Кейс: Разработка программы-симулятора работы детектора ионизирующего излучения

Количество исполнителей: 2

Цель работы: разработка симулятора работы детектора ионизирующего излучения

Теоретическая часть

Основной и необходимой частью всех приборов, регистрирующих ионизирующее излучение, являются детекторы. Детекторы ионизирующего излучения - устройства, преобразующие энергию радиоактивного излучения в другие виды энергии, удобные для регистрации. Наибольшее распространение получили детекторы, в которых энергия заряженных частиц или фотонов излучения переходит в конечном итоге в электрическую, которая и регистрируется. Прохождение частиц через чувствительный объем такого детектора сопровождается импульсами электрического тока на выходе детектора. Количество импульсов в единицу времени (I), или скорость счета, пропорционально числу частиц или фотонов, образующихся в препарате за то же самое время (A): $I = f(A)$. Величина A называется активностью препарата и равна $A = dN/dt$ [Бк], где dN, - число самопроизвольных ядерных превращений за промежуток времени dt. [1]

По принципу регистрации различают следующие типы детекторов: ионизационные, сцинтилляционные, полупроводниковые и др. Подробнее с этими типами детекторов вы познакомитесь позднее в процессе обучения.

Расчет геометрического фактора

Геометрический фактор G учитывает, что только часть частиц движется к детектору, т.е. величина G определяет часть частиц, испускаемых источником, которая попадает в чувствительный объем детектора. Формула определения геометрического фактора.

$$G = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\theta_1} \sin\theta d\theta = \frac{1}{2}\left(1-\cos\theta_1\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{h}{\sqrt{h^2+r^2}}\right) \quad (1)$$

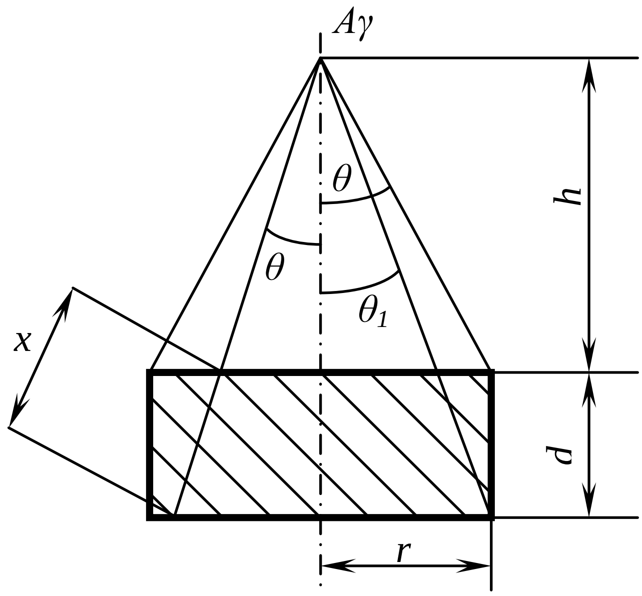

Рисунок 1. Геометрия регистрации ионизирующего излучения. r-радиус кристалла, d – толщина, h – расстояние от источника до детектора, Θ – угол между направлением нормали и углом падения частицы

Задача о нахождении точки пересечении прямой и плоскости

Пусть требуется найти точку пересечения прямой

$$\frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{p} \qquad (2)$$

С плоскостью

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (3)$$

Для этого нужно совместно решить систему уравнений (2) и (3). Проще всего это сделать с помощью параметрических уравнений прямой:

$$\begin{cases} x = x_1 + mt \\ y = y_1 + nt \\ z = z_1 + pt \end{cases} \qquad (4)$$

Каждому значению параметра t соответствует точка прямой. Нужно выбрать такое значение t, при котором точка прямой будет лежать на плоскости (3). Подставляя x,y,z их уравнений (4) в уравнение плоскости (3), получим уравнение, из которого найдем значение параметра t:

$$A(x_1 + mt) + B(y_1 + nt) + C(z_1 + pt) + D = 0,$$

или

$$t(Am + Bn + Cp) = -(Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D) \quad (5)$$

Если прямая и плоскость не параллельны друг другу, т.е. если Am+Bn+Cp≠0, то из равенства (5) найдем значение t:

$$t = -\frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{Am + Bn + Cp} \qquad (6)$$

Подставляя найденное значение t в параметрические уравнения прямой, найдём координаты точки пересечения прямой с плоскостью.

