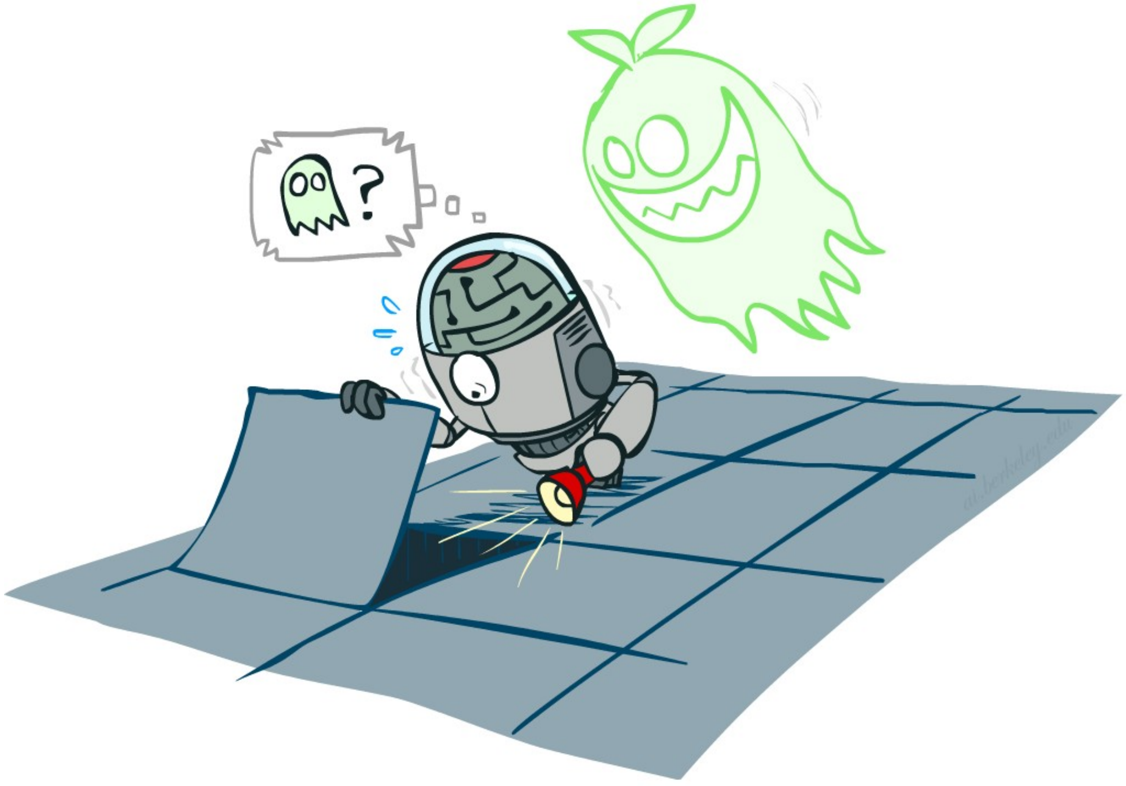
不确定性知识的表示与推理

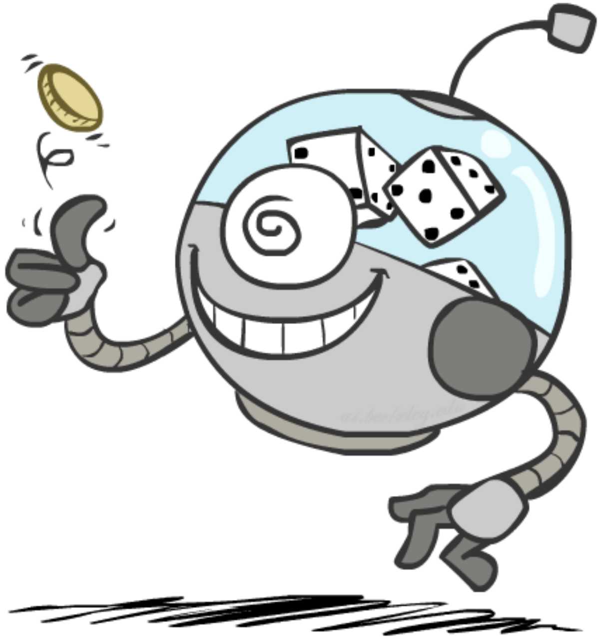
第十三章 不确定性的量化



Materials are available at http://ai.berkeley.edu.

