# Kompaktkurs formale Logik
# Zusätzliche Übungen

**Übung 1:**

Beurteilen Sie die nachfolgenden Überlegungen Nietzsches:

„Wenn es Ictus in dem Sprechen giebt – verschieden vom Accent – dann muß der im Verse sich wiederfinden. Aber die Worte haben die verschiedenste Stellung im Verse, bald in der Arsis, bald [in der] Thesis, somit haben sie keinen Ictus. Giebt es einen Versictus (a), dann gewiß keinen Wortiktus (b). Wenn es aber keinen Wortiktus (b) giebt, dann gewiß keinen Versictus (a).

> Wenn a ist, dann ist b nicht.
> Wenn b nicht ist, ist a nicht.
> Also giebt es *nicht* a.

Giebt es *keinen* Versictus, dann ist Wortiktus möglich. Wenn es Wortiktus giebt, dann ist Versictus möglich.“[1]

**Übung 2:**

Aus *1 Korinther 15, V13–14*:

„Gibt es aber keine Auferstehung der Toten, so ist auch Christus nicht auferweckt worden. Ist Christus nicht auferweckt worden, so ist unsere Predigt leer, und auch der Glaube ist leer.“

**a)** In welcher Beziehung stehen für Paulus Auferstehung und Glaube?

**b)** Ist für Paulus die Auferstehung der Toten Voraussetzung für die Auferstehung Christi?

**c)** In *(V20)* heißt es weiter: „Christus ist auferweckt worden.“ Was folgt daraus bezüglich der Leere des Glaubens und bezüglich der Auferstehung der Toten?

[1] Friedrich Nietzsche, *Kritische Gesamtausgabe*, 3. Abt., Bd. 3: *Nachgelassene Fragmente, Herbst 1869 bis Herbst 1872*, Berlin 1978, S. 92f.

**Übung 3:**

In Platons Phaidon findet sich folgendes Argument (es geht um das Wissen vom Gleichen selbst, Schönen selbst etc.):

„Wenn wir das (Wissen), was wir so (sc. vor der Geburt) erworben haben, nicht jedes Mal wieder vergäßen, müssten wir immer mit diesem Wissen geboren werden und unser Leben lang wissen. (...)(75d6-7) Wenn wir es aber, meine ich, vor der Geburt erworben und bei der Geburt verloren haben und später, wenn wir unsere Sinne für diese Dinge hier gebrauchen, jene Wissensinhalte, die wir früher einmal besaßen, wiedererwerben, wäre dann nicht das, was wir ‚lernen' nennen, das Wiedergewinnen eines ureigenen Wissens? Wenn wir das ‚wiedererinnern' nennen, geben wir ihm doch wohl den richtigen Namen? (75e2-8) (...) Also behaupte ich, muß eines von beidem der Fall sein: entweder sind wir alle mit diesem Wissen geboren und unser Leben lang in dessen Besitz, oder aber diejenigen, von denen wir sagen, dass sie lernen, tun nichts anderes, als sich später wiederzuerinnern, und das Lernen wäre eine Wiedererinnerung." (76a4-7)

Im Kommentar von Gallop wird dazu gesagt:

„The argument down to 76c5 is therefore of the following form:

(1) If P, Q (d7-el)
(2) If R, S (e2-8)
So (3) Either Q or S (a4-7)

In this argument step (3) follows, if but only if, it is assumed that:

(2∗) Either P or R."[2]

Ist Gallops Analyse korrekt?

[2] David Gallop, *Plato: Phaedo*, Clarendon Press: Oxford 1975, S. 131f.

**Übung 4:**

In der zweiten Studierzimmerszene von Goethes *Faust* gibt es folgende Passage. Was ist von dem Schluss zu halten, der dem Philosophen in den Mund gelegt wird?

> **Mephistopheles:**
> Gebraucht der Zeit, sie geht so schnell von hinnen,
> Doch Ordnung lehrt Euch Zeit gewinnen.
> Mein teurer Freund, ich rat Euch drum
> Zuerst Collegium Logicum.
> Da wird der Geist Euch wohl dressiert,
> In spanische Stiefeln eingeschnürt,
> Daß er bedächtiger so fortan
> Hinschleiche die Gedankenbahn,
> Und nicht etwa, die Kreuz und Quer,
> Irrlichteliere hin und her.
> Dann lehret man Euch manchen Tag,
> Daß, was Ihr sonst auf einen Schlag
> Getrieben, wie Essen und Trinken frei,
> Eins! Zwei! Drei! dazu nötig sei.
> Zwar ist's mit der Gedankenfabrik
> Wie mit einem Weber-Meisterstück,
> Wo ein Tritt tausend Fäden regt,
> Die Schifflein herüber hinüber schießen,
> Die Fäden ungesehen fließen,
> Ein Schlag tausend Verbindungen schlägt.
> Der Philosoph, der tritt herein
> Und beweist Euch, es müßt so sein:
> Das Erst wär so, das Zweite so,
> Und drum das Dritt und Vierte so;
> Und wenn das Erst und Zweit nicht wär,
> Das Dritt und Viert wär nimmermehr.
> Das preisen die Schüler allerorten,
> Sind aber keine Weber geworden.
> Wer will was Lebendigs erkennen und beschreiben,
> Sucht erst den Geist heraus zu treiben,
> Dann hat er die Teile in seiner Hand,
> Fehlt, leider! nur das geistige Band.
> *Encheiresin naturae* nennt's die Chemie,
> Spottet ihrer selbst und weiß nicht wie.

**Übung 5:**

Prüfen Sie mit Wahrheitstafeln oder KNS die folgenden Ausdrücke und interpretieren Sie diese inhaltlich (insbesondere bezüglich des Zusammenhangs zwischen formal gültigen Schlüssen und formal wahren Aussagen).

a) $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$

b) $[(A \wedge B) \rightarrow C] \rightarrow [(A \rightarrow C) \vee (B \rightarrow C)]$

**Übung 6:**

Was ist von folgendem Schluss zu halten: „Eine Form von Erlösung gibt es dann und nur dann, wenn es eine Form von Sünde gibt. Daraus folgt: Eine Form von Erlösung gibt es dann und nur dann, wenn es einen christlichen Gott gibt und einen christlichen Gott gibt es dann und nur dann, wenn es eine Form von Sünde gibt."

**Übung 7**

Geben Sie Ableitungen im KNS und erstellen Sie die entsprechenden Wahrheitswerttabellen.

a) Die Regel *ex falso quodlibet* besagt, dass aus Falschem (d. h. aus einem Widerspruch) Beliebiges folgt.

b) $A \wedge B \vdash A \rightarrow B$

c) $A \wedge B \vdash \neg(A \rightarrow \neg B)$

d) Boden, der für das Anpflanzen von Karotten geeignet ist, muss tief, sandig und frei von Steinen sein. Für das Anpflanzen von Leinsamen ist sandiger Boden und schwerer Boden völlig ungeeignet. Also ist Boden nicht sowohl für Karotten als auch für Leinsamen geeignet.

e) „Absurdität der Absurdität der Absurdität ist äquivalent mit Absurdität." (Luitzen Egbertus Jan Brouwer, „Intuitionistische Zerlegung mathematischer Grundbegriffe")

f) Die Regel *verum ex quodlibet* besagt, dass Wahres (in jedem Falle also Tautologisches) aus Beliebigem folgt.

**Übung 8:**

Folgender Dialog über den Dummen entstammt Umberto Ecos *Das Foucaultsche Pendel* (dt. München/Wien 1989, S. 79ff). Identifizieren Sie die enthaltenen Schlüsse und geben Sie dafür Ableitungen im KNS, so dass – falls ein Schluss ungültig ist - die Fehlerstelle deutlich wird. Ersetzen Sie die ungültigen Schlüsse durch gültige und geben Sie dafür Ableitungen.

„Und der Dumme?"

„Ah. Der Dumme vertut sich nicht im Benehmen. Er vertut sich im Denken. Er ist der Typ, der sagt, alle Hunde sind Haustiere, und alle Hunde bellen, aber auch die Katzen sind Haustiere, und folglich bellen sie. Oder: Alle Athener sind sterblich, und alle Einwohner von Piräus sind sterblich, also sind alle Einwohner von Piräus Athener."

„Stimmt ja auch."

„Ja, aber nur aus Zufall. Der Dumme kann auch was Richtiges sagen, aber aus falschen Gründen."

„Man kann auch was Falsches sagen, wenn nur die Gründe richtig sind."

„Bei Gott! Wozu sonst die ganze Mühe, ein animal rationale zu sein?"

„Alle großen Menschenaffen stammen von niederen Formen des Lebens ab, die Menschen stammen von niederen Formen des Lebens ab, also sind alle Menschen große Affen."

„Nicht schlecht. Wir sind schon auf der Schwelle, wo Sie zu ahnen beginnen, daß etwas nicht stimmt, aber es ist noch eine gewisse Arbeit nötig, um herauszufinden, was genau und warum. Der Dumme ist überaus heimtückisch. Den Dämlichen erkennt man sofort (ganz zu schweigen vom Idioten), aber der Dumme argumentiert fast genau wie man selber, es fehlt nur ein winziges Stückchen. Er ist ein Meister der Paralogismen. Vor ihm kann sich kein Verlagslektor retten, er brauchte dafür eine Ewigkeit. Bücher von Dummen werden viele veröffentlicht, weil sie uns auf den ersten Blick überzeugen. Der Verlagslektor ist nicht gehalten, den Dummen zu erkennen. Die Akademie der Wissenschaften erkennt ihn nicht, warum sollten es die Verlagsleute tun?"

„Auch die Philosophie erkennt ihn nicht. Der Gottesbeweis des Anselm von Canterbury ist dumm: Gott muß existieren, weil ich ihn als ein Wesen denken kann, das alle Vollkommenheit besitzt, einschließlich der Existenz. Anselm verwechselt die Existenz im Denken mit der Existenz in der Realität."

„Ja, aber dumm ist auch die Widerlegung von Gaunilo: Ich kann an eine Insel im Meer denken, auch wenn es diese Insel nicht gibt. Er verwechselt das Denken des Zufälligen mit dem Denken des Notwendigen."

„Ein Kampf zwischen Dummen."

„Sicher, und Gott amüsiert sich dabei wie närrisch. Er wollte bloß undenkbar sein, um zu demonstrieren, daß Anselm und Gaunilo dumm waren. Welch ein erhabenes Ziel für die Schöpfung, was sage ich, für den Willensakt, kraft dessen Gott sein wollte. Alles finalisiert auf die Anprangerung der kosmischen Dummheit."

„Wir sind von Dummen umzingelt."

„Man entgeht ihnen nicht. Alle sind dumm, außer Ihnen und mir. Oder sogar, ohne wen zu beleidigen, außer Ihnen." Mir scheint, hier kommt Gödels Beweis ins Spiel."

„Keine Ahnung, ich bin ein Idiot. Pilade!" „He, das ist meine Runde."

„Wir teilen's dann nachher. Der Kreter Epimenides sagt, alle Kreter sind Lügner. Wenn er das sagt, er, der ein Kreter ist und die Kreter kennt, muß es wahr sein."

„Das ist dumm."

„Das ist Paulus. Brief an Titus. Jetzt diesen: Alle, die denken, daß Epimenides ein Lügner ist, können sich nur auf die Kreter verlassen, aber die Kreter verlassen sich nicht auf die Kreter, weshalb kein Kreter denkt, daß Epimenides ein Lügner ist."

„Das ist dumm, oder?"

„Urteilen Sie selbst. Ich hab's Ihnen ja gesagt, es ist schwierig, den Dummen zu erkennen. Ein Dummer kann auch den Nobelpreis kriegen."

„Lassen Sie mich mal nachdenken ... Einige von denen, die nicht glauben, daß Gott die Welt in sieben Tagen geschaffen hat, sind keine Fundamentalisten, abcreinige Fundamentalisten glauben, daß Gott die Welt in sieben Tagen geschaffen hat - also ist keiner, der nicht glaubt, daß Gott die Welt in sieben Tagen geschaffen hat, ein Fundamentalist. Ist das jetzt dumm oder nicht?"

„Mein Gott, schwer zu sagen ... Ich weiß nicht. Was meinen Sie?"

„Es ist in jedem Fall dumm, auch wenn es wahr wäre. Es verletzt eine Regel des Syllogismus: Man kann keine allgemeinen Schlüsse aus zwei besonderen Fällen ableiten."

„Und wenn Sie nun der Dumme wären?"

„Dann wäre ich in guter und säkularer Gesellschaft."

„Da haben Sie recht, die Dummheit umgibt uns. Und vielleicht ist unsere Dummheit in einer anderen Logik als der unseren ihre Weisheit. Die ganze Geschichte der Logik besteht in der Definition eines akzeptablen Begriffs der Dummheit. Nichts zu machen, sie ist zu immens. Jeder große Denker ist eines anderen Dummer."

„Das Denken als die kohärente Form der Dummheit."

„Nein, die Dummheit eines Denkens ist die Inkohärenz eines anderen Denkens."

„Tiefer Gedanke. Schon zwei, gleich macht Pilade zu, und wir sind noch nicht bei den Irren."

„Bin schon da. Den Irren erkennt man sofort. Er ist ein Dummer, der sich nicht verstellen kann. Der Dumme versucht seine These zu beweisen, er hat eine schräge Logik, aber er hat eine. Der Irre dagegen kümmert sich nicht um Logik, er operiert mit Kurzschlüssen. Alles beweist für ihn alles.“

**Übung 9:**

Prüfen Sie mit Hilfe des KNS den Ausdruck $\exists \mathrm{x}\,(\mathrm{Ax} \vee \neg \mathrm{Ax})$ und interpretieren Sie diesen inhaltlich (insbesondere bezüglich der Leibnizschen Verwunderung darüber, dass überhaupt etwas existiert und nicht vielmehr nichts).

**Übung 10:**

Geben Sie Ableitungen im KNS:

a) Niemand ist älter als Moses. Also ist David nicht älter als Moses.

b) $\exists \mathrm{x}(\mathrm{Ax} \rightarrow \mathrm{Bx}) \vdash \forall \mathrm{xAx} \rightarrow \exists \mathrm{xBx}$

c) „Die CSU kandidiert nur in Bayern. Wenn also jemand nicht CSU wählt, dann ist er kein Bayer.“ (Günther Beckstein)

d) „Stecken nicht oft die besten und fähigsten Leute in der größten Armut; die, wenn sie ein taugliches Lehrbuch bey Händen hätten, in gar kurzer Zeit es sehr weit bringen könnten?“ (Leopold Mozart, *Gründliche Violinschule*)

e) $\forall x[\neg Px \rightarrow (Qx \wedge \neg Rx)],\ \exists x \neg Px \vdash \exists x \neg Rx$

# Lösungen

## Übung 1

Nietzsches Behauptung (als Sequenz: $a \to \neg b, \neg b \to \neg a \vdash \neg a$) ist korrekt, wie die folgende Ableitung zeigt:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | (1) | $a \to \neg b$ | A |
| 2 | (2) | $\neg b \to \neg a$ | A |
| 1, 2 | (3) | $a \to \neg a$ | KS, 1, 2 |
| 4 | (4) | $a$ | A |
| 1, 2, 4 | (5) | $\neg a$ | $\to$B, 3, 4 |
| 1, 2, 4 | (6) | $a \wedge \neg a$ | $\wedge$E, 4, 5 |
| 1, 2 | (7) | $a \to (a \wedge \neg a)$ | $\to$E, $\underline{4}$, 6 |
| 1, 2 | (8) | $\neg a$ | $\neg$E, 7 |

## Übung 2

„A“ für „Es gibt eine Auferstehung der Toten.“
„C“ für „Christus ist auferweckt worden.“
„P“ für „Die Predigt ist leer.“
„G“ für „Der Glaube ist leer.“

**a.)** Gefragt ist nach der Beziehung von $A$ zu $G$, wenn $\neg A \to \neg C$ und $\neg C \to P \wedge G$ gegeben sind.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | (1) | $\neg A \to \neg C$ | $A$ |
| 2 | (2) | $\neg C \to P \wedge G$ | $A$ |
| 1,2 | (3) | $\neg A \to P \wedge G$ | $KS, 1, 2$ |
| 4 | (4) | $\neg A$ | $A$ |
| 1,2,4 | (5) | $P \wedge G$ | $\to B, 3, 4$ |
| 1,2,4 | (6) | $G$ | $\wedge B, 5$ |
| 1,2 | (7) | $\neg A \to G$ | $\to E, \underline{4}, 6$ |
| 8 | (8) | $\neg G$ | $A$ |
| 1,2,8 | (9) | $\neg\neg A$ | $MT, 7, 8$ |
| 1,2,8 | (10) | $A$ | $\neg\neg B, 9$ |
| 1,2 | (11) | $\neg G \to A$ | $\to E, \underline{8}, 10$ |
| 1,2 | (12) | $(\neg A \to G) \wedge (\neg G \to A)$ | $\wedge E, 7, 11$ |

**Antwort:** Wenn es keine Auferstehung gibt, dann ist der Glaube leer. Wenn aber der Glaube nicht leer ist, dann gibt es eine Auferstehung der Toten.

**b.)** Die Auferstehung der Toten ist eine notwendige Bedingung für die Auferstehung Christi, denn es gilt $C \rightarrow A$:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | (1) | $\neg A \rightarrow \neg C$ | $A$ |
| 1 | (2) | $C \rightarrow A$ | $KP, 1$ |

**c.)** Hinsichtlich der Leere des Glaubens folgt nichts, es folgt jedoch, daß es eine Auferstehung der Toten gibt:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | (1) | $\neg A \rightarrow \neg C$ | $A$ |
| 2 | (2) | $\neg C \rightarrow P \wedge G$ | $A$ |
| 3 | (3) | $C$ | $A$ |
| 3 | (4) | $\neg\neg C$ | $SP, 3$ |
| 1,3 | (5) | $\neg\neg A$ | $MT, 1, 4$ |
| 1,3 | (6) | $A$ | $\neg\neg B, 5$ |

## Übung 3

Offensichtlich formalisiert Gallop wie folgt:
„P" für „Wir vergessen das pränatale Wissen bei der Geburt nicht."
„Q" für „Wir werden mit dem pränatalen Wissen geboren."
„R" für „Wir erlangen via Sinneserfahrung das pränatale Wissen wieder."
„S" für „Lernen ist eine Form von Wiedererinnerung."

Differenzierter wäre gewesen, „P" mit „Wir vergessen das pränatale Wissen bei der Geburt" zu formalisieren und dann (1) $\neg \mathrm{P} \rightarrow \mathrm{Q}$ und (2∗)$\neg \mathrm{P} \nleftrightarrow \mathrm{S}$ zu verwenden.

Bezüglich des Formalen behauptet Gallop, dass für $\mathrm{P} \rightarrow \mathrm{Q}$, $\mathrm{R} \rightarrow \mathrm{S}$, $\mathrm{P} \nleftrightarrow \mathrm{S}$ $\vdash$ $\mathrm{Q} \nleftrightarrow \mathrm{S}$ eine Ableitung existiert. Das würde bedeuten, dass die Aussage $[(\mathrm{P} \rightarrow \mathrm{Q}) \wedge (\mathrm{R} \rightarrow \mathrm{S})] \wedge (\mathrm{P} \nleftrightarrow \mathrm{S}) \rightarrow (\mathrm{Q} \nleftrightarrow \mathrm{S})$ formal wahr ist. Die nachfolgende Wahrheitswerttabelle zeigt aber, dass dies nicht der Fall ist:

| P | Q | R | S | (1) $P \rightarrow Q$ | (2) $R \rightarrow S$ | (3) $P \nleftrightarrow S$ | (4) $1 \wedge 2$ | (5) $3 \wedge 4$ | (6) $Q \nleftrightarrow S$ | $5 \rightarrow 6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |

Wenn keine Ableitung für $P \rightarrow Q$, $R \rightarrow S$, $P \nleftrightarrow S \vdash Q \nleftrightarrow S$ existiert, dann freilich erst recht keine für $P \rightarrow Q$, $R \rightarrow S \vdash Q \nleftrightarrow S$. Die Unableitbarkeit folgt aus den Zeilen 9 und 11. Man könnte nun fragen, ob diese Zeilen überhaupt möglich sind in dem Sinne, dass man P (= „Wir vergessen das pränatale Wissen bei der Geburt nicht“) als identisch mit $\neg Q$ (mit Q = „Wir werden mit dem pränatalen Wissen geboren“) auffassen könnte.

**Übung 4:**

Verschiedene Lesarten sind denkbar:

I) $\neg(1 \wedge 2) \rightarrow \neg(3 \wedge 4)$
II) $(\neg 1 \wedge \neg 2) \rightarrow (\neg 3 \wedge \neg 4)$
III) $\neg(1 \wedge 2) \rightarrow (\neg 3 \wedge \neg 4)$
IV) $(\neg 1 \wedge \neg 2) \rightarrow \neg(3 \wedge 4)$

Jede Variante ist auch mit einem „$\leftrightarrow$“ möglich.

### Übung 5a

| $A$ | $B$ | $A \rightarrow B$ | $B \rightarrow A$ | $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |

Ein interessantes Resultat vor dem Hintergrund der Beziehung zwischen „$\rightarrow$“ und „$\vdash$“.

### Übung 5b

| $A$ | $B$ | $C$ | $A \wedge B$ | (1) $A \wedge B \rightarrow C$ | $A \rightarrow C$ | $B \rightarrow C$ | (2) $(A \rightarrow C) \vee (B \rightarrow C)$ | $1 \rightarrow 2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Eigentlich logisch, wenn man bedenkt, welchen Aussageformen die Schlussformen $A, B \vdash C$, $A \vdash C$ und $B \vdash C$ entsprechen.

### Übung 6

Hinweis: Es empfiehlt sich die Formalisierung:
„e“ für „Es gibt eine Form von Erlösung.“
„s“ für „Es gibt eine Form von Sünde.“
„g“ für „Es gibt einen christlichen Gott.“

Somit steht folgende Schlussform zur Debatte: $(e \leftrightarrow s) \vdash [(e \leftrightarrow g) \wedge (g \leftrightarrow s)]$. Wie die Wahrheitswerttabelle zeigt, kann es dafür keine Ableitung geben:

| e | s | g | (1) $e \leftrightarrow s$ | (2) $e \leftrightarrow g$ | (3) $g \leftrightarrow s$ | $2 \wedge 3$ | $1 \rightarrow (2 \wedge 3)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

**Übung 7a:** $P \wedge \neg P \vdash Q$:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | (1) | $P \wedge \neg P$ | A |
| 1 | (2) | $P$ | $\wedge$B, 1 |
| 1 | (3) | $P \vee Q$ | $\vee$E, 2 |
| 1 | (4) | $\neg P$ | $\wedge$B, 1 |
| 1 | (5) | $Q$ | $\vee$B, 3, 4 |

| P | Q | $\neg P$ | (1) $P \wedge \neg P$ | (2) $P \vee \neg P$ | $(P \wedge \neg P) \rightarrow Q$ | $1 \rightarrow 1$ | $1 \rightarrow 2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

**Übung 7b:** $A \wedge B \vdash A \rightarrow B$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | (1) | $A \wedge B$ | A |
| 1 | (2) | $B$ | $\wedge$B, 1 |
| 3 | (3) | $A$ | A |
| 1, 3 | (4) | $A \wedge B$ | $\wedge$E, 3, 2 |
| 1, 3 | (5) | $B$ | $\wedge$B, 4 |
| 1 | (6) | $A \rightarrow B$ | $\rightarrow$E, $\underline{3}$, 5 |

Kürzer mit HA:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | (1) | $A \wedge B$ | A |
| 1 | (2) | $B$ | $\wedge$B, 1 |
| 1 | (3) | $A \rightarrow B$ | HA, 2 |

Die entsprechende Wahrheitswerttafel ist nicht schwierig.

**Übung 7c:** $A \wedge B \vdash \neg(A \rightarrow \neg B)$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | (1) | $A \wedge B$ | A |
| 2 | (2) | $A \rightarrow \neg B$ | A |
| 1 | (3) | $A$ | $\wedge$B, 1 |
| 1, 2 | (4) | $\neg B$ | $\rightarrow$B, 2, 3 |
| 1 | (5) | $B$ | $\wedge$B, 1 |
| 1, 2 | (6) | $B \wedge \neg B$ | $\wedge$E, 5, 4 |
| 1 | (7) | $(A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \wedge \neg B)$ | $\rightarrow$E, $\underline{2}$, 6 |
| 1 | (8) | $\neg(A \rightarrow \neg B)$ | $\neg$E, 7 |

| A | B | $A \wedge B$ | $\neg B$ | $A \rightarrow \neg B$ | $\neg(A \rightarrow \neg B)$ | $(A \wedge B) \rightarrow \neg(A \rightarrow \neg B)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |

**Übung 7d:**

$D \rightarrow (A \wedge B) \wedge \neg C,\ E \rightarrow \neg B \wedge \neg F \vdash \neg(D \wedge E)$

A = Der Boden ist tief.
B = Der Boden ist sandig.
C = Der Boden ist steinig.
D = Der Boden ist für Karotten geeignet.
E = Der Boden ist für Leinsamen geeignet.
F = Der Boden ist schwer.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | (1) | $D \rightarrow (A \wedge B) \wedge \neg C$ | A |
| 1 | (2) | $E \rightarrow \neg B \wedge \neg F$ | A |
| 3 | (3) | $D \wedge E$ | A |
| 3 | (4) | $D$ | $\wedge$B, 3 |
| 1, 3 | (5) | $(A \wedge B) \wedge \neg C$ | $\rightarrow$B, 1, 4 |
| 3 | (6) | $E$ | $\wedge$B, 3 |
| 2, 3 | (7) | $\neg B \wedge \neg F$ | $\rightarrow$B, 2, 6 |
| 1, 3 | (8) | $A \wedge B$ | $\wedge$B, 5 |
| 1, 3 | (9) | $B$ | $\wedge$B, 8 |
| 2, 3 | (10) | $\neg B$ | $\wedge$B, 7 |
| 1, 2, 3 | (11) | $B \wedge \neg B$ | $\wedge$E, 9, 10 |
| 1, 2 | (12) | $(D \wedge E) \rightarrow (B \wedge \neg B)$ | $\rightarrow$E, $\underline{3}$, 11 |
| 1, 2 | (12) | $\neg(D \wedge E)$ | $\neg$E, 12 |

Die entsprechende Wahrheitswerttabelle ist nicht schwierig.

**Übung 7e:** Vorausgesetzt, man formalisiert „A ist absurd“ mit $\neg$A, so entspricht das Zitat der Formel $\neg\neg\neg A \leftrightarrow \neg A$:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | (1) | $\neg\neg\neg A$ | A |
| 1 | (2) | $\neg A$ | $\neg\neg$B, 1 |
| | (3) | $\neg\neg\neg A \rightarrow \neg A$ | $\rightarrow$E, $\underline{1}$, 2 |
| 4 | (4) | $\neg A$ | A |
| 4 | (5) | $\neg\neg\neg A$ | SP, 4 |
| | (6) | $\neg A \rightarrow \neg\neg\neg A$ | $\rightarrow$E, $\underline{4}$, 5 |
| | (7) | $\neg\neg\neg A \leftrightarrow \neg A$ | $\leftrightarrow$E, 3, 6 |

| A | $\neg$A | $\neg\neg$A | $\neg\neg\neg$A | $\neg\neg\neg A \leftrightarrow \neg A$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |

**Übung 7f:** Tautologien sind formal wahr. Wie sich im KNS zeigen lässt, können sie von Beliebigem abhängig gemacht werden. Analog lässt sich mit Hilfe der Wahrheitstafelmethode zeigen, dass Subjunktionen mit tautologischem Succedens in jedem Falle formal wahr sind.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | (1) | $B$ | $A$ |
| | (2) | $A \vee \neg A$ | $SVD$ |
| 1 | (3) | $B \wedge (A \vee \neg A)$ | $\wedge E$, 1,2 |
| 1 | (4) | $A \vee \neg A$ | $\wedge B$, 1 |

| A | B | $\neg$A | (1) $A \vee \neg A$ | (2) $A \wedge \neg A$ | $1 \rightarrow 1$ | $2 \rightarrow 1$ | $B \rightarrow 1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |

## Übung 8

**1. Schluss:** $\forall x\,(HUx \rightarrow HAx),\ \forall x\,(HUx \rightarrow Bx) \vdash \forall x\,(HAx \rightarrow Bx)$

HUx = „x ist ein Hund“
HAx = „x ist ein Haustier“
Bx = „x bellt“

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | (1) | $\forall x\,(HUx \rightarrow HAx)$ | A |
| 2 | (2) | $\forall x\,(HUx \rightarrow Bx)$ | A |
| 1 | (3) | $HUa \rightarrow HAa$ | $\forall$B, 1 |
| 2 | (4) | $HUa \rightarrow Ba$ | $\forall$B, 2 |
| 5 | (5) | $HUa$ | A |
| 1, 5 | (6) | $HAa$ | $\rightarrow$B, 3, 5 |
| 2, 5 | (7) | $Ba$ | $\rightarrow$B, 4, 5 |
| 8 | (8) | $\exists x HUx$ | A |
| 1, 2, 5 | (9) | $HAa \wedge Ba$ | $\wedge$E, 6, 7 |
| 1, 2, 5 | (10) | $Ba$ | $\wedge$B, 9 |
| 1, 2, 5 | (11) | $HAa \rightarrow Ba$ | HA, 10 |
| 1, 2 | (12) | $HUa \rightarrow (HAa \rightarrow Ba)$ | $\rightarrow$E, $\underline{5}$, 11 |
| 1, 2, 8 | (13) | $HAa \rightarrow Ba$ | $\exists$B, 8, 12 |
| 1, 2, 8 | (14) | $\forall x\,(HAx \rightarrow Bx)$ | $\forall$E, 13 |

Die Voraussetzung von 8 in (14) könnte man als Existenzpräsupposition zugestehen; der eigentliche Fehler liegt in Zeile (13): Die dort vorgenommene $\exists$B ist nicht erlaubt, da a in dem Ausdruck $HAa \rightarrow Ba$ frei vorkommt.
Korrekt hätte man z. B. schließen können:
$\exists x\,(HUx \wedge Bx),\ \forall x\,(HUx \rightarrow HAx) \vdash \exists x\,(HAx \wedge Bx)$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | (1) | $\exists x\,(HUx \wedge Bx)$ | A |
| 2 | (2) | $\forall x\,(HUx \rightarrow HAx)$ | A |
| 2 | (3) | $HUa \rightarrow HAa$ | $\forall$B, 2 |
| 4 | (4) | $HUa \wedge Ba$ | A |
| 4 | (5) | $HUa$ | $\wedge$B, 4 |
| 2, 4 | (6) | $HAa$ | $\rightarrow$B, 3, 5 |
| 4 | (7) | $Ba$ | $\wedge$B, 4 |
| 2, 4 | (8) | $HUa \wedge Ba$ | $\wedge$E, 6, 7 |
| 2, 4 | (9) | $\exists x(HUx \wedge Bx)$ | $\exists$E, 8 |
| 2 | (10) | $(HUa \wedge Ba) \rightarrow \exists x(HAx \wedge Bx)$ | $\rightarrow$E, $\underline{4}$, 9 |
| 1, 2 | (11) | $\exists x(HAx \wedge Bx)$ | $\exists$E, 1, 10 |

Nicht korrekt wäre gewesen:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | (9) | $(HUa \wedge Ba) \rightarrow (HAa \wedge Ba)$ | $\rightarrow$E, $\underline{4}$, 8 |
| 1, 2 | (10) | $HAa \wedge Ba$ | $\exists$B, 1, 9 |
| 1, 2 | (11) | $\exists x\,(HAx \wedge Bx)$ | $\exists$E, 10 |

**2. Schluss:** $\forall x\,(HAx \rightarrow Bx),\ \forall x\,(Kx \rightarrow Hx) \vdash \forall x\,(Kx \rightarrow Bx)$
Formalisierung wie oben, plus Kx = „x ist eine Katze“.

**3. Schluss:** $\forall x\,(Ax \leftrightarrow Sx),\ \forall x\,(Ex \rightarrow Sx) \vdash \forall x\,(Ex \rightarrow Ax)$

Ax = „x ist Athener“
Sx = „x ist sterblich“
Kx = „x ist Einwohner von Piräus“

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | (1) | $\forall x\,(Ax \leftrightarrow Sx)$ | A |
| 2 | (2) | $\forall x\,(Ex \rightarrow Sx)$ | A |
| 1 | (3) | $Aa \leftrightarrow Sa$ | $\forall$B, 1 |
| 1 | (4) | $Sa \rightarrow Aa$ | $\leftrightarrow$B, 3 |
| 2 | (5) | $Ea \rightarrow Sa$ | $\forall$B, 2 |
| 1, 2 | (6) | $Ea \rightarrow Aa$ | KS, 5, 4 |
| 1, 2 | (7) | $\forall x\,(Ex \rightarrow Ax)$ | $\forall$E, 6 |

**4. Schluss:** Vgl. oben.

**5. Schluss:** $\forall x\,(Lx \rightarrow Vx),\ \forall x\,(Kx \rightarrow \neg Vx) \vdash \forall x\,(Kx \rightarrow \neg Lx)$
(Vorsicht bei der Konstruktion mit „nur“: Die Aussage „Nur wer sich auf die Kreter verlässt, hält Epimenides für einen Lügner“ ist formal äquivalent mit der Aussage „Nur wer in Bayern wohnt, kann CSU wählen“.)

Lx = „x hält Epimenides für einen Lügner“
Vx = „x verlässt sich auf die Kreter“
Kx = „x ist ein Kreter“

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | (1) | $\forall x\,(Lx \rightarrow Vx)$ | A |
| 2 | (2) | $\forall x\,(Kx \rightarrow \neg Vx)$ | A |
| 1 | (3) | $La \rightarrow Va$ | $\forall$B, 1 |
| 2 | (4) | $Ka \rightarrow \neg Va$ | $\forall$B, 2 |
| 1 | (5) | $\neg Va \rightarrow \neg La$ | KP, 3 |
| 1, 2 | (6) | $Ka \rightarrow \neg La$ | KS, 4, 5 |
| 1, 2 | (7) | $\forall x\,(Kx \rightarrow \neg Lx)$ | $\forall$E, 6 |

**6. Schluss:** $\exists x\,(\neg Gx \wedge \neg Fx),\ \exists x\,(Fx \wedge Gx) \vdash \forall x\,(\neg Gx \rightarrow \neg Fx)$
Zur Ableitung ist nur die 2. Prämisse erforderlich, wobei Fx = „x ist Fundamentalist“ und Gx = „x glaubt, Gott hat die Welt in sieben Tagen erschaffen“ ($\forall$E in (6) ist freilich nicht erlaubt).

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | (1) | $\exists x\,(Fx \wedge Gx)$ | A |
| 2 | (2) | $Fa \wedge Ga$ | A |
| 2 | (3) | $Ga$ | $\wedge$B, 2 |
| 2 | (4) | $Fa \rightarrow Ga$ | HA, 3 |
| 2 | (5) | $\neg Ga \rightarrow \neg Fa$ | KP, 4 |
| 2 | (6) | $\forall x\,(\neg Gx \rightarrow \neg Fx)$ | $\forall$E, 5 |
| | (7) | $(Fa \wedge Ga) \rightarrow \forall x(\neg Gx \rightarrow \neg Fx)$ | $\rightarrow$E, $\underline{2}$, 6 |
| 1 | (8) | $\forall x(\neg Gx \rightarrow \neg Fx)$ | $\exists$B, 1, 7 |

**Übung 9**
Hinweis: Die Aussageform $A \vee \neg A$ ist bekanntlich eine Tautologie.

**Übung 10a:** $\neg\exists x Axm \vdash \neg Adm$:

Axy = x ist älter als y, m = Moses, d = David

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | (1) | $\neg\exists x Axm$ | A |
| 2 | (2) | $Adm$ | A |
| 2 | (3) | $\exists x Axm$ | $\exists$E, 2 |
| 1, 2 | (4) | $\exists x Axm \wedge \neg\exists x Axm$ | $\wedge$E, 3, 1 |
| 1 | (5) | $Adm \rightarrow (\exists x Axm \wedge \neg\exists x Axm)$ | $\rightarrow$E, $\underline{2}$, 4 |
| 1 | (6) | $\neg Adm$ | $\neg$E, 5 |

**Übung 10b:** $\exists x(Ax \rightarrow Bx) \vdash \forall x Ax \rightarrow \exists x Bx$:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | (1) | $\exists x(Ax \rightarrow Bx)$ | A |
| 2 | (2) | $Aa \rightarrow Ba$ | A |
| 3 | (3) | $\forall x Ax$ | A |
| 3 | (4) | $Aa$ | $\forall$B, 3 |
| 2, 3 | (5) | $Ba$ | $\rightarrow$B, 2, 4 |
| 2, 3 | (6) | $\exists x Bx$ | $\exists$E, 5 |
| 2 | (7) | $\forall x Ax \rightarrow \exists x Bx$ | $\rightarrow$E, $\underline{3}$, 6 |
| | (8) | $(Aa \rightarrow Ba) \rightarrow (\forall x Ax \rightarrow \exists x Bx)$ | $\rightarrow$E, $\underline{2}$, 7 |
| 1 | (9) | $\forall x Ax \rightarrow \exists x Bx$ | $\exists$B, 1, 8 |

**Übung 10c:** $\forall x(Cx \rightarrow Bx) \vdash \forall x(\neg Cx \rightarrow \neg Bx)$

Bx = x ist Bayer (i. S. v. „hat seinen Wohnsitz in Bayern“).
Cx = x wählt CSU.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | (1) | $\forall x(Cx \rightarrow Bx)$ | A |
| 1 | (2) | $Ca \rightarrow Ba$ | $\forall$B, 1 |
| 3 | (3) | $\neg Ba$ | A |
| 1, 3 | (4) | $\neg Ca$ | MT, 2, 3 |
| 1 | (5) | $\neg Ca \rightarrow \neg Ba$ | $\rightarrow$E, $\underline{4}$, 3 |
| 1 | (6) | $\forall x(\neg Cx \rightarrow \neg Bx)$ | $\forall$E, 5 |

Die Formalisierung der Prämisse ist adäquat; sie darf freilich nicht lauten $\forall x(Bx \rightarrow Cx)$! Wäre außerdem Zeile (5) korrekt, dann wäre es auch die Ableitung. Oder hätte man den Becksteinschen Schluss formalisieren sollen mit $\forall x(Cx \leftrightarrow Bx) \vdash \forall x(\neg Cx \leftrightarrow \neg Bx)$?

**Übung 10d:** $\forall x(Lx \rightarrow Wx), \exists x \neg Wx \vdash \exists x \neg Lx$

Lx = x hat ein Lehrbuch zur Hand.
Wx = x bringt es weit.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | (1) | $\forall x(Lx \rightarrow Wx)$ | A |
| 2 | (2) | $\exists x \neg Wx$ | A |
| 1 | (3) | $La \rightarrow Wa$ | $\forall$B, 1 |
| 4 | (4) | $\neg Wa$ | A |
| 1, 4 | (5) | $\neg La$ | MT, 3, 4 |
| 1, 4 | (6) | $\exists x \neg Lx$ | $\exists$E, 5 |
| 1 | (7) | $\neg Wa \rightarrow \exists x \neg Lx$ | $\rightarrow$E, $\underline{4}$, 6 |
| 1, 2 | (8) | $\exists x \neg Lx$ | $\exists$B, 2, 7 |

**Übung 10e:** $\forall x[\neg Px \rightarrow (Qx \wedge \neg Rx)], \exists x \neg Px \vdash \exists x \neg Rx$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | (1) | $\forall x[\neg Px \rightarrow (Qx \wedge \neg Rx)]$ | $A$ |
| 2 | (2) | $\exists x \neg Px$ | $A$ |
| 1 | (3) | $\neg Pa \rightarrow (Qa \wedge \neg Ra)$ | $\forall B, 1$ |
| 4 | (4) | $\neg Pa$ | $A$ |
| 1,4 | (5) | $Qa \wedge \neg Ra$ | $\rightarrow B, 3, 4$ |
| 1,4 | (6) | $\neg Ra$ | $\wedge B, 5$ |
| 1,4 | (7) | $\exists x \neg Rx$ | $\exists E, 6$ |
| 1 | (8) | $\neg Pa \rightarrow \exists x \neg Rx$ | $\rightarrow E, \underline{4}, 7$ |
| 1,2 | (9) | $\exists x \neg Rx$ | $\exists B, 2, 8$ |