Рассмотрим теперь случай, когда $Am+Bn+Cp=0$. Как известно, это условие означает, что нормальный вектор $\vec{N} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ плоскости и направляющий вектор $\vec{s} = m\vec{i} + n\vec{j} + p\vec{k}$ прямой перпендикулярны друг другу. Здесь возможны два случая:

а) $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D \neq 0$. Это значит, что точка $M_1(x_1; y_1; z_1)$ прямой не лежит в плоскости $Ax+By+Cz+D=0$. Так как, кроме того, $Am+Bn+Cp=0$, то прямая и плоскость параллельны друг другу и, следовательно, не имеют ни одной общей точки. Этот же результат непосредственно следует из соотношения (5), которое, очевидно, не выполняется ни при каком значении параметра t.

б) $x_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$. Это значит, что точка $M_1(x_1; y_1; z_1)$ лежит в плоскости $Ax+By+Cz+D=0$. Так как, кроме того, векторы **N** и **s** перпендикулярны, то отсюда заключаем, что прямая лежит в данной плоскости. Этот же результат можно получить и из соотношения (5), которое при условиях $Am+Bn+Cp=0$ и $Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$ примет вид 0t=t и удовлетворяется при любом значении t.

Таким образом, одновременное выполнение равенств

$$\begin{cases} Am+Bn+Cp=0 \\ Ax_1+By_1+Cz_1+D=0 \end{cases} \qquad (7)$$

дает условие того, что прямая $\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}$ лежит в плоскости $Ax+By+Cz+D=0$.

Пример:

Найти точку пересечения $\frac{x-1}{m}=\frac{y+1}{n}=\frac{z-5}{2}$ с плоскостью $2x+3y-2z+2=0$

Решение. Запишем уравнение данной прямой в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x=2t+1 \\ y=3t-1 \\ z=2t+5 \end{cases}$$

Подставив эти выражения для x,y,z в уравнение плоскости:

$$2(2t+1)+3(3t-1)-2(2t+5)+2=0.$$

Отсюда $t=1$. Подставляя в параметрические уравнения прямой t=1, получаем: $x=2*1+1=3;$ $y=3*1-1=2;$ $z=2*1+5=7$. Итак, точкой пересечения прямой с плоскостью будет точка M(3;2;7).

Пересечение луча и куба

Поверхность первого порядка в пространстве описывается уравнением:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

A, B, C - составляющие вектора нормали плоскости,

D – кратчайшее расстояние от начала координат до плоскости

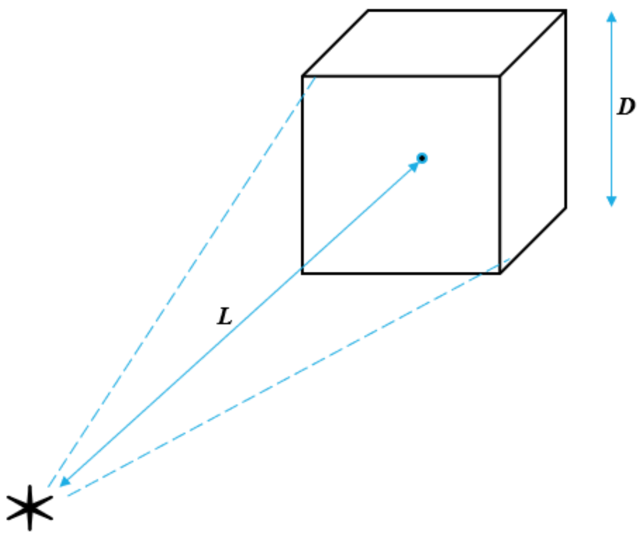

Рисунок 2. Модель куба и источника излучения

Если *A =0, B и C* имеют не нулевые значения, то уравнение

$$By + Cz + D = 0$$

описывает плоскость, параллельную оси *x* и ортогональную координатной плоскости *YZ*.

