**Institut de Financement du Développement du Maghreb**
Concours de recrutement de la 42 ème Promotion Banque
Techniques Quantitatives
Septembre 2022 Durée : 1 h 30
**Remarques**: aucun document n'est autorisé
Le sujet comporte 2 pages .

**Exercice 1: (6 points: 1 +1+1+1+2 )**
On considère deux variables aléatoires, notées $X$ et $Y$, suivant chacune la loi binaire de Bernoulli de paramètre $\theta = \frac{1}{3}$ avec l'hypothèse que l'espérance mathématique du produit $X\,Y$ est nulle : $E(X\,Y) = 0$
1-Prouver que la probabilité $P[X = 1, Y = 1]$ est nulle
2-En déduire que ces variables sont non indépendantes
3-Déterminer les espérances mathématiques et les variances des deux lois marginales $X$ et $Y$.
4- Déterminer la distribution conjointe du couple $(X, Y)$.
5- Identifier la loi de probabilité de $Z = X + Y$. Commenter

**Exercice 2: ( 5 points : 1+2+2 )**
L'observation du chiffre d'affaire d'une entreprise, noté $y_t$, durant 24 mois, soit 12 mois avant période Covid ( $t = 1,2, \ldots, 12$ ) et 12 mois durant la période Covid ( $t = 13, 14, \ldots; T = 24$) a conduit aux statistiques par sous périodes suivantes :

$$\sum_{t=1}^{t=12} y_t = 144 \qquad \sum_{t=1}^{t=12} y_t^2 = 1802$$
$$\sum_{t=13}^{t=24} y_t = 126 \qquad \sum_{t=13}^{t=24} y_t^2 = 1348$$

On suppose que les $y_t$ pour $t = 1,2,\ldots,24$ sont des réalisations de variables normales indépendantes d'espérance mathématique, notées pour les deux sous périodes $m_1$ et $m_2$ , et de même variance $\sigma^2$.
1- Calculer $\widehat{m_1}$ et $\widehat{m_2}$ les moyennes empiriques pour les deux sous périodes ainsi que la moyenne empirique globale $\widehat{m}$ et la variance empirique $\widehat{\sigma^2}$ de $y_t$ sur toute la période.
2- Expliquer la démarche à suivre pour évaluer et tester l'effet éventuel du Covid sur le niveau moyen du chiffre d'affaire de cette entreprise.
3- Effectuer les calculs numériques. Conclure.
**Indication** : Pour simplifier les calculs numériques, on suppose que les distributions de Student sont approximées par des distributions normales.

**Exercice 3: (9 points: 2 +1+1+1+1+1+1+1)**
On considère pour un pays donné, la relation temporelle entre la consommation courante $y_t$ d'une part et le revenu disponible $x_t$ et le taux d'intérêt $z_t$ d'autre part :

$$y_t = a\,x_t + b\,z_t + u_t \qquad (1) \text{ pour } t = 1,2,3, \ldots, T$$

avec des termes d'erreurs $u_t$ vérifiant $u_t = \varrho\, u_{t-1} + v_t$ pour tout $t$ et $v_t$ des termes d'erreurs d'espérance mathématique nulle, indépendants entre eux et de même variance $\sigma^2$, alors que $a$ et $b$ sont deux paramètres et $\varrho$ un réel de module inférieur strictement à $1$.

1- Quelle est la nature de ce modèle ? Que représentent économiquement parlant les deux paramètres $a$ et $b$ ? Précisez leurs signes attendus

2- Expliquer pourquoi, les estimations de $a$ et $b$ par les Moindres Carrés Ordinaires ne sont pas les meilleurs estimations ?

3- On admet dans cette question que $\varrho$ est connu,

3-i prouver que l'on peut estimer $a$ et $b$ par les Moindres Carrés Ordinaires dans un modèle impliquant trois variables transformées $y_t^*$ , $x_t^*$ et $z_t^*$ à définir.

