Méthodes Quantitatives — Axe ① — Analyse

Dérivées des fonctions usuelles

$f(x)$	Domaine de dérivabilité	$f'(x)$
$A-1 \bullet \lambda$ (constante)	$\mathbb{R}$	0
$A-2 \bullet x$	$\mathbb{R}$	1
$A-3 \bullet x^n, (n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$A-4 \bullet \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$
$A-5 \bullet \frac{1}{x^n}, (n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
$A-6 \bullet \sqrt{x}$	$]0,+\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$A-7 \bullet \ln x$	$]0,+\infty[$	$\frac{1}{x}$
$A-8 \bullet e^x$	$\mathbb{R}$	e^x
$A-9 \bullet \sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$
$A-10 \bullet \cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$
$A-11 \bullet \tan x$	$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$	$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$A-12 \bullet \cot x$	$\mathbb{R} \setminus \{\pi\mathbb{Z}\}$	$-1-\cot^2 x = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$A-13 \bullet x^\alpha, (\alpha \in \mathbb{R}_+^*)$	$]0,+\infty[$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$A-14 \bullet \arccos x$	$]-1,1[$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$A-15 \bullet \arcsin x$	$]-1,1[$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$A-16 \bullet \arctan x$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$
$A-17 \bullet a^x, (a>0)$	$\mathbb{R}$	$(\ln a)a^x$
$A-18 \bullet \log_a(x), (a \in]0,+\infty[\setminus \{1\})$	$]0,+\infty[$	$1/x \ln a$
$A-19 \bullet chx$	$\mathbb{R}$	shx
$A-20 \bullet shx$	$\mathbb{R}$	chx
$A-21 \bullet thx$	$\mathbb{R}$	$1-th^2x = 1/ch^2x$
$A-22 \bullet Argshx$	$\mathbb{R}$	$1/\sqrt{x^2+1}$
$A-23 \bullet Argchx$	$]1,+\infty[$	$1/\sqrt{x^2-1}$
$A-24 \bullet Argthx$	$]-1,1[$	$1/1-x^2$

BEN AHMED MOHSEN Téléphone: (+216) 97 619191 / 54 619191
omega.center.cp@gmail.com https://web.facebook.com/OMEGACENTER2014

Opérations et dérivées

$\mathcal{B}-1$ • $(f+g)' = f' + g'$

$\mathcal{B}-2$ • $(\lambda f)' = \lambda f'$, λ désignant une constante

$\mathcal{B}-3$ • $(fg)' = f'g + fg'$

$\mathcal{B}-4$ • $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$

$\mathcal{B}-5$ • $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

$\mathcal{B}-6$ • $(u^n)' = nu'u^{n-1}$, $(n \in \mathbb{N}^*)$

$\mathcal{B}-7$ • $\left(\frac{1}{u^n}\right)' = -\frac{nu'}{u^{n+1}}$, $(n \in \mathbb{N}^*)$

$\mathcal{B}-8$ • $(e^u)' = u'e^u$

$\mathcal{B}-9$ • $(\ln|u|)' = \frac{u'}{u}$

$\mathcal{B}-10$ • $(u^\alpha)' = \alpha u' u^{\alpha-1}$, $(u > 0 , \alpha \in \mathbb{R})$

$\mathcal{B}-11$ • $(\sin(u))' = u' \cos(u)$

$\mathcal{B}-12$ • $(\cos(u))' = -u' \sin(u)$

$\mathcal{B}-13$ • $(\tan(u))' = u'(1 + (\tan(u))^2) = \frac{u'}{(\cos(u))^2}$

$\mathcal{B}-14$ • $(\arccos(u))' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$\mathcal{B}-15$ • $(\arcsin(u))' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$\mathcal{B}-16$ • $(\arctan(u))' = \frac{u'}{1+u^2}$

$\mathcal{B}-17$ • $(f^g)' = \frac{gf'f^g}{f}$, $(f > 0)$

$\mathcal{B}-18$ • $(g \circ f)' = f'g' \circ f$

$\mathcal{B}$– 19 • Formule de Leibniz : $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}$

$\mathcal{B}$– 20 • Classe C^n :

Soit n un entier naturel non nul. On dit que la fonction f est de classe C^n (ou n-fois continûment dérivable) sur I, si elle est n fois dérivable sur I et si la fonction $f^{(n)}$ est continue sur I.

☞ On dit que f est declasse C^0 sur I, si elle est continue sur I

☞ On dit que f est declasse C^∞ (ou indéfiniment dérivable) sur I, si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f est de classe C^n sur I

Développement limité

$\mathcal{C}$– 1 • Formule de Taylor–Lagrange :

Soient $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction numérique de classe C^{n+1} sur l'intervalle $[a, b]$.

Alors, $\exists\, c \in \,]a, b[$ tels que :

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

$\mathcal{C}$– 2 • Théorème (Taylor–Young) :

Supposons que f est de classe C^n sur I, x et a deux éléments de I. Alors pour tout $x \in \mathcal{V}(a)$

on a : $f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + o((x-a)^n)$,

$o((x-a)^n)$ est une fonction négligeable devant $(x-a)^n$: $\left(\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{o((x-a)^n)}{(x-a)^n} = 0\right)$

On dit alors que f admet un DL à l'ordre n au $\mathcal{V}(a)$

$\mathcal{C}$– 3 • Formule de Taylor–Maclaurin : lorsque $(a = 0)$

$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + o(x^n)$, le DL de f à l'ordre n au $\mathcal{V}(0)$

BEN AHMED MOHSEN Téléphone: (+216) 97 619191 / 54 619191
omega.center.cp@gmail.com https://web.facebook.com/OMEGACENTER2014

$\mathcal{C}$– 3 • *Développement limité au voisinage de 0 de fonctions usuelles* :

a • $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$
b • $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$
c • $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$
d • $\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$
e • $\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$
f • $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + o(x^8)$
g • $\operatorname{th} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6)$
h • $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)$
i • $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$
j • $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!} x^n + o(x^n)$
k • $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$
ℓ • $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} + o(x^n) = -\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$
m • $\operatorname{Arctan} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2})$
n • $\operatorname{Arcsin} x = x + \frac{1}{2} . \frac{x^3}{3} + \frac{1 \times 3}{2 \times 4} . \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \ldots \times (2n)} . \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$
o • $\operatorname{Arccos} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin} x$

Adresse : 2, Rue Ibn Arafa, av de l'environnement Manouba Centre, Manouba

BEN AHMED MOHSEN Téléphone: (+216) 97 619191 / 54 619191
omega.center.cp@gmail.com https://web.facebook.com/OMEGACENTER2014

Exercice 1 :

Énoncé

1) $\boldsymbol{Donner\ le\ développement\ limité\ à\ l'ordre\ 2\ et\ au\ voisinage\ de\ Zéro\ de\ la\ fonction}$:

$$f(x)=\frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$$

2) $\boldsymbol{On\ pose\ F(x)=\sqrt{e^{f(x)}}}$
   a) $\boldsymbol{Donner\ le\ développement\ limité\ au\ voisinage\ de\ Zéro\ à\ l'ordre\ 2\ de\ F(x)}$
   b) $\boldsymbol{Déduire\ \lim_{x\to 0}\frac{F(x)-\sqrt{e}}{x}}$

Corrigé

1) $\boldsymbol{Effectuons\ la\ division\ suivant\ les\ puissances\ croissantes\ du\ polynôme\ 1-x+x^2}$ $\boldsymbol{par\ le\ polynôme\ 1+x+x^2}$.

$$\begin{array}{cc|c}
 & 1-x+x^2 & 1+x+x^2 \\ \cline{3-3}
+ & & 1-2x+2x^2 \\
 & -1-x-x^2 & \\ \cline{1-2}
 & -2x & \\
+ & & \\
 & 2x+2x^2 & \\ \cline{1-2}
= & & \\
 & 2x^2 &
\end{array}$$

$\boldsymbol{Nous\ obtenons\ donc}$: $\boxed{f(x)=1-2x+2x^2+o(x^2)}$

2)
   a) $\boldsymbol{Déterminons\ un\ DL\ d'ordre\ 2\ en\ 0\ de\ e^{f(x)}}$:

$$e^t=1+t+\frac{t^2}{2!}+o(t^2)=1+t+\frac{t^2}{2}+o(t^2)$$

$\boldsymbol{Par\ la\ suite}$: $e^{f(x)}="e^{(1-2x+2x^2)}"+o(x^2)="e^{1+(-2x+2x^2)}"+o(x^2)="ee^{(-2x+2x^2)}"+o(x^2)$

$\boldsymbol{Posons\ t=-2x+2x^2+o(x^2)\ ,or\ si\ x\in\mathcal{V}(0)\ on\ a\ aussi\ t\in\mathcal{V}(0)}$

$\boldsymbol{Ce\ qui\ donne}$:

$$e^{f(x)}=\mathrm{e}\mathrm{e}^{\mathrm{t}}+o(t^2)=\mathrm{e}\left(1+\mathrm{t}+\frac{\mathrm{t}^2}{2}\right)+o(t^2)$$

$\boldsymbol{Déterminons\ le\ DL\ de\ t^2\ à\ un\ ordre\ égal\ à\ 2\ et\ au\ voisinage\ de\ 0}$; $\boldsymbol{toujours\ en\ conservant}$ $\boldsymbol{les\ termes\ de\ degrés\ inférieurs\ ou\ égal\ à\ 2}$:

Adresse : 2, Rue Ibn Arafa, av de l'environnement Manouba Centre, Manouba

$t^2 = t.t = "(-2x + 2x^2)(-2x + 2x^2)" + o(x^2) = 2x^2 + o(x^2)$

$Il\ en\ résulte : e^{f(x)} = \mathrm{e}\left(1 + (-2x + 2x^2) + \dfrac{2x^2}{2}\right) + o(x^2) = \mathrm{e}(1 - 2x + 4x^2) + o(x^2)$

$On\ en\ déduit\ le\ DL\ en\ 0\ et\ à\ l'ordre\ 2\ de\ F(x) = \sqrt{e^{f(x)}}$

$F(x) = "\sqrt{\mathrm{e}(1\text{-}2x\text{+}4x^2)}" + o(x^2) = "\sqrt{\mathrm{e}}\left(1 + (-2x + 4x^2)\right)^{\frac{1}{2}}" + o(x^2) = "\sqrt{\mathrm{e}}(1+\mathrm{w})^{\frac{1}{2}}" + o(w^2)$

$Avec\ , w = -2x + 4x^2 + o(x^2), or\ si\ x \in \mathcal{V}(0)\ on\ a\ aussi\ w \in \mathcal{V}(0)$

$\sqrt{1 + w} = (1+\mathrm{w})^{\frac{1}{2}}\ admet\ un\ DL\ d'ordre\ 2\ en\ 0 : (1 + w)^{\alpha} = 1 + \alpha w + \dfrac{\alpha(\alpha - 1)}{2!}w^2 + o(w^2)$

$Pour\ \alpha = \dfrac{1}{2}, (1 + w)^{\frac{1}{2}} = 1 + \dfrac{1}{2}w + \dfrac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)}{2!}w^2 + o(w^2) = 1 + \dfrac{1}{2}w - \dfrac{1}{8}w^2 + o(w^2)$

$Ce\ qui\ donne : F(x) = "\sqrt{e}\left(1 + \dfrac{1}{2}w - \dfrac{1}{8}w^2\right)" + o(w^2)$

$Déterminons\ le\ DL\ de\ w^2\ à\ un\ ordre\ égal\ à\ 2\ et\ au\ voisinage\ de\ 0\ ;\ toujours\ en\ conservant$

$les\ termes\ de\ degrés\ inférieurs\ ou\ égal\ à\ 2$:

$w^2 = w.w = "(-2x + 4x^2)(-2x + 4x^2)" + o(x^2) = 4x^2 + o(x^2)$

$Il\ en\ résulte : F(x) = "\sqrt{e}\left(1 + 1/2\,(-2x + 4x^2) - 1/8\,(4x^2)\right)" + o(x^2)$

$$\boxed{F(x) = \sqrt{e}(1 - x + 3/2\,x^2) + o(x^2) = \sqrt{e} - \sqrt{e}(x + 3/2\,x^2) + o(x^2)}$$

b)

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x) - \sqrt{e}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left[\sqrt{e} - \sqrt{e}(x + 3/2\,x^2) + o(x^2)\right] - \sqrt{e}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sqrt{e}(x + 3/2\,x^2) + o(x^2)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\sqrt{e}x(1 + 3/2\,x) + o(x^2)}{x} = \lim_{x\to 0} -\sqrt{e}(1 + 3/2\,x) + o(x)$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{F(x) - \sqrt{e}}{x} = -\sqrt{e}}$$

Exercice 2 :

Énoncé

$Soit\ \ f(x) = (x^3 + x + 1)^{\frac{1}{3}} - (x^2 - x - 1)^{\frac{1}{2}}\ ; x \in \mathcal{V}(+\infty)$

1) *En posant* $t=\frac{1}{x}$ *, montrer que :* $f(x)=g(t)=\frac{1}{t}\left[(1+t^2+t^3)^{\frac{1}{3}}-(1-t-t^2)^{\frac{1}{2}}\right]$
2) *En utilisant le développement limité de* $(1+u)^{\alpha}$ *au voisinage de* 0 *, calculer le développement limité de* $g(t)$ *au voisinage de* 0 *et à l'ordre* 2
3) *Déduire le développement limité de* $f(x)$ *au voisinage de* $+\infty$ *et à l'ordre* 2

Corrigé

1) $\forall x\in\mathcal{V}(+\infty)\ ;\ t=\frac{1}{x}\in\mathcal{V}(0)$

$$On\ a : f(x)=(x^3+x+1)^{\frac{1}{3}}-(x^2-x-1)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{t^3}+\frac{1}{t}+1\right)^{\frac{1}{3}}-\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t}-1\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left(\frac{1+t^2+t^3}{t^3}\right)^{\frac{1}{3}}-\left(\frac{1-t-t^2}{t^2}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{(1+t^2+t^3)^{\frac{1}{3}}}{t}-\frac{(1-t-t^2)^{\frac{1}{2}}}{t}$$

$$D'où\ \forall x\in\mathcal{V}(+\infty)\ ;\ t=\frac{1}{x}\in\mathcal{V}(0)\ \boxed{f(x)=g(t)=\frac{1}{t}\left[(1+t^2+t^3)^{\frac{1}{3}}-(1-t-t^2)^{\frac{1}{2}}\right]}$$

2) $(1+u)^{\alpha}$ *admet un DL d'ordre 3 en 0*

$$(1+u)^{\alpha}=1+\alpha u+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}u^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}u^3+o(u^3)$$