При *B* и *C* равных нулю и *A* имеющее значение не равно нулю, то уравнение

$$Ax + D = 0$$

описывает плоскость, параллельную оси *X* и ортогональную координатной плоскости *YZ*.

Трех точек, не лежащих на одной прямой, достаточно чтобы задать плоскость в пространстве

$$\begin{vmatrix} y_0 & z_0 & 1 \\ y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} z_0 & x_0 & 1 \\ z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} z + \begin{vmatrix} z_0 & x_0 & y_0 \\ z_1 & x_1 & y_1 \\ z_2 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$$

где x_0, y_0, z_0 координаты точки 1, x_1, y_1, z_1 координаты точки 2, x_2, y_2, z_2 координаты точки 3.

Взаимодействие гамма-излучения с веществом

Гамма-излучение - это вид электромагнитного излучения, которое имеет очень высокую энергию и короткую длину волны. Это излучение способно проникать через различные материалы. Когда говориться о взаимодействии гамма-излучения с веществом, имеется ввиду, как это излучение взаимодействует с атомами и молекулами вещества, через которое оно проходит.

Одним из важных понятий в этой области является "сечение взаимодействия". Сечение взаимодействия - это своего рода мера, которая показывает, насколько вероятно, что гамма-излучение взаимодействует с атомами вещества. Вы можете представить себе сечение взаимодействия как целевую мишень для гамма-квантов. Чем больше сечение взаимодействия, тем выше вероятность того, что гамма-квант взаимодействует с атомами вещества на своем пути.

Рисунок 3. Виды взаимодействия гамма-квантов с веществом

Существует несколько основных способов взаимодействия гамма-излучения с веществом. Один из них — это фотоэффект. В этом процессе гамма-квант передает всю свою энергию атому, выбивая из него электрон. Еще одним способом является комптоновское рассеяние, при котором гамма-квант сталкивается с электроном и теряет лишь часть своей энергии, изменяя направление движения. Есть также процесс образования электрон-позитронных пар, при котором гамма-квант создает электрон и позитрон - античастицу электрона. Следовательно, взаимодействие гамма-излучения с веществом можно характеризовать двумя значениями Σ_C и Σ_S, которые носят названия **сечение полного поглощения** *(когда гамма-квант теряет всю энергию)* и **сечением рассеяния** *(когда гамма-квант теряет лишь часть энергии)*.

Сумма этих сечений называется полным сечением

$$\sum = \sum_C + \sum_S$$

Где $\sum$ - полное сечение взаимодействия, $\sum_C$ – сечение реакции полного поглощения, $\sum_S$ - сечение реакции рассеивания частицы

Вероятность того, что произойдет поглощение частицы атомом вещества:

$$\frac{\Sigma_S}{\Sigma} + \frac{\Sigma_C}{\Sigma} = 1$$

$$P_C = \frac{\Sigma_C}{\Sigma}$$

Вероятность того, что произойдет рассеивание частицы атомом вещества:

$$P_S + P_C = 1$$

$$P_S = \frac{\Sigma_S}{\Sigma}$$

Где P_C – вероятность полного поглощения относительно реакции рассеивания, P_S – вероятность рассеивания относительно реакции полного поглощения.

Когда говорится о взаимодействии гамма-квантов с веществом подразумевается отдельные столкновения частицы с атомами вещества. На своем пути гамма-квант сталкивается с атомами и молекулами этого материала. Длина свободного пробега (обозначается как λ) - это расстояние, которое гамма-квант проходит, прежде чем столкнуться с каким-либо атомом и взаимодействовать с ним.

Таким образом, длина свободного пробега гамма-излучения - это мера того, насколько далеко гамма-квант может пройти в материале, прежде чем он будет взаимодействовать с атомами этого материала.