3-ii En déduire de ce qui précéde une procédure d'estimation des paramètres $a$ et $b$

4- Dans la suite de l'exercice, on admet que la variable $z_t = 1$ pour tout t

4–i L'application des Moindres Carrés Ordinaires sur le modèle (1) avec $z_t = 1$ a permis d'obtenir la statistique de Durbin Watson DW=0.6 , quelles sont les expressions des estimations de $a$ et $b$ et de $\varrho$ quand ce dernier est inconnu.

4-ii Exprimer $\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$ en fonction de $\Delta x_t = x_t - x_{t-1}$ et de $u_{t-1}$. Interprèter économiquement ce résultat.

4-iii- En déduire une autre manière d'estimer les paramètres $a$ et $b$

4- iv Dans le cadre des hypothèses de cette question 4, calculer l'espérance mathématique et la variance de $y_t$ dans le cas où $\varrho = 1$ et $a = 0$.

**********************************************************************************************

**Institut de Financement du Développement du Maghreb**

Concours de recrutement de la 42 ème Promotion Banque

**Corrigé 1** :

1- $E(X\ Y)$ est. la somme de quatre termes dont trois sont nuls. En effet :

$$E(X\ Y) = 0 = 0.(0).P[X=0,Y=0] + 1.(0).P[X=1,Y=0] + 0.(1).P[X=0,Y=1] + 1.(1)\ P[X=1,Y=1]$$
$$= P[X=1,Y=1]$$
$$= 0$$

2- $X$ et $Y$ ne sont pas indépendantes puisque $P[X=1,Y=1\frac{1}{3}]=0$, ce qui est différent du produit $P[X=1].P[Y=1]=\frac{1}{9}$

3-La variable $X$ est binaire avec $P[X=1]=\theta=\frac{1}{3}$ et $P[X=0]=1-\theta=\frac{2}{3}$

De même, la variable $Y$ est binaire avec $P[Y=1]=\theta=\frac{1}{3}$ et $P[Y=0]=1-\theta=\frac{2}{3}$

Ce qui donne $E(X\ )\ =E(\ Y)=\frac{1}{3}$ et $V(X\ )\ =V(\ Y)=\frac{2}{9}$

4-La distribution conjointe est déterminée comme suit : Pour la ligne X=1 , on connait la probabilité totale de X=1 et de la probabilité que X=1 et Y=1,
cela donne la probabilité de X=1 et Y=0.
Il en est de même de la colonne Y=1 , ce qui donne $P[X=0,Y=1]=\frac{1}{3}$

On en déduit la probabilité de $P[X=0,Y=0]=\frac{1}{3}$

| X \| Y | 0 | 1 | X |
|---|---|---|---|
| 0 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}$ |
| 1 | $\frac{1}{3}$ | 0 | $\frac{1}{3}$ |
| Y | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | 1 |

5- On note $Z=X+Y,$, comme X et Y sont binaires et que $P[X=1,Y=1]=0$, il est clair que les valeurs possibles de Z sont Z=0 avec la prob $P[X=0,Y=0]=\frac{1}{3}$,
$Z=1$ avec la prob égale à $\frac{2}{3}$. Ainsi, Z est la somme de deux lois de Bernoulli non indépendantes alors qu'elle est, elle-même, une loi de Bernoulli

**Corrigé 2**

1- On a $\widehat{m_1} = \frac{144}{12} = 12$ $\quad \widehat{m_2} = \frac{126}{12} = 10.5$ La moyenne empirique globale est $\widehat{m} = \frac{1}{2}(\widehat{m_1} + \widehat{m_2}) = 11.25$

La variance empirique est alors : $\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{24}\sum_{t=1}^{t=24} y_t^2 - \widehat{m}^2 = \frac{1}{24}3150 - 11.25^2 = 4.69$

2- Il s'agit de tester l'hypothèse H0 : $m_1 = m_2$ pour $y_t$ suivant une loi normale N($m_1$ , $\sigma^2$) pour $t = 1,2,\ldots 12$ et $y_t$ suivant une loi normale N($m_2$ , $\sigma^2$) pour $t = 13,14,\ldots,24$ avec $\sigma^2$ inconnue et estimée par $\widehat{\sigma^2} = 4.69$

