

Potenciales de galaxias e integración de órbitas

JULEN EXPÓSITO

Universidad de La Laguna

20 de enero de 2021

Resumen

Es posible simular la dinámica estelar de la Vía Láctea mediante la modelización de su potencial gravitatorio y datos observacionales de la posición y velocidad de las estrellas. En este trabajo se ha analizado y comparado el comportamiento y efecto de diversos potenciales utilizados habitualmente para la modelización de potenciales galácticos. Posteriormente, se ha modelado el potencial de la Vía Láctea mediante la combinación de varios de ellos y se han integrado las órbitas para una muestra de estrellas de la vecindad solar utilizando datos de Gaia DR2. Finalmente, se han utilizado las órbitas integradas para discutir las diferencias entre las órbitas de las estrellas jóvenes y viejas, de lo cual se ha concluido que las estrellas de mayor edad presentan excursiones verticales más pronunciadas y órbitas más excéntricas.

I. INTRODUCCIÓN

EL potencial gravitacional (al cual nos referiremos a partir de ahora solo como potencial) de una galaxia está determinado por la cantidad y distribución de masa encontrada en ella. El conjunto de estrellas, gas y materia oscura del que se compone una galaxia definirá un perfil de densidad en toda ella, con el cual el potencial en todos los puntos de un volumen V queda definido mediante la siguiente expresión:

$$\Phi(\mathbf{x}) = -G \int_0^V \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|} d^3\mathbf{x}'. \quad (1)$$

El gradiente del potencial nos da la fuerza experimentada por una partícula de prueba de masa m en un punto dado:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -m\nabla\Phi(\mathbf{x}). \quad (2)$$

Con un poco de cálculo, puede deducirse de (2) la **ecuación de Poisson**:

$$\nabla^2\Phi(\mathbf{x}) = 4\pi G\rho(\mathbf{x}), \quad (3)$$

con la que podemos encontrar fácilmente el perfil de densidad asociado a cualquier potencial dado.

Puede demostrarse también que un cuerpo en órbita circular de radio r sometido a un potencial dado tendrá la siguiente velocidad circular:

$$v_c(r) = \sqrt{\frac{\partial\Phi}{\partial r}}r. \quad (4)$$

Conociendo el potencial, podemos hacernos una buena idea del entorno dinámico asociado al mismo si estudiamos la distribución de densidad que supone y la velocidad circular que tienen sus órbitas circulares a diferentes distancias.

Existen numerosos potenciales galácticos que son usados para simular la dinámica de una galaxia. Diferentes estructuras de la misma pueden modelarse usando distintos potenciales, a fin de simular apropiadamente la distribución de masa a diferentes distancias y direcciones del núcleo galáctico.

En este trabajo se ha, primero, estudiado y comparado diversos potenciales galácticos, a fin de entender sus principales características. Posteriormente, se ha hecho uso de los datos obtenidos de Gaia DR2 de miles de estrellas de la vecindad solar para simular, mediante un modelo galáctico dado que hace uso de varios de los potenciales estudiados, las órbitas de dichas estrellas.

Estas órbitas pueden calcularse perfectamente conociendo únicamente las condiciones iniciales del espacio de fases para cada estrella (sus coordenadas espaciales y su velocidad), siempre que ignoremos el efecto que la masa de la estrella tiene en la distribución de masa que la rodea y por tanto podamos considerar que el potencial es externo. Teniendo en cuenta la segunda ley de Newton, $F(\mathbf{x}) = m\mathbf{a}$, la ecuación (2) nos fija la aceleración experimentada por una estrella en cualquier punto. Conociendo las condiciones iniciales del espacio de fases de las estrellas gracias a los datos de Gaia DR2, esto nos ha permitido calcular sus órbitas computacionalmente.

Observando las características dichas órbitas, se ha estudiado la diferencia estadística entre las órbitas de estrellas jóvenes y viejas y se ha discutido sobre la pertenencia al disco de estrellas cuyas órbitas simuladas deducen excursiones verticales notorias.

II. METODOLOGÍA

I. Potenciales

Se han considerado los siguientes potenciales esféricos. La distancia al centro se representa con r :

Masa puntual:

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{r}. \quad (5)$$

Esfera homogénea:

$$\begin{aligned} \Phi(r) &= -2\pi G\rho \left(a^2 - \frac{1}{3}r^2 \right) & r \leq a. \\ \Phi(r) &= -\frac{4\pi G\rho a^3}{3r} & r \geq a. \end{aligned} \quad (6)$$

Plummer:

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{\sqrt{r^2 + b^2}}. \quad (7)$$

Isocrono:

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{b + \sqrt{r^2 + b^2}}. \quad (8)$$

Ley de potencias:

$$\begin{aligned} \Phi(r) &= \frac{4\pi G\rho_0 r_0^2}{(3-\alpha)(2-\alpha)} \left(\frac{r_0}{r} \right)^{\alpha-2} & \alpha \neq 2. \\ \Phi(r) &= -\frac{4\pi G\rho_0 r_0^2}{(3-\alpha)} \ln r & \alpha = 2. \end{aligned} \quad (9)$$

Hernquist:

$$\Phi(r) = -4\pi G\rho_0 a^2 \frac{1}{2(1+r/a)}. \quad (10)$$

NFW:

$$\Phi(r) = -4\pi G\rho_0 a^3 \frac{\ln(1+r/a)}{r}. \quad (11)$$

Y los siguientes potenciales aplanados, que intentan simular la estructura de disco. Poseen simetría cilíndrica en vez de esférica. La altura está representada por z y la distancia radial en el disco con r' :

Kuzmin:

$$\Phi(r', z) = -\frac{GM}{\sqrt{r'^2 + (a + |z|)^2}}. \quad (12)$$

Miyamoto-Nagai:

$$\Phi(r', z) = -\frac{GM}{\sqrt{r'^2 + (a + \sqrt{z^2 + b^2})^2}}. \quad (13)$$

El potencial de Miyamoto-Nagai posee dos parámetros de escala; esto es así porque representa un modelo de disco grueso mediante una estructura elipsoidal. El parámetro de escala a está relacionado con el semieje mayor del elipsoide, y el parámetro b con el semieje menor (es decir, el grosor del disco).

Para estudiar los distintos potenciales galácticos, primero necesitamos conocer la distribución espacial de masa a la que van asociados y la dinámica que producen. Para cada potencial, pues, se ha encontrado su perfil de densidad usando la ecuación de Poisson (3) y la velocidad circular en órbitas de radio r usando (4).

Con el fin de comparar los diversos potenciales es necesario establecer un marco físico común. Para ello, se han establecido valores y condiciones compartidas entre todos para intentar hacer una simulación burda de la Vía Láctea. Tomaremos una masa del orden de $M = 10^{12} M_\odot$ y consideraremos que los potenciales están definidos hasta una distancia $R = 200$ kpc, valor típico del radio virial r_{200} considerado para la Vía Láctea. [W. Dehnen, et. al., 2006]

Algunos potenciales no dependen explícitamente de la masa, sino de un valor dado de densidad central. En estos casos, se ha explicitado la masa tomando el perfil de densidad y calculando la integral

$$M = \int_0^V \rho(r) dV = 4\pi \int_0^R r^2 \rho(r) dr. \quad (14)$$

Posteriormente se ha despejado la constante de densidad correspondiente al perfil de densidad dado y se ha sustituido en las diversas ecuaciones.

Los diversos potenciales poseen parámetros libres. Estos parámetros, cuando ha sido posible, se han fijado exigiendo que el valor de la velocidad circular de una partícula de prueba en el disco, a 8 kpc del centro galáctico, sea de 230 km/s, que es el valor típico de velocidad tangencial de una estrella encontrada a esa distancia del centro de la Vía Láctea según los datos obtenidos de Gaia DR2. Esta es la condición establecida para asegurarnos de que todos los potenciales se encuentran en una escala de valores que los haga comparables.

El potencial de Miyamoto-Nagai es el único que no queda completamente fijado al exigir la condición anterior. Como segunda condición se ha establecido, en su caso, un ratio 1/10 entre el parámetro de escala relacionado con el grosor del disco y el parámetro relacionado con su amplitud, simulando el ratio aproximado para las escalas propias de la Vía Láctea.

No deben tomarse estos resultados como representaciones realistas (ni siquiera como simplificaciones razonables) del potencial en toda la galaxia, sino como un mero camino para establecer un marco de comparación cualitativa consistente entre ellos.

Una vez definidos los perfiles de densidad, expresiones de potencial y velocidades circulares respecto a la distancia al centro para todos los potenciales, se han graficado los potenciales esféricos por un lado y los potenciales aplanados por otro. Para estos últimos, al no poseer simetría esférica, sino cilíndrica, se han graficado también los resultados para varias alturas en los casos donde esta fuera relevante, a fin de estudiar más apropiadamente el entorno dinámico que producen.

II. Integración de órbitas

Utilizando el archivo de Gaia DR2, se ha tomado información cinemática y fotométrica de una muestra de 4096 estrellas de la vecindad solar. Para estudiar las diferencias entre estrellas jóvenes y viejas es necesario conseguir dos submuestras de estrellas cuya edad media sepamos muy distante. Esto podemos hacerlo seleccionando estrellas de alta masa y estrellas de baja masa, pues estas últimas viven mucho más tiempo y por tanto tendrán en promedio mucha mayor edad que las de alta masa.