Для гамма-излучения длина свободного пробега зависит от плотности материала и его состава. Если материал имеет большую плотность или содержит много атомов, то длина свободного пробега будет меньше, потому что гамма-кванту придется сталкиваться с атомами на более коротких расстояниях. С другой стороны, в материалах с меньшей плотностью или меньшим количеством атомов длина свободного пробега будет больше, потому что гамма-квантам будет легче пройти между атомами.

Таким образом, понимание длины свободного пробега помогает предсказать, как гамма-излучение будет взаимодействовать с материалами и как далеко оно сможет проникнуть в вещество перед тем, как быть поглощенным или рассеянным.

Длина свободного пробега λ *- путь который пройдет частица между столкновениями. Это случайная величина и может принимать любые положительные значения с плотностью вероятностей.*

Закон экспоненциального распределения:

$$P(x) = \Sigma \cdot exp(-\Sigma \cdot x)$$

Где Σ – полное сечение взаимодействия, x – пройденный путь частицы.

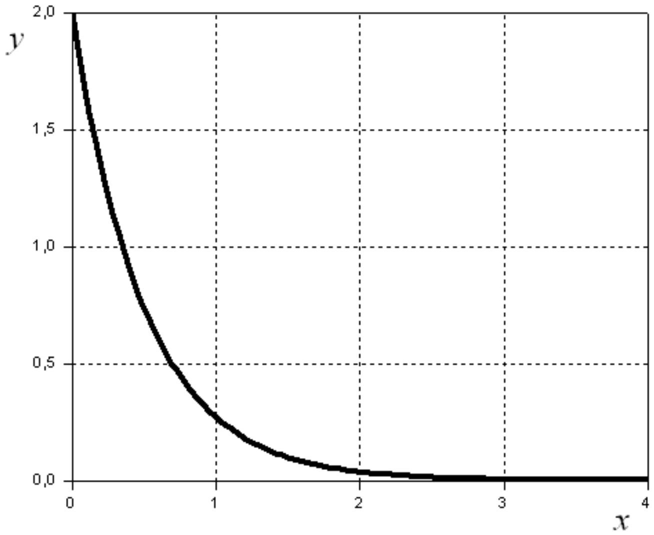

Рисунок 4. Зависимость вероятности не провзаимодействовать гамма-кванту с веществом от пройденного пути в веществе

Закон экспоненциального распределения - это математическая модель, которая описывает вероятность того, что случайная величина останется непроизведенной в течение определенного времени или расстояния. В данном случае это означает вероятность не провзаимодействовать гамма-кванту с веществом на протяжении пути x.

С помощью данной функции можно найти среднюю длину свободного пробега:

Математическое ожидание длины свободного пробега:

$$M\lambda = \int_0^\infty x \cdot p(x)dx = \int_0^\infty x \cdot \Sigma \cdot exp(-\Sigma \cdot x)dx$$

После вычислений получается средняя длина свободного пробега:

$$M\lambda = \frac{1}{\Sigma}$$

Однако в данной работе будет использоваться алгоритм по созданию случайной длины свободного пробега. Для этого рассмотрим функцию закона экспоненциального распределения – интеграл по всей её длине будет равняться 1. Это означает, что гамма-квант, что пролетит бесконечное расстояние провзаимодействует в вероятностью в 100%.

$$\int_0^{\infty} p(x)dx = 1$$

Тогда, пусть, шанс взаимодействия на некотором отрезке (a,b) длиной (a, ξ) будет равен γ.

$$\int_a^{\xi} p(x)dx = \gamma$$

Следовательно, γ на случайном отрезке (a, ξ) будет случайной величиной от 0 до 1, а точка ξ будет являться длиной свободного пробега λ. Тогда раскроем формулу закона экспоненциального распределения и найдём выражение для свободного пробега:

$$\int_a^{\lambda} \Sigma \cdot exp(-\Sigma \cdot x)dx = \gamma$$

$$1 - exp(-\Sigma \cdot \lambda) = \gamma$$

$$\lambda = -\frac{1}{\Sigma} ln(1 - \gamma)$$

$$\lambda = -\frac{1}{\Sigma} ln(\gamma)$$

Где γ – случайная величина от 0 до 1

По этим данным также можно найти координаты взаимодействия с веществом, зная точку контакта гамма-кванта с веществом.