提纲

- 第十三章 不确定性的量化
  - 不确定性的概述
  - 基本概率符号，使用完全联合分布进行推理
  - 贝叶斯规则及其应用
  - 独立性与条件独立性



不确定性

一个不确定性的例子：自动驾驶出租车智能体

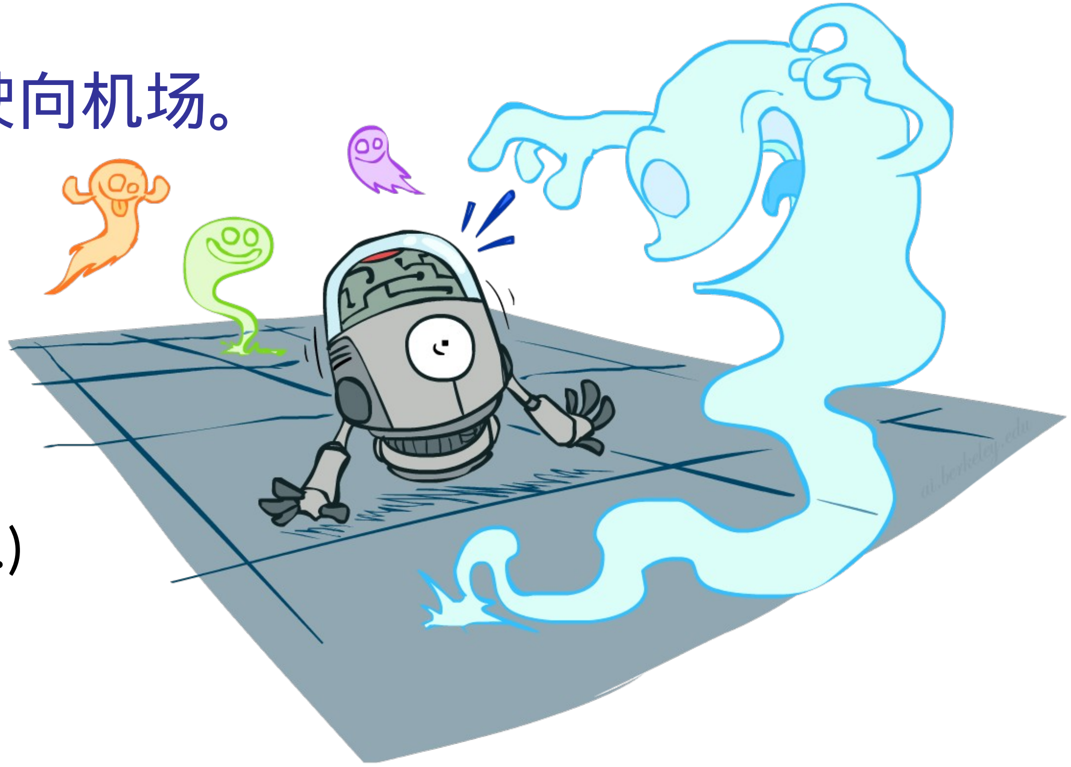
目标：将乘客按时送到机场

规划：A_t = 提前 t 分钟出发，并以合理的速度驶向机场。

问题：A_t 规划能使乘客准时到达机场吗？

环境：

1. 部分可观测的（路况，其它驾驶员规划，etc.）
2. 不确定性（车辆爆胎，引擎失灵，etc.）



不确定性

一个逻辑智能体可能给出的结论：

1. 有风险的断言：“ 规划 A_{90} 将使我们及时到达机场”

2. 得出如下的弱一些的结论：

3. “ 规划 A_{90} 将使我们及时到达机场，只要车不抛锚，汽油不耗尽，不遇到任何交通事故，桥上也没有交通事故，飞机不会提前起飞，……”

试图使用命题逻辑描述不确定性会失败的原因： 无法列举出前提和结论的完整集合

处理不确定性的方法

- 不确定环境下，智能体的知识提供相关语句的信念度 (degree of belief)，处理信念度的主要工具是概率理论 (probability theory)

