前　言

数学是所有理工科的基础，这本讲义是为同济大学电信专业开设拓扑学课程所写的.

目　录

第 1 章　基本概念

1.1　集合与映射

集合论是数学理论体系的基础，严格的定义要通过公理化的方式，不是本课程的内容．这里仅仅指出，集合的定义方式不能太过任意，我们只需知道，哪些集合的定义方式是“合法”的．　首先，所有的整数、有理数、实数、复数分别构成集合，分别记为 $\mathbf{Z}$ 、$\mathbf{Q}$ 、$\mathbf{R}$ 、$\mathbf{C}$ ，这是熟知的．对某个集合 S 中，满足某个数学条件 P 的元素全体构成集合，称为集合 S 的**子集**，以如下方式表示

$$\{x \in S : \mathrm{P}\}.$$

例 1.1　全体正整数 $\{n \in \mathbf{Z} : n > 0\}$ 构成集合，是 $\mathbf{Z}$ 的子集，记作 $\mathbf{Z}^+$.

由上述集合中的元素构成的有序组、矩阵或序列全体构成集合，这种集合的构造方式称为**笛卡尔直积**．

例 1.2　由两个实数构成有序数对全体 $\{(x, y) : x, y \in \mathbf{R}\}$ 构成的集合，通常记为 $\mathbf{R}^2$ 或 $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ ，由 n 个实数构成有序数组全体构成的集合记为 $\mathbf{R}^n$．

例 1.3　全体实数列 $\{\{x_n\} : x_n \in \mathbf{R},\ n \in \mathbf{Z}^+\}$ 构成集合．

一个集合 S 的所有子集全体构成集合，称为该集合的**幂集**，记为 2^S .

例 1.4　设 $S = \{0, 1\}$，则 $2^S = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, S\}$.

对给定的两个集合 S 和 T ，如果对任何 $s \in S$ ，有唯一确定的 $t_s \in T$ 与之对应，这种对应关系就称为自 S 到 T 的**映射**．若以 f 作为该映射的名称，则该映射通常记为

$$\begin{aligned} f:\quad S &\to T \\ s &\mapsto t_s \end{aligned} \tag{1.1}$$

注 1.1　自 S 到 T 的映射全体构成集合．

例 1.5　映射

$$\begin{aligned} f:\quad S &\to S \\ s &\mapsto s \end{aligned}$$

称为 S 上的**恒同映射**，记为 id_S 或 id .

函数是数集到数集的映射，是最常见的一种映射，此时需要注意，若用 (1.1) 的形式描述函数，则 S 必须为函数 f 的定义域，但 T 不必为函数 f 的值域．

例 1.6 设定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 f 的表达式为 $f(x)=x+2$，该映射关系可记为

$$\begin{aligned} f:\ & \mathbf{R}\to\mathbf{R} \\ & x\mapsto x+2 \end{aligned}$$

定义 1.1 对映射 $\begin{aligned} f:\ & S\to T \\ & x\mapsto f(x) \end{aligned}$ 和 $\begin{aligned} g:\ & T\to R \\ & t\mapsto g(t) \end{aligned}$，映射

$$\begin{aligned} g\circ f:\ & S\to R \\ & s\mapsto g(f(s)) \end{aligned}$$

称为映射 g 与 f 的**复合**.

关于映射，有下面几个重要的概念.

定义 1.2 对映射

$$\begin{aligned} f:\ & S\to T \\ & s\mapsto f(s) \end{aligned}$$

若对任何 $s_1\neq s_2$，都有 $f(s_1)\neq f(s_2)$，则称映射 f 为**单射**；若对任何 $t\in T$，都存在 $s\in S$，使得 $f(s)=t$，则称映射 f 为**满射**；若 f 既是单射又是满射，则称映射 f 为**双射**.

注 1.2 对函数 $f:S\to T$ 而言，只有当该映射为满射时，T 才是 f 的值域，只有当 f 是双射时，才可以定义 T 到 S 的反函数 f^{-1}. 对一般的双射 f，若 $f^{-1}:T\to S$ 满足 $f^{-1}\circ f=\mathrm{id}_S$，则 f^{-1} 称为 f 的**逆映射**.

定义 1.3 设 f 为自 S 到 T 的映射，S_1 和 T_1 分别为 S 和 T 的子集，称集合

$$f(S_1)=\{f(s):s\in S_1\}$$

为 S_1 关于映射 f 的**像集**，称集合

$$f^{-1}(T_1)=\{s:f(s)\in T_1\}$$

为 T_1 关于映射 f 的**完全原像集**.

注 1.3 在完全原像集的定义中，f 并不要求为双射，f^{-1} 在此处也不表示 f 的逆映射.

若集合中的元素个数有限，则该集合称为**有限集**，否则称为**无限集**. 对有限集 S，以 $|S|$ 记该集合的元素个数，约定 $|\varnothing|=0$.

例 1.7 设 $S=\{0,1\}$，则 $|S|=2$，$|2^S|=4$.

一般地，有下面的定理.

定理 1.1 若 S 为有限集，则 $|2^S|=2^{|S|}$.

证明 留做习题

由上述定理可以看出用 2^S 作为幂集记号的原因.

如何描述无限集的元素“个数”，是集合论中非常有趣且重要的问题. 仅仅以无限集的元素都是无限多个，就简单地认为无限集的元素个数都相同，这种分类方式过于粗糙. 相比之下，下面的定义（分类方式）更加合理.

定义 1.4 对集合 S 与 T，若存在自 S 到 T 的双射，则称 S 与 T 有相同的**基数**或**势**，记为 $\bar{\bar{S}}=\bar{\bar{T}}$. 若存在自 S 到 T 的单射，则称 S 的基数不大于 T 的基数，记为 $\bar{\bar{S}}\leqslant\bar{\bar{T}}$.

显然，当 S 与 T 为有限集时，$\bar{\bar{S}} = \bar{\bar{T}}$ 当且仅当 $|S| = |T|$)，$|S| < |2^S|$．对无限集，通过基数，可以做更细致的分类．下面的定理直观上很明显，但证明并不十分容易．

定理 1.2 (Bernstein)　若 $\bar{\bar{S}} \leqslant \bar{\bar{T}}$ 且 $\bar{\bar{T}} \leqslant \bar{\bar{S}}$，则 $\bar{\bar{S}} = \bar{\bar{T}}$．

Bernstein 定理的证明可参考文献 [11] 的 1.4 节．根据Bernstein 定理，可进一步规定，若存在自集合 S 到 T 的单射，但不存在 T 到 S 的单射，则称集合 S 的基数小于 T 的基数，记为 $\bar{\bar{S}} < \bar{\bar{T}}$．特别，有下面的定理．

定理 1.3　任何集合的基数一定小于其幂集的基数．

若记 $\mu = \bar{\bar{S}}$，则其幂集的基数也记为 2^μ，则上述定理结论可简单描述为 $\mu < 2^\mu$．该定理的证明可参考 [11]．

对无限集，通过基数，可以做更细致的分类．记 $a = \bar{\bar{\mathbf{Z}}}^+$（称为**可列基数**），$c = 2^a$（称为**连续统势**），则有 $\bar{\bar{\mathbf{Z}}} = \bar{\bar{\mathbf{Q}}} = a$，$\bar{\bar{\mathbf{R}}} = \bar{\bar{\mathbf{C}}} = \bar{\bar{\mathbf{R}}}^n = c$．换言之，正整数集、整数集和有理数集有相同的基数；实数集、复数集、2 维空间的点集、3 维空间的点集乃至 n 维空间的点集具有相同的更大的基数，该基数恰为正整数的幂集的基数．相关的证明和更多的结论，可参考文献 [11] 的 1.4 节．

无限集的基数中，是否存在介于 a 和 c 之间的基数，特别，实数集是否存在子集的基数介于 a 和 c 之间，是数学的著名问题之一，称为连续统假设，前者在上世纪 40 年代被以一种惊人的结论得以回答，后者至今尚无结论．

1.2　群

很多集合还具有更多的属性．

定义 1.5　设 G 是一个集合，$m: G \times G \to G$ 为映射，且满足以下 3 条性质：

(1) 结合律：对任意 x，y，$z \in G$，$m(m(x,y),z) = m(x,m(y,x))$；

(2) 左单位元：存在 $e \in G$，使得对任意 $x \in G$，$m(e,x) = x$；

(3) 左逆元：对任意 $x \in G$，存在 $x^{-1} \in G$，使得 $m(x^{-1},x) = e$，

此时 (G,m) 称为一个**群**，m 称为群 G 上的**乘法**运算（或称 G 关于运算 m 构成群），$m(x,y)$ 简记为 xy．进一步，若乘法运算还满足

(4) 交换律：对任意 x，$y \in G$，$xy = yx$，

则 (G,m) 称为一个 **Abel 群**或**交换群**．

注 1.4　可以证明，群的左单位元必定也是右单位元，即对一切群元素 g，都有 $ge = g$；任何一个元素的左逆元，必定是右逆元，即对一切群元素 g，都有 $g^{-1}g = gg^{-1} = e$．因此，左单位元可简称为**单位元**，左逆元可简称为**逆元**．

例 1.8　单独一个元素，构成群．此时，该元素本身就是单位元．这种群简记为 0．

例 1.9　整数集 $\mathbf{Z}$ 关于加法运算构成 Abel 群，称为**整数加群**．

例 1.10　$\mathbf{Z}_m$ 关于加法运算构成 Abel 群．

例 1.11　设 S 为非空集合，则由 S 到 S 的全体双射构成的集合，关于映射的复合运

算，构成群，称为作用在 S 上的**置换群**．当 $S=\{1,2,\cdots,n\}$ 时，作用在其上的置换群记为 S_n，该群中的每一个元素称为 S 上的一个**置换**．有一类特殊的置换，其映射规则为：对 $a_1,a_2,\cdots,a_k\in S$，

$$a_1\mapsto a_2,\ a_2\mapsto a_3,\cdots,\ a_{k-1}\mapsto a_k,\ a_k\mapsto a_1,$$

而将其他 S 中的元素，映射为自身，这种双射称为 S 上的**轮换**，记作 $(a_1\ \ a_2\ \ \cdots\ \ a_k)$．可以证明，任何一个置换均可表示为有限个无公共元素的轮换的复合．容易验证，对一切 $n>2$，S_n 都不是交换群．

例 1.12　n 阶可逆实（复）矩阵全体构成的集合关于矩阵乘法构成群，该群称为**一般线性群**，记作 $\mathrm{GL}(n,\mathbf{R})$（对复情形，记为 $\mathrm{GL}(n,\mathbf{C})$）．

例 1.13　n 阶行列式为 1 的实（复）矩阵全体构成的集合关于矩阵乘法构成群，该群称为**特殊线性群**，记作 $\mathrm{SL}(n,\mathbf{R})$（对复情形，记为 $\mathrm{SL}(n,\mathbf{C})$）．

例 1.14　n 阶正交矩阵（即满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{E}$ 的实矩阵）全体构成的集合关于矩阵乘法构成群，该群称为**正交线性群**，记作 $\mathrm{O}(n)$．所有行列式为 1 的 n 阶正交矩阵（这类矩阵称为**第一类正交矩阵**）全体构成的集合关于矩阵乘法构成群，该群记作 $\mathrm{SO}(n)$．

将群按照集合的元素个数，可分为有限群和无限群两类，上述的例子中，$\mathbf{Z}_m$ 和 S_n 是有限群，剩余的均为无限群．而在无限群中，$\mathbf{Z}$ 是可数的，在群分类中属于**离散群**，剩余的例子可以证明均具有连续统势，在群分类中属于**连续群**（在后续章节还将进一步指出，这些群具有很好的几何结构，统称为 **Lie 群**）．

定义 1.6　设 G 关于运算 m 构成群，H 作为集合是 G 的子集，且关于运算 m 也构成群，则群 H 称为 G 的**子群**．

例 1.15　对任何一个群 G，$\{e\}$ 与 G 都是 G 的子群，这两个子群是平凡的．

例 1.16　$\mathrm{SL}(n,\mathbf{R})$ 和 $\mathrm{SO}(n)$ 都是 $\mathrm{GL}(n,\mathbf{R})$ 的子群，而 $\mathrm{SO}(n)$ 又是 $\mathrm{SL}(n,\mathbf{R})$ 的子群．

由集合到其自身的映射称为该集合上的一个变换，而任何一个群都可以看作某个集合上的一类变换．事实上，对群 G，可以看作定义在其自身上的一类变换．

例 1.17 (群上的平移)　对任意 $g\in G$，定义映射

$$L_g:\ \begin{array}{l} G\to G \\ h\mapsto gh \end{array}\qquad\qquad R_g:\ \begin{array}{l} G\to G \\ h\mapsto hg \end{array}$$

分别称为群 G 上的**左平移**与**右平移**．不难证明，任何群 G 上的平移都是双射，且对任意 $g_1,g_2\in G$，

$$L_{g_1g_2}=L_{g_1}\circ L_{g_2},\ R_{g_1g_2}=R_{g_2}\circ R_{g_1},$$

特别，当 $|G|=n$ 时，G 中元素可以左平移的方式看作 G 上的置换．

例 1.18 (群的共轭变换)　对任意 $g\in G$，定义映射

$$C_g:\ \begin{array}{l} G\to G \\ h\mapsto ghg^{-1} \end{array}$$

称为群 G 上的一个**共轭变换**．不难证明，

$$C_g = L_g \circ R_{g^{-1}}\,,\; C_{g_1 g_2} = C_{g_1} \circ C_{g_2}\,,$$

于是当 $|G| = n$ 时，G 中元素可以共轭变换的方式看作 G 上的置换．

注 1.5　当 $g_1 \neq g_2$ 时，必有 $L_{g_1} \neq L_{g_2}$，所以当 $|G| = n$ 时，G 可以左平移的方式整体地看作 S_n 的子群，但 $C_{g_1} \neq C_{g_2}$ 未必成立，故 G 不能以共轭变换的方式，看作 S_n 的子群．

例 1.19　$GL(n,\mathbf{R})$ 中的元素，可看作 $\mathbf{R}^n$ 上的线性变换．

注 1.6　群是一个相对抽象的概念，然而某个集合上的变换则是一个相对直观的概念，上述的做法都将群元素看作某个集合上的变换，且这种对应方式还保持了群的运算关系，上述对应称为**群的表示**．群的表示是群理论的一个重要内容，是研究群结构的重要方法．

定义 1.7　设 G_1 和 G_2 为群，映射 $\sigma : G_1 \to G_2$ 满足对任何 g，$h \in G_1$，$\sigma(gh) = \sigma(g)\sigma(h)$，则称 σ 为群 G_1 到 G_2 的**同态**．进一步，若 σ 为双射，则称 σ 为群 G_1 到 G_2 的**同构**．

