $[P \vee (Q \wedge R)] \leftrightarrow [(P \vee Q) \wedge (P \vee R)]$
9. $[(P \leftrightarrow Q) \wedge (Q \leftrightarrow R)] \to (P \leftrightarrow R)$

1.3 Logik als Theorie formal wahrer Aussagen

1.3.1 Wahrheitswerttabellen

In Kapitel 1.1 wurde Logik als eine Theorie über die *Gültigkeit von Argumenten* eingeführt, in der bestimmte *Regelanwendungen* im Mittelpunkt der Betrachtung stehen. Man kann Logik aber auch als eine Theorie über die *Wahrheit von Aussagen* betrachten. Auch bei diesem Ansatz stehen die Junktoren im Mittelpunkt, denn sie sind es, die über die Wahrheit einer zusammengesetzten Aussage entscheiden. Sie tun dies aufgrund der Wahrheit bzw. Falschheit der Teilaussagen. So ist beispielsweise eine Konjunktion genau dann wahr, wenn ihre beiden Teilaussagen wahr sind. Geht man davon aus, dass jede Aussage entweder wahr oder falsch ist (oder anders ausgedrückt: dass jede Aussage genau einen der beiden *Wahrheitswerte* „wahr" oder „falsch" besitzt), dann muss man bei einer Konjunktion (überhaupt bei jeder aus zwei Teilaussagen bestehenden Aussage) insgesamt vier Fälle bezüglich der Wahrheitswertverteilung unterscheiden: (1) beide Teilaussagen können wahr sein, (2) die erste Teilaussage kann wahr, die zweite falsch sein, (3) die erste kann falsch, die zweite wahr sein, (4) beide Teilaussagen können falsch sein.

Diese Verteilung und die entsprechende Zuordnung des Wahrheitswertes lässt sich übersichtlicher in tabellarischer Form darstellen. Dabei soll im Folgenden „wahr" mit „1" und „falsch" mit „0" abgekürzt werden, so dass sich für eine Konjunktion folgende Tabelle ergibt:

P	Q	P ∧ Q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Diese so genannte *Wahrheitswerttabelle* bringt auf übersichtliche Weise die Bedeutung einer Konjunktion zum Ausdruck, nämlich dass von insgesamt vier möglichen Fällen nur die als wahr behauptet wird, bei der beide Teilaussagen wahr sind. So ist die Aussage „Die Erde ist ein Planet und kreist um die Sonne" nur dann wahr, wenn sowohl wahr ist, dass die Erde ein Planet ist, als auch, dass die Erde um die Sonne kreist. Im Gegensatz dazu ist die Aussage „Die Erde ist ein Planet oder kreist um die Sonne" bereits dann wahr, wenn die Erde ein Planet ist oder wenn sie um die Sonne kreist, da eine Adjunktion die folgende *Wahrheitswertverteilung* besitzt:

P	Q	P ∨ Q
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Entsprechend lassen sich auch die anderen bislang verwendeten Junktoren – Kontravalenz, Äquivalenz und Subjunktion beschreiben. Bei der unmittelbaren Nebeneinanderstellung werden auch die spezifischen Unterschiede zwischen diesen Junktoren deutlich. So zeigt sich in der nachfolgenden Tabelle, inwiefern die Kontravalenz als das Gegenteil der Äquivalenz anzusehen ist (was auch dem dafür verwendeten Zeichen des durchgestrichenen Doppelpfeils zum Ausdruck kommt) und was wiederum die Äquivalenz – also das „genau dann, wenn“ – von der Subjunktion – also dem „wenn-dann“ unterscheidet:

P	Q	$\mathrm{P} \nleftrightarrow \mathrm{Q}$	$\mathrm{P} \leftrightarrow \mathrm{Q}$	$\mathrm{P} \rightarrow \mathrm{Q}$
1	1	0	1	1
1	0	1	0	0
0	1	1	0	1
0	0	0	1	1

Die Negation ist ein einstelliger Junktor, da sie sich nur auf eine Aussage bezieht. Deshalb benötigt die sie definierende Tabelle weniger Zeilen:

P	$\neg\mathrm{P}$
1	0
0	1

Diese in tabellarischer Form gegebenen Festlegungen bilden zugleich Vorschriften für die Bestimmung von *Wahrheitswertverläufen* komplexerer Aussagen, wie das folgende Beispiel zeigt:[12]

P	Q	$\mathrm{P} \rightarrow \mathrm{Q}$	$(\mathrm{P} \rightarrow \mathrm{Q}) \wedge \mathrm{P}$	$[(\mathrm{P} \rightarrow \mathrm{Q}) \wedge \mathrm{P}] \rightarrow \mathrm{Q}$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

Die Tatsache, dass bei diesem Beispiel in der letzten Spalte nur Einsen stehen bedeutet, dass eine Aussage der Form $[(\mathrm{P} \rightarrow \mathrm{Q}) \wedge \mathrm{P}] \rightarrow \mathrm{Q}$ immer wahr ist, gleichgültig welche Wahrheitswerte die einzelnen Teilaussagen besitzen. Solche Aussagen nennt man *formal wahre Aussagen* (deshalb, weil sie allein schon aufgrund ihrer Form wahr sind) bzw. *Tautologien*. Dementsprechend spricht man von *formal falschen Aussagen* bzw. von *Kontradiktionen*, wenn die Aussage zu einer Spalte gehört, die ausschließlich aus Nullen besteht. Wie die folgende Tabelle zeigt, liegt ein solcher Fall z. B. bei $\neg(\mathrm{P} \rightarrow \mathrm{P})$ vor:

[12] Das Beispiel verdeutlicht auch, wie sich die Größe einer Wahrheitswerttabelle bemisst. Die Höhe wird allein durch die Anzahl der *verschiedenen* Variablen bestimmt (bei n *verschiedenen* Variablen ergeben sich 2^n Zeilen), die Breite durch die Anzahl der *verschiedenen* Variablen plus die Anzahl der Junktoren in der längsten Aussage (bei n *verschiedenen* Variablen und m Junktoren ergeben sich $\mathrm{m} + \mathrm{n}$ Spalten).

P	P	P → P	¬(P → P)
1	1	1	0
0	0	1	0

In diesem Falle kann man auf die zweite Spalte verzichten, und kürzer schreiben:

P	P → P	¬(P → P)
1	1	0
0	1	0

Enthält eine Spalte sowohl Einsen als auch Nullen, so bezeichnet man die zugehörige Aussage als *kontingent*. Ein Beispiel dafür wäre etwa eine Aussage der Form $(P \wedge Q) \leftrightarrow \neg R$:

P	Q	R	P ∧ Q	¬R	(P ∧ Q) ↔ ¬R
1	1	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0
0	0	1	0	0	1
0	0	0	0	1	0

Mit Hilfe von Wahrheitswerttabellen lassen sich auch Schlüsse auf ihre Gültigkeit prüfen, denn wenn ein Schluss der Form „$P_1, \ldots, P_n \vdash K$“ formal gültig ist, dann ist die Aussage der Form „$P_1 \wedge \ldots \wedge P_n \rightarrow K$“ formal wahr; dementsprechend ist bei der wechselseitigen Ableitbarkeit

„$P_1, \ldots, P_n \dashv\vdash K$“ die Aussage der Form „$P_1 \wedge \ldots \wedge P_n \rightarrow K$“ formal wahr.

. So kann man aufgrund der bereits gezeigten Ableitung von $P \nleftrightarrow Q$, $P \vdash \neg Q$ (Disjunktiver Syllogismus) davon ausgehen, dass die entsprechende Aussage der Form $[(P \nleftrightarrow Q) \wedge P] \rightarrow \neg Q$ tautologisch ist, was in der Tat der Fall ist:

P	Q	P ↮ Q	(P ↮ Q) ∧ P	¬Q	[(P ↮ Q) ∧ P] → ¬Q
1	1	0	0	0	1
1	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1
0	0	0	0	1	1

1.3.2 Aufgaben

a) Erstellen Sie Wahrheitswerttabellen für KS, MT, DS, KP, KD und DM.

b) Beurteilen Sie mit Hilfe von Wahrheitswerttabellen die folgenden Aussageformen:

1. $(P \wedge Q) \rightarrow Q$
2. $(P \wedge Q) \rightarrow (P \vee Q)$
3. $(P \wedge Q) \rightarrow [P \rightarrow ((Q \wedge Q) \vee \neg P)]$
4. $[P \rightarrow (Q \rightarrow R)] \rightarrow [Q \rightarrow (P \rightarrow R)]$
5. $(P \rightarrow P) \rightarrow (P \leftrightarrow P)$
6. $P \rightarrow (P \leftrightarrow P)$
7. $(\neg P \vee \neg Q) \leftrightarrow (P \rightarrow \neg Q)$
8. $[P \vee (Q \wedge R)] \leftrightarrow [(P \vee Q) \wedge (P \vee R)]$
9. $[(P \leftrightarrow Q) \wedge (Q \leftrightarrow R)] \rightarrow (P \leftrightarrow R)$

2
Prädikatenlogik

Betrachten wir den folgenden, viel zitierten Schluss:

Alle Menschen sind sterblich.
Sokrates ist ein Mensch.
___
Sokrates ist sterblich.

Dieses Argument kann mit den bisher eingeführten Mitteln der Aussagenlogik nicht überprüft werden. Um das zu können, muss man offensichtlich auch Prädikate wie *Mensch sein* oder *sterblich sein* formal erfassen. Dies soll künftig mit Großbuchstaben geschehen. Die Gegenstände, auf die diese Prädikate zutreffen, sollen im Gegensatz dazu mit Kleinbuchstaben formalisiert werden. Um auszudrücken, dass ein Ding eine bestimmte Eigenschaft besitzt, schreiben wir „Ex“, was gelesen wird als „Der Gegenstand (das Ding/ das Individuum) hat die Eigenschaft E“ bzw. „x ist (ein/e) E“ bzw. „E von x“, so dass „Mx“ etwa stehen könnte für „x ist ein Mensch“.

Das x ist hier kein Name für ein spezielles M, sondern ein Platzhalter für ein beliebiges Ding, einen beliebigen Gegensand mit der Eigenschaft M; x ist hier also eine Variable, genauer: eine *Gegenstandsvariable*. Wir könnten auch durchaus ein bestimmtes dieser Dinge, die M sind, herausgreifen und ihm einen Namen geben, es sozusagen taufen. Wir könnten dieses x beispielsweise „Sokrates“ nennen. Auch solche *Eigennamen* formalisieren wir künftig mit Kleinbuchstaben. Für die zweite Prämisse des obigen Schlusses („Sokrates ist ein Mensch“) könnte man demzufolge „Ms“ schreiben.

