02.12.16

Интегрируемость сумм из модулей блоков тригонометрических рядов Фурье и другие задачи анализа

Пусть $\{n_j\}$ и $\{v_j\}$ - последовательности строго возрастающих натуральных чисел, причем $n_j < v_j$ для всех j. Рассмотрим функцию:

$$U(x) := \sum_{j=1}^{\infty} u_j(x), \qquad u_j(x) := \left|\sum_{k=n_j}^{v_j} b_k \sin kx\right|, \tag{1}$$

где $b_k \to 0$ при $k \to \infty$; $\gamma(m) \searrow 0$ при $m \to \infty$ и выполняется неравенство:

$$\sum_{k=m}^{\infty} |b_k - b_{k+1}| \le \gamma(m) \text{ при всех } m \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Согласно неравенству (2):

$$|b_m| = \left|\sum_{k=m}^{\infty}(b_k - b_{k+1})\right| \le \sum_{k=m}^{\infty} |b_k - b_{k+1}| \le \gamma(m);$$

$$|b_m| \le \gamma(m) \tag{3}$$

Лемма 1. *Если числа b_k удовлетворяют следующим условиям: $b_k \to 0$ при $k \to \infty$ и неравенству (2), где $\gamma(m) \searrow 0$, то при всех n, $v \in \mathbb{N} : n \le v$ справедливо неравенство*

$$\left|\sum_{k=n}^{v} b_k \sin kx\right| \le 5\gamma(n) \min\left\{\frac{1}{x}; v-n+1\right\} \text{ при всех } x \in (0;\pi]. \tag{4}$$

□
В силу неравенства треугольника и неравенства (3) следует оценка

$$\left|\sum_{k=n}^{v} b_k \sin kx\right| \le \sum_{k=n}^{v} |b_k| \le \gamma(n)(v-n+1). \tag{5}$$

Теперь докажем следующее неравенство при $x \in (0;\pi]$:

$$\left|\sum_{k=n}^{v} b_k \sin kx\right| \le \frac{5}{x}\gamma(n). \tag{6}$$

Для этого оценим следующее выражение, используя неравенства (2) и (3), а также свойство $\gamma(m)$ (последовательность убывающая к нулю при $m \to \infty$):

$$\left|2\sin\frac{x}{2}\sum_{k=n}^{v} b_k \sin kx\right| = \left|\sum_{k=n}^{v} b_k \cos(k-\frac{1}{2})x - \sum_{k=n}^{v} b_k \cos(k+\frac{1}{2})x\right| =$$

$$= \left|b_n \cos(n-\frac{1}{2})x - \sum_{k=n}^{v-1}(b_k - b_{k+1})\cos(k+\frac{1}{2})x - b_v \cos(v+\frac{1}{2})x\right| \le$$

$$\le |b_n| + \sum_{k=n}^{\infty}|b_k - b_{k+1}| + |b_v| \le \gamma(n) + \gamma(n) + \gamma(v) \le 3\gamma(n).$$

Значит,

$$\left|\sum_{k=n}^{v} b_k \sin kx\right| \le \frac{3\gamma(n)}{2|\sin\frac{x}{2}|} \le \frac{3\pi}{2x}\gamma(n) \le \frac{5}{x}\gamma(n) \quad \text{при } x \in (0;\pi].$$

Из полученных оценок (5) и (6) следует, что

$$\left|\sum_{k=n}^{v} b_k \sin kx\right| \le 5\gamma(n) \min\left\{\frac{1}{x}; v-n+1\right\} \quad \text{при } x \in (0;\pi].$$

■

Замечание 1. Если b_k удовлетворяет условиям леммы 1 и $\gamma(s) = O(\frac{1}{s})$ то для произвольных n и v: $n \le v$ справедливо следующее неравенство при $x \in (0;\pi]$:

$$\left|\sum_{k=n}^{v} b_k \sin kx\right| \le 5\gamma(n) \min\left\{\frac{1}{x}; m\right\}, \text{ где } m = min\left\{v-n+1; \frac{C}{\gamma(n)}\right\}. \tag{7}$$

