拓扑知识点　　215769-吕博文

(1) 曲线的曲率与挠率:

①弧长参数方程: $K(s)=\|P''(s)\|$

$$\tau(s)=\|P'''(s)\cdot(P'(s)\times P''(s))\|=\det(P'(s),P''(s),P'''(s))$$

②时间参数方程下, $K(s(t))=\dfrac{\|\vec{P'(t)}\times\vec{P''(t)}\|}{\|P'(t)\|^3}$; $\tau(s(t))=\dfrac{\det(P'(t),P''(t),P'''(t))}{\|\vec{P'(t)}\times\vec{P''(t)}\|^2}$

(2) 曲面的第一基本形式: $I=E(du)^2+2Fdudv+G\cdot(dv)^2 := (du,dv)\begin{pmatrix}E&F\\F&G\end{pmatrix}\begin{pmatrix}du\\dv\end{pmatrix}$

$P(u,v)=\begin{pmatrix}x(u,v)\\y(u,v)\\z(u,v)\end{pmatrix}$　$E=\|P_u\|^2$, $F=\|P_u\cdot P_v\|$, $G=\|P_v\|^2$

刻画了曲面上的度量信息

曲率是曲线的单位切矢对弧长的转动率,表示曲线弯曲程度,
挠率绝对值是副法线方向对弧长的转动率,表示曲线扭曲。

第二基本形式: $II=L(u')^2+2Mu'v'+N(v')^2$,

$L=P_{uu}\cdot\vec{n}$

$M=P_{uv}\cdot\vec{n}$

$N=P_{vv}\cdot\vec{n}$

曲面在点(u,v)处法向量 $\vec{n}=\dfrac{\vec{P_u}\times\vec{P_v}}{\|\vec{P_u}\times\vec{P_v}\|}$;

曲面上曲线的曲率 $=k=\dfrac{L(u')^2+2Mu'v'+N(v')^2}{E(u')^2+2Fu'v'+G(v')^2}$.

Gauss 曲率 $K=\dfrac{LN-M^2}{EG-F^2}$, Gauss 曲率由第一基本形唯一确定.

(3) 半球面 Gauss 曲率 >0, 半柱面 Gauss 曲率 $=0$ (平面), 马鞍面的 Gauss 曲率 <0

(4) 基数是指集合论中用于刻画集合大小的一个量,特别地,有限集的基数等于元素个数,无限集中的基数有可列基数 a (Z, N, Q), 与连续统势 c ($2^Q, R$, 及 C)

(5) 群是由集合与定义在该集合上的运算共同构成的代数结构,且满足①结合律 ②存在左逆元, ③存在左单位元,特别地如果仍满足交换律,我们称之为交换群.

有限集群: 平凡群 Z_1, Z_2(模2加法群)

无限群: 整数加群 $\langle Z,+\rangle$

交换群, 整数加群 $\langle Z,+\rangle$

非交换群: 置换群 $GL(n,R)$ [n阶可逆实数矩阵的全体关于矩阵的乘法]

<6> 对于群 G_1, G_2, 如果存在双射 σ, 使 $\forall g,h\in G_1$, $\sigma(gh)=\sigma(g)\sigma(h)$, 称 σ 为 G_1 与 G_2 的同构

例, $\langle Z,+\rangle$ 与 $\{a^n\}$(单元素 a 自由生成的群)同构

<7> X, Y 为拓扑空间,若存在双射 $f: X\to Y$, 且连续, 称 X 与 Y 同胚.

8> 拓扑性质是指拓扑空间在同胚变换下保持不变的性质,有(紧性,连通性,道路连通性,基本群,同调群)

例①$(0,1)$ 与 $[0,1]$ 不同胚是因为紧性不同,后者是 R^n 上的紧集、

②圆盘与圆环不同胚因为它们基本群不同,前者基本群为0,后者同构于整数加群.

<9> 闭道路是指一个定义在 $[0,1]\to X$ 上的连续映射 f 满足 $f(0)=f(1)$，直观上来看，该闭道映射对应了一条 X 拓扑空间中的闭环连续曲线

基本群是指以拓扑空间中的一点为基点的闭道路的集合再商去以该基点形成的同伦等价关系构成的商群，直观上表示拓扑空间中本质不同的闭道路个数.

闭链是指某个高维单形链的边缘，特别地，闭道路是一维单形链的边缘.

同调群 $H_n(K)=Z_n(K)/B_n(K)$，n维闭链群商去n维边缘群，用来刻画高维拓扑性质

<10> 基本群：圆周(S^1)：Z，简单图(自由分群)，环面(自由交换群)：$Z\oplus Z$

Klein瓶：$\langle a,b\rangle/\langle ab=ba^{-1}\rangle$，射影平面$(RP^2)$：$Z_2$

同调群：圆周：$H_n(S^1)=\begin{cases} Z, & n=0 \\ Z, & n=1 \\ 0, & n>1 \end{cases}$　环面：$H_n(X)=\begin{cases} Z, & n=0 \\ Z\oplus Z, & n=1 \\ Z, & n=2 \\ 0, & n>2 \end{cases}$

球面：$H_n(S^2)=\begin{cases} Z, & n=0,2 \\ 0, & 其它 \end{cases}$　Klein瓶：$H_n(X)=\begin{cases} Z, & n=0 \\ Z\oplus Z_2, & n=1 \end{cases}$

~~RP^2: $H_n(X)=$~~ 同调群都是可交换的.

<11> 正合列：$X=X_1\cup X_2$

$$0\xrightarrow{i} H_n(X_1\cap X_2)\xrightarrow{j} H_n(X_1)\oplus H_n(X_2)\to H_n(X)\to H_{n-1}(X_1\cap X_2)\to\cdots\to 0$$

$\boxed{\mathrm{im}\, i=\ker j}$

<12> 曲面等距变换中，高斯曲率不变，

<13> 局部与 R^n 同胚且群运算关于自身拓扑光滑的群，称为 Lie 群

例：$SO(n,R)$ (反对称矩阵) 构成 Lie 群，$A\mapsto e^A$，$e^A\in SO(n,R)$

$e^A\cdot e^{A^T}=E \Leftrightarrow A^T=-A \Leftrightarrow$ 维数为 $\frac{n(n-1)}{2}$

<14> van Kampen 定理：$X=X_1\cup X_2$，X_1, X_2 为 X 中开集

$\pi(X)=\pi(X_1)\times\pi(X_2)/\langle\sim\rangle$　～关系表示公共空间闭道路