Die erste Prämisse „Alle Menschen sind sterblich“ konstatiert folgendes Verhältnis: Alle Dinge, die M sind, sind auch S. Anders formuliert: *Wenn* etwas M ist, *dann* ist es auch S; formalisiert also $\mathrm{Mx} \rightarrow \mathrm{Sx}$. Da dies auf alle Dinge zutreffen soll, die M sind (*Alle* Menschen sind sterblich), müssen wir in der Formalisierung noch eine *Quantifizierung* vornehmen. Dies wird bewerkstelligt mit Hilfe eines so genannten *Quantors*. In dem hier betrachteten Fall, in dem über *alle* geredet wird, mit Hilfe des so genannten *Allquantors*, der mit „$\forall$“ dargestellt wird und wie folgt in die Formalisierung zu integrieren ist: $\forall\mathrm{x}\,(\mathrm{Mx} \rightarrow \mathrm{Sx})$. Diese Formel wird wie folgt gelesen: „Für jedes Ding (für jedes Individuum/ für jeden Gegenstand), „x“ genannt, gilt: Wenn x ein M ist, dann ist x ein S“ bzw. – da wir M und S ja kennen: „Für jeden Gegenstand x gilt: Wenn x ein Mensch ist, dann ist x ein Sterblicher (bzw. sterblich)“ oder: „Alle Menschen sind sterblich“. Auch erlaubt ist zu sagen: „Für alle x: Wenn M von x, dann S von x.“ In dem Formelausdruck markieren die Klammern also die Reichweite bzw. den *Scope* des Quantors. Der Quantor bezieht sich auf alles innerhalb des ihm nachfolgenden Klammerpaars. Der

Ausdruck „$\forall x\,(Mx \rightarrow Sx)$“ ist demnach verschieden von „$\forall x\,(Mx) \rightarrow Sx$“, welcher bedeutet: „Wenn alle Dinge Menschen sind, dann ist x sterblich“. Wie im Falle der Junktoren, so bilden auch die durch die Quantoren bezeichneten sprachlichen Ausdrücke Standardisierungen für alle formgleichen Aussagen der Umgangssprache. Diese kennt als Variante zu „alle“ nicht nur die Worte „jede“ und „jeder“, sondern auch verschiedene Formulierungen, die ganz ohne explizite Quantifizierung auskommen. Die wichtigsten vier Formen sind:

1. Ersetzung des Quantors durch einen Artikel

   Beispiel: „Der Mensch ist ein Lebewesen.“

   Standardisierung: „Alle Menschen sind Lebewesen.“

2. Gänzlicher Wegfall des Quantors

   Beispiel: „Säugetiere sind Warmblüter.“

   Standardisierung: „Alle Säugetiere sind Warmblüter.“

3. Wendungen mit „nur“

   Beispiel: „Nur Bayern sind CSU-Wähler.“

   Standardisierung: „Alle CSU-Wähler sind Bayern.“[1]

4. Wendungen mit Relativpronomina

   Beispiel: „Wer nicht wagt, der nicht gewinnt.“

   Formalisierung: $\forall x\,(\neg Wx \rightarrow \neg Gx)$

Zur Verdeutlichung noch einige weitere Formalisierungen:

- Alle Blumen sind rot. = $\forall x\,(Bx \rightarrow Rx)$
- Alle Blumen sind nicht rot.[2] = $\forall x\,(Bx \rightarrow \neg Rx)$
- Nicht alle Blumen sind rot. = $\neg\forall x\,(Bx \rightarrow Rx)$
- Alle Dinge sind rot. = $\forall x\,(Rx)$ bzw. $\forall x\, Rx$
- Einige Dinge sind nicht rot. = $\neg\forall x\, Rx$

Die letzte Aussage ist identisch mit der Aussage „Nicht alles ist rot“, so dass sie auf die angegebene Weise formalisiert werden kann. Denkbar wäre in diesem Falle aber auch gewesen, einen anderen Quantor zu verwenden. In der Tat gibt es neben dem Allquantor den so genannten *Existenzquantor* $\exists$, der als „einige“ gelesen wird. Mit Hilfe des Existenzquantors hätte die letzte Aussage auch als „$\exists x \neg Rx$“ formalisiert werden können. Der Existenzquantor steht für

[1] Nicht: „Alle Bayern sind CSU-Wähler.“!

[2] Anders ausgedrückt: Keine Blume ist rot.

den Ausdruck „mindestens eins“ (weshalb er manchmal auch „Einsquantor“ genannt wird), so dass „$\exists x \neg Rx$“ wie folgt zu lesen ist: „Einiges ist nicht rot“ bzw. „Es gibt (mindestens) ein Ding (einen Gegenstand/ ein Individuum) von dem gilt, dass es nicht rot ist“ bzw. „Es existiert ein x, das nicht rot ist.“ Dementsprechend gelten folgende Formalisierungen:

- Einige Blumen sind rot. = $\exists x\,(Bx \wedge Rx)$[3]
- Einige Blumen sind nicht rot. = $\exists x\,(Bx \wedge \neg Rx)$
- Alle Blumen duften wunderbar, aber einige sind bereits verwelkt. = $\forall x\,(Bx \rightarrow Wx) \wedge \exists x\,(Bx \wedge Vx)$
- Einige Dinge sind Blumen. = $\exists x\,(Bx)$[4]

Der obige Schluss ist demnach wie folgt zu formalisieren:

Alle Menschen sind sterblich.	$\forall x\,(Mx \rightarrow Sx)$
Sokrates ist ein Mensch.	Ms
Sokrates ist sterblich.	Ss

Um die Gültigkeit dieses Schlusses zu prüfen, steht also die Sequenz $\forall x\,(Mx \rightarrow Sx),\ Ms \vdash Ss$ zur Debatte. Sequenzen dieser Art sind Gegenstand der so genannten *Quantorenlogik*, weil sie als logische Konstanten neben den Junktoren noch Quantoren besitzen. Die Quantorenlogik bezeichnet man auch als *Prädikatenlogik* in Abgrenzung zur *Aussagenlogik*.

2.1 Allbeseitigung und Existenzeinführung

Um quantorenlogische Schlussformen mit Hilfe des KNS auf formale Gültigkeit zu prüfen, benötigen wir für den Allquantor und den Existenzquantor Einführungs- und Beseitigungsregeln. Da ist zunächst einmal die Regel der „Allquantorbeseitigung“ (kurz „Allbeseitigung“) genannt:

$$
\begin{array}{llll}
k_1,\ldots,k_r & (k) & \forall x Fx & \\
k_1,\ldots,k_r & (l) & Fa & \forall B, k
\end{array}
$$

[3] Alternative Verbalisierungen zu diesem Formalausdruck wären „Es gibt (mindestens) ein Ding von dem gilt, dass es eine Blume ist und rot ist“ bzw. „Es existiert ein x, das eine Blume und rot ist“ bzw. „Es gibt mindestens ein rote Blume“.

[4] Alternative Verbalisierung zu diesem Formalausdruck: „Es gibt (so etwas wie) Blumen“.

Diese Regel ist folgendermaßen zu interpretieren: „Fx“ steht für einen Ausdruck von beliebiger Komplexität, in dem die Gegenstandsvariable x mindestens einmal vorkommt. „Fx“ kann also für eine einfache *Prädikation* wie „x ist F“ stehen, oder aber für einen größeren Zusammenhang wie „$\forall$x (Ax $\rightarrow$ Bx)“. Mittels Allbeseitigung wird jede Gegenstandsvariable x, die sich im Bereich des Allquantors befindet, durch die gleiche Gegenstandskonstante ersetzt; die Allbeseitigung führt also zu einer *durchgängigen Umbenennung*. Das a ist also ein bestimmtes a: es ist eine Konstante (auch „Eigenname“ genannt). Es ist jedoch *frei gewählt*, d. h. man darf es ohne jede Restriktion wählen. Machen wir uns dies an einem Beispiel klar: Wenn *alle* Gegenstände eine Masse haben, *dann*, so darf mit Allbeseitigung gefolgert werden, hat auch jeder konkret benannte Gegenstand – dieses Buch, dieser Tisch, dieses Haus usw. – eine Masse.

Der obige Schluss kann nun geprüft werden und erweist sich dabei als formal gültig:

1	(1)	$\forall$x (Mx $\rightarrow$ Sx)	A
2	(2)	Ms	A
1	(3)	Ms $\rightarrow$ Ss	$\forall$B, 1
1, 2	(4)	Ss	$\rightarrow$B, 3, 2

Bei der in Zeile (3) angewendeten Allbeseitigung ist man wie gesagt in der Wahl des Gegenstandes – ob s, p, q usw. – völlig frei. Man hätte demnach auch auf „Ma $\rightarrow$ Sa“ schließen können. Dies wäre jedoch strategisch unklug gewesen, da man dann die Subjunktionsbeseitigung in Zeile (4) nicht hätte anwenden können (aufgrund des nicht identischen Antecedens).

So unkompliziert und (hoffentlich) einsichtig wie die Regel der Allbeseitigung ist auch die Regel der „Existenzquantoreinführung“ bzw. „Existenzeinführung“. Sie besagt: Wenn etwas für einen konkreten Gegenstand gilt, dann, so darf man schließen, gilt dies für *mindestens einen* nicht näher spezifizierten Gegenstand (für F gilt das bereits bei $\forall$B gesagte, so dass auch hier eine durchgängige Umbennung zu erfolgen hat):

$k_1, \ldots, k_r$	(k)	Fa	
$k_1, \ldots, k_r$	(l)	$\exists$xFx	$\exists$E, k

Wenn z. B. der vor mir stehende Tisch aus Holz ist, dann, so darf ich schließen, gibt es etwas, das aus Holz ist. Die obige Ableitung könnte demnach mit folgenden Existenzeinführungen fortgesetzt werden:

1, 2	(5)	$\exists$x Sx	$\exists$E, 4
1	(6)	$\exists$x (Mx $\rightarrow$ Sx)	$\exists$E, 3

2.2 Aufgaben

a) Formalisieren bzw. Verbalisieren Sie und geben Sie bei den Verbalisierungen ein passendes Beispiel:

1. Manche Blumen sind rot, manche grün, aber jede duftet wunderbar.
2. Wenn es Blumen gibt, dann gibt es Dinge, die wunderbar duften.
3. Alle Raben sind schwarz und alle Schwäne weiß.
4. Alle Raben sind schwarz und einige Schwäne sind weiß.
5. $\exists x Fx \wedge \exists x \neg Fx$
6. $\forall x Fx \rightarrow P$

b) Führen Sie die Ableitungen fort, indem Sie ∀B bzw. ∃E vornehmen:

1. 1 (1) $\forall x\,(Ax \rightarrow Bx)$ A
2. (1) $Pa \rightarrow Pa$ SVI
3. 1 (1) Pb A
4. 1 (1) $\forall x\,(Ax \vee Bx)$ A
5. 1 (1) $\forall x\,(Ax \wedge Bx) \wedge \forall x Cx$ A
6. 1 (1) $(Da \rightarrow \forall x\, Bx) \wedge Da$ A

