拓扑学笔记整理

2151769 吕博文
2152513 肖博文
2153299 杨非凡
2154173 王邹济中

目　录

第 1 章　集合

1.1　集合与映射

集合论是数学理论体系的基础，严格的定义要通过公理化的方式，不是本课程的内容．这里仅仅指出，集合的定义方式不能太过任意，我们只需知道，哪些集合的定义方式是“合法”的．　首先，所有的整数、有理数、实数、复数分别构成集合，分别记为 $\mathbf{Z}$ 、$\mathbf{Q}$ 、$\mathbf{R}$ 、$\mathbf{C}$ ，这是熟知的．对某个集合 S 中，满足某个数学条件 P 的元素全体构成集合，称为集合 S 的**子集**，以如下方式表示

$$\{x \in S : \mathrm{P}\}.$$

例 1.1　全体正整数 $\{n \in \mathbf{Z} : n > 0\}$ 构成集合，是 $\mathbf{Z}$ 的子集，记作 $\mathbf{Z}^+$.

由上述集合中的元素构成的有序组、矩阵或序列全体构成集合，这种集合的构造方式称为**笛卡尔直积**.

例 1.2　由两个实数构成有序数对全体 $\{(x, y) : x, y \in \mathbf{R}\}$ 构成的集合，通常记为 $\mathbf{R}^2$ 或 $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ ，由 n 个实数构成有序数组全体构成的集合记为 $\mathbf{R}^n$.

例 1.3　全体实数列 $\{\{x_n\} : x_n \in \mathbf{R},\ n \in \mathbf{Z}^+\}$ 构成集合.

一个集合 S 的所有子集全体构成集合，称为该集合的**幂集**，记为 2^S .

例 1.4　设 $S = \{0, 1\}$ ，则 $2^S = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, S\}$.

对给定的两个集合 S 和 T ，如果对任何 $s \in S$ ，有唯一确定的 $t_s \in T$ 与之对应，这种对应关系就称为自 S 到 T 的**映射**．若以 f 作为该映射的名称，则该映射通常记为

$$\begin{aligned} f:\quad S &\to T \\ s &\mapsto t_s \end{aligned} \tag{1.1}$$

自 S 到 T 的映射全体构成集合.

例 1.5　映射

$$\begin{aligned} f:\quad S &\to S \\ s &\mapsto s \end{aligned}$$

称为 S 上的**恒同映射**，记为 id_S 或 id .

函数是数集到数集的映射，是最常见的一种映射，此时需要注意，若用 (1.1) 的形式描述函数，则 S 必须为函数 f 的定义域，但 T 不必为函数 f 的值域.

例 1.6 设定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 f 的表达式为 $f(x)=x+2$，该映射关系可记为

$$\begin{aligned} f:\ & \mathbf{R}\to\mathbf{R} \\ & x\mapsto x+2 \end{aligned}$$

定义 1.1 对映射 $\begin{aligned} f:\ & S\to T \\ & x\mapsto f(x) \end{aligned}$ 和 $\begin{aligned} g:\ & T\to R \\ & t\mapsto g(t) \end{aligned}$，映射

$$\begin{aligned} g\circ f:\ & S\to R \\ & s\mapsto g(f(s)) \end{aligned}$$

称为映射 g 与 f 的**复合**.

关于映射，有下面几个重要的概念.

定义 1.2 对映射

$$\begin{aligned} f:\ & S\to T \\ & s\mapsto f(s) \end{aligned}$$

若对任何 $s_1\neq s_2$，都有 $f(s_1)\neq f(s_2)$，则称映射 f 为**单射**；若对任何 $t\in T$，都存在 $s\in S$，使得 $f(s)=t$，则称映射 f 为**满射**；若 f 既是单射又是满射，则称映射 f 为**双射**.

注 1.1 对函数 $f:S\to T$ 而言，只有当该映射为满射时，T 才是 f 的值域，只有当 f 是双射时，才可以定义 T 到 S 的反函数 f^{-1}. 对一般的双射 f，若 $f^{-1}:T\to S$ 满足 $f^{-1}\circ f=\mathrm{id}_S$，则 f^{-1} 称为 f 的**逆映射**.