群的同构，顾名思义，指两个群的“结构”相同．具体地说，两个群有相同的元素个数（或基数），且群的运算关系本质上也是相同的，差别仅仅是两个群的元素和运算用了不同的记法．因此，对两个同构的群，完全可以视为等同．由此衍生出一个重要的问题：群有多少种本质不同的结构？所谓群的结构，就是研究群能与何种典型的群同构，本节的例子中提到的群，均可视为典型的群．

例 1.20　设 G 有所有形如 a^n $(n \in \mathbf{Z})$ 的元素构成，这里 a 是一个文字符号，G 上的乘法运算定义为

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}\,,$$

易见 G 关于上述乘法运算构成 Abel 群，且与整数加群同构．

有些群，虽然不与某个典型的群同构，但可以由某些典型的群的直积得到．

例 1.21　在直积集合 $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ 上定义加法运算

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)\,,$$

则 $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ 关于上述定义的加法构成 Abel 群，该群通常记作 $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$．

例 1.22　设 G_1 和 G_2 分别由形如 a^m 和 b^n 的元素 $(m,n \in \mathbf{Z})$ 以例 1.20 的方式构成的群．定义 $G_1 * G_2$ 为由有限个形如 $a^m b^n$ 作形式乘法得到的表达式的全体构成的集合，其中 a^0 与 b^0 视为等同的单位元，形式乘法满足结合律，但任何 a^m 与 b^n 的形式乘法都不满足交换律，则可以验证 $G_1 * G_2$ 关于形式乘法构成群．由于 G_1 和 G_2 均同构于整数加群，从而该群也被记为 $\mathbf{Z} * \mathbf{Z}$．

将上述例子中的整数加群改为一般的群，也可以构成相应的直积群，参见课后习题．

根据上述的想法，数学家猜想，是否任何一个群都可以分解成一些简单的群的某种直积，而这些简单的群都不能再继续分解了．这个问题的解答相当困难，即便对 Abel 群，也需要相当的篇幅．这里仅仅陈述关于有限生成 Abel 群的一个定理．

定义 1.8　设 G 为 Abel 群，群运算记为加法，且存在 G 中元素 g_1，g_2，$\cdots$，g_k，使得 G 中所有元素均可表示为如下形式

$$m_1 g_1 + m_2 g_2 + \cdots + m_k g_k \;\; (m_1\,,\, m_2\,, \cdots,\, m_k \in \mathbf{Z})\,,$$

这里 $m_k g_k$ 表示 $|m_k|$ 个 g_k（若 m_k 为正）或 $-g_k$（若 m_k 为负）连加的和，则该群称为**有限生成的**，$g_1, g_2, \cdots, g_k$ 称为 G 的一组**生成元**.

定理 1.4 (有限生成 Abel 群的分类)　任何有限生成 Abel 群 G 必同构于

$$\underbrace{\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}}_{m\text{个}} \oplus \mathbf{Z}_{d_1} \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}_{d_n},$$

这里 m 称为群 G 的 **Betti 数**，整数 $d_1 \mid d_2 \mid \cdots \mid d_n$，称为群 G 的**不变因子**.

同态与同构的概念可以推广的更多的代数范畴上．例如两个线性空间之间，也可以定义同态，只要该映射保持线性空间的运算（即该映射和线性空间的运算次序是可交换的）.

定义 1.9　若 $f: G \to H$ 为同态，则记 $\operatorname{im} f = f(G)$，称为 f 的**像**，称 H 中单位元的完全原像集为 f 的**核**，记为 $\ker f$.

在上述定义中，若 G 和 H 为群，且群的单位元记为 e，则 $\ker f = f^{-1}(\{e\})$；若 G 和 H 为线性空间，则 $\ker f = f^{-1}(\{\mathbf{0}\})$.

1.3　拓扑

对一个非空集合，如果要进一步刻画集合中元素之间的位置关系，就需要为该集合定义拓扑．对实数集而言，定义拓扑需要先从邻域开始.

定义 1.10　对 $x \in \mathbf{R}^n$，$\delta > 0$，称

$$V(x, \delta) = \{y \in \mathbf{R}^n : \|y - x\| < \delta\}$$

为 x 的 **δ-邻域**，这里 $\|y - x\|$ 为 x 到 y 的欧氏距离.

直观上看，邻域描述了一个点的“附近”有哪些点．借助邻域，可以进一步定义内点和开集.

定义 1.11　设 $E \subset \mathbf{R}^n$，若对任何 $x \in E$，存在 $\delta > 0$，使得 $V(x, \delta) \subset E$，则称 x 为 E 的一个**内点**．若 $\mathbf{R}^n$ 的某子集的一切点均为内点，则称该集合为 $\mathbf{R}^n$ 上的**开集**.

定理 1.5　$\mathbf{R}^n$ 上的全体开集满足以下性质：

(1) 空集 $\varnothing$ 和 $\mathbf{R}^n$ 都是开集；

(2) 若 O_1，O_2 为开集，则 $O_1 \cap O_2$ 为开集；

(3) 若 O_λ $\lambda \in \Lambda$ 均为开集，则 $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$ 为开集.

证明　(1) 由于空集中没有点不是内点，故空集是开集．$\mathbf{R}^n$ 是开集是显然的.

(2) 不妨设 $O_1 \cap O_2 \neq \varnothing$．任取 $x \in O_1 \cap O_2$，由 O_1，O_2 为开集得，存在 δ_1，$\delta_2 > 0$，使得 $V(x, \delta_1) \subset O_1$，$V(x, \delta_2) \subset O_2$．令 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$，则 $V(x, \delta) \subset O_1 \cap O_2$，故 $O_1 \cap O_2$ 为开集.

(3) 不妨设 $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$ 不为空集．任取 $x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$，则存在 $\lambda \in \Lambda$，使得 $x \in O_\lambda$．由 O_λ 为开集，故存在 $\delta > 0$，使得 $V(x, \delta) \subset O_\lambda$，从而 $V(x, \delta) \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$，故 $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$ 为开集.

所谓拓扑，就是一个集合上的所有开集全体构成的集合，其严格的定义如下.

定义 1.12　对一个非空集合 X，若 $\mathscr{T}$ 是由 X 的某些子集构成的集合，且满足

(1) $\varnothing$, $X \in \mathscr{T}$;

(2) 若 O_1 , $O_2 \in \mathscr{T}$ ，则 $O_1 \cap O_2 \in \mathscr{T}$ ；

(3) $O_\lambda \in \mathscr{T}$ $\lambda \in \Lambda$ ，则 $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \in \mathscr{T}$ ，

则 $\mathscr{T}$ 称为 X 上的**拓扑**，$\mathscr{T}$ 中元素称为 X 上的**开集**，$(X, \mathscr{T})$ 称为一个**拓扑空间**. 在明确拓扑定义的前提下，也可以简称 X 为**拓扑空间**.

注 1.7 根据定义 1.12 ，一个集合上可以定义多种不同的拓扑. 再根据定理 1.5 ，$\mathbf{R}^n$ 上全体开集构成的集合构成 $\mathbf{R}^n$ 上的一个拓扑，称为 $\mathbf{R}^n$ 上的**通常拓扑**，后续章节中但凡涉及到的 $\mathbf{R}^n$ 上的拓扑都是指这一种.

注 1.8 拓扑可以定义在任意一个集合上，是一个非常一般的概念. 在一个集合上定义了拓扑，相当于规定了一个元素的“附近”有哪些元素. 从这个意义上说，拓扑刻画了集合元素之间的某种位置关系.

与开集相对的概念是闭集.

定义 1.13 设 $(X, \mathscr{T})$ 是拓扑空间，$F \subset X$ ，若 $F^c \in \mathscr{T}$（即 F^c 为 X 上的开集），则 F 称为 X 上的**闭集**.

定理 1.6 设 $(X, \mathscr{T})$ 是拓扑空间，则 X 上的全体闭集满足以下性质：

(1) 空集 $\varnothing$ 和 X 都是闭集；

(2) 若 F_1 , F_2 为闭集，则 $F_1 \cup F_2$ 为闭集；

(3) 若 F_λ $(\lambda \in \Lambda)$ 为闭集，则 $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$ 为闭集.

证明留作习题.

例 1.23 在 $\mathbf{R}$ 上，开区间是开集，闭区间（包括一端为闭，一端为无穷的区间）是闭集，有限点集是闭集.

注 1.9 开集和闭集不是互斥的概念，某个集合可能既是开集也是闭集，例如空集和全集；也可能既不是开集也不是闭集，例如 $\mathbf{R}$ 上的有限半开半闭区间 $[a, b)$.

当考虑的全空间为 $\mathbf{R}^n$ 的子集时，通常利用 $\mathbf{R}^n$ 上的拓扑，定义子集上的拓扑.

定理 1.7 若 $X \subset \mathbf{R}^n$ ，则 $\mathscr{T} = \{O \cap X : O \text{ 为 } \mathbf{R}^n \text{ 上的开集}\}$ 为 X 上的拓扑，称为 $\mathbf{R}^n$ 上的拓扑在 X 上的**诱导拓扑**.

证明留作习题.

推论 1.8 若 $X \subset \mathbf{R}^n$ ，其上拓扑取诱导拓扑，则 E 为 X 上的闭集当且仅当存在 $\mathbf{R}^n$ 上的闭集 F 使得 $E = F \cap X$.

本课程中，不做特殊说明，考虑的都是通常拓扑下的 $\mathbf{R}^n$ 或其诱导拓扑下的子空间.

定义 1.14 设 $(X, \mathscr{T})$ 为拓扑空间，$S \subset X$ ，称 $\bar{S} = \cap\left\{F \subset X : F \text{ 为 } X \text{ 上的闭集}\right\}$为 S 的**闭包**.

由定义易见，$\bar{S}$ 是包含 S 的最小闭集.

例 1.24 有理数集 $\mathbf{Q}$ 在 $\mathbf{R}$ 上的闭包 $\bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}$. 这是因为对于任意实数 y 的任意邻域，总包含有理数，于是 y 不会是包含 $\mathbf{Q}$ 的闭集的补集中的点.

集合一旦赋予了拓扑，就可以谈论集合之间映射的连续性.

定义 1.15　设 X 与 Y 为拓扑空间，映射 $f: X \to Y$ 称为**连续**的，如果对任何 Y 上的开集 O，$f^{-1}(O)$ 是 X 上的开集．若 $D \subset X$，映射 $g: D \to Y$称为**连续**的，如果对任何 Y 上的开集 O，$g^{-1}(O)$ 是 D 作为 X 的子空间上的开集．

可以证明，当 $X = \mathbf{R}^m$，$Y = \mathbf{R}^n$ 时，上述连续映射的定义与数学分析中以极限的方式定义的连续性等价．

对连续映射，下面的结论是容易得到的．

定理 1.9　若 $f: X \to Y$ 和 $g: Y \to Z$ 均为定义在拓扑空间间的连续映射，则复合映射 $g \circ f: X \to Z$ 也是连续的．

定义 1.16　设 X 与 Y 为拓扑空间．若存在连续的双射 $f: X \to Y$，且逆映射 $f^{-1}: Y \to X$ 也是连续的，则称 X 与 Y **同胚**，映射 f 称为一个**同胚映射**．

顾名思义，两个拓扑空间是同胚的，即表示这两个拓扑空间可以被同一块“胚”制成．如果将“胚”想象成“橡皮泥”，则两个空间可以被同一块橡皮泥制成，但在制作过程中，不允许“切割”和“粘接”．这是因为，“切割”将一个点变成了两个点；“粘接”则将两个点变成了一个点．

例 1.25　拓扑空间 X 上的恒同映射

$$\begin{aligned} 1_X:\ & X \to X \\ & x \mapsto x \end{aligned}$$

是 X 到其自身的**同胚**．

定理 1.10　拓扑空间 X 与 Y 同胚，当且仅当存在连续映射 $f: X \to Y$ 与 $g: Y \to X$，使得 $g \circ f = 1_X$，$f \circ g = 1_Y$．

例 1.26　任何两个开区间都是同胚的．

证明　只须证明任何开区间与 $(0,1)$ 同胚．分三种情形证明．

(1) 有限开区间 (a,b) 与 $(0,1)$ 同胚．此时，$f(t) = a(1-t) + bt$ 是 $(0,1)$ 到 (a,b) 的同胚．

(2) $(-\infty,+\infty)$ 与 $(0,1)$ 同胚．此时，$f(t) = tanx$ 是 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 到 $(-\infty,+\infty)$ 的同胚，而 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 与 $(0,1)$ 同胚，故 $(-\infty,+\infty)$ 与 $(0,1)$ 的同胚．

(3) $(a,+\infty)$ 与 $(0,1)$ 同胚．此时，$f(t) = \dfrac{a}{x}$ 是 $(a,+\infty)$ 到 $(0,1)$ 的同胚．

例 1.27　凸多边形（边界）和圆（周）同胚；凸多面体（表面）和球（面）同胚[1]．

证明　易见任意两个圆（周）同胚，任意两个球（面）同胚．

在凸多边形内部任意取定一点，记为 O，以 O 为圆心，充分大的半径作圆，使得凸多边形位于圆的内部．于是，对圆周上任意一点 A，连接 AO，则线段 AO 必与凸多边形交于唯一一点，记该点为 $P(A)$，则 $P: A \mapsto P(A)$ 是圆周到凸多边形边界的同胚．要将该同胚延拓到圆内，只须对 OA 上任意一点 Y，令 $P(Y) = \dfrac{|Y|}{|X|}\dfrac{P(X)}{|P(X)|}$，这里 $|\cdot|$ 表示该点到 O 的距离．

[1]凸多边形是指，该多边形位于任何一条边所在直线的同一侧；凸多面体是指，该多面体位于任何一个面所在平面的同一侧．

凸多面体（表面）到球（面）的同胚构造是类似的．证毕．

判断两个拓扑空间是否同胚，是拓扑学中的一个核心问题，这件事并不容易．特别是论证两个空间不同胚，无法采用构造性的方法．因此寻找同胚变换下的不变性质，是拓扑学中的重要研究方向．

接下来，介绍三个与拓扑相关的重要定义．

定义 1.17 设 $(X,\mathscr{T})$ 为拓扑空间，$S\subset X$．若开集簇 $\{O_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ 满足 $S\subset\bigcup\{O_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$，则称 $\{O_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ 为 S 的一个**开覆盖**．若对 S 的任何一个开覆盖 $\{O_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$，都存在有限集 $\Delta\subset\Lambda$，使得 $\{O_\lambda:\lambda\in\Delta\}$ 也是 S 的开覆盖（称为原开覆盖的**子覆盖**），则称 S 为 X 上的**紧集**．

