БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

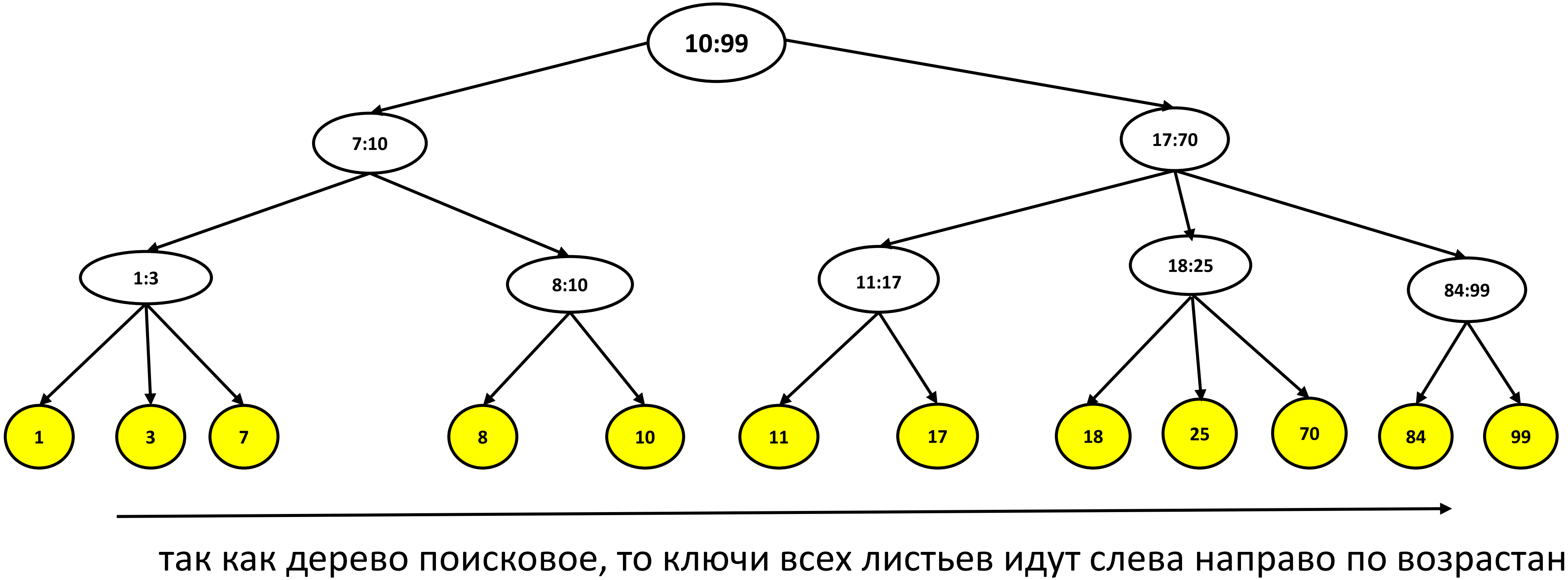
ОРГАНИЗАЦИЯ ПОИСКА

СБАЛАНСИРОВАННЫЕ ПОИСКОВЫЕ ДЕРЕВЬЯ

2-3 деревья

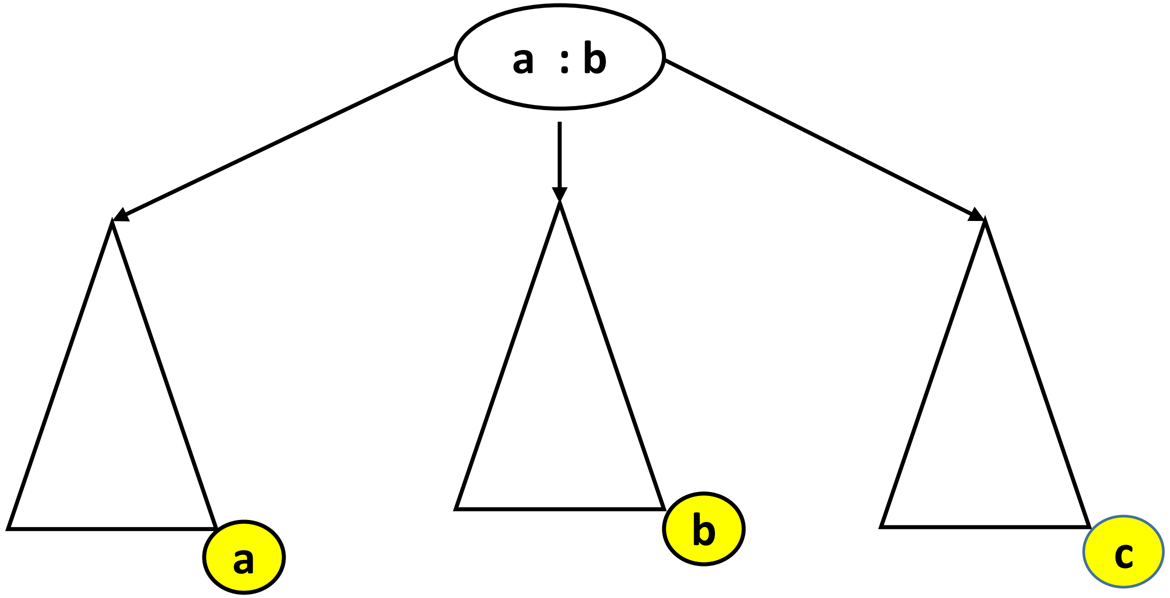
Поисковое дерево называется **2-3-деревом**, если оно обладает следующими свойствами:

1) каждая вершина x, не являющаяся листом, содержит два или три сына (левый $l(x)$, средний $m(x)$ и (возможно) правый сын $r(x)$;
2) все висячие вершины находятся на одной глубине и содержат сами элементы;
3) внутренние вершины– справочные (внутренние – это все вершины дерева за исключением листьев) .

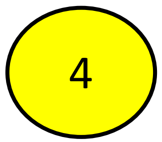


Каждая внутренняя вершина 2-3 –дерева является справочной и содержит две метки:

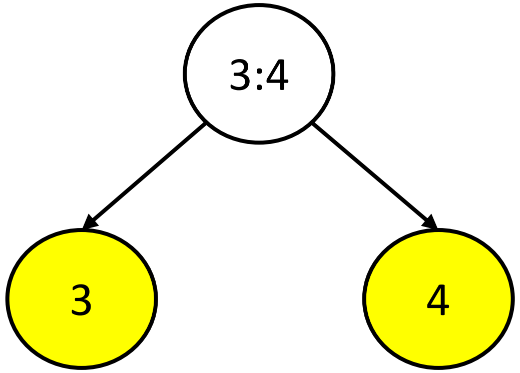
1. $\mathrm{a} = left\_\max\_val(v)$ – максимальное значение ключа в поддереве, корень которого – левый сын вершины $\boldsymbol{v}$**;**
2. $b = midl\_\max\_val(v)$ – максимальное значение ключа в поддереве, корень которого – средний сын вершины $\boldsymbol{v}$;



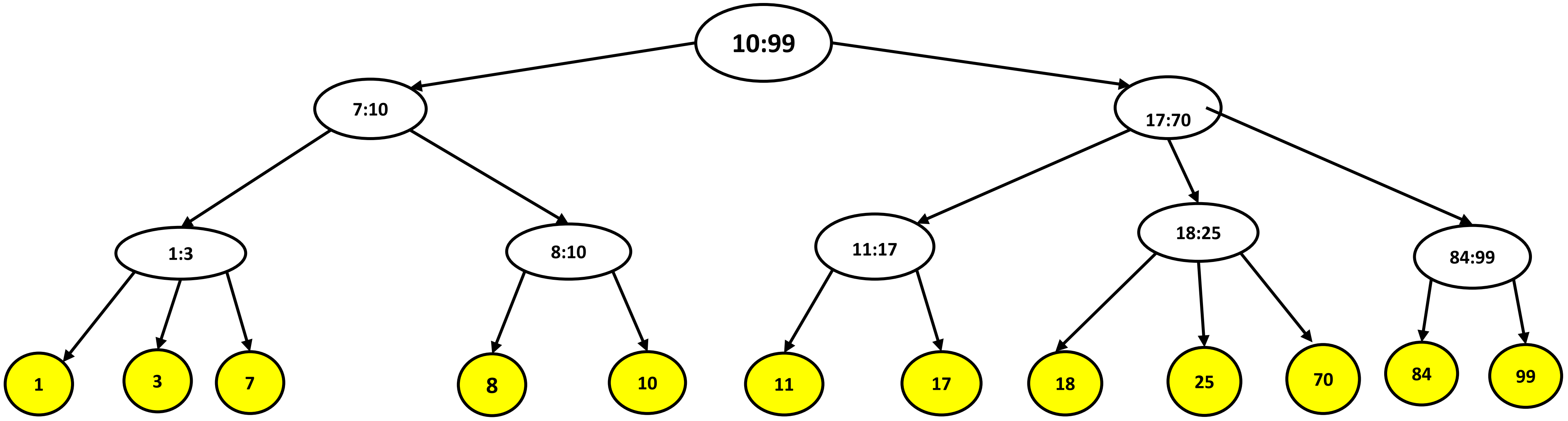
Если в 2-3-дереве только один лист, (например, 4), то это дерево имеет следующий вид:



Если в 2-3-дереве только два листа (например, 3 и 4) , то это дерево имеет следующий вид:



Пример



ТЕОРЕМА

Пусть

$\boldsymbol{n}$ – общее количество вершин в 2-3-дереве (включая корень и листья);

$\boldsymbol{l}$ – количество листьев;

$\boldsymbol{h}$ – высота дерева.

