

归结原理作业

破案问题：在一栋房子里发生了一件神秘的谋杀案，现在可以肯定以下几点事实：

(1) 在这栋房子里仅住有 A, B, C 三人； (2) 是住在这栋房子里的人杀了 A； (3) 谋杀者非常恨受害者； (4) A 所恨的人，C 一定不恨； (5) 除了 B 以外，A 恨所有的人； (6) B 恨所有不比 A 富有的人； (7) A 所恨的人，B 也恨； (8) 没有一个人恨所有的人； (9) 杀人嫌疑犯一定不会比受害者富有。为了推理需要，增加如下常识： (10) A 不等于 B。

问：谋杀者是谁？

解答：

首先我们从常规推理的角度出发去考虑这个问题，根据条件(2)，谋杀者是 A、B 或 C 之一。根据条件(3)，谋杀者非常恨受害者，因此可以排除 C。现在需要确定是 A 还是 B 犯下了谋杀罪。

根据条件(4)，A 所恨的人，C 一定不恨，因此可以排除 C 是谋杀者。根据条件(5)，除了 B 以外，A 恨所有的人，因此 A 有动机杀死受害者。根据条件(6)，B 恨所有不比 A 富有的人，但是没有说 B 恨 A，因此 B 也可能是谋杀者。

根据条件(7)，A 所恨的人，B 也恨。因此，如果 A 是谋杀者，那么 B 也有动机杀害受害者。然而，根据条件(8)，没有一个人恨所有的人，因此这种情况是不可能的。因此，B 是无辜的，A 是谋杀者。

最后，根据条件(9)，杀人嫌疑犯一定不会比受害者富有，因此可以推断 A 比受害者更加富有。因此，A 是谋杀者，B 是无辜的，而 C 是旁观者。

接下来，我们可以尝试通过将一系列的事件符号化之后通过归结原理来证明：

首先，我们将所有的事实表示为命题：

A: A 是住在这栋房子里的人

B: B 是住在这栋房子里的人

C: C 是住在这栋房子里的人

$K(a)$: a 是谋杀者

$K(b)$: b 是谋杀者

$K(c)$: c 是谋杀者

$H(a)$: a 很恨受害者

$H(c)$: C 不恨受害者

$H(a, x)$: A 恨 x

$H(b, x)$: B 恨 x

$H(a, x) \wedge H(b, x)$: A 和 B 都恨 x

$H(b, x) \Rightarrow x$ 不比 A 富有

$H(a, x) \Rightarrow (x \text{ 不比 A 富有} \vee x = B)$

$A \neq B$

$\forall x \exists y H(y, x)$

这里， $K(x)$ 表示 x 是谋杀者， $H(x)$ 表示 x 很恨受害者， $H(x, y)$ 表示 x 恨 y。

接下来，我们使用归结原理来证明谋杀者是 A。首先，根据条件(2)，谋杀者只能是 A、B 或 C 中的一个，因此我们需要对这三个变量进行归结。

我们从假设 B 是谋杀者开始。根据条件(6)，B 恨所有不比 A 富有的人，因此有：

$$H(b, x) \Rightarrow (x \text{ 不比 } A \text{ 富有} \vee x = C)$$

又根据条件(5)，除了 B 以外，A 恨所有的人，因此有：

$$H(a, x) \Rightarrow (x = B \vee x = C)$$

而根据条件(7)，A 所恨的人，B 也恨，因此有：

$$H(a, x) \wedge H(b, x) \Rightarrow H(a, x)$$

因此，我们可以将这三个条件进行归结，得到：

$$H(b, x) \Rightarrow (x \text{ 不比 } A \text{ 富有} \vee x = C)$$

$$H(a, x) \Rightarrow (x = B \vee x = C)$$

$$H(a, x) \wedge H(b, x) \Rightarrow H(a, x)$$

$$A \neq B$$

现在，我们需要证明这个集合是不可满足的。我们使用反证法，假设这个集合是可满足的。由于这个集合包含所有条件，因此如果这个集合是可满足的，那么就存在一组真值赋值使得所有条件都成立。

我们注意到最后一个条件 $A \neq B$ ，因此必须有 $A = K(a)$ 或 $B = K(b)$ 或 $C = K(c)$ 。因为我们已经假设 B 是谋杀者，所以我们可以得到 $B \neq K(b)$ ，因此必须有 $A = K(a)$ 或 $C = K(c)$ 。如果 $A = K(a)$ ，那么根据条件(2)，A 是受害者，与条件(3)矛盾。如果 $C = K(c)$ ，那么根据条件(4)，C 不恨受害者，与条件(3)矛盾。因此，假设集合是可满足的是错误的，即这个集合是不可满足的。

根据归结原理，我们可以得出结论：如果一个集合是不可满足的，则它的每个有限子集都是不可满足的。因此，我们可以从归结出的集合中选择一个有限子集来证明 A 是谋杀者。我们选择以下四个条件的子集：

$$H(b, x) \Rightarrow (x \text{ 不比 } A \text{ 富有} \vee x = C)$$

$$H(a, x) \Rightarrow (x = B \vee x = C)$$

$$H(a, x) \wedge H(b, x) \Rightarrow H(a, x)$$

$$A \neq B$$

我们假设 B 是谋杀者，然后套用归结原理。我们得到：

$$H(b, x) \Rightarrow (x \text{ 不比 } A \text{ 富有} \vee x = C)$$

$$H(a, x) \Rightarrow (x = B \vee x = C)$$

$$H(a, x) \wedge H(b, x) \Rightarrow H(a, x)$$

然后我们使用 $H(a, A) \wedge H(b, A)$ 来替换 $H(a, x) \wedge H(b, x)$ 中的 x。这个式子成立是因为 A 是受害者，而根据条件(2)，谋杀者住在这栋房子里。因此，我们得到：

$$H(b, A) \Rightarrow (A \text{ 不比 } A \text{ 富有} \vee A = C)$$

$$H(a, A) \Rightarrow (A = B \vee A = C)$$

$$H(a, A) \wedge H(b, A) \Rightarrow H(a, A)$$

现在我们来考虑第一个条件，即 $H(b, A) \Rightarrow (A \text{ 不比 } A \text{ 富有} \vee A = C)$ 。由于 A 不比自己富有，因此我们有 $H(b, A) \Rightarrow (A = C)$ 。但是根据条件(4)，A 所恨的人，C 一定不恨，因此 $H(a, C)$ 是错误的。这意味着 B 不可能是谋杀者。同样的方法可以用来排除 C 作为谋杀者。因此，我们得出结论：A 是谋杀者。

因此，我们使用归结原理证明了谋杀者是 A。