Institut de Financement du Développement du Maghreb Arabe

Concours de Recrutement : promotion spéciale dédiée exclusivement au ministère des finances tunisien.

Epreuve de Techniques Quantitatives Mai 2023.

Corrigé Exercice 1 :

1-On a : $Y = X^2$ Soient F et G les fonctions de répartition de X et de Y

Pour y positive, on a : $G(y) = P(Y \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = 2F(\sqrt{y}) - 1$

La ddp de Y est égale à $g(y) = 2 f(\sqrt{y}) \frac{1}{2\sqrt{y}}$ où f est la ddp d'une loi normale centrée réduite

2- Y est par définition une loi de Khi-deux à un seul degré de liberté

3- $E(Y) = E(X^2) = V(X) = 1$ puisque $E(X)=0$ et $V(Y)=2$.

Calculons $G(E(Y)) = G(1) = 2F(1)-1 = 1.68-1 = 0.68$

alors que la médiane de Y notée Mey vérifie $G(MeY)=0.5$

On a alors $MeY \leq E(Y)$ puisque G est une fonction croissante.

4- $Cov(X, Y) = Cov(X, X^2) = E(X^3) = o$ du fait que X est symétrique (f est paire) et que les moments d'ordre impair sont nuls.

Corrigé Exercice 2

1- $M^2 - 2a M = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{bmatrix} - 2a\begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} aa+1 & 2a \\ 2a & aa+1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2aa & 2a \\ 2a & 2aa \end{bmatrix} = (1-a^2)\, I$ Ainsi $\beta = 1-a^2$

2- On a $M(M-2aI) = (1-a^2)\, I$

ce qui donne $M^{-1} = \frac{1}{1-a2}(M-2aI) = \frac{1}{1-a2}\begin{bmatrix} -a & 1 \\ 1 & -a \end{bmatrix}$

3 3-i $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

On a d'après ce qui précède : $M^2 = I$ ce qui donne $M^n = I$ pour n pair et $M^n = M$ pour n impair (par récurrence)

3-ii Déterminant de $(M - \lambda I) = (0-\lambda)^2 - 1 = 0$ ce qui donne $\lambda = 1$ et $\lambda = -1$

Corrigé Exercice 3 :

1-i-Il s'agit d'une relation sous forme d'une régression multiple reliant la PIB d'une année t aux niveaux des dépenses publiques de l'année courante et de l'année passée

Le coefficient a permet d'évaluer l'impact de l'élasticité instantanée (de la même année) d'une augmentation de 1 % des dépenses publiques sur le PIB en % alors que b mesure l'élasticité décalée cad l'impact d'un accroissement de 1 % une période auparavant. Le paramètre c serait le niveau en logarithme du PIB en absence de dépenses publiques ni en t ni en t-1.

Les trois coefficients sont positifs

1-ii L'estimation de paramètres a, b et c se fait par les moindres carrés ordinaires. On minimise par rapport à a, b et c la quantité : $\sum u_t^2 = \sum (y_t - a\, x_t - b\, x_{t-1} - c)^2$

Cela donne $\widehat{a}$, $\widehat{b}$ *et* $\widehat{c}$ *et donc le résidu* $\widehat{u}_t = (y_t - \widehat{a}\, x_t - \widehat{b}\, x_{t-1} - \widehat{c})$

L'estimation de σ^2 se fait par la somme des carrés des résidus divisée par T-3 (du fait que l'on a 3 variables exogènes

2-i Seuls les coefficients b et c sont significatifs au seuil de risque de 5% . En revanche l'effet instantané de dépenses publiques sur le PIB courant est non significatif

2-ii Les estimations des écarts types $\widehat{\sigma a}$, $\widehat{\sigma b}$ et $\widehat{\sigma c}$ des paramètres a, b et c sont respectivement $\frac{\widehat{a}}{S(\widehat{a})} = \frac{1}{15}$, $\frac{\widehat{b}}{S(\widehat{b})} = \frac{1}{13}$ $\frac{\widehat{c}}{S(\widehat{c})} = \frac{1}{15}$

3 La relation initiale est remplacée par la spécification suivante

$$y_t = \alpha\, y_{t-1} + a\, x_t + c + u_t \quad \text{pour } t = 2, 3, \ldots, T$$

avec α un paramètre de module inférieur strictement à 1.

3-i Il s'agit d'un modèle autorégressif d'ordre1 avec une variable exogène en plus d'une constante. Il permet de mieux saisir la dynamique de la variable y_t en considérant des effets instantanés et décalés de x sur y le long des périodes 1 à l'infini. Cela s'appelle aussi un modèle ARDL (1,0).

3-ii Les valeurs numériques des estimations de α et a sont : $\widehat{\alpha} = 0.5$ *et* $\widehat{a} = 0.4$

le multiplicateur des dépenses publiques sur le PIB sur le court est égal à 0.4 alors le multiplicateur de LT est égal à $\frac{0.4}{1-0.5} = 0.8$

3-iii On a : $\Delta y_t = y_t - y_{t-1} = (\alpha - 1) y_{t-1} + a\, x_t + c + u_t = (\alpha - 1) y_{t-1} + a \Delta x_t + a\, x_{t-1} + c + u_t$

$$\Delta y_t = a\, \Delta x_t + (\alpha - 1)\left(y_{t-1} + \frac{a}{\alpha - 1} x_{t-1} + \frac{c}{\alpha - 1}\right) + u_t$$

3-iv Cette dernière relation met en équation les variations de court termes de Y et de X d'une part et une relation de long terme décalée d'une période entre les deux variables. Il s'agit d'une écriture ECM (Error Correction Model) et Y et X.