En termes de distributions, nous avons $\frac{24\,\widehat{\sigma^2}}{\sigma^2}$ suit une loi de Khi-deux à 23 degrés de libertés

Sous H0 la variable $\widehat{m_1} - \widehat{m_2}$ suit la loi normale N (0; $\frac{\sigma^2}{12} + \frac{\sigma^2}{12}$) = N (0; $\frac{\sigma^2}{6}$)

et donc $\frac{\sqrt{6}}{\widehat{\sigma}}(\widehat{m_1} - \widehat{m_2})$ suit une loi de Student à 23 ddl

On a alors : $\frac{\sqrt{6}}{\widehat{\sigma}}(\widehat{m_1} - \widehat{m_2}) = 1.5\sqrt{6}/2.16 = 1.70$ ce qui confirme que H0 ne peut être rejetée au niveau de confiance de 95 %. Il n' y a donc pas d'effet significatif du Covid sur le niveau moyen du chiffre d'affaire.

**Corrigé 3 :**

1-Il s'agit d'une régression linéaire multiple avec deux variables exogènes sans constante et avec autocorrélation d'ordre un des erreurs.

$a$ et $b$ désignent respectivement les effets d'une augmentation unitaire du revenu et d'une augmentation du taux d'intérêt. avec $a$ positif et $b$ négatif.

2- La présence de l'autocorrélation des erreurs affecte l'efficience des estimations obtenues par les Moindres Carrées Ordinaires. La variance de ces estimations n'est pas minimale

3- 3-i En notant $y_t^* = y_t - \varrho\, y_{t-1}$ $\quad x_t^* = x_t - \varrho\, x_{t-1}$ $\quad et \quad z_t^* = z_t - \varrho\, z_{t-1}$

on obtient $\quad y_t^* = a\, x_t^* + b\, z_t^* + v_t$

avec $v_t$ des termes d'erreurs d'espérance 0, indépendants entre eux et de même variance.

3-ii On peut alors estimer $a$ et $b$ par les Moindres Carrées Ordinaires du fait que $v_t$ des termes d'erreurs IID (0 $\sigma^2$) –

4-i On a DW=0.6 qui est à peu près ( cours) égale à $2(1-\varrho)$, cela donne $\varrho = 0.7$ et donc $y_t^* = y_t - 0.7\, y_{t-1}$ $\quad x_t^* = x_t - 0.7\, x_{t-1}$ $\quad et \quad z_t^* = 0.3$ avec la régression simple :

$$y_t^* = a\, x_t^* + 0.3\, b + v_t$$

on a alors

$$\widehat{a} = \frac{\sum(x_t^* - \overline{x_t^*})y_t^*}{\sum(x_t^* - \overline{x_t^*})^2} \qquad \text{et} \qquad 0.3\,\widehat{b} = \overline{y_t^*} = \widehat{a}\,\overline{x_t^*}$$

4-ii $\Delta y_t = a\Delta x_t + (\varrho - 1)[y_{t-1} - ax_{t-1}] + v_t = a\ \Delta x_t + (\varrho - 1)\ u_{t-1} + v_t$
il s'agit de l'écriture de l'évolution de $y$ sur le court terme avec un mécanisme de correction par l'écart de la relation de long terme $u_{t-1}$ avec un coefficient négatif
4-iii On peut estimer par Les MCO non linéaires d'une manière itérative dans
$\Delta y_t = a\ \Delta x_t + (\varrho - 1)y_{t-1} - a(\varrho - 1)x_{t-1} + v_t$
On fixe $\varrho$, on estime $a$ ,puis pour $a$ fixé à la valeur trouvée, on ré-estime $\varrho$, etc on continue les itérations jusqu'à convergence.
4-iv Si l'on suppose que $\varrho = 1$ et $a = 0$, on obtient $\Delta y_t = v_t$ , ce qui signifie que $y_t$ est une marche au hasard $y_t = y_1 + v_1 + \ldots\ldots + v_t$
Ce qui donne : $E(y_t) = y_1$ et $V(y_t) = t\ \sigma^2$.