- 概率提供了一种方法以概括现实中的不确定性

  - 没有关于世界的断言，概率将命题与智能体自身的知识状态联系起来：

    规划 A_{25} 将使我们及时到达机场的概率（可能性）$P(A_{25}) = 0.04$

    $P(A_{25}$ | no reported accidents$) = 0.06$

    $P(A_{25}$ | no reported accidents, 5 a.m.$) = 0.15$

命题的概率随新证据而变化

不确定性与理性决策

- 再次考虑去机场的规划 A_t

  P(A_{25} gets me there on time | …) = 0.04

  P(A_{90} gets me there on time | …) = 0.70

  P(A_{120} gets me there on time | …) = 0.95

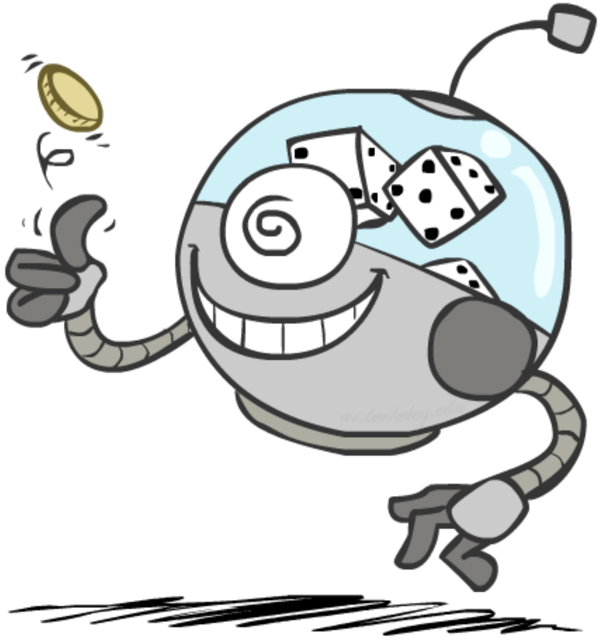
  P(A_{1440} gets me there on time | …) = 0.9999

  我们该如何做选择？

- 效用理论 (Utility theory) 对偏好进行表示和推理，每个状态具有“效用”度量值
  - 偏好：及时到达机场、避免在机场长时间等待、避免路上超速罚单等
- 决策理论 = 概率理论 + 效用理论
  - 基本思想：一个智能体是理性的，当且仅当它选择能产生最高期望效用的行动

提纲

- 第十三章 不确定性的量化
  - 不确定性的概述
  - 基本概率符号，使用完全联合分布进行推理
  - 贝叶斯规则及其应用
  - 独立性与条件独立性



基本概率符号

- 概率理论
  - 随机变量
  - 无条件概率（先验概率）、条件概率（后验概率）
  - 完全联合概率分布
  - 乘法法则、链式法则
  - 使用完全联合分布进行枚举推理
    - 归一化方法

概率逻辑

- 基本要素：随机变量， 表示可能世界中的不确定性，可能世界是由对随机变量的赋值进行定义
- 布尔随机变量

  e.g., R: Is it raining?   定义域： <*true* ， *false*>
- 离散随机变量

  e.g., *Weather* is one of <*sunny, rainy, cloudy, snow*>
- 基本命题通过单个随机变量的赋值进行构造 ：
  - *Weather = sunny* (abbreviated as *sunny*)
- 复合命题由基本命题的逻辑连接构造
  - e.g., $Weather = sunny \vee R = false$

随机变量以大写字母开头，变量的值用小写

概率逻辑

考虑随机变量 *Weather* ，其定义域为 <*sunny, rainy, cloudy, snow*>

P 定义了随机变量 *Weather* 的一个概率分布

P(*Weather*)

Weather	*P*
sunny	0.6
rainy	0.1
cloudy	0.2
snow	0.1

每个可能取值的概率，可以写成：

$P(Weather = sunny) = 0.6$

$P(Weather = rainy) = 0.1$

$P(Weather = cloudy) = 0.2$

$P(Weather = snow) = 0.1$

也可以简写为：

$\mathbf{P}(Weather) = \langle 0.6, 0.1, 0.2, 0.1 \rangle$

(normalized, i.e., sums to 1)