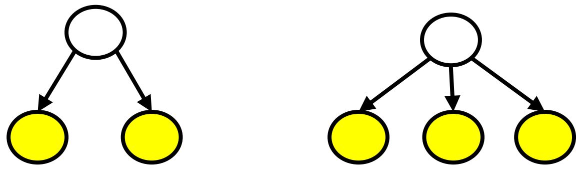
Тогда справедливы следующие неравенства:

$$\mathbf{2}^{\boldsymbol{h}} \leq \boldsymbol{l} \leq \mathbf{3}^{\boldsymbol{h}}$$

$$\mathbf{2}^{\boldsymbol{h}+\mathbf{1}} - \mathbf{1} \leq \boldsymbol{n} \leq \frac{\mathbf{3}^{\boldsymbol{h}+\mathbf{1}} - \mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

Доказательство проводится, используя метод математической индукции.

База индукции: $h = 1$. Утверждение верно.



Предположим, что теорема верна для деревьев высоты h и докажем её для деревьев высоты $h+1$.

$$(1)\ \boldsymbol{2^h \le l \le 3^h}$$

$$(2)\ \boldsymbol{2^{h+1} - 1 \le n \le \frac{3^{h+1} - 1}{2}}$$

Сначала **докажем первое неравенство**.

При увеличении высоты дерева на 1 минимальное число листьев в дереве получаем, когда в дереве высоты $\boldsymbol{h}$ с минимальным числом листьев к каждому листу добавлено по 2 сына, а максимальное, когда в дереве высоты h с максимальным числом листьев к каждому листу добавлено 3 сына:

$$\boldsymbol{2 \cdot l_h^{min} \le l_{h+1} \le 3 \cdot l_h^{max}}$$
$$\boldsymbol{2 \cdot 2^h \le l_{h+1} \le 3 \cdot 3^h}$$

Первое неравенство доказано.

$$(1)\ \ 2^h \le l \le 3^h$$

$$(2)\ \ 2^{h+1} - 1 \le n \le \frac{3^{h+1} - 1}{2}$$

Докажем **второе неравенство**.

Предположим, что неравенство (2) выполняется

для деревьев высоты h и докажем его для деревьев высоты $\boldsymbol{h} + 1$.

Пусть $\boldsymbol{n_h}$ – общее число вершин в дереве высоты h.

Тогда

$$n_h^{min} + l_{h+1}^{min} \le n_{h+1} \le n_h^{max} + l_{h+1}^{max}$$

$$(2^{h+1} - 1) + 2^{h+1} = 2^{h+2} - 1$$

$$\frac{3^{h+1} - 1}{2} + 3^{h+1} = \frac{3^{h+1} + 2 \cdot 3^{h+1} - 1}{2} = \frac{3^{h+2} - 1}{2}$$

Неравенство (2) также доказано.

ФПМИ БГУ

Из левой части неравенства:

$$2^{h+1} - 1 \leq n \leq \frac{3^{h+1} - 1}{2}$$

получаем, что высота 2-3-дерева из n вершин

$$\boldsymbol{h \leq \log_2(n + 1) - 1}.$$

Поиск элемента с ключом x

Двигаемся от корня.

Пусть t – текущая вершина.

повторять, пока t - не лист

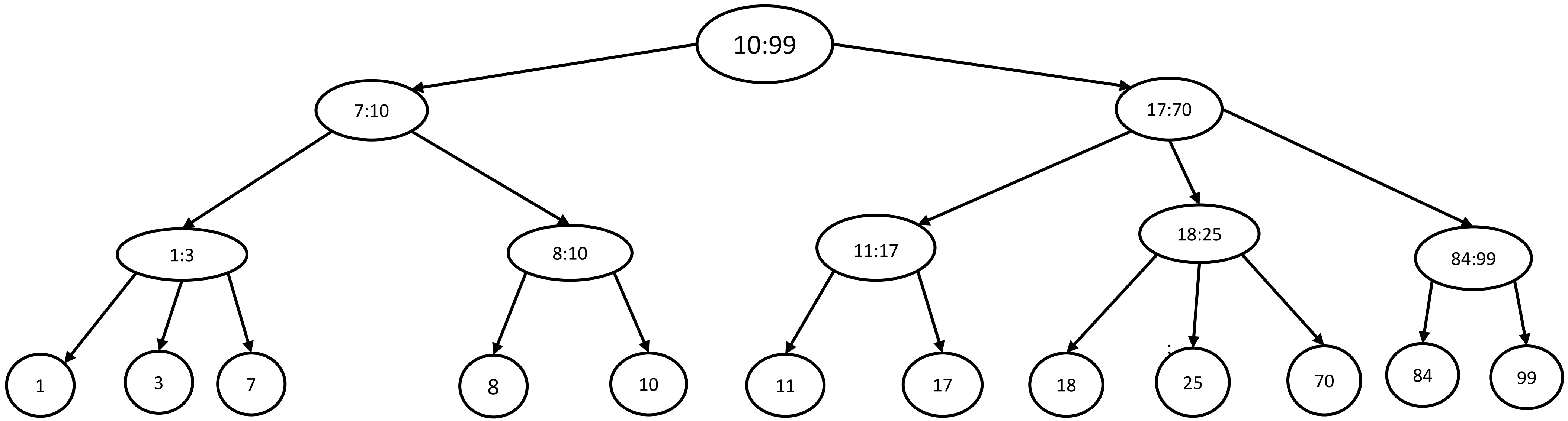
если $x \le left\_max\_val$ **то** $t = l(t)$

иначе

    если $x \le midl\_max\_val$ **или** $r(t) = NULL$ **то** $t = m(t)$

    иначе

        $t=r(t)$



? 25

повторять, пока t - не лист

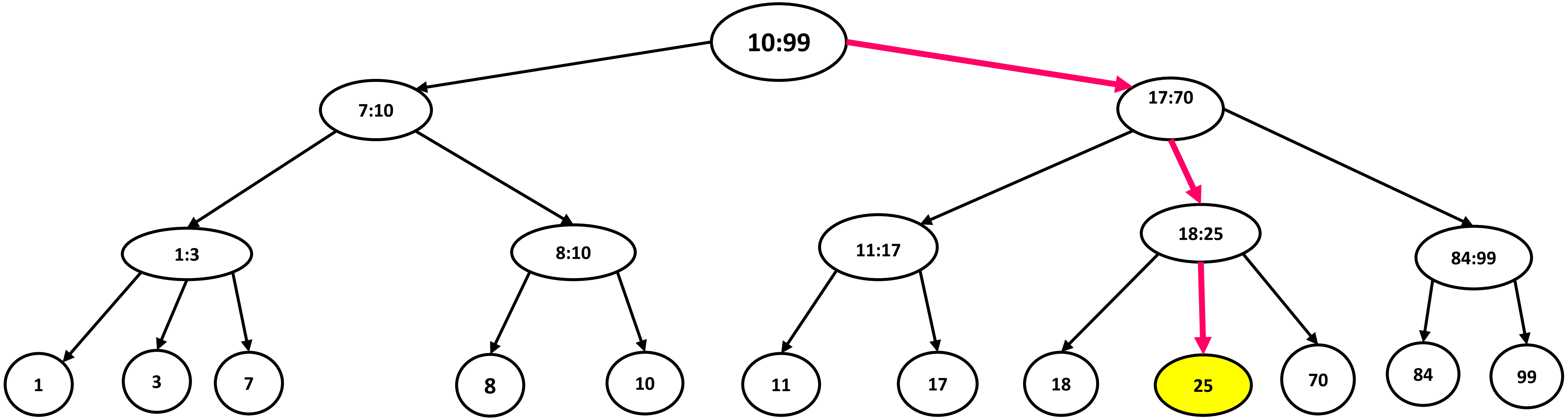
если $x \le left\_max\_val$ то $t = l(t)$

