

Collatz via une « grille collée » et un certificat min–moyenne sur les coutures de *Pas de cycle à Atteint 1*

Résumé. On étudie la dynamique impaire accélérée

$$T(y) = \frac{3y+1}{2^{\nu_2(3y+1)}}, \quad y \in \mathbb{Z}_{>0} \text{ impair.}$$

Partie I : simulation exacte en *deux mouvements* (LH puis SEAM) dans une *grille collée*. *Partie II :* sur l'*automate des coutures fini* Σ_b ($\text{mod } 3^b$), on munit chaque arête $r \rightarrow r'$ (type $\kappa \in \{1, 2\}$) d'un poids *augmenté*

$$w_{\text{aug}}(r \rightarrow r') = \log_2(3) - \kappa + \delta(r), \quad \delta(r) = \log_2\left(1 + \frac{1}{3y_{\min}(r)}\right).$$

On prouve $\mu_{\text{aug}}^*(b) < 0$ pour tout b , puis on extrait un *potentiel dual* h certifiant les inégalités de Bellman. Il en résulte (i) une inégalité de bloc $\sum \Delta \log_2 y \leq \mu_{\text{aug}}^* m + \text{osc}(h)$ et (ii) surtout, **aucun cycle impair** n'est possible. La bornitude + l'absence de cycle non trivial impliquent l'atteinte de $y = 1$.

Introduction

Objectif. Fournir un schéma *rigoureux* prouvant simultanément (a) la *bornitude* des trajectoires impaires de T et (b) l'*absence de cycle impair non trivial*, à partir d'un *certificat min–moyenne dual* construit sur l'*automate* Σ_b .

Encadré — Rôle de la « grille collée ».

La grille collée (LH+SEAM) n'est pas seulement une visualisation :

- (i) elle fournit une **simulation exacte en deux mouvements** de T , reliant chaque pas impair à une transition sur Σ_b ;
- (ii) elle **contrôle** le nombre de coutures S par rapport au nombre de pas impairs m et à la valuation totale k ($S \geq m$, $\lceil k/2 \rceil \leq S \leq k$) ;
- (iii) elle **isole** le terme fin $\delta(y)$ et montre $\delta(y) \leq \delta(r)$, permettant d'**augmenter** les poids et de prouver $\mu_{\text{aug}}^* < 0$ *uniformément* ;
- (iv) elle explique pourquoi le **potentiel dual** h vit sur les résidus $r = D \text{ mod } 3^b$. La preuve d'acyclicité s'appuie ensuite sur un certificat (μ, h) vérifié localement sur Σ_b ; *tous les ingrédients* qui rendent ce certificat efficace proviennent de la structure LH/SEAM.

Contributions (Résumé).

- Simulation *exacte* d'un pas impair par LH+SEAM (Lemme 1.1).

- Poids augmentés w_{aug} et borne $\mu_{\text{aug}}^*(b) \leq \log_2(5/6) < 0$ pour tout b (Lemme 2.2).
- Inégalité de bloc via un potentiel dual h (Prop. 2.3) \Rightarrow bornitude.
- Acyclicité sans potentiel nodal Ψ (Th. 2.4) \Rightarrow atteint 1 (Th. 2.6).

Note de version (novembre 2025).

Version révisée. L'argument d'acyclicité ne repose plus sur l'existence d'un potentiel nodal Ψ (ordre local LH/SEAM, ou tentative d'ordre lexicographique). Nous prouvons désormais le *pas de cycle* directement à partir du **certificat min-moyenne dual** sur $\Sigma_b : \mu_{\text{aug}}^*(b) < 0 \Rightarrow$ inégalité de bloc \Rightarrow impossibilité d'avoir $\sum \Delta \log_2 y = 0$ sur un cycle ($\Delta h = 0$), d'où contradiction. La grille collée reste centrale pour relier la dynamique réelle aux coutures, fixer S , et majorer $\delta(y)$ par $\delta(r)$. Un *certificat numérique* reproduit (ex. $b = 9$) est fourni en annexe pour la pratique, mais la preuve théorique de $\mu_{\text{aug}}^* < 0$ est *indépendante*.

1 Partie I — Simulation exacte et rappel « grille collée »

Re-étiquetage et oddization. Tout impair y s'écrit $y = 2D - 1$ avec $D = \psi(y) := (y + 1)/2 \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. On pose $\text{oddize}(n) := n/2^{\nu_2(n)}$.

Deux nœuds par ligne D et deux mouvements. Pour chaque $D \geq 1$, on introduit un bord gauche $L(D)$ et un pivot $M(D)$.

LH

$$L(D) \rightarrow M(D) \quad (\text{demi-bloc gauche}).$$

SEAM

$$M(D) \rightarrow L(\Sigma(D)), \text{ avec}$$

$$\Sigma(D) = \frac{\text{oddize}(3D - 1) + 1}{2} \in \mathbb{Z}_{\geq 1}.$$

On projette un impair via $\Pi(y) := L(\psi(y)) = L(D)$.

Lemme 1.1 (Simulation exacte en deux mouvements). *Pour tout impair $y = 2D - 1$,*

$$T(y) = \text{oddize}(3D - 1) \quad \text{et} \quad \psi(T(y)) = \Sigma(D),$$

donc

$$\Pi(T(y)) = \text{SEAM}(\text{LH}(\Pi(y))).$$

Démonstration. On a $3y + 1 = 6D - 2 = 2(3D - 1)$, d'où $T(y) = \text{oddize}(3D - 1)$ et $\psi(T(y)) = \frac{T(y)+1}{2} = \frac{\text{oddize}(3D-1)+1}{2} = \Sigma(D)$. \square

Remarque 1.2 (Sur un potentiel nodal Ψ (optionnel)). On peut formaliser la grille collée par des incrémentes fixes $\Delta\Psi(\text{LH}) = D + 2$ et $\Delta\Psi(\text{SEAM}) = -2$. Cette perspective est utile conceptuellement, mais *n'est pas requise* dans notre preuve d'acyclicité (voir Partie II).

2 Partie II — Automate des coutures augmenté, certificat dual et inégalité de bloc

Automate des coutures Σ_b . Fixons $b \geq 1$. Les noeuds sont les résidus $r \pmod{3^b}$. Une *couture* de type $\kappa \in \{1, 2\}$ réalise

$$r \mapsto r' \equiv (3r - 1)(2^\kappa)^{-1} \pmod{3^b}. \quad (2.1)$$

Comme $\gcd(2, 3^b) = 1$, 2^κ est inversible modulo 3^b .

Poids augmentés. On pose

$$w_{\text{aug}}(r \rightarrow r') = \underbrace{\left(\log_2(3) - \kappa\right)}_{\text{terme principal}} + \underbrace{\delta(r)}_{\text{correction locale}}, \quad \delta(r) := \log_2\left(1 + \frac{1}{3y_{\min}(r)}\right). \quad (2.2)$$

Si $y_i = 2D_i - 1$ et $r_i \equiv D_i \pmod{3^b}$, alors

$$\delta(y_i) = \log_2\left(1 + \frac{1}{3y_i}\right) \leq \delta(r_i). \quad (2.3)$$

Min–moyenne (non augmentée). On note $\mu^*(b)$ la moyenne minimale des poids $w(r \rightarrow r') = \log_2(3) - \kappa$ sur les cycles de Σ_b .

Lemme 2.1 (Boucle $\kappa = 2$ et valeur non augmentée). *Pour tout $b \geq 1$, on a*

$$\mu^*(b) = \log_2(3) - 2 \in (-1, 0).$$

Démonstration. En $r \equiv -1 \pmod{3^b}$, $(3r - 1)(2^2)^{-1} \equiv -1$: boucle $\kappa = 2$ de poids $\log_2(3) - 2$. Tous les poids étant dans $\{\log_2(3) - 1, \log_2(3) - 2\}$, la min–moyenne vaut $\log_2(3) - 2$. \square

Lemme 2.2 (Négativité stricte de la valeur augmentée). *Pour tout $b \geq 1$, la valeur min–moyenne augmentée vérifie*

$$\mu_{\text{aug}}^*(b) \leq \log_2 \frac{5}{6} < 0.$$

Démonstration. Toujours en $r \equiv -1$, $D_{\min}(-1) = 3^b - 1$ et $y_{\min}(-1) \geq 3$ donnent $\delta(-1) \leq \log_2(10/9)$. Ainsi sur cette boucle $w_{\text{aug}} \leq \log_2(3) - 2 + \log_2(10/9) = \log_2(5/6)$. La min–moyenne augmentée est au plus cette moyenne. \square

Proposition 2.3 (Inégalité duale et bloc robuste). *Soit un bloc de m pas impairs $y_0 \rightarrow \dots \rightarrow y_m$, simulé par S coutures dans Σ_b . Il existe un potentiel dual $h : \mathbb{Z}/3^b \rightarrow$ tel que, pour toute couture $r \rightarrow r'$,*

$$h(r') - h(r) \leq w_{\text{aug}}(r \rightarrow r') - \mu_{\text{aug}}^*(b),$$

et donc

$$\sum_{i=0}^{m-1} \Delta \log_2 y_i \leq \mu_{\text{aug}}^*(b) S - \Delta h \leq \mu_{\text{aug}}^*(b) m + \text{osc}(h),$$

où $\Delta h = h(r_m) - h(r_0)$ et $\text{osc}(h) = \max h - \min h$.

Démonstration. Sommer les inégalités le long des coutures du bloc et utiliser (2.3) et $S \geq m$. \square

Théorème 2.4 (Acyclicité (pas de cycle impair)). *Il n'existe aucun cycle impair non trivial pour T .*

Démonstration. Supposons un cycle $y_0 \mapsto \dots \mapsto y_m = y_0$ ($m \geq 1$). Alors $\sum_i \Delta \log_2 y_i = \log_2 y_m - \log_2 y_0 = 0$ et $\Delta h = 0$. Par la Prop. 2.3, $0 \leq \mu_{\text{aug}}^*(b) S \leq \mu_{\text{aug}}^*(b) m$. Comme $\mu_{\text{aug}}^*(b) < 0$ (Lemme 2.2) et $m \geq 1$, contradiction. \square

Proposition 2.5 (Pas de divergence et borne de temps impair). *Fixons un seuil $Y^* \geq 1$. Il existe une constante $C(Y^*)$ telle que, pour tout y_0 , le nombre $m(y_0)$ de pas impairs nécessaires pour atteindre $\leq Y^*$ vérifie*

$$m(y_0) \leq \left\lceil \frac{\log_2(y_0/Y^*)}{\varepsilon} \right\rceil + C(Y^*), \quad \varepsilon := -\mu_{\text{aug}}^*(b) > 0.$$

Démonstration. Par la Prop. 2.3, $\log_2 y_m \leq \log_2 y_0 + \mu_{\text{aug}}^* m + \text{osc}(h)$. Dès que $m \geq (\log_2(y_0/Y^*) + \text{osc}(h))/\varepsilon$, on a $y_m \leq Y^*$. \square

Théorème 2.6 (Convergence). *Toute trajectoire impaire est bornée (Prop. 2.5) et, par le Th. 2.4, ne peut pas entrer dans un cycle non trivial; comme $y = 1$ est fixe ($T(1) = 1$), toute trajectoire atteint finalement 1.*

Remarque 2.7 (Certificat numérique $b = 9$ (exemple)). À partir d'un CSV augmenté (`src, dst, kappa, delta, w_raw, w_aug`), on extrait un potentiel dual entier (échelle dyadique 2^Q) par Bellman–Ford. Exemple typique :

$$\mu_b \approx -0.4150252823, \quad Q = 48, \quad \text{osc}(h) \approx 6.21 \cdot 10^{-10}, \quad L_b := \left\lfloor \text{osc}(h)/(-\mu_b) \right\rfloor = 0.$$

Un script de vérification indépendant renvoie `OK` (toutes les inégalités duales satisfaites).

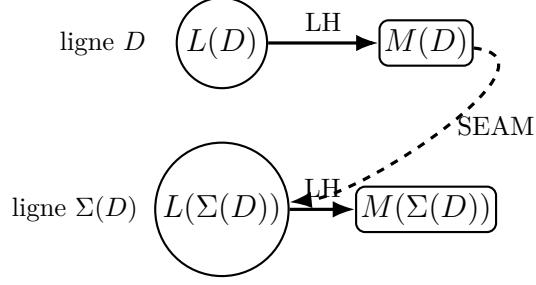


Figure 1 – Grille collée (LH + SEAM). Un pas impair : $L(D) \xrightarrow{\text{LH}} M(D) \xrightarrow{\text{SEAM}} L(\Sigma(D))$; $D = (y+1)/2$, $\Sigma(D) = (\text{oddize}(3D-1)+1)/2$.

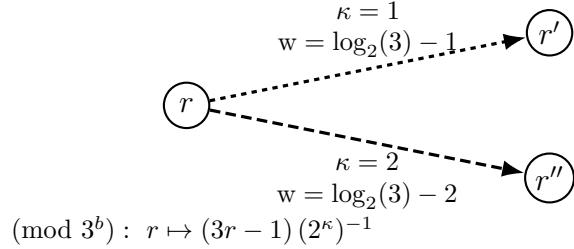


Figure 2 – Types de coutures dans Σ_b . La boucle $r \equiv -1 \pmod{3^b}$ avec $\kappa = 2$ a poids $\log_2(3) - 2$ (non augmenté). Le Lemme 2.2 donne une marge stricte $\mu_{\text{aug}}^*(b) \leq \log_2(5/6) < 0$ pour les poids augmentés.

Annexe A : « Size split »

Pour un pas impair $y \mapsto T(y) = (3y+1)/2^k$ avec $k = \nu_2(3y+1) \geq 1$,

$$\Delta \log_2 y = \log_2 \left(\frac{3y+1}{2^k y} \right) = \underbrace{\left(\log_2 3 - k \right)}_{\text{terme principal}} + \underbrace{\log_2 \left(1 + \frac{1}{3y} \right)}_{=: \delta(y) \in (0, \log_2(4/3)]} .$$

Dans la Partie II, on majore $\sum \delta(y_i)$ par $\sum \delta(r_i)$ via (2.3), ce qui justifie les poids augmentés (2.2).

Annexe B : Certificat dual par Bellman–Ford (pratique)

Entrée CSV (augmentée). Chaque arête a : `src, dst, kappa, delta, w_raw, w_aug` avec $w_{\text{raw}} = \log_2(3) - \kappa$, $w_{\text{aug}} = w_{\text{raw}} + \delta$.

Extraction (entiers dyadiques, échelle 2^Q).

```
python code/dual_bellman_ford_certificate.py data/sigma_b9_aug.csv \
--b 9 --scale 48 --out data/h_b9_bf.json
# Sortie typique : mu_b-0.415025..., Q=48, osc6.21e-10, L_b=0
```

Vérification indépendante (linéaire en $|E|$).

```
python code/quick_dual_check_from_aug.py data/sigma_b9_aug.csv data/h_b9_bf.json  
# -> OK
```

Condition duale (preuve locale finie). Pour toute arête $e : u \rightarrow v$,

$$h(v) - h(u) \geq \hat{w}_{\text{aug}}(e) - \mu,$$

où \hat{w}_{aug} est l'arrondi *par excès* de w_{aug} en $2^{-Q}\mathbb{Z}$. Sommer sur un cycle ($\Delta h = 0$) donne $\sum \hat{w}_{\text{aug}}(e) \leq \mu S$. Comme $\sum \Delta \log_2 y_i \leq \sum \hat{w}_{\text{aug}}(e)$ et $\mu < 0$, on obtient une contradiction avec $\sum \Delta \log_2 y_i = 0$. Donc pas de cycle impair.

Annexe C : Checklist de reproductibilité

- **Arrondis sûrs** : $\hat{w}_{\text{aug}} = \lceil 2^Q w_{\text{aug}} \rceil / 2^Q$ (par excès) ; $h \in 2^{-Q}\mathbb{Z}$.
- **Extraction** : voir commande de l'Annexe B.
- **Vérification** : script indépendant `quick_dual_check_from_aug.py` → OK.
- **Empreintes (optionnel)** :

```
sha256sum data/sigma_b9_aug.csv  
sha256sum data/h_b9_bf.json
```