先验概率与联合概率分布

- 先验概率 或 无条件概率
  e.g., $P(Cavity = \text{true}) = 0.164$ ； $P(Weather = \text{sunny}) = 0.72$

- 联合概率分布：多个变量取值的所有组合的概率
  P(*Weather*, *Cavity*) 是一个 4*2 的概率表：

	Weather = sunny	rainy	cloudy	snow
Cavity = true	0.144	0.02	0.016	0.02
Cavity = false	0.576	0.08	0.064	0.08

  - e.g., $P(sunny, cavity)$ 也可以记作 $P(sunny \wedge cavity)$

- 完全联合概率分布：可能世界中所有随机变量的联合分布
  - e.g., **P**(*Toothache*, *Weather*, *Cavity*)
  - <u>一个完全联合分布基本满足计算任何命题的概率的需求</u>

条件概率

- 条件概率 或 后验概率
  - e.g., $P(A_{100}$ on time | no reported accidents$) = 0.90$
- 额外条件很重要，观察新的证据，更新信念度
  - $P(A_{100}$ on time | no accidents, 5 a.m.$) = 0.95$
  - $P(A_{100}$ on time | no accidents, 5 a.m., raining$) = 0.80$
- 条件概率是由无条件概率定义的：

$$P(a|b) = \frac{P(a,b)}{P(b)}$$

要求： $P(b)>0$

乘法法则和链式法则

- 乘法法则：

$$P(a, b) = P(a \mid b)\, P(b) = P(b \mid a)\, P(a)$$

  - e.g., $\mathbf{P}(Weather, Cavity) = \mathbf{P}(Weather \mid Cavity)\, \mathbf{P}(Cavity)$

- 考虑有 n 个变量的联合分布：

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X_1, \ldots, X_n) &= \mathbf{P}(X_1,\ldots,X_{n-1})\, \mathbf{P}(X_n \mid X_1,\ldots,X_{n-1}) && \text{（乘法法则）} \\
&= \mathbf{P}(X_1,\ldots,X_{n-2})\, \mathbf{P}(X_{n-1} \mid X_1,\ldots,X_{n-2})\, \mathbf{P}(X_n \mid X_1,\ldots,X_{n-1}) && \text{（乘法法则）} \\
&= \ldots && \ldots \\
&= \prod_{i=1\sim n} \mathbf{P}(X_i \mid X_1, \ldots, X_{i-1}) && \text{（乘法法则）}
\end{aligned}$$

- 链式法则： $\mathbf{P}(X_1, \ldots, X_n) = \prod_{i=1\sim n} \mathbf{P}(X_i \mid X_1, \ldots, X_{i-1})$

概率推理

- 使用完全联合概率分布作为“知识库”，从中可以导出所有问题的答案。
- 概率推理：根据已观察到的证据，计算查询命题的先验概率和后验概率 。
- 一个简单的例子：诊断牙病患者的牙痛
  - 问题域：由三个布尔变量 *Toothache* ，*Cavity* 和 *Catch* 组成，*Catch* 表示探针不洁而导致的牙龈感染
  - 给定

	$toothache$		$\neg toothache$	
	$catch$	$\neg catch$	$catch$	$\neg catch$
$cavity$	0.108	0.012	0.072	0.008
$\neg cavity$	0.016	0.064	0.144	0.576

Figure 13.3 A full joint distribution for the *Toothache*, *Cavity*, *Catch* world.

枚举推理

- 给定完全联合分布：

	toothache		¬*toothache*	
	catch	¬*catch*	*catch*	¬*catch*
cavity	0.108	0.012	0.072	0.008
¬*cavity*	0.016	0.064	0.144	0.576

Figure 13.3 A full joint distribution for the *Toothache*, *Cavity*, *Catch* world.