· $(1+t^2+t^3)^{\frac{1}{3}}=\left(1+(t^2+t^3)\right)^{\frac{1}{3}}=(1+u)^{\frac{1}{3}}$ où $u=t^2+t^3\in\mathcal{V}(0)$ *si* $t\in\mathcal{V}(0)$

$$Ainsi : (1+t^2+t^3)^{\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{3}u+o(u)=1+\frac{1}{3}(t^2+t^3)+o(t^3)=1+\frac{1}{3}t^2+\frac{1}{3}t^3+o(t^3)$$

· $(1-t-t^2)^{\frac{1}{2}}=\left(1+(-t-t^2)\right)^{\frac{1}{2}}=(1+u)^{\frac{1}{2}}$ où $u=-t-t^2\in\mathcal{V}(0)$ *si* $t\in\mathcal{V}(0)$

$$(1-t-t^2)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}u+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}u^2+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}u^3+o(u^3)$$

$$=1+\frac{1}{2}u-\frac{1}{8}u^2+\frac{1}{16}u^3+o(u^3)$$

Avec : $u=-t-t^2+o(t^3)$

$u^2="(-t-t^2)(-t-t^2)"+o(t^3)=t^2+2t^3+o(t^3)$

$u^3=u^2u="\left((t^2+2t^3)(-t-t^2)\right)"+o(t^3)=-t^3+o(t^3)$

$$Par\ la\ suite\ (1-t-t^2)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}(-t-t^2)-\frac{1}{8}(t^2+2t^3)+\frac{1}{16}(-t^3)+o(t^3)$$

$$(1-t-t^2)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}t - \frac{5}{8}t^2 - \frac{5}{16}t^3 + o(t^3)$$

$$g(t) = \frac{1}{t}\left[(1+t^2+t^3)^{\frac{1}{3}} - (1-t-t^2)^{\frac{1}{2}}\right] = \frac{1}{t}\left[\left(1+\frac{1}{3}t^2+\frac{1}{3}t^3\right) - \left(1-\frac{1}{2}t-\frac{5}{8}t^2-\frac{5}{16}t^3\right)\right] + o(t^3)$$

$$= \frac{1}{t}\left[\frac{1}{2}t + \frac{23}{24}t^2 + \frac{31}{48}t^3\right] + o(t^3)$$

Finalement $\boxed{g(t) = \frac{1}{2} + \frac{23}{24}t + \frac{31}{48}t^2 + o(t^2)}$

3) *Il en résulte de ce qui précède le DL de* $f(x)$ *au voisinage de* $+\infty$ *et à l'ordre 2* :

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2} + \frac{23}{24}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{31}{48}\left(\frac{1}{x^2}\right) + o\left(\frac{1}{x^2}\right)}$$

Exercice 3 :

Énoncé

Soit $f(x) = \dfrac{1-4x-3x^2+2x^3}{1-2x+x^3}$

1) *Déterminer le développement limité de* f *au point* $x_0 = 0$, *à l'ordre* 3
2) *Déterminer le développement limité de* $\sqrt{f}$ *au point* $x_0 = 0$, *à l'ordre* 3
3) *Déterminer le développement limité de* $\ln(f)$ *au point* $x_0 = 0$, *à l'ordre* 2

Corrigé

1) *Effectuons la division suivant les puissances croissantes du polynôme* $1-4x-3x^2+2x^3$ *par le polynôme* $1-2x+x^3$.

$$\begin{array}{l|l}
1-4x-3x^2+2x^3 & 1-2x+x^3 \\ \cline{2-2}
+ & 1-2x-7x^2-13x^3 \\
-1+2x-x^3 & \\ \hline
-2x-3x^2+x^3 & \\
+ & \\
2x-4x^2 \ldots & \\ \hline
-7x^2+x^3 & \\
+ & \\
7x^2-14x^3 \ldots & \\ \hline
-13x^3 &
\end{array}$$

Nous obtenons donc : $\boxed{f(x) = 1-2x-7x^2-13x^3+o(x^3)}$

2) $\boldsymbol{Déterminons\ un\ DL\ d'ordre\ 3\ en\ 0\ de\ \sqrt{f(x)}}$:

$On\ a\ (1+t)^{\alpha}=1+\alpha t+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2+\dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}t^3+o(t^3)$

$pour\ \alpha=\dfrac{1}{2}\ ,\sqrt{1+t}=(1+t)^{\frac{1}{2}}=1+\dfrac{1}{2}t+\dfrac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}t^2+\dfrac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}t^3+o(t^3)$

$$=1+\frac{1}{2}t-\frac{1}{8}t^2+\frac{1}{16}t^3+o(t^3)$$

$Or\ \sqrt{f(x)}="\sqrt{1+(-2x-7x^2-13x^3)}"+o(x^3)$

$Posons:\ t=-2x-7x^2-13x^3+o(x^3), or\ si\ x\in\mathcal{V}(0)\ on\ a\ aussi\ t\in\mathcal{V}(0)$

$Ce\ qui\ donne:\ \sqrt{f(x)}=1+\dfrac{1}{2}t-\dfrac{1}{8}t^2+\dfrac{1}{16}t^3+o(t^3)$

$Déterminons\ le\ DL\ de\ t^2$ à $un\ ordre\ égal$ à $3\ et\ au\ voisinage\ de\ 0\ ;\ toujours\ en\ conservant$

$les\ termes\ de\ degrés\ inférieurs\ ou\ égal$ à 3 :

$t^2=t.t="\ (-2x-7x^2-13x^3)(-2x-7x^2-13x^3)\ "+o(x^3)=4x^2+28x^3\ +o(x^3)$

$DL\ de\ t^3$ à $un\ ordre\ égal$ à $3\ et\ au\ voisinage\ de\ 0\ sera$:

$t^3=t.t^2="\ (-2x-7x^2-13x^3)(4x^2+28x^3)\ "+o(x^3)=-8x^3+o(x^3)$

$Il\ en\ résulte$:

$$\sqrt{f(x)}=1+\frac{1}{2}(-2x-7x^2-13x^3)-\frac{1}{8}(4x^2+28x^3)+\frac{1}{16}\times(-8x^3)+o(x^3)$$

$D'où\ \boxed{\sqrt{f(x)}=1-x-4x^2-\dfrac{21}{2}x^3+o(x^3)}$

3) $\boldsymbol{Déterminons\ un\ DL\ d'ordre\ 3\ en\ 0\ de\ \ln\big(f(x)\big)}$:

$Le\ DL\ d'ordre\ 3\ en\ 0\ de\ f\ étant:\ f(x)=1-2x-7x^2-13x^3+o(x^3)\ , ce\ qui\ implique\ DL$

à $l'ordre\ 2\ en\ 0\ de\ f\ :\ f(x)=1-2x-7x^2+o(x^2)$

$On\ a\ \ln(1-w)=-w-\dfrac{w^2}{2}+o(w^2)$

$Or\ \ln\big(f(x)\big)="\ln\Big(1-(2x+7x^2)\Big)"+o(x^2)$

$Posons: w=2x+7x^2+o(x^2), or\ si\ x\in\mathcal{V}(0)\ on\ a\ aussi\ w\in\mathcal{V}(0)$

$\mathit{Ce\ qui\ donne}: \ \ln\big(f(x)\big) = -w - \frac{w^2}{2} + o(w^2)$

$\mathit{Déterminons\ le\ DL\ de}\ \mathrm{w}^2$ à $\mathit{un\ ordre\ égal}$ à 2 $\mathit{et\ au\ voisinage\ de}\ 0$; $\mathit{toujours\ en\ conservant}$ $\mathit{les\ termes\ de\ degrés\ inférieurs\ ou\ égal}$ à 2 :

$w^2 = w.w = "\ (2x+7x^2)(2x+7x^2)\ " + o(x^2) = 4x^2 + o(x^2)$

$\mathit{Il\ en\ résulte}$:

$$\ln\big(f(x)\big) = -(2x+7x^2) - \frac{4x^2}{2} + o(x^2)\ .\ D'où\ \boxed{\ln\big(f(x)\big) = -2x - 9x^2 + o(x^2)}$$

Exercice 4 :

Énoncé

$\mathit{Soient}\ \gamma(L) = 2 + 3L + 4L^2\ \mathit{et}\ \mu(L) = 1 - 0,75L + 0,125L^2$

1) $\mathit{Déterminer\ les\ réels\ A\ et\ B\ tels\ que}$: $\frac{1}{\mu(L)} = \frac{A}{1-\frac{L}{2}} + \frac{B}{1-\frac{L}{4}}$
2)
   a) $\mathit{Donner\ le\ développement\ limité\ au\ voisinage\ de}\ 0\ \mathit{et}$ à $\mathit{l'ordre}\ 2\ \mathit{de}\ \frac{1}{1+u}$
   b) $\mathit{Déduire\ le\ développement\ limité\ au\ voisinage\ de}\ 0\ \mathit{et}$ à $\mathit{l'ordre}\ 2\ \mathit{de}\ \frac{\gamma(L)}{\mu(L)}$

Corrigé

1)

$$\frac{1}{\mu(L)} = \frac{A}{1-\frac{L}{2}} + \frac{B}{1-\frac{L}{4}} \Leftrightarrow \frac{1}{1-0,75L+0,125L^2} = \frac{A - \frac{A}{4}L + B - \frac{B}{2}L}{\left(1-\frac{L}{2}\right)\left(1-\frac{L}{4}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1-0,75L+0,125L^2} = \frac{(A+B) - \left(\frac{A+2B}{4}\right)L}{1-0,75L+0,125L^2}$$

$\mathit{Par\ identification, on\ obtient}$: $\begin{cases} A+B=1 \\ \dfrac{A+2B}{4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2B+B=1 \\ A=-2B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=-1 \\ A=2 \end{cases}$

$D'où\ \boxed{\frac{1}{\mu(L)} = \frac{2}{1-\frac{L}{2}} - \frac{1}{1-\frac{L}{4}}}$

2)

   a) $\boxed{\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + o(u^2)}$

b)

•$\boldsymbol{Déterminons\ le\ DL\ de}$ $\dfrac{2}{1-\frac{L}{2}}$ à $\boldsymbol{un\ ordre}$ égal à $\mathbf{2}$ $\boldsymbol{et\ au\ voisinage\ de}$ $\mathbf{0}$

$$\frac{2}{1-\frac{L}{2}} = 2\left(\frac{1}{1+(-\frac{L}{2})}\right)$$

$\boldsymbol{Posons:}\ u = \left(-\frac{L}{2}\right) + o(L^2), \boldsymbol{or\ si}\ L \in \mathcal{V}(0)\ \boldsymbol{on\ a\ aussi}\ u \in \mathcal{V}(0)$

$\boldsymbol{Par\ la\ suite}$ $\dfrac{2}{1-\frac{L}{2}} = 2\left(\dfrac{1}{1+u}\right) = 2(1-u+u^2) + o(u^2)$

$\boldsymbol{Déterminons\ le\ DL\ de}$ u^2 à $\boldsymbol{un\ ordre}$ égal à $\mathbf{2}$ $\boldsymbol{et\ au\ voisinage\ de}$ $\mathbf{0}$:

$$u^2 = u.u = \left(-\frac{L}{2}\right)\left(-\frac{L}{2}\right) + o(L^2) = \frac{1}{4}L^2 + o(L^2)$$

$\boldsymbol{Ainsi}$, $\dfrac{2}{1-\frac{L}{2}} = 2\left(1+\dfrac{L}{2}+\dfrac{1}{4}L^2\right) + o(L^2) = 2 + L + \dfrac{1}{2}L^2 + o(L^2)$

•$\boldsymbol{Déterminons\ le\ DL\ de}$ $\dfrac{1}{1-\frac{L}{4}}$ à $\boldsymbol{un\ ordre}$ égal à $\mathbf{2}$ $\boldsymbol{et\ au\ voisinage\ de}$ $\mathbf{0}$: $\dfrac{1}{1-\frac{L}{4}} = \dfrac{1}{1+\left(-\frac{L}{4}\right)}$

$\boldsymbol{Posons:}\ u = \left(-\frac{L}{4}\right) + o(L^2), \boldsymbol{or\ si}\ L \in \mathcal{V}(0)\ \boldsymbol{on\ a\ aussi}\ u \in \mathcal{V}(0)$

$\boldsymbol{Par\ la\ suite}$ $\dfrac{1}{1-\frac{L}{4}} = \dfrac{1}{1+\left(-\frac{L}{4}\right)} = 1 - u + u^2 + o(u^2)$

$$u^2 = u.u = \left(-\frac{L}{4}\right)\left(-\frac{L}{4}\right) + o(L^2) = \frac{1}{16}L^2 + o(L^2)$$

$$\frac{1}{1-\frac{L}{4}} = 1 - \left(-\frac{L}{4}\right) + \frac{1}{16}L^2 + o(L^2) = 1 + \frac{1}{4}L + \frac{1}{16}L^2 + o(L^2)$$

$$\frac{1}{\mu(L)} = \frac{2}{1-\frac{L}{2}} - \frac{1}{1-\frac{L}{4}} = \left(2 + L + \frac{1}{2}L^2\right) - \left(1 + \frac{1}{4}L + \frac{1}{16}L^2\right) + o(L^2) = 1 + \frac{3}{4}L + \frac{7}{16}L^2 + o(L^2)$$

$\boldsymbol{Or}$ $\dfrac{\gamma(L)}{\mu(L)} = \gamma(L)\left(\dfrac{1}{\mu(L)}\right) = \text{"}\ (2+3L+4L^2)\left(1+\dfrac{3}{4}L+\dfrac{7}{16}L^2\right)\ \text{"} + o(L^2)$

$$\frac{\gamma(L)}{\mu(L)} = 2 + \frac{3}{2}L + \frac{7}{8}L^2 + 3L + \frac{9}{4}L^2 + 4L^2 + o(L^2)$$

$\boldsymbol{D'où}$: $\boxed{\dfrac{\gamma(L)}{\mu(L)} = 2 + \dfrac{9}{2}L + \dfrac{57}{8}L^2 + o(L^2)}$

BEN AHMED MOHSEN Téléphone: (+216) 97 619191 / 54 619191
omega.center.cp@gmail.com https://web.facebook.com/OMEGACENTER2014

Élasticité d'une fonction à une variable

D– 1 • Définition :

Étant donnée une fonction f , qui dépend de x , l'élasticité mesure la sensibilité de la quantité $f(x)$ aux variations de x. En économie, on peut par exemple établir une fonction liant la demande et le prix. Le prix d'un produit ou d'un service influence la demande. (Traditionnellement, si le prix augmente, la demande diminue). L'élasticité de la demande mesure doncla sensibilité de la demande par rapport aux variations du prix d'un produit.