2.3 Alleinführung und Existenzbeseitigung

Offenkundig ist die folgende Ableitung nicht korrekt:

1	(1)	Pa	A
1	(2)	$\forall x Px$	$\forall$E, 1

Die Zulässigkeit der „Allquantoreinführung“ (kurz „Alleinführung“) in Zeile (2) würde bedeuten, dass von der Aussage „a ist P“ auf die Aussage „Alles ist P“ geschlossen werden darf. Dass von einem konkreten Gegenstand etwas ausgesagt werden kann ist aber zweifellos nicht hinreichend für eine Verallgemeinerung (für die Behauptung, dass dies für alle Gegenstände gilt). Anders sähe es aus, wenn die Ableitung folgenden Verlauf hätte:

1	(1)	$\forall x Px$	A
1	(2)	Pa	$\forall$B, 1
1	(3)	$\forall x Px$	$\forall$E, 2

Die hier vorgenommene Alleinführung erscheint unproblematisch, weil die Aussage in Zeile (2) von der mit (3) identischen Aussage in Zeile (1) abhängt. Dieses intuitive Verständnis gilt es nun formal zu fassen. Dazu muss zunächst unterschieden werden zwischen dem *freien* und dem *unfreien* bzw. *gebundenen Vorkommen* eines Zeichens. Frei kommt ein Zeichen genau dann vor, wenn es durch keinen Quantor erfasst bzw. gebunden wird. In der Aussage „$\forall x Px \rightarrow (\exists y Qy \vee Ba)$" kommen x und y gebunden, a hingegen frei vor. Die Eigenschaft, gebunden oder frei zu sein, bezieht sich in der Prädikatenlogik also auf *quantifizierbare* Ausdrücke, d. h. auf Bezeichnungen für Gegenstände.[5] Mit dieser Bestimmung des freien Vorkommens können nun die Bedingungen festgelegt werden, unter denen die Regel der Alleinführung zulässig ist:

$k_1, \ldots, k_r$	(k)	Fa	
$k_1, \ldots, k_r$	(l)	$\forall x Fx$	$\forall$E, k

Dabei müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

I. Die Variable, mit der quantifiziert wird kommt nicht vor in der quantifizierten Aussage (d. h. in F steht kein weiteres x, weder frei noch gebunden).

II. Die Konstante, über die quantifiziert wird, kommt nicht frei vor in:

   1. den vorausgesetzten Annahmen der quantifizierten Aussage (d. h. a kommt in den Aussagen der Zeilen k_1 bis k_r nicht frei vor)
   2. der quantifizierten Aussage (d. h. a kommt in $\forall x Fx$ nicht frei vor)

Zusammengefasst: a muss für einen zwar *konkreten, aber beliebig wählbaren* Gegenstand stehen. Bei der Anwendung von $\forall$E drohen also drei verschiedene Fehlerarten:

Verstoß gegen I:	1	(1)	$\forall x\,(Ax \wedge Bz)$	A
	1	(2)	$Ab \wedge Bz$	$\forall$B, 1
	1	(3)	$\forall z\,(Az \wedge Bz)$	$\forall$E, 2

In Zeile (3) wird mit z quantifiziert, das jedoch in (2) schon vorkommt. Die Aussage in (1) besagt, dass alle Dinge A sind und z außerdem noch B ist. Die Aussage in (3) besagt, dass alle Dinge A und B sind.

Verstoß gegen II.1:	1	(1)	$Pa \wedge Qa$	A
	1	(2)	Pa	$\wedge$B, 1
	1	(3)	$\forall x\, Px$	$\forall$E, 1

In der Voraussetzung der Aussage in Zeile (3) kommt a frei vor. Die Aussage in Zeile (1) besagt, dass a sowohl P als auch Q ist, in (3) steht „Alles ist P".

[5] Dies gilt für die Quantorenlogik erster Stufe; in der Quantorenlogik zweiter Stufe wird auch über Prädikate quantifiziert.

Verstoß gegen II.2:	1	(1)	$\forall x\,(Ax \rightarrow Bx)$	A
	1	(2)	$Aa \rightarrow Ba$	$\forall$B, 1
	1	(3)	$\forall x\,(Ax \rightarrow Ba)$	$\forall$E, 2

In (3) kommt a (immer noch) frei vor. Somit verstößt die Alleinführung in Zeile (3) sowohl gegen Bedingung II.2 als auch gegen die durchgängige Umbennung. Insofern könnte man Bedingung II.2 als redundant ansehen. Aufgrund der Wichtigkeit ist sie hier aber noch einmal explizit aufgenommen. Ihre Missachtung führt z. B. von „Alle Griechen sind weise“ (1) zu „Für alle x gilt: wenn x ein Grieche ist, dann ist Napoleon weise“ (3).

Betrachten wir im Gegensatz dazu die korrekte Anwendung von $\forall$E in der Sequenz $\forall x\,(Px \rightarrow Qx), \forall x\,(Qx \rightarrow Rx) \vdash \forall x\,(Px \rightarrow Rx)$:

1	(1)	$\forall x\,(Px \rightarrow Qx)$	A
2	(2)	$\forall x\,(Qx \rightarrow Rx)$	A
1	(3)	$Pa \rightarrow Qa$	$\forall$B, 1
2	(4)	$Qa \rightarrow Ra$	$\forall$B, 2
1, 2	(5)	$Pa \rightarrow Ra$	KS, 3, 4
1, 2	(6)	$\forall x\,(Px \rightarrow Rx)$	$\forall$E, 5

Die Anwendung von $\forall$E in Zeile (6) ist korrekt, denn das a, über das quantifiziert wurde, kommt in keiner der beiden Zeilen, von denen die Aussage in (6) abhängt vor (also weder in Zeile (1) noch in Zeile (2)).

Ebenso umsichtig wie die Alleinführung ist die Regel der „Existenzquantorbeseitigung“, kurz „Existenzbeseitigung“, anzuwenden (weshalb die beiden Regeln $\forall$E und $\exists$B auch als *kritische Regeln* bezeichnet werden), also der Übergang von $\exists xFx$ zu Fa (d. h. von „Es existiert etwas, von dem F gilt“ zu „Von a gilt F“). Die Existenzbeseitigung ist wie folgt definiert:

$k_1, \ldots, k_r$	(k)	$\exists xFx$	
$l_1, \ldots, l_r$	(l)	$Fa \rightarrow C$	
$k_1, \ldots, l_r$	(m)	C	$\exists$B, k, l

Auch hier muss das a ein beliebig Wählbares sein. Deshalb gelten die diesbezüglichen unter $\forall$E formulierten Bedingungen in analoger Weise, d. h. a darf nicht frei vorkommen in:

1. der Konklusion (d. h. in C)

2. den Voraussetzungen der Konklusion (d. h. in den Ausdrücken der Zeilen k_1 bis l_r)

3. dem quantifizierten Ausdruck (d. h. in $\exists xFx$)

Die vielleicht etwas befremdlich wirkende Regel der Existenzbeseitigung gewinnt an Plausibilität, wenn man sie mit dem Konstruktiven Dilemma vergleicht. Dieses besagt: Wenn eine Adjunktion gegeben ist, von der jedes Adjunktionsglied zu derselben Aussage führt, dann gilt auch diese Aussage. Nun ist eine Existenzaussage in gewissem Sinne nichts weiter als eine große Adjunktion: Die Aussage „Es gibt etwas, das F ist“ meint „a ist F oder b ist F oder c ist F oder …“.[6] Falls nun gilt, dass man von einem beliebigen dieser Adjunktionsglieder zu C gelangt, dann gilt dieses C. Veranschaulichen lässt sich dieser Sachverhalt mit der Alarmanlage eines Autos, die reagiert, wenn eine Scheibe eingeschlagen wird. Analog zur Definition der Existenzbeseitigung kann demnach festgestellt werden: Wenn gilt: 1. Es gibt mindestens eine eingeschlagene Scheibe und 2. Sobald eine Scheibe eingeschlagen wird, ertönt das Alarmsignal, dann darf gefolgert werden: Das Alarmsignal ertönt. Die Tatsache, dass man für diesen Schluss nicht angeben muss, welche Scheibe eingeschlagen wurde, entspricht dem formalen Sachverhalt, dass a beliebig gewählt werden kann. Betrachten wir als weiteres Beispiel den folgenden Schluss: „Alle Engel sind überirdische Wesen. Es gibt Engel. Also gibt es überirdische Wesen“. Die entsprechende Sequenz $\forall x\,(Ex \to Wx),\ \exists xEx \vdash \exists xWx$ könnte folgende Ableitung besitzen:

1	(1)	$\forall x\,(Ex \to Wx)$	A
2	(2)	$\exists xEx$	A
3	(3)	Ea	A
1	(4)	$Ea \to Wa$	$\forall B, 1$
1, 2	(5)	Wa	$\exists B, 2, 4$
1, 2	(6)	$\exists xWx$	$\exists E, 5$

Grundsätzlich ist es die richtige Strategie, die existenzquantifizierte Aussage in einem eigenen Schritt anzunehmen (hier in Zeile (3) geschehen). Aber die Existenzbeseitigung in (5) verletzt Bedingung 1, denn a kommt in dem Ausdruck Wa frei vor. Um dieses Problem zu umschiffen muss die Ableitung nach Zeile (4) auf die folgende Weise fortgesetzt werden:

1, 3	(5)	Wa	$\to B, 4, 3$
1, 3	(6)	$\exists xWx$	$\exists E, 5$
1	(7)	$Ea \to \exists xWx$	$\to E, \underline{3}, 6$
1, 2	(8)	$\exists xWx$	$\exists B, 2, 7$

[6] Das gilt zumindest für *endliche Gegenstandsbereiche*, in denen man alle Individuen tatsächlich aufzählen kann. In solchen Bereichen kann man allquantifizierte Aussagen auch als große Konjunktionen betrachten, d. h. Aussagen der Form $\forall xFx$ als „a ist F und b ist F und c ist F und …“. Suggestiv wirkt in diesem Zusammenhang die Notation, in der der Allquantor mit einem großen Konjunktionszeichen und der Existenzquantor mit einem großen Adjunktionszeichen wiedergegeben wird, also $\bigwedge xFx$ für „Alle x sind F“ und $\bigvee xFx$ für „Einige x sind F“.