$$x_{n+1} = x_n + \lambda_n * \sin(\theta_x)$$

$$y_{n+1} = y_n + \lambda_n * \sin(\theta_y)$$

$$z_{n+1} = z_n + \lambda_n * \sin(\theta_z)$$

где $\theta_X, \theta_Y, \theta_Z$ - углы между траекторией движения частицы и осями координат.

Если использовать систему единичных векторов, то будет:

$$x_{n+1} = x_n + \lambda_n * l$$

$$y_{n+1} = y_n + \lambda_n * \mathrm{n}$$

$$z_{n+1} = z_n + \lambda_n * \mathrm{m}$$

Определение сечений взаимодействия гамма-излучения с веществом

Для регистрации фотонов практическое значение имеют следующие три процесса [2]:

- Фотоэлектрическое поглощение (фотоэффект),
- Рассеяние фотонов на свободных электронах (комптоновское рассеяние) и
- Рождение фотоном в кулоновском поле ядра или электрона пары позитрон-электрон (образование пар)

Полное сечение взаимодействия фотонов с электронами атомов складывается из:

- сечения фотоэффекта,
- сечения комптоновского рассеяния и
- сечения образования пар

Фотоэффект

Этот процесс происходит, когда гамма-квант попадает на атом и передает всю свою энергию электрону, вырывая его из атома. Этот процесс особенно сильно выражен при низких энергиях гамма-излучения и приводит к ионизации атома.

$$\sigma_{\text{ф}} = 6{,}651 \cdot 10^{-25} \cdot 4 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{Z^5}{137^4}\left(\frac{mc^2}{E}\right)^{7/2}$$

где mc^2 – энергия покоя электрона равная 0,511 МэВ, E- энергия фотона, а Z – заряд атома

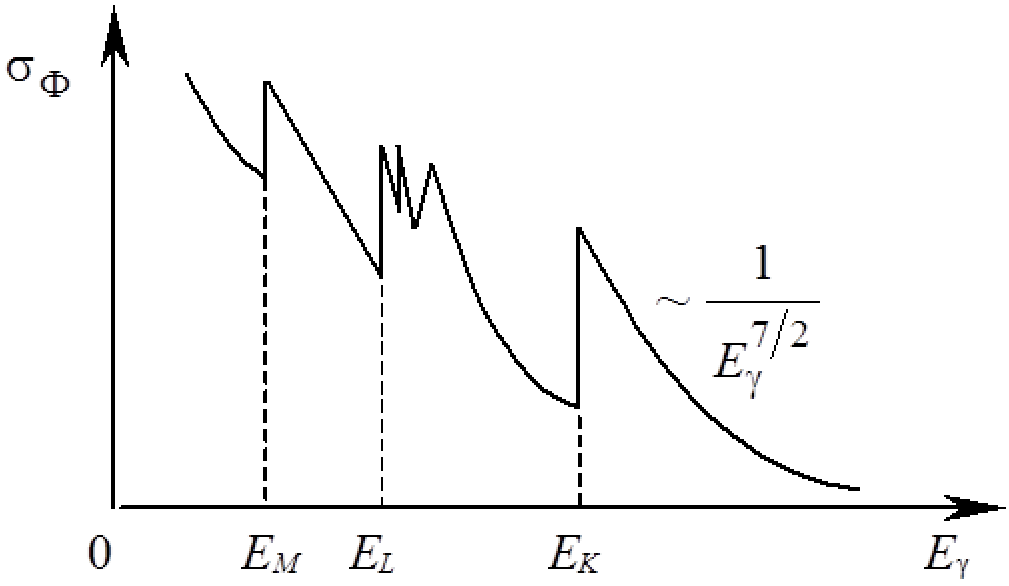

Рисунок 5. Зависимость сечения фотоэффекта от энергии гамма-кванта.