- 对于任意命题 φ，其概率是使得该命题成立的可能世界的概率之和： $P(\varphi) = \Sigma_{\omega:\omega \models \varphi} P(\omega)$

- 一种计算任何命题概率的方法：
  - 识别命题为真的可能世界，然后把它们的概率加起来
  - 例如： $P(cavity \vee toothache) = 0.108 + 0.012 + 0.072 + 0.008 + 0.016 + 0.064 = 0.28$

枚举推理

- 给定完全联合分布：

	toothache		*¬toothache*	
	catch	*¬catch*	*catch*	*¬catch*
cavity	0.108	0.012	0.072	0.008
¬cavity	0.016	0.064	0.144	0.576

Figure 13.3 A full joint distribution for the *Toothache*, *Cavity*, *Catch* world.

- 一个特别常见的任务：提取某个变量的概率分布（无条件概率 / 边缘概率）

- 边缘化规则，或者称为求和消元： **P**(Y) = Σ_z **P**(Y, z)
  - P(*toothache*) = 0.108 + 0.012 + 0.016 + 0.064 = 0.2

枚举推理

- 给定完全联合分布：

	toothache		*¬toothache*	
	catch	*¬catch*	*catch*	*¬catch*
cavity	0.108	0.012	0.072	0.008
¬cavity	0.016	0.064	0.144	0.576

Figure 13.3 A full joint distribution for the *Toothache*, *Cavity*, *Catch* world.

- 条件概率是由无条件概率定义的，可以计算条件概率：

$$P(\neg cavity \mid toothache) = \frac{P(\neg cavity \wedge toothache)}{P(toothache)}$$

$$= \frac{0.016+0.064}{0.108 + 0.012 + 0.016 + 0.064}$$

$$= 0.4$$

P(*cavity* | *toothache*)

$$= \frac{P(cavity \wedge toothache)}{P(toothache)}$$

$$= \frac{0.108 + 0.012}{0.108 + 0.012 + 0.016 + 0.064}$$

$$= 0.6$$

这两个计算出来的值相加等于 1 。分母是不变的，是常数。

归一化推理

归一化方法

基本思想：计算查询变量的概率分布，可以固定证据变量（evidence variables），然后在隐变量（hidden variables）上求和并归一化

假设查询变量为 X; 证据变量集合为 E ，e 表示其观察值；其余未观测变量为隐藏变量 Y。

计算查询变量：

$$\mathbf{P}(X \mid e) = \alpha\, \mathbf{P}(X, e) = \alpha \sum_y \mathbf{P}(X, e, y)$$

其中， α 是归一化常数。

归一化推理

- 例如： **P**(*Cavity* | *toothache*)

  = α **P**(*Cavity, toothache*)

  = α [**P**(*Cavity, toothache, catch*) + **P**(*Cavity, toothache,*¬ *catch*)]

  = α [<0.108,0.016> + <0.012,0.064>]

  = α <0.12,0.08>

  = <0.6,0.4>

查询变量 *Cavity*;

证据变量 *Toothache* ，取值为 *true* ；

隐藏变量 *Catch*

归一化方法：

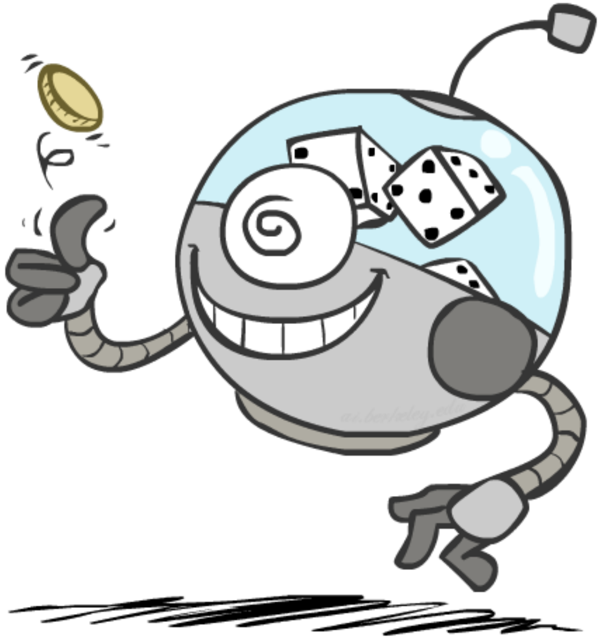
$\mathbf{P}(\boldsymbol{X} \mid \boldsymbol{e}) = \alpha\, \mathbf{P}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{e}) = \alpha\, \Sigma_y \mathbf{P}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{y})$