2.4 Aufgaben

a) Formalisieren Sie:

1. Aristoteles ist ein Philosoph.
2. Manche Griechen sind Philosophen.
3. Die meisten Griechen sind Philosophen.
4. Alles fehlt.
5. Keiner fehlt.
6. Es ist nicht alles Gold was glänzt.
7. Nur Logiker verstehen die Welt.

b) Prüfen Sie die Gültigkeit folgender Schlüsse:

1. Alle Vögel können fliegen.[7] Coco ist ein Vogel. Also kann Coco fliegen.
2. Coco ist ein Vogel. Coco isst gerne Leinsamen. Also essen einige Vögel gerne Leinsamen.
3. Alle Scholastiker sind Frühaufsteher. Ramus steht immer sehr spät auf. Also ist Ramus kein Scholastiker.
4. Alle Philosophen haben Köpfe. Der Grieche Aristoteles ist Philosoph. Demnach haben zumindest einige Griechen Köpfe.
5. Kein Philosoph ist allwissend. Einige Philosophen sind Logiker. Deshalb sind einige Logiker nicht allwissend.
6. Die Pferde sind Säugetiere. Kein Wiederkäuer ist ein Pferd. Wenn also etwas ein Pferd ist, dann ist es zwar ein Säugetier, aber kein Wiederkäuer.
7. Kein Sumpfvogel ist ein Schwimmvogel. Der Storch ist ein Sumpfvogel. Also ist kein Schwimmvogel ein Storch.
8. $\exists x Ax \rightarrow \forall x\,(Dx \wedge \neg Bx),\ \forall x Bx \rightarrow \neg \exists x Dx \vdash \exists x\,(Ax \rightarrow \neg \forall x Bx)$
9. Was halten Sie von folgendem Schluss und der zugehörigen Ableitung?

$$\begin{array}{l} \text{Einige Tiere sind schwarz.} \\ \text{Einige Raben sind schwarz.} \\ \hline \text{Einige Tiere sind Raben.} \end{array}$$

„Tx“ für „x ist ein Tier“, „Sx“ für „x ist schwarz“, „Rx“ für „x ist ein Rabe“

[7] Man beachte, dass für die Gültigkeit eines Schlusses die Wahrheit der gemachten Aussagen nicht erforderlich ist.

1	(1)	$\exists x\,(Tx \wedge Sx)$	A
2	(2)	$\exists x\,(Rx \wedge Sx)$	A
3	(3)	$Ta \wedge Sa$	A
4	(4)	$Ra \wedge Sa$	A
3	(5)	Ta	$\wedge$B, 3
4	(6)	Ra	$\wedge$B, 4
3, 4	(7)	$Ta \wedge Ra$	$\wedge$E, 5, 6
3, 4	(8)	$\exists x\,(Tx \wedge Rx)$	$\exists$E, 7
3	(9)	$Ra \wedge Sa \rightarrow \exists x\,(Tx \wedge Rx)$	$\rightarrow$E, $\underline{4}$, 8
2, 3	(10)	$\exists x\,(Tx \wedge Rx)$	$\exists$B, 2, 9
2	(11)	$Ta \wedge Sa \rightarrow \exists x\,(Tx \wedge Rx)$	$\rightarrow$E, $\underline{3}$, 10
1, 2	(12)	$\exists x\,(Tx \wedge Rx)$	$\exists$B, 1, 11

2.5 Zulässige Regeln der Prädikatenlogik

Fast alle umgangssprachlichen Formulierungen lassen sich auf verschiedene Weise übersetzen. So hätte man z. B. die Aussage „Keiner fehlt“ in Aufgabe 2.4, Nr. 5 sowohl mit $\forall xAx$ (= „Alle sind *An*wesend“) als auch mit $\neg\exists x\neg Ax$ (= „Keiner ist *Ab*wesend“) wiedergeben können. Die beiden Formeln sind demnach äquivalent, was sich im KNS auch zeigen lässt:

a.)	1	(1)	$\forall xAx$	A
	2	(2)	$\exists x\neg Ax$	A
	3	(3)	$\neg Aa$	A
	1	(4)	Aa	$\forall$B, 1
	1, 3	(5)	$Aa \wedge \neg Aa$	$\wedge$E, 4, 3
	3	(6)	$\forall xAx \rightarrow Aa \wedge \neg Aa$	$\rightarrow$E, $\underline{1}$, 5
	3	(7)	$\neg\forall xAx$	$\neg$E, 6
		(8)	$\neg Aa \rightarrow \neg\forall xAx$	$\rightarrow$E, $\underline{3}$, 7
	2	(9)	$\neg\forall xAx$	$\exists$B, 2, 8
	1, 2	(10)	$\forall xAa \wedge \neg\forall xAx$	$\wedge$E, 1, 9
	1	(11)	$\exists x\neg Ax \rightarrow \forall xAx \wedge \neg\forall xAx$	$\rightarrow$E, $\underline{2}$, 10
	1	(12)	$\neg\exists x\neg Ax$	$\neg$E, 11

b.)	1	(1)	$\neg\exists x\neg Ax$	A
	2	(2)	$\neg Aa$	A
	2	(3)	$\exists x\neg Ax$	$\exists$E, 2
	1, 2	(4)	$\exists x\neg Ax \wedge \neg\exists x\neg Ax$	$\wedge$E, 3, 1
	1	(5)	$\neg Aa \rightarrow \exists x\neg Ax \wedge \neg\exists x\neg Ax$	$\rightarrow$E, $\underline{2}$, 4
	1	(6)	$\neg\neg Aa$	$\neg$E, 5
	1	(7)	Aa	$\neg\neg$B, 6
	1	(8)	$\forall xAx$	$\forall$E, 7

Aufgrund dieser Ableitungsbeziehungen lassen sich die folgenden zulässigen Regeln der *quantorenlogischen Dualität* (QD) formulieren:

(I)				(II)			
$k_1, \ldots, k_r$	(k)	$\forall x A x$		$k_1, \ldots, k_r$	(k)	$\neg\exists x \neg A x$	
$k_1, \ldots, k_r$	(l)	$\neg\exists x \neg A x$	QD, k	$k_1, \ldots, k_r$	(l)	$\forall x A x$	QD, k

Für die Rechtfertigung von QD darf das in der Ableitung und der Regelformulierung verwendete A natürlich nicht mehr für das konkrete Prädikat „anwesend sein“ stehen, sondern muß eine Variable für beliebige Prädikate bilden. Um QD auch auf Ausdrücke der Form $\neg\forall x \neg A x$ und $\exists x A x$ anwenden zu können, muss die formale Gültigkeit von $\neg\forall x \neg A x \dashv\vdash \exists x A x$ gezeigt werden:

a.)	1	(1)	$\neg\forall x \neg A x$	A
	2	(2)	$\neg\neg\neg\exists x \neg\neg A x$	A
	2	(3)	$\neg\neg\forall x \neg A x$	QD, 2
	2	(4)	$\forall x \neg A x$	$\neg\neg$B, 3
	1, 2	(5)	$\forall x \neg A x \wedge \neg\forall x \neg A x$	$\wedge$E, 4, 1
	1	(6)	$\neg\neg\neg\exists x \neg\neg A x \rightarrow \forall x \neg A x \wedge \neg\forall x \neg A x$	$\rightarrow$E, $\underline{2}$, 5
	1	(7)	$\neg\neg\neg\neg\exists x \neg\neg A x$	$\neg$E, 6
	1	(8)	$\neg\neg\exists x \neg\neg A x$	$\neg\neg$B, 7
	1	(9)	$\exists x \neg\neg A x$	$\neg\neg$B, 8
	10	(10)	$\neg\neg A a$	A
	10	(11)	$A a$	$\neg\neg$B, 10
	10	(12)	$\exists x A x$	$\exists$E, 11
		(13)	$\neg\neg A a \rightarrow \exists x A x$	$\rightarrow$E, $\underline{10}$, 12
	1	(14)	$\exists x A x$	$\exists$B, 9, 13

b.)	1	(1)	$\exists x A x$	A
	2	(2)	$\forall x \neg A x$	A
	2	(3)	$\neg A a$	$\forall$B, 2
	2	(4)	$\neg\exists x \neg\neg A x$	QD, 2
	5	(5)	$A a$	A
	5	(6)	$\neg\neg A a$	SP, 5
	2, 5	(7)	$\neg A a \wedge \neg\neg A a$	$\wedge$E, 3, 5
	5	(8)	$\forall x \neg A x \rightarrow \neg A a \wedge \neg\neg A a$	$\rightarrow$E, $\underline{2}$, 7
	5	(9)	$\neg\forall x \neg A x$	$\neg$E, 8
		(10)	$A a \rightarrow \neg\forall x \neg A x$	$\rightarrow$E, $\underline{5}$, 9
	1	(11)	$\neg\forall x \neg A x$	$\exists$B, 1, 10

Die Anwendung der Regel QD kann also wie folgt erweitert werden:

(III)				(IV)			
$k_1,\ldots,k_r$	(k)	¬∀x¬Ax		$k_1,\ldots,k_r$	(k)	∃xAx	
$k_1,\ldots,k_r$	(l)	∃xAx	QD, k	$k_1,\ldots,k_r$	(l)	¬∀x¬Ax	QD, k

2.6 2-stellige Prädikate

Bisher wurden nur *1-stellige Prädikate* betrachtet, d. h. Ausdrücke, die mit Aussageformen mit genau einer Leerstelle bezeichnet werden wie „x ist grün“, „x fliegt“ oder „x ist ein Grieche“. Solche Aussageformen gehen durch Einsetzung einer Gegenstandskonstanten in Aussagen über, z. B. in „Aristoteles ist ein Grieche“ oder „Alberich fliegt“. Analog dazu sind auch Aussageformen konstruierbar, die erst bei Einsetzung von zwei Gegenstandskonstanten in Aussagen übergehen wie „x ist größer als y“ oder „x ist stolz auf y“. Dementsprchend bezeichnet man die Ausdrücke „größer als“ und „stolz auf“ als *2-stellige Prädikate*.

Prinzipiell lässt sich alles, was mit 2-stelligen Prädikaten ausgesagt wird, auch mit Hilfe 1-stelliger Prädikate ausdrücken. So kann die Aussage „Platon bewundert Sokrates“ formalisiert werden als Bp, mit Bx = „x bewundert Sokrates“ und p = Platon oder eben als Bps, mit Bxy = „x bewundert y“, s = Sokrates und p = Platon. Bei zwei Gegenstandsvariablen können auch zwei Quantoren auftreten. So könnte ∀x∃yBxy die Aussage „Jeder bewundert mindestens eine Person (oder Sache)“ bedeuten (∀x∃y = „Für alle gibt es mindestens eins“), was bereits dann wahr wäre, wenn jemand sich selbst bewunderte, denn x und y müssen bei diesem Ausdruck nicht verschieden sein. ∃x∀yGxy könnte demgegenüber z. B. stehen für die Aussage „Es gibt mindestens ein Größtes“ (∃x∀y = „Es gibt mindestens eins für alle“). Freilich können 2-stellige Prädikate auch mit nur einem Quantor verbunden werden, wie bei ∀xBxx (= „Jeder bewundert sich“) oder ¬∃yGyy (= „Nichts ist größer als es selbst“).