L'élasticité de y para rapport à x, en un point x_0 : $E_{x_0}(y/x) = \dfrac{\Delta y/y}{\Delta x/x} = \dfrac{x}{y}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

où $\Delta x = x - x_0$ *et* $\Delta y = f(x) - f(x_0)$

Lorsqu'on considère de très petites variations $(\Delta x \to 0)$, *on parlera alors*

d'élasticité instantanée : $\epsilon_{x_0}(f(x)/x) = \epsilon_{x_0}(y/x) = x_0\dfrac{f'(x_0)}{f(x_0)} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} E_{x_0}(y/x) = x_0(\ln f)'(x_0)$

- ☑ *Un coefficient d'élasticité n'a pas d'unité de mesure.*
- ☑ *L'élasticité est une notion ponctuelle : elle se calcule pour un point précis.*
- ☑ *Un signe positif (+) implique que les deux variables étudiées varient dans le même sens.*
- ☑ *Un signe négatif (−)implique que les deux variables étudiées varient en sens opposé.*
- ☑ *L'élasticité est une notion ponctuelle : elle se calcule pour un point précis.*

D– 2 • L'intensité des élasticités :

- ☑ $\epsilon_{x_0}(y/x) = 0 \Rightarrow$ *parfaitement inélastique : la variation de x n'a aucun effet sur y*
- ☑ $|\epsilon_{x_0}(y/x)| = 1 \Rightarrow$ *élasticité unitaire : y évolue au même rythme que x*
- ☑ $|\epsilon_{x_0}(y/x)| = \infty \Rightarrow$ *parfaitement élastique*
- ☑ $0 < |\epsilon_{x_0}(y/x)| < 1 \Rightarrow$ *faiblement élastiques : y évolue moins vite que x*

☑ $|\epsilon_{x_0}(y/x)| > 1 \Rightarrow$ *fortement élastiques : y évolue plus vite que x*

D-3 • Variation relative :

La variation relative à partir d'un point x_0 : $\Delta f \cong \Delta x \epsilon_{x_0}(f(x)/x)$

D-4 • *Pour tout réel* λ , $\epsilon_{x_0}(\lambda f(x)/x) = \epsilon_{x_0}(f(x)/x)$

D-5 • $\epsilon_{x_0}(f(x).g(x)/x) = \epsilon_{x_0}(f(x)/x) + \epsilon_{x_0}(g(x)/x)$

D-6 • $\epsilon_{x_0}\left(\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)/x\right) = \epsilon_{x_0}(f(x)/x) - \epsilon_{x_0}(g(x)/x)$

D-7 • L'élasticité et ses applications :

a • L'élasticité-prix de la demande et de l'offre :

L'« élasticité-prix de la demande » ou « élasticité de la demande par rapport au prix » est la sensibilité de la demande d'un produit à une variation du prix de ce produit. L'élasticité mesure la conséquence, sur les quantités demandées d'un produit, d'une modification de son prix.

Des entreprises supportant une hausse du coût d'une matière première peuvent chercher à savoir, si elles répercutent cette hausse sur le prix de vente de leur produit, si la demande baissera fortement ou faiblement.

Si la demande varie plus que le prix, c'est que la demande est très sensible à la variation du prix, la demande est alors dite « élastique » ou même « très élastique ». Au contraire, si la demande varie moins que le prix, elle est peu sensible à la modification du prix et est

dite « peu élastique » ou « inélastique ».

$\epsilon_{VR_0}(DOPR/PPR) < 0$	Une hausse du prix entraîne une baisse de la quantité demandée, la demande est alors normale.
$\epsilon_{VR_0}(DOPR/PPR) > 0$	La demande est anormale

DOPR : la demande ou de l'offre d'un produit ; PPR : prix de ce même produit

$0 < \lvert\epsilon_{VR_0}(DOPR/PPR)\rvert < 1$	La quantité demandée ou offerte est peu sensible à la variation du prix (inélastique). Par exemple, selon plusieurs études indiquées sur le site du ministère de la Santé du Canada, la valeur absolue de l'élasticité-prix de la demande par les adultes de cigarettes est souvent proche de 0,4
$\lvert\epsilon_{VR_0}(DOPR/PPR)\rvert > 1$	Les quantités se modifient plus fortement que les prix, la demande ou l'offre sont élastiques. Une étude réalisée par l'institut d'économie de Toulouse, en 2008, indique par exemple qu'en Afrique du Sud la valeur absolue de l'élasticité-prix de la demande de SMS et de temps de communication vocale est comprise entre 1 et 3.

b • Elasticité-prix croisée de la demande :

Exemple : Comment le prix de l'essence influence la demande de voiture d'occasion

c • Elasticité-revenu de la demande :

L'élasticité-revenu de la demande mesure la sensibilité de la demande d'un produit, par un ou des consommateurs, suite à une modification du revenu de ce ou ces consommateurs. La modification du revenu ne conduit pas simplement à consommer plus ou moins mais elle affecte la structure de la consommation, la répartition du budget entre les différents « postes » de consommation (catégories de produits consommés). Si le taux de variation de la demande est supérieur au taux de variation du revenu, la demande est très sensible à la variation du revenu. La demande est dite « élastique » ou « très élastique » au revenu. Si le taux de variation de la demande d'un produit est plus faible que l'évolution en pourcentage du revenu du ou des consommateurs étudiés, alors la demande peu sensible à l'évolution du revenu est dite « peu élastique » voire « d'inélastique ».

$\epsilon_{VR_0}(DP/VR) < 0$	$0 < \epsilon_{VR_0}(DP/VR) < 1$	$\epsilon_{VR_0}(DP/VR) > 1$
Produits inférieurs	Produits normaux de première nécessité	Produits normaux supérieurs ou produits de luxe
Quand le revenu augmente, la demande de ces produits baisse. Ce sont des produits de qualité inférieure, ils sont remplacés par des produits de meilleure qualité.	La consommation de ces produits augmente quand le revenu progresse mais la consommation s'élève moins rapidement que le revenu. Ce sont globalement, les produits de première nécessité.	La consommation de ces produits progresse à un rythme plus rapide que le revenu, ce sont des produits de confort.
Pour un individu moyen, la baguette de pain blanc industriel, congelée avant d'être cuite, qui est un produit de premier prix, est aussi un produit inférieur.	Pour un individu moyen, les fruits frais sont des produits normaux de première nécessité.	Pour un individu moyen, les croissants chauds de la bonne boulangerie du quartier sont des produits de luxe.

DP : demande d'un produit ; VR : variation du revenu

D– 8 • Calcul Marginal :

Les coûts de production d'une entreprise sont pour partie indépendants des quantités produites (coûts fixes) et pour partie liés au niveau de production réalisé (coûts variables)

- *Coûts fixes : ils ne dépendent pas des quantités produites (loyer des bâtiments, achat d'une nouvelle machine …)*
- *Coûts fixes : coûts variables : ils dépendent des quantités produites (salaires, impôts sur les bénéfices, consommations intermédiaires …)*
- *Coûts variables : ils dépendent des quantités produites (salaires, impôts sur les bénéfices, consommations intermédiaires …)*
- *Coût total : somme des coûts*
- *Coût moyen : il représente le coût unitaire ; il se calcule en faisant le coût total divisé par la quantité de biens produits.*

• *Coût marginal : coût de la dernière unité produite ; c'est le supplément de coût engendré par une production supplémentaire*

a • **Coût moyen de production** : *Soit* $CT = C(x)$ *le coût de production et* x *les quantités produites. On appelle coût moyen de production et l'on note* $CM(x)$, *la fonction*: $CM(x) = \dfrac{C(x)}{x}$

b • **Coût marginal de production** : *On appelle coût marginal de production et l'on note* $Cm(x) = \dfrac{dC(x)}{dx}$

Institut de Financement du Développement du Maghreb Arabe
CONCOURS DE RECRUTEMENT DE LA XXV^{ème} PROMOTION
JUILLET 2005

Exercice 5 : *(6 points : 1,5 point par question)*

Énoncé

Considérons une fonction $y = f(x)$ *où* x *est une variable réelle.*

On définit e *l'élasticité de* y *par rapport à la variable* x, *par* $e = (x/y)f'(x)$,

$(f'(x)$ *désigne la dérivée par rapport à* $x)$

1) *Vérifier que* e *peut s'écrire sous la forme* : $e = \dfrac{dy/y}{dx/x}$
2) *En approximant* dy *et* dx, *respectivement, par* Δy *et* Δx, *donner l'interprétation de* e.

Quel intérêt représente-t-elle pour l'analyse économique ?

3) *Calculer* e *pour la fonction* $y = \sqrt{x}$ *pour* $x > 0$.
4) *Interpréter le résultat précédent en admettant que* y *est la quantité de production d'un bien et* x *est son prix unitaire.*

Corrigé

1) $e = (x/y)f'(x) = (x/y)(dy/dx) = (dy/y)(x/dx) = \left(\frac{dy}{y}\right)/\left(\frac{dx}{x}\right)$
2) $\begin{cases} \Delta y \cong dy \\ \Delta x \cong dx \end{cases} \Rightarrow e \cong \left(\frac{\Delta y}{y}\right)/\left(\frac{\Delta x}{x}\right)$

L'élasticité de la quantité y *par rapport à la variable* x *(dont dépend éventuellement* y*) et en un point donné, mesure la sensibilité de la quantité* y *aux variations de* x .

En économie, on peut par exemple établir une fonction liant la demande et le prix.

Le prix d'un produit ou d'un service influence la demande. (Traditionnellement, si le prix augmente, la demande diminue). L'élasticité de la demande mesure donc la sensibilité de la demande par rapport aux variations du prix d'un produit.

3) $y = f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2y}$

$Or \;\; e = \left(\frac{x}{y}\right) f'(x)$ *, donc* $e = \left(\frac{x}{\sqrt{x}}\right)\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{x}{2x} = 0,5 > 0 \Rightarrow$ *une équation d'offre*

4) *y étant la quantité de production d'un bien et x est son prix unitaire.*

$e = 0,5 \in]0,1[\Rightarrow$ *La production de ce bien augmente quand le prix progresse mais cette production s'élève moins rapidement que le revenu. Biens faiblement élastiques (Ce sont globalement, les produits de première nécessité.)*

Fonctions de deux variables

$\mathcal{E}$– 1 • Dérivées partielles :

$$f(x,y)$$

$$f'_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

$$f''_{x^2}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial f'_x}{\partial x}(x,y)$$

$$f''_{yx}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial f'_x}{\partial y}(x,y)$$

$$f'_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

$$f''_{y^2}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial f'_y}{\partial y}(x,y)$$

$$f''_{xy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial f'_y}{\partial x}(x,y)$$

$\mathcal{E}$– 2 • *La distance– euclidienne :*

La distance euclidienne entre $A(x_A, y_A)$ *et* $B(x_B, y_B)$

est : $d(A,B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

• $d(A,B) = 0 \Leftrightarrow A = B$

• $d(A,C) \leq d(A,B) + d(B,C)$

$\mathcal{E}$– 3 • *Boule ouverte :*

La boule ouverte de centre A et de rayon r est le disque sans bord :

$$\overset{\circ}{\mathfrak{B}}(A,r) = \{M \in \mathbb{R}^2 / d(A,M) < r\}$$

$\mathcal{E}$– 4 • *Ouvert :*

$\mathfrak{D}$ *est un ouvert de* $\mathbb{R}^2$ *, si tout point de* $\mathfrak{D}$ *est à l'intérieur de* $\mathfrak{D}$ *:*

$\forall A \in \mathfrak{D}, \exists r > 0$ *tel que* $\overset{\circ}{\mathfrak{B}}(A,r) \subset \mathfrak{D}$

$\mathcal{E}$– 5 • *Classe:*

• *Classe* C^1 : f *fonction de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}$ *est de classe* C^1 *si elle est dérivable par rapport à chaque variable et si ses dérivées partielles sont continues*

• *Classe* C^2 : f *fonction de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}$ *est de classe* C^1 *si elle est dérivable par rapport à chaque variable et si ses dérivées partielles sont dérivables et si les dérivées partielles secondes sont continues*

$\mathcal{E}$– 6 • *Opérations :*

• *Si* $h(x,y) = g[f(x,y)]$ *alors* $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) g'[f(x,y)]$

• *Si* $k(x) = f\big(u(x), v(y)\big)$ *alors*

$$k'(x) = \left[u'(x)\frac{\partial f}{\partial x}\big(u(x), v(y)\big)\right] + \left[v'(x)\frac{\partial f}{\partial y}\big(u(x), v(y)\big)\right]$$

$\mathcal{E}$– 7 • *Théorème de Schwarz :*

Si f *est de classe* C^2 *sur un ouvert* $\mathfrak{D}$ *, alors :*

$\partial^2 f/\partial x \partial y\,(x,y) = \partial^2 f/\partial y \partial x\,(x,y)$ *en tout point de* $\mathfrak{D}$

$\mathcal{E}$– 8 • *Différentielle totale :*

Soit $f(x,y)$ ***de classe*** C^1 ***sur un ouvert*** $\mathfrak{D}$.

En donnant à x ***et*** y ***les accroissements respectifs*** dx ***et*** dy ***, on obtient***

le différentielle totale definit par : $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$

$\mathcal{E}$– 9 • *Différentielle logarithmique :*

$$d(\ln|f|) = \frac{df}{f} = \frac{1}{f}\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right)$$

La différentielle logarithmique $\frac{df}{f}$ ***d'une fonction à deux variables réalise une***

approximation de la variation relative $\Delta f/f$

$\mathcal{E}$– 10 • *Développements limités :*

• ***Si*** f ***est de classe*** C^1 ***en*** (a,b) ***alors il existe*** $\epsilon(h,k)$ ***négligeable***

$\left(\lim_{(h,k)\to(0,0)} \epsilon(h,k) = 0\right)$ ***telle que :***

$$f(a+h,b+k) = f(a,b) + h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) + \sqrt{h^2+k^2}\,\epsilon(h,k)$$

En Économie , on néglige le reste $\left(\sqrt{h^2+k^2}\,\epsilon(h,k)\right)$ ***, en écrivant :***

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \text{ (notation différentielle). Avec : } \begin{cases} dx = h \\ dy = k \\ df = f(a+h,b+k) - f(a,b) \end{cases}$$

• ***Si*** f ***est de classe*** C^2 ***en*** (a,b) ***alors il existe*** $\epsilon(h,k)$ ***négligeable telle que :***

$$f(a+h,b+k) = f(a,b) + h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) + h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) +$$

$$+2hk\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) + (h^2+k^2)\epsilon(h,k)$$

$\mathcal{E}$– 11 • *Extrema locaux*

• ***Condition nécessaire : Soit*** f ***est de classe*** C^2 ***sur un ouvert*** $\mathfrak{D}$ ***de*** $\mathbb{R}^2$.