Комптон эффект

Гамма-квант сталкивается с электроном и передает ему часть своей энергии, меняя свое направление движения. В результате этого процесса электроны приобретают энергию и могут вызывать ионизацию других атомов.

$$\sigma_К = 6{,}651 \cdot 10^{-25} \frac{3 \cdot Z}{8 \cdot \gamma} \left\{ \left[1 - \frac{2(\gamma + 1)}{\gamma^2} \right] \ln(2 \cdot \gamma + 1) + \frac{1}{2} + \frac{4}{\gamma} - \frac{1}{2 \cdot (2\gamma + 1)^2} \right\}$$

где $\gamma = {}^{E}/_{m_0 c^2}$

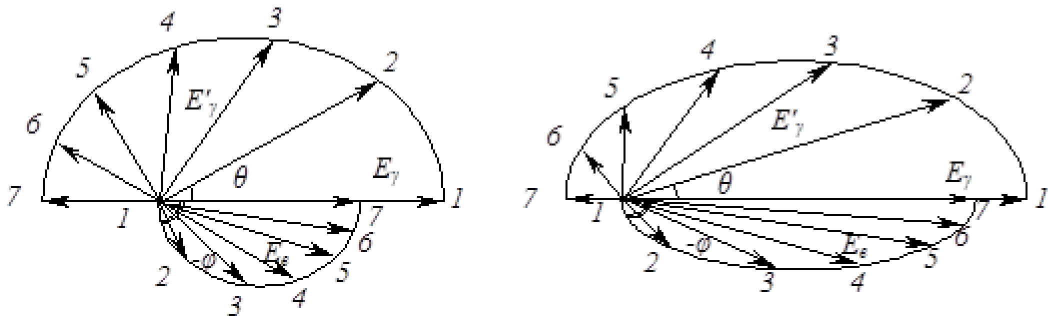

Рисунок 6. - Полярные диаграммы рассеяния фотонов на свободных электронах. Слева для E_γ = 0,64 МэВ, справа для E_γ = 2,55 МэВ.

Энергия гамма-кванта после взаимодействия:

$$\grave{E}_\gamma = \frac{E_\gamma}{1 + \frac{E_\gamma}{m_e * c^2} * (1 - cos\theta)}$$

Где $\gamma = {E_\gamma}/{\mathrm{m}_e \mathrm{c}^2}$

Образование пар

При достаточно высоких энергиях гамма-квант может превратиться в электрон и позитрон (античастица электрона). Это происходит вблизи ядра, где сильные электромагнитные поля могут создавать пары из гамма-квантов.

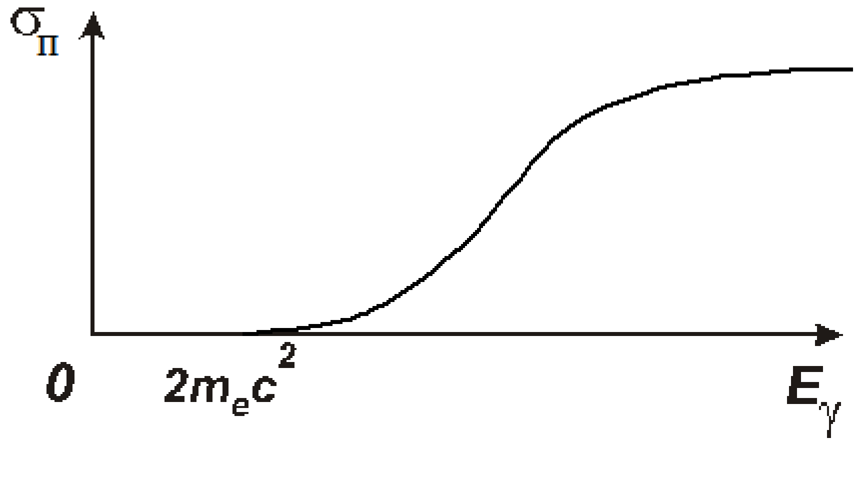

Рисунок 7. – сечение образования пар в зависимости от энегии.