иначе

если $x \le midl\_max\_val$ или $r(t) = NULL$ то $t = m(t)$

иначе

$t=r(t)$



? 9

повторять, пока t - не лист

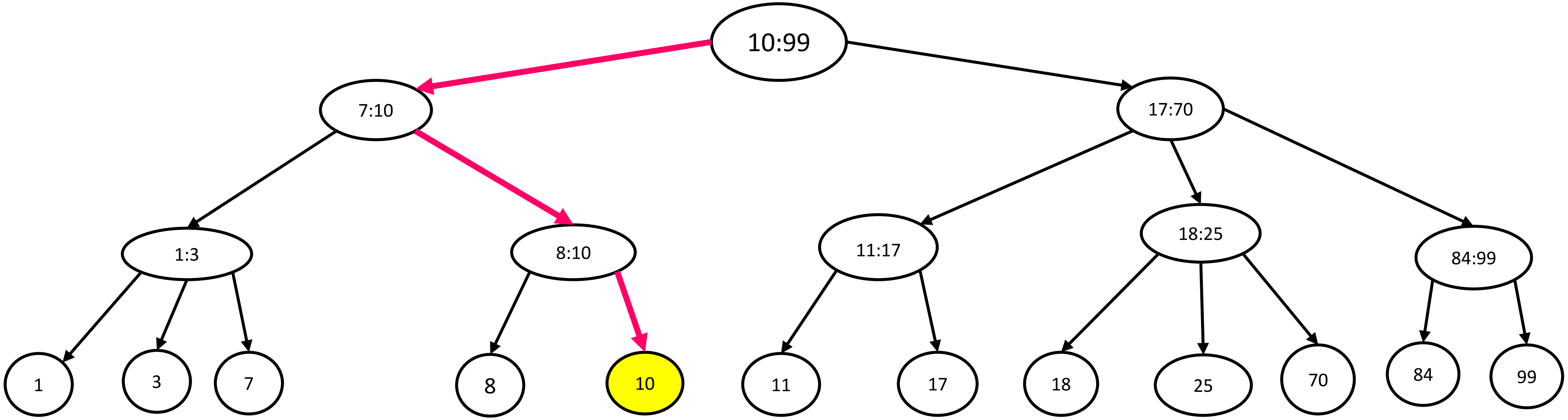
если $x \le left\_max\_val$ то $t = l(t)$

иначе

если $x \le midl\_max\_val$ или $r(t) = NULL$ то $t = m(t)$

иначе

$t = r(t)$



?= 9

НЕТ

Добавление элемента `Insert (13)`

повторять, пока t - не лист

если $x \le left\_max\_val$ то $t = l(t)$

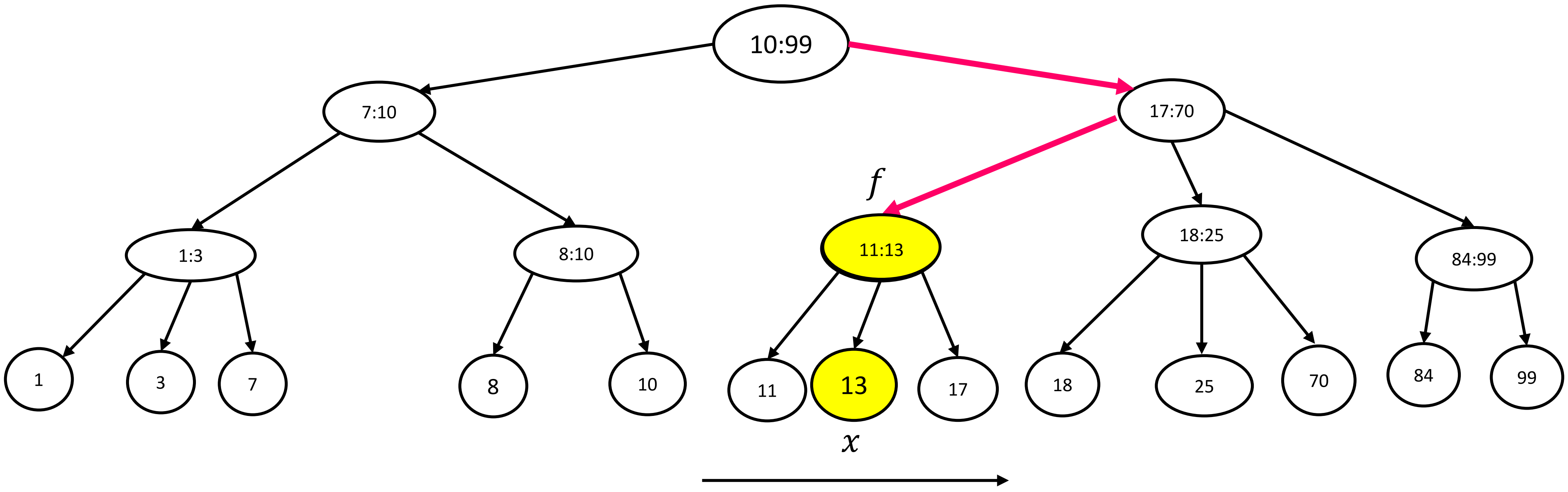
иначе

если $x \le midl\_max\_val$ или $r(t) = NULL$ то $t = m(t)$

иначе

$t=r(t)$

Сначала осуществляем поиск отца f для добавляемого элемента x (в качестве f берём отца вершины t):



- ✓ у вершины f после добавления становится 3 сына, что допустимо;
- ✓ корректируем метки справочных вершин вдоль пути поиска;
- ✓ завершаем процедуру добавления элемента x;

Insert (5)

повторять, пока t - не лист

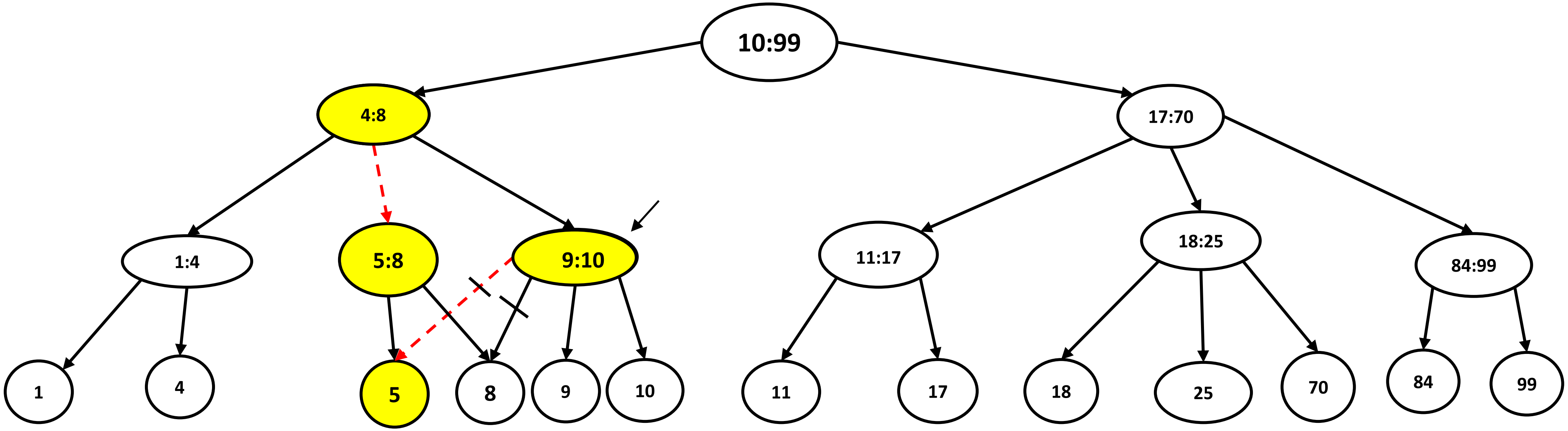
если $x \le left\_max\_val$ то $t = l(t)$

иначе

  если $x \le midl\_max\_val$ или $r(t) = NULL$ то $t = m(t)$

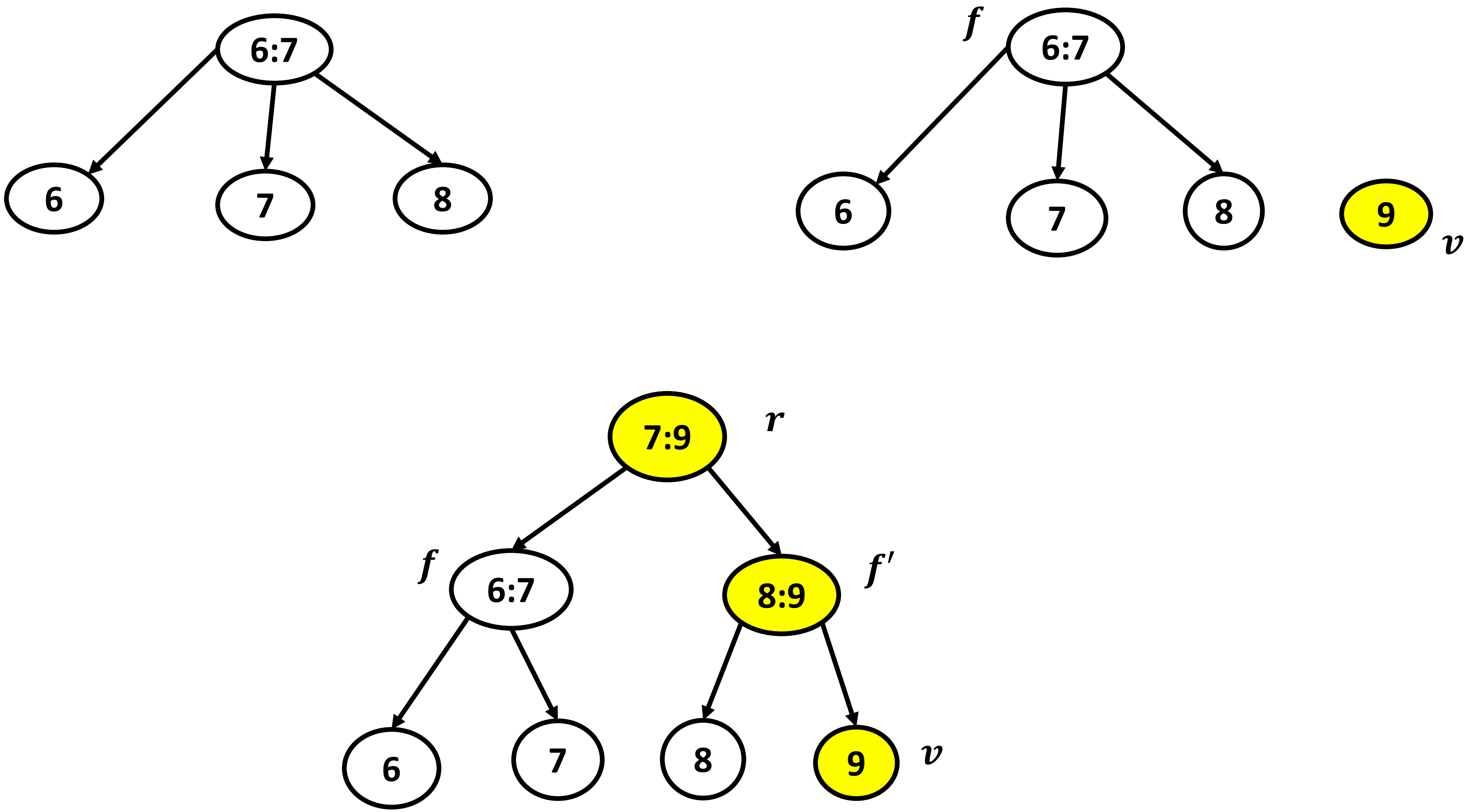
  иначе

    $t = r(t)$



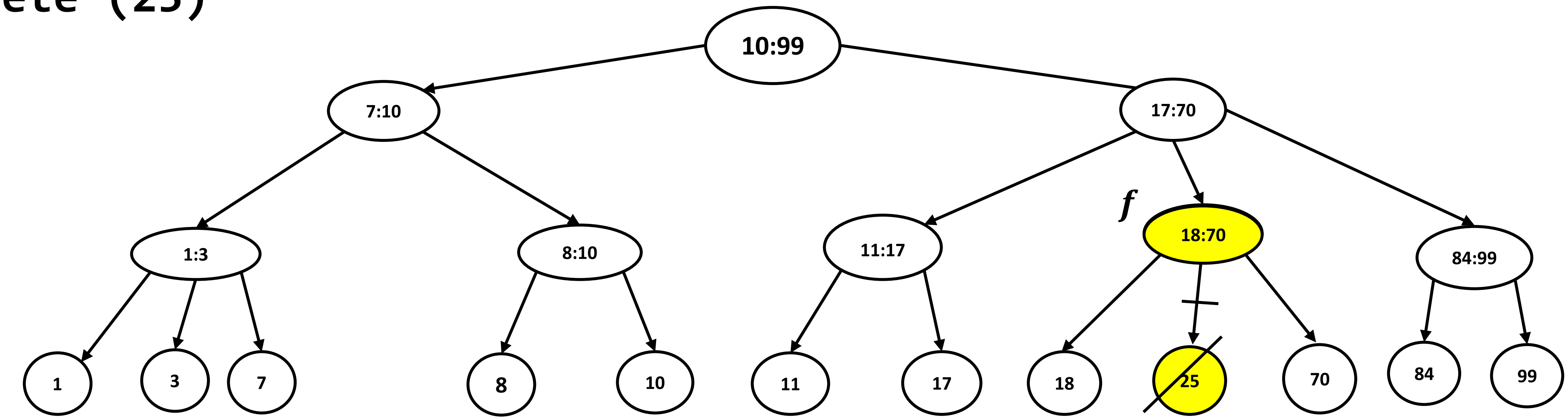
Случай увеличения высоты дерева после добавления элемента.

Insert (9)



Удаление элемента

Delete (25)



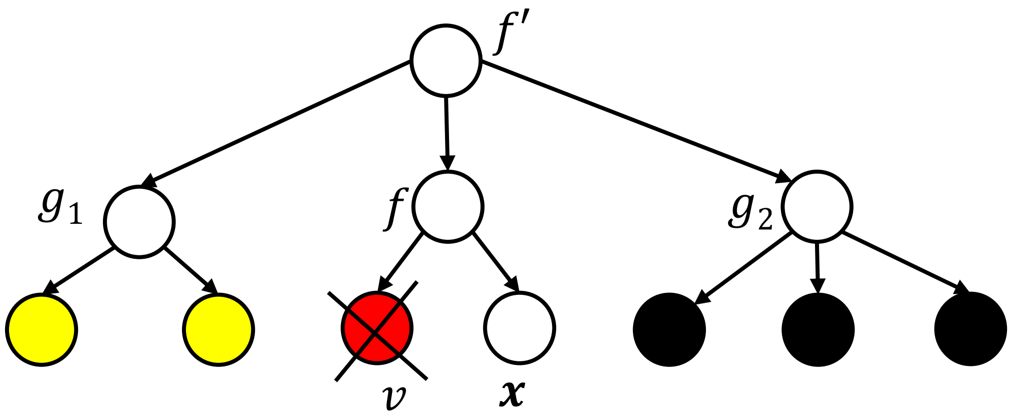
Удаляем вершину.

Если у отца f удаляемой вершины останется 2 сына, то это допустимо для 2-3-дерева.

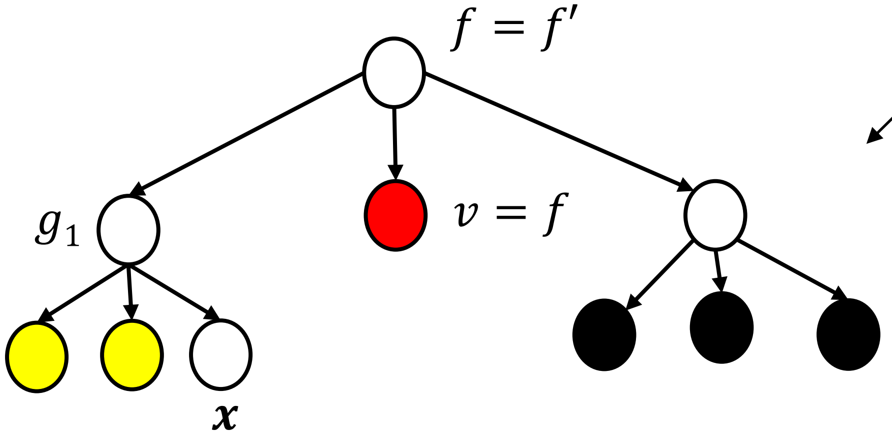
Корректируем метки справочных вершин вдоль пути поиска.

Завершаем процедуру удаления.

случай, когда у отца $\boldsymbol{f}$ удаляемой вершины $\boldsymbol{v}$ останется только один сын $\boldsymbol{x}$:

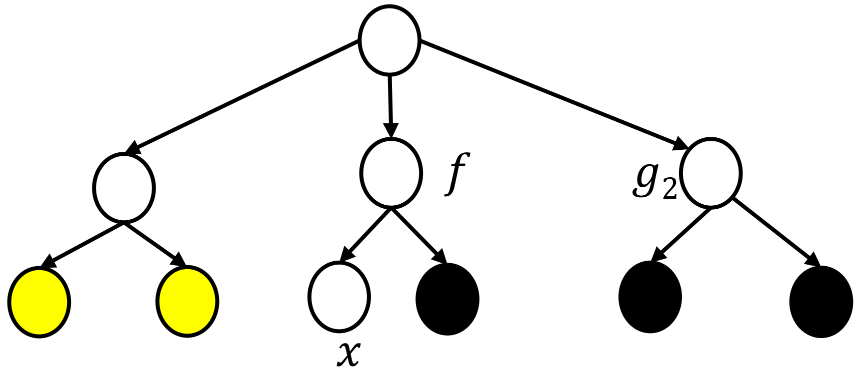


или



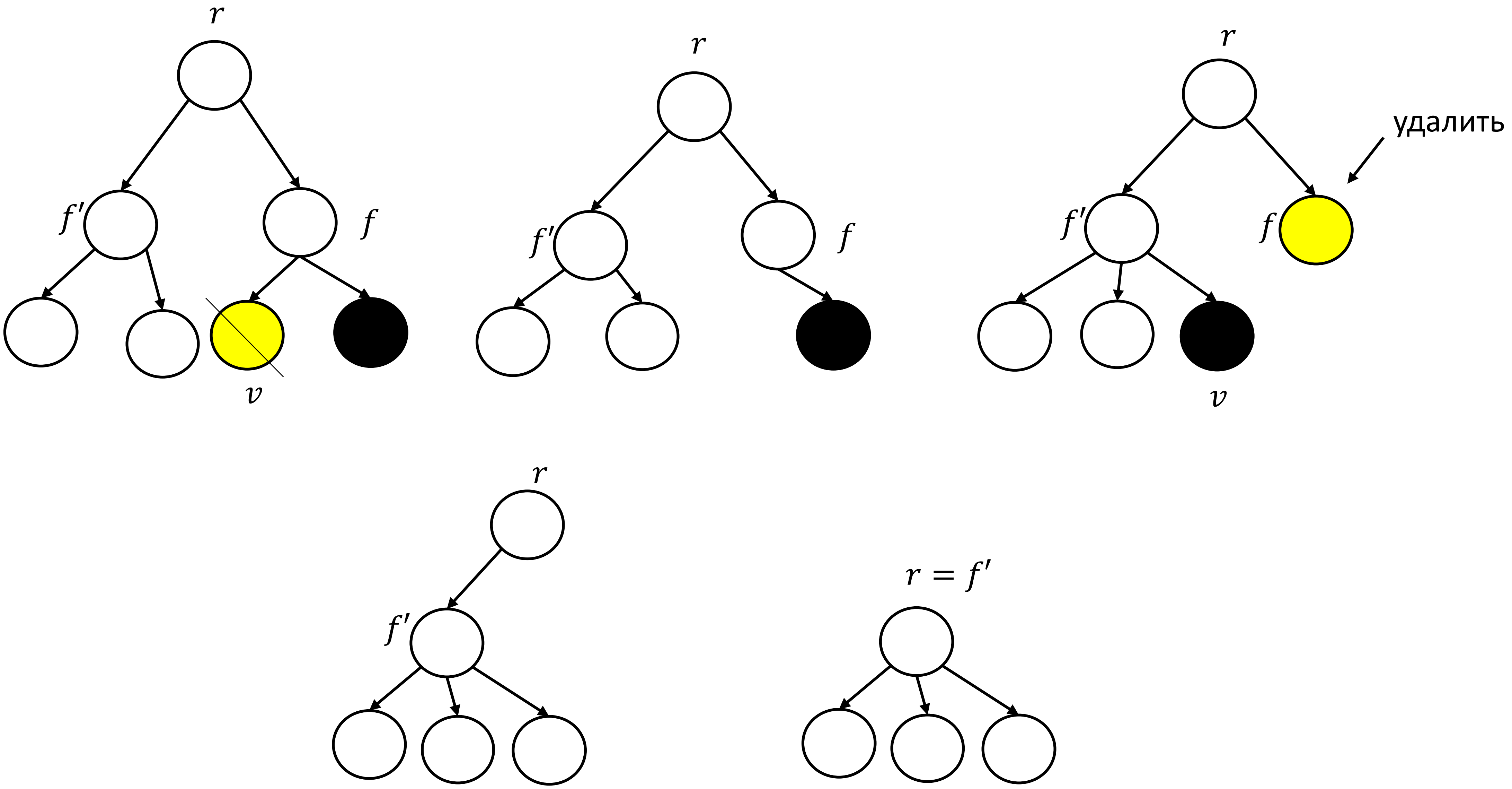
рекурсивно продолжаем удаление:

$$v = f$$
$$f = f'$$



корректируем метки на пути от корня до f;
удаление завершено;

После удаления вершины $\boldsymbol{v}$ высота дерева может уменьшиться на 1:



Оценки

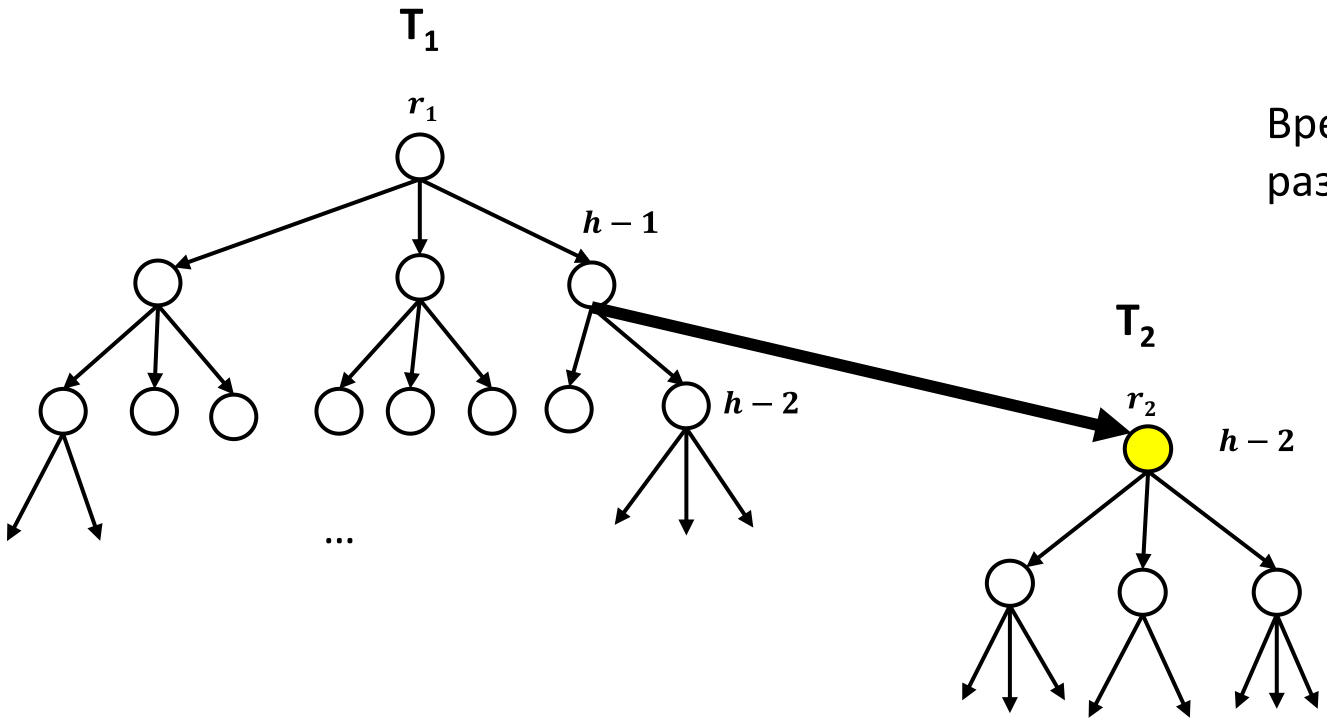
1. Поиск элемента
2. Добавление элемента
3. Удаление элемента

$$\left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} \quad \mathbf{O}(\boldsymbol{log}\ \boldsymbol{n})$$

Важными дополнительными операциями, которые можно эффективно выполнять для 2-3-дерева являются:

- ✓ **Join (T_1,T_2)** – объединение двух 2-3-деревьев, при условии, все ключи в дереве T_1 меньше, чем ключи в дереве T_2
- ✓ **Split ($\boldsymbol{x}$)**– разделение дерева T по ключу $\boldsymbol{x}$ на два дерева T_1 и T_2, при этом ключи всех вершин в дереве T_1 меньше $\boldsymbol{x}$, а в дереве T_2– больше $\boldsymbol{x}$

✓**Join (T1,T2)** – объединение двух 2-3-деревьев, при условии, что все ключи в дереве T_1 меньше, чем ключи в дереве T_2

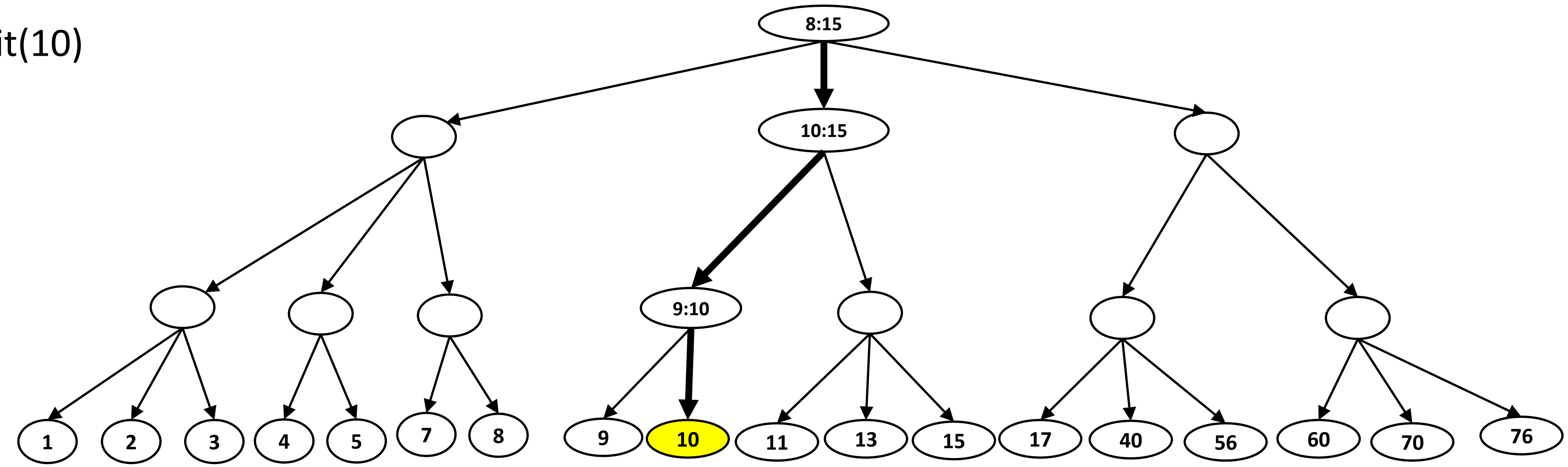


Время работы пропорционально модулю разности высот объединяемых деревьев:

$$|h(T_1) - h(T_2)|$$

✓ **Split (x)**– разделение дерева T по ключу x на два дерева T_1 и T_2, при этом ключи всех вершин в дереве T_1 меньше ключа $\boldsymbol{x}$, а в дереве T_2 – больше $\boldsymbol{x}$

Split(10)



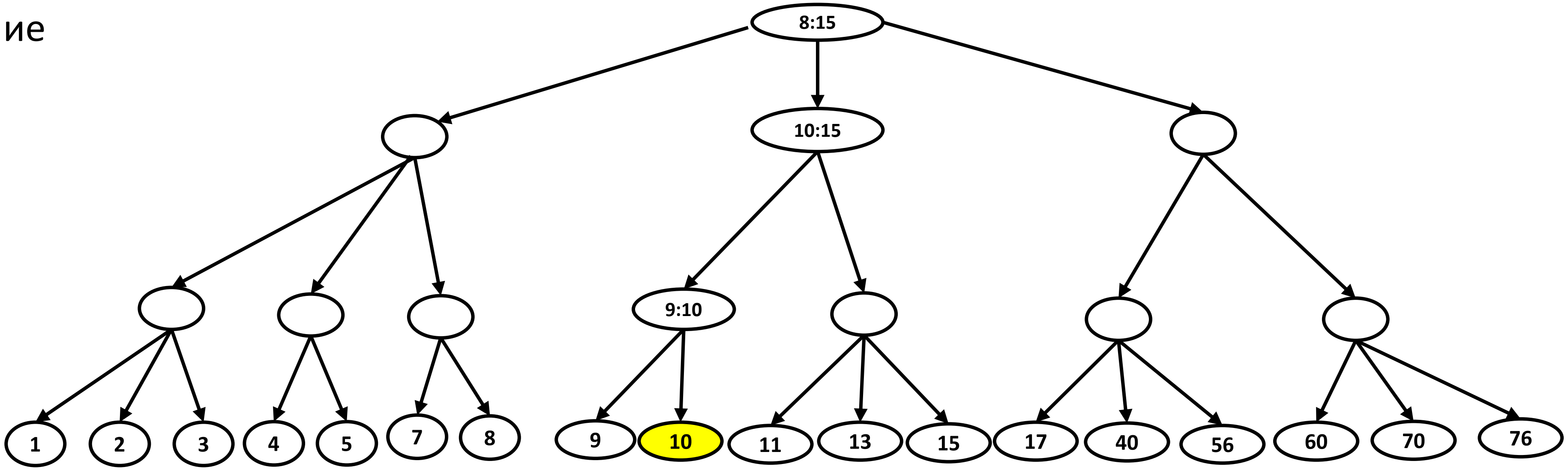
- количество деревьев в каждой из полученных частей не превосходит $-\log \boldsymbol{n}$

- при слиянии деревьев в левой (правой) частях будем всегда выполнять процедуру **Join** над деревьями меньшей высоты, тогда время, затраченное на построение каждого из деревьев T_1 и T_2 - $\mathbf{O}(\log \boldsymbol{n})$

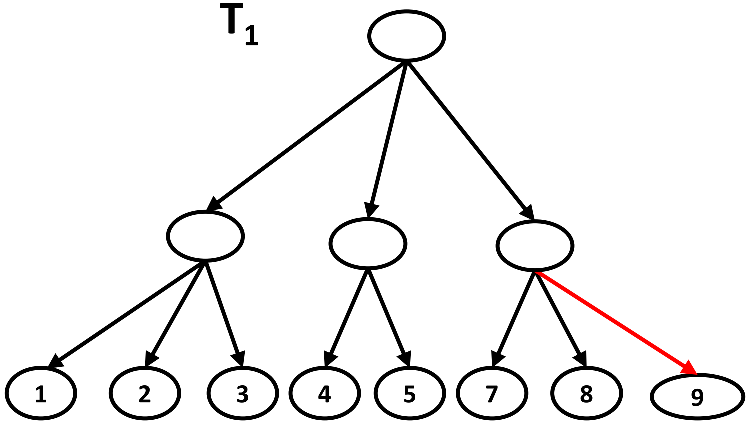
Время выполнения **Split (x)**
$\mathbf{O}(\log \boldsymbol{n})$

продолжение

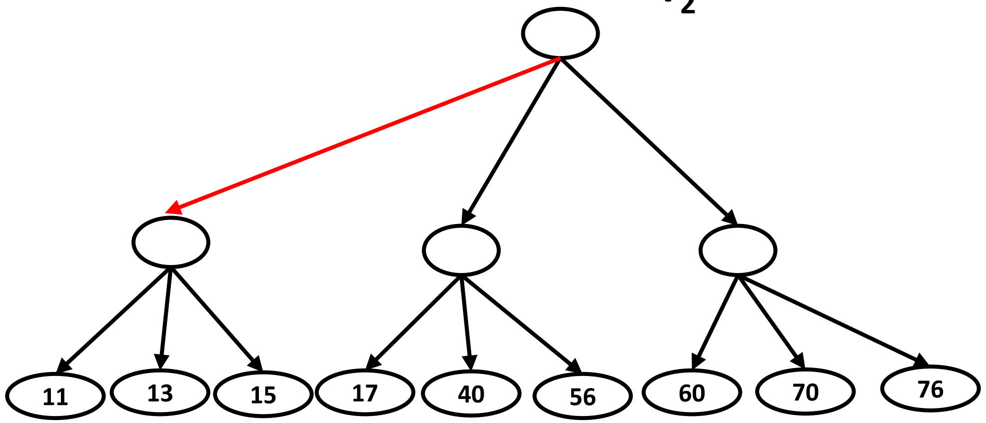
Split (10)



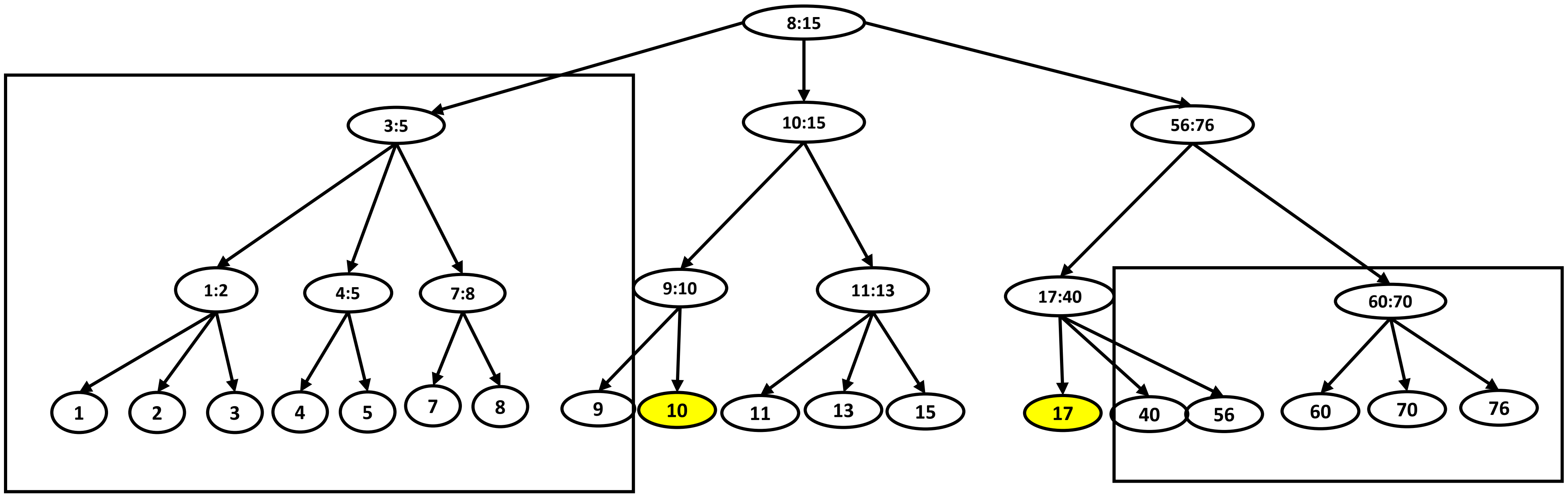
T_1

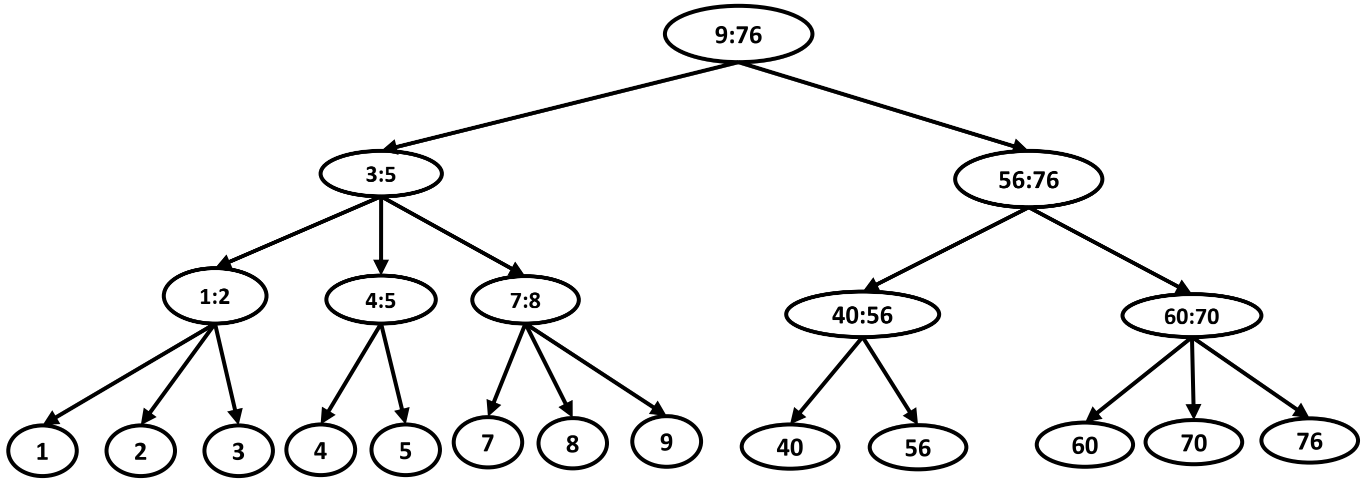


T_2



Удаление из дерева непрерывного участка ключей, лежащих в интервале $[a, b]$





Время работы: $O(\log \boldsymbol{n})$

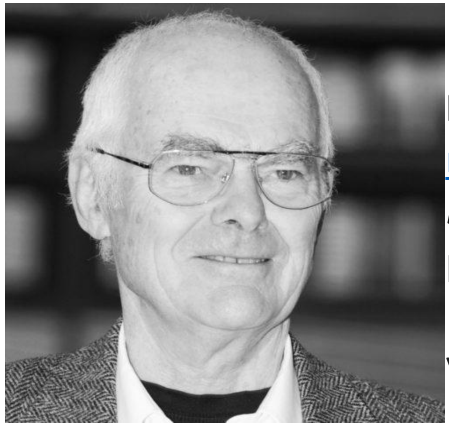
не зависит от размера удаляемого участка

B-дерево

произносится: «би»-дерев)

(*англ.* B-tree)

В **1970 году** Р.Байером и Э.Маккрейтом разработана структура данных **сбалансированного по высоте сильно ветвящегося поискового дерева** (степень ветвления – количество сыновей у вершины на практике, как правило, от 50 до 2000), которое в последствии получило название **В-дерева**.

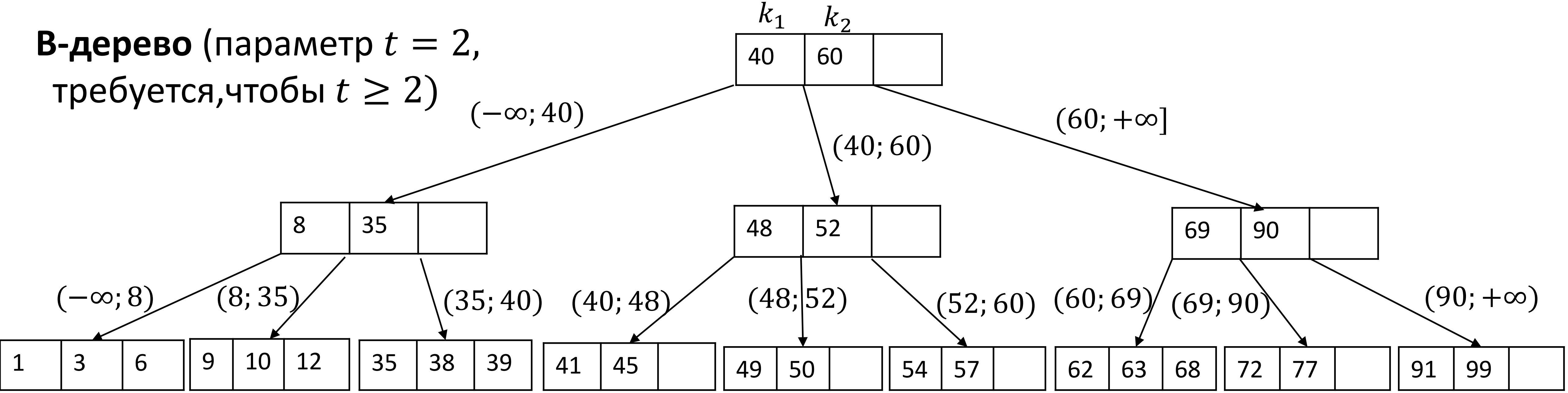


Рудольф Байер нем. *Rudolf Bayer* родился в 1939 немецкий учёный

На практике структура данных используется при обработке больших данных, хранящихся во внешней памяти. Размер вершины В-дерева обычно соответствует размеру дисковой страницы. Большая степень ветвления снижает высоту дерева, что в свою очередь снижает число обращении к внешней памяти, которое необходимо для выполнения операций с В-деревом.

Эдвард Маккрейт англ. *Edward M. McCreight*; родился в 1941 американский учёный

B-дерево (параметр $t = 2$, требуется,чтобы $t \geq 2$)

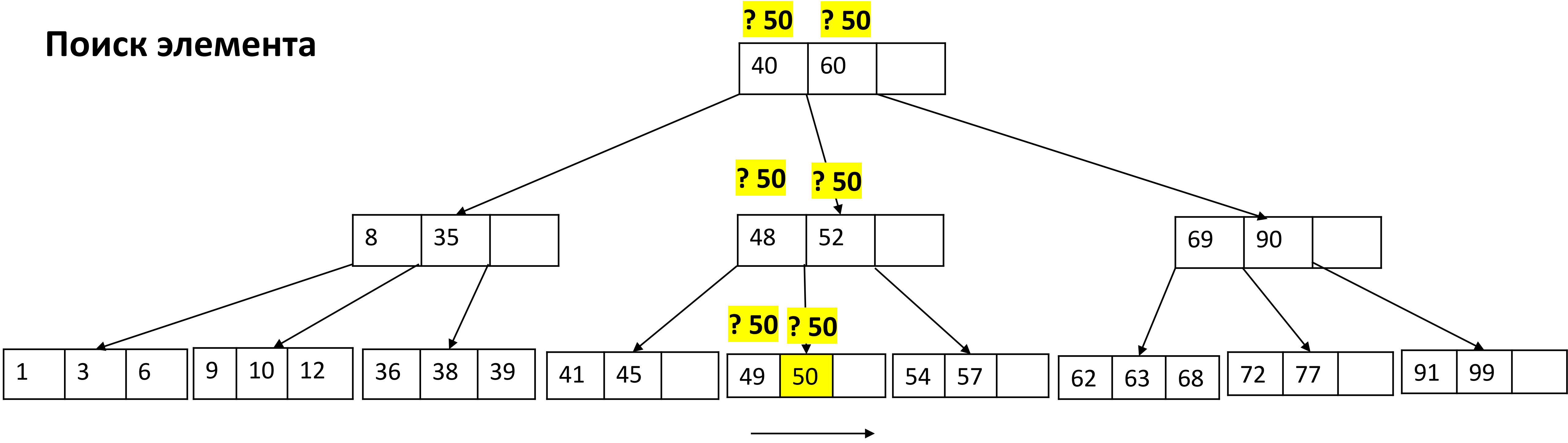


- ✓ корень дерева содержит от $\mathbf{1}$ до $(\mathbf{2}\boldsymbol{t} - \mathbf{1})$ ключей, которые располагаются в порядке возрастания;
- ✓ каждая некорневая внутренняя вершина B-дерева порядка $\boldsymbol{t} \geq \mathbf{2}$ имеет от $\boldsymbol{t} - \mathbf{1}$ до $\mathbf{2}\boldsymbol{t} - \mathbf{1}$ **ключей**, которые располагаются в порядке **возрастания**;
- ✓ если внутренняя вершина содержит $\boldsymbol{n}$ ключей, то она имеет $(\boldsymbol{n} + \mathbf{1})$потомка (у листьев потомков нет);
- ✓ все листья имеют одинаковую глубину;
- ✓ если $k_1, k_2, \dots, k_n$ последовательность ключей, хранящихся в некоторой вершине, то все ключи первого поддерева потомков лежат в диапазоне $(-\infty, k_1)$, второго поддерева – (k_1, k_2), третьего – $(k_2, k_3), \dots, (n+1)$ – $(k_n, +\infty)$.

Пусть B-дерево с параметром $t \geq 2$ содержит n вершин, тогда для его высоты справедливо следующее неравенство:

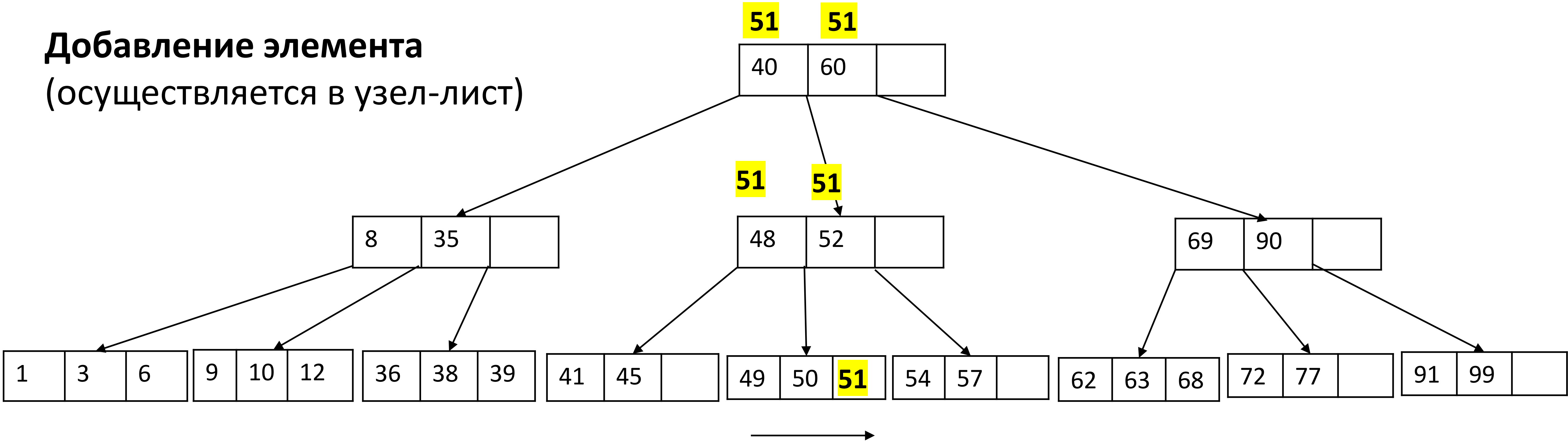
$$h \leq \log_t \frac{n+1}{2}$$

Поиск элемента



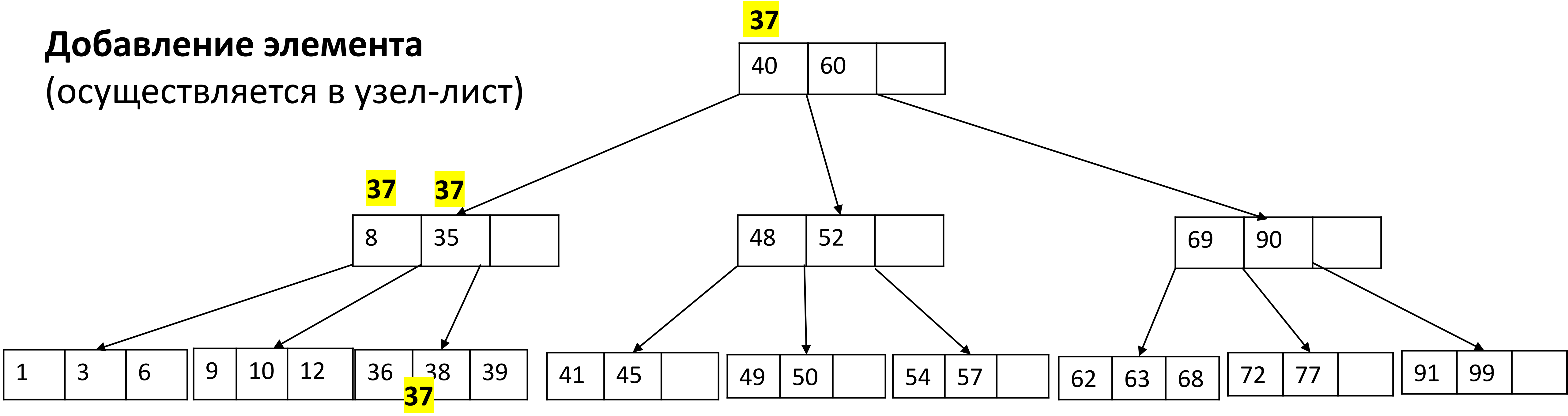
Добавление элемента

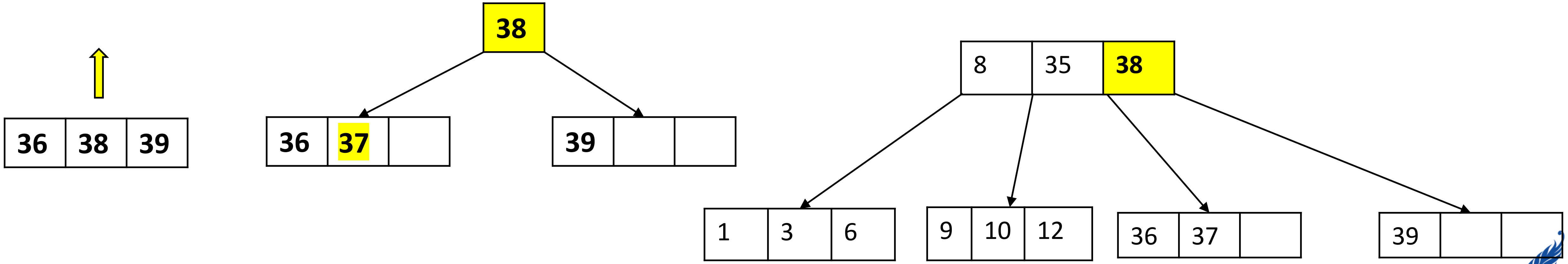
(осуществляется в узел-лист)



Если в листе, в который мы пришли в результате поиска (поиск осуществляем, двигаясь от корня дерева), есть свободная ячейка, то добавляем новый ключ в эту ячейку так, чтобы все ключи листа шли в возрастающем порядке.

Добавление элемента
(осуществляется в узел-лист)





Спасибо за внимание!