问题：规模扩展性不好

对于一个由 n 个布尔变量所描述的问题域，最坏情况下的时间复杂性 $O(2^n)$ ，空间复杂性 $O(2^n)$

提纲

- 第十三章 不确定性的量化
  - 不确定性的概述
  - 基本概率符号，使用完全联合分布进行推理
  - 贝叶斯规则及其应用
  - 独立性与条件独立性



贝叶斯规则

- 根据乘法法则，联合分布可以表示为：

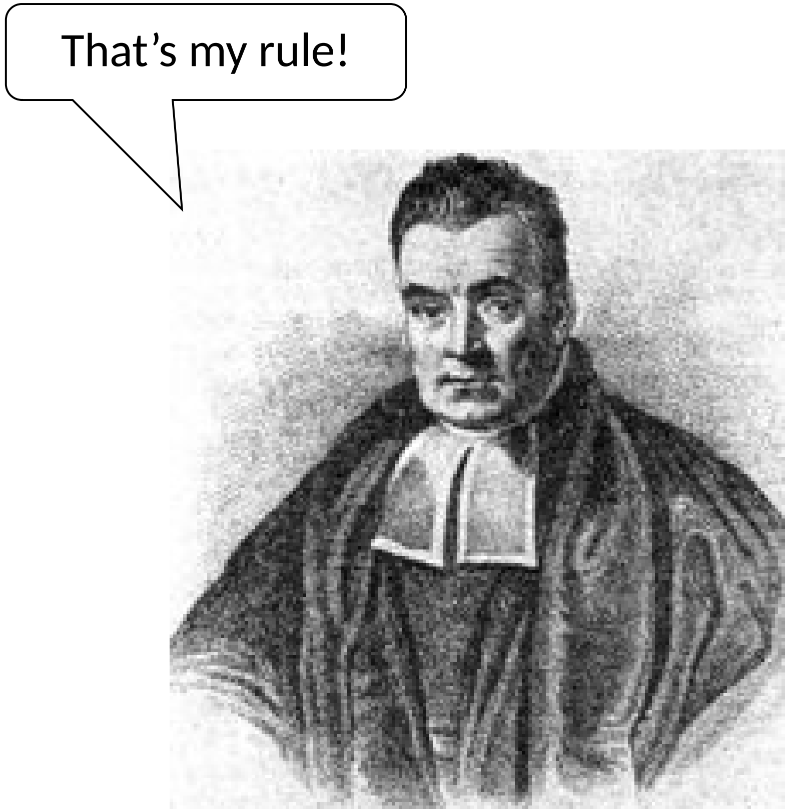
$$P(a,b) = P(b|a)P(a) = P(a|b)P(b)$$

- 同时除以 P(*a*)，得到贝叶斯规则：

$$P(b|a) = \frac{P(a|b)P(b)}{P(a)}$$

- 是大多数进行概率推理的人工智能系统的基础

- 贝叶斯规则在实践中很有用：
  - 很多情况下，前三项有很好的估计，而需要计算第 4 项



应用贝叶斯规则

- 医疗诊断：
- 结果 *effect* 看作是证据，确定造成这一结果的未知因素 *cause* ，贝叶斯规则：

$$P(\text{cause}|\text{effect}) = \frac{P(\text{effect}|\text{cause})P(\text{cause})}{P(\text{effect})}$$