Die quantorenlogischen Regeln gelten in ihrer eingeführten Form auch weiter, d. h. sie können *unmodifiziert* aber *erweitert* übernommen werden. So gilt ∀B sowohl in Gestalt von ∀xFxx ⊢ Faa als auch von ∀xFax ⊢ Faa bzw. ∀xFxa ⊢ Fba usw. (die Sequenz ∀xFxx ⊢ ∀xFax ist freilich nicht gestattet, allein schon weil der Allquantor in diesem Falle nicht beseitigt wird). Analog gelten für ∃E die Sequenzen Faa ⊢ ∃xFxx, Fab ⊢ ∃xFax usw.

Weiterhin gelten ∀B und ∃E aber auch in Kontexten mit mehr als einem Quantor. In diesem Falle ist zu beachten, dass die jeweilige Regel auf den *Hauptquantor*, der stets der erste Quantor ist, angewendet wird, so dass ∀x∀yFxy ⊢ ∀yFay oder ∀x∃yFxy ⊢ ∃yFay; bzw. ∃xFax ⊢ ∃y∃xFyx oder ∀yFyb ⊢ ∃x∀yFyx usw.

Auch die kritischen Regeln sind bei 1-stelligen und 2-stelligen Prädikaten strukturgleich. Für den komplexeren Fall von ∃B ergeben sich demnach unter anderem folgende Varianten:

		(I)				(II)	
$k_1,\ldots,k_r$	(k)	$\exists x Fxx$		$k_1,\ldots,k_r$	(k)	$\exists x \forall y Fyx$	
$l_1,\ldots,l_r$	(l)	$Faa \rightarrow C$		$l_1,\ldots,l_r$	(l)	$\forall y Fya \rightarrow C$	
$k_1,\ldots,l_r$	(m)	C	$\exists B, k, l$	$k_1,\ldots,l_r$	(m)	C	$\exists B, k, l$

Die Variablenbedingungen werden nun erst vollends verständlich. So kann eine Gegenstandskonstante in einem Ausdruck *versteckt* vorkommen, wenn dieser nicht gänzlich ausdifferenziert formalisiert ist. Formalisiert man z. B. die Aussage „Nikomachos ist stolz auf Aristoteles“ als An, mit Ax = „x ist stolz auf Aristoteles“ und n = Nikomachos, dann kommt die Gegenstandskonstante „Aristoteles“ in dem 1-stelligen Prädikat Ax frei vor, im Gegensatz zu Sna, mit Sxy = „x ist stolz auf y“.

2.7 Aufgaben

Formalisieren Sie so vollständig wie möglich:

1. Aristoteles ist ein Philosoph.
2. Jeder Mensch hat eine Mutter.
3. Es gibt eine Medizin, die bei allem wirkt.
4. Alle Philosophen haben ein Vorbild.
5. Alles hat eine Ursache.
6. München ist größer als Nürnberg.
7. Fürth liegt zwischen Erlangen und Nürnberg.

3
Lösungen

Lösungen zu 1.1.1.4

a) Der Schluss ist formal gültig (und somit auch gültig):

„v“ für „Venedig liegt am Meer.“

„b“ für „In Venedig kann man baden.“

1	(1)	$v \rightarrow b$	A
2	(2)	v	A
1, 2	(3)	b	$\rightarrow$B, 1, 2

b) Der Schluss ist formal gültig.

„f“ für „Frege schrieb die *Begriffsschrift*.“

„w“ für „Wittgenstein schrieb den *Tractatus*.“

„m“ für „Frege kann als der Begründer der modernen Logik gelten.“

1	(1)	$f \rightarrow m$	A
2	(2)	$f \wedge w$	A
2	(3)	f	$\wedge$B, 2
1, 2	(4)	m	$\rightarrow$B, 1, 3

c) Der Schluss ist formal gültig.

Lösungen zu 1.1.1.6

a) Der Schluss ist formal gültig:

„a“ für „Atome sind teilbar.“

1	(1)	$\neg\neg a$	A
1	(2)	a	$\neg\neg$B, 1

b) Der Schluss ist formal gültig:

„v“ für „Das Vorlesungsskript stimmt.“

„g“ für „Das Gute existiert.“

1	(1)	$v \rightarrow (g \wedge \neg g)$	A
1	(2)	$\neg v$	$\neg$E, 1

c) Der Schluss ist formal gültig:

„p“ für „Das Weltbild von Ptolomäus ist richtig.“

„k“ für „Das Weltbild von Kopernikus ist richtig.“

„s“ für „Die Sonne dreht sich um die Erde.“

1	(1)	$p \wedge k$	A
2	(2)	$p \rightarrow s$	A
3	(3)	$k \rightarrow \neg s$	A
1	(4)	p	$\wedge$B, 1
1, 2	(5)	s	$\rightarrow$B, 2, 4
1	(6)	k	$\wedge$B, 1
1, 3	(7)	$\neg s$	$\rightarrow$B, 3, 6
1, 2, 3	(8)	$s \wedge \neg s$	$\wedge$E, 5, 7
2, 3	(9)	$(p \wedge k) \rightarrow (s \wedge \neg s)$	$\rightarrow$E, $\underline{1}$, 8
2, 3	(10)	$\neg(p \wedge k)$	$\neg$E, 9

Lösungen zu 1.1.1.10

a) Der Schluss ist formal gültig:

„k“ für „Die Verordnung tritt in Kraft.“

„z“ für „Mindestens zwei Drittel haben der Verordnung zugestimmt.“

1	(1)	$k \rightarrow z$	A
2	(2)	$z \rightarrow k$	A
1, 2	(3)	$k \leftrightarrow z$	$\leftrightarrow$E, 1, 2

b) Der Schluss ist formal gültig:

„k“ für „Die Verordnung tritt in Kraft.“

„a“ für „Mindestens ein Drittel hat die Verordnung abgelehnt.“

1	(1)	$k \rightarrow \neg a$	A
2	(2)	$\neg k \rightarrow a$	A
1, 2	(3)	$k \nleftrightarrow a$	$\nleftrightarrow$E, 1, 2

c) Der Schluss ist formal nicht gültig. Der Fehler liegt in dem falschen Gebrauch der Kontravalenzbeseitigungsregel in Zeile (3). Korrigiert man diesen, erfährt man freilich nicht mehr, als man bereits schon behauptet hatte:

1	(1)	$r \nleftrightarrow \neg r$	A
2	(2)	r	A
1	(3)	$r \rightarrow \neg\neg r$	$\nleftrightarrow$B, 1
1, 2	(4)	$\neg\neg r$	$\rightarrow$B, 3, 2
1, 2	(5)	r	$\neg\neg$B, 4

d) Streng genommen handelt es sich um ein Enthymem. Ergänzt man die Aussage „Wenn Ulla krank ist, dann bringt Tina sie nicht mit“, so erhält man einen formal gültigen Schluss:

„u“ für „Tina bringt Ulla mit.“

„c“ für „Tina bringt Claudia mit.“

„k“ für „Ulla ist krank.“

1	(1)	$u \vee c$	A
2	(2)	k	A
3	(3)	$k \rightarrow \neg u$	A
2, 3	(4)	$\neg u$	$\rightarrow$B, 3, 2
1, 2, 3	(5)	c	$\vee$B, 1, 4

Lösungen zu 1.1.1.12

a) $a \rightarrow (b \vee c)$

b) $[\,(a \wedge b) \vee c\,] \nleftrightarrow d$

c) $(d \nleftrightarrow e) \leftrightarrow \neg f$

d) $a \wedge b \rightarrow d$

e) $(a \leftrightarrow b) \nleftrightarrow d \vee \neg a \wedge b$

Lösungen zu 1.1.2.2

a)

1	(1)	$P \rightarrow P$	A
1	(2)	$P \leftrightarrow P$	$\leftrightarrow$E, 1, 1

b)

	(1)	$P \rightarrow P$	SVI
	(2)	$P \leftrightarrow P$	$\leftrightarrow$E, 1, 1

c)

1	(1)	$\neg(P \vee \neg P)$	A
2	(2)	P	A
2	(3)	$P \vee \neg P$	$\vee$E, 2
1, 2	(4)	$(P \vee \neg P) \wedge \neg(P \vee \neg P)$	$\wedge$E, 3, 1
1	(5)	$P \rightarrow [\,(P \vee \neg P) \wedge \neg(P \vee \neg P)\,]$	$\rightarrow$E, $\underline{2}$, 4
1	(6)	$\neg P$	$\neg$E, 5
1	(7)	$P \vee \neg P$	$\vee$E, 6
1	(8)	$(P \vee \neg P) \wedge \neg(P \vee \neg P)$	$\wedge$E, 7, 1
	(9)	$\neg(P \vee \neg P) \rightarrow [\,(P \vee \neg P) \wedge \neg(P \vee \neg P)\,]$	$\rightarrow$E, $\underline{1}$, 8
	(10)	$\neg\neg(P \vee \neg P)$	$\neg$E, 9
	(11)	$P \vee \neg P$	$\neg\neg$B, 10

d)

1	(1)	$P \wedge Q$	A
1	(2)	P	$\wedge$B, 1
1	(3)	$P \vee Q$	$\vee$E, 2

e)

1	(1)	$\neg P \wedge \neg Q$	A
1	(2)	$\neg P$	$\wedge$B, 1
1	(3)	$\neg P \vee \neg Q$	$\vee$E, 2

Lösungen zu 1.1.2.4

a) Der Schluss ist formal gültig:

„k“ für „Sie kommen um 18 Uhr.“

„z“ für „Sie haben den Zug erreicht.“

1	(1)	$k \vee \neg z$	A
2	(2)	z	A
3	(3)	$\neg k$	A
1, 3	(4)	$\neg z$	$\vee$B, 1, 3
1, 2, 3	(5)	$z \wedge \neg z$	$\wedge$E, 2, 4
1, 2	(6)	$\neg k \rightarrow (z \wedge \neg z)$	$\rightarrow$E, $\underline{3}$, 5
1, 2	(7)	$\neg\neg k$	$\neg$E, 6
1, 2	(8)	k	$\neg\neg$B, 7

b) Der Schluss ist formal gültig:

„f“ für „Das Flusswasser ist verseucht.“

„g“ für „Das Grundwasser ist verseucht.“

„j“ für „Der Landstrich ist seit Jahrzehnten bewohnt.“

„b“ für „Der Landstrich ist bewohnbar.“

1	(1)	$(f \wedge g) \rightarrow \neg b$	A
2	(2)	j	A
3	(3)	$j \rightarrow b$	A
2, 3	(4)	b	$\rightarrow$B, 3, 2
5	(5)	$f \wedge g$	A
1, 5	(6)	$\neg b$	$\rightarrow$B, 1, 5
1, 2, 3, 5	(7)	$b \wedge \neg b$	$\wedge$E, 4, 6
1, 2, 3	(8)	$(f \wedge g) \rightarrow (b \wedge \neg b)$	$\rightarrow$E, $\underline{5}$, 7
1, 2, 3	(9)	$\neg(f \wedge g)$	$\neg$E, 8

c) Der Schluss ist formal gültig:

„k“ für „Kant war deutscher Philosoph.“

„h“ für „Hegel war deutscher Philosoph.“

„d“ für „Hegel schrieb auf deutsch.“

„v“ für „Hegel ist verständlich.“

1	(1)	k ∧ h	A
2	(2)	h → d	A
3	(3)	d → v	A
1	(4)	h	∧B, 1
1, 2	(5)	d	→B, 2, 4
1, 2, 3	(6)	v	→B, 3, 5

Lösungen zu 1.1.2.6

a) 1. Kettenschluss (KS): $P \to Q,\ Q \to R \vdash P \to R$

1	(1)	$P \to Q$	A
2	(2)	$Q \to R$	A
3	(3)	P	A
1,3	(4)	Q	$\to B, 1, 3$
1,2,3	(5)	R	$\to B, 2, 4$
1,2	(6)	$P \to R$	$\to E, \underline{3}, 5$

2. Modus tollens (MT): $P \to Q,\ \neg Q \vdash \neg P$

1	(1)	$P \to Q$	A
2	(2)	$\neg Q$	A
3	(3)	P	A
1,3	(4)	Q	$\to B, 1, 3$
1,2,3	(5)	$Q \land \neg Q$	$\land E, 4, 2$
1,2	(6)	$P \to Q \land \neg Q$	$\to E, \underline{3}, 5$
1,2	(7)	$\neg P$	$\neg E, 6$

3. Disjunktiver Syllogismus (DS): 1. $P \not\leftrightarrow Q,\ P \vdash \neg Q$

1	(1)	$P \not\leftrightarrow Q$	A
1	(2)	$P \to \neg Q$	$\not\leftrightarrow B, 1$
3	(3)	P	A
1,3	(4)	$\neg Q$	$\to B, 2, 3$

4. Disjunktiver Syllogismus (DS): 2. $P \not\leftrightarrow Q,\ Q \vdash \neg P$

1	(1)	$P \not\leftrightarrow Q$	A
1	(2)	$P \to \neg Q$	$\not\leftrightarrow B, 1$
3	(3)	P	A
1,3	(4)	$\neg Q$	$\to B, 2, 3$
5	(5)	Q	A
1,3,5	(6)	$Q \wedge \neg Q$	$\wedge E, 5, 4$
1,5	(7)	$P \to Q \wedge \neg Q$	$\to E, \underline{3}, 6$
1,5	(8)	$\neg P$	$\neg E, 7$
1	(9)	$Q \to \neg P$	$\to E, \underline{5}, 8$
1,5	(10)	$\neg P$	$\to B, 9, 5$

5. Kontraposition (KP): $P \to Q \dashv\vdash \neg Q \to \neg P$

I.) $P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P$

1	(1)	$P \to Q$	A
2	(2)	P	A
1,2	(3)	Q	$\to B, 1, 2$
4	(4)	$\neg Q$	A
1,2,4	(5)	$Q \wedge \neg Q$	$\wedge E, 3, 4$
1,4	(6)	$P \to Q \wedge \neg Q$	$\to E, \underline{2}, 5$
1,4	(7)	$\neg P$	$\neg E, 6$
1	(8)	$\neg Q \to \neg P$	$\to E, \underline{4}, 7$

II.) $\neg Q \to \neg P \vdash P \to Q$

1	(1)	$\neg Q \to \neg P$	A
2	(2)	$\neg Q$	A
1,2	(3)	$\neg P$	$\to B, 1, 2$
4	(4)	P	A
1,2,4	(5)	$P \wedge \neg P$	$\wedge E, 4, 3$
1,4	(6)	$\neg Q \to P \wedge \neg P$	$\to E, \underline{2}, 5$
1,4	(7)	$\neg\neg Q$	$\neg E, 6$
1,4	(8)	Q	$\neg\neg B, 7$
1	(9)	$P \to Q$	$\to E, \underline{4}, 8$

6. Konstruktives Dilemma (KD): $P \vee Q,\ P \to R,\ Q \to R \vdash R$

1	(1)	$P \vee Q$	A
2	(2)	$P \to R$	A
3	(3)	$Q \to R$	A
4	(4)	$\neg R$	A
3,4	(5)	$\neg Q$	MT, 3, 4
1,3,4	(6)	P	$\vee B$, 1, 5
1,2,3,4	(7)	R	$\to B, 2, 6$
1,2,3,4	(8)	$R \wedge \neg R$	$\wedge E, 7, 4$
1,2,3	(9)	$\neg R \to (R \wedge \neg R)$	$\to E, \underline{4}, 8$
1,2,3	(10)	$\neg\neg R$	$\neg E$, 9
1,2,3	(11)	R	$\neg\neg B, 10$

7. De Morgansche Regeln (DM): I. $\neg(P \wedge Q) \dashv\vdash \neg P \vee \neg Q$

I. a) $\neg(P \wedge Q) \vdash \neg P \vee \neg Q$

1	(1)	$\neg(P \wedge Q)$	A
2	(2)	$\neg(\neg P \vee \neg Q)$	A
3	(3)	$\neg P$	A
3	(4)	$\neg P \vee \neg Q$	$\vee E, 3$
2,3	(5)	$(\neg P \vee \neg Q) \wedge \neg(\neg P \vee \neg Q)$	$\wedge E, 2, 4$
2	(6)	$\neg P \rightarrow (\neg P \vee \neg Q) \wedge \neg(\neg P \vee \neg Q)$	$\rightarrow E, \underline{3}, 5$
2	(7)	$\neg\neg P$	$\neg E, 6$
2	(8)	P	$\neg\neg B, 7$
9	(9)	$\neg Q$	A
9	(10)	$\neg P \vee \neg Q$	$\vee E, 9$
2,9	(11)	$(\neg P \vee \neg Q) \wedge \neg(\neg P \vee \neg Q)$	$\wedge E, 10, 2$
2	(12)	$\neg Q \rightarrow (\neg P \vee \neg Q) \wedge \neg(\neg P \vee \neg Q)$	$\rightarrow E, \underline{9}, 11$
2	(13)	$\neg\neg Q$	$\neg E, 12$
2	(14)	Q	$\neg\neg B, 13$
2	(15)	$P \wedge Q$	$\wedge E, 8, 14$
1,2	(16)	$(P \wedge Q) \wedge \neg(P \wedge Q)$	$\wedge E, 15, 1$
1	(17)	$\neg(\neg P \vee \neg Q) \rightarrow (P \wedge Q) \wedge \neg(P \wedge Q)$	$\rightarrow E, \underline{2}, 16$
1	(18)	$\neg\neg(\neg P \vee \neg Q)$	$\neg E, 17$
1	(19)	$\neg P \vee \neg Q$	$\neg\neg B, 18$

I. b) $\neg P \vee \neg Q \vdash \neg(P \wedge Q)$

1	(1)	$\neg P \vee \neg Q$	A
2	(2)	$P \wedge Q$	A
2	(3)	P	$\wedge B, 2$
2	(4)	$\neg\neg P$	$SP, 3$
1,2	(5)	$\neg Q$	$\vee B, 1, 4$
2	(6)	Q	$\wedge B, 2$
1,2	(7)	$Q \wedge \neg Q$	$\wedge E, 6, 5$
1	(8)	$P \wedge Q \rightarrow Q \wedge \neg Q$	$\rightarrow E, \underline{2}, 7$
1	(9)	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg E, 8$

8. De Morgansche Regeln (DM): II. $\neg P \wedge \neg Q \dashv\vdash \neg(P \vee Q)$

II. a) $\neg P \wedge \neg Q \vdash \neg(P \vee Q)$

1	(1)	$\neg P \wedge \neg Q$	A
2	(2)	$P \vee Q$	A
1	(3)	$\neg P$	$\wedge B, 1$
1,2	(4)	Q	$\vee B, 2, 3$
1	(5)	$\neg Q$	$\wedge B, 1$
1,2	(6)	$Q \wedge \neg Q$	$\wedge E, 4, 5$
1	(7)	$P \vee Q \rightarrow Q \wedge \neg Q$	$\rightarrow E, \underline{2}, 6$
1	(8)	$\neg(P \vee Q)$	$\neg E, 7$

II. b) $\neg(P \vee Q) \vdash \neg P \wedge \neg Q$

1	(1)	$\neg(P \vee Q)$	A
2	(2)	$\neg(\neg P \wedge \neg Q)$	A
2	(3)	$\neg\neg P \vee \neg\neg Q$	$DM, 2$
4	(4)	$\neg P$	A
4	(5)	$\neg\neg\neg P$	$SP, 4$
2,4	(6)	$\neg\neg Q$	$\vee B, 3, 5$
2,4	(7)	Q	$\neg\neg B, 6$
2,4	(8)	$P \vee Q$	$\vee E, 7$
1,2,4	(9)	$(P \vee Q) \wedge \neg(P \vee Q)$	$\wedge E, 8, 1$
1,2	(10)	$\neg P \to (P \vee Q) \wedge \neg(P \vee Q)$	$\to E, \underline{4}, 9$
1,2	(11)	$\neg\neg P$	$\neg E, 10$
1,2	(12)	P	$\neg\neg B, 11$
1,2	(13)	$P \vee Q$	$\vee E, 12$
1,2	(14)	$(P \vee Q) \wedge \neg(P \vee Q)$	$\wedge E, 13, 1$
1	(15)	$\neg(\neg P \wedge \neg Q) \to (P \vee Q) \wedge \neg(P \vee Q)$	$\to E, \underline{2}, 14$
1	(16)	$\neg\neg(\neg P \wedge \neg Q)$	$\neg E, 15$
1	(17)	$\neg P \wedge \neg Q$	$\neg\neg B, 16$

b) Der Schluss $\mathrm{s} \vee \mathrm{a}$, $\mathrm{a} \to \mathrm{v}$, $\mathrm{g} \wedge \neg\mathrm{v} \vdash \mathrm{s}$ ist formal gültig:

„s“ für „Der Beweis ist sophistisch.“

„a“ für „Achilles holt die Schildkröte ein.“

„v“ für „Die Logik versagt.“

„g“ für „Die Mathematiker haben alles geprüft.“

1	(1)	$\mathrm{s} \vee \mathrm{a}$	A
2	(2)	$\mathrm{a} \to \mathrm{v}$	A
3	(3)	$\mathrm{g} \wedge \neg\mathrm{v}$	A
4	(4)	a	A
2, 4	(5)	v	$\to$B, 2, 4
3	(6)	$\neg$v	$\wedge$B, 3
2, 3, 4	(7)	$\mathrm{v} \wedge \neg\mathrm{v}$	$\wedge$E, 5, 6
2, 3	(8)	$\mathrm{a} \to (\mathrm{v} \wedge \neg\mathrm{v})$	$\to E, \underline{4}, 7$
2, 3	(9)	$\neg$a	$\neg$E, 8
1, 2, 3	(10)	s	$\vee$B, 1, 9