□ Дополнительно необходимо доказать, что

$$\left|\sum_{k=n}^{v} b_k \sin kx\right| \le C, \quad \text{где } C = const. \tag{8}$$

Т.к. $|b_s| \le \gamma(s)$ и $\gamma(s) = O(\frac{1}{s})$, то существует C_1 такое, что для любого s выполняется неравенство $s|b_s| \le C_1$. Положим

$$\delta_k = \sup_{s \ge k} s|b_s| \le C_1. \tag{9}$$

Пусть при некотором $x \in (0;\pi]$ для произвольных целых чисел $N = N_x$ выполняется следующее условие:

$$\frac{\pi}{N+1} < x \le \frac{\pi}{N}. \tag{10}$$

Представим следующий ряд в виде:

$$\sum_{k \ge n} b_k \sin kx = \sum_{n \le k < n+N} b_k \sin kx + \sum_{k \ge n+N} b_k \sin kx = R + R'.$$

Тогда оценим $|R|$, используя неравенство (9):

$$|R| = \left|\sum_{n \le k < n+N} b_k \sin kx\right| \le \sum_{n \le k < n+N} |b_k||\sin kx| \le \sum_{n \le k < n+N} |b_k| kx \le x\delta_n N \le \frac{\pi}{N}\delta_n N = \pi\delta_n \le \pi C_1. \tag{11}$$

Представим R' в виде:

$$R' = \sum_{k \ge n+N} b_k \sin kx = \sum_{k \ge n+N} \triangle b_k \frac{1}{2}\widetilde{D}_k(x) - b_{n+N}\frac{1}{2}\widetilde{D}_{n+N-1}(x), \quad \text{где } \frac{1}{2}\widetilde{D}_N(x) = \sum_{k=1}^{N} \sin kx.$$

Поскольку $\left|\widetilde{D}_N(x)\right| \le \frac{2\pi}{x}$ при $x \in (0;\pi]$ (см. [2]), то

$$|R'| \le \left|\sum_{k \ge n+N} \triangle b_k \frac{1}{2}\widetilde{D}_k(x)\right| + |b_{n+N}|\left|\frac{1}{2}\widetilde{D}_{n+N-1}(x)\right| \le \frac{\pi}{x}\left(\sum_{k \ge n+N} |\triangle b_k| + |b_{n+N}|\right)$$

Т.к. для b_k справедливы оценки (2) и (3) , а для x оценка - (10), тогда получим

$$|R'| \le 2(n+1)\gamma(n+N) \le 2(n+N)\gamma(n+N) \le 2C_1. \tag{12}$$

Объединяя неравенства (11) и (12), получим

$$\left|\sum_{k\geq n} b_k \sin kx\right| \leq |R| + |R'| \leq \pi C_1 + 2C_1.$$

Следовательно,

$$\left|\sum_{k=n}^{v} b_k \sin kx\right| \leq \left|\sum_{k\geq n} b_k \sin kx\right| + \left|\sum_{k\geq v+1} b_k \sin kx\right| \leq 2\pi C_1 + 4C_1 = C.$$

■

Теорема 1. *Пусть $p \geq 1$ и $k_j := v_j - n_j + 1$, где $n_j, v_j \in \mathbb{N} : n_j \leq v_j$. При $q \in (1-p, 1)$ интеграл $\int_0^\pi \frac{1}{x^q} U^p(x)dx$ сходится, если сходится ряд*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \gamma(n_j)\ k_j^{1-\frac{1-q}{p}}\ .$$

При $q = 1-p$ интеграл $\int_0^\pi \frac{1}{x^q} U^p(x)dx$ сходится, если сходится ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \gamma(n_j) \ln^{\frac{1}{p}}(k_j+1)\ .$$