Si f ***a un extremum local dit point critique en*** $(a,b) \in \mathfrak{D}$ ***alors*** $\begin{cases} \partial f/\partial x\,(a,b) = 0 \\ \partial f/\partial y\,(a,b) = 0 \end{cases}$

• ***Condition suffisante : On appelle Hessien de f au point (a,b) :***

$$|H(f(a,b))| = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) \end{vmatrix}$$

☑ $Si\ |H(f(a,b))| > 0\ et\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) > 0 \Rightarrow (a,b)\ est\ un\ minimum\ local$

☑ $Si\ |H(f(a,b))| > 0\ et\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) < 0 \Rightarrow (a,b)\ est\ un\ maximum\ local$

☑ $Si\ |H(f(a,b))| < 0 \Rightarrow (a,b)\ n'est\ pas\ un\ extremum\ local.$

C'est un "col" (selle de cheval)

☑ $Si\ |H(f(a,b))| = 0 \Rightarrow (a,b)\ peut\ être\ ou\ ne\ pas\ être$

un extremum local def

$\mathcal{E}$– 12 • Extrema liés :

On parle d'extremum lié lorsque l'on cherche un extremum d'une fonction qui à (x,y) associe $f(x,y)$ qui doit en même temps satisfaire une contrainte de type suivant $g(x,y) = 0$.

Pour déterminer les coordonnées d'un extremum lié par une contrainte $g(x,y) = 0$, on introduit une fonction auxiliaire, appelée Lagrangien du, problème, qui dépend non seulement de x et y mais aussi d'un paramètre λ appelé multiplicateur de Lagrange : $\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$

• ***Condition nécessaire ; les candidats sont donc les solutions de :***

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(a,b,\lambda) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(a,b,\lambda) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(a,b,\lambda) = 0 \end{cases} \text{ ou encore } \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(a,b,\lambda) + \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(a,b,\lambda) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a,b,\lambda) + \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(a,b,\lambda) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

• ***Condition suffisante :*** $|H(a,b,\lambda)| = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2}(a,b,\lambda) & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y \partial x}(a,b,\lambda) & \frac{\partial g}{\partial x}(a,b,\lambda) \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x \partial y}(a,b,\lambda) & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y^2}(a,b,\lambda) & \frac{\partial g}{\partial y}(a,b,\lambda) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(a,b,\lambda) & \frac{\partial g}{\partial y}(a,b,\lambda) & 0 \end{vmatrix}$

☑ $Si\ |H(a,b,\lambda)| > 0 \Rightarrow (a,b)$ *est un minimum local de* f

sous la contrainte $g(x,y) = 0$

☑ $Si\ |H(a,b,\lambda)| < 0 \Rightarrow (a,b)$ *est un Maximum local de* f

sous la contrainte $g(x,y) = 0$

$\mathcal{E}$– 13 • *Fonctions homogènes* :

$f(x,y)$ *est homogène de degré* α , *si* $\forall \lambda > 0$, $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y)$

$\mathcal{E}$– 14 • *Théorème d'Euler* :

Si $f(x,y)$ *est homogène de degré* α *alors* : $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \alpha f(x,y)$

$\mathcal{E}$– 15 • *Plan tangent* :

Si f *est de classe* C^1 *en* (a,b) , *alors l'équation du plan tangent au* $\mathcal{G}_f$ *et au point* (a,b) *es* :

$$P : z = f(a,b) + (x-a)\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + (y-b)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$$

$\mathcal{E}$– 16 • *Variation absolue* :

La valeur approchée de la variation absolue de f *à partir d'un point* (a,b) :

$$\Delta f = f(a+\Delta x, b+\Delta y) - f(a,b) \cong \Delta x\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + \Delta y\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$$

$\mathcal{E}$– 17 • *Variation relative* :

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{f(a+\Delta x, b+\Delta y) - f(a,b)}{f(a,b)}$$

$\mathcal{E}$– 18 • *Élasticités partielles* :

$$\epsilon_{f/x}(a,b) = a\left[\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)}{f(a,b)}\right] \quad et\ \epsilon_{f/y}(a,b) = b\left[\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)}{f(a,b)}\right]$$

$\mathcal{E}$– 19 • *Élasticités partielles et variation relative* :

$$\frac{\Delta f}{f} \cong \Delta x\left(\frac{\epsilon_{f/x}(a,b)}{a}\right) + \Delta y\left(\frac{\epsilon_{f/y}(a,b)}{b}\right)$$

$\mathcal{E}$– 20 • *Élasticités partielles et homogénéité* :

Si $f(x,y)$ *est homogène de degré* α , *alors* : $\epsilon_{f/y}(a,b) + \epsilon_{f/y}(a,b) = \alpha$

$\mathcal{E}-21$ • ***Fonctions implicites :***

$$Si \begin{cases} f \text{ est de classe } C^1 \text{ au } \mathcal{V}((a,b)) \\ f(a,b)=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0 \end{cases}$$

Alors il existe un domaine I de $\mathbb{R}$ contenant le point a, tel que $\forall\, a \in I$, l'équation

$f(x,y)=0$ admet une solution unique $\varphi(x)=y$, de plus $\varphi(x)$ est dérivable sur I avec,

$$\varphi'(x) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x))}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))}$$

Exercice 6 :

Énoncé

On considère la fonction f définie par : $f(x,y)=x-y+e^{y-3}Ln(x)$

1) ***Déterminer le domaine de définition D_f de la fonction f***

Montrer que D_f est un ouvert de $\mathbb{R}^2$

2)
   a) ***Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ pour $(x,y) \in D_f$***
   b) ***On se place au voisinage du point $M_0(1,3)$; on suppose que Δy est le triple de Δx et que f augmente de $0,15$.***
   Calculer les variations absolues Δx et Δy qui ont provoqué ce changement (Faire un calcul approché)
3)
   a) ***Calculer les élasticités partielles de f au point $M_0(1,3)$***
   b) ***On se place toujours au point $M_0(1,3)$***

Sachant que y diminue de 2%, quelle doit être la variation relative de x pour que f augmente de 3%

(Faire un calcul approché)

Corrigé

1) $D_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x>0 \text{ et } y\in\mathbb{R}\} =]0,+\infty[\times]-\infty,+\infty[$

2)

a)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial[x-y+e^{y-3}Ln(x)]}{\partial x}=\frac{\partial[x]}{\partial x}-\underbrace{\frac{\partial[y]}{\partial x}}_{0}+\frac{\partial[e^{y-3}Ln(x)]}{\partial x}=1+e^{y-3}\left(\frac{\partial[Ln(x)]}{\partial x}\right)$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=1+\frac{e^{y-3}}{x}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial[x-y+e^{y-3}Ln(x)]}{\partial y}=\underbrace{\frac{\partial[x]}{\partial y}}_{0}-\frac{\partial[y]}{\partial y}+\frac{\partial[e^{y-3}Ln(x)]}{\partial y}=-1+Ln(x)\left(\frac{\partial[e^{y-3}]}{\partial y}\right)$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-1+e^{y-3}Ln(x)}$$

b)

$$\begin{cases}\Delta f=f(1+\Delta x,3+\Delta y)-f(1,3)=0,15\\ \Delta f\cong\Delta x\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,3)+\Delta y\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,3)\\ \Delta y=3\Delta x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\Delta y=3\Delta x & (1)\\ \Delta x\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,3)+3\Delta x\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,3)\cong 0,15 & (2)\end{cases}$$

$$or\ \frac{\partial f}{\partial x}(1,3)=1+\frac{e^{3-3}}{1}=2\ \ et\ \ \frac{\partial f}{\partial y}(1,3)=-1+e^{3-3}Ln(1)=-1$$

$$(2)\Rightarrow 2\Delta x-3\Delta x\cong 0,15\quad d'où\ \boxed{\Delta x\cong -0,15\ \ et\ \ \Delta y\cong -0,45}$$

3)

a) $f(1,3)=1-3+e^{3-3}Ln(1)=-2$

$$\epsilon_{f/x}(1,3)=1\times\left[\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(1,3)}{f(1,3)}\right]=1\times\left[\frac{2}{-2}\right]=-1\ et\ \epsilon_{f/y}(1,3)=3\times\left[\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(1,3)}{f(1,3)}\right]=3\times\left[\frac{-1}{-2}\right]=1,5$$

$$\boxed{\epsilon_{f/x}(1,3)=-1\ et\ \epsilon_{f/y}(1,3)=1,5}$$

b)

$$\frac{\Delta f}{f}\cong\Delta x\left(\frac{\epsilon_{f/x}(a,b)}{a}\right)+\Delta y\left(\frac{\epsilon_{f/y}(a,b)}{b}\right)avec\ \Delta f=0,03\ et\ \ \Delta y=-0,02$$

$$\left[\frac{\Delta x}{1}\times(-1)\right]+\left[\frac{-0,02}{3}\times(1,5)\right]\cong\frac{0,03}{-2}\Rightarrow\boxed{\Delta x=0,5\%}$$

Exercice 7 :

Énoncé

Soient $f_\alpha(x,y) = x^\alpha y\,;\ \alpha \in \mathbb{N}$ *et* $g(x,y) = x^4 + y^4 - 5$

1)
   a) *Montrer que* f_α *est homogène et préciser son degré d'homogénéité*
   b) *Pour quelle(s) valeur(s) de ,la somme des élasticités partielles de* f_α *est nulle*

2)
   a) *Déterminer* α *tel que* $M_0(\sqrt{2},1)$ *soit un point critique de* f_α *sous la contrainte* $g(x,y) = 0$
   b) *Chercher les points critiques de* f_4 *sous la contrainte* $g(x,y) = 0$

Corrigé

1)
   a) $\forall\, t > 0\,, f_\alpha(tx,ty) = (tx)^\alpha(ty) = t^\alpha.t(x^\alpha y) = t^{\alpha+1}f_\alpha(x,y)$

D'où $\boxed{f_\alpha \text{ est homogène de degré } (\alpha+1)}$

   b) $f_\alpha(x,y)$ *étant homogène de degré* $\alpha+1$ *, alors :*

$$x\frac{\partial f_\alpha}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f_\alpha}{\partial y}(x,y) = (\alpha+1)f_\alpha(x,y) \Rightarrow x\left[\frac{\frac{\partial f_\alpha}{\partial x}(x,y)}{f_\alpha(x,y)}\right] + y\left[\frac{\frac{\partial f_\alpha}{\partial y}(x,y)}{f_\alpha(x,y)}\right] = \alpha+1$$

$$\Rightarrow \epsilon_{f_\alpha/y}(x,y) + \epsilon_{f_\alpha/y}(x,y) = \alpha+1$$

$\boxed{D'\text{où la somme des élasticités partielles de } f_\alpha \text{ est nulle si } \alpha = -1}$

2)
   a) *Soit le lagrangien :* $\mathcal{L}_\alpha(x,y,\lambda) = f_\alpha(x,y) + \lambda g(x,y)$

$M_0(\sqrt{2},1)$ *est un point critique de* f_α *sous la contrainte* $g(x,y) = 0$ *si :*

$$M_0(\sqrt{2},1) \text{ est une solution de } (S) : \begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}_\alpha}{\partial x}\left((\sqrt{2},1),\lambda\right) = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}_\alpha}{\partial y}\left((\sqrt{2},1),\lambda\right) = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}_\alpha}{\partial \lambda}\left((\sqrt{2},1),\lambda\right) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_\alpha}{\partial x}(x,y,\lambda) = \frac{\partial f_\alpha}{\partial x}(x,y,\lambda) + \lambda\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,\lambda) = \frac{\partial (x^\alpha y)}{\partial x} + \lambda\frac{\partial (x^4+y^4-5)}{\partial x}$$

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}_\alpha}{\partial x}(x,y,\lambda) = \alpha y x^{\alpha-1} + 4\lambda x^3}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_\alpha}{\partial y}(x,y,\lambda) = \frac{\partial f_\alpha}{\partial y}(x,y,\lambda) + \lambda\frac{\partial g}{\partial y}(x,y,\lambda) = \frac{\partial(x^\alpha y)}{\partial y} + \lambda\frac{\partial(x^4+y^4-5)}{\partial y}$$

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}_\alpha}{\partial y}(x,y,\lambda) = x^\alpha + 4\lambda y^3}$$

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}_\alpha}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) = g(x,y) = x^4 + y^4 - 5}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha y x^{\alpha-1} + 4\lambda x^3 = 0 \\ x^\alpha + 4\lambda y^3 = 0 \\ x^4 + y^4 - 5 = 0 \end{cases}$$

$$M_0(\sqrt{2},1) \text{ est une solution de } (S) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \times 1 \times (\sqrt{2})^{\alpha-1} + 4\lambda(\sqrt{2})^3 = 0 \\ (\sqrt{2})^\alpha + 4\lambda(1)^3 = 0 \\ (\sqrt{2})^4 + 1^4 - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha(\sqrt{2})^{\alpha-1} + 8\sqrt{2}\lambda = 0 \\ (\sqrt{2})^\alpha + 4\lambda = 0 \\ (\sqrt{2})^4 + 1^4 - 5 = 0 \quad (\text{évidente}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha(\sqrt{2})^{\alpha-1} + 8\sqrt{2}\lambda = 0 \\ (\sqrt{2})^\alpha + 4\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha(\sqrt{2})^{\alpha-1} + (\sqrt{2})^7\lambda = 0 \\ \lambda = -\dfrac{(\sqrt{2})^\alpha}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha(\sqrt{2})^{\alpha-1} + (\sqrt{2})^7\lambda = 0 \\ \lambda = -(\sqrt{2})^{\alpha-4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha(\sqrt{2})^{\alpha-1} - (\sqrt{2})^7(\sqrt{2})^{\alpha-4} = 0 \\ \lambda = -(\sqrt{2})^{\alpha-4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha(\sqrt{2})^{\alpha-1} - (\sqrt{2})^{\alpha+3} = 0 \\ \lambda = -(\sqrt{2})^{\alpha-4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{2})^{\alpha-1}\left[\alpha - (\sqrt{2})^4\right] = 0 \\ \lambda = -(\sqrt{2})^{\alpha-4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{2})^{\alpha-1}[\alpha - 4] = 0 \\ \lambda = -(\sqrt{2})^{\alpha-4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 4 \\ \lambda = -(\sqrt{2})^{\alpha-4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 4 \\ \lambda = -1 \end{cases}$$