下述定理给出了 $\mathbf{R}^n$ 的子集为紧集的等价刻画．

定理 1.11 (Borel) $\mathbf{R}^n$上的子集 S 是紧的当且仅当 S 为有界闭集．

定义 1.18 设 $(X,\mathscr{T})$ 为拓扑空间，$S\subset X$．若存在两个不交开集 O_1, O_2 且满足 $O_1\cap S\neq\varnothing$, $O_2\cap\varnothing=\varnothing$，$S\subset O_1\cup O_2$，则称 S 为**不连通的**，否则称 S 为**连通**的．

直观上看，连通的集合，是不能被两个不交开集“分离”的．下面的定理给出了连通的等价刻画．

定理 1.12 S 为拓扑空间 X 上的连通集，当且仅当 X 在 S 的诱导拓扑中，仅有空集和 S 是既开且闭的．

比连通更加直观的定义是道路连通．

定义 1.19 设 $(X,\mathscr{T})$ 为拓扑空间，$S\subset X$．若对于任何 x, $y\in S$，存在连续映射 $f:[0,1]\to S$，使得 $x=f(0)$, $y=f(1)$，则称 S 为**道路连通**的，f 为连接 x, y 的一条**道路**．

一个集合是道路连通的，直观上看，该集合上的任意两个点，都可以被一条落在该集合内的连续曲线连接起来．该连续曲线，就是上述定义中“道路”的像集．

道路连通和连通有关系，但不等价．

定理 1.13 若 S 为拓扑空间 X 上的道路连通集，则 S 为 X 上的连通集．

上述定理的逆定理不成立，反例参见 [4]．

紧性、连通性和道路连通性在连续映射下，都是保持的，这就是下面的定理．

定理 1.14 设 X, Y 是拓扑空间，$D\subset X$，$f:D\to Y$ 为连续映射，则

(1) 若 D 是紧的，则 $f(D)$ 也是紧的；

(2) 若 D 是连通的，则 $f(D)$ 也是连通的；

(3) 若 D 是道路连通的，则 $f(D)$ 也是道路连通的．

推论 1.15 若 X, Y 是拓扑空间且是同胚的，则若其中一个空间是紧的（或连通的，或道路连通的），则另一个空间也必定是紧的（或连通的，或道路连通的）．

注 1.10 类似紧性、连通性、道路连通性这种在同胚变换下保持不变的性质，统称为**拓扑性质**或**拓扑不变量**．

例 1.28 $(0,1)$ 和 $[0,1]$ 不同胚．这是因为 $[0,1]$ 是有界闭集，从而是紧的，但 $(0,1)$ 不是

有界闭集，从而不是紧的.

例 1.29 $[-1,1]$ 和正方形 $[-1,1]\times[-1,1]$ 不同胚. 若不然，设 $f:[-1,1]\to[-1,1]\times[-1,1]$ 是同胚映射，则 $[-1,1]\setminus\{0\}$ 和 $[-1,1]\times[-1,1]\setminus\{f(0)\}$ 也是同胚的，前者不连通，后者是道路连通的，从而连通，矛盾.

从上述两个例子可以看出，如果两个拓扑空间的拓扑性质不同，则两个空间就不会同胚. 但对复杂的拓扑空间，仅从紧性、连通性、道路连通性来判别两个空间是否同胚，远远不够，还需要挖掘更多的拓扑不变量.

好的拓扑不变量，如同生物的 DNA . 生物的 DNA 是可检测的，且几乎可以完全准确地判断生物之间的亲缘关系，如果存在一种拓扑不变量，是可计算的，且可以完全判定两个拓扑空间是否同胚，这种拓扑不变量就是最理想的. 目前，在一定条件下，这种理想的呃拓扑不变量已经被数学家发现，一般条件下的拓扑不变量仍在探索研究中.

1.4 等价关系和商集合

在数学中，同一范畴下的两个对象之间，经常可以定义某种数学关系. 例如：两个实数之间，存在大小关系；两个集合之间存在基数的大小关系. 对同一范畴下，两个数学对象通过“数学条件”规定的关系，统称为**二元关系**. 这里强调“数学条件”，是为了保证两个数学对象“是否有关系”，必须能通过定义的条件明确判定. 以下再举一些例子.

例 1.30 在集合范畴中，对两个集合 A 与 B，如果 $A\subset B$，则称 A 与 B 有关系.

例 1.31 在三角形范畴中，对 $\triangle ABC$ 和 $\triangle EFG$，如果 $\triangle ABC$ 和 $\triangle EFG$ 全等，则称 $\triangle ABC$ 和 $\triangle EFG$ 有关系.

例 1.32 在方阵范畴中，对两个方阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，如果 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相似，则称 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 有关系.

例 1.33 在整数集合中，若两个整数的差为偶数，则称这两个整数有关系.

上述例子出现的关系，都是“合法”的二元关系，而下面例子中提及的关系，就不是一个合法的二元关系.

例 1.34 在函数的范畴中，对函数 f 和 g，如果函数 f 比 g 性质更好，则称函数 f 和 g 有关系. 这种关系不是合法的二元关系，这是因为“函数 f 比 g 性质更好”在数学上没有明确定义，不能算作一个数学条件.

在二元关系中，有两种二元关系在数学上特别有用.

定义 1.20 将某范畴中的 a 和 b 有关系记为 $a\,R\,b$. 若该二元关系满足以下条件：

(1)（自反性）对任何 a，$a\,R\,a$；

(2)（反对称性）若 $a\,R\,b$ 且 $b\,R\,a$，则 $a=b$；

(3)（传递性）对任何 a,b,c，若 $a\,R\,b$，$b\,R\,c$，则必有 $a\,R\,c$，

则称该二元关系 R 为一个**偏序关系**. 进一步，若还有

(4) 对任何 a,b，必有 $a\,R\,b$ 或 $b\,R\,a$，

则称该二元关系 R 为一个**全序关系**.

集合间的包含关系是一种偏序关系，实数间的小于等于关系是一种全序关系．

定义 1.21 将某范畴中的 a 和 b 有关系记为 $a\,R\,b$．若该二元关系满足以下条件

(1)（自反性）对任何 a，$a\,R\,a$；

(2)（对称性）若 $a\,R\,b$，则 $b\,R\,a$；

(3)（传递性）若 $a\,R\,b$，$b\,R\,c$，则必有 $a\,R\,c$，

则称该二元关系 R 为一个**等价关系**．

数的相等关系、集合基数的相等关系、三角形间的全等与相似关系、矩阵间的相似与合同关系等，都是等价关系．等价关系通常简记为 $\sim$．

利用等价关系，可以将范畴内的数学对象进行分类．为表述简单，不妨只考虑集合上的等价关系．

设 $\sim$ 是定义在非空集合 S 上的等价关系，则对任何 $a \in S$，定义 $\bar{a}$ 为所有与 a 等价的元素构成的集合，即

$$\bar{a} = \{s \in S : s \sim a\},$$

称为元素 a 所在的**等价类**．不难证明对任何 $a, b \in S$，

(1) 若 $a \sim b$，当且仅当 $\bar{a} = \bar{b}$；

(2) 若 a 与 b 不等价，当且仅当 $\bar{a} \cap \bar{b} = \varnothing$．

进而 S 可以表示为互不相交的等价类的并集，这些互不相交的等价类所构成的集合，称为 S 关于等价关系 $\sim$ 的**商集合**，记作 $S/\sim$．

注 1.11 商集合中的元素是等价类，当该等价类包含不止一个元素的时候，该等价类就有多种不同的表达方式．例如对例 1.33 中的关系（易证其为等价关系），则 $\bar{1}$ 和 $\bar{3}$ 就代表了同一个等价类．

直观上看，商集合是将集合中具有等价关系的所有元素看作一个元素．

当一个集合同时还具有其他属性的时候，相应的商集合就会衍生出更多的内涵．

定理 1.16 设 G 为群，$\sim$ 为其上的一个等价关系．若对一切 $a \sim a'$，$b \sim b'$ 都有 $ab \sim a'b'$，则 $\bar{a}\bar{b} = \overline{ab}$ 是商集合 $G/\sim$ 上的乘法运算，$G/\sim$ 在该运算下构成群．

条件“对一切 $a \sim a'$，$b \sim b'$ 都有 $ab \sim a'b'$”非常重要，如若不然，$\overline{ab}$ 和 $\overline{a'b'}$ 不是同一个等价类，从而就不能以 $\overline{ab}$ 作为 $\bar{a}\bar{b}$ 的定义（即商集合中的定义不应依赖于等价类的表达方式）．在这一前提下，商集合关于乘法运算构成群是容易验证的，留做习题．

定理 1.17 设 $(X, \mathscr{T})$ 为拓扑空间，$\sim$ 为 X 上的一个等价关系，映射 p 定义如下

$$\begin{aligned} p:\quad X &\to X/\sim \\ x &\mapsto \bar{x} \end{aligned}$$

称为**商映射**．进一步规定 $\mathscr{T}/\sim = \{O \subset X/\sim : p^{-1}(O) \in \mathscr{T}\}$，则 $\mathscr{T}/\sim$ 是 $X/\sim$ 上的一个拓扑，称为**商拓扑**，商映射 p 是拓扑空间 X 到 $X/\sim$ 的连续映射．

拓扑空间的商空间，直观上看，是将具有等价关系的点，“粘接”到一起，形成的新拓扑空间．

例 1.35 在正方形 $[0,1] \times [0,1]$ 上定义等价关系 $\sim$：$(x,0) \sim (x,1)$，$(0,y) \sim (1,y)$，则商

拓扑空间同胚于 $\mathbf{R}^3$ 中的环面.

例 1.36 在正方形 $[0,1]\times[0,1]$ 上定义等价关系 $\sim$：$(0,y)\sim(1,1-y)$，该商拓扑空间同胚与 $\mathbf{R}^3$ 中的 Möbius 带.

例 1.37 在正方形 $[0,1]\times[0,1]$ 上定义等价关系 $\sim$：$(x,0)\sim(x,1)$，$(0,y)\sim(1,1-y)$，该商拓扑空间称为 Klein[1]瓶. Klein 瓶无法在 $\mathbf{R}^3$ 中实现（即不存在 $\mathbf{R}^3$ 的子空间与Klein 瓶同胚），但可在更高维的欧氏空间中实现.

习题 1

1. 设 G 是一个有限群（即 $|G|$ 为有限数），其上运算为乘法. 证明对任何 $g\in G$，存在正整数 k，使得 g^k 为单位元. 进一步设 k 为满足条件的最小正整数（称为 g 的阶数），证明 $k\mid |G|$.

2. 考虑置换群 S_n.

   (1) 计算 $|S_n|$.

   (2) 证明对一切正整数 $k\leqslant n$，S_n 中存在一个 k 阶的轮换.

   (3) 若 $n<k\leqslant |S_n|$，S_n 中是否一定存在一个 k 阶的置换.

3. 考虑一副含 54 张牌的扑克，将前 27 张牌依次记为 $A_1,A_2,\cdots,A_{27}$，后 27 张牌依次记为 $B_1,B_2,\cdots,B_{27}$，将这 54 张牌由 $A_1,A_2,\cdots,A_{27},B_1,B_2,\cdots,B_{27}$ 重新排序为
$$A_1,B_1,A_2,B_2,\cdots,A_{27},B_{27}$$
   称为一次完全洗牌. 证明必定可经过有限次完全洗牌，54 张扑克牌还原到初始排列次序，并求出最少需要多少次完全洗牌，可使54 张扑克牌还原到初始排列次序.

4. 证明定理 1.6.

5. 取 $X=[0,1]\subset\mathbf{R}$，X 上的拓扑取诱导拓扑，则下列集合是否为 X 上的开集或闭集？

   (1) $[0,1]$； (2) $\{0\}$； (3) $[0,\frac{1}{2})$； (4) $(0,1)$.

6. 证明定理 1.7 和推论 1.8.

7. 证明定理 1.9.

8. 证明定理 1.14.

9. 证明定理 1.16.

10. 证明由例 1.33 中等价关系得到的商群同构于 $\mathbf{Z}_2$.

[1]全名为 Felix Klein (1849-1925)，德国数学家.

第 2 章　同调群和基本群

为准确地刻画一个拓扑空间的拓扑性质，除了连通、道路连通、紧致这些基本拓扑性质外，还需要挖掘更多拓扑不变量．同调群和基本群就是其中非常有代表性的两种不变量．

2.1　道路与同伦

基本群和同调群，基本思想都来自于拓扑空间上的闭道路．为此，首先介绍道路相关的概念与定理．

定义 2.1　设 X 是一个拓扑空间，连续映射 $f:[0,1]\to X$ 是称为 X 上的一条**道路**，$f(0)$ 和 $f(1)$ 称为该道路的**起点**和**终点**．若 $f(0)=f(1)$，则该道路称为一条**闭道路**，$f(0)=f(1)$ 称为该闭道路的**基点**．

直观上看，道路作为映射，刻画了一个点从起点到终点的变化过程，其像集是一条连接起点和终点的连续曲线．需要注意的是，道路与连续曲线并不等同，同一条连续曲线可以对应不同的道路．例如 C 是一条连接点 a 与 b 的曲线，c 为该曲线中的一点，动点由 a 沿曲线 C 移动到 b，与动点由 b 沿曲线 C 移动到 a，以及动点由 a 沿曲线 C 移动到 b 后再沿曲线 C 返回到 a，就对应了三条不同的道路．即便同样是由 a 沿曲线 C 移动到 b，一个动点是在 $\dfrac{1}{4}$ 时刻到达 c，另一个动点是在 $\dfrac{1}{3}$ 时刻到达 c，得到的也是不同的道路．下面是几个具体的例子．

例 2.1　常值映射可以看作一条“退化”的闭道路，其像集是一个点．

例 2.2　若 f, g 都是拓扑空间 X 上的道路，且 $f(1)=g(0)$，则

$$(f*g)(t)=\begin{cases} f(2t), & 0\leqslant t\leqslant \dfrac{1}{2},\\ g(2t-1), & \dfrac{1}{2}<t\leqslant 1,\end{cases}$$

也是一条道路．直观上看，$f*g$ 是先沿 f 走到 $f(1)$，再沿 g 走到 $g(1)$ 的道路．若 f, g 是具有相同基点的闭道路，则 $f*g$ 是先沿 f 绕一圈，再沿 g 绕一圈形成的闭道路．需要注意的是，$f*g$ 和 $g*f$ 是不同的道路．

例 2.3　若 f, g, h 都是拓扑空间 X 上的道路，且 $f(1)=g(0)$，$g(1)=h(0)$，则 $(f*g)*h$ 和 $f*(g*h)$ 都是道路，这两条闭道路的像集相同，但通常是不同的道路．这是因为对道路

$(f*g)*h$，当自变量 $t=\dfrac{1}{2}$ 时，对应的映射值为 $g(1)$，对道路 $f*(g*h)$，当自变量 $t=\dfrac{1}{2}$ 时，对应的映射值为 $f(1)$．