□

Согласно неравенству Минковского

$$\left(\int_0^\pi \frac{1}{x^q} U^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \left(\int_0^\pi \frac{1}{x^q} u_j^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}\ .$$

С помощью неравенства (4) леммы 1, оценим интеграл $\int_0^\pi \frac{1}{x^q} u_j^p(x)dx$. Получим

$$\int_0^\pi \frac{1}{x^q} u_j^p(x)dx \leq \int_0^\pi \frac{1}{x^q} \left(5\gamma(n_j) \min\left\{\frac{1}{x}; k_j\right\}\right)^p dx = 5^p \gamma^p(n_j) \left[k_j^p \int_0^{\frac{1}{k_j}} \frac{1}{x^q} dx + \int_{\frac{1}{k_j}}^{\pi} \frac{1}{x^{p+q}} dx\right]\ .$$

При $q \in (1-p, 1)$ получим

$$\int_0^\pi \frac{1}{x^q} u_j^p(x)dx \leq 5^p \gamma^p(n_j) \left[k_j^p \frac{x^{1-q}}{1-q}\bigg|_0^{\frac{1}{k_j}} + \frac{x^{1-p-q}}{1-p-q}\bigg|_{\frac{1}{k_j}}^{\pi}\right] =$$

$$= 5^p \gamma^p(n_j) \left[k_j^{p+q-1} \frac{1}{1-q} + \frac{\pi^{1-p-q}}{1-p-q} - k_j^{p+q-1} \frac{1}{1-p-q}\right] \leq$$

$$\leq 5^p\ \gamma^p(n_j)\ k_j^{p+q-1} \left[\frac{1}{1-q} + \frac{\pi^{1-p-q}}{1-p-q} - \frac{1}{1-p-q}\right] = C(p,q)\ \gamma^p(n_j)\ k_j^{p+q-1}\ ,$$

где множитель $C(p,q)$ зависит только от p и q. Следовательно,

$$\left(\int_0^\pi \frac{1}{x^q} U^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \left(C(p,q)\ \gamma^p(n_j)\ k_j^{p+q-1}\right)^{\frac{1}{p}} = C^{\frac{1}{p}}(p,q) \sum_{j=1}^{\infty} \gamma(n_j)\ k_j^{1-\frac{1-q}{p}}\ .$$

В случае $q = 1-p$ получим

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{1}{x^q} u_j^p(x)dx \le 5^p \gamma^p(n_j) \left[k_j^p \frac{x^p}{p}\Bigg|_0^{\frac{1}{k_j}} + \ln x \Bigg|_{\frac{1}{k_j}}^{\pi} \right] = 5^p \gamma^p(n_j) \left[\frac{1}{p} + \ln \pi + \ln k_j \right] \le C(p) \gamma^p(n_j) \ln(k_j{+}1) \ ,$$

а значит,

$$\left(\int\limits_0^{\pi} \frac{1}{x^q} U^p(x)dx \right)^{\frac{1}{p}} \le \sum_{j=1}^{\infty} \left(C(p)\gamma^p(n_j) \ln(k_j+1) \right)^{\frac{1}{p}} = C^{\frac{1}{p}}(p) \gamma(n_j) \ln^{\frac{1}{p}}(k_j+1) \ .$$

$\blacksquare$

Теорема 2. *Пусть $p \in (0;1)$ и $k_j := v_j - n_j + 1$, где $n_j,\, v_j \in \mathbb{N} : n_j \le v_j$. При $q \in (1-p, 1)$ интеграл $\int_0^{\pi} \frac{1}{x^q} U^p(x)dx$ сходится, если сходится ряд*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \gamma^p(n_j)\ k_j^{p+q-1} \ .$$

При $q = 1-p$ интеграл $\int_0^{\pi} \frac{1}{x^q} U^p(x)dx$ сходится, если сходится ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \gamma^p(n_j) \ln(k_j+1) \ .$$