Lösungen zu 1.2.2

a) 1. KS als Aussageform: $[(P \to Q) \wedge (Q \to R)] \to (P \to R)$

P	Q	R	(1) $P \to Q$	(2) $Q \to R$	$1 \wedge 2$	(3) $P \to R$	$(1 \wedge 2) \to 3$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

2. DM als Aussageform u. a.: $\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \vee \neg Q$	$\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$
1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

b) 1. $(P \wedge Q) \to Q$

P	Q	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \to Q$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	1

5. $(P \to P) \to (P \leftrightarrow P)$

P	$P \to P$	$P \leftrightarrow P$	$(P \to P) \to (P \leftrightarrow P)$
1	1	1	1
0	1	1	1

7. $(\neg P \vee \neg Q) \leftrightarrow (P \rightarrow \neg Q)$

P	Q	¬P	¬Q	¬P ∨ ¬Q	P → ¬Q	(¬P ∨ ¬Q) ↔ (P → ¬Q)
1	1	0	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

Lösungen zu 2.2

a)
1. $\exists x\,(Bx \wedge Rx) \wedge \exists y\,(By \wedge Gy) \wedge \forall z\,(Bz \rightarrow Wz)$[1]
2. $\exists x Bx \rightarrow \exists x Wx$
3. $\forall x\,(Rx \rightarrow SWx)$[2] $\wedge\ \forall x\,(Sx \rightarrow Wx)$
4. $\forall x\,(Rx \rightarrow Bx) \wedge \exists x\,(Sx \wedge Wx)$
5. Es gibt sowohl Schönes als auch Hässliches.
6. Wenn alles durchschaubar ist, dann ist Philosophie überflüssig.

b)
1. 1 (2) $Aa \rightarrow Ba$ $\quad \forall B, 1$
2. (2) $\exists x\,(Px \rightarrow Px)$ $\quad \exists E, 1$
3. 1 (2) $\exists x Px$ $\quad \exists E, 1$
4. 1 (2) $Ap \vee Bp$ $\quad \forall B, 1$
5.

1	(2)	$\forall x\,(Ax \wedge Bx)$	$\wedge B, 1$
1	(3)	$Aa \wedge Ba$	$\forall B, 2$
1	(4)	$\forall x Cx$	$\wedge B, 1$
1	(5)	Ca	$\forall B, 4$
1	(6)	$\exists x\,(Ax \wedge Bx)$	$\exists E, 3$
1	(7)	$\exists x Cx$	$\exists E, 5$

[1] Die Variablen x, y und z stehen nicht notwendig für dieselben Gegenstände; der Zusammenhang wird durch das Prädikat B gestiftet! Da die Gegenstandsvariablen in verschiedenen Aussagen stehen, besteht in formaler Hinsicht keine Kollisionsgefahr, so dass man auch hätte Formalisieren können: $\exists x\,(Bx \wedge Rx) \wedge \exists x\,(Bx \wedge Gx) \wedge \forall x\,(Bx \rightarrow Wx)$.

[2] In der Wahl der Abkürzungen ist man frei. Nichts spricht dagegen, für ein Prädikat zwei Großbuchstaben zu verwenden.

6.

1	(2)	$Da \rightarrow \forall x\, Bx$	$\wedge$B, 1
1	(3)	Da	$\wedge$B, 1
1	(4)	$\forall x Bx$	$\rightarrow$B, 2, 3
1	(5)	Ba	$\forall$B, 4
1	(6)	$Da \wedge Ba$	$\wedge$E, 3, 5
1	(7)	$\exists x\,(Dx \wedge Bx)$	$\exists$E, 6
1	(8)	$Za \rightarrow Ba$	HA, 5
1	(9)	$\exists x\,(Zx \rightarrow Bx)$	$\exists$E, 8

Lösungen zu 2.4

a)
1. Pa
2. $\exists x\,(Gx \wedge Px)$
3. $\exists x\,(Gx \wedge Px)$
4. $\neg\exists x Vx$, mit „Vx“ = „x ist vorhanden“
5. $\forall x Ax$, mit „Ax“ = „x ist anwesend“ oder $\neg\exists x\,(Ex \wedge \neg Ax)$, zusätzlich mit „Ex“ = „x wird erwartet“
6. $\exists x\,(GLx \wedge \neg GOx)$ bzw. $\neg\forall x\,(GLx \rightarrow GOx)$
7. $\forall x\,(Vx \rightarrow Lx)$

b)
1. $\forall x\,(Vx \rightarrow Fx)$, $Vc \vdash Fc$:

1	(1)	$\forall x\,(Vx \rightarrow Fx)$	A
2	(2)	Vc	A
1	(3)	$Vc \rightarrow Fc$	$\forall$B, 1
1, 2	(4)	Fc	$\rightarrow$B, 3, 2

2. Vc, $Lc \vdash \exists x\,(Vx \wedge Lx)$:

1	(1)	Vc	A
2	(2)	Lc	A
1, 2	(3)	$Vc \wedge Lc$	$\wedge$E, 1, 2
1, 2	(4)	$\exists x\,(Vx \wedge Lx)$	$\exists$E, 3

3. $\forall x\,(Sx \rightarrow Fx)$, $\neg Fr \vdash \neg Sr$, mit „Sx“ = „x ist Scholastiker“, „Fx“ = „x ist Frühaufsteher“, „r“ = „Ramus“:

1	(1)	$\forall x\,(Sx \rightarrow Fx)$	A
2	(2)	$\neg Fr$	A
1	(3)	$Sr \rightarrow Fr$	$\forall$B, 1
1, 2	(4)	$\neg Sr$	MT, 3, 2

4. $\forall x\,(Px \to Kx),\ Ga \wedge Pa \vdash \exists x\,(Gx \wedge Kx)$:

1	(1)	$\forall x\,(Px \to Kx)$	A
2	(2)	$Ga \wedge Pa$	A
1	(3)	$Pa \to Ka$	$\forall$B, 1
2	(4)	Pa	$\wedge$B, 2
1, 2	(5)	Ka	$\to$B, 3, 4
2	(6)	Ga	$\wedge$B, 2
1, 2	(7)	$Ga \wedge Ka$	$\wedge$E, 6, 5
1, 2	(8)	$\exists x\,(Gx \wedge Kx)$	$\exists$E, 7

5. $\forall x\,(Px \to \neg Ax),\ \exists x\,(Px \wedge Lx) \vdash \exists x\,(Lx \wedge \neg Ax)$:

1	(1)	$\forall x\,(Px \to \neg Ax)$	A
2	(2)	$\exists x\,(Px \wedge Lx)$	A
1	(3)	$Pa \to \neg Aa$	$\forall$B, 1
4	(4)	$Pa \wedge La$	A
4	(5)	Pa	$\wedge$B, 4
1, 4	(6)	$\neg Aa$	$\to$B, 3, 5
4	(7)	La	$\wedge$B, 4
1, 4	(8)	$La \wedge \neg Aa$	$\wedge$E, 7, 6
1, 4	(9)	$\exists x\,(Lx \wedge \neg Ax)$	$\exists$E, 8
1	(10)	$Pa \wedge La \to \exists x\,(Lx \wedge \neg Ax)$	$\to$E, $\underline{4}$, 9
1, 2	(11)	$\exists x\,(Lx \wedge \neg Ax)$	$\exists$B, 2, 10

6. $\forall x\,(Px \to Sx), \forall x\,(Wx \to \neg Px) \vdash \forall x\,[Px \to (Sx \wedge \neg Wx)]$:

1	(1)	$\forall x\,(Px \to Sx)$	A
2	(2)	$\forall x\,(Wx \to \neg Px)$	A
1	(3)	$Pa \to Sa$	$\forall$B, 1
2	(4)	$Wa \to \neg Pa$	$\forall$B, 2
5	(5)	Pa	A
1, 5	(6)	Sa	$\to$B, 3, 5
5	(7)	$\neg\neg Pa$	SP, 5
2, 5	(8)	$\neg Wa$	MT, 4, 7
1, 2, 5	(9)	$Sa \wedge \neg Wa$	$\wedge$E, 6, 8
1, 2	(10)	$Pa \to Sa \wedge \neg Wa$	$\to$E, $\underline{5}$, 9
1, 2	(11)	$\forall x\,[Px \to (Sx \wedge \neg Wx)]$	$\forall$E, 10

7. $\forall x\,(SUx \to \neg SWx),\ \ \forall x\,(STx \to SUx)\ \vdash\ \forall x\,(SWx \to \neg STx)$, mit „SUx“ = „x ist ein Sumpfvogel“, „SWx“ = „x ist ein Schwimmvogel“, „STx“ = „x ist ein Storch“:

1	(1)	$\forall x\,(SUx \to \neg SWx)$	A
2	(2)	$\forall x\,(STx \to SUx)$	A
1	(3)	$SUa \to \neg SWa$	$\forall$B, 1
2	(4)	$STa \to SUa$	$\forall$B, 2
1, 2	(5)	$STa \to \neg SWa$	KS, 4, 3
1, 2	(6)	$\neg\neg SWa \to \neg STa$	KP, 5
7	(7)	SWa	A
7	(8)	$\neg\neg SWa$	SP, 7
1, 2, 7	(9)	$\neg STa$	$\to$B, 6, 8
1, 2	(10)	$SWa \to \neg STa$	$\to$E, $\underline{7}$, 9
1, 2	(11)	$\forall x\,(SWx \to \neg STx)$	$\forall$E, 10

8. $\exists xAx \to \forall x\,(Dx \wedge \neg Bx),\ \forall xBx \to \neg\exists xDx \vdash \exists x\,(Ax \to \neg\forall xBx)$:

1	(1)	$\exists xAx \to \forall x\,(Dx \wedge \neg Bx)$	A
2	(2)	$\forall xBx \to \neg\exists xDx$	A
3	(3)	Aa	A
3	(4)	$\exists xAx$	$\exists$E, 3
1, 3	(5)	$\forall x\,(Dx \wedge \neg Bx)$	$\to$B, 1, 4
1, 3	(6)	$Da \wedge \neg Ba$	$\forall$B, 5
1, 3	(7)	Da	$\wedge$B, 6
1, 3	(8)	$\exists xDx$	$\exists$E, 7
1, 2, 3	(9)	$\neg\forall xBx$	MT, 2, 8
1, 2	(10)	$Aa \to \neg\forall xBx$	$\to$E, $\underline{3}$, 9
1, 2	(11)	$\exists x\,(Ax \to \neg\forall xBx)$	$\exists$E, 10

9. In einer der Voraussetzungen von Zeile (10) – in der Aussage in Zeile (3) – kommt a frei vor. $\exists$B ist deshalb nicht erlaubt.