例 2.4 若 f 是拓扑空间 X 上的道路，则 $g(t)=f(1-t)$ 也是一条道路．直观上看，g 是沿 f 的反向形成的道路．

上面例子中的"$*$"可以看作道路间的一种运算，但这种运算的性质并不很好，例如 $(f*g)*h$ 和 $f*(g*h)$ 不相同，说明这种运算不满足结合律．为使这种运算的性质达到群运算的要求，需要在道路之间定义一种等价关系．

定义 2.2 已知 f，g 均为由拓扑空间 X 到 Y的连续映射，若存在一个连续映射 $H:[0,1]\times X\to Y$ 使得对一切 $x\in X$ 有

$$H(0,x)=f(x),\ H(1,x)=g(x),$$

则称映射 f，g **同伦**．

两个映射 f，g 同伦，直观上看，是指 f 可以在 Y 上连续地变化到 g．易见，映射的同伦关系，是等价关系．特别，道路是拓扑空间之间的映射，其同伦关系是本章后续内容的基础．以下将道路的同伦关系简记为 $\sim$．

引理 2.1 若 f_1，f_2，g_1，g_2 都是拓扑空间 X 上的道路，且 $f_1\sim f_2$，$g_1\sim g_2$，$f_1(1)=g_1(0)$，$f_2(1)=g_2(0)$，则 $f_1*g_1\sim f_2*g_2$．

引理 2.2 若 f，g，h 都是拓扑空间 X 上的道路，且 $f(1)=g(0)$，$g(1)=h(0)$，则 $(f*g)*h\sim f*(g*h)$．

引理 2.3 若 f 是拓扑空间 X 上的道路，e_1，e_2 分别为以 $f(0)$ 和 $f(1)$ 为基点的常值道路，则 $e_1*f\sim f*e_2$．

引理 2.4 若 f 是拓扑空间 X 上的道路，$g(t)=f(1-t)$，则 $f*g$ 和 $g*f$ 分别同伦于以 $f(0)$ 和 $f(1)$ 为基点的常值道路．

对道路的同伦，有时还需要对起点和终点添加限制条件．

定义 2.3 已知 f，$g:[0,1]\to X$ 为拓扑空间 X 上的道路，且 $f(0)=g(0)=a$，$f(1)=g(1)=b$．若存在一个连续映射 $H:[0,1]\times[0,1]\to Y$ 使得对一切 $t\in[0,1]$ 有

$$H(0,t)=f(t),\ H(1,t)=g(t),$$

以及 $H(s,0)=a$，$H(s,1)=b$，则称道路 f，g 相对于起点 a 和终点 b **同伦**．

该定义的直观意义是，道路 f 可在空间 X 上连续的变化到 g，且保持起点、终点不改变．

定理 2.5 在拓扑空间 X 上所有以 a 为起点，b 为终点的道路构成的集合上，相对于起点和终点的同伦关系为等价关系．

考虑拓扑空间 X 上，以 $x_0\in X$ 为基点的闭道路全体构成的集合，以道路相对于基点的同伦作为等价关系，进而得到商集合 $\pi(X,x_0)$．由前面的引理，立即得到下面的结论．

定理 2.6 $(\pi(X,x_0),*)$ 构成群．

证明 由引理 2.1，$*$ 是 $\pi(X,x_0)$ 上的运算．引理 2.2 保证了该运算满足结合律，引理 2.3

说明常值道路是单位元，引理 2.4 说明了逆元的存在．证毕．

当 X 道路连通时，还有更好的结论．

定理 2.7 若拓扑空间 X 道路连通，则对任何 x_0，$x_1 \in X$，群 $\pi(X, x_0)$ 与 $\pi(X, x_1)$ 同构．

证明 取 f 为由 x_0 到 x_1 的道路，$f_{-1}(t) = f(1-t)$ 为反向的道路．则映射

$$\begin{aligned} f_{\#}: \quad & \pi(X, x_1) \to \pi(X, x_0) \\ & [u] \mapsto [f * u * f_{-1}] \end{aligned}$$

是群同态．事实上，对任何 $[u]$，$[v] \in \pi(X, x_1)$，

$$f * u * v * f_{-1} \sim f * u * e * v * f_{-1} \sim f * u * f_{-1} * f * v * f_{-1},$$

从而

$$f_{\#}([u * v]) = [f * u * v * f_{-1}] = [f * u * f_{-1}] * [f * v * f_{-1}] = f_{\#}([u]) * f_{\#}([v]).$$

同理

$$\begin{aligned} f_{-1\#}: \quad & \pi(X, x_0) \to \pi(X, x_1) \\ & [u] \mapsto [f_{-1} * u * f] \end{aligned}$$

也是群同态．易见 $f_{-1\#} \circ f_{\#} = id_{\pi(X,x_1)}$，$f_{\#} \circ f_{-1\#} = id_{\pi(X,x_0)}$，故 $f_{\#}$ 是群同构．得证．

2.2 基本群

本节涉及到的拓扑空间，都默认是道路连通的．

对道路连通的拓扑空间 X，根据定理 2.7，$\pi(X, x_0)$ 与基点 x_0 的选择无关（同构的群，视为等同），从而可简记为 $\pi(X)$，称为拓扑空间 X 的**基本群**．以下指出，基本群是拓扑不变量．

首先，若两个拓扑空间之间存在连续映射，则该映射诱导了基本群之间的同态．

定理 2.8 设 $f: X \to Y$ 是拓扑空间之间的连续映射，则映射

$$\begin{aligned} f_*: \quad & \pi(X, x_0) \to \pi(Y, f(x_0)) \\ & [u] \mapsto [f \circ u] \end{aligned}$$

是群同态．

证明 首先证明映射 f_* 定义的合理性．这是因为，当以 x_0 为基点的道路 $u \sim v$ 时，即存在连续映射 $H: [0,1] \times [0,1] \to X$，使得

$$H(0, t) = u(t), \ H(1, t) = v(t),$$

于是复合映射 $f \circ H: [0,1] \times [0,1] \to Y$ 连续且满足

$$f \circ H(0, t) = f \circ u(t), \ f \circ H(1, t) = f \circ v(t),$$

即以 $f(x_0)$ 为基点的道路 $f \circ u \sim f \circ v$，从而 $f_*([u])$ 不依赖代表元 u 的选择，即 f_* 定义合理．

再证明 f_* 是同态，即证明 $f_*([u * v]) = [f \circ u] * [f \circ v]$．事实上，$f_*([u * v]) = [f \circ (u * v)]$，而 $f \circ (u * v) = (f \circ u) * (f \circ v)$，故 f_* 是同态．证毕．

由此立即得到，基本群是同胚变换下的不变量．

定理 2.9 若拓扑空间 X 与 Y 同胚，则 $\pi(X)$ 与 $\pi(Y)$ 同构.

证明 设 $f: X \to Y$ 为同胚映射，g 为相应的逆映射，于是 $f \circ g = 1_Y$，$g \circ f = 1_X$，从而 $(f \circ g)_* = (1_Y)_*$，$(g \circ f)_* = (1_X)_*$．而 $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$ 和 $(1_Y)_* = id_{\pi(Y)}$ 是明显成立的，于是 $f_* \circ g_* = id_{\pi(Y)}$．同理 $g_* \circ f_* = id_{\pi(X)}$．故 F_* 是群同构．证毕.

需要注意的是，同胚只是基本群同构的充分条件而不是必要条件．事实上，当两个拓扑空间同伦时，相应的基本群就是同构的（参见 [4]）．空间同伦的定义如下.

定义 2.4 拓扑空间 X 和 Y 称为同伦的，如果存在连续映射 $f: X \to Y$ 和 $g: Y \to X$ 使得 $g \circ f \sim 1_X$，$f \circ g \sim 1_Y$.

显然，同胚的两个空间一定同伦．反之，同伦的两个空间可能不同胚.

例 2.5 $[0,1]$ 与 $\{0\}$ 同伦，而两者显然不同胚.

证明 两个空间作为集合，基数不同，故之间不可能存在双射，于是不同胚．以下证明两者同伦.

令 $f: [0,1] \to 0$ 为常值映射，$g: \{0\} \to [0,1]$ 定义为 $g(0) = 0$，显然两个映射都是连续的，且 $f \circ g = 1_{\{0\}}$．为证 $[0,1]$ 与 $\{0\}$ 同伦，只需证明 $[0,1]$ 上的恒同映射与 $g \circ f$（即常值映射）同伦．令

$$\begin{aligned} F: \quad & [0,1] \times [0,1] \to [0,1] \\ & (s,t) \mapsto st \end{aligned}$$

则显然 F 连续，且 $F(0,t) = 0$，$F(1,t) = t$．证毕.

这一例子可以推广到一般的情形.

定义 2.5 若 X 为拓扑空间，$Y \subset X$ 为子空间，$i: Y \to X$ 定义为 $i(y) = y$（称为**嵌入映射**），若存在连续映射 $f: X \to Y$，使得 $i \circ f \sim 1_X$，$f \circ i = 1_Y$（这样的 f 称为**收缩映射**），则称 Y 为 X 的**形变收缩核**．若 X 以只含有一个点的拓扑空间（简称**独点空间**）为形变收缩核，则 X 称为**可缩**的.

直观上看，Y 为 X 的形变收缩核，则 X 可在其上连续地收缩到 Y；X 为可缩的，则 X 可在其上连续地收缩到一个点.

显然，独点空间上只有常值道路，于是其基本群只有一个单位元，是平凡群．根据同伦的空间基本群同构，于是可缩空间的基本群都是平凡群，而当基本群非平凡时，空间必定不可缩.

对某些典型的拓扑空间，基本群是可以计算的．其中最有代表性的一类拓扑空间就是复形．为此，先给出单形的定义.

定义 2.6 设 a_0, a_1, $\cdots$, a_m 是 $\mathbf{R}^n$ 上几何无关[1]的点，集合

$$\sigma = \left\{ \sum_{k=0}^{m} \lambda_k a_k : \lambda_k \geqslant 0 \,,\ \sum_{k=0}^{m} \lambda_k = 1 \right\}$$

称为以 a_0, a_1, $\cdots$, a_m 为**顶点**的 m 维**单形**．以 $\{a_0, a_1, \cdots, a_m\}$ 的一个 $r+1$ 元子集（$r \leqslant m$）

[1] $m+1$ 个点几何无关是指对应的向量组 $a_1 - a_0, \cdots, a_m - a_0$ 线性无关.

为顶点的单形称为 σ 的一个 r 维**面**.

直观上看，单形就是多面体的一般维数推广. 特别，0 维单形就是点，1 维单形是线段，2 维单形是包含内部区域的三角形，3 维单形是包含内部区域的四面体.

定义 2.7 $\mathbf{R}^m$ 中有限个单形构成的集合 K，若满足以下两个条件：

(1) 若单形 $\sigma \in K$，则 σ 的所有面都属于 K；

(2) 若单形 σ_1, $\sigma_2 \in K$，则 $\sigma_1 \cap \sigma_2$ 或者为空集，或者为 σ_1, σ_2 的公共面，

则 K 称为一个**复形**，其维数规定为所含单形的最大维数. 复形 K 包含的所有单形的并集，在 $\mathbf{R}^n$ 的诱导拓扑下构成拓扑空间，称为复形 K 的**多面体**，记作 $|K|$. 若 $L \subset K$ 也构成复形，则 L 称为 K 的**子复形**，$|L|$ 称为 $|K|$ 的子多面体.

直观上看，复形是由单形"拼"出来的图形，但拼接方式有限制，只有两个完全相同的面可以接在一起，且必须以完全重合的方式拼接. 复形对应的多面体，相对通常意义下的多面体，更加广泛. 通常意义下的多面体，都是道路连通的，一条棱只能是两个面的公共边，但复形可以不是道路连通的，一个一维单形可以是多个二维单形的公共边.

在复形对应多面体中，一维可缩的多面体称为**树**. 直观上看，树必定道路连通，且不存在"闭环".

定理 2.10 若复形 K 对应的多面体 $|K|$ 道路连通，则存在包含 K 的所有顶点的一维子复形 L，使得 $|L|$ 是树，称为 $|K|$ 的**极大树**.

该定理的证明可参考 [4]. 极大树在计算多面体的基本群时有重要作用. 以下定理给出了多面体的基本群的计算方法.

定理 2.11 设 K 是复形，$|K|$ 道路连通，L 是包含 K 的所有顶点的子复形且 $|L|$ 可缩. 记 G 为由所有 $K \setminus L$ 的一维单形生成的自由群，H 为由所有 L 的一维单形和 $K \setminus L$ 中的二维单形的边界闭道路生成的自由群，则 K 的基本群同构于 G/H.

这个定理表达的直观意义有三方面内容. 首先，多面体的所有闭道路，都同伦于某一条由一维单形连接而成的闭道路，所以刻画多面体的基本群，只需要用一维单形描述就够了，即一维单形是多面体基本群的生成元. 其次，所有二维单形的边界闭道路都同伦于常值道路，因此应当视作单位元（即作为子群的生成元模掉）. 再次，可缩子复形 L 由于同伦于独点空间，因此可以把 L 看作一个点，于是 L 中的所有一维单形也都是点，从而也要视为单位元. L 包含所有顶点十分必要，这保证了 $K \setminus L$ 中的一维单形一定是自 L 中的点开始，以 L 中的点结束，由于 L 可看作一个点，因此自 L 中的点开始，以 L 中的点结束的道路可看作一条闭道路.

定义 2.8 设X是拓扑空间，如果 $\pi(X) = 0$，即 X 上任何一条闭道路都可以连续地收缩为一个点，那么就称 X 是**单连通的**.

虽然多面体只是非常特殊的一类拓扑空间，但由于同胚或同伦的拓扑空间具有相同的基本群，故对一般的拓扑空间，可以通过将其转化为与之同胚的多面体，而得到其基本群. 这种做法称为拓扑空间的三角剖分.

例 2.6 计算圆周 S^1 的基本群.

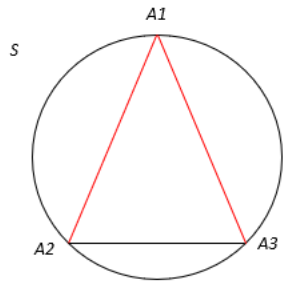

图 2.1

解 对圆周 S^1，取三个点 A_1，A_2，A_3 作三角剖分，得到如图 2.1 的复形

$$K = \{A_1A_2A_3, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1, A_1, A_2, A_3\}.$$

取树（图中红色部分）

$$L = \{A_1A_2, A_1A_3, A_1, A_2, A_3\},$$

于是 A_2A_3 为 $K \setminus L$ 中的 1 维单形，故基本群 $pi(S^1) = \langle A_2A_3 \rangle \cong \mathbf{Z}$

例 2.7 求两个相切的圆周的基本群.

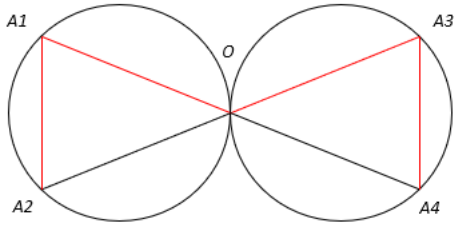

图 2.2

解 作三角剖分如图 2.2，得到复形，取树如图中红色部分，OA_2，OA_4 为剩余的全部 1 维单形，所以基本群 $G = \langle OA_2, OA_4 \rangle \cong \mathbf{Z} * \mathbf{Z}$.

例 2.8 求环面 T 的基本群.

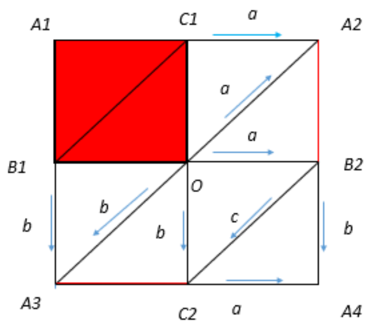

图 2.3

解 作三角剖分得到如图 2.3 的复形 K（注意，图中的$A_1 = A_2 = A_3 = A_4, B_1 = B_2, C_1 = C_2$），取树 L（红色部分）．注意，由于对粘的原因，A_3C_2 和 A_2B_2 也是树的一部分．记 $C_1A_2 = a$，$B_1A_3 = b$，$B_2C_2 = \mathbf{c}$．注意到所有的三角形的定向边界都应视为单位元，所有红色的边也应视为单位元，于是

$$a = C_1A_2 = OA_2 = OB_2 = C_2A_4,\ b = B_1A_3 = OA_3 = OC_2 = B_2A_4,$$

以及 $c = B_2C_2 = a^{-1}b = ba^{-1}$，即 $ab = ba$．从而 a 和 b 是基本群 $\pi(T)$ 的生成元，且这两个元是交换的，从而 $\pi(T) \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$．

例 2.9 计算 Klein 瓶基本群．

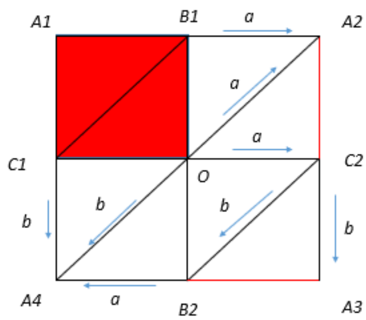

图 2.4

证明 作三角剖分如图 2.4，并取子复形（红色部分）．记 $B_1A_2 = \mathbf{a}$，$C_1A_1 = \mathbf{b}$，类似环面的计算，得到 $OB_2 = \mathbf{ab} = \mathbf{ba}^{-1}$，从而基本群 $G = \langle a, b\rangle / \langle b^{-1}aba\rangle$．

例 2.10 计算实射影空间 $\mathbf{RP}^2$ 的基本群．

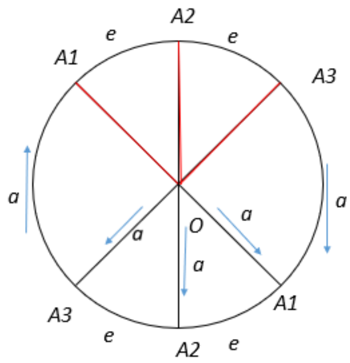

图 2.5

证明 作三角剖分如图 2.5，并取树子复形（红色部分）. 首先，A_1A_2，A_2A_3 都与另外两条红边构成三角形的边界，故应视为单位元. 记 $A_3A_1 = a$，可推得其他一维单形关系如图，所以基本群只有一个生成元 a，而左侧三角形 OA_3A_2 的边界是 a^2，从而 $\pi(\mathbf{RP}^2) = \langle a\rangle/\langle a^2\rangle \cong \mathbf{Z}_2$.

对一些复杂的拓扑空间，可以通过将其拆解为多个简单拓扑空间的并集，并分别计算各个简单空间的基本群，进而得到原空间的基本群. 其依据是下面的定理.

定理 2.12 (van Kampen[1]) 设 X_1，X_2 为 X 中的开集，$X = X_1 \cap X_2$ 非空且道路连通，则对于任意$x \in X$，有

$$\pi_1(X, x_0) = \pi_1(X_1, x_0) * \pi_1(X_2, x_0)/\langle\{(i_1)(\alpha)(i_2)(\alpha^{-1}) : \alpha \in \pi(X_0, x_0)\}\rangle,$$

其中 $i_k : X_k \to X$，$k = 1, 2$ 为包含映射.

Van Kampen 定理的直观理解是，如果一个拓扑空间可以写成两个空间的并集，则每一个空间上的闭道路当然也是全空间的闭道路，因此应作为全空间基本群的生成元，但两个空间的公共闭道路（交集空间上的闭道路）应视为等同，故需要通过等价关系模掉.

通过计算基本群的定理可以看出，多面体的基本群，与其所含的高于二维的单形情况无关. 这说明，基本群无法区分高于二维的拓扑性质. 要研究二维及以上的拓扑性质，还需要引入更多的工具，如下一节将要提到的同调群.

2.3 同调群

由于基本群只能刻画二维以下的拓扑性质，为研究高维拓扑性质，必须引入新的工具. 首先考虑复形和多面体.

定义 2.9 设 K 是一个复形，则 $C^n(K)$ 定义为由 K 的所有 n 维单形为生成元的自由 Abel 群，称为 K 的 n **维链群**.

[1]全名为 Egbert Rudolf van Kampen (1908－1942)，荷兰数学家.

注 2.1 n 维链群的一般元素具有如下形式:

$$k_1\sigma_1 + k_2\sigma_2 + \cdots + k_m\sigma_m\,,$$

这里 σ_1 , σ_2 , $\cdots$,σ_m 为 K 的 n 维单形，k_1 , k_2 ,$\cdots$, k_m 为系数．系数的取值范围可以根据不同的需要选取，取为整数是最自然的，但为了计算方便，也经常将系数范围规定数域，此时 n 维链群就成为一个线性空间，相应的生成元（即 K 的所有 n 维单形）就是该空间的一组基．

在 n 维链群中，同一个单形 σ ，会以 $\pm\sigma$ 两种形式出现．设 σ 为由顶点 a^0 , a^1 ,$\cdots$, a^n 构成的 n 维单形，若以单形的所有顶点的排列表示单形，则约定：若两种排列的奇偶性相同，则表示的单形符号相同；若两种排列的奇偶性相反，则表示的单形符号相反．

例 2.11 设 σ 的顶点为 a_0 , a_1 , a_2 ，则 $a_0a_1a_2 = -a_1a_0a_2 = a_1a_2a_0$.

在计算基本群的步骤中，利用了由复形的棱构成的闭道路作为闭道路同伦类的代表元，这样的闭道路可以看作 n 维链群中的元素，而它的闭性，需要通过边缘映射刻画．

定义 2.10 设 σ 的顶点为 a_0 , a_1 ,$\cdots$,a_n ，规定

$$\partial(a_0a_1\ \cdots a_n) = \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}(a_0a_1\cdots a_n)_k\,,$$

这里 $(a_0a_1\cdots a_n)_k$ 表示将该排列中第 k 位置上的元素除去后得到的 n 元排列．进一步，对 $k_1\sigma_1 + k_2\sigma_2 + \cdots + k_m\sigma_m \in C_n(K)$ ，规定

$$\partial(k_1\sigma_1 + k_2\sigma_2 + \cdots + k_m\sigma_m) = k_1\partial(\sigma_1) + k_2\partial(\sigma_2) + \cdots + k_m\partial(\sigma_m)\,.$$

称映射 $\partial : C_n(K) \to C_{n-1}(K)$ 为**边缘映射**．约定，对一切零维单形 a ，$\partial(a) = 0$.

例 2.12 分别计算 $\partial(a_0a_1)$ 和 $\partial(a_0a_1a_2)$.

证明 直接根据定义，得

$$\partial(a_0a_1) = a_1 - a_0\,,$$

$$\partial(a_0a_1a_2) = a_1a_2 - a_0a_2 + a_0a_1 = a_1a_2 + a_2a_0 + a_0a_1\,.$$

在上面的例子中，可以看出单形经边缘映射后，得到的恰好是该单形的边界．如将单形 (a_1a_2) 视为由 a_1 到 a_2 的道路，则 $\partial(a_0a_1a_2)$ 刚好形成一条闭道路．

对边缘映射，有下述重要定理．

定理 2.13 对一切非负整数 n ，$\partial\circ\partial : C_{n+2}(K) \to C_n(K)$ 为零映射．若记 $\partial\circ\partial = \partial^2$ ，则 $\partial^2 = 0$.

证明 只须对 $(n+2)$ 维单形 σ 证明 $\partial^2(\sigma) = 0$ 即可．不失一般性，设 $\sigma = (a_0a_1\cdots a_{n+2})$. 根据定义，$\partial^2(\sigma) = 0$ 为 $(a_0a_1\cdots a_{n+2})$ 去掉两个顶点后的排列的代数和．任取 $0 \leqslant i < j \leqslant n+2$ ，考查 $(a_0a_1\cdots a_{n+2})$ 除去 a_i 和 a_j 后的排列在 $\partial^2(\sigma)$ 中的符号，该排列在 $\partial^2(\sigma)$ 中出现两次，分别为先除去 a_i 再除去 a_j 得到的排列，和先除去 a_j 再除去 a_i 得到的排列．$(a_0a_1\cdots a_{n+2})$ 先除去 a_i ，a_i 是第 $i+1$ 位的元素，再除去 a_j ，a_j 在新的排列中是第 j 位的元素，于是该排列前的符号为 $(-1)^{i+j-1}$；$(a_0a_1\cdots a_{n+2})$ 先除去 a_j ，a_j 是第 $j+1$ 位的元素，再除去 a_i ，a_i 在新的排列中是第 $i+1$ 位的元素，于是该排列前的符号为 $(-1)^{i+j}$．两项符号刚好相反，因此代数和为零．证毕．

该定理的几何直观是，任何一个复形的边界，不再有边界．例如，正方形的边界是四条线段构成的封闭折线，该封闭折线没有边界．

定义 2.11 记 $Z_n(K)=\{\tau\in C_n(K)|\partial\tau=0\}$，称为 K 的 n **维闭链群**，其中的元素称为 K 的一个 n **维闭链**．记 $B_n(K)=\partial(C_n(K))$，称为 K 的 n **维边缘群**．

直观上，闭链就是没有边界的链．特别地，闭链可以看作闭道路的一般维数的推广．根据定理 2.13，$B_n(K)$ 是 $Z_n(K)$ 的子群，从而可以考虑商群．

定义 2.12 记 $H_n(K)=Z_n(K)/B_n(K)$，称为 K 的 n **维同调群**，其中的元素称为 K 的一个 n **维同调类**．

直观上，如果一个闭链是某个高维单形链的边缘，那么该闭链就可以沿着该单形链连续变化成一个点，这样的闭链对描述该空间的拓扑结构，没有多少价值，正如在基本群的理论中，同伦于一点的闭道路是平凡的．因此对一个空间的闭链群，只有模掉同维数的边缘群后，才能得到可以描述该空间拓扑性质的闭链类．

以下考虑同调群的计算．

定理 2.14 若复形 K 中所有单形的最高维数为 m，则对一切 $n>m$，$H_n(K)=0$．

证明 此时 $C_n(K)=0$，故 $H_n(K)=0$．证毕．

定理 2.15 $H_0(K)$ 是有限生成的自由群，其生成元个数等于 K 的道路连通分支个数．

证明 首先 $Z_0(K)=C_0(K)$．其次，若 a_0a_1 是 K 的某个一维单形，则 $a_1-a_0\in B_0(K)$，即 $a_0\sim a_1$．若顶点 a 和 b 处在 K 的同一个道路连通分支中，则 a 和 b 可通过有限条边首尾连接，于是所有经过的顶点均等价．反之，如果顶点 a 和 b 等价，则这两点是某个一维单形链的边缘，于是必定被有限条边首尾连接．证毕．

定理 2.16 $H_1(K)$ 为 $\pi(X)$ 的交换化．

该定理的证明从略．根据定义，所有阶的同调群都是交换群，而 1 维同调群刻画的就是闭道路的同调类，基本群刻画的是闭道路的同伦类，所以两个群的结构有联系是很自然的．

例 2.13 独点集 X 的同调群为

$$H_i(X)=\begin{cases}\mathbf{Z}, & i=0,\\ 0, & i>0.\end{cases}$$

类似基本群，对一般的拓扑空间，同样可以通过三角剖分，转化为与之同胚的复形，来定义它的同调群．该定义合理性的证明（即要证明对不同的剖分，得到的同调群相同）略去．

例 2.14 计算圆周 S^1 的同调群．

解 首先，S^1 是单连通的，故 $H_0(S^1)=\mathbf{Z}$．

其次，由于 S^1 的基本群 $\pi(S^1)=\mathbf{Z}$，故 $H_1(S^1)=\mathbf{Z}$．

最后，S^1 的三角剖分中不含有 2 维以上的单形，故对一切 $n\geqslant 2$，$H_2(S^1)=0$．

可以证明，同伦等价的两个拓扑空间，同调群同构，即基本群、同调群都是同伦不变量．

定理 2.17 若 X 为可缩空间，则 X 的同调群为

$$H_i(X) = \begin{cases} \mathbf{Z}, & i = 0, \\ 0, & i > 0. \end{cases}$$

证明 只须注意到可缩空间和独点空间同伦，故其同调群与独点空间的同调群相同．证毕．

将一个空间拆分成多个部分的思想，对计算同调群同样有效．为此，先介绍正和序列．

定义 2.13 设 $\cdots \xrightarrow{f_{n+1}} C_{n+1} \xrightarrow{f_n} C_n \xrightarrow{f_{n-1}} \cdots$ 为一个同态映射链，如果对一切 n ，$\operatorname{im} f_{n+1} = \ker f_n$，那么称这个序列为**正合**的．

对正合列，有两种特殊情况．

定理 2.18 (1) 若 $0 \xrightarrow{i} A \xrightarrow{j} B$ 为正合列，则映射 j 为单射．

(2) 若 $A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} 0$ 为正合列，则映射 i 为满射．

证明 (1) 由于 i 是同态，所以 $\operatorname{im} i = \{0\}$ ，再由正合性，得 $\ker j = \{0\}$ ，即 j 为单射．

(2) 由于 j 是同态，所以 $\ker j = B$ ，再由正合性，得 $\operatorname{im} i = B$ ，即 i 为满射．证毕．

定理 2.19 设拓扑空间 $X = X_1 \cup X_2$，则存在以下的正合序列（称为 **Mayer[1]-Vietoris[2] 序列**）：

$$\cdots \longrightarrow H_n(X_1 \cap X_2) \longrightarrow H_n(X_1) \oplus H_n(X_2) \longrightarrow H_n(X) \longrightarrow H_{n-1}(X_1 \cap X_2) \longrightarrow \cdots$$

例 2.15 计算球面 S^2 的同调群．

解 因为 S^2 的剖分中不包含 3 维及以上的单形，所以对一切 $n > 2$ ，$H_n(S^2) = 0$ ．

将 S^2 分为南北半球 U , V ，这两部分都是可缩的，又赤道 $S^1 = U \cap V$ ，将例 2.14 和例 2.13 的结论代入该分解对应的 Mayer-Vietoris 序列，得到

$$0 \to H_2(S^2) \to \mathbf{Z} \to 0 \to H_1(S^2) \to \mathbf{Z} \to \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \to H_0(S^2) \to 0.$$

因为球面 S^2 道路连通，所以 $H_0(S^2) = \mathbf{Z}$ ．根据定理 2.18 ，$H_2(S^2) = \mathbf{Z}$ ．

最后利用正合列计算 $H_1(S^2)$ ．记每一个映射如下图所示，

$$0 \xrightarrow{i} H_1(S^2) \xrightarrow{j} \mathbf{Z} \xrightarrow{k} \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \xrightarrow{t} \mathbf{Z} \xrightarrow{r} 0$$

由定理 2.18 得 t 为满射，故 $\ker t = \mathbf{Z} = \operatorname{im} k$ ．由此得到 k 是单射，于是 $\ker k = 0 = \operatorname{im} j$，即 j 是零映射．再根据定理 2.18 ，得 j 是单射，故 $H_1(S^2) = 0$ ．

对线性空间的正合列，有更简明的结论．

定理 2.20 设 $\cdots \xrightarrow{f_{n+1}} C_{n+1} \xrightarrow{f_n} C_n \xrightarrow{f_{n-1}} \cdots$ 为线性空间的正合列，则 $\dim C_{n+1} = \dim \operatorname{im} f_n + \dim \operatorname{im} f_{n-1}$ ．

证明 因为线性空间的维数满足 $\dim C_{n+1} = \dim \operatorname{im} f_n + \dim \ker f_n$ ，再根据正合性立得结论．证毕．

由此，当同调群的系数取为数域时，计算会更加简单．

例 2.16 若一维复形 K 的顶点数和边数分别为 v 和 l，计算 $|K|$ 的实系数同调群．

[1] 全名为 Walther Mayer (1887-1948)，奥地利数学家．

[2] 全名为 Leopold Vietoris (1891 – 2002)，奥地利数学家．

解 注意到 $|K|$ 道路连通，且所有 2 维及以上的同调群均为 0，故只须计算 $H_1(|K|)$．取开集 U 为 $|K|$ 的所有顶点的小邻域之并集，开集 V 为不包含端点的所有边的并集．此时 U 和 V 的连通分支的个数恰为 v 和 l，$U \cap V$ 的连通分支的个数为 $2l$，由此得到上述集合 0 维同调群的维数，而上述集合的每个连通分支都可缩，故其一维同调群均为 0．将上述信息代入 Mayer-Vietoris 序列，得到

$$0 \to H_1(|K|) \xrightarrow{i} \mathbf{R}^{2l} \xrightarrow{j} \mathbf{R}^{v+l} \xrightarrow{k} \mathbf{R} \to 0\,.$$

根据定理 2.20，得

$$\dim \operatorname{im} k = 1\,,\ \dim \operatorname{im} k + \dim \operatorname{im} j = v + l\,,\ \dim \operatorname{im} j + \dim \operatorname{im} i = 2l\,,\ \dim \operatorname{im} i = \dim H_1(|K|)\,,$$

从而 $H_1(|K|) = \mathbf{R}^{l-v+1}$．

本题结论的直观意义是，一个 1 维复形 K 对应的拓扑空间 $|K|$，所有不同伦于常值道路的闭道路，由 $l - v + 1$ 条简单闭道路生成．这一结论有许多应用．例如，在电路的计算中，需要 $l - v + 1$ 个独立的方程，其中 l 和 v 正是将电路看作一维复形的边数和顶点数．

根据例 2.16，还可以进一步得到下面的定理．

定理 2.21 记 $|K|$ 为 $\mathbf{R}^3$ 中的凸多面体（K 为对应的二维复形），s，l，v 分别为 K 的面数、棱数和顶点数，则 $s - l + v = 2$．

证明 一方面，由于凸多面体 $|K|$ 和球面 S^2 同胚（例 1.27），故 K 和 S^2 的各阶同调群相同，即 $H_2(|K|) = H_0(|K|) = \mathbf{R}$，$H_1(K) = 0$．

另一方面，选取开集 U 为 K 的最大 1 维子复形（称为 K 的 1 维骨架）的小邻域，V 取为所有面不包含边界的并集．此时，U 与 K 的 1 维骨架同伦，从而根据例 2.16 可得，$H_2(U) = 0$，$H_1(U) = \mathbf{R}^{l-v+1}$，$H_0(U) = \mathbf{R}$；$V$ 有 s 个连通分支，且每个连通分支可缩，故 $H_2(V) = H_1(V) = 0$，$H_0(V) = \mathbf{R}^s$；$V \cap V$ 有 s 个连通分支，且每个连通分支同胚于圆周，故 $H_2(V) = 0$，$H_1(V) = H_0(V) = \mathbf{R}^s$．代入 Mayer-Vietoris 序列，得到

$$0 \to \mathbf{R} \xrightarrow{i} \mathbf{R}^s \xrightarrow{j} \mathbf{R}^{l-v+1} \xrightarrow{k} 0 \to \mathbf{R}^s \to \mathbf{R}^{1+s} \to \mathbf{R} \to 0\,.$$

根据定理 2.20，得

$$\dim \operatorname{im} i = 1\,,\ \dim \operatorname{im} j = \dim \ker k = l - v + 1\,,\ \dim \operatorname{im} j + \dim \operatorname{im} i = s\,,$$

从而 $s - l + v = 2$．证毕．

定理 2.21 最早为 Euler 发现，严格证明最早由 Cauchy 给出，上述证明更加本质．上述的证明方法，对一般的 2 维复形同样有效，此时

$$s - l + v = \dim H_0(|K|) - \dim H_1(|K|) + \dim H_2(|K|)\,.$$

对一般的拓扑空间 X，定义

$$\chi(X) = \sum_k (-1)^k \dim H_k(X)\,,$$

称为 X 的 **Euler 示性数**．

习题 2

1. 通过计算基本群或同调群证明上衣和裤子不同胚.
2. 分别计算“田”字的基本群和同调群.
3. 计算环面、射影空间、Klein瓶的同调群.

第 3 章　曲线和曲面

在拓扑学的范畴中，研究的是同胚或同伦变换下的不变量，直线和光滑曲线没有差别、圆与多边形没有差别．这一方面说明，拓扑学挖掘的是十分本质的几何性质，另一方面说明，如果需要细致的几何性质，必须要结合其他的几何学工具．

本章中，所有加粗的斜体字母表示向量或矩阵，黑体的数字零表示零向量或零矩阵，其他未加粗的斜体字母均代表数．$\|\ \|$ 表示欧氏范数，$\cdot$ 表示欧氏内积．

3.1　刚体运动和 Lie 群

无论在几何学还是力学，都经常需要建立坐标系，而建立坐标系的方式不是唯一的，同一个点在不同坐标系下的坐标之间，满足何种关系，是重要的问题．

定义 3.1　若映射 $\mathscr{T}:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 满足对任意的 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n$，均有 $\|\mathscr{T}(\boldsymbol{x})-\mathscr{T}(\boldsymbol{y})\|=\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$，则称映射 $\mathscr{T}$ 为一个**刚体运动**．

定理 3.1　取定 $\boldsymbol{a}\in\mathbf{R}^n$，平移变换 $\mathscr{T}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}$ 是刚体运动．

证明可直接通过定义得到．

定理 3.2　$\mathbf{R}^n$ 正交变换是刚体运动．

证明　正交变换是保持范数的线性变换，所以 $\|\mathscr{T}(\boldsymbol{x})-\mathscr{T}(\boldsymbol{y})\|=\|\mathscr{T}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\|=\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$．

定理 3.3　任意两个刚体运动的复合，必定是刚体运动．

证明　根据定义，对任意的 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n$，两个刚体运动 $\mathscr{T}_1$ 和 $\mathscr{T}_2$ 的复合满足

$$\|\mathscr{T}_1\circ\mathscr{T}_2(\boldsymbol{x})-\mathscr{T}_1\circ\mathscr{T}_2(\boldsymbol{y})\|=\|\mathscr{T}_2(\boldsymbol{x})-\mathscr{T}_2(\boldsymbol{y})\|=\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|,$$

故 $\mathscr{T}_1\circ\mathscr{T}_2$ 是刚体运动．

引理 3.4　保持原点不变的刚体运动，必定是正交变换．

证明　设 $\mathscr{T}$ 是保持原点不变的刚体运动，故对任意 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n$，有

$$\|\mathscr{T}(\boldsymbol{x})\|=\|\mathscr{T}(\boldsymbol{x})-\mathscr{T}(\mathbf{0})\|=\|\boldsymbol{x}-\mathbf{0}\|=\|\boldsymbol{x}\|,$$

$$2\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=\|\boldsymbol{x}\|^2+\|\boldsymbol{y}\|^2-\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2=\|\mathscr{T}(\boldsymbol{x})\|^2+\|\mathscr{T}(\boldsymbol{y})\|^2-\|\mathscr{T}(\boldsymbol{x})-\mathscr{T}(\boldsymbol{y})\|^2=2\mathscr{T}(\boldsymbol{x})\cdot\mathscr{T}(\boldsymbol{y}),$$

即映射 $\mathscr{T}$ 保持欧氏范数和内积．只须再证明 $\mathscr{T}$ 是线性变换．为此，取 $\mathbf{R}^n$ 的标准正交基 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$，则 $\mathscr{T}(\boldsymbol{e}_1)$，$\mathscr{T}(\boldsymbol{e}_2),\cdots,\mathscr{T}(\boldsymbol{e}_n)$ 也是 $\mathbf{R}^n$ 的标准正交基．任取 $\boldsymbol{v}\in\mathbf{R}^n$，记

$a_k = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_k$，于是

$$\boldsymbol{v} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{e}_n\,,$$

又因为 $\mathscr{T}(\boldsymbol{v})\cdot\mathscr{T}(\boldsymbol{e}_k) = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_k = a_k$，故

$$\mathscr{T}(\boldsymbol{v}) = a_1\mathscr{T}(\boldsymbol{e}_1) + a_2\mathscr{T}(\boldsymbol{e}_2) + \cdots + a_n\mathscr{T}(\boldsymbol{e}_n)\,,$$

故 $\mathscr{T}$ 是线性变换．证毕．

定理 3.5 任何刚体运动必定是平移变换和正交变换的复合．

证明 对任意刚体运动 $\mathscr{T}$，考虑映射 $\mathscr{S}(\boldsymbol{x}) = \mathscr{T}(\boldsymbol{x}) - \mathscr{T}(\boldsymbol{0})$，则 $\mathscr{S}$ 是保持原点不变的刚体运动，从而是正交变换．于是 $\mathscr{T}$ 是正交变换和平移变换的复合．证毕．

定理 3.5 是对刚体变换的本质刻画．

定理 3.6 $\mathbf{R}^n$ 上的刚体运动全体，关于映射的复合运算构成群．

证明 首先，根据定义，两个刚体运动的复合是刚体运动，从而映射的复合是全体刚体运动构成的集合上的一个二元运算．映射的复合运算满足结合律．恒同变换显然是刚体运动，于是该集合存在单位元．最后根据刚体运动必定是平移和正交变换的复合，而平移和正交变换都是可逆的，且逆映射分别是平移和正交变换，故刚体运动的逆映射也是刚体运动．证毕．

$\mathbf{R}^n$ 上全体刚体运动构成的群具有连续统势基数．其中，全体平移变换构成的子群具有连续统势基数是容易证明的．

定理 3.7 $\mathbf{R}^n$ 上全体平移变换构成的子群 $\mathrm{T}(n)$ 具有连续统势基数．

证明 对任意 $\boldsymbol{a}\in\mathbf{R}^n$，记 $\mathscr{T}_{\boldsymbol{a}}:\boldsymbol{x}\mapsto\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}$，显然，$f:\boldsymbol{a}\mapsto\mathscr{T}_{\boldsymbol{a}}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathrm{T}(n)$ 的双射．

利用上述 $\mathbf{R}^n$ 与 $\mathrm{T}(n)$ 间的双射 f，可以对 $\mathrm{T}(n)$ 赋予拓扑，使得 f 成为同胚．事实上，只须规定 U 为 $\mathrm{T}(n)$ 上的开集，当且仅当 $f^{-1}(U)$ 为 $\mathbf{R}^n$ 的开集即可．由于 $\mathbf{R}^n$ 关于向量的加法构成群，且群运算关于 $\mathbf{R}^n$ 的拓扑是光滑[1]的，于是 $\mathrm{T}(n)$ 的的群运算关于 $\mathrm{T}(n)$ 的拓扑也连续．像 $\mathrm{T}(n)$ 这样，局部与 $\mathbf{R}^n$ 同胚（事实上这就是本章第 4 节将要提及的流形），且群运算[2]关于自身的拓扑是光滑的群，称为 **Lie 群**．关于 Lie 群的严格定义这里不再展开（参见文献 [8]）．

定理 3.8 $\mathbf{R}^n$ 上全体正交变换构成的群 $\mathrm{O}(n,\mathbf{R})$ 为 Lie 群．

该定理的证明要比证明 $\mathrm{T}(n)$ 为 Lie 群复杂得多．这里仅仅简要说明一下如何建立 $\mathrm{O}(n,\mathbf{R})$ 与欧氏空间的局部同胚．考虑所有 n 阶反对称实矩阵构成的线性空间（记作 $\mathrm{so}(n,\mathbf{R})$），以及映射

$$\exp:\mathrm{so}(n,\mathbf{R})\to\mathrm{O}(n,\mathbf{R})\,,$$

$$\boldsymbol{A}\mapsto\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\boldsymbol{A}^k}{k!}\,.$$

可以证明上述定义式中的矩阵幂级数是收敛的（参见文献 [2]），且行列式为 1，该映射称为**指数映射**，是局部同胚．而 $\mathrm{so}(n,\mathbf{R})$ 作为线性空间与 $\mathbf{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}$ 同构，故 $\mathrm{O}(n,\mathbf{R})$ 与 $\mathbf{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}$ 局部同

[1] 光滑是指映射自身及其各阶导数都是连续的．

[2] 与 $\mathbf{R}^n$ 的同胚映射未必需要是群同构．

胚，从而是 Lie 群，但不是交换群.

正交群和刚体运动有广泛的应用，例如摄像头捕捉某个运动的对象，如将其视为作刚体运动的几何体，该几何体在不同的时刻位置以及呈现在摄像头前的形象都有不同，要将不同的形象识别为同一几何体，就需要识别出刚体运动.

SO(3) 除了矩阵形式外，还有其他的表达形式，例如 Euler 角表示法和四元数表示法等.

3.2　曲线

考虑 3 维欧氏空间 $\mathbf{R}^3$ 中的光滑曲线 C，假定其具有连续可导的参数方程

$$\boldsymbol{P}(t) = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \qquad t \in (a, b)\,, \tag{3.1}$$

且对一切 t，$(x'(t), y'(t), z'(t))^T \neq \mathbf{0}$. 这种参数称为**正则参数**. 从物理上看，若将 $\boldsymbol{P}(t)$ 视作质点的位移，t 视为时间变量，则 $(x'(t), y'(t), z'(t))^T \neq \mathbf{0}$ 表示该质点在任意时刻的速度均不为零.

对于任意的光滑曲线，正则的参数方程存在但不唯一，显然质点可以任意的速度不停息地沿曲线前行，于是得到一个正则参数方程，而当质点以另一种速度沿同一曲线前行，就得到不同的正则参数方程. 正则参数方程，确保质点不会走“回头路”，试想质点如果走了一段后又沿原路返回，只要其速度是连续变化的，必定要经过一个停止的时刻.

本节中，默认所有的参数方程为正则的.

在所有的正则参数方程中，有一种特殊情形，质点在所有时刻的速率都为 1，这种参数当然是存在的，称为**弧长参数**，习惯上记为 s.

记 $P(s) = (x(s), y(s), z(s))^T$ 为曲线的弧长参数方程，记 $\boldsymbol{T}(s) = P'(s)$ 称为曲线的**切向量**，则 $1 = \|\boldsymbol{T}(s)\|^2 = \boldsymbol{T}(s) \cdot \boldsymbol{T}(s)$. 对该式两边关于 s 求导，得

$$0 = \boldsymbol{T}'(s) \cdot \boldsymbol{T}(s) + \boldsymbol{T}(s) \cdot \boldsymbol{T}'(s) = 2\boldsymbol{T}'(s) \cdot \boldsymbol{T}(s)\,.$$

于是向量 $\boldsymbol{T}'(s)$ 与 $\boldsymbol{T}(s)$ 正交，记

$$\kappa(s) = \|\boldsymbol{T}'(s)\|\,,$$

称为曲线的**曲率**. 当曲率 $\kappa(s) \neq 0$ 时，可令

$$\boldsymbol{T}'(s) = \kappa(s)\boldsymbol{N}(s)\,, \tag{3.2}$$

这里 $\boldsymbol{N}(s)$ 是与 $\boldsymbol{T}'(s)$ 方向相同的单位向量，称为曲线的**法向量**.

直观上，切向量就是质点速度，$\kappa(s)\boldsymbol{N}(s)$ 就是质点的加速度，由于质点是匀速率运动，因此在每个时刻只有速度的方向发生变化，从而在小范围内，可近似认为质点在作半径为 $(\kappa(s))^{-1}$（称为**曲率半径**）的圆周运动. 曲率越大，曲率半径越小，弯曲程度越高，因此曲率刻画了曲线弯曲的程度. 特别，**直线的曲率恒为零**.

进一步，考虑法向量的导数 $\boldsymbol{N}'(s)$. 同样由于 $\|\boldsymbol{N}(s)\|^2 = \boldsymbol{N}(s) \cdot \boldsymbol{N}(s) = 1$，于是 $\boldsymbol{N}(s) \cdot \boldsymbol{N}'(s) = 0$，即 $\boldsymbol{N}'(s)$ 与 $\boldsymbol{N}(s)$ 正交. 令 $\boldsymbol{B}(s) = \boldsymbol{T}(s) \times \boldsymbol{N}(s)$，称为曲线的**次法向量**，则 $\boldsymbol{N}'(s)$ 必

定落在切向量 $\boldsymbol{T}(s)$ 和次法向量 $\boldsymbol{B}(s)$ 张成的平面（称为曲线的**次切平面**）内．令

$$\tau(s) = \boldsymbol{N}'(s) \cdot \boldsymbol{B}(s)\,,$$

称为曲线的**挠率**．因为 $\boldsymbol{N}(s) \cdot \boldsymbol{T}(s) = 0$ ，所以

$$\boldsymbol{N}'(s) \cdot \boldsymbol{T}(s) + \boldsymbol{N}(s) \cdot \boldsymbol{T}'(s) = \boldsymbol{N}'(s) \cdot \boldsymbol{T}(s) + \boldsymbol{N}(s) \cdot \kappa(s)\boldsymbol{N}(s) = \boldsymbol{N}'(s) \cdot \boldsymbol{T}(s) + \kappa(s)\,,$$

即 $\boldsymbol{N}'(s) \cdot \boldsymbol{T}(s) = -\kappa(s)$ ．从而

$$\boldsymbol{N}'(s) = -\kappa(s)\boldsymbol{T}(s) + \tau(s)\boldsymbol{B}(s)\,. \tag{3.3}$$

根据式 (3.3) ，如果挠率（局部）为零，意味着法向量 $N(s)$（局部）只在 $N(s)$ 与切向量 $T(s)$ 张成的平面（称为**密切平面**）内变化，于是曲线（局部）落在密切平面内．从而，挠率刻画了曲线偏离密切平面的程度．特别，**平面曲线的挠率恒为零**．

类似上面的推导，可以证明（留作习题）

$$\boldsymbol{B}'(s) = -\tau(s)\boldsymbol{N}(s)\,. \tag{3.4}$$

由于对每个固定的 s ，向量组 $\{\boldsymbol{T}(s), \boldsymbol{N}(s), \boldsymbol{B}(s)\}$ 都构成 $\mathbf{R}^3$ 的一组标准正交基（标架），故 $(\boldsymbol{T}(s), \boldsymbol{N}(s), \boldsymbol{B}(s))$ 为曲线 C 上的一个标准正交标架场[1]，称为曲线 C 上的 **Frenet[2]标架**．考虑 Frenet 标架关于弧长参数的导数，根据式 (3.2)、(3.3) 和 (3.4)，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\boldsymbol{T}(s), \boldsymbol{N}(s), \boldsymbol{B}(s)) = (\boldsymbol{T}(s), \boldsymbol{N}(s), \boldsymbol{B}(s)) \begin{pmatrix} & -\kappa(s) & \\ \kappa(s) & & -\tau(s) \\ & \tau(s) & \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

式 (3.5) 称为 **Frenet 公式**，该公式可看作关于 $\boldsymbol{T}(s), \boldsymbol{N}(s), \boldsymbol{B}(s)$ 的变系数线性常微分方程组．

如何计算一条参数曲线的曲率和挠率，是十分重要的问题．虽然，利用弧长参数导出曲线的曲率和挠率非常方便，但绝大部分曲线的参数方程都不是弧长参数方程，而将非弧长参数转化为弧长参数，通常会导致参数方程的表达式变得十分冗长，因此需要考虑一般参数下，曲率和挠率的计算方法．

设 $\boldsymbol{P}(t)$ 为曲线 C 的正则参数方程，弧长参数 s 为中间变量，则根据复合函数求导链式法则，得

$$\boldsymbol{P}'(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = s'(t)\boldsymbol{T}(s)\,.$$

若将 $\boldsymbol{P}(t)$ 视为质点的位移，t 视为时间变量，则 $\boldsymbol{P}'(t)$ 表示质点的瞬时速度，$s'(t)$ 表示质点的瞬时速率．再次根据链式法则，得

$$\boldsymbol{P}''(t) = s''(t)\boldsymbol{T}(s) + (s'(t))^2\boldsymbol{T}'(s) = s''(t)\boldsymbol{T}(s) + (s'(t))^2\kappa(s)\boldsymbol{N}(s)\,. \tag{3.6}$$

此时 $\boldsymbol{P}''(t)$ 表示质点的瞬时加速度，由上式可看出，一般参数下的加速度构成与弧长参数不同，此时加速度分为两部分，一部分是沿切向的，体现了速率的改变，一部分是沿法向的，体现了速度方向的改变．

由于所有与弧长参数 s 有关的量不易计算，故为求曲线在 $\boldsymbol{P}(t)$ 点的曲率 $\kappa(s(t))$ ，须先消

---

[1]物理上，将定义在集合 D 上的函数称为 D 上的一个**场**．如果该函数为数量值函数，则该场就称为**数量场**或**标量场**，该函数为向量值函数，则该场就称为**向量场**．这里 $(\boldsymbol{T}(s), \boldsymbol{N}(s), \boldsymbol{B}(s))$ 是一个有序向量值函数组，且构成空间的一组基（标架），故称为标架场．

[2]全名为 Jean Frédéric Frenet (1816 – 1900)，法国数学家．

去式 (3.6) 有段含有的 $\boldsymbol{T}(s)$ 的项，为此有

$$\|\boldsymbol{P}'(t)\times\boldsymbol{P}''(t)\| = \|(s'(t))^3\kappa(s)\boldsymbol{B}(s)\| = |s'(t)|^3\kappa(s)\,. \tag{3.7}$$

再消去上式中的 $s'(t)$，注意到 $|s'(t)| = \|\boldsymbol{P}'(t)\|$，得

$$\kappa(s(t)) = \frac{\|\boldsymbol{P}'(t)\times\boldsymbol{P}''(t)\|}{\|\boldsymbol{P}'(t)\|^3}\,. \tag{3.8}$$

为计算挠率，须对 (3.6) 再次求导，得

$$\boldsymbol{P}'''(t) = (s'''(t) - (s'(t))^3\kappa^2(s))\boldsymbol{T}(s) + \left(s'(t)s''(t)\kappa(s) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}((s'(t))^2\kappa(s))\right)\boldsymbol{N}(s) + (s'(t))^3\kappa(s)\tau(s)\boldsymbol{B}(s)\,.$$

从而

$$\tau(s(t)) = \frac{\boldsymbol{P}'''(t)\cdot\boldsymbol{P}'(t)\times\boldsymbol{P}''(t)}{\|\boldsymbol{P}'(t)\times\boldsymbol{P}''(t)\|^2} = \frac{\det(\boldsymbol{P}'(t),\boldsymbol{P}''(t),\boldsymbol{P}'''(t))}{\|\boldsymbol{P}'(t)\times\boldsymbol{P}''(t)\|^2}\,. \tag{3.9}$$

曲率、挠率与速率、位置的不同在于，后者只具有物理意义，仅仅是物理量，前者兼具几何意义，是几何量．曲率和挠率都是刚体运动下不变量，而且可以进一步证明，如果两条曲线曲率和挠率完全相同，则两条曲线必定相差一个刚体运动，即曲线由曲率和挠率完全决定．这就是下面的曲线论基本定理．

定理 3.9 (曲线论基本定理) 设 $\kappa(s)$，$\tau(s)$ 为定义在 $[a,b]$ 上的连续可微函数，$\boldsymbol{P}_0$ 为 $\mathbf{R}^3$ 中一点，$(\boldsymbol{T}_0,\boldsymbol{N}_0,\boldsymbol{B}_0=\boldsymbol{T}_0\times\boldsymbol{N}_0)$ 为 $\mathbf{R}^3$ 的一组标准正交基，则存在唯一的参数曲线 $P(s)$ 和标架场 $(\boldsymbol{T}(s),\boldsymbol{N}(s),\boldsymbol{B}(s))$，使得曲线 $P(s)$ 以 $s\in[a,b]$ 为弧长参数，以 $\kappa(s)$，$\tau(s)$ 为曲率和挠率，以 $(\boldsymbol{T}(s),\boldsymbol{N}(s),\boldsymbol{B}(s)$ 为 Frenet 标架，且 $(\boldsymbol{P}(0),\boldsymbol{T}(0),\boldsymbol{N}(0),\boldsymbol{B}(0)) = (\boldsymbol{P}_0,\boldsymbol{T}_0,\boldsymbol{N}_0,\boldsymbol{B}_0)$．

该定理的证明（参见 [7]）可由线性常微分组初值问题解的存在唯一性定理（参见 [2]）直接得到．

3.3 曲面

考虑 3 维欧氏空间 $\mathbf{R}^3$ 中的光滑曲面 S，假定其具有连续可导的参数方程

$$\boldsymbol{P}(u,v) = \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases} \qquad u,v\in D\,, \tag{3.10}$$

这里 D 是单连通区域，且对任意 u，v，$\boldsymbol{P}_u\times\boldsymbol{P}_v\neq\boldsymbol{0}$，其中 $\boldsymbol{P}_u$，$\boldsymbol{P}_v$ 分别表示 $\boldsymbol{P}(u,v)$ 关于 u，v 的偏导数．记

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{P}_u\times\boldsymbol{P}_v}{\|\boldsymbol{P}_u\times\boldsymbol{P}_v\|}\,,$$

称为曲面在点 $\boldsymbol{P}(u,v)$ 的**法向量**，由向量 $\boldsymbol{P}_u$ 和 $\boldsymbol{P}_v$ 张成的平面称为曲面在该点的**切平面**．

首先考虑曲面局部的度量性质．任取曲面 $\boldsymbol{P}(u,v)$上一点以及一条经过该点的光滑曲线 $\boldsymbol{P}(t) = \boldsymbol{P}(u(t),v(t))$，于是曲线在该点的切向量为

$$\boldsymbol{P}'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{P}(u(t),v(t)) = \boldsymbol{P}_u u' + \boldsymbol{P}_v v'\,,$$

从而

$$\|\boldsymbol{P}'(t)\|^2 = \|\boldsymbol{P}_u\|^2(u')^2 + 2\boldsymbol{P}_u \cdot \boldsymbol{P}_v u'v' + \|\boldsymbol{P}_v\|^2(v')^2 .$$

若记 $E(u,v) = \|\boldsymbol{P}_u\|^2$，$F(u,v) = \boldsymbol{P}_u \cdot \boldsymbol{P}_v$，$G(u,v) = \|\boldsymbol{P}_v\|^2$（经常简记为 E，F，G），则

$$\|\boldsymbol{P}'(t)\|^2 = \begin{pmatrix} u' & v' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} .$$

于是，过曲面上任意一点的曲线，在这一点的切向量的长度，可表示为在该点的二次型，其对应的矩阵为 $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$．该矩阵依赖于坐标的选择，即对同一个曲面的不同参数表示，该矩阵的形式通常不同．借助一阶微分的形式不变性，则可得到一个不依赖于坐标选择的量．令

$$I = \mathrm{d}\boldsymbol{P} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{P} = E(\mathrm{d}u)^2 + 2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v + G(\mathrm{d}v)^2 ,$$

这是不依赖于坐标的量，称为曲面 S 的**第一基本形式**．由于曲线的长度等于切向量长度的积分，即只要第一基本形式确定，曲面上的任意一条曲线的长度就确定了，因此第一基本形式刻画了曲面 S 上的度量．

对曲面 S 上的任意两点，如果在所有连接这两个点且落在 S 上的曲线中，存在长度最短的曲线，则该曲线称为连接这两个点的**测地线**，这条测地线的长度，称为这两个点在曲线上的**距离**．对平面而言，连接两点的测地线就是线段，对一般的曲面，连接两个点的测地线则有可能不存在，存在的情况下也有可能不唯一．

第一基本形式还不能刻画曲面的所有信息．例如将平面弯折，平面上所有曲线的长度都没有发生变化，说明曲面的度量，也就是第一基本形式没有发生改变，然而该曲面在外围空间中的存在形式（数学上称为嵌入方式）变化了．因此，还需要寻求一种刻画曲面与外围空间关系的不变量．

曲面在外围空间中的弯曲可通过曲面上某些曲线的弯曲来刻画，于是考虑曲面上曲线的曲率，此时需要求参数的二阶导数，即

$$\boldsymbol{P}''(t) = \boldsymbol{P}_{uu}(u')^2 + 2\boldsymbol{P}_{uv}u'v' + \boldsymbol{P}_{vv}(v')^2 + \boldsymbol{P}_u u'' + \boldsymbol{P}_v v'' . \tag{3.11}$$

因为曲线的法向量不仅依赖于点，还依赖于曲线的具体形状，特别曲线的法向量与曲面在同一点的法向量不一致．为此，需要考虑一类特殊的曲线——曲面被过法向量的平面所截得的曲线．由于这类曲线是平面曲线，故曲线的法向量 $\boldsymbol{N}$ 必定落在该平面上（见章末习题），于是 $\boldsymbol{N} = \pm\boldsymbol{n}$（注意两者未必相同，因为曲线的法方向是向心加速度的方向，但曲面的法向可能与之相反）．根据式 (3.6) 并将式 (3.11) 代入，注意到 $\boldsymbol{P}_u \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{P}_v \cdot \boldsymbol{n} = 0$，得曲线的曲率

$$\kappa = \frac{|\boldsymbol{P}'' \cdot \boldsymbol{n}|}{\|\boldsymbol{P}'\|^2} = \frac{L(u')^2 + 2Mu'v' + N(v')^2}{E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2} , \tag{3.12}$$

其中 $L = \boldsymbol{P}_{uu} \cdot \boldsymbol{n}$，$M = \boldsymbol{P}_{uv} \cdot \boldsymbol{n}$，$N = \boldsymbol{P}_{vv} \cdot \boldsymbol{n}$．令

$$II = L(\mathrm{d}u)^2 + 2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v + N(\mathrm{d}v)^2 ,$$

该关于微分形式的二次型也是不依赖于坐标的量，称为曲面 S 的**第二基本形式**．事实上，只须注意到

$$0 = (\boldsymbol{P}_u \cdot \boldsymbol{n})_u = \boldsymbol{P}_{uu} \cdot \boldsymbol{n} + \boldsymbol{P}_u \cdot \boldsymbol{n}_u ,$$

故 $L = \boldsymbol{P}_{uu} \cdot \boldsymbol{n} = -\boldsymbol{P}_u \cdot \boldsymbol{n}_u$ ，类似可得 $M = -\boldsymbol{P}_u \cdot \boldsymbol{n}_v = -\boldsymbol{P}_v \cdot \boldsymbol{n}_u$ ，$N = -\boldsymbol{P}_v \cdot \boldsymbol{n}_v$ ，于是

$$II = -\mathrm{d}\boldsymbol{P} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{n}$$

是不依赖于坐标的.

注意到式 (3.12) 的分子和分母均为关于 u' 和 v' 的二次型，于是对任意常数 k ，

$$\frac{L(ku')^2 + 2M(ku')(kv') + N(kv')^2}{E(ku')^2 + 2F(ku')(kv') + G(kv')^2} = \frac{L(u')^2 + 2Mu'v' + N(v')^2}{E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2},$$

从而 κ 的取值只依赖于 (u', v') 的方向，故由式 (3.12) 得到的 κ 称为沿方向 (u', v') 的**法曲率**.

由于法曲率只依赖于方向，故要考虑法曲率的取值范围，可假设式 (3.12) 的分母为 1 ，这样的方向构成一个有界闭集，于是曲面上任意一点的法曲率存在最大值和最小值（称为该点的**主曲率**），主曲率的乘积称为曲面在该点的 **Gauss 曲率**. 通过线性代数的知识，可以证明下面的结论.

定理 3.10 主曲率为方程 $\begin{vmatrix} \lambda E - L & \lambda F - M \\ \lambda F - M & \lambda G - N \end{vmatrix} = 0$ 的解，Gauss 曲率 $K = \dfrac{LN - M^2}{EG - F^2}$.

例 3.1 平面的 Gauss 曲率恒为 0 .

例 3.2 半径为 R 的球面，Gauss 曲率恒为 $\dfrac{1}{R^2}$.

无论定义，还是上述定理，都显示 Gauss 曲率同时依赖于第一、二基本形式，然而 Gauss 证明了一个惊人的结论，**Gauss 曲率由第一基本形式完全确定**，该结论被称为**绝妙的定理**. 以绝妙作为定理的命名，即便不能后无来者，但肯定是前无古人了. 这也正是后世将这种曲率以 Gauss 命名的原因.

Gauss 绝妙定理的直接推论是，曲面 S_1 如果可以等距地形变为曲面 S_2（即要求曲面 S_1 上任何两点的距离，与经变换后对应点在 S_2 上的距离相同），则这两个曲面必定有相同的 Gauss 曲率[1]. 这个结论的特例是，平面和球面不存在等距形变.

一个很自然的问题是，曲面的第一、二基本形式，是否能像曲线的曲率、挠率那样，完全决定曲面？结论是否定的. 原因在于，曲面的第一、二基本形式并不相互独立，即若 E , F , G 和 L, M, N 是某个曲面第一、二基本形式中的函数，则它们之间存在关联（它们满足一对微分方程，称为 **Gauss-Codazzi 方程**）. 关于这一问题，本节不再展开，有兴趣的读者可以参考 [6] .

3.4 流形和 Riemann 几何

上一节研究曲面的出发点是，假定曲面在 3 维欧氏空间中，这一假定并不是十分自然. 人类认识几何学是从测地[2]开始的，而在人类最初研究测地的时期，人类并不知道自己生活

[1]此时这两个曲面当然具有相同的第一基本形式，但第一基本形式的表达方式严重依赖于坐标的选取，因此很难判断两个形式是否相同，而 Gauss 曲率是个函数，虽然表达式仍然依赖于坐标的选取，但判断两者是否相同要比判断第一基本形式是否相同的更具可行性.

[2]几何学在古希腊语的本意就是测地的技术，geometry 是古希腊语的音译，“几何”又是明代科学家徐光启给出的汉语音译.

在球面上，但这并不影响人类对测地的研究．事实上，在西方人认识到人类生活在球面上的时候，人类测地的水准已经非常高，那个年代的地图就是最好的证据．几何学家受地图思想的启发，得到了流形的概念．

流形概念的严格叙述涉及到较多的数学概念（参见文献 [1]），这里尝试给出流形的通俗解释．为此，先考虑地图的本质特点．首先，地图画出的是地球表面局部的平面拓扑图（例如中国地图，画出的是中国的邻域内的拓扑图，这是地球的一个局部，而上海地图画出的只有上海的邻域，更加局部），用数学概念说，即画地图的人将地球表面的某个局部同胚地对应到一个平面上．其次，不同局部的地图之间可能有公共部分，公共部分在不同的地图上的形象可能有差别，但拓扑上必须是同胚的，整个地球表面的拓扑信息，可以通过若干块局部地图，“拼接”得到，这些局部地图构成了地球表面的地图册．

几何学家将这一做法推广到一般的拓扑空间上．假如一个拓扑空间 M[1]存在某个开覆盖 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$，其中每一个开集 U_α 都与 $\mathbf{R}^n$ 同胚，其同胚映射为 $\varphi_\alpha:\mathbf{R}^n\to U_\alpha$（即每个局部可以“画”成一个 n 维欧氏空间图），而若 $U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$，$\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}$ 是 $U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$ 到其自身的同胚（即不同地图的公共部分相互之间同胚），则 M 称为一个 n 维**流形**，$\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ 称为流形 M 的一个**地图册**[2]．

通常，地图册中只包含一幅地图的流形是平凡的，此时该流形必定与欧氏空间同胚（注意，单一的世界地图不是地球表面作为流形的地图册，这是因为单一的世界地图和地球表面不是同胚的，例如中国出版的世界地图，就将大西洋割成了左右两块）．例如球面的地图册至少需要 2 幅地图，环面的地图册中至少需要 4 幅地图．同一个流形，地图册的构造方式也不是唯一的，例如仅仅中国出版的世界地图册，就有很多不同的版本．

地图上并没有包含度量信息．关于这一点，很多读者会有异议，通常的地图上都标有比例尺，计算两点之间的距离，是可以通过刻度尺测量得到的．但这一做法并不精确，原因是地图并不与球面等距同胚，且根据 Gauss 绝妙定理，球面的局部不可能等距同胚于欧氏平面．因此，利用刻度尺测量地图上两点之间的距离，再乘以比例尺得到的结果，只适用于小范围的近似估计．流形上的度量信息，必须额外给出，其方式就是推广的第一基本形式

$$g=\sum_{i,j=1}^{n}g_{ij}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j\,, \tag{3.13}$$

该形式称为流形 M 上的 **Riemann 度量**，这里 $\boldsymbol{x}=(x^1,x^2,\cdots,x^n)$ 是流形上的局部坐标（因 $p=\varphi_\alpha(\boldsymbol{x})\in M$，于是 p 的局部邻域 U_α 中的点可以用坐标 $\boldsymbol{x}$ 表示），$(g_{ij}(\boldsymbol{x}))$ 是关于 $\boldsymbol{x}$ 的光滑矩阵值函数，且对每一个 $\boldsymbol{x}$，$(g_{ij}(\boldsymbol{x}))$ 作为矩阵是对称正定的[3]．赋予 Riemann 度量后的流形，称为 **Riemann 流形**．

类似 3 维曲面的结论，从 Riemann 度量就能够初步判定该流形是平坦的还是弯曲的，例如球面必定是弯曲的．之所以说“初步”，是因为仅从 Riemann 度量还不足以完全判定流形

[1]该拓扑空间需要满足 T_2-分离公理和第二可数公理，这是为了保证该拓扑空间的开集，既不要太少，也不要太多．

[2]流形的英文名称为 manifold，字面上的意思就是由地图册刻画的对象．

[3]对不同地图的交集部分，g 在不同坐标系下的形式还必须是一致的，数学上称之为满足相容性条件．

的弯曲性，例如圆柱面的 Riemann 度量和欧氏平面完全相同，但前者是弯曲的，后者是平坦的．借助 Riemann 度量可以得到的流形性质称为内蕴性质．通俗的说，生活在某个 Riemann 流形上的智慧生物，无须了解外面的世界，就可以得到的流形性质就是内蕴性质，正如人类在还不清楚自己生活在球面上的时候，就已经可以在大范围航海了，因为航海所需要的几何知识，基本都是内蕴的．

一个很自然的问题是，一个 n 维 Riemann 流形 M，是否具有一种参数表示，即是否存在一个参数方程（称为 M 在 $\mathbf{R}^m$ 中的**等距嵌入**）

$$P(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^m\,, \tag{3.14}$$

使其 Riemann 度量恰好是该参数方程对应的第一基本形式？通俗地说，Riemann 流形 M 是否可以 $\mathbf{R}^m$ 作为其外围空间？这一问题的第一个肯定的结论属于著名数学家 John Nash[1]．至于对不同的流形，其等距嵌入欧氏空间的维数最小是多少，是一个非常困难的问题，至今仍在研究中．换言之，即便一个 Riemann 流形是 2 维的，也未必能整体存在于 3 维欧氏空间中．

围绕 Riemann 流形产生的学科称为 Riemann 几何学，在物理学中有重要的应用．著名物理学家 Einstein 在构造时空模型时，将 4 维时空看作一个广义[2]的 Riemann 流形，最终得到了相对论．在优化问题中，数学家亦通过 Riemann 流形，将需要优化的问题，转化为 Riemann 流形上的测地线问题．

习题 3

1. 证明式 (3.4)．
2. 证明：对平面曲线，其每一点的法向量都属于同一个平面．
3. 举一个 Gauss 曲率在一点小于零的例子．
4. 举一个 Gauss 曲率恒为零，但不是平面的例子．
5. 构造球面和环面的地图册．

[1]约翰・纳什，全名 John Forbes Nash, Jr.，美国数学家，曾获 Nobel 经济学奖和 Abel 奖（数学界的最高荣誉之一），其传奇经历曾被拍成电影《美丽心灵》，2015 年在领取 Abel 奖返回美国，机场回家的路上遭遇车祸，与其夫人同时罹难．

[2]在时空模型中，对应的度量不是正定的，而是负惯性指数为 1 的．

参考文献

[1] 陈省身，陈维桓．微分几何讲义 [M]．北京：北京大学出版社，1983．

[2] 丁同仁，李承治．常微分方程教程（第二版） [M]．北京：高等教育出版社，2004．

[3] B. L.，范德瓦尔登．代数学 I [M]．丁石孙，曾肯成，郝钠新，译．北京：科学出版社，2009．

[4] 林金坤．拓扑学基础 [M]．北京：科学出版社，1998．

[5] 孟道骥．高等代数与解析几何 [M]．北京：科学出版社，1998．

[6] 孟道骥，梁科．微分几何 [M]．北京：科学出版社，1999．

[7] 苏步青，胡和生等．微分几何 [M]．北京：高等教育出版社，2016．

[8] 项武义，侯自新，孟道骥 [M]．李群讲义．北京：北京大学出版社，1992．

[9] 周羚君、韩静、狄艳媚．复变函数与积分变换 [M]，第二版．上海：同济大学出版社，2020．

[10] 周羚君、吴群、殷俊锋．矩阵分析 [M]，第二版．上海：同济大学出版社，2023．

[11] 周性伟．实变函数 [M]．北京：科学出版社，1998．