Процесс образования пар происходит только при энергиях фотонов, превышающих суммарную энергию покоя электрона и позитрона, т.е. при

$$E_{\gamma} > 2 * m_0 * c^2$$

Аппаратурный спектр гамма-излучения

При правильной работе программы-симулятора детектора ионизирующего излучения на выходе на данный момент будет получаться идеальный спектр от источника излучения. Однако при работе с настоящими детекторами спектр будет значительно отличаться из-за влияния неоднородности материала детектора, шумы и нестабильности усилителя и т.д. Ключевым отличием между идеальным спектром от источника и аппаратурным является расширение полученных пиков по формуле распределения Гаусса.

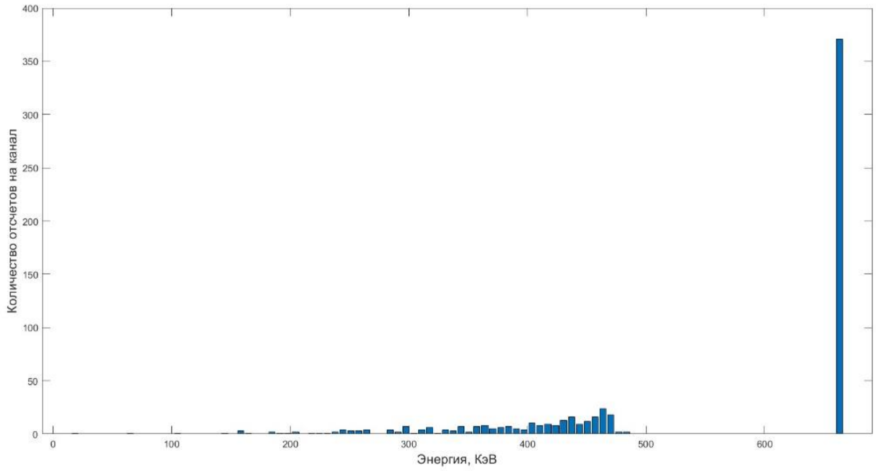

Рисунок 8. – пример идеального спектра Cs-137 без учета аппаратуры

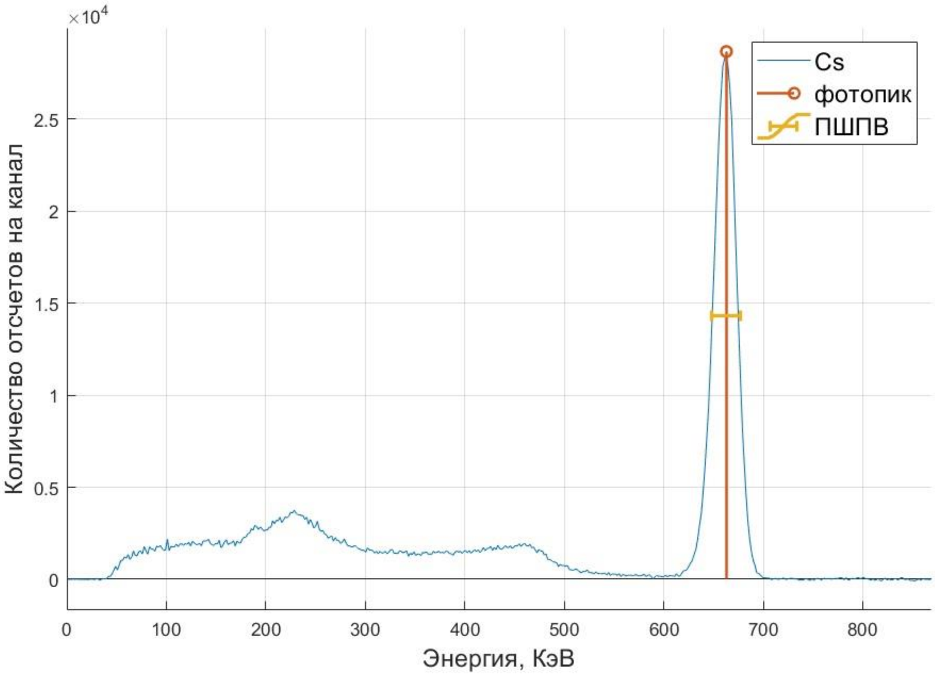

Рисунок 9. – пример аппаратурного спектра от Cs-137

Важным аспектом расширенного пика является его ширина пика полного поглощения моноэнергетического излучения на его половине высоте (ПШПВ). Данная характеристика показывает степень неопределённости (флуктуаций) пика и зависит от энергии частицы, т.к. частица с большей энергией на пути поглощения вызывает образования большего числа частиц, каждая из которых добавляет неопределённость к пику полного поглощения [1].

Для придания спектру аппаратного вида можно воспользоваться данной формулой для каждого промоделированного ранее значения количества отчетов. [3]

$$FW(E) = F * \sqrt{E}$$

$$\sigma = \frac{FW(E)}{2 * \sqrt{2 * ln2}}$$

$$N(E, i, \sigma) = \frac{N_{old}(E)}{\sigma * \sqrt{2\pi}} * \exp(\frac{-(i - P)^2}{2 * \sigma^2})$$

Где $FW(E)$ – ПШПВ исправленного пика, F – произвольный коэффициент зависящий от аппаратуры (в данной работе можете считать его равным 1), $N_{old}(E)$ – ранее высчитанное значение отчетов для данной энергии E, P – номер пика центра фотопика, i – номер канала

По итогу получится набор нормальных распределений в количестве равному числу каналов, для которых было произведена модуляция. Далее все эти отдельные спектры необходимо сложить в единый аппаратурного спектр.