Lösungen zu 2.7

1. Pa

2. $\forall x \exists y Mxy$, mit Mxy = „x hat y zur Mutter“ (nicht „x ist Mutter von y“, denn nicht jeder *ist* eine Mutter!)

3. $\exists x \forall y\,[(Mx \wedge Ky) \wedge Hxy]$, mit Mx = „x ist eine Medizin“, Kx = „x ist eine Krankheit“ und Hxy = „x hilft gegen y“

4. $\forall x \exists y\,(Px \to Vxy)$, mit Px = „x ist Philosoph“ und Vxy = „x hat y zum Vorbild“

5. $\forall x \exists y\, Uxy$, mit Uxy = „x hat y zur Ursache“ oder – wenn *eine* betont ist – $\forall x Uxa$, mit a = ein nicht weiter Spezifizierbares

6. Gmn, mit Gxy = „x ist größer als y“, m = München und n = Nürnberg

7. Lfen, mit Lxyz = „x liegt zwischen y und z“ (= ein 3-stelliges Prädikat)

Anhang 1

A Grundregeln des KNS

Konjunktionseinführung (∧E)

$$\begin{array}{rlll@{\qquad\qquad}rlll}
k_1,\dots,k_r & (k) & P & & k_1,\dots,k_r & (k) & Q & \\
l_1,\dots,l_s & (l) & Q & & l_1,\dots,k_s & (l) & P & \\
k_1,\dots,l_s & (m) & P \wedge Q & \wedge E, k, l & k_1,\dots,l_s & (m) & P \wedge Q & \wedge E, l, k
\end{array}$$

Konjunktionsbeseitigung (∧B)

$$\begin{array}{rlll@{\qquad\qquad}rlll}
k_1,\dots,k_r & (k) & P \wedge Q & & k_1,\dots,k_r & (k) & P \wedge Q & \\
k_1,\dots,k_r & (l) & P & \wedge B, k & k_1,\dots,k_r & (l) & Q & \wedge B, k
\end{array}$$

Adjunktionseinführung (∨E)

$$\begin{array}{rlll@{\qquad\qquad}rlll}
k_1,\dots,k_r & (k) & P & & k_1,\dots,k_r & (k) & P & \\
k_1,\dots,k_r & (l) & P \vee Q & \vee E, k & k_1,\dots,k_r & (l) & Q \vee P & \vee E, k
\end{array}$$

Adjunktionsbeseitigung (∨B)

$$\begin{array}{rlll@{\qquad\qquad}rlll}
k_1,\dots,k_r & (k) & P \vee Q & & k_1,\dots,k_r & (k) & P \vee Q & \\
l_1,\dots,l_s & (l) & \neg P & & l_1,\dots,l_s & (l) & \neg Q & \\
k_1,\dots,l_s & (m) & Q & \vee B, k, l & k_1,\dots,l_s & (m) & P & \vee B, k, l
\end{array}$$

Negationseinführung (¬E) und Negationsbeseitigung (¬¬B)

$$\begin{array}{rlll@{\qquad\qquad}rlll}
k_1,\dots,k_r & (k) & P \rightarrow (Q \wedge \neg Q) & & k_1,\dots,k_r & (k) & \neg\neg P & \\
k_1,\dots,k_r & (l) & \neg P & \neg E, k & k_1,\dots,k_r & (l) & P & \neg\neg B, k
\end{array}$$

Subjunktionseinführung (→E) und Subjunktionsbeseitigung (→B)

$$\begin{array}{rlll@{\qquad\qquad}rlll}
k & (k) & P & A & k_1,\dots,k_r & (k) & P \rightarrow Q & \\
l_1,\dots,l_s,\ k & (l) & Q & & l_1,\dots,l_s & (l) & P & \\
l_1,\dots,l_s & (m) & P \rightarrow Q & \rightarrow E, \underline{k}, l & k_1,\dots,l_s & (m) & Q & \rightarrow B, k, l
\end{array}$$

Äquivalenzeinführung (↔E)

$$\begin{array}{rlll}
k_1,\dots,k_r & (k) & P \rightarrow Q & \\
l_1,\dots,l_s & (l) & Q \rightarrow P & \\
k_1,\dots,l_s & (m) & P \leftrightarrow Q & \leftrightarrow E, k, l
\end{array}$$

Äquivalenzbeseitigung (↔B)

$$\begin{array}{rlll@{\qquad\qquad}rlll}
k_1,\dots,k_r & (k) & P \leftrightarrow Q & & k_1,\dots,k_r & (k) & P \leftrightarrow Q & \\
k_1,\dots,k_r & (l) & P \rightarrow Q & \leftrightarrow B, k & k_1,\dots,k_r & (l) & Q \rightarrow P & \leftrightarrow B, k
\end{array}$$

Kontravalenzeinführung ($\not\leftrightarrow$E)

$$\begin{array}{rlll} k_1,\ldots,k_r & (k) & P \rightarrow \neg Q & \\ l_1,\ldots,l_s & (l) & \neg P \rightarrow Q & \\ k_1,\ldots,l_s & (m) & P \not\leftrightarrow Q & \not\leftrightarrow E, k, l \end{array}$$

Kontravalenzbeseitigung ($\not\leftrightarrow$B)

$$\begin{array}{rlll} k_1,\ldots,k_r & (k) & P \not\leftrightarrow Q & \\ k_1,\ldots,k_r & (l) & P \rightarrow \neg Q & \not\leftrightarrow B, k \end{array}$$

$$\begin{array}{rlll} k_1,\ldots,k_r & (k) & P \not\leftrightarrow Q & \\ k_1,\ldots,k_r & (l) & \neg P \rightarrow Q & \not\leftrightarrow B, k \end{array}$$

B Zulässige Regeln des KNS

Stabilitätsprinzip (SP)

$$\begin{array}{rlll} k_1,\ldots,k_s & (k) & P & \\ k_1,\ldots,k_s & (l) & \neg\neg P & SP, k \end{array}$$

Hypothetische Abschwächung (HA)

$$\begin{array}{rlll} k_1,\ldots,k_s & (k) & P & \\ k_1,\ldots,k_s & (l) & Q \rightarrow P & HA, k \end{array}$$

Kettenschluss (KS)

$$\begin{array}{rlll} k_1,\ldots,k_r & (k) & P \rightarrow Q & \\ l_1,\ldots,l_s & (l) & Q \rightarrow R & \\ k_1,\ldots,l_s & (m) & P \rightarrow R & KS, k, l \end{array}$$

Modus tollens (MT)

$$\begin{array}{rlll} k_1,\ldots,k_r & (k) & P \rightarrow Q & \\ l_1,\ldots,l_s & (l) & \neg Q & \\ k_1,\ldots,l_s & (m) & \neg P & MT, k, l \end{array}$$

Disjunktiver Syllogismus (DS)

$$\begin{array}{rlll} k_1,\ldots,k_r & (k) & P \not\leftrightarrow Q & \\ l_1,\ldots,l_r & (l) & P & \\ k_1,\ldots,l_r & (m) & \neg Q & DS, k, l \end{array}$$

$$\begin{array}{rlll} k_1,\ldots,k_r & (k) & P \not\leftrightarrow Q & \\ l_1,\ldots,l_r & (l) & Q & \\ k_1,\ldots,l_r & (m) & \neg P & DS, k, l \end{array}$$

Kontraposition (KP)

$$\begin{array}{rlll} k_1,\ldots,k_r & (k) & P \rightarrow Q & \\ k_1,\ldots,k_r & (k) & \neg Q \rightarrow \neg P & KP, k \end{array}$$

$$\begin{array}{rlll} k_1,\ldots,k_r & (k) & \neg Q \rightarrow \neg P & \\ k_1,\ldots,k_r & (k) & P \rightarrow Q & KP, k \end{array}$$

Konstruktives Dilemma (KD)

$k_1,\ldots,k_r$	(k)	$P \vee Q$	
$l_1,\ldots,l_s$	(l)	$P \to R$	
$m_1,\ldots,m_s$	(m)	$Q \to R$	
$k_1,\ldots,m_s$	(n)	R	KD, k, l, m

De Morgansche Regeln (DM)

$k_1,\ldots,k_r$	(k)	$\neg(P \wedge Q)$	
$k_1,\ldots,k_r$	(l)	$\neg P \vee \neg Q$	DM, k

$k_1,\ldots,k_r$	(k)	$\neg P \vee \neg Q$	
$k_1,\ldots,k_r$	(l)	$\neg(P \wedge Q)$	DM, k

$k_1,\ldots,k_r$	(k)	$\neg P \wedge \neg Q$	
$k_1,\ldots,k_r$	(l)	$\neg(P \vee Q)$	DM, k

$k_1,\ldots,k_r$	(k)	$\neg(P \vee Q)$	
$k_1,\ldots,k_r$	(l)	$\neg P \wedge \neg Q$	DM, k

Anhang 2

A Prädikatenlogische Grundregeln des KNS

Allbeseitigung (∀B)

$$\begin{array}{llll} k_1,\dots,k_r & (k) & \forall xFx & \\ k_1,\dots,k_r & (l) & Fa & \forall B, k \end{array}$$

Alleinführung (∀E)

$$\begin{array}{llll} k_1,\dots,k_r & (k) & Fa & \\ k_1,\dots,k_r & (l) & \forall xFx & \forall E, k \end{array}$$

Vorausgesetzt: I. x kommt in F nicht vor
II. a kommt nicht frei vor in: 1. k_1– k_r, 2. ∀xFx

Existenzeinführung (∃E)

$$\begin{array}{llll} k_1,\dots,k_r & (k) & Fa & \\ k_1,\dots,k_r & (l) & \exists xFx & \exists E, k \end{array}$$

Existenzbeseitigung (∃B)

$$\begin{array}{rlll} k_1,\dots,k_r & (k) & \exists xFx & \\ l_1,\dots,l_r & (l) & Fa \rightarrow C & \\ k_1,\dots,l_r & (m) & C & \exists B, k, l \end{array}$$

Vorausgesetzt: a kommt nicht frei vor in: 1. C, 2. k_1–l_r, 3. ∃xFx

B Zulässige Regeln: Quantorenlogische Dualität

(I)

$$\begin{array}{llll} k_1,\dots,k_r & (k) & \forall xAx & \\ k_1,\dots,k_r & (l) & \neg\exists x\neg Ax & QD, k \end{array}$$

(II)

$$\begin{array}{llll} k_1,\dots,k_r & (k) & \neg\exists x\neg Ax & \\ k_1,\dots,k_r & (l) & \forall xAx & QD, k \end{array}$$

(III)

$$\begin{array}{llll} k_1,\dots,k_r & (k) & \neg\forall x\neg Ax & \\ k_1,\dots,k_r & (l) & \exists xAx & QD, k \end{array}$$

(IV)

$$\begin{array}{llll} k_1,\dots,k_r & (k) & \exists xAx & \\ k_1,\dots,k_r & (l) & \neg\forall x\neg Ax & QD, k \end{array}$$