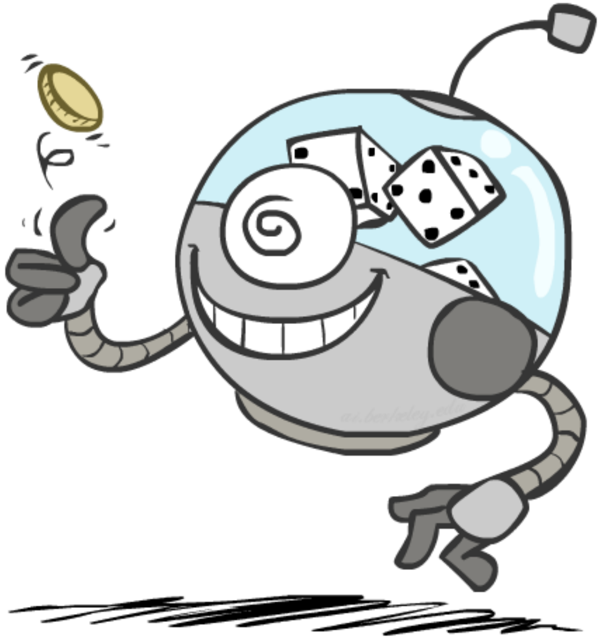
  - 条件概率 $P(cause|effect)$ 描述诊断方向上的关系
  - 条件概率 $P(effect|cause)$ 量化了因果方向上的关系
  - 实际中，经常有因果关系的条件概率，而想得出诊断关系。

应用贝叶斯规则

- 示例：明天要举行户外运动会。近年来，每年仅下雨5天（5/365=0.014）。不幸的是，天气预报员预测明天会下雨。当真的下雨时，天气预报员准确地预测了90%的降雨。当不下雨时，他错误地预测了10%的降雨。明天下雨和不下雨的可能性分别有多大？
- 令rain表示明天下雨，predict表示预测明天下雨
- 则有：
  - $P(rain) = 0.014$； $P(\neg rain) = 0.986$ ； $P(predict|rain) = 0.9$； $P(predict|\neg rain) = 0.1$
  - ； = ； =0.1
- 问题：计算 $\boldsymbol{P}(Rain|predict)$？

提纲

- 第十三章 不确定性的量化
  - 不确定性的概述
  - 基本概率符号，使用完全联合分布进行推理
  - 贝叶斯规则及其应用
  - 独立性与条件独立性



独立性

- 一个简单的例子：诊断牙病患者的牙痛
- 问题域：由三个布尔变量 *Toothache* ， *Cavity* 和 *Catch* 组成

	toothache		$\neg$*toothache*	
	catch	$\neg$*catch*	*catch*	$\neg$*catch*
cavity	0.108	0.012	0.072	0.008
$\neg$*cavity*	0.016	0.064	0.144	0.576

Figure 13.3 A full joint distribution for the *Toothache*, *Cavity*, *Catch* world.

引入第四个变量 *Weather* ，有四个取值 <*sunny, rainy, cloudy, snow*>

完全联合分布：**P**(*Toothache*, *Catch*, *Cavity*, *Weather*) ， 有 $2 \times 2 \times 2 \times 4 = 32$ 个条目 .

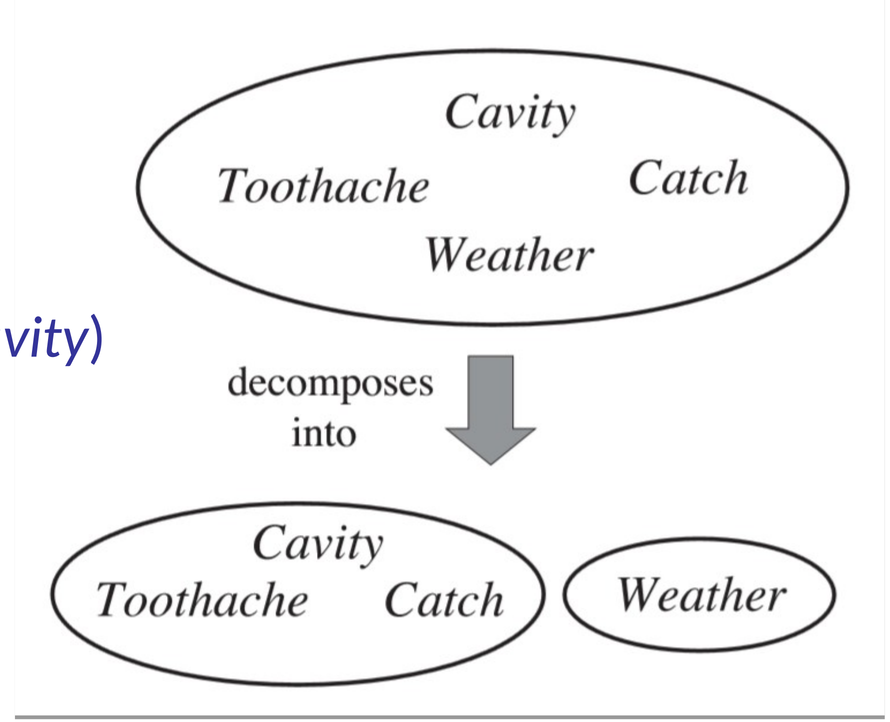
独立性

- 完全联合分布：

  P(*Toothache, Catch, Cavity, Weather*)