D'où $\boxed{M_0(\sqrt{2},1) \text{ est un point critique de } f_\alpha \text{ sous la contrainte } g(x,y) = 0 \text{ si } \alpha = 4}$

a) $M(x,y)$ *est un point critique de* f_4 *sous la contrainte* $g(x,y) = 0$ *si*

$$(S_4) \begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}_4}{\partial x}(x,y,\lambda) = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}_4}{\partial y}(x,y,\lambda) = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}_4}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4yx^3 + 4\lambda x^3 = 0 \\ x^4 + 4\lambda y^3 = 0 \\ x^4 + y^4 - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3(y+\lambda) = 0 & (1) \\ x^4 + 4\lambda y^3 = 0 & (2) \\ x^4 = 5 - y^4 & (3) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ ou \\ y = -\lambda \end{cases} \; Donc \; (S_4) = (S_4^1) \cup (S_4^2) \; , avec \; (S_4^1): \begin{cases} x = 0 \\ 4\lambda y^3 = 0 \\ 5 - y^4 = 0 \end{cases} \; et \; (S_4^2): \begin{cases} y = -\lambda \\ x^4 - 4\lambda^4 = 0 \\ x^4 = 5 - \lambda^4 \end{cases}$$

$$(S_4^1): \begin{cases} x = 0 \\ 4\lambda y^3 = 0 \\ 5 - y^4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 0 \\ \lambda = 0 \\ y = \sqrt[4]{5} \end{cases} \; ou \; \underbrace{\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ y = \sqrt[4]{5} \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}}_{\emptyset} \end{cases} \; d'où \; M_1(0, \sqrt[4]{5})$$

$$(S_4^2): \begin{cases} y = -\lambda \\ x^4 - 4\lambda^4 = 0 \\ x^4 = 5 - \lambda^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\lambda \\ x^4 = 4\lambda^4 \\ x^4 = 5 - \lambda^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\lambda \\ x^4 = 4\lambda^4 \\ 4\lambda^4 = 5 - \lambda^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\lambda \\ x^4 = 4\lambda^4 \\ 5\lambda^4 = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} y = -\lambda \\ x^4 = 4\lambda^4 \\ \lambda = -1 \end{cases} \; ou \; \begin{cases} y = -\lambda \\ x^4 = 4\lambda^4 \\ \lambda = 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} y = 1 \\ x^4 = 4 \\ \lambda = -1 \end{cases} \; ou \; \begin{cases} y = -1 \\ x^4 = 4 \\ \lambda = 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} y = 1 \\ x = \mp\sqrt{2} \\ \lambda = -1 \end{cases} \; ou \; \begin{cases} y = -1 \\ x = \mp\sqrt{2} \\ \lambda = 1 \end{cases} \end{cases}$$

On obtient 3 autres points critiques, autres que M_0 et M_1 :

$M_0(\sqrt{2}, 1)$, $M_2(-\sqrt{2}, 1)$, $M_3(\sqrt{2}, -1)$ *et* $M_4(-\sqrt{2}, -1)$

Les points critiques de f_4 seront au total :

$$\boxed{M_0(\sqrt{2}, 1)\,, M_1(0, \sqrt[4]{5}), M_2(-\sqrt{2}, 1)\,, M_3(\sqrt{2}, -1) \; et \; M_4(-\sqrt{2}, -1)}$$

Exercice 8 :

Énoncé

$$Soit \; f(x, y) = \frac{(x + y)^{\frac{1}{3}}}{x}$$

1) ***Déterminer D_f , le domaine de définition de f***
2) ***Etudier l'homogénéité de f***
3) ***Calculer les dérivées partielles premières de f***
4)
   a) ***Calculer $\epsilon_{f/y}(2, 1)$, élasticité de f par rapport à y au point $(2, 1)$***
   b) ***Déduire l'élasticité de f par rapport à x au point $(2, 1)$***
5)
   a) ***Ecrire une équation du plan tangent à C_f au point $A(1, 0, f(1, 0))$***
   b) ***Donner une valeur approchée de $f(1,002;\ 0,02)$***
6) ***Déterminer la variation relative de f si y diminue de 2% à partir de $y_0 = 1$;***

BEN AHMED MOHSEN Téléphone: (+216) 97 619191 / 54 619191
omega.center.cp@gmail.com https://web.facebook.com/OMEGACENTER2014

x_0 étant égal à 2

Corrigé

1) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq 0\} = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$

2)

$$\forall \lambda > 0, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} ;\ f(\lambda x, \lambda y) = \frac{(\lambda x + \lambda y)^{\frac{1}{3}}}{\lambda x} = \frac{(\lambda(x+y))^{\frac{1}{3}}}{\lambda x} = \frac{\lambda^{\frac{1}{3}}(x+y)^{\frac{1}{3}}}{\lambda x} = \lambda^{-\frac{2}{3}}\left[\frac{(x+y)^{\frac{1}{3}}}{x}\right]$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{-\frac{2}{3}} f(x,y). D'où\ \boxed{f(x,y)\ est\ homogène\ de\ degré\ \lambda = -\frac{2}{3}}$$

3) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$:

- $$f'_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \left[\frac{(x+y)^{\frac{1}{3}}}{x}\right]'_x = \frac{x\left[(x+y)^{\frac{1}{3}}\right]'_x - (x+y)^{\frac{1}{3}}}{x^2}$$

$$= \frac{\left[\frac{1}{3}x(x+y)'_x(x+y)^{-\frac{2}{3}}\right] - (x+y)^{\frac{1}{3}}}{x^2} = \frac{\left[\frac{1}{3}x(x+y)^{-1}(x+y)^{\frac{1}{3}}\right] - (x+y)^{\frac{1}{3}}}{x^2}$$

$$= \frac{(x+y)^{\frac{1}{3}}\left[\frac{x}{3(x+y)} - 1\right]}{x^2} = \left[\frac{(x+y)^{\frac{1}{3}}}{x^2}\right]\left[\frac{x - 3x - 3y}{3(x+y)}\right] = \left[\frac{(x+y)^{\frac{1}{3}}}{x^2}\right]\left[\frac{-2x-3y}{3(x+y)}\right]$$

$$\boxed{f'_x(x,y) = \frac{(-2x-3y)(x+y)^{\frac{1}{3}}}{3x^2(x+y)} = \left[\frac{-2x-3y}{3x(x+y)}\right] f(x,y)}$$

- $$f'_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \left[\frac{(x+y)^{\frac{1}{3}}}{x}\right]'_y = \frac{1}{x}\left[(x+y)^{\frac{1}{3}}\right]'_y = \frac{1}{x}\left[\frac{1}{3}(x+y)'_y(x+y)^{-\frac{2}{3}}\right]$$

$$= \frac{(x+y)^{-\frac{2}{3}}}{3x} = \frac{(x+y)^{-1}(x+y)^{\frac{1}{3}}}{3x} = \left[\frac{1}{3(x+y)}\right]\left[\frac{(x+y)^{\frac{1}{3}}}{x}\right]$$

$$\boxed{f'_y(x,y) = \frac{(x+y)^{-\frac{2}{3}}}{3x} = \frac{f(x,y)}{3(x+y)}}$$

4)

a) $\epsilon_{f/y}(2,1) = 1 \times \left[\frac{f'_y(2,1)}{f(2,1)}\right] = \frac{\frac{f(2,1)}{3(2+1)}}{f(2,1)}$; $\boxed{\epsilon_{f/y}(2,1) = \frac{1}{9}}$

b) $D'après\ l'identité\ d'Euler, on\ a :$

$$f(x,y)\ est\ homogène\ de\ degré -\frac{2}{3}\ alors :\ xf'_x(x,y)+yf'_y(x,y)=-\frac{2}{3}f(x,y)$$

$$En\ particulier :\ \left(2f'_x(2,1)\right)+\left(1\times f'_y(2,1)\right)=-\frac{2}{3}f(2,1)\Leftrightarrow\left(2\left(\frac{f'_x(2,1)}{f(2,1)}\right)\right)+\left(1\times\frac{f'_y(2,1)}{f(2,1)}\right)=-\frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \epsilon_{f/x}(2,1)+\epsilon_{f/y}(2,1)=-\frac{2}{3}\Leftrightarrow \epsilon_{f/x}(2,1)=-\frac{2}{3}-\epsilon_{f/y}(2,1)\Leftrightarrow \epsilon_{f/x}(2,1)=-\frac{2}{3}-\frac{1}{9}$$

$$\boxed{\epsilon_{f/x}(2,1)=-\frac{7}{9}}$$

5)

a) $l'équation\ du\ plan\ tangent\ à\ \mathcal{C}_f\ au\ point\ A(1,0,f(1,0))\ est\ :$

$$P: z=f(1,0)+(x-1)f'_x(1,0)+(y-0)f'_y(1,0)\ ;\ avec\ f(1,0)=1, f'_x(1,0)=-\frac{2}{3}$$

$$et\ \ f'_y(1,0)=\frac{1}{3}$$

$$P: z=1-\frac{2}{3}(x-1)+\frac{1}{3}(y-0)\Leftrightarrow \boxed{P: z=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y+\frac{5}{3}}$$

b) $l'équation\ du\ plan\ tangent\ à\ \mathcal{C}_f\ au\ point\ A(1,0,f(1,0))\ est\ :$

$$f(1,002;\ 0,02)=f[(1+0,002),(0+0,02)]$$

$$\cong f(1,0)+0,002f'_x(1,0)+0,02f'_y(1,0)$$

$$f(1,002;\ 0,02)\cong 1+\left(0,002\times\left(-\frac{2}{3}\right)\right)+\left(0,02\times\frac{1}{3}\right)$$

$$\boxed{f(1,002;\ 0,02)\cong 1,0053}$$

6) $$\frac{\Delta f}{f}\cong \underbrace{\Delta x}_{0\%}\left(\frac{\epsilon_{f/x}(2,1)}{2}\right)+\underbrace{\Delta y}_{-2\%}\left(\frac{\epsilon_{f/y}(2,1)}{1}\right)$$

$$\cong(-0,02)\times\frac{1}{9}$$

$$\boxed{\frac{\Delta f}{f}\cong -0,22\%}$$

BEN AHMED MOHSEN Téléphone: (+216) 97 619191 / 54 619191
omega.center.cp@gmail.com https://web.facebook.com/OMEGACENTER2014

Exercice 9 :

Une fonction de production est donnée par la relation $F(x,y) = x^{\alpha}y^{\beta}$; $(\alpha > 0$ *et* $\beta > 0)$

x *et* y *désignent respectivement les quantités de capital et le travail utilisés*

1) *Etudier l'homogénéité de F*
2)
   a) *Déterminer les dérivées partielles premières de F*
   b) *Ecrire l'identité d'Euler vérifiée par F*
3) *Ecrire les conditions du premier ordre de maximisation de la fonction de*

profit Π *de l'entreprise définie par :* $\Pi(x,y) = pF(x,y) - (rx + wy)$, *sachant*

que p, r *et* w *sont des paramètres donnés*

4) *En déduire la relation :* $rx + wy = p(\alpha + \beta)F(x,y)$

Corrigé

1)

$\forall \lambda > 0 , \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$; $F(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^{\alpha}(\lambda y)^{\beta} = \lambda^{\alpha}x^{\alpha}\lambda^{\beta}y^{\beta} = \lambda^{(\alpha+\beta)}(x^{\alpha}y^{\beta}) = \lambda^{(\alpha+\beta)}F(x,y)$

D'où $\boxed{F(x,y) \text{ est homogène de degré } \lambda = \alpha + \beta}$

2)

a)

- $F'_x(x,y) = \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = [x^{\alpha}y^{\beta}]'_x = y^{\beta}[x^{\alpha}]'_x = \alpha y^{\beta}x^{\alpha-1} = \dfrac{\alpha}{x}F(x,y)$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} , F'_x(x,y) = \alpha y^{\beta}x^{\alpha-1} = \frac{\alpha}{x}F(x,y)}$$

- $F'_y(x,y) = \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \left[x^{\alpha}y^{\beta}\right]'_y = x^{\alpha}\left[y^{\beta}\right]'_y = \beta x^{\alpha}y^{\beta-1} = \dfrac{\beta}{y}F(x,y)$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* , F'_y(x,y) = \beta x^{\alpha}y^{\beta-1} = \frac{\beta}{y}F(x,y)}$$

b) *D'après l'identité d'Euler, on a :*

$F(x,y)$ *est homogène de degré* $\lambda = \alpha + \beta$, $\boxed{xF'_x(x,y) + yF'_y(x,y) = (\alpha + \beta)F(x,y)}$

3) $\Pi(x,y) = pF(x,y) - (rx + wy)$

Condition premier ordre :

Adresse : 2, Rue Ibn Arafa, av de l'environnement Manouba Centre, Manouba

Π *a un extremum local en* (x,y) *alors :*

$$(S)\begin{cases}\dfrac{\partial \Pi}{\partial x}(x,y)=0\,,(x,y)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}\\ \dfrac{\partial \Pi}{\partial y}(x,y)=0,(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}pF'_x(x,y)-r=0\,,(x,y)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}\\ pF'_y(x,y)-w=0,(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*\end{cases}$$

4) (x,y) *est un extremum local* $\begin{cases}pF'_x(x,y)=r\\ pF'_y(x,y)=w\end{cases}$ *ou encore* $\begin{cases}F'_x(x,y)=\frac{r}{p}\\ F'_y(x,y)=\frac{w}{p}\end{cases};p\neq 0$

F étant homogène de degré $\alpha+\beta$ *, donc* $x\underbrace{F'_x(x,y)}_{\frac{r}{p}}+y\underbrace{F'_y(x,y)}_{\frac{w}{p}}=(\alpha+\beta)F(x,y)$

Par la suite $\dfrac{rx}{p}+\dfrac{wy}{p}=(\alpha+\beta)F(x,y)$ *, d'où* $\boxed{rx+wy=p(\alpha+\beta)F(x,y)}$

Le symbole $\sum$

$\mathcal{F}-1$ • Soient m et n deux entiers naturels. Alors :

$$\sum_{k=m}^{n}u_k=\begin{cases}u_m+u_{m+1}+\cdots+u_{n-1}+u_n\,;si\ m\leq n\\ 0\ ;si\ non\end{cases}$$

On peut aussi noter $\sum\limits_{m\leq k\leq n}u_k$ *ou encore* $\sum\limits_{k\in[m,n]}u_k$.

Cette somme comporte $n-m+1$ *termes*

$\mathcal{F}-2$ • La variable k est muette : on peut la remplacer par n'importe quelle autre variable. Autrement dit $\sum\limits_{k=m}^{n}u_k=\sum\limits_{p=m}^{n}u_p$

$\mathcal{F}-3$ • Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite, alors $\forall\alpha\in\mathbb{R}$, $\forall n\in\mathbb{N}$ on a : $\sum\limits_{k=0}^{n}(\alpha u_k)=\alpha\sum\limits_{k=0}^{n}u_k$

$\mathcal{F}-4$ • Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites, alors $\forall n\in\mathbb{N}$ on a : $\sum\limits_{k=0}^{n}(x_k+y_k)=\sum\limits_{k=0}^{n}x_k+\sum\limits_{k=0}^{n}y_k$

$\mathcal{F}-5$ • Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites, alors $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ on a :

$$\sum_{k=0}^{n}(\alpha x_k+\beta y_k)=\alpha\sum_{k=0}^{n}x_k+\beta\sum_{k=0}^{n}y_k$$

$\mathcal{F}-6$ • Attention !

