1 Aula POTI - 1: Aritmética

1.1 Introdução

Assuntos estudados em Aritmética:

- 4 operações: adição, subtração, multiplicação, divisão
- Outras operações: potenciação, radiciação
- Representação dos números por fração e representação decimal.
- Teoria dos números: fatoração, múltiplos e divisores, divisibilidade, números primos.
- Conjuntos numéricos e equação aritmética

1.2 Exercícios

1. Calcule os valores das seguintes expressões:

   a)
   $$\frac{10^7}{5 \times 10^4}$$

   b)
   $$\frac{2}{1 - \frac{2}{3}}$$

   c)
   $$\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{10}\right)$$

   d)
   $$2^6 + 2^6 + 2^6 + 2^6 - 4^4$$

2. Em 2009 uma escola tinha 320 alunos esportistas, dos quais 45% jogavam vôlei. Em 2010 essa porcentagem diminuiu para 25%, mas o número de jogadores de vêlei não se alterou. Qual era o número de alunos esportistas em 2010?

3. Se Joana comprar hoje um computador de 2000 reais, ela conseguirá um desconto de 5%. Se ela deixar para amanhã, irá conseguir o mesmo desconto de 5%, mas o computador irá aumentar 5%. Se ela esperar, o que acontecerá?

   a) Nada, pois pagará a mesma quantia.
   b) Ela perderá 100 reais.
   c) Ela ganhará 105 reais.
   d) Ela perderá 95 reais.
   e) Ela perderá 105 reais.

Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo

Curso de Aritmética - Nível 1

Prof. Emiliano Chagas

Operações Aritméticas Elementares - Aula 01

Problemas sobre operações aritméticas elementares utilizam, além dos conceitos de soma, subtração, multiplicação e divisão, os conceitos de fração e potência. Essa seção é muito importante, já que as contas permeiam todo o resto do material. Boas contas!

Problema 1. Calcule os valores das seguintes expressões:

(a) $\dfrac{10^7}{5 \times 10^4}$

(b) $\dfrac{2}{1-\frac{2}{3}}$

(c) $\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3}\right)\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{10}\right)$

(d) $2^6+2^6+2^6+2^6-4^4$

Solução.

(a) $\dfrac{10^7}{5 \times 10^4} = \dfrac{10^{7-4}}{5} = \dfrac{10^3}{5} = \dfrac{1000}{5} = 200$

(b) $\dfrac{2}{1-\dfrac{2}{3}} = \dfrac{2}{\dfrac{3}{3}-\dfrac{2}{3}} = \dfrac{2}{\dfrac{1}{3}} = \dfrac{2 \times 3}{\dfrac{1 \times 3}{3}} = \dfrac{6}{1} = 6$

(c) $\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3}\right)\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{10}\right) = \left(\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{2}{3}\right)\left(\dfrac{3}{4}\right)\cdots\left(\dfrac{9}{10}\right) = \dfrac{1}{10}$

(d) $2^6+2^6+2^6+2^6-4^4 = 4.2^6-4^4 = 2^2.2^6-2^{2^4} = 2^8-2^{2.4} = 2^8-2^8 = 0$

1 Porcentagem

Esses próximos exemplos contém os conceitos de porcentagem de um número e também a ideia de aumento e redução percentual, os dois tipos de aplicação de porcentagem em problemas de olimpíada. Bons estudos!

Problema 2. (OBMEP 1^a Fase) Em 2009 uma escola tinha 320 alunos esportistas, dos quais 45% jogavam vôlei. Em 2010 essa porcentagem diminuiu para 25%, mas o número de jogadores de vôlei não se alterou. Qual era o número de alunos esportistas em 2010?

Solução. Primeiramente vamos ver quantos alunos jogavam vôlei em 2009, são 45% de 320, ou seja $\frac{45}{100} \times 320 = 144$. Agora veja que em 2010 $25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ dos esportistas eram jogadores de vôlei, portanto o total de alunos esportistas em 2010 será $4 \times 144 = 576$.

Problema 3. (OBM 1^a Fase) Se Joana comprar hoje um computador de 2000 reais, ela conseguirá um desconto de 5%. Se ela deixar para amanhã, irá conseguir o mesmo desconto de 5%, mas o computador irá aumentar 5%. Se ela esperar, o que acontecerá?

a) Nada, pois pagará a mesma quantia.

b) Ela perderá 100 reais.

c) Ela ganhará 105 reais

d) Ela perderá 95 reais.

e) Ela perderá 105 reais.

Solução. Alternativa D - Comprando hoje o computador, Joana gastaria 1900 reais. Esperando o próximo dia, o preço do computador subiria para 2100 reais e ela gastaria $\frac{95}{100} \times 2100 = 1995$ reais. Assim, ela perderia 95 reais. Podemos fazer a conta de uma vez só, já que um desconto de 5% em cima de 2000 reais pode ser escrito como $(1-5\%)\times 2000 = (1 - 0,05) \times 2000 = 0,95 \times 2000 = 1900$ reais, e o aumento de 5% em cima do preço de 1900 reais pode ser escrito como $(1+5\%) \times 1900 = (1+0,05) \times 1900 = 1,05 \times 1900 = 1995$ reais. A conta poderia ser escrita como $(1 - 5\%) \times (1 + 5\%) \times 2000 = 1995$ reais.

2 Problemas

Operações Aritméticas Elementares: Problemas Introdutórios

Problema 4. Quanto é o dobro de 24 mais o triplo de 13 menos o quádruplo de 15?

Problema 5. Quanto é $99 + 999 + 9999$?

Problema 6. Podemos afirmar que $0,1^2 + 0,2^2$ é igual a?

Problema 7. Sabendo que $987 \times 154 = 151998$ podemos concluir que $9870 \times 1,54$ é igual a

(a) 15,1998

(b) 1519,98

(c) 15199,8

(d) 151998

(e) 1519980

Problema 8. Simplifique a fração $\dfrac{2004+2004}{2004+2004+2004}$.

Problema 9. Em maio, o valor total da conta de telefone celular de Esmeralda foi 119,76 reais, sem os impostos. Esse valor corresponde aos itens: chamadas, acesso á internet, envio de mensagens. Se ela gastou 29,90 reais com acesso á Internet e 15,50 reais com o serviço de envio de mensagens, quanto foi que ela gastou com chamadas?

Problema 10. Uma data curiosa neste ano é o dia 11/11/11, pois o dia, mês e dois últimos dígitos do ano são iguais. No ano passado, esse padrão aconteceu em 10/10/10. Quantos dias há desde 10/10/10 até 11/11/11, incluindo o dia 10 e o dia 11?

Problema 11. Marina, ao comprar uma blusa de R\$17,00, enganou-se e deu ao vendedor uma nota de R\$10,00 e outra de R\$ 50,00. O vendedor, distraído, deu o troco como se Marina lhe tivesse dado duas notas de R\$ 10,00. Qual foi o prejuízo de Marina?

Problema 12. Pedro vende na feira cenouras a R\$1,00 por quilo e tomates a R\$1,10 por quilo. Certo dia ele se distraiu, trocou os preços entre si, e acabou vendendo 100 quilos de cenoura e 120 quilos de tomate pelos preços trocados. Quanto ele deixou de receber por causa de sua distração?

Problema 13. Na adição de termos iguais $2013^{2013}+2013^{2013}+\cdots+2013^{2013}=2013^{2014}$, escrita de forma simplificada, foram escritos muitos sinais de adição (+). Quantos foram escritos?

Operações Aritméticas Elementares: Problemas Propostos

Problema 14. Uma professora de Matemática escreveu uma expressão no quadro-negro e precisou sair da sala antes de resolvê-la com os alunos. Na ausência da professora, Carlos, muito brincalhão, foi ao quadro-negro e trocou todos os algarismos 3 por 5, os 5 por 3, o sinal de + pelo de × e o de × pelo de +, e a expressão passou a ser $(13 \div 5) \times (53+2) - 25$. Qual é o resultado da expressão que a professora escreveu?

Problema 15. Qual é o algarismo das unidades do número $1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 \times 11 \times 13 \times 15 \times 17 \times 19 - 2015$?

Problema 16. Dividindo-se o número 4^{4^4} por 4^4 obtemos?

Problema 17. Efetuando as operações indicadas na expressão $\left(\dfrac{2^{2007}+2^{2005}}{2^{2006}+2^{2004}}\right) \times 2006$ obtemos um número de quatro algarismos. Qual é a soma dos algarismos desse número?

Problema 18. Perguntado, Arnaldo diz que 1 bilhão é o mesmo que um milhão de milhões. Professor Piraldo o corrigiu e disse que 1 bilhão é o mesmo que mil milhões. Qual é a diferença entre essas duas respostas?

Problema 19. Representamos por $n!$ o produto de todos os inteiros positivos de 1 a n. Por exemplo, $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$. Calculando a soma $1! + 2! + 3! + 4! + \cdots + 2010! + 2011!$, qual é o algarismo das unidades do resultado obtido?

Problema 20. Colocando sinais de adição entre alguns dos algarismos do número 123456789 podemos obter várias somas. Por exemplo, podemos obter 279 com quatro sinais de adição: $123 + 4 + 56 + 7 + 89 = 279$. Quantos sinais de adição são necessários para que se obtenha assim o número 54?

Problema 21. A fração $\frac{a}{b}$, onde a e b são inteiros positivos, representa um número entre 0 e 1, na posição indicada no desenho a seguir. Qual é um possível valor para a soma $a + b$?

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

e) 5

Problema 22. Colocando apenas parêntesis, tantos quantos necessários, mas usando apenas as adições e subtrações já indicadas, podemos fazer com que a expressão $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + 9 - 10$ represente o maior número possível. Qual é este número?

Porcentagens: Problemas Introdutórios

Problema 23. Uma loja de CD's realizará uma liquidação e, para isso, o gerente pediu para Anderlaine multiplicar todos os preços dos CD's por $0,68$. Nessa liquidação, qual é o desconto que a loja está oferecendo em seus produtos?

Problema 24. Por conta de uma erupção de um vulcção, 10% dos voos de um aeroporto foram cancelados. Dos voos restantes, 20% foram cancelados pela chuva. Que porcentagem do total de voos deste aeroporto foram cancelados?

Problema 25. Em uma prova de olimpíada, 15% dos estudantes não resolveram nenhum problema, 25% resolveram pelo menos um problema, mas cometeram algum erro, e os restantes, 156 estudantes, resolveram todos os problemas corretamente. Quantos estudantes participaram da olimpíada?

Problema 26. Aumentando 2% o valor um número inteiro positivo, obtemos o seu sucessor. Qual é a soma desses dois números?

Problema 27. Diamantino colocou em um recipiente três litros de água e um litro de suco composto de 20% de polpa e 80% de água. Depois de misturar tudo, que porcentagem do volume final é polpa?

Porcentagens: Problemas Propostos

Problema 28. Uma classe tem 22 alunos e 18 alunas. Durante as férias, 60% de todos os alunos dessa classe foram prestar trabalho comunitário. No mínimo, quantas alunas participaram desse trabalho?

Problema 29. Três anos atrás, a população de Pirajussaraí era igual à população que Tucupira tem hoje. De lá para cá, a população de Pirajussaraí não mudou mas a população de Tucupira cresceu 50%. Atualmente, as duas cidades somam 9000 habitantes. Há três anos, qual era a soma das duas populações?

Problema 30. A massa de gordura de uma pessoa corresponde a 20% de sua massa total. Essa pessoa, pesando 100 kg, fez um regime e perdeu 40% de sua gordura, mantendo os demais índices. Quantos quilogramas ela pesava ao final do regime?

Problema 31. O tanque do carro de Esmeralda, com capacidade de 60 litros, contém uma mistura de 20% de álcool e 80% de gasolina ocupando metade de sua capacidade. Esmeralda pediu para colocar álcool no tanque até que a mistura ficasse com quantidades iguais de álcool e gasolina. Quantos litros de álcool devem ser colocados?

Problema 32. Num folheto de propaganda, uma montadora explica que um veículo equipado com a tecnologia *flex fuel*, bicombustível, pode usar álcool, gasolina, ou uma mistura de álcool e gasolina em qualquer proporção. Testes realizados com cinco proporções apresentaram os seguintes desempenhos:

Proporção de combustível		**Consumo**
Álcool	*Gasolina*	**(km por litro)**
—	100%	14
40%	60%	13,2
50%	50%	11,8
70%	30%	10
100%	—	8

Considere que o preço do litro de álcool é R$1,00 e o preço do litro de gasolina é R$2,00. Nesse problema você pode utilizar calculadora!

Numa viagem de 400 km com esse veículo:

(a) Quantos reais seriam gastos se o veículo fosse abastecido somente com álcool?

(b) Qual das cinco proporções apresentadas possibilita o menor gasto com combustível?

Problema 33. Francisca compra produtos em grande quantidade para uma rede de restaurantes. No momento ela deve comprar detergente líquido, escolhendo entre as marcas A, B e C, que são vendidas em frascos com volumes diferentes. As três tem a mesma qualidade e um galão com 80 litros do detergente B custa 50 reais, mas

- o detergente A é 40% mais caro que o B e contém 20% menos líquido que o C;
- o detergente C custa 50% a mais que A e contém 50% mais líquido que o B;

Francisca pensou e comprou a marca mais econômica. Qual é a marca mais econômica? Utilize uma calculadora para fazer esse problema.

Problema 34. Segundo uma reportagem da revista Veja, 20% dos brasileiros nunca foram ao dentista. Considere que a população do Brasil é de 200 milhões, dos quais 38 milhões moram na zona rural, responda:

(a) Qual é o número de brasileiros que nunca foram ao dentista?

(b) A partir dos dados do problema, podemos afirmar que há residentes da zona urbana que nunca foram ao dentista?

Problema 35. Um fabricante de chocolate cobrava R$ 5,00 por uma barra de 250 gramas. Recentemente o peso da barra foi reduzido para 200 gramas, mas seu prećo continuou R$ 5,00. Qual foi o aumento percentual do preço do chocolate desse fabricante?

Problema 36. Na escola de Esmeralda, neste ano, o aumento do número de alunos em relação ao ano passado foi de 10% para os meninos e 20% para as meninas. Há atualmente 230 alunos, exatamente 30 a mais do que no ano passado. Quantas meninas há na escola?

Problema 37. Na população de uma espécie rara de 1000 aves da floresta amazônica, 98% tinham cauda de cor verde. Após uma misteriosa epidemia que matou parte das aves com cauda verde, esta porcentagem caiu para 95%. Quantas aves foram eliminadas com a epidemia?

Problema 38. Júlia comprou 3 camisetas iguais e pagou sua compra com desconto de 10%, enquanto que seu irmão comprou 2 camisetas iguais ás de Júlia com desconto de 5%. Júlia gastou 12 reais a mais que seu irmão. Qual era, em reais, o preço sem desconto de cada camiseta?

Problema 39. A quantidade de água de uma melancia corresponde a 95% de seu peso. Joaquim retirou água dessa melancia até que a quantidade de água correspondesse a 90% de seu peso, que passou a ser 6 kg. Qual era o peso original da melancia?

Problema 40. A Fuvest, maior vestibular do país, seleciona os estudantes que ingressarão na Universidade de São Paulo (USP). Em valores aproximados, a cada ano são 150 mil candidatos, dos quais são escolhidos os 10 mil novos estudantes da USP. A Fuvest é composta de duas fases. Em cada curso, o número de estudantes que são aprovados para a segunda fase é aproximadamente igual a três vezes o número de vagas. Por exemplo, na carreira de

Engenharia da Computação são oferecidas 900 vagas e, dos 9000 candidatos iniciais, 2700 classificam-se para a segunda fase. Em Medicina, 90% dos candidatos são eliminados na primeira fase. Encontre o quociente A/B, onde A é o número de candidatos e B o número de vagas da carreira de Medicina na primeira fase.

Problema 41. Atacando a defasagem salarial decorrente da inflação, os funcionários de faculdades de Los Angeles, EUA, assinaram e enviaram ao governo a seguinte mensagem:
Prezados Senhores,
Estamos unidos num único propósito: queremos um aumento salarial.

	Aumento Salarial(%)	**Inflação Anual**(%)	**Ganho**(%)
1990	0	6	-6
1991	0	$3,5$	$-3,5$
1992	0	$3,2$	$-3,2$
1993	0	$2,5$	$-2,5$
1994	3	$2,5$	$+0,5$
1995	$2,7$	$2,3$	$+0,4$
			$-14,3$

Estamos cansados de trabalhar com números negativos! Utilizando uma calculadora, responda as perguntas:

(a) Suponha que em 1990 o funcionário Arnald tinha um salário mensal de US\$1.000,00. Qual é o salário de Arnald no final de 1995?

(b) Suponha que em 1990 o funcionário Bernald tinha um gasto mensal de US\$1.000,00. Qual o gasto mensal de Bernald no final de 1995, levando-se em consideração que ele continua gastando com as mesmas coisas desde 1990?

(c) Baseados na tabela, os funcionários pediram um aumento salarial de 14,3%. Nesse caso, seriam realmente repostas todas as perdas salariais?

Operações Aritméticas Elementares: Soluções dos Introdutórios

4) (OBM 1^a Fase) O valor procurado é $2 \times 24 + 3 \times 13 - 4 \times 15 = 4839 - 60 = 27$

5) (OBMEP 1^a Fase) $99 + 999 + 9999 = (100 - 1) + (1000 - 1) + (10000 - 1) = 11100 - 3 = 11097$.

6) (OBM 1^a Fase) $0,1^2 + 0,2^2 = (\frac{1}{10})^2 + (\frac{2}{10})^2 = \frac{1}{100} + \frac{4}{100} = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$

7) (OBMEP 1^a Fase) Temos $9870 \times 1,54 = 987 \times 10 \times \frac{154}{100} = \frac{987 \times 154}{10} = \frac{151998}{10} = 15199,8$

8) (OBM 1^a Fase) $\frac{2004 + 2004}{2004 + 2004 + 2004} = \frac{2.2004}{3.2004} = \frac{2}{3}$

9) (OBM 1^a Fase) Ela gastou com chamadas $119,76 - 29,90 - 15,50 = 74,36$ reais.

10) (OBM 1^a Fase) Vamos quebrar o período em duas partes. Temos: De 10/10/10 até 09/10/11, há 365 dias. De 10/10/11 até 11/11/11 há 22 dias mais 11 dias, ou seja, 33 dias. Logo, de 10/10/10 até 11/11/11, incluindo o dia 10 e o dia 11, há $365 + 33 = 398$ dias.

11) (OBMEP 1^a Fase) Marina, ao dar 60 reais para pagar uma conta de 17 reais, deveria receber $60 - 17 = 43$ reais de troco, mas recebeu somente $20 - 17 = 3$ reais. Logo, seu prejuízo foi de $43 - 3 = 40$ reais. Uma outra maneira de resolver o problema é notar que, ao confundir uma nota de 10 reais com uma de 50 reais, Marina teve um prejuízo de $50 - 10 = 40$ reais. Esta solução mostra que o prejuízo de Marina não depende do preço da blusa.

12) (OBMEP 1^a Fase) Solução 1: Se Pedro não tivesse trocado os preços, a quantia que ele teria recebido pela venda de 100 quilos de cenoura e 120 quilos de tomate seria $100 \times 1 + 120 \times 1,10 = 100 + 132 = 232$ reais. A quantia que ele recebeu, de fato, foi de $100 \times 1,10 + 120 \times 1 = 110 + 120 = 230$ reais. Logo, por causa de sua distração, ele perdeu $232 - 230 = 2$ reais. Solução 2: Como a diferença dos preços dos dois produtos é R$ 0,10 por quilo, ao trocar os preços Pedro ganhou $100 \times 0,10 = 10$ reais na venda das cenouras e perdeu $120 \times 0,10 = 12$ reais na venda dos tomates. Logo, no final, ele perdeu 2 reais.

13) (OBM 1^a Fase) Veja que $2013^{2014} = 2013^1.2013^{2013}$, logo nessa soma temos 2013 termos 2013^{2013}. Veja também que essa soma começa com um 2013^{2013} e termina com 2013^{2013}, portanto entre os números teremos um sinal de mais a menos. Portanto são 2012 sinais de +.

Operações Aritméticas Elementares: Soluções dos Problemas Propostos

14) (OBMEP 1^a Fase) Para encontrar a expressão que a professora escreveu no quadro negro, precisamos destrocar tudo o que Carlos trocou, logo o resultado da expressão que professora escreveu no quadro negro é $(15 \div 3) + (35 \times 2) - 23 = 5 + 70 - 23 = 52$

15) (OBMEP 1^a Fase) O número $1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 \times 11 \times 13 \times 15 \times 17 \times 19$ termina em 5, pois qualquer número ímpar diferente de 1 que multiplicar 5, termina em 5. Logo, o algarismo das unidades do número $1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 \times 11 \times 13 \times 15 \times 17 \times 19 - 2015$ é 0.

16) (OBM 1^a Fase) Nessa divisão perceba que a base é 4: $\dfrac{4^{4^4}}{4^4} = \dfrac{4^{(4^4)}}{4^4} = 4^{4^4-4} = 4^{16-4} = 4^{12}$

17) (OBM 1^a Fase) $\left(\dfrac{2^{2007} + 2^{2005}}{2^{2006} + 2^{2004}}\right) \times 2006 = \dfrac{2^{2005}.2^2 + 2^{2005}}{2^{2004}.2^2 + 2^{2004}} \times 2006 = \dfrac{2^{2005}.\left(2^2 + 1\right)}{2^{2004}.\left(2^2 + 1\right)} \times$ $2006 = \dfrac{2^{2005}}{2^{2004}} \times 2006 = 2.2006 = 4012$

18) (OBM 1^a Fase) Arnaldo: 1 bilhão $= 1.000.000 \times 1.000.000 = 1.000.000.000.000$. Professor Piraldo: 1 bilhão $= 1.000 \times 1.000.000 = 1.000.000.000$. A diferença é: $1.000.000.000.000 - 1.000.000.000 = 999.000.000.000$.

19) (OBM 1^a Fase) Observe que 5!, 6!, 7!, 8!, ... terminam em 0, já que todos eles possuem 2 e 5 dentro da multiplicação, ou seja, são múltiplos de $2 \times 5 = 10$ e, por isso mesmo, terminam em 0. Assim, o algarismo das unidades de $5! + 6! + ... + 2010! + 2011!$ é igual a 0, e como $1! + 2! + 3! + 4! = 1 + 2 + 6 + 24 = 33$, que termina em 3, temos finalmente que $1! + 2! + 3! + 4! + 5! + 6! + ... + 2010! + 2011!$ termina em $3 + 0 = 3$.

20) (OBMEP 1^a Fase) Como queremos obter a soma 54, devemos colocar sinais de adição entre todos os algarismos a partir do 5, isto é, $1?2?3?4?\underbrace{5+6+7+8+9}_{30} = 54$

Logo precisamos que $1?2?3?4?5 = 24$. Com o mesmo argumento usado anteriormente, vemos que isso só pode ser feito como $12+3+4+5$. Logo $12+3+4+5+6+7+8+9 = 54$ é a expressão procurada, para a qual necessitamos de 7 sinais de adição.

21) (OBM 1^a Fase) Alternativa E - A soma $a + b$ é 1 se $a = 0$ e $b = 1$, ou seja, $\dfrac{a}{b} = 0$, incompatível com o desenho. A soma é 2 se $\dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{1} = 1$, também incompatível. E a soma é 3 se $\dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{2}$ ou $\dfrac{a}{b} = \dfrac{2}{1} = 2 > 1$, ambos incompatíveis. Os casos em que a soma é 4 são: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{2}$ ou $\dfrac{a}{b} = \dfrac{2}{2} = 1$ ou $\dfrac{a}{b} = \dfrac{3}{1} = 3 > 1$, todos incompatíveis. Como todas as quatro primeiras alternativas são falsas, a alternativa E é a verdadeira. De fato, a soma é 5 nos casos: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{4} < \dfrac{1}{2}$ ou $\dfrac{a}{b} = \dfrac{2}{3} > \dfrac{1}{2}$ ou $\dfrac{a}{b} = \dfrac{3}{2} > 1$ ou $\dfrac{a}{b} = \dfrac{4}{1} = 4 > 1$, dos quais a possibilidade $a = 2$ e $b = 3$ dá a fração $\dfrac{a}{b} = \dfrac{2}{3} \approx 0,67$.

22) (OBM 2^a Fase) Primeiro note que só vale colocar parênteses logo depois de sinais de $-$, já que se o fizermos em frente ao sinal de $+$ não alteramos o resultado.

Ao efetuarmos os parênteses, o 2 terá sinal de $-$ necessariamente. Suponha que não colocamos parênteses depois do sinal de $-$ do 2. Então o 4 também deve ter sinal de $-$ quando efetuamos os parênteses, e a soma é no máximo $1-2+3-4+5+6+7+8+9+10 = 43$.

Então é mais vantajoso colocar parênteses entre o $-$ e o 2. Ao fazermos isso, ao efetuarmos os parênteses o 3 deve ter necessariamente sinal de $-$, e a soma é no máximo $1-2-3+4+5+6+7+8+9+10 = 45$. Podemos obter esse resultado: $1-(2+3-(4+5)-(6+7)-(8+9)-10) = 45$.

Então a maior soma possível é 45.

Porcentagem: Soluções dos Problemas Introdutórios

23) (OBM 1^a Fase) Ao multiplicar os preços por $0,68 = 68\%$ a loja oferece um desconto $100\% - 68\% = 32\%$.

24) (OBM 1^a Fase) Seja N o número de voos. Se 10% dos voos foram cancelados, restaram 90% de N. Dos voos restantes, 20% foram cancelados pela chuva, ou seja, 20% de 90% de $N = 0,20 \times 0,90 \times N = 0,18 \times N = 18\%$ de N. Dessa forma, a porcentagem do total de voos que foram cancelados é 28%.

25) (OBM 1^a Fase) Os 156 estudantes que resolveram todos os problemas corretamente correspondem a $100\% - 25\% - 15\% = 60\%$ do total. Logo, o número total de estudantes é $\frac{600}{100}.156 = 260$.

26) (OBM 1^a Fase) Se 2% de um número é igual a 1, então esse número é 50, pois, sendo x esse número temos $\frac{2}{100}.x = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{50}.x = 1$. Seu sucessor é 51, portanto a soma de ambos é 101.

27) (OBM 1^a Fase) A mistura final tem $0,2$ litros de polpa e litros de água. A porcentagem de polpa em relação ao volume da mistura é $\frac{0,2}{4} = \frac{2}{40} = 0,05 = 5\%$.

Porcentagem: Soluções dos Problemas Propostos

28) (OBM 1^a Fase) De todos os alunos dessa classe, $60\%.(22+18) = 0,6.40 = 24$ foram prestar trabalho comunitário. O número mínimo de alunas que participaram desse trabalho é obtido quando número de alunos que participaram é máximo, ou seja, quando 22 alunos se envolveram, restando assim o mínimo de $24-22 = 2$ vagas para as meninas.

29) (OBM 1^a Fase) Seja p a população de Tucupira há três anos. Atualmente, Tucupira tem $p + 50\%$ de $p = p + 0,5p$, população igual à atual de Pirajussaraí. Temos $1,5p + 1,5p = 9000 \Leftrightarrow 3p = 9000 \Leftrightarrow p = 3000$. Há três anos, a soma das populações das duas cidades era $1,5p + 0,5p = 1,5.3000 + 3000 = 4500 + 3000 = 7500$ pessoas.

30) (OBM 2^a Fase) Como 20% da massa total dessa pessoa correspondem á massa de gordura, ela tem $\frac{20}{100}.100 = 20$ kg de gordura. Ela perdeu 40% da sua gordura, ou seja, perdeu $\frac{40}{100}.20 = 8$ kg de gordura, e como manteve os demais índices, ela pesava ao final do regime $100 - 8 = 92$ kg.

31) (OBM 2^a Fase) O tanque contém uma mistura de 30 litros, sendo $0,2 \times 30 = 6$ litros de álcool e $30 - 6 = 24$ litros de gasolina. Portanto, para que as quantidades de gasolina e álcool fiquem iguais, devem ser colocados no tanque $24 - 6 = 18$ litros de álcool.

32) (OPM Primeira Fase)

   (a) Somente com álcool, o veículo percorre 400 km com 1 litro de combustível. Logo serão necessários $\frac{400}{8} = 50$ litros, gerando um gasto de $50 \times 1 = 50$ reais.

   (b) As proporções de combustível apresentadas possibilitam os seguintes gastos para se percorrer os 400 km:
   $\frac{400}{14} \times (0\% \times 1,00 + 100\% \times 2,00) \approx 57,14$ reais
   $\frac{400}{13,2} \times (40\% \times 1,00 + 60\% \times 2,00) \approx 48,48$ reais
   $\frac{400}{11,8} \times (50\% \times 1,00 + 50\% \times 2,00) \approx 50,84$ reais
   $\frac{400}{10} \times (70\% \times 1,00 + 30\% \times 2,00) \approx 52,14$ reais
   $\frac{400}{8} \times (100\% \times 1,00 + 0\% \times 2,00) = 50,00$ reais

   Assim, a proporção que possibilita o menor gasto com combustível é formada por 40% de álcool e 60% de gasolina.

33) (OPM Primeira Fase) Vejamos primeiramente o preço de cada marca de detergente, lembrando que os volumes são diferentes. A marca B custa 50 reais, e como o detergente A é 40% mais caro que a marca B, entã o preço de A é $(1+40\%) \times 50 = (1+0,4) \times 50 = 1,4 \times 50 = 70$ reais. O detergente C custa 50% a mais que a marca A, portanto preço da marca C é $(1+50\%) \times 70 = (1+0,5) \times 70 = 1,5 \times 70 = 105$ reais. Agora vamos calcular os volumes. O volume de B é de 80 litros, e como o detergente C contém 50% mais liquido que B, o volume de C é de $(1+50\%) \times 80 = (1+0,5) \times 80 = 1,5 \times 80 = 120$ litros. O detergente A tem um volume 20% menor que o detergente C, portanto o detergente A tem $(1-20\%) \times 120 = (1-0,2) \times 120 = 0,8 \times 120 = 96$ litros. Para pensar em economia podemos fazer um quociente, do volume pelo preço, quanto maior esse quociente então isso quer dizer se leva um volume maior de detergente. Para o detergente A o quociente é $\frac{96}{70} \approx 1,37$, para o detergente B $\frac{80}{50} = 1,6$ e finalmente para o detergente B temos o quociente $\frac{120}{105} \approx 1,14$. Portanto o detergente B é o mais econôomico.

34) (OPM Fase Final)

(a) 20% de 200 milhões é $\frac{20}{100}.200000000 = 40000000$.

(b) Há mais pessoas que não vão ao dentista do que moradores da zona rural, em outras palavras, se considerarmos que todos os 38 milhões de habitantes da zona rural nunca foram ao dentista ainda restariam $40 - 38 = 2$ milhões de pessoas que nunca foram ao dentista, e que são da zona urbana.

35) (OBMEP 1^a Fase) Inicialmente o fabricante cobrava R$ 20,00 por quilo e passou, com o aumento de preço, a cobrar R$ 25,00 por quilo. Logo o aumento do preço foi de R$ 5,00 por quilo e o aumento percentual de $\frac{5}{20} = 25\%$.

36) (OBM 2^a Fase) Seja x a quantidade de meninas no ano passado. Então havia $200 - x$ meninos. Assim, como o aumento foi de 10% para meninos, 20% para meninas e 30 no total, temos $0,10.(200 - x) + 0,20x = 30 \Leftrightarrow x = 100$. Logo, após o aumento de 20%, existem $100.1,20 = 120$ meninas na escola.

37) (OBM 2^a Fase) Inicialmente existiam 980 aves com a cauda verde e 20 das demais. Após a epidemia, estas 20 aves correspondem a 5%, donde o total de aves agora é $20 \times 20 = 400$ (sendo 380 da cauda verde). Portanto, morreram 600 aves.

38) (OBM 2^a Fase) Seja p o preço de cada camiseta em reais. Júlia comprou 3 camisetas e pagou por elas $3p$ reais. Mas como teve 10% de desconto, ao final pagou $100\% - 10\% = 90\%$ desse valor, ou seja, pagou $90\%.3p = 0,9.3p = 2,7p$ reais. O irmão de Júlia comprou 2 camisetas e pagou por elas $2p$ reais. Mas como teve 5% de desconto, ao final pagou $100\% - 5\% = 95\%$ desse valor, ou seja, pagou $95\%.2p = 0,95.2p = 1,9p$ reais. Como Júlia gastou 12 reais a mais que seu irmão, temos que $2,7p = 1,9p + 12 \Leftrightarrow 0,8p = 12 \Leftrightarrow p = 15$

39) (OBMEP 1^a Fase) Aqui usaremos os termos peso e massa como sinônimos, para tornar o texto mais próximo da linguagem coloquial. Uma melancia é constituída de duas partes: água e componentes sólidos (fibras, açúcares, etc.). Durante a desidratação somente ocorre perda de água; o peso dos demais componentes, antes e depois da desidratação, permanece o mesmo. O enunciado diz que, após ser desidratada, a melancia pesa 6 kg, dos quais 90% correspondem a água; os 10% restantes, cujo peso é $\frac{1}{10} \times 6 = \frac{6}{10} = 0,6$ kg, correspondem aos componentes sólidos. Por outro lado, antes de ser desidratada, a melancia tinha 95% de água, logo ela continha 5% de componentes sólidos; como o peso desses componentes não muda, vemos que 5% do peso original da melancia era 0,6 kg. Portanto 10%, ou seja, a décima parte, do peso original da melancia era igual a 1,2 kg; logo, o peso original da melancia era $10 \times 1,2 = 12$ kg.

40) (OPM Fase Final) Como 90% dos candidatos são eliminados na primeira fase, somente $100\% - 90\% = 10\% = \frac{1}{10}$ dos candidatos passam para a segunda fase. Desses candidatos, 1 em cada 3 é chamado para uma das vagas de Medicina. Assim, de $\frac{1}{10}$ dos candidatos

que fizeram a primeira fase, $\frac{1}{3}$ são chamados para as vagas de Medicina. Logo a razão $\frac{candidatos}{vagas}$ é $\frac{1}{10}.\frac{1}{3} = \frac{1}{30}$, ou seja, a razão $\frac{vagas}{candidatos}$ é o inverso de $\frac{1}{30}$, que é 30.

41) (OPM Fase Final)

(a) O salário sofreu um aumento de 3% em 1994, passando para $1000 + 3\% \times 1000 = 1000 + 30 = 1030$ dólares. Em seguida, sofreu um aumento de $2,7\%$ em 1995, passando então para $1030 + 2,7\% \times 1030 = 1030 + 27,81 = 1057,81$ dólares.

(b) Lembrando que aumentar de $x\%$ é o mesmo que multiplicar por $1 + x\%$ o valor a ser aumentado, de acordo com os dados o gasto de US\$1000,00 em 1990 passaram a $(1+2,3\%).(1+2,5\%).(1+2,5\%).(1+3,2\%).(1+3,5\%).(1+6\%).1000 = US\$1216,88$

(c) Não. De acordo com o item (b), o gasto mensal de US\$1000,00 em 1990 aumentou de US\$216,88, ou seja, aumentou 21,688%, mais que os 14,3% pedidos.