Практическое задание

Задача состоит в разработке программы-симулятора работы детектора ионизирующего излучения. Для решения задачи можно использовать любой язык программирования.

В качестве источника излучения выбирается точка на некотором расстоянии от детектора. Из этой точки с помощью генератора случайных чисел задается n лучей (прямых), направленных в случайные стороны (в идеальном случае при большом n лучи разлетаются в 4π) и симулирующих излучение (здесь не имеет значения, какой тип излучения с какой энергией регистрируется, задача сугубо геометрическая). Зарегистрированными считаются лучи, пересекающиеся с поверхностью (объёмом) детектора (см задачу о пересечении прямой и плоскости).

Далее нужно рассчитать долю лучей, попавших в объём детектора к совокупному числу лучей и произвести сравнение с теоретическими значениями геометрического фактора.

Условия задачи:

1) Расстояние L между источником и детектором: а) 100 мм, б) 200 мм, в) 500 мм
2) Детектор имеет форму куба с ребром a=100 мм
3) Число лучей принять равным: а) $N=10^5$, б) $N=5*10^5$, в) $N=10^6$
4) Точка излучения располагается напротив центра одной из граней куба
5) Материал детектора NaI. Источник излучения Cs-137. Найдите вероятность полного поглощения гамма-квантов внутри детектора.
6) Смоделируйте спектр излучения от источника
7) Придайте спектру аппаратурный вид.

Список литературы

1. Практическая спектрометрия ядерных излучений: учебное пособие / А. В. Бушуев, А. Ф. Кожин, Т. Б. Алеева [и др.]. – Москва: Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ", 2016. – 260 с.

2. Бойко, Н. В. Физика взаимодействия заряженных частиц и гамма-излучения с веществом / Н. В. Бойко, С. В. Колесников, С. Г. Рудаков. – Обнинск: ФГБУ «ВНИИГМИ-МЦД», 2023. – 112 с.

3. Программное обеспечение «Lsrm». Алгоритмические основы – функции обработки спектрометрической информации. – Московская обл., г. Солнечногорск: ООО «ЛСРМ». 2023 – 56 с