定义 1.3 设 f 为自 S 到 T 的映射，S_1 和 T_1 分别为 S 和 T 的子集，称集合

$$f(S_1)=\{f(s):s\in S_1\}$$

为 S_1 关于映射 f 的**像集**，称集合

$$f^{-1}(T_1)=\{s:f(s)\in T_1\}$$

为 T_1 关于映射 f 的**完全原像集**.

注 1.2 在完全原像集的定义中，f 并不要求为双射，f^{-1} 在此处也不表示 f 的逆映射.

若集合中的元素个数有限，则该集合称为**有限集**，否则称为**无限集**. 对有限集 S，以 $\#(S)$ 记该集合的元素个数，约定 $\#(\varnothing)=0$.

例 1.7 设 $S=\{0,1\}$，则 $\#(S)=2$，$\#(2^S)=4$.

一般地，有下面的定理.

定理 1.1 若 S 为有限集，则 $\#2^S=2^{\#(S)}$.

证明 留做习题

由上述定理可以看出用 2^S 作为幂集记号的原因.

如何描述无限集的元素“个数”，是集合论中非常有趣且重要的问题. 仅仅以无限集的元素都是无限多个，就简单地认为无限集的元素个数都相同，这种分类方式过于粗糙. 相比之下，下面的定义（分类方式）更加合理.

定义 1.4 对集合 S 与 T，若存在自 S 到 T 的双射，则称 S 与 T 有相同的**基数**或**势**，记为 $\bar{\bar{S}}=\bar{\bar{T}}$. 若存在自 S 到 T 的单射，则称 S 的基数不大于 T 的基数，记为 $\bar{\bar{S}}\leqslant\bar{\bar{T}}$.

显然，当 S 与 T 为有限集时，$\bar{\bar{S}}=\bar{\bar{T}}$ 当且仅当 $\#(S)=\#(T)$，$\#(S)<\#(2^S)$．对无限集，通过基数，可以做更细致的分类．下面的定理直观上很明显，但证明并不十分容易．

定理 1.2 (Bernstein)　若 $\bar{\bar{S}}\leqslant\bar{\bar{T}}$ 且 $\bar{\bar{T}}\leqslant\bar{\bar{S}}$，则 $\bar{\bar{S}}=\bar{\bar{T}}$．

Bernstein 定理的证明可参考文献的 1.4 节．根据Bernstein 定理，可进一步规定，若存在自集合 S 到 T 的单射，但不存在 T 到 S 的单射，则称集合 S 的基数小于 T 的基数，记为 $\bar{\bar{S}}<\bar{\bar{T}}$．特别，有下面的定理．

定理 1.3　任何集合的基数一定小于其幂集的基数．

证明　留作习题

若记 $\mu=\bar{\bar{S}}$，则其幂集的基数也记为 2^μ，则上述定理结论可简单描述为 $\mu<2^\mu$．

对无限集，通过基数，可以做更细致的分类．记 $a=\overline{\overline{\mathbf{Z}^+}}$（称为**可列基数**），$c=2^a$（称为**连续统势**），则有 $\bar{\bar{\mathbf{Z}}}=\bar{\bar{\mathbf{Q}}}=a$，$\bar{\bar{\mathbf{R}}}=\bar{\bar{\mathbf{C}}}=\overline{\overline{\mathbf{R}^n}}=c$．换言之，正整数集、整数集和有理数集有相同的基数；实数集、复数集、2 维空间的点集、3 维空间的点集乃至 n 维空间的点集具有相同的更大的基数，该基数恰为正整数的幂集的基数．

无限集的基数中，是否存在介于 a 和 c 之间的基数，特别，实数集是否存在子集的基数介于 a 和 c 之间，是数学的著名问题之一，称为连续统假设，前者在上世纪 40 年代被以一种惊人的结论得以回答，后者至今尚无结论．

第 2 章　群与变换

2.1　群与阿贝尔群

如果一个非空集合G上定义了一个二元运算 $\cdot$ ，满足如下的性质：

（1）封闭性，即对于 $\forall a, b \in G$ ，有 $a \cdot b \in G$ ；

（2）结合律，即对于 $\forall a, b, c \in G$ ，有 $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ ；

（3）存在 $e \in G$ ，使得 $\forall a \in G$，有 $e \cdot a = a$ ；

（4）对于 $\forall a \in G$ ，存在 $b \in G$ ，使得 $b \cdot a = e$ ，

则称 G 关于运算 $\cdot$ 构成一个**群**，记为 $(G, \cdot)$ ，或简记为 G。

特别的，对某个群$(G, \cdot)$，若满足：

（5）交换律，即对于 $\forall a, b \in G$ ，有 $a \cdot b = b \cdot a$.

则称该群为**阿贝尔群（交换群）**.

例 2.1　全体正整数关于加法构成群$(Z, +)$，除0外的全体有理数关于有理数的乘法构成群$(Q^*, \times)$.

例 2.2　全体n阶可逆实方阵关于矩阵乘法构成群.

例 2.3　对于非空集合S，集合$\{f : S \to S : f$为双射$\}$关于映射的复合运算构成群.

定义 2.1　对非空集合S，若映射$f : S \to S$为双射，则称f为集合S上的**置换**。

定义 2.2　对非空有限集合$S = \{a_1, a_2, a_3 ... a_n\}$，为考虑$S$的如下置换: a_1映射到a_3，a_3映射到a_5，a_5映射到a_6，a_6映射到a_1，其余元素映射到自己。形如这样的置换，称为S的一个**轮换**，记作（a_1, a_3, a_5, a_6）。

关于置换，有下面的定理.

定理 2.1　若f为集合S上的置换，则f能表示为集合S上不相交的轮换的复合。

注 2.1　用轮换表示双射，使双射的表示更加具体了。

例 2.4　G 是一个群， $\forall g \in G$,构造映射 $Lg : G \to G$ $\forall h \in G, h \mapsto gh$ 和 $Rg : G \to G$: $\forall h \in G \mapsto hg$,我们可以形象的称映射 Lg 为左平移， Rg 为右平移。

一般地，我们可以证明 $\forall g_1, g_2 \in G, Lg_1g_2 = Lg_1 \circ Lg_2$,所以我们可以构造群 $\{Lg : g \in G\}$ 且该群与 G 等价。

而对于 Rg ,若 $\#(G) < \infty$,则 $Rg_1g_2 = Rg_2 \circ Rg_1$,不能一般性的满足集合的运算，但考虑到

$\forall g_1, g_2 \in G, (g_1, g_2)^{-1} = g_2^{-1} g_1^{-1}$,所以我们可以构造 $\{Rg^{-1} : g \in G\}$,可以证明该群与 G 等价。

例 2.5　我们定义 $Cg : G \to G \ \ \forall h \in G, h \mapsto ghg^{-1}$,可以构造 $\{Cg : g \in G\}$ ，该群同样与群 G 等价。

特别地，若 $g_1 \neq g_2, Cg_1$ 仍可能等于Cg_2,此时我们称这样的Cg不够“忠实”，但 $g_1 g_2 \mapsto Cg_1 g_2$,所以称这样的Cg为共轭。

注 2.2　离散群与连续群的划分通常由群的基数来决定。

定义 2.3　定义 $m \oplus n = (m + n) \bmod p; Z_p = \{0, 1, 2, \ldots, p - 1\}$ (通常情况下p为素数); 当p为素数时， Z_p^* 关于乘法构成群。

定义 2.4　定义 $SL(n, R) = \{A \in GL(n, R) : detA = 1\}$; $O(n) = \{A \in GL(n, R) : AA^T = E\}$; $SO(n) = \{A \in O(n) : detA = 1\}$

注 2.3　上述群均为连续群且同时具有很好的拓扑结构而称之为 *Lie* 群。

2.2　群与计算机的联系

在本章中我们主要学习了群论的基本知识，了解并熟悉了群与子群的基本定义，置换群的定义以及简单提及了离散群与连续群的分类。我们可以看出，拓扑学中的群论是一种与对称性相关的数学工具，而对称性在计算机科学中也是非常重要的概念。因此，拓扑学中的群论与计算机科学之间存在这许多联系：密码学中运用到了广泛的群论知识，RSA加密算法就是基于群论中的数论知识构建出来的；同时，对称群的知识可以帮助计算机识别图像中的物体，群论中的图论知识可以解决计算机中的路径求解问题，最后，置换群和循环群同样可以帮助我们解决计算机中的很多编程问题，下面就置换群的应用给出一些具体例子。

2.2.1　密码学

在密码学中，置换群可以用来描述对明文进行加密和对密文进行解密的操作。具体来说，可以将明文中的每个字符看作一个元素，将加密操作看作一个置换，然后将所有置换组成的集合构成一个置换群。通过对置换群进行分析，可以破解一些基于置换群的加密算法。

2.2.2　图像处理

在图像处理中，置换群可以用来描述对图像进行平移、旋转、翻转等操作的变换群。通过对变换群进行分析，可以实现图像的特征提取、图像匹配等功能。

2.2.3 编译器优化

在编译器优化中，置换群可以用来描述对程序中的变量进行重命名的操作。具体来说，可以将程序中的每个变量看作一个元素，将重命名操作看作一个置换，然后将所有置换组成的集合构成一个置换群。通过对置换群进行分析，可以实现一些编译器优化，例如死代码消除、循环展开等。

第 3 章　拓扑

3.1　开集与拓扑

为了更好的理解拓扑定义，我们首先介绍一下什么是开集。

定义 3.1　设 $x \in \mathbf{R}^n$,而 ε是 x 的邻域,定义 ε-邻域：

$$V(x,\varepsilon) = \{y \in \mathbf{R}^n : |y - x| < \varepsilon\}$$

注 3.1　邻域可以理解为距离 x无限接近的点集，因此，一维情况下 ε-邻域为一条线，二维情况下为圆盘，三维情况下为球体。

定义 3.2　对于集合 $S \subseteq \mathbf{R}^n$,且 $x \in S$,若存在 $\varepsilon > 0$,使得 $V(x,\varepsilon) \subset S$,则称 x为 S 的一个**内点**。

定义 3.3　若集合 $O \subset \mathbf{R}^n$中的一切点都是内点，则我们 O为 $\mathbf{R}^n$的**开集**

在了解了开集的定义，接下来我们引出三条开集的性质：

性质 3.1　ϕ、$\mathbf{R}^n$都是开集。

这里解释一下空集为什么会是开集：空集是指不含任何元素的集合，换句话说，空集中没有点不是内点，这与开集的定义是等价的。而全集 $\mathbf{R}^n$是开集则是显然成立的，在这里不做过多赘述。

性质 3.2　如果集合 O_1、O_2都是开集，那么 $O_1 \cap O_2$也是开集。

证明　$\exists \varepsilon_1$，有 $V(x,\varepsilon_1) \subset O_1$,同理 $\exists \varepsilon_2$，有 $V(x,\varepsilon_2) \subset O_2$,我们令 $\varepsilon = \min(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$,则有

$$V(x,\varepsilon) \subset O_1 \cap O_2$$

因此得证：$O_1 \cap O_2$也是开集

性质 3.3　若 $O_\lambda(\lambda \in \Lambda)$是开集，则 $\cup_{\lambda\in\Lambda}O_\lambda$也是开集。

证明　$\forall x \in \cup O_\lambda$,显然 $\exists \lambda_0 \in \Lambda$,使得 $x \in O_{\lambda_0}$。且 O_{λ_0}是开集，则

$$\exists \varepsilon > 0, V(x,\varepsilon) \subset O_{\lambda_0} \subset \cup_{\lambda\in\Lambda}O_\lambda$$

即可证出 $\cup_{\lambda\in\Lambda}O_\lambda$是开集。

上面我们已经着重介绍了在$\mathbf{R}^n$下的开集定义及其性质，下面我们探究一个具体集合下的开集。

定义 3.4 对于 $X \subset \mathbf{R}^n$,且 $U \subset X$,如果存在 $\mathbf{R}^n$上的开集 O，使得 $U = O \cap X$,我们则称 U为 X**的开集**

为了更好地理解这一定义，我们举几个例子进行具体分析。

例 3.1 集合 $X = [0,1] \subset \mathbf{R}^1$, 试分析 $[0,1]$、 $[0,\frac{1}{2}]$、 $(0,1)$、 $\{0\}$是否是 X的开集。

例 3.2 集合 $S = \{(x,y) \in \mathbf{R}^n : x^2 + y^2 = 1\}$,试用语言描述该集合的开集。

集合 X的开集性质如下：

性质 3.4 ϕ、X都是开集。

性质 3.5 如果集合 O_1、O_2都是 X的开集，那么 $O_1 \cap O_2$也是开集。（该结论也可以推广到有限多个集合的相交）

性质 3.6 如果集合 O_1、O_2都是 X的开集，那么 $O_1 \cap O_2$也是开集。

上述性质的具体证明在上文已经明确给出，在此不做过多赘述。

3.2 开集与拓扑

闭集：开集在全集上的补集即为闭集

注 3.2 $\varnothing$ 和 X 为闭集；

注 3.3 有限个闭集的并集为闭集；

注 3.4 任意个闭集的交集为闭集；

定义 3.5 对于 $S \subset \mathbf{R}^n$,称 $\overline{S} = \{F : S \subset F, F:\}$ 为 S 的**闭包**.

例 3.3 $(0,1)$ 的闭包为 $[0,1]$; $\mathbf{R}$ 的闭包为 $\mathbf{R}$.

3.3 紧与连通

定义 3.6 若 (X,T) 为拓扑空间， $S \subset S, O_\lambda(\lambda \in \Lambda)$ 为开集，若 $\bigcup O_\lambda \subset S$,则 $\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 称为 S 的开覆盖；若对 S 的任意开覆盖，都存在有限的子覆盖，则称 S 为 X 上的**紧集**.

定理 3.1 (Borel定理): $S \subset \mathbf{R}^n$ 为紧集 $\Longleftrightarrow$ S 为有界闭集.

例 3.4 $\mathbf{R}^1$ 上， $(0,1)$ 为有界开集； $[0,+\infty]$ 为无界闭集； $[0,1]$ 为有界闭集；以上区间只有 $[0,1]$ 为紧集.

定义 3.7 对于 $S \subset X$ ，若对任意 O_1, O_2 为开集，且 $O_1 \cap O_2 = \varnothing$ ，且 $O_1 \cup O_2 \supset S$ ，使得 $S \supset O_1$ 或 $S \supset O_2$ ，则称 S 为**连通的**.

定义 3.8 对于 $S \subset X$ ，若对任意 O_1, O_2 为开集，且 $O_1 \cap O_2 = \varnothing$ ，且 $O_1 \cup O_2 \supset S$ ，使得 $S \supset O_1$ 或 $S \supset O_2$ ，则称 S 为**连通的**.

第 4 章　基本群

4.1　基本群的定义

定义 4.1　我们研究拓扑空间之间的联系，希望找到一个可以衡量拓扑空间的关键因素的变量，我们称其为基本群。对应地，如果两个拓扑空间X与Y同胚，那么他们各自对应的基本群$G(X)$与$G(Y)$同构。

推论 4.1　如果X与Y同构且存在一个映射$f : X \to Y$，那么可以导出另一个映射$f_* : G(X) \to G(Y)$

特别地，如果上述映射f为恒同映射即$id : X \to X$,同样有$id_* : G(X) \to G(X)$, 同样地，我们有另一个映射$g : Y \to X$,那么我们有$g \circ f = id_x, f \circ g = id_y$; 同时我们还有特别的性质：$g_* \circ f_* = (id_x)_* = idG(x); f_* \circ g_* = (id_y)_* = idG(y)$。

4.2　同伦

定义 4.2　X, Y是拓扑空间，如果存在着这样的映射$f, g : X \to Y$,如果存在映射$F : X \times [0, 1] \to Y$,使得$\forall x \in X, F(x, 0) = f(x), F(x, 1) = g(x)$, 称$f$与$g$同伦。

注 4.1　同伦中所提到的映射均为空间中的连续映射。

例 4.1　$X = [0, 1], Y$是三棱锥$S - ABC$,问是否存在这类似的映射f, g满足同伦条件：

存在，我们可以定义$f : X \to Y; x \to$点S，而，$g : X \to$三角形的三边。这样的话，F映射就可以理解为从三角形ABC逐渐缩成一个顶点S。

例 4.2　$X = [0, 1], Y$是一个以O为圆心的圆盘，问能否存在着同伦的f, g:

存在，我们可以定义$f : X \to Y; x \to$O点，$g : X \to$圆周，类似上题，我们可以形象化的理解F映射为从最外围圆周逐渐缩成最中间的一个点。

例 4.3　$X = [0, 1], Y$是一个圆环，O是圆环上一个点，问能否存在着同伦的f, g:

不存在，因为这时候整个X拓扑空间只有一个圆环，我们不能连续的在空间中把圆环缩成一个点，也即是我们无法找到两个合适的映射，使得其能够连续变化并且以一个圆的形式

注 4.2　在拓扑空间中不能同伦于一个点的圈的个数是这个拓扑空间的一种不变量,这里

的“圈”是不同伦的，同时我们指出这些“圈”的起始点的选取不重要，不会影响最后的结果。

4.3　拓扑空间的同伦

定义 4.3　X是拓扑空间(道路连通),$x_0 \in X$,以x_0为起点以及终点(基点)的封闭道路的集合记为$\Pi(x, x_0)$,建立关系~: $f \sim g \Leftrightarrow f$与$g$同伦。

$G(x) = \Pi(x, x_0)// \sim$为基本群,单位元为常值道路或与之同伦的道路。

定义 4.4　X, Y拓扑空间同伦$\Leftrightarrow$存在$f : X \to Y; g : Y \to X$使得 $g \circ f \simeq I_x; f \circ g \simeq I_y$

定义 4.5　收缩核：$A \subset X$;映射$i : A \to X; r : X \to A$,若$r \circ i \simeq I_A; i \circ r \simeq I_x$，则称$A$为$X$的收缩核。若$A = x_0$,则$X$可缩，该空间对应的基本群非凡。

4.4　基本群的计算

定义 4.6　首先我们定义基本群计算所需要的基本要素：单形与复形。

零维单形：$x_0, x_1 \in R^n$

一维单形：$(x_0, x_1) = \{x_0a + x_1b|a, b \geq 0, a + b = 1\}$

二维单形：$(x_0, x_1, x_2) = \{x_0a + x_1b + x_2c|a, b, c \geq 0, a + b + c = 1\}$

三维单形：$(x_0, x_1, x_2, x_3) = \{x_0a + x_1b + x_2c + x_3d|a, b, c, d \geq 0, a + b + c + d = 1\}$

注 4.3　我们可以看出上述的定义可以类似推广到n维，且在n维复形中，n个点线性无关。

定义 4.7　复形是由若干单形构成的集合且需满足条件：

(1)任意单形的交为空集或其他单形(两者公共单形)

(2)单形中所包含的其他单形也必须包括在复形中。

注 4.4　我们指出，对拓扑空间可以做不同的剖分，都是为了最终方便计算基本群。

计算步骤：

(1)剖分得到K：即对给定的集合图形进行三角剖分，将其转换为简单的单形或复形。

(2)找一个包含所有顶点的可缩的子复形L,(一定存在但不一定唯一，因为构造一棵包含所有顶点的树就是一个最简单的剖分)

(3)找出K/L中的一切一维单形$\Rightarrow S$

(4)算群：G_1 =由S中元素生成的自由群; G_2 =所有二维单形的边界视为单位元；这样就构成了一个群和建立在这个群上的等价关系。

注 4.5　Step2中注意子复形应该尽量选大一点，方便后续计算。

4.5 基本群与计算机的联系

计算拓扑空间的基本群是数学拓扑中的一个重要问题，而计算机领域中也有很多与拓扑空间相关的问题，例如计算机图形学中的三维建模和计算机视觉中的图像处理等。

在计算机图形学中，我们经常需要对三维模型进行建模和处理，而三维模型通常是由多个表面组成的，这些表面之间的关系可以通过拓扑空间的概念来描述。例如，我们可以将三维模型表示为一个拓扑空间，并计算它的基本群，以确定模型的几何特性，例如是否是单连通的（基本群为 $\mathbb{Z}$）或者是否具有洞（基本群为 $\mathbb{Z}^n$）等。基于这些几何特性，我们可以设计出相应的算法来对模型进行处理和优化。

在计算机视觉中，图像处理也涉及到了拓扑空间的概念。例如，在图像分割中，我们需要将图像中的像素分成不同的区域，而这些区域可以看作是拓扑空间中的一些连通子集。计算图像中各个连通子集的基本群，可以帮助我们进一步理解图像的拓扑结构，并设计出相应的算法来进行图像分割和识别等任务。

因此，计算拓扑空间的基本群与计算机领域有着广泛的联系，它们在不同的应用场景中都发挥着重要的作用。