$\square$

Воспользуемся неравенством:

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{1}{x^q} U^p(x)dx \le \sum_{j=1}^{\infty} \int\limits_0^{\pi} \frac{1}{x^q} u_j^p(x)dx \ .$$

Аналогично доказательтву теоремы 1 оценим интеграл $\int_0^{\pi} \frac{1}{x^q} u_j^p(x)dx$.
При $q \in (1-p, 1)$ получим

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{1}{x^q} U^p(x)dx \le C(p,q) \sum_{j=1}^{\infty} \gamma(n_j)\ k_j^{1-\frac{1-q}{p}} \ .$$

где множитель $C(p,q)$ зависит только от p и q. Следовательно,
В случае $q = 1-p$ получим

$$\left(\int\limits_0^{\pi} \frac{1}{x^q} U^p(x)dx \right)^{\frac{1}{p}} \le \sum_{j=1}^{\infty} \left(C(p)\gamma^p(n_j) \ln(k_j+1) \right)^{\frac{1}{p}} = C^{\frac{1}{p}}(p) \gamma(n_j) \ln^{\frac{1}{p}}(k_j+1) \ .$$

$\blacksquare$

Пример 1. Пусть $f(x) := x + (x+2)^{\alpha} \ln^{\beta}(x+2) \ln^{\gamma}(\ln(x+2)),\ \alpha > 0,\ \beta \ge 0,\ \gamma \ge 0$ при $x \ge 1$. Обозначим $n_j := [f(j)];\ v_j := n_{j+1} - 1,\ j \in \mathbb{N}$. Для n_j и v_j выполяются условия теоремы 1 и $k_j := v_j - n_j + 1 = n_{j+1} - n_j$.

Рассмотрим случай $\alpha > 1$, тогда при $p \ge 1$ и $q \in (1-p; 1)$ интеграл $\int_0^{\pi} \frac{1}{x^q} U^p(x)dx$ сходится, если сходится ряд $\sum_{j=1}^{\infty} \gamma(n_j)\ k_j^{1-\frac{1-q}{p}}$.

Положим $\gamma(n_j) := \frac{1}{n_j^{\mu}}$ при $\mu \in (0;1)$. Исследуем на сходимость ряд $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{k_j^{1-\frac{1-q}{p}}}{n_j^{\mu}}$.
Т.к. $k_j \sim \alpha j^{\alpha-1} \ln^{\beta} j \ln^{\gamma}(\ln j)$ при $j \to \infty$. Тогда

$$\frac{k_j^{1-\frac{1-q}{p}}}{n_j^{\mu}} \sim \frac{\alpha^{1-\frac{1-q}{p}}}{j^{\alpha(\frac{1-q}{p}+\mu-1)-\frac{1-q}{p}+1} \cdot \ln^{\beta(\mu-1+\frac{1-q}{p})} j \cdot \ln^{\gamma(\mu-1+\frac{1-q}{p})}(\ln j)}\,.$$

Полученный эквивалентный ряд сходится, если $\alpha(\frac{1-q}{p}+\mu-1)-\frac{1-q}{p}>0$. Т.к. $\alpha>1$ и $\frac{1-q}{p}\in(0;1)$, то $\frac{1-q}{p}+\mu-1>0$. Следовательно, $1-p<q<1-p(1-\mu)<1$. Что доказывает существование такого q, что ряд $\sum_{j=1}^{\infty}\gamma(n_j)\ k_j^{1-\frac{1-q}{p}}$ сходится при $\gamma(n_j):=\frac{1}{n_j^{\mu}},\ \ \mu\in(0;1)$.

Список литературы

1. Теляковский С. А. Добавление к работе В. П. Заставного "Оценки сумм из модулей блоков тригонометрических рядов Фурье"// Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 4. с. 277-281.

2. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении /Р. Эдвардс. – М: Мир, 1985. - Т. 1, с. 133-141.