= **P**(*Weather* | *Toothache, Catch, Cavity*) **P**(*Toothache, Catch, Cavity*)

= **P**(*Weather*) **P**(*Toothache, Catch, Cavity*)



- *Weather* 与其它三个变量之间相互独立

- 完全联合分布表中的 32 (8x4) 个条目可以降低为 12(8+4) 个

独立性

- 两个随机变量 A 和 B 之间独立，当且仅当：

$$\mathbf{P}(A, B) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B) \quad \text{或} \quad \mathbf{P}(A \mid B) = \mathbf{P}(A) \quad \text{或} \quad \mathbf{P}(B \mid A) = \mathbf{P}(B)$$

  - 独立性断言有助于减小问题域表示，并降低推理复杂度
  - e.g., 可以假定 *Toothache* 和 *Weather* 之间相互独立

条件独立性

绝对独立性是强大的，但现实应用中很少 。领域知识通常具有成百个变量，它们之间并不完全独立

- 条件独立性：
  - 给定随机变量 C，两个随机变量 A 和 B 是条件独立的，当且仅当：

$$\mathbf{P}(A, B \mid C) = \mathbf{P}(A \mid C)\, P(B \mid C)$$

或 $\mathbf{P}(A \mid B, C) = \mathbf{P}(A \mid C)$

或 $\mathbf{P}(B \mid A, C) = \mathbf{P}(B \mid C)$

条件独立性

- 问题域：
  - Traffic
  - Umbrella
  - Raining

条件独立性

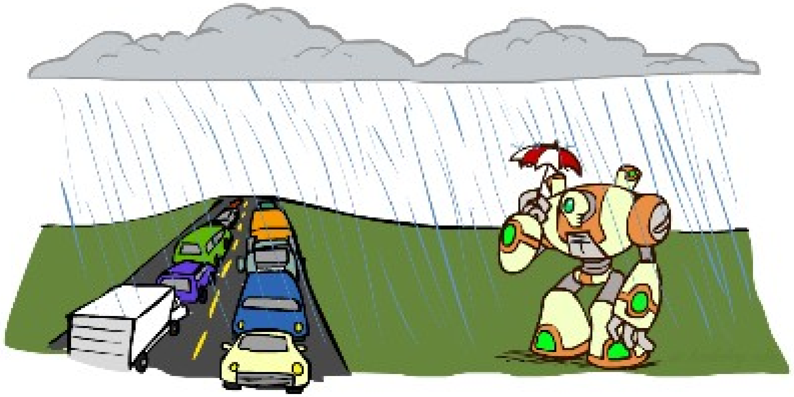
- 链式法则： $P(X_1, X_2, \ldots X_n) = P(X_1)P(X_2|X_1)P(X_3|X_1, X_2)\ldots$

- 计算完全联合概率分布

P(*Rain, Traffic, Umbrella*)

= **P**(*Rain*) **P**(*Traffic* | *Rain*) **P**(*Umbrella* | *Rain, Traffic*) （链式法则）

= **P**(*Rain*) **P**(*Traffic* | *Rain*) **P**(*Umbrella* | *Rain*) （条件独立的假设）



- 条件独立假设表示的方法：贝叶斯网络 / 图模型

小结

- 由于环境可能是部分可观察的或不确定的，智能体需要处理不确定性。
- 概率是描述不确定知识的一种严格形式。通过条件概率，将命题与智能体自身的知识联系起来
- 给定一个完全联合分布可以计算该问题域中任何命题的概率，但对复杂领域，需要找到一种方法来降低联合概率的数目
- 独立性和条件独立性提供了重要工具

谢谢！