La sommation se comporte mal avec les produits. Autrement dit,

en général, $\sum_{k=0}^{n} x_k y_k \neq \left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} y_k\right)$

$\mathcal{F}-7$ • Sommes télescopiques :

On appelle somme télescopique toute somme de type suivant :

$$\sum_{k=m}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_m$$

$\mathcal{F}-8$ • Relation de Chasles :

$$\forall j \in \mathbb{N}^*, \text{ on a : } \sum_{k=p}^{n+j} u_k = \sum_{k=p}^{n} u_k + \sum_{k=n+1}^{n+j} u_k$$

$\mathcal{F}-9$ • Changements d'indice ou ré-indexation :

$$\sum_{k=p}^{n} u_{k+l} = \sum_{j=p+l}^{n+l} u_j = \sum_{k=p+l}^{n+l} u_k$$

On a effectué le changement de variable $j = k + l$

$\mathcal{F}-10$ • Principe de raisonnement par récurrence :

Soit à prouver une propriété $\mathcal{P}_n$ *, pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Si : $\begin{cases} \text{Initialisation : } \mathcal{P}_0 \text{ est vraie} \\ \text{Hérédité : } \forall n \in \mathbb{N}, \text{ l'implication } (\mathcal{P}_n \text{ vraie} \Rightarrow \mathcal{P}_{n+1} \text{ vraie}) \text{ est vraie} \end{cases}$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}_n$ *est vraie*

$\mathcal{F}-11$ • Binôme de Newton :

$$\forall n \in \mathbb{N} : (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k = \sum_{j=0}^{n} C_n^j x^j y^{n-j}$$

$\mathcal{F}-12$ • somme des entiers de 1 à n :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ on a : } \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$\mathcal{F}-13$ • Somme des carrés :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, on\ a : \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$\mathcal{F}-14$ • Somme des cubes :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, on\ a : \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$$

$\mathcal{F}-15$ • Somme d'une suite géométrique :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \forall\, n \in \mathbb{N}^* : \sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

$\mathcal{F}-16$ • $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \forall\, n \in \mathbb{N}^* :\ x^n - y^n = (x-y)\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k$

• $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\forall$ *n entier naturel* **impair** : $x^n + y^n = (x+y)\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^{n-1-k} y^k$

$\mathcal{F}-17$ • Sommes doubles :

On appelle somme double toute somme du type :

$$\sum_{i=m}^{n}\sum_{j=p}^{q} a_{ij} = \sum_{i=m}^{n} S_i \quad \text{où } S_i = \sum_{j=p}^{q} a_{ij}$$

a • $\displaystyle\sum_{i=m}^{n}\sum_{j=p}^{q} a_{ij} = \sum_{\substack{m\le i\le n\\ p\le j\le q}} a_{ij} = \sum_{(i,j)\in[m,n]\times[p,q]} a_{ij}$

b • $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{1\le i,j\le n} a_{ij} = \sum_{(i,j)\in[1,n]^2} a_{ij}$

c • Somme sur un domaine rectangulaire :

Soit $\Omega = I \times J$, avec $I = [m,n]$ et $J = [p,q]$ où $m \le n$ et $p \le q$. L'ensemble Ω s'identifie alors aux points d'intersection d'une grille rectangulaire du plan.

Dans ces conditions, on a : $\displaystyle\sum_{(i,j)\in\Omega} a_{ij} = \sum_{i=m}^{n}\left(\sum_{j=p}^{q} a_{ij}\right) = \sum_{j=p}^{q}\left(\sum_{i=m}^{n} a_{ij}\right)$

d • Mise en facteur de termes indépendants de l'indice de sommation :

Considérons la somme $S = \sum_{\substack{m\le i\le n\\ p\le j\le q}} a_{ij}$ où $a_{ij} = \lambda_i \mu_j b_{ij}$

On peut alors factoriser λ_i *dans une somme interne sur* j, *et* μ_j *dans une somme interne sur* i. *Plus précisément, on peut écrire :*

$$S = \sum_{\substack{m\le i\le n\\ p\le j\le q}} \lambda_i\mu_j b_{ij} = \sum_{i=m}^{n}\left(\sum_{j=p}^{q}\lambda_i\mu_j b_{ij}\right) = \sum_{i=m}^{n}\lambda_i\left(\sum_{j=p}^{q}\mu_j b_{ij}\right) = \sum_{j=p}^{q}\mu_j\left(\sum_{i=m}^{n}\lambda_i b_{ij}\right)$$

Dans le cas où $a_{ij} = \lambda_i\mu_j$, $S = \sum_{\substack{m\le i\le n\\ p\le j\le q}} \lambda_i\mu_j = \sum_{i=m}^{n}\lambda_i\left(\sum_{j=p}^{q}\mu_j\right) = \left(\sum_{i=m}^{n}\lambda_i\right)\left(\sum_{j=p}^{q}\mu_j\right)$

e • Somme sur un domaine triangulaire :

Un cas particulier important est celui où Ω *est un domaine triangulaire du plan.*

Supposons que $\Omega = \{(i,j)\in\mathbb{R}^2, 0\le i\le j\le n\}$

Dans ces conditions, on a : $\sum_{(i,j)\in\Omega} a_{ij} = \sum_{0\le i\le j\le n} a_{ij} = \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} a_{ij}\right) = \sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{j} a_{ij}\right)$

on a aussi :

☑ $$\sum_{0\le i<j\le n} a_{ij} = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{j-1} a_{ij}$$

☑ $$\sum_{\substack{0\le i,j\le n\\ 0\le i+j\le n}} a_{ij} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n-j} a_{ij} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i} a_{ij}$$

$\mathcal{F}$– 18 • Produits de sommes :

a • Développement d'un carré : *Soit* $I = [m, n]$ *un intervalle d'entiers.*

$$\left(\sum_{i=m}^{n} x_i\right)^2 = \sum_{m\le i,j\le n} x_i x_j = \sum_{i=m}^{n}\sum_{j=m}^{n} x_i x_j = \sum_{i=m}^{n} x_i^2 + \sum_{\substack{m\le i,j\le n\\ i\ne j}} x_i x_j = \sum_{i=m}^{n} x_i^2 + 2\sum_{m\le i<j\le n} x_i x_j$$

On peut écrire aussi : $\left(\sum_{i=m}^{n} x_i\right)^2 = \sum_{i=m}^{n} x_i^2 + 2\sum_{i=m}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} x_i x_j$

$\mathscr{b}$ • **Développement d'un cube :**

$$\left(\sum_{i=m}^{n} x_i\right)^3 = \sum_{m\le i,j,k\le n} x_i x_j x_k = \sum_{i=m}^{n}\sum_{j=m}^{n}\sum_{k=m}^{n} x_i x_j x_k = \sum_{i=m}^{n} x_i^3 + 3\sum_{i\neq j} x_i^2 x_j + 6\sum_{i<j<k} x_i x_j x_k$$

$$c \bullet \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i c_i\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i b_i a_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}(a_i b_i)(a_j c_j)$$

Exercice 10 :

Énoncé

1)

a) *Calculer de deux manières la somme suivante* : $R = \sum_{k=0}^{n}(k+1)^2 - \sum_{k=0}^{n} k^2$

En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2k+1)$ *puis* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k$

b) *Calculer de deux manières la somme suivante* : $H = \sum_{k=0}^{n}(k+1)^3 - \sum_{k=0}^{n} k^3$

En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2$

2)

a) *Déterminer deux réels a et b tels que pour tout x réel strictement positif,*

on ait $\dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1}$

b) *Pour tout entier* $n \geq 1$ *, on pose* :

$$S_n = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

En utilisant ce qui précède, exprimer S_n *en fonction de n. Que vaut* $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$?

3)

Calculer $A_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} ij$, $B_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}(i+j)$ $C_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} j$, $D_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} i$, $E_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n} j$

et $F_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n} i$

Corrigé

1)

a) $R = \sum_{k=0}^{n}(k+1)^2 - \sum_{k=0}^{n} k^2$

$$Posons\ u_n = n^2 \Rightarrow R = \sum_{k=0}^{n} u_{k+1} - \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n}(u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0 = (n+1)^2 - 0 = (n+1)^2$$

$$\boxed{R = (n+1)^2}$$

$$Or\ R = \sum_{k=0}^{n}(k+1)^2 - \sum_{k=0}^{n} k^2 = \sum_{k=0}^{n}[(k+1)^2 - k^2] = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{[(k+1)-k]}_{1}[(k+1)+k]$$

$$donc\ R = \sum_{k=0}^{n}(2k+1)\ \ d'où\ \boxed{\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = (n+1)^2}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = (n+1)^2 \Leftrightarrow 2\sum_{k=0}^{n} k + \underbrace{\sum_{k=0}^{n} 1}_{(n+1)} = (n+1)^2 \Leftrightarrow 2\sum_{k=0}^{n} k = (n+1)^2 - (n+1)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} k = \frac{(n+1)[(n+1)-1]}{2}\ \ D'où\ \boxed{\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}$$

b) $H = \sum_{k=0}^{n}(k+1)^3 - \sum_{k=0}^{n} k^3$

$$Posons\ u_n = n^3 \Rightarrow H = \sum_{k=0}^{n} u_{k+1} - \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n}(u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - \underbrace{u_0}_{0} = (n+1)^3$$

$$\boxed{H = \sum_{k=0}^{n}(k+1)^3 - \sum_{k=0}^{n} k^3 = (n+1)^3}$$

$$On\ a:\ x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$$

$$Et\ H = \sum_{k=0}^{n}[(k+1)^3 - k^3]$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\left[\underbrace{((k+1)-k)}_{1}((k+1)^2 + (k+1)k + k^2)\right] = \sum_{k=0}^{n}(k^2 + 2k + 1 + k^2 + k + k^2)$$

$$= \sum_{k=0}^{n}(3k^2 + 3k + 1) = 3\sum_{k=0}^{n} k^2 + 3\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1 = 3\sum_{k=0}^{n} k^2 + 3\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) + (n+1)$$

$$Or\ H = (n+1)^3\ donc\ 3\sum_{k=0}^{n} k^2 + 3\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) + (n+1) = (n+1)^3$$

$$3\sum_{k=0}^{n}k^2=(n+1)^3-3\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)-(n+1)=(n+1)\left[(n+1)^2-\frac{3n}{2}-1\right]$$

$$=(n+1)\left[n^2+2n+1-\left(\frac{3n+2}{2}\right)\right]=(n+1)\left[n^2+\left(\frac{4n+2}{2}\right)-\left(\frac{3n+2}{2}\right)\right]$$

$$=(n+1)\left[n^2+\frac{n}{2}\right]=n(n+1)\left[\frac{(2n+1)}{2}\right]=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

$$D'\text{où}\ \boxed{\sum_{k=0}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

2)

a) $\frac{1}{x(x+1)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}\Leftrightarrow\frac{1}{x(x+1)}=\frac{(a+b)x+a}{x+1}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=0\\a=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-1\\a=1\end{cases}$

$$D'\text{où}\ \boxed{\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}$$

b) $S_n=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}\right)$

$Posons\ u_n=\frac{1}{n}\ ,ainsi\ S_n=-\sum_{k=1}^{n}(u_{k+1}-u_k)\ =-(u_{n+1}-u_1)=u_1-u_{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$

$$D'\text{où}\ \boxed{\forall\,n\geq1\,,\ S_n=\frac{n}{n+1}}\ et\ \boxed{\lim_{n\to+\infty}S_n=1}$$

3)

$$A_n=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}ij=\left(\sum_{i=0}^{n}i\right)\left(\sum_{j=0}^{n}j\right)=\left(\sum_{i=0}^{n}i\right)\left(\sum_{i=0}^{n}i\right)=\left(\sum_{i=0}^{n}i\right)^2$$

j *étant variable muette, donc on peut la remplacer par n'importe quelle autre variable :*

$$\sum_{j=0}^{n}j=\sum_{k=0}^{n}k=\sum_{i=0}^{n}i$$

$$Ainsi\ \ A_n=\left(\sum_{i=0}^{n}i\right)\left(\sum_{j=0}^{n}j\right)=\left(\sum_{i=0}^{n}i\right)\left(\sum_{i=0}^{n}i\right)=\left(\sum_{i=0}^{n}i\right)^2=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

$$\boxed{A_n=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}ij=\frac{n^2(n+1)^2}{4}}$$

· $B_n = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}(i+j) = \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{n}(i+j)\right) = \sum_{i=0}^{n}\left[\left(\sum_{j=0}^{n} i\right) + \left(\sum_{j=0}^{n} j\right)\right] = \sum_{i=0}^{n}\left[i\left(\sum_{j=0}^{n} 1\right) + \left(\sum_{j=0}^{n} j\right)\right]$

$Or \sum_{j=0}^{n} 1 = n+1 \ et \sum_{j=0}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$

$Donc\ B_n = \sum_{i=0}^{n}\left[(n+1)i + \frac{n(n+1)}{2}\right] = (n+1)\sum_{i=0}^{n} i + \frac{n(n+1)}{2}\sum_{i=0}^{n} 1 = (n+1)\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] + (n+1)\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$

$$D'où\ \boxed{B_n = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}(i+j) = n(n+1)^2}$$

· $C_n = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} j$

$1^{ère}$ méthode	$2^{ème}$ méthode
$C_n = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} j = \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{i} j\right) = \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{i(i+1)}{2}\right)$ $= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}(i^2+i) = \frac{1}{2}\left[\sum_{i=0}^{n} i^2 + \sum_{i=0}^{n} i\right] = \frac{1}{2}\left[\sum_{i=0}^{n} i^2 + \sum_{i=0}^{n} i\right]$ $Or, \forall n \in \mathbb{N}^*, on\ a: \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ *Par la suite :* $C_n = \frac{1}{2}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right]$ $= \frac{n(n+1)}{4}\left[\frac{2n+1}{3} + 1\right] = \frac{n(n+1)}{4}\left(\frac{2n+4}{3}\right)$ $= \frac{2n(n+1)(n+2)}{12}$ $D'où\ \boxed{C_n = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} j = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}}$	$C_n = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} j = \sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=j}^{n} j\right) = \sum_{j=0}^{n} j\left(\sum_{i=j}^{n} 1\right)$ $= \sum_{j=0}^{n}[j(n-j+1)] = \sum_{j=0}^{n}[-j^2+nj+j]$ $= -\sum_{j=0}^{n} j^2 + (n+1)\sum_{j=0}^{n} j$ $= -\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)^2}{2}$ $= \frac{n(n+1)}{2}\left[-\frac{2n+1}{3} + n + 1\right]$ $= \frac{n(n+1)}{2}\left[\frac{2n-1+3n+3}{3}\right]$ $= \frac{n(n+1)}{2}\left[\frac{n+2}{3}\right]$ $D'où\ \boxed{C_n = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} j = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}}$