Utilizando las magnitudes aparentes ofrecidas por Gaia DR2, se ha colocado a todas las estrellas de la muestra en un CMD, graficando la magnitud m_G frente al color B-R. Sabemos que las estrellas de menor masa se concentrarán en el extremo derecho inferior de la línea correspondiente a la secuencia principal, mientras que encontraremos a las de mayor masa en el extremo superior izquierdo. Por tanto, se han establecido las siguientes condiciones para crear las correspondientes submuestras:

Estrellas de baja masa: $2 < B - R < 2.4$ // $8.2 < m_G < 9.2$

Estrellas de alta masa: $0.5 < B - R < 0.7$ // $2 < m_G < 3.75$

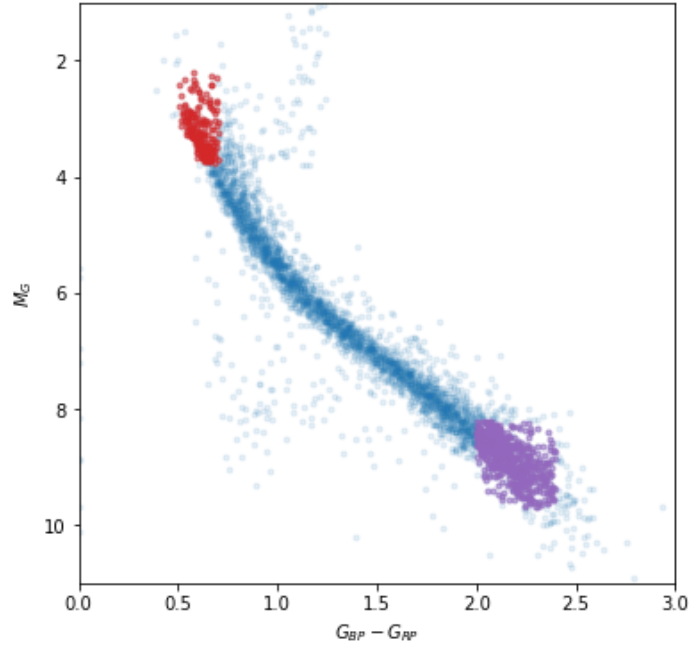


Figura 1: Diagrama color-magnitud para una muestra de 4096 estrellas de la vecindad solar obtenida de los datos de Gaia DR2. En rojo, la submuestra de estrellas de alta masa. En morado, la submuestra de estrellas de baja masa.

Usando el entorno de gala, se ha construido un modelo de potencial para la Vía Láctea mediante los siguientes potenciales y parámetros:

- **Disco:** Potencial de Miyamoto-Nagai, $M = 6.8 \cdot 10^{10} M_{\odot}$, $a = 3.00$ kpc, $b = 0.28$ kpc.

- **Bulbo:** Potencial de Hernquist, $M = 5 \cdot 10^9 M_{\odot}$, $a = 1.00$ kpc.
- **Núcleo:** Potencial de Hernquist, $M = 1.71 \cdot 10^9 M_{\odot}$, $a = 0.07$ kpc, $b = 0.28$ kpc.
- **Halo:** Potencial de NFW, $M = 5.4 \cdot 10^{11} M_{\odot}$, $a = 15.62$ kpc.

Y se ha utilizado para calcular computacionalmente las órbitas de las estrellas de ambas submuestras anteriormente definidas. Para encontrar las diferencias entre las estrellas jóvenes y viejas, se han realizado histogramas con los valores de mayor distanciamiento vertical del disco, apocentro, pericentro y excentricidad para ambas submuestras. Para las estrellas con las excursiones verticales más resaltables se han graficado sus órbitas junto con las de estrellas con órbitas típicas y se ha estudiado su velocidad con el fin de determinar si pertenecen realmente al disco.

III. RESULTADOS

I. Potenciales esféricos

Las expresiones finales de las densidades y velocidades circulares para los diferentes potenciales son las siguientes:

Masa puntual:

No tiene sentido definir el perfil de densidad para una masa puntual. Su velocidad circular es

$$v_c = \sqrt{\frac{GM}{r}}. \quad (15)$$

Debido a la falta de parámetro libre, a la masa puntual no se le ha exigido ninguna condición. Su forma se adaptará a la masa de la Vía Láctea.

Esfera homogénea:

$$\begin{aligned} \rho(r) &= \rho & r &\leq a \\ \rho(r) &= 0 & r &\geq a. \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} v_c(r) &= \sqrt{\frac{4\pi G \rho r^2}{3}} & r &\leq a, \\ v_c(r) &= \sqrt{\frac{4\pi G \rho a^3}{3r}} & r &\geq a. \end{aligned} \quad (17)$$

Tal que:

$$\rho = \frac{3M}{4\pi a^3}, \quad a = 17.33 \text{ kpc}.$$

Plummer:

$$\rho(r) = \frac{3Mb^2}{4\pi} (r^2 + b^2)^{-5/2}. \quad (18)$$

$$v_c(r) = \sqrt{\frac{GM r^2}{(r^2 + b^2)^{3/2}}}. \quad (19)$$

Tal que:

$$b = 15.37 \text{ kpc.}$$

Isocrono:

Tomando $a = \sqrt{r^2 + b^2}$, tenemos:

$$\rho(r) = M \frac{3a^2(b+a) - (b+3a)r^2}{4\pi(b+a)^3 a^3}. \quad (20)$$

$$v_c(r) = \sqrt{\frac{GM r^2}{a(b+a)^2}}. \quad (21)$$

Tal que:

$$b = 8.89 \text{ kpc.}$$

Ley de potencias:

$$\rho(r) = \rho_0 \left(\frac{r_0}{r} \right)^\alpha. \quad (22)$$

$$\begin{aligned} v_c(r) &= \sqrt{\frac{4\pi G \rho_0 r_0^2}{3-\alpha} \left(\frac{r_0}{r} \right)^{\alpha-2}} & \alpha \neq 2, \\ v_c(r) &= \sqrt{4\pi G \rho_0 r_0^2} & \alpha = 2. \end{aligned} \quad (23)$$

Tal que:

$$\rho_0 = \frac{M(3-\alpha)}{4\pi R^{3-\alpha} r_0^\alpha}, \quad \alpha = 2.28.$$

Nótese que una vez definida la densidad central para una masa M en un volumen esférico de radio R , dicho valor de densidad depende del factor de escala r_0 , pero no la densidad, potencial o velocidad circular. El factor de escala r_0 se simplifica en todas al sustituir la densidad central por la expresión anterior porque la información que contiene está ya dada por la elección de M y R .

Debido a esto, una vez fijadas M y R , la ley de potencias solo tiene como parámetro libre la potencia en sí, y por tanto podemos fijar su valor exigiendo $v_c(8 \text{ kpc}) = 230 \text{ km/s}$, al igual que hemos hecho con el resto de potenciales y sus parámetros libres.

Hernquist:

$$\rho(r) = \frac{\rho_0 a}{r(1 + r/a)^3}. \quad (24)$$

$$v_c(r) = \sqrt{\frac{2\pi a^3 G \rho_0 r}{(a + r)^2}}. \quad (25)$$

Tal que:

$$\rho_0 = \frac{M(a + R)^2}{2\pi a^3 R^2}, \quad a = 20.06 \text{ kpc.}$$

NFW:

$$\rho(r) = \frac{\rho_0 a}{r(1 + r/a)^2}. \quad (26)$$

$$v_c(r) = \sqrt{\frac{4\pi a^3 G \rho_0 [(a + r) \ln(\frac{a+r}{a}) - r]}{r(a + r)}}. \quad (27)$$

Tal que:

$$\rho_0 = \frac{M}{4\pi a^3 [\ln(\frac{a+R}{a}) + \frac{a}{a+R} - 1]}, \quad a = 6.68 \text{ kpc.}$$

Utilizando los anteriores resultados, se han graficado todos los perfiles de densidad, potenciales y velocidades circulares juntos, a fin de facilitar su comparación. Las características de los potenciales se discutirán en la sección 4.

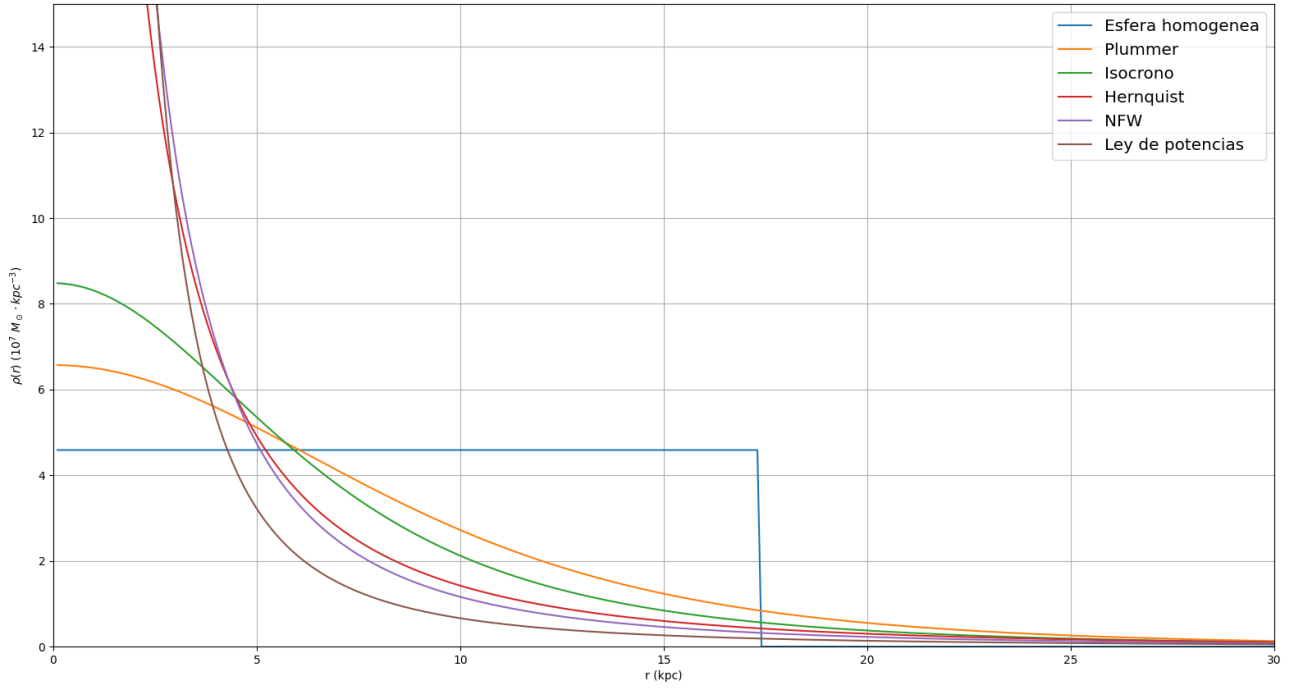


Figura 2: Densidad volumétrica en $10^7 M_{\odot} \cdot \text{kpc}^{-3}$ para distintos potenciales esféricamente simétricos frente a la distancia al centro en kpc, definidos en un volumen esférico de 200 kpc de radio y para una masa de $M = 10^{12} M_{\odot}$. El parámetro libre de cada potencial se ha fijado exigiendo que la velocidad circular de una estrella a la misma distancia que el Sol del centro galáctico sea la misma que la del Sol.

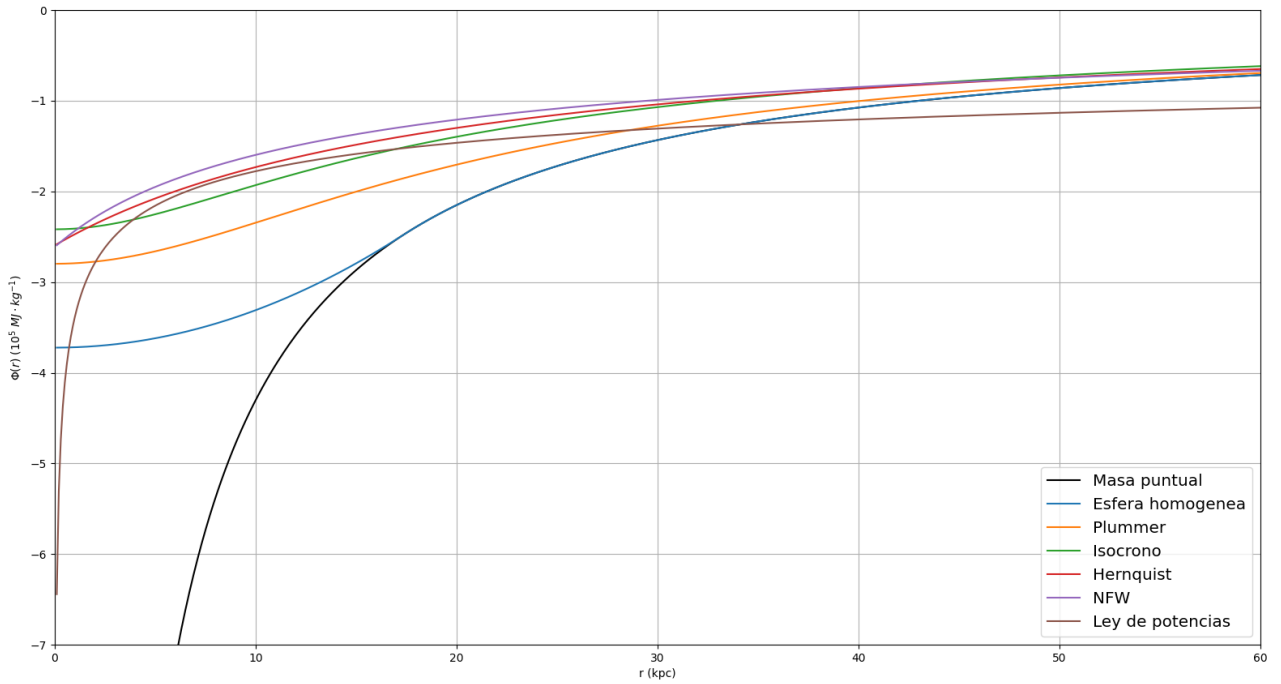


Figura 3: Valor del potencial en $10^5 \text{ MJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ para distintos potenciales esféricamente simétricos frente a la distancia al centro en kpc, definidos en un volumen esférico de 200 kpc de radio y para una masa de $M = 10^{12} M_{\odot}$. El parámetro libre de cada potencial (excepto la masa puntual, pues queda fijado al definir la masa) se ha fijado exigiendo que la velocidad circular de una estrella a la misma distancia que el Sol del centro galáctico sea la misma que la del Sol.

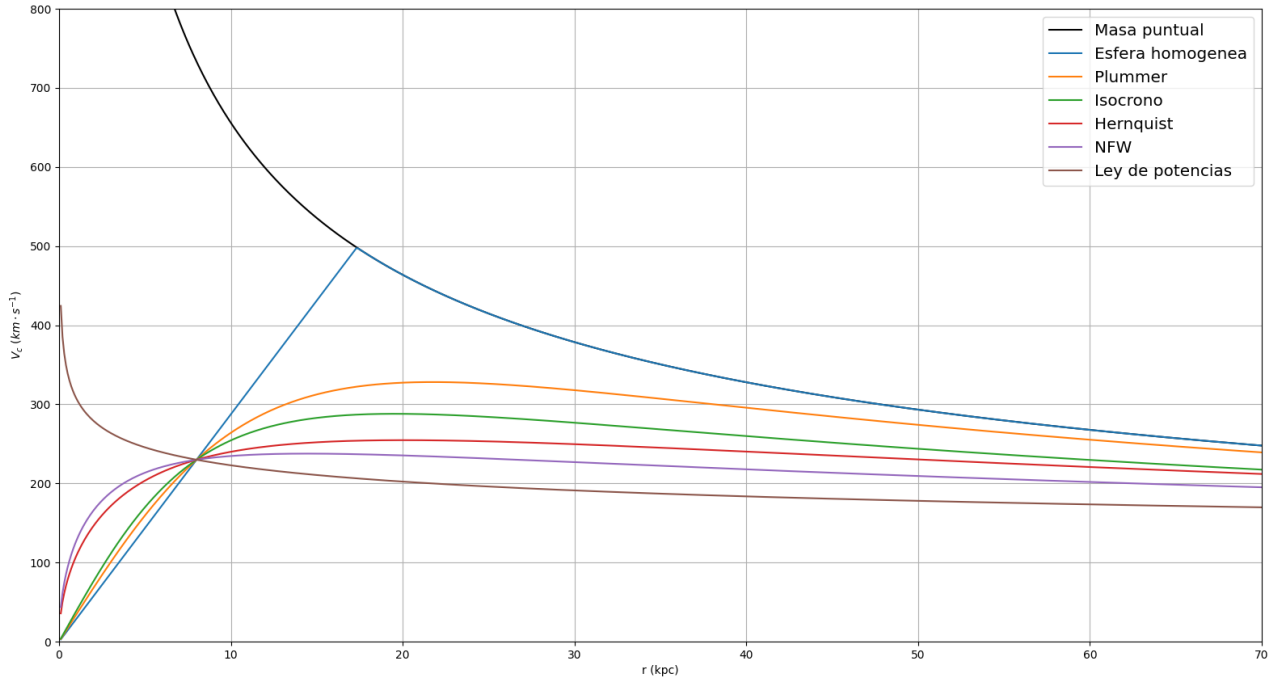


Figura 4: Valor de la velocidad circular en $\text{km} \cdot \text{s}^{-1}$ para distintos potenciales esféricamente simétricos frente a la distancia al centro en kpc, definidos en un volumen esférico de 200 kpc de radio y para una masa de $M = 10^{12} M_{\odot}$. El parámetro libre de cada potencial (excepto la masa puntual, pues queda fijado al definir la masa) se ha fijado exigiendo que la velocidad circular de una estrella a la misma distancia que el Sol del centro galáctico sea la misma que la del Sol.

II. Potenciales aplanados

Las expresiones finales de las densidades y velocidades circulares para los diferentes potenciales aplanados son las siguientes:

Kuzmin:

El potencial de Kuzmin corresponde a un disco plano, por lo que el perfil de densidad es superficial, no volumétrico.

$$\Sigma(r') = \frac{aM}{2\pi(r'^2 + a^2)^{3/2}} \quad z = 0, \quad (28)$$

$$\Sigma(r') = 0 \quad z \neq 0.$$

$$v_c(r', z) = \sqrt{\frac{GM r'^2}{(r'^2 + (a + |z|)^2)^{3/2}}}. \quad (29)$$

Tal que:

$$a = 15.37 \text{ kpc}.$$

Miyamoto-Nagai:

$$\rho(r') = \frac{b^2 M}{4\pi} \frac{ar'^2 + (a + 3\sqrt{z^2 + b^2}) (a + \sqrt{z^2 + b^2})^2}{\left(r'^2 + (a + \sqrt{z^2 + b^2})^2\right)^{5/2} (z^2 + b^2)^{3/2}}. \quad (30)$$

$$v_c(r') = \sqrt{\frac{GM r'^2}{\left(r'^2 + (a + \sqrt{z^2 + b^2})^2\right)^{3/2}}}. \quad (31)$$

Tal que:

$$b = 0.1a, \quad a = 13.97 \text{ kpc}.$$

De nuevo, se han graficado los potenciales y velocidades circulares juntos. Las densidades se han separado debido a sus diferentes naturalezas (la distribución de masa de Kuzmin se define mediante densidad superficial y la de Miyamoto-Nagai es volumétrica). Para ambos potenciales se han representado los resultados en el disco y a una distancia vertical del mismo de $z = 5 \text{ kpc}$.

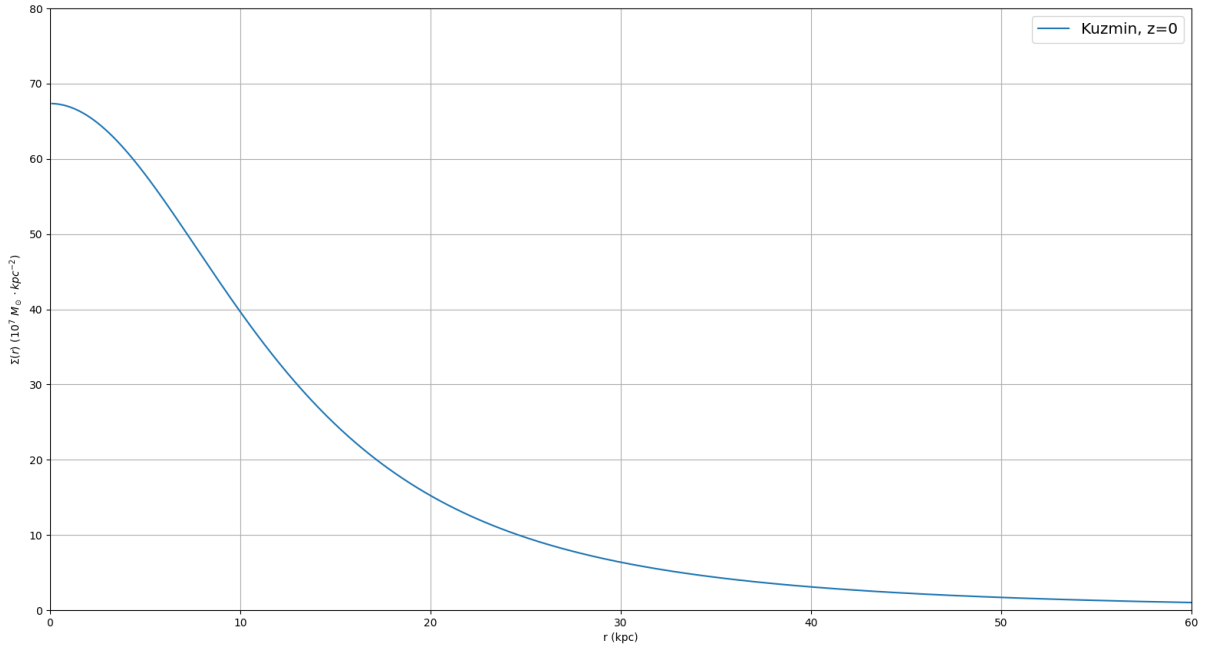


Figura 5: Densidad superficial en $10^7 M_{\odot} \cdot \text{kpc}^{-2}$ para el potencial de Kuzmin en el disco frente a la distancia al centro en kpc, definido en un volumen esférico de 200 kpc de radio y para una masa de $M = 10^{12} M_{\odot}$. El parámetro libre se ha fijado exigiendo que la velocidad circular de una estrella a la misma distancia que el Sol del centro galáctico sea la misma que la del Sol.

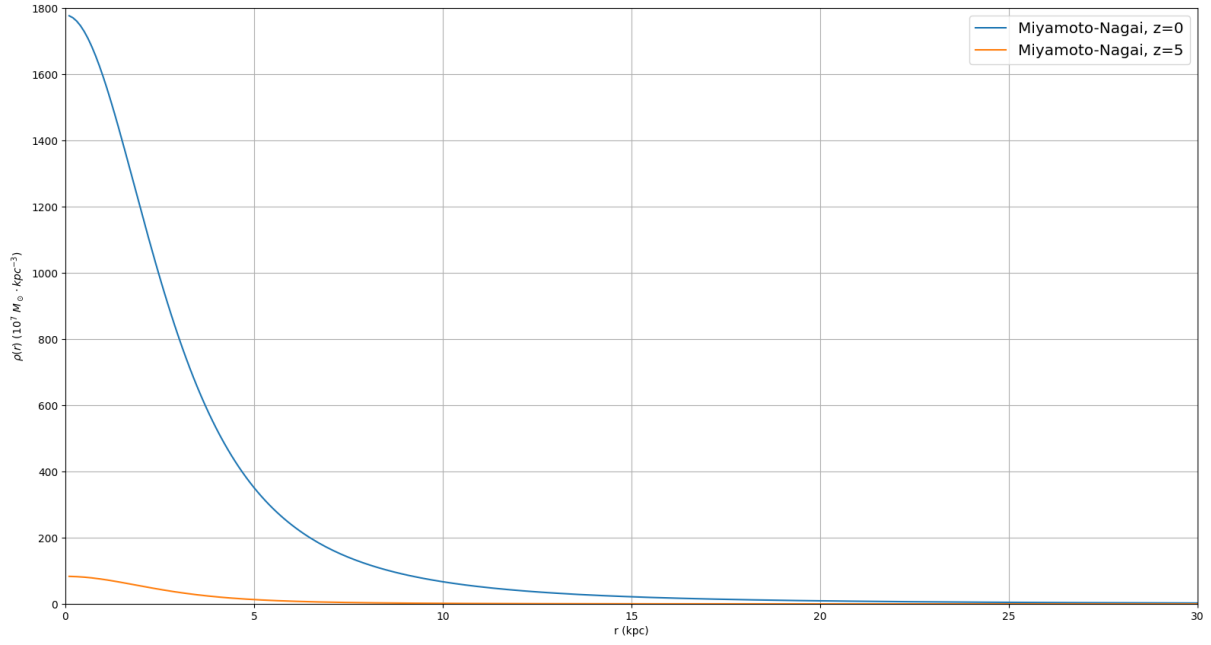


Figura 6: Densidad volumétrica en $10^7 M_{\odot} \cdot \text{kpc}^{-3}$ para el potencial de Miyamoto-Nagai frente a la distancia al centro en kpc, definido en un volumen esférico de 200 kpc de radio y para una masa de $M = 10^{12} M_{\odot}$. El parámetro libre se ha fijado exigiendo que la velocidad circular de una estrella del disco a la misma distancia que el Sol del centro galáctico sea la misma que la del Sol.

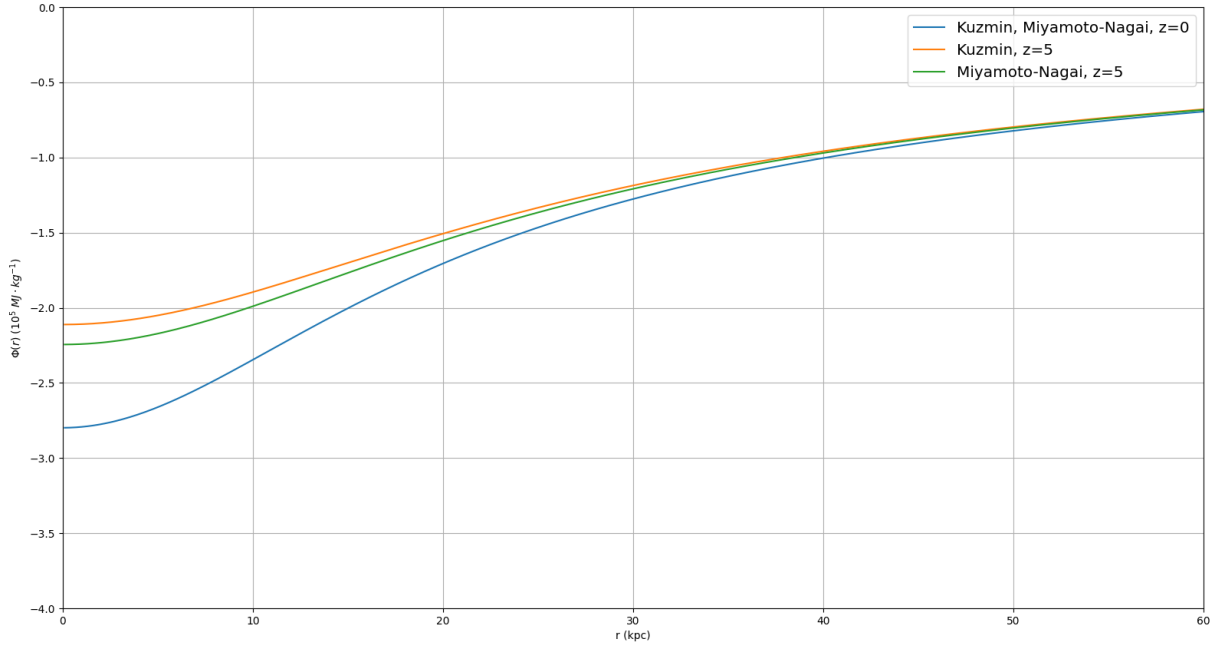


Figura 7: Valor del potencial en $10^5 \text{ MJ} \cdot \text{kg}^{-3}$ para distintos potenciales aplanados frente a la distancia al centro en kpc, definidos en un volumen esférico de 200 kpc de radio y para una masa de $M = 10^{12} M_{\odot}$. Se ha representado el perfil en el disco y a una distancia vertical del mismo de 5 kpc. El parámetro libre de cada potencial se ha fijado exigiendo que la velocidad circular de una estrella del disco a la misma distancia que el Sol del centro galáctico sea la misma que la del Sol. El potencial de Kuzmin y Miyamoto-Nagai es equivalente en el disco.

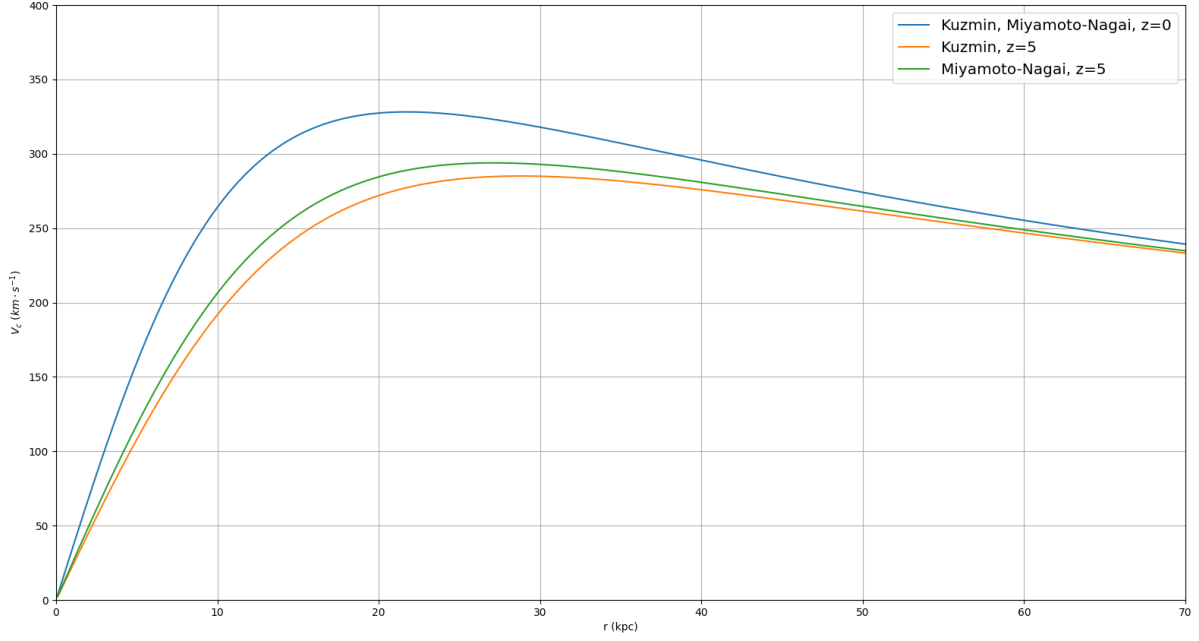


Figura 8: Valor de la velocidad circular en $\text{km} \cdot \text{s}^{-1}$ para distintos potenciales aplanados frente a la distancia al centro en kpc, definidos en un volumen esférico de 200 kpc de radio y para una masa de $M = 10^{12} M_{\odot}$. Se ha representado el perfil en el disco y a una distancia vertical del mismo de 5 kpc. El parámetro libre de cada potencial se ha fijado exigiendo que la velocidad circular de una estrella del disco a la misma distancia que el Sol del centro galáctico sea la misma que la del Sol. La velocidad circular resultante del potencial de Kuzmin y Miyamoto-Nagai es equivalente en el disco.

III. Órbitas integradas

Se han obtenido los siguientes valores medios para las órbitas de las estrellas muy masivas y poco masivas:

| | Estrellas muy masivas | | Estrellas poco masivas | |
|-----------------------------|-----------------------|---------------------|------------------------|---------------------|
| | Valor medio | Desviación estándar | Valor medio | Desviación estándar |
| Velocidad tangencial (km/s) | 230.36 | 1.90 | 229.95 | 2.48 |
| Excentricidad | 0.09 | 0.05 | 0.12 | 0.07 |
| z_{max} | 0.15 | 0.17 | 0.21 | 0.22 |
| Distancia al centro (kpc) | 8.27 | 0.58 | 8.10 | 0.72 |

Tabla 1: Resultados medios correspondientes a las órbitas calculadas por el modelo de potencial de la Vía Láctea para dos muestras de estrellas de la vecindad solar tomadas de datos de Gaia DR2. Una muestra corresponde a 185 estrellas de alta masa y la otra a 593 estrellas de baja masa. z_{max} está definido como el mayor distanciamiento vertical respecto al disco realizado por la estrella.

Nótese que la distancia media al centro de todas las estrellas ronda los 8 kpc y que la velocidad tangencial parece mantenerse alrededor de 230 km/s sin mucha variación para casi todas ellas, confirmando que la condición exigida a los potenciales para su estudio anterior es adecuada.

Se han realizado histogramas con los valores de las excentricidades, así como con el apocentro y el pericentro, diferenciando entre estrellas muy masivas y poco masivas:

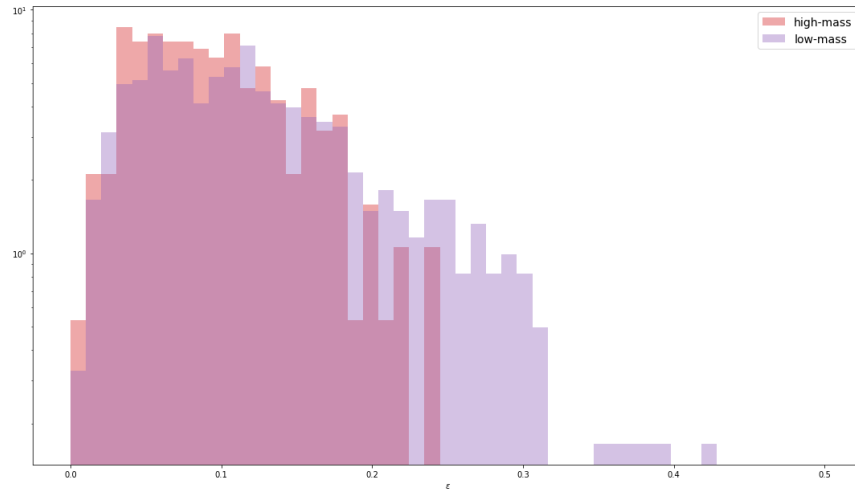


Figura 9: Histograma representando el número de estrellas de alta y baja masa en escala logarítmica frente a la excentricidad de sus órbitas.

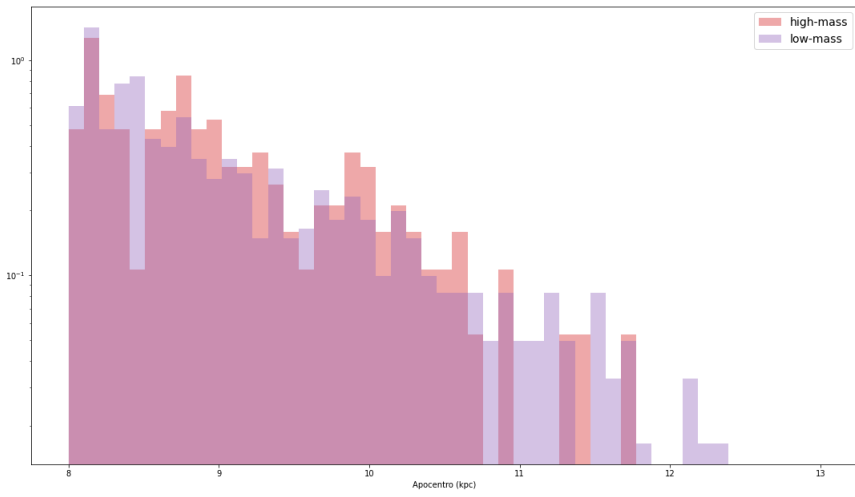


Figura 10: Histograma representando el número de estrellas de alta y baja masa en escala logarítmica frente al apocentro de sus órbitas en kpc.

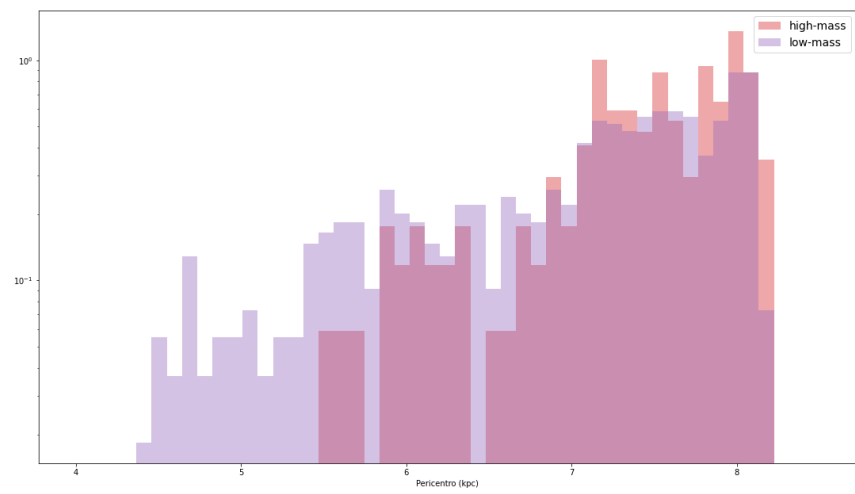


Figura 11: Histograma representando el número de estrellas de alta y baja masa en escala logarítmica frente al pericentro de sus órbitas en kpc.

Puede apreciarse que las estrellas con mayor excentricidad son todas de baja masa. A su vez, como es coherente con este resultado, solo encontramos estrellas de baja masa con un pericentro menor de 5.5 kpc, y estas también dominan los valores de apocentro más grandes encontrados en las muestras.

A su vez, se ha realizado también un histograma con los valores del máximo distanciamiento vertical respecto al disco para las estrellas de baja y alta masa:

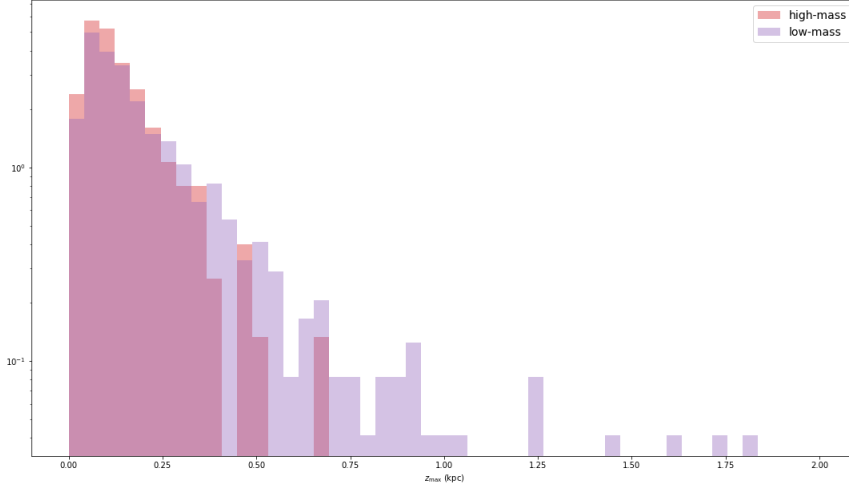


Figura 12: Histograma representando el número de estrellas de alta y baja masa en escala logarítmica frente a la distancia vertical máxima que han tenido en sus órbitas en un periodo de 500 Myr.

Son también las estrellas de baja masa las únicas que encontramos con excursiones verticales mayores de 0.75 kpc. Tres de estas estrellas experimentan excursiones verticales mayores a 1.5 kpc; se discutirá en la sección 4 si estas estrellas pertenecen realmente al disco.

IV. DISCUSIÓN

I. Potenciales

Masa puntual:

El potencial producido por una masa puntual tiende a $-\infty$ para $r \rightarrow 0$ y tiende suavemente a 0 para $r \rightarrow \infty$. Las velocidades de las órbitas que causa son extremadamente altas a radios bajos (y tienden a infinito según $r \rightarrow 0$) y también tienden a cero para $r \rightarrow \infty$.

Esta tendencia a 0 con el aumento de distancia para el potencial y para la velocidad de las órbitas circulares que causa dicho potencial se da en todos los potenciales. Todos ellos tienden a converger entre si con el aumento de la distancia. Esto incluye tanto a esféricos como aplanados. Un resultado esperable: el perfil de densidad de todos los potenciales muestra mayor concentración de masas a distancias pequeñas del centro de los mismos que a distancias grandes. Cuanto más lejos esté el punto en el que evaluamos el potencial de la mayor cantidad de masa distribuida de una forma dada, menos afectará al potencial percibido por una partícula de prueba en ese punto las características concretas de esa distribución.

Esfera homogénea:

Este potencial está creado por una esfera de masa homogéneamente distribuida; es decir, una esfera de densidad constante. No es de extrañar, pues, que a distancias mayores al radio de la esfera el potencial sea exactamente el mismo que el causado por una masa puntual. Es el parámetro libre (en este caso, el radio de la esfera) el que decide a qué distancia se junta el potencial de la esfera homogénea con el potencial de la masa puntual.

Por debajo de dicho valor lo que tenemos es un potencial suavizado que para $r \rightarrow 0$ converge a un valor finito dependiendo del valor de la densidad de la esfera. Respecto a la velocidad orbital, crece linealmente con la distancia debido a la densidad constante en todos los puntos, hasta llegar al límite del radio de la esfera en la que la velocidad comienza a caer con forma Kepleriana, igual que la masa puntual.

Plummer:

Plummer funciona como una suavización del potencial Kepleriano que da una masa puntual. El parámetro de escala b básicamente decide el grado de suavizamiento, pues cuanto mayor es b más suave es la dependencia del perfil de densidad respecto a la distancia al centro para distancias de orden comparable a b o menores. Esto es justo lo que vemos en las gráficas; para un valor de velocidad circular equivalente a 8 kpc, el potencial de Plummer adquiere una forma similar en naturaleza al de la esfera homogénea, pero más suave y con valor absoluto inferior a distancias bajas del centro, debido a que a su alrededor la densidad asociada al potencial de Plummer es mayor. A distancias altas el valor absoluto del potencial de la esfera homogénea (o la masa puntual, tanto da) es menor, pues la densidad nunca cae a cero y por tanto siempre hay algo de masa más allá de la distancia considerada.

Esto, lógicamente, lleva al efecto contrario en las velocidades orbitales a radios altos. A radios bajos, la velocidad es superior a la de la esfera homogénea en el rango de distancia en la que la densidad es mayor.

Isocrono:

El potencial isocrono es otro suavizado del potencial Kepleriano, como podemos observar, más pronunciado que Plummer. Liberando el parámetro libre y dejando atrás el marco físico establecido, podemos comprobar que este potencial interpola entre el potencial de una masa puntual y el de una densidad homogénea por medio del parámetro libre.

Para $b = 0$ tenemos una masa puntual. Recordemos, $a = \sqrt{r^2 + b^2}$, por lo que $a = r$ en este caso:

$$\rho(r) = M \frac{3a^2(b+a) - (b+3a)r^2}{4\pi(b+a)^3a^3} \rightarrow \rho(r \neq 0) = 0.$$

Y para $b \gg r$, $a = b$ y tenemos una distribución homogénea.

$$\rho(r) = M \frac{3a^2(b+a) - (b+3a)r^2}{4\pi(b+a)^3a^3} \rightarrow \rho = \frac{3M}{4\pi \left(\frac{b}{\sqrt[3]{4}}\right)^3}.$$

Ley de potencias:

Algo notable del potencial con forma de ley de potencias es el rango que debe cumplir el exponente para que el resultado tenga sentido físico. La masa encerrada en una esfera de radio r según la ley de potencias es

$$M(< r) = \frac{4\pi\rho_0 r_0^3}{3-\alpha} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{\alpha-3},$$

por lo que necesariamente $\alpha < 3$ para representar cualquier distribución finita de masa. Además, el potencial se hace positivo para $\alpha < 2$ y la velocidad de las órbitas crece con la distancia, por lo que ese resultado tampoco es aceptable. Por tanto, $2 \leq \alpha < 3$.

Cabe comentar que, para $\alpha = 2$, el potencial es logarítmico y la velocidad orbital tiene un valor constante independiente de la distancia al centro.

La ley de potencias deduce densidad infinita a $r = 0$ y por tanto también potencial infinito. La reducción de dicha densidad con la distancia es menos suave que para el resto de potenciales, lo cual también causa que

el potencial crezca más rápido a cortas distancias. A largas distancias, en cambio, se aplanan más pronto y de manera más brusca que el resto de potenciales, lo cual hace que tarde mucho más en converger con ellos, si bien también tiende a 0 para $r \rightarrow \infty$.

Debido a la densidad central infinita, la velocidad orbital a $r \rightarrow \infty$ es infinita también y decrece con la distancia en todo el rango de distancias, en vez de crecer desde cero y luego comenzar a bajar tras un máximo como ocurre con el resto de potenciales (excepto, obviamente, la masa puntual). Como efecto lógico de lo explicado con el potencial, la velocidad orbital causada por la ley de potencias en nuestro marco establecido es inferior en general al causado por el resto de potenciales, cayendo con mucha más suavidad que estos una vez pasado el rango de distancias cercanas en el cual su pendiente es extremadamente alta.

Hernquist y NFW:

Ambos potenciales son bastante similares, pues los dos tienen un perfil de densidad de doble ley de potencias. Al exigir $v_c(8 \text{ kpc}) = 230 \text{ km/s}$, el parámetro de escala de cada uno se ha adaptado al valor de sus exponentes correspondientes, asimilando ambos potenciales.

Aun así, cabe resaltar que a distancias $r \gg a$, la densidad toma forma de una única ley de potencias tal que

$$\rho(r) = \rho_0 \left(\frac{a}{r} \right)^\beta,$$

de forma que $\beta = 4$ para Hernquist y $\beta = 3$ para NFW. Eso hace que el potencial y la velocidad orbital de Hernquist tienda más rápidamente a cero según la distancia crece.

La forma básica del perfil de densidad de ambos es similar al de la ley única de potencias, pero con una caída más suavizada. La doble ley de potencias hace finito el potencial en el centro, equivalente para Hernquist y NFW al exigir que la velocidad orbital de ambos sea la misma a una distancia dada.

Aunque a largas distancias el potencial y velocidad orbital de Hernquist tiendan más rápidamente a cero, en el rango de distancias pequeñas donde aún hay bastante concentración de masa el valor absoluto del potencial de Hernquist es algo mayor que el de NFW, y la velocidad orbital que ocasiona por tanto algo superior. Ambos se encuentran, tanto para el potencial como para la velocidad orbital, entre el resto de potenciales y la ley única de potencias, presentando curvas más suaves que las del resto de potenciales esféricos, pero no tan planas como las de la ley de potencias a distancias medias y largas.

Kuzmin:

El potencial de Kuzmin lleva asociado un perfil de densidad que concentra toda la masa en la superficie del disco. Esta densidad tiene un perfil en el disco similar al del potencial de Plummer o isócrono, con un valor finito en el centro que cae suavemente en sus alrededores para luego caer más bruscamente en la zona en la que el valor de r' es cercano al del parámetro libre a . Finalmente converge lentamente a cero según aumenta la distancia.

El potencial, y por tanto también la velocidad orbital, son equivalentes a Plummer en el disco:

$$\Phi(r', z) = \frac{GM}{\sqrt{r'^2 + (a + |z|)^2}} \rightarrow \Phi(r', 0) = \frac{GM}{\sqrt{r'^2 + a^2}}.$$

A una altura $z \neq 0$, el valor absoluto del potencial decrece y por tanto lo hace también la velocidad orbital para una misma distancia radial. Aun así, la diferencia de valores decrece según la distancia radial va creciendo y z va haciéndose despreciable frente a r' , convergiendo en 0 para $r' \rightarrow \infty$.

Miyamoto-Nagai:

El potencial de Miyamoto-Nagai representa un disco grueso con una cierta escala de longitud y de altura. En

este caso, con un ratio de 1/10 entre la escala de altura y longitud, no es de extrañar el efecto que vemos en el perfil de densidad al mirarlo en el plano $z = 5$ kpc frente al plano del disco. La forma es también similar al perfil de densidad de Plummer o isocrono, aunque, debido al aplanamiento, la masa concentrada en el centro del disco es mucho mayor. A cambio, tenemos una caída de masa mucho más brusca al alejarnos del centro verticalmente (recordemos que Plummer e isocrono son potenciales esféricamente simétricos).

El potencial de Miyamoto-Nagai es exactamente igual al de Kuzmin en el disco al exigir que la velocidad orbital derivada del potencial sea la misma en un punto dado. En cambio, debido a tener cierta distribución vertical de masa, el valor absoluto de potencial y la velocidad orbital para una r' dada caen menos con la altura que en el caso del potencial de Kuzmin.

II. Órbitas integradas

Puede observarse en la tabla 1 que la desviación estándar para los valores de excentricidad y mayor excursión vertical z_{\max} , así como los valores medios de distancia al centro y velocidad tangencial, son mayores en el caso de las estrellas poco masivas que en el caso de las estrellas muy masivas. Atendiendo a los histogramas de excentricidad y z_{\max} , vemos que las estrellas de baja masa cubren todo el rango de excentricidades y excursiones temporales cubierto por las más masivas, pero que en ambos casos van también más allá, habiendo valores de excentricidad y z_{\max} únicamente alcanzados por estrellas poco masivas.

La submuestra de estrellas de alta masa solo contiene estrellas jóvenes, pero la submuestra de estrellas de baja masa contiene tanto estrellas jóvenes como estrellas viejas, abarcando un rango de edades mucho mayor. Las órbitas no dependen de la masa ni de la estructura interna de la estrella, por lo que su edad (es decir, cuándo fueron formadas) es la principal característica que puede justificar diferencias estadísticas resaltables entre las submuestras.

Teniendo en cuenta que hay estrellas de baja masa con órbitas con valores de excentricidad y z_{\max} no compartidas por ninguna estrella de alta masa, pero que esto no ocurre al contrario, es razonable suponer que las estrellas de baja masa con dichos valores elevados de excentricidad y z_{\max} corresponden a las estrellas más viejas de la submuestra poco masiva.

Esto nos indica que las estrellas más viejas están más dinámicamente excitadas y poseen órbitas que cubren un mayor rango de distancias verticales, perteneciendo a un disco más grueso y espacialmente menos definido que el disco delgado en el que orbitan las estrellas más jóvenes.

Respecto a las tres estrellas con excursiones verticales mayores a 1.5 kpc, cabe preguntarse si no son estrellas del halo estelar que han sido captadas por Gaia al pasar cerca del sol.

Tenemos:

| | Estrella 1 | Estrella 2 | Estrella 3 |
|-----------------------------|------------|------------|------------|
| Velocidad tangencial (km/s) | 220.26 | 221.87 | 215.04 |
| Excentricidad | 0.16 | 0.05 | 0.31 |
| z_{\max} | 1.75 | 1.81 | 1.61 |
| Distancia al centro (kpc) | 8.75 | 7.62 | 9.16 |

Tabla 2: Resultados correspondientes a las órbitas calculadas por el modelo de potencial de la Vía Láctea para las tres estrellas con mayores excursiones verticales encontradas en la muestra de 593 estrellas de baja masa en la vecindad solar tomada de Gaia DR2. z_{\max} está definido como el mayor distanciamiento vertical respecto al disco realizado por la estrella. Los valores de velocidad tangencial y de distancia al centro corresponden a los valores medios.

Y sus órbitas graficadas:

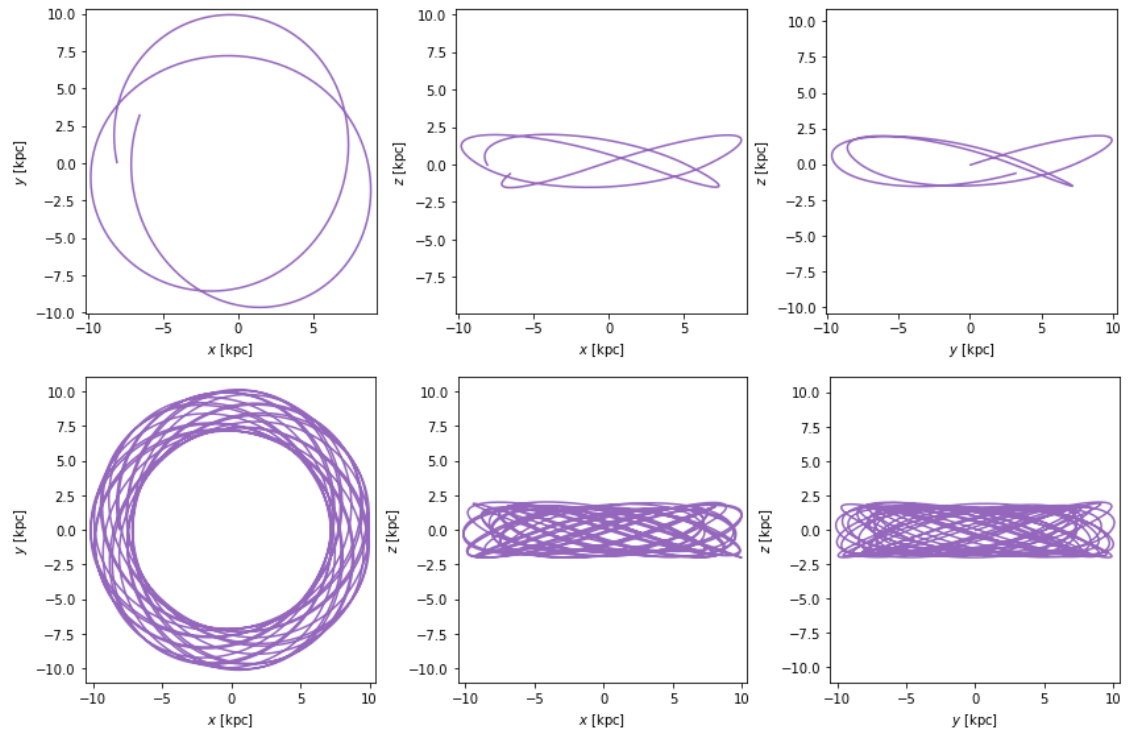


Figura 13: Órbitas calculadas para la Estrella 1 (ver tabla 2) por el modelo de potencial de la Vía Láctea, representadas en 2D mediante las relaciones entre las distintas coordenadas cartesianas. La primera fila corresponde al movimiento de la estrella durante 500 Myr y la segunda durante 5000 Myr.

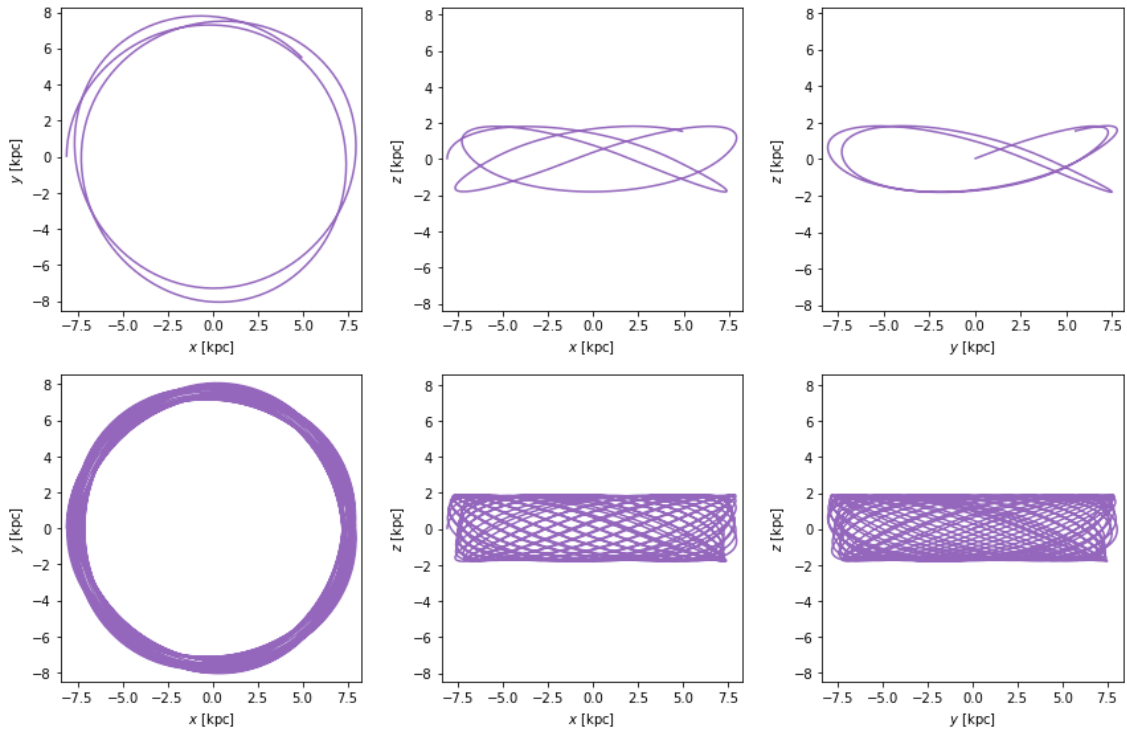


Figura 14: Órbitas calculadas para la Estrella 2 (ver tabla 2) por el modelo de potencial de la Vía Láctea, representadas en 2D mediante las relaciones entre las distintas coordenadas cartesianas. La primera fila corresponde al movimiento de la estrella durante 500 Myr y la segunda durante 5000 Myr.

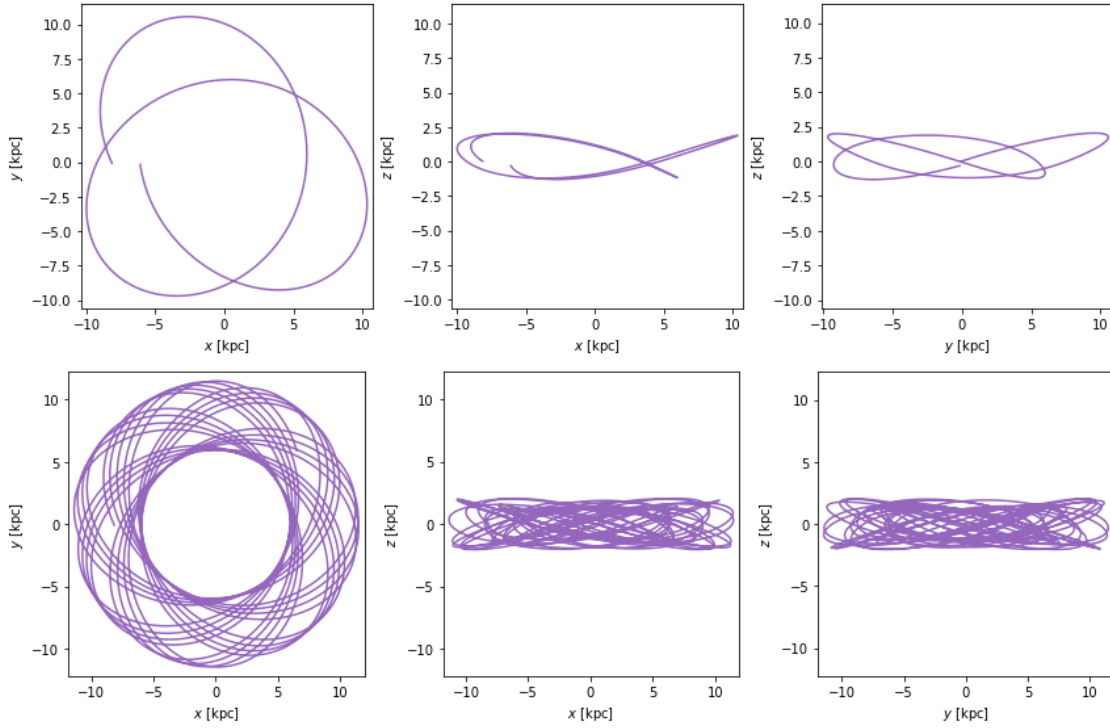


Figura 15: Órbitas calculadas para la Estrella 3 (ver tabla 2) por el modelo de potencial de la Vía Láctea, representadas en 2D mediante las relaciones entre las distintas coordenadas cartesianas. La primera fila corresponde al movimiento de la estrella durante 500 Myr y la segunda durante 5000 Myr.

Las estrellas del halo orbitan en ángulo arbitrario dentro de una esfera cuyo centro es el centro de la galaxia, mientras que las del disco necesariamente orbitan en el mismo ángulo que el disco. Si observamos las órbitas graficadas para las tres estrellas en discusión, puede apreciarse que el ángulo medio de su órbita corresponde al disco galáctico, aunque cubran un amplio rango de desplazamiento vertical. El valor medio de distancia vertical respecto al disco en los valores de las coordenadas x e y mayores a 7 kpc en el movimiento calculado durante 5000 Myr es aproximadamente cero, lo que demuestra que efectivamente su órbita no presenta un ángulo distinto al del disco.

Aun así, esto no confirma que no formen parte del halo, pues nada impide a una estrella del halo orbitar en el mismo ángulo que las estrellas del disco (si bien que ese ángulo sea equivalente es algo harto improbable).

Sabemos que las estrellas del disco orbitarán a velocidad similar a la misma distancia del centro, mientras que las velocidades de las estrellas del halo pueden tomar valores mucho más dispares; generalmente mayores a las de las estrellas del disco. Las velocidades de las tres estrellas en discusión son similares al valor medio de 230 km/s en toda la muestra, pero en los tres casos resulta ligeramente inferior. Para un estudio más fino, pueden compararse con otras tres estrellas de la muestra con excentricidades y distancias medias al centro muy similares, pero excursiones verticales relativamente pequeñas:

| | Estrella 1* | Estrella 2* | Estrella 3* |
|-----------------------------|-------------|-------------|-------------|
| Velocidad tangencial (km/s) | 228.27 | 231.71 | 225.14 |
| Excentricidad | 0.15 | 0.07 | 0.28 |
| z_{\max} | 0.37 | 0.02 | 0.10 |
| Distancia al centro (kpc) | 8.79 | 7.62 | 9.03 |

Tabla 3: Resultados correspondientes a las órbitas calculadas por el modelo de potencial de la Vía Láctea para tres estrellas con valores de excentricidad y distancia media al centro similares a las tres estrellas con mayores excursiones verticales encontradas en la muestra de 593 estrellas de baja masa en la vecindad solar tomada de Gaia DR2. z_{\max} está definido como el mayor distanciamiento vertical respecto al disco realizado por la estrella. Los valores de velocidad tangencial y de distancia al centro corresponden a los valores medios.

Parece que distancias ligeramente menores a la distancia media que ocasionaba una velocidad tangencial media de 230 km/s llevan a velocidades ligeramente mayores, mientras que un aumento en la distancia disminuye la velocidad. Esto es consistente con los resultados de la tabla 2: La estrella 1, a 8.75 kpc, tiene una velocidad de 220.26 km/s, mientras que la estrella 3, a 9.16 kpc, tiene una velocidad de 215.04 km/s. La estrella 2 es la más cercana al centro, con un radio orbital medio de 7.62 kpc, y a su vez es la que más velocidad tiene, de 221.87 km/s.

Aun así, estos valores son menores que los presentados por las estrellas equivalentes con excursiones verticales inferiores. Resalta sobre todo la estrella 2, que tiene una velocidad tangencial inferior a 230 km/s aunque esté más cerca de la media de las estrellas de la muestra.

Esto parece indicar que las excursiones verticales disminuyen la velocidad tangencial media de las estrellas. Alejarse del centro de la galaxia en dirección perpendicular al disco afecta más a la velocidad que alejarse radialmente dentro del mismo. Esto es consistente con nuestra imagen intuitiva aplanada del potencial galáctico; el potencial experimentado es menor al aumentar la altura.

Aun así, las velocidades se mantienen claramente dentro del rango de valores esperados, y su pequeña reducción es fácilmente justificable como una variación causada por las excursiones verticales. El comportamiento de estas estrellas es común al de todas las demás estrellas del disco en todos los sentidos ajenos a las distancias verticales recorridas, por lo que se concluye que pertenecen al mismo.

REFERENCIAS

[W. Dehnen, et. al., 2006] The velocity dispersion and mass profile of the Milky Way, arXiv:astro-ph/0603825