· $D_n = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} i = \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{i} i\right) = \sum_{i=0}^{n}\left[i\left(\sum_{j=0}^{i} 1\right)\right] = \sum_{i=0}^{n}[i(i+1)]$

$Or\ on\ a\ vérifié\ que\quad C_n = \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{i(i+1)}{2}\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}[i(i+1)] = \frac{1}{2}D_n\ , ainsi\ D_n = 2C_n$

$$D'où\ \boxed{D_n = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} i = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}}$$

$$\cdot\ E_n=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n} j=\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} j\right)=\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{j} j\right)=\sum_{j=0}^{n} j\left(\sum_{i=0}^{j} 1\right)=\sum_{j=0}^{n} j(j+1)$$

$$E_n=\sum_{j=0}^{n} j(j+1)=\sum_{k=0}^{n} k(k+1)=\sum_{j=0}^{n} j(j+1)=\sum_{i=0}^{n}[i(i+1)]=D_n$$

$$D'\text{où}\ \boxed{E_n=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n} j=D_n=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}}$$

$$\cdot\ F_n=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n} i=\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} i\right)=\sum_{i=0}^{n} i\left(\sum_{j=i}^{n} 1\right)=\sum_{i=0}^{n} i(n-i+1)$$

$$Or\ on\ a\ vérifié\ que\ \ C_n=\sum_{j=0}^{n}[j(n-j+1)]=\sum_{k=0}^{n}[k(n-k+1)]=\sum_{i=0}^{n} i(n-i+1)$$

$$D'\text{où}\ \boxed{F_n=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n} i=C_n=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}}$$

Exercice 11 :

1) *Calculer les sommes suivantes* :

$$\cdot\ \sum_{k=5}^{n-1}\frac{2^{k-1}}{5^{k+1}}\qquad \cdot\ \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\qquad \cdot\ \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{n+1-k}\right)$$

<u>Corrigé</u>

1)

$$\cdot\ \sum_{k=5}^{n-1}\frac{2^{k-1}}{5^{k+1}}=\sum_{k=5}^{n-1}\frac{2^{k}\times 2^{-1}}{5^{k}\times 5^{1}}=\sum_{k=5}^{n-1}\frac{1}{10}\left(\frac{2}{5}\right)^{k}=\frac{1}{10}\sum_{k=5}^{n-1}\left(\frac{2}{5}\right)^{k}=\frac{1}{10}\left(\frac{2}{5}\right)^{5}\left(\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{(n-1-5+1)}}{1-\left(\frac{2}{5}\right)}\right)$$

$$\sum_{k=5}^{n-1}\frac{2^{k-1}}{5^{k+1}}=\frac{1}{10}\times\frac{32}{3125}\times\left(\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{(n-5)}}{\frac{3}{5}}\right)=\frac{1}{10}\times\frac{32}{3125}\times\frac{5}{3}\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^{(n-5)}\right)$$

$$D'\text{où} \boxed{\sum_{k=5}^{n-1}\frac{2^{k-1}}{5^{k+1}}=\frac{16}{9375}\times\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^{(n-5)}\right)}$$

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)=\sum_{k=1}^{n}[\ln(k+1)-\ln k]$

Notons $u_n=\ln n$ *, donc* $\begin{cases}\ln(k+1)=u_{k+1}\\ \ln k=u_k\end{cases}$

Par la suite $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)=\sum_{k=1}^{n}[\ln(k+1)-\ln k]=\sum_{k=1}^{n}(u_{k+1}-u_k)$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)=u_{n+1}-u_1=\ln(n+1)-\ln(1).$ *D'où* $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)=\ln(n+1)}$

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{n+1-k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+1-k}$

Calculons $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+1-k}$

Effectuons la ré-indexation suivante : $t=n+1-k=f(k)\searrow$

donc $\begin{cases}si\ k=1\,,alors\ t=n\\ si\ k=n\,,alors\ t=1\end{cases}$ *. Ainsi* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+1-k}=\sum_{t=1}^{n}\frac{1}{t}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$

Par la suite $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{n+1-k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{t=1}^{n}\frac{1}{t}$ *, or* $\displaystyle\sum_{t=1}^{n}\frac{1}{t}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ *. D'où* $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{n+1-k}\right)=0}$

Exercice 12 :

Calculer $\displaystyle\sum_{1\le i\le j\le n}\frac{i}{j}$

<u>Corrigé</u>

$$\sum_{1\le i\le j\le n}\frac{i}{j}=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j}\frac{i}{j}\right)=\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{1}{j}\left(\sum_{i=1}^{j}i\right)\right]=\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{1}{j}\left(\frac{j(j+1)}{2}\right)\right]=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{j+1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n}j+\sum_{j=1}^{n}1\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)}{2}+n\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)+2n}{2}\right)=\frac{n(n+1+2)}{4}$$

$$D'\text{où } \boxed{\sum_{1\le i\le j\le n}\frac{i}{j}=\frac{n(n+3)}{4}}$$

Exercice 13 :

Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(i^k\right)$

On rappelle que : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\ln(i)=\ln(n!)$

Corrigé

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(i^k\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}k\ln(i)\right)=\sum_{k=1}^{n}k\left(\sum_{i=1}^{n}\ln(i)\right)=\sum_{k=1}^{n}k\left(\ln\left(\prod_{i=1}^{n}i\right)\right)=\sum_{k=1}^{n}k\ln(n!)$$

$$=\ln(n!)\sum_{k=1}^{n}k=\ln(n!)\left(\frac{n(n+1)}{2}\right).\ D'\text{où } \boxed{\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(i^k\right)=\frac{n(n+1)\ln(n!)}{2}}$$

Le symbole $\prod$

$\mathcal{G}-1$ • *Soient* $(m,n)\in\mathbb{N}^2$ *. Alors* : $\displaystyle\prod_{k=m}^{n}u_k=\begin{cases}u_m u_{m+1}\dots u_{n-1}u_n\ ;\ si\ m\le n\\ 1\ ;\ si\ non\end{cases}$

On peut aussi écrire $\displaystyle\prod_{m\le k\le n}u_k$ *ou encore* $\displaystyle\prod_{k\in[m,n]}u_k$.

Ce produit comporte $n-m+1$ *facteurs*

$\mathcal{G}-2$ • $\displaystyle\prod_k a_k b_k=\left(\prod_k a_k\right)\left(\prod_k b_k\right)$

$\mathcal{G}-3$ • $\displaystyle\prod_k a_k^n=\left(\prod_k a_k\right)^n$

$\mathcal{G}-4 \bullet \prod_{k=1}^{n} \lambda a_k = \lambda^n \prod_{k} a_k$

$\mathcal{G}-5 \bullet$ ***Produit télescopique*** :

$$\prod_{k=m}^{n} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_{n+1}}{u_m}$$

$\mathcal{G}-6 \bullet$ ***Changements d'indice ou ré-indexation*** :

$$\prod_{k=p}^{n} u_{k+l} = \prod_{j=p+l}^{n+l} u_j = \prod_{k=p+l}^{n+l} u_k \text{ , En particulier : } \prod_{k=0}^{n} u_k = \prod_{k=0}^{n} u_{n-k}$$

$\mathcal{G}-7 \bullet \ln\left(\prod_{k=m}^{n} a_k\right) = \sum_{k=m}^{n} \ln a_k$

$\mathcal{G}-7 \bullet exp\left(\sum_{k=m}^{n} a_k\right) = \prod_{k=m}^{n} e^{a_k}$

$\mathcal{G}-8 \bullet$

☑ $n! = \prod_{k=1}^{n} k$

☑ $C_n^k = \frac{1}{k!}\prod_{h=0}^{k-1}(n-h) = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1\times 2\times\dots\times k}$

Exercice 14 :

Énoncé

1) ***Calculer*** : $\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)$
2) ***Simplifier*** : $\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{2k+3}{2k-1}\right)$
3) ***Soient*** $a \in \mathbb{R}$ ***et*** $P = \prod_{k=0}^{n}\left(1+a^{2^k}\right)$
   a) ***Calculer*** P ***quand*** $a = 1$
   b) ***Calculer*** $(1-a)P$ ***quand*** $a \neq 1$ ***et en déduire la valeur de*** P

Corrigé

1) $\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right) = \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k+1}{k}\right)$

$Posons\ u_n = n\ ,ainsi\ \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right) = \prod_{k=1}^{n}\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_{n+1}}{u_1}\ \ D'où\ \boxed{\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right) = n+1}$

2) $Posons\ u_n = 2n+1\ ,donc\ u_{n-1} = 2n-1\ et\ u_{n+1} = 2n+3$

$$\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{2k+3}{2k-1}\right) = \prod_{k=1}^{n}\frac{u_{k+1}}{u_{k-1}} = \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right)\left(\frac{u_k}{u_{k-1}}\right)$$

$$Donc\ \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{2k+3}{2k-1}\right) = \left(\prod_{k=1}^{n}\frac{u_{k+1}}{u_k}\right)\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{u_k}{u_{k-1}}\right)$$

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{u_k}{u_{k-1}} = \prod_{k=1-1}^{n-1}\frac{u_{k+1}}{u_{(k-1)+1}} = \prod_{k=0}^{n-1}\frac{u_{k+1}}{u_k}$$

$$Par\ la\ suite\ \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{2k+3}{2k-1}\right) = \left(\prod_{k=1}^{n}\frac{u_{k+1}}{u_k}\right)\left(\prod_{k=0}^{n-1}\frac{u_{k+1}}{u_k}\right) = \left(\frac{u_{n+1}}{u_1}\right)\left(\frac{u_{(n-1)+1}}{u_0}\right) = \left(\frac{u_{n+1}}{u_1}\right)\left(\frac{u_n}{u_0}\right)$$

$$\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{2k+3}{2k-1}\right) = \left(\frac{2n+3}{3}\right)\left(\frac{2n+1}{1}\right)\ D'où\ \boxed{\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{2k+3}{2k-1}\right) = \frac{(2n+3)(2n+1)}{3}}$$

3)

a) $Pour\ \boxed{a = 1\ ,on\ obtient\ :\ P = \prod_{k=0}^{n}\left(1+1^{2^k}\right) = \prod_{k=0}^{n}2 = 2^{n+1}}$

b) $Maintenant\ a \neq 1\ ,calculons\ (1-a)P$

$$(1-a)P = (1-a)\prod_{k=0}^{n}\left(1+a^{2^k}\right) = (1-a)\left(1+a^{2^0}\right)\prod_{k=1}^{n}\left(1+a^{2^k}\right) = (1-a)(1+a)\prod_{k=1}^{n}\left(1+a^{2^k}\right)$$

$$= (1-a^2)\prod_{k=1}^{n}\left(1+a^{2^k}\right) = (1-a^2)\left(1+a^{2^1}\right)\prod_{k=2}^{n}\left(1+a^{2^k}\right)$$

$$= (1-a^2)(1+a^2)\prod_{k=2}^{n}\left(1+a^{2^k}\right) = (1-a^4)\prod_{k=2}^{n}\left(1+a^{2^k}\right)$$

$$= (1-a^4)\left(1+a^{2^2}\right)\prod_{k=3}^{n}\left(1+a^{2^k}\right) = (1-a^4)(1+a^4)\prod_{k=3}^{n}\left(1+a^{2^k}\right)$$

$$(1-a)P = (1-a^8)\prod_{k=3}^{n}\left(1+a^{2^k}\right) = \left(1-a^{2^3}\right)\prod_{k=3}^{n}\left(1+a^{2^k}\right)$$

Ainsi on peut suggérer la propriété

Ainsi on peut suggérer la propriété $\mathcal{P}_n$: $\forall n \in \mathbb{N}, (1-a)P = 1 - a^{2^{(n+1)}}$

Initialisation pour $(n = 0)$: *On a* $\begin{cases} (1-a)P = (1-a)\displaystyle\prod_{k=0}^{0}\left(1+a^{2^k}\right) = (1-a)(1+a) = 1-a^2 \\ 1 - a^{2^{(0+1)}} = 1 - a^2 \end{cases}$

donc $\mathcal{P}_0$ *est vraie*

Hérédité : $\forall n \in \mathbb{N}$, *supposons que* $\mathcal{P}_n$ *est vraie* $\left((1-a)\displaystyle\prod_{k=0}^{n}\left(1+a^{2^k}\right) = 1 - a^{2^{(n+1)}}\right)$

et démontrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ *l'est aussi* : $\left((1-a)\displaystyle\prod_{k=0}^{n+1}\left(1+a^{2^k}\right) = 1 - a^{2^{(n+2)}}\right)$?

$$Or\ (1-a)\prod_{k=0}^{n+1}\left(1+a^{2^k}\right) = (1-a)\left(1+a^{2^{(n+1)}}\right)\prod_{k=0}^{n}\left(1+a^{2^k}\right)$$

$$= \left(1+a^{2^{(n+1)}}\right)\underbrace{\left[(1-a)\prod_{k=0}^{n}\left(1+a^{2^k}\right)\right]}_{=\left(1-a^{2^{(n+1)}}\right),\ par\ hypothèse} = \left(1+a^{2^{(n+1)}}\right)\left(1-a^{2^{(n+1)}}\right)$$

$$= 1 - \left(a^{2^{(n+1)}}\right)^2 = 1 - a^{2\times 2^{(n+1)}}$$

$(1-a)\displaystyle\prod_{k=0}^{n+1}\left(1+a^{2^k}\right) = 1 - a^{2^{(n+2)}}$ *et* $\mathcal{P}_{n+1}$ *est vraie*

($\mathcal{P}_n$ *vraie* $\Rightarrow \mathcal{P}_{n+1}$ *est vraie*) *est vraie*

D'où $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, (1-a)P = 1 - a^{2^{(n+1)}}}$ *et* $\boxed{pour\ a \neq 0\ \ P = \displaystyle\prod_{k=0}^{n}\left(1+a^{2^k}\right) = \frac{1 - a^{2^{(n+1)}}}{1-a}}$

Suites réelles

$\mathcal{H}-1$ • *Une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite croissante (resp. strictement croissante)*

si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$ (*resp.* $u_n < u_{n+1}$)

$\mathcal{H}-2$ • *Une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite décroissante (resp. strictement décroissante)*

$si\ \forall n\in\mathbb{N}\ , u_n\geq u_{n+1}\ (resp.\ u_n>u_{n+1})$

$\mathcal{H}-3$ • *Une suite sera dite monotone lorsqu'elle est croissante ou décroissante.*

$\mathcal{H}-4$ • *Une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite majorée (resp. minorée) si* $\exists\ M\in\mathbb{R}$ *tel que* $u_n\leq M$

(resp. si $\exists\ m\in\mathbb{R}$ *tel que* $u_n\geq m$*)*

$\mathcal{H}-5$ • *Toute suite convergente est bornée.*

$\mathcal{H}-6$ • *Si* $|u_n|\leq v_n$ *à partir d'un certain rang avec* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=0$ *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$

$\mathcal{H}-7$ • *Si* $u_n\leq v_n\leq w_n$, $\underbrace{\text{à partir d'un certain rang}}_{APCR}$ *avec* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergent*

vers la même limite l*, alors* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente, de limite* l

$\mathcal{H}-8$ • *Si* $u_n\leq v_n$ *APCR avec* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$ *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty$

$\mathcal{H}-9$ • *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites réelles telles que :* $\begin{cases}(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\ croissante\\(v_n)_{n\in\mathbb{N}}\ décroissante\\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n-u_n=0\end{cases}$

(On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont adjacentes). Alors* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergent vers une limite commune.*

$\mathcal{H}-10$ • *Equivalent de Stirling* : $n!\sim\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

$\mathcal{H}-11$ • *Lorsqu'il y a combat, ce sont les exponentielles qui l'emportent sur les polynômes, qui l'emportent eux-mêmes sur les logarithmes :*

$$a^n\underbrace{\ll}_{a<1} n^\alpha \underbrace{\ll}_{\alpha<0} (\ln n)^\beta \underbrace{\ll}_{\alpha'>0} n^{\alpha'} \underbrace{\ll}_{b>1} b^n\ll n!\ll n^n$$

$\mathcal{H}-12$ • *Suite arithmétique :*

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite arithmétique s'il existe un réel* r*, tel que* , $\forall n\in\mathbb{N}\ u_{n+1}=u_n+r$

☑ *Terme général :* $u_n=u_0+nr$

☑ $\forall(n,p)\in\mathbb{N}^2\ , u_n=u_p+(n-p)r$

☑ $\forall n\in\mathbb{N}^*\ u_{n-1}+u_{n+1}=2u_n$ *ou* $u_n=\dfrac{u_{n-1}+u_{n+1}}{2}$

☑ $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}u_i=\frac{n(u_0+u_{n-1})}{2}$

☑ $\forall p \leq n \sum_{i=p}^{n} u_i = \frac{(n-p+1)(u_p+u_n)}{2}$

$\mathcal{H}-13$ • *Suite géométriques :*

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite gémétrique s'il existe un réel non nul q tel que* $,\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = qu_n$

☑ *Terme général* : $u_n = q^n u_0$

☑ $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, u_n = q^{n-p}u_p$

☑ $\forall n \in \mathbb{N}^*\ u_{n-1} \times u_{n+1} = u_n^2$ *ou* $u_n = \sqrt{u_{n-1} \times u_{n+1}}$

☑ $\sum_{i=0}^{n-1} u_i = \begin{cases} u_0\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) & si\ q \neq 1 \\ nu_0 & si\ q = 1 \end{cases}$

☑ $\forall p \leq n \sum_{i=p}^{n} u_i = u_p\left(\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}\right)\ , si\ q \neq 1$

☑ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \begin{cases} n'existe\ pas\ si\ q \leq -1 \\ 0\ si\ |q| < 1 \\ u_0\ \ si\ q = 1 \\ +\infty\ si\ q > 1\ et\ u_0 > 0 \\ -\infty\ si\ q > 1\ et\ u_0 < 0 \end{cases} \qquad avec\ u_0 \neq 0$

Exercice 15 :

Énoncé

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ *. On considère la suite de nombres réels* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* :

$$\begin{cases} U_0 \in \mathbb{R}^* \\ \forall n \in \mathbb{N},\ \ U_{n+1} = aU_n + b \end{cases}$$

1) *Calculer* $U_1, U_2, \dots, U_5$ *en fonction de* a *,* b *et* U_0
2) *En déduire, par récurrence, une formule générale pour les termes de la suite* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$
3) *Soit* $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de nombres réels tels que* $U_n = V_n + \lambda$
   a) *Déterminer le réel* λ *pour* $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *soit une suite géométrique de raison* a *puis exprimer* U_n *en fonction de* V_n

Retrouver alors le résultat de la question 2)

Corrigé

1) $U_1 = aU_0 + b$

$U_2 = aU_1 + b = a(aU_0 + b) + b = a^2U_0 + b(1 + a)$

$U_3 = aU_2 + b = a\left(a^2U_0 + b(1 + a)\right) + b = a^3U_0 + b(1 + a + a^2)$

$U_4 = aU_3 + b = a\left(a^3U_0 + b(1 + a + a^2)\right) + b = a^4U_0 + b(1 + a + a^2 + a^3)$

$U_5 = aU_4 + b = a\left(a^4U_0 + b(1 + a + a^2 + a^3)\right) + b = a^5U_0 + b(1 + a + a^2 + a^3 + a^4)$

2) $Soit\ la\ propriété\ \mathcal{P}_n :\ \forall n \in \mathbb{N}^*, U_n = a^nU_0 + b\sum_{k=0}^{n-1} a^k = a^nU_0 + b\left(\frac{1-a^n}{1-a}\right)$

$Initialisation\ pour\ (n = 1) : On\ a \begin{cases} a^1U_0 + b\underbrace{\left(\dfrac{1 - a^1}{1 - a}\right)}_{1} = aU_0 + b \\ U_1 = aU_0 + b \end{cases}\quad donc\ \mathcal{P}_1\ est\ vraie$

$Hérédité :\ \forall n \in \mathbb{N}^*, supposons\ que\ \mathcal{P}_n\ est\ vraie\ \left(U_n = a^nU_0 + b\left(\dfrac{1 - a^n}{1 - a}\right)\right)$

$et\ démontrons\ que\ \mathcal{P}_{n+1}\ l'est\ aussi : \left(U_{n+1} = a^{n+1}U_0 + b\left(\dfrac{1 - a^{n+1}}{1 - a}\right)\right)?$

$Or\ U_{n+1} = aU_n + b = a\left(a^nU_0 + b\left(\dfrac{1 - a^n}{1 - a}\right)\right) + b = a^{n+1}U_0 + ab\left(\dfrac{1 - a^n}{1 - a}\right) + b$

$$= a^{n+1}U_0 + b\left(1 + \frac{a - a^{n+1}}{1 - a}\right) = a^{n+1}U_0 + b\left(\frac{1 - a + a - a^{n+1}}{1 - a}\right) = a^{n+1}U_0 + b\left(\frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}\right)$$

$Donc\ \mathcal{P}_{n+1}\ est\ vraie$

$D'où(\mathcal{P}_n\ vraie\ \Rightarrow \mathcal{P}_{n+1}\ est\ vraie)\ est\ vraie\ et\ \boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n = a^nU_0 + b\left(\dfrac{1 - a^n}{1 - a}\right)}$

3)

a) $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}\ étant\ une\ suite\ géométrique\ de\ raison\ non\ nulle\ a, donc\ \forall n \in \mathbb{N} :$ $V_{n+1} = aV_n$

$Or, \forall n \in \mathbb{N}\ U_n = V_n + \lambda, déterminon\ la\ valeur\ de\ \lambda\ en\ fonction\ de\ a\ et\ b :$

$U_{n+1} = V_{n+1} + \lambda \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, aU_n + b = aV_n + \lambda\ or\ V_n = U_n - \lambda$

$Donc\ on\ obtient :\ \forall n \in \mathbb{N}, aU_n + b = a(U_n - \lambda) + \lambda \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \Leftrightarrow b = (1 - a)\lambda$

$D'où\ si\ a\ \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}\ il\ existe\ \lambda = \dfrac{b}{1 - a}\ telle\ que V_n = U_n - \lambda\ et\ (V_n)_{n\in\mathbb{N}}\ suite\ géométrique$

$de\ raison\ non\ nulle\ a$

$Par\ la\ suite\ V_n = a^n V_0\ \forall n \in \mathbb{N}\ où\ V_0 = U_0 - \lambda = U_0 - \frac{b}{1-a}\ , donc\ V_n = a^n\left(U_0 - \frac{b}{1-a}\right)$

$Or\ \forall n \in \mathbb{N}, U_n = V_n + \lambda$

$donc\ U_n = a^n\left(U_0 - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a} = a^n U_0 - a^n\left(\frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a}$

$U_n = a^n U_0 + (1-a^n)\left(\frac{b}{1-a}\right), si\ a \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$

$la\ question\ 2)\ on\ prouver\ que : \forall\ n \in \mathbb{N}^*, U_n = a^n U_0 + b\left(\frac{1-a^n}{1-a}\right)$

$d'où\ on\ obtient\ le\ même\ résultat : \boxed{\forall\ n \in \mathbb{N}, U_n = a^n U_0 + (1-a^n)\left(\frac{b}{1-a}\right) si\ a \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}}$

Exercice 16 :

$Calculer\ \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} 2^{(2i-j)}$

<u>Corrigé</u>

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} 2^{(2i-j)} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} 2^{(2i)}2^{(-j)} = \left(\sum_{i=0}^{n}\lambda_i\right)\left(\sum_{j=0}^{n}\mu_j\right) = \left(\sum_{i=0}^{n}2^{(2i)}\right)\left(\sum_{j=0}^{n}2^{j}\right) = \left(\sum_{i=0}^{n}(2^2)^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^j\right)$$

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} 2^{(2i-j)} = \left(\sum_{i=0}^{n}4^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^j\right)$$

$\sum_{i=0}^{n} 4^i\ est\ une\ somme\ des\ n+1\ premiers\ termes\ d'une\ suite\ géométrique\ de\ premier$

$terme\ 4^0 = 1\ et\ de\ raison\ q = 4, ce\ qui\ donne : \sum_{i=0}^{n} 4^i = 4^0 \times \left(\frac{1-4^{n+1}}{1-4}\right) = -\frac{1}{3}(1-4^{n+1})$

$de\ même\ \sum_{j=0}^{n} 2^j\ est\ une\ somme\ des\ n+1\ premiers\ termes\ d'une\ suite\ géométrique$

$de\ premier\ terme\ 2^0 = 1\ et\ de\ raison\ q = 2, ce\ qui\ donne :$

$$\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{j}=\left(\frac{1}{2}\right)^{0}\times\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)}\right)=2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

Par la suite $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}2^{(2i-j)}=\left[-\frac{1}{3}(1-4^{n+1})\right]\left[2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)\right]=-\frac{2}{3}(1-4^{n+1})(1-2^{-(n+1)})$

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}2^{(2i-j)}=-\frac{2}{3}\left(1-2^{-(n+1)}-4^{n+1}+\frac{4^{n+1}}{2^{n+1}}\right)=-\frac{2}{3}(1-2^{-(n+1)}-(2)^{2(n+1)}+2^{n+1})$$

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}2^{(2i-j)}=-\frac{2}{3}(1-2^{-(n+1)}-(2)^{2(n+1)}+2^{n+1})}$$

Séries numériques

I– 1 • ***Soit*** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***une suite de nombre réels. On appelle série de terme général*** u_n ***, la suite*** $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***définie par*** $S_n=u_0+\cdots+u_n=\sum_{k=0}^{n}u_k$

Pour tout n, u_n ***est appelé terme d'indice*** n ***et*** S_n ***est la somme partielle d'ordre (ou d'indice)*** n***. On note*** $\sum u_n$ ***la série de terme général*** u_n .

On dit que la série $\sum u_n$ ***est convergente lorsque la suite*** $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***de ses sommes partielles converge. La limite*** S ***de cette suite est alors appelée somme de la série et notée*** $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$ ***. Si*** $\sum u_n$ ***ne converge pas, on dit qu'elle diverge.***

I– 2 • ***Si*** $\sum u_n$ ***converge, on appelle reste d'ordre*** n ***le réel*** $R_n=S-S_n$***. On a*** $R_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty}u_k$ ***. Dans ce cas*** (R_n) ***converge vers*** 0

I– 3 • *Séries géométriques :*

Soit $q \in \mathbb{R}$. La série de terme général q^n converge si et seulement si $|q| < 1$

alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$

$\mathcal{I}$– 4 • Série harmonique : *La série de terme général $\dfrac{1}{n}$ est divergente*

$\mathcal{I}$– 5 • Série exponentielle : *Pour tout réel x vérifiant $|x| < 1$, on a : $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$*

$\mathcal{I}$– 6 • Premières séries géométriques dérivées :

Soit $q \in \mathbb{R}$ avec $|q| < 1$. Alors les séries de terme général (nq^{n-1}) et $(n(n-1)q^{n-2})$

appelée séries géométriques dérivées sont convergentes et :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \quad ; \quad \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$$

$\mathcal{I}$– 7 • *Si (u_n) et (v_n) ne diffèrent que d'unnombre fini de termes*

($\exists n_0$ tel que pour $n \geq n_0$, on ait $u_n = v_n$), alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature

$\mathcal{I}$– 8 • *Soit (u_n) une suite réelle. Alors la suite (u_n) converge si et seulement si la série*

de terme général $(u_{n+1} - u_n)$ converge

$\mathcal{I}$– 9 • *Si la série de terme général u_n converge, alors la suite (u_n) converge vers 0*

$\mathcal{I}$– 10 • Opérations sur les séries :

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

a • *Si $\sum u_n$ converge, $\sum \lambda u_n$ converge et sa somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda u_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$*

b • *Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors $\sum (u_n + v_n)$ converge et sa somme vaut :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

c • *Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge, alors $\sum (u_n + v_n)$ diverge*

$d \bullet$ Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent, on ne eput rien dire

$\mathcal{I}-11 \bullet$ Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. La suite de ses sommes partielles (S_n) est alors croissante. La série $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée. Si $\sum u_n$ diverge, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$

$\mathcal{I}-12 \bullet$ Comparaison des termes généraux de séries positives par inégalités :

Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles. Supposons qu'à partir d'uncertain rang, on ait : $0 \leq u_n \leq v_n$. Alors :

$a \bullet$ Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge

$b \bullet$ Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge

$\mathcal{I}-13 \bullet$ Comparaison des termes généraux de séries positives par « ~ » ou petits « o » :

Soit (u_n) et (v_n) deux suites positives.

$a \bullet$ Si $u_n \sim v_n$, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature

$b \bullet$ Si $u_n = o(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge

$\mathcal{I}-14 \bullet$ Séries de Riemann :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série dite de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente si $\alpha > 1$

$\mathcal{I}-15 \bullet$ Soit (u_n) une suite positive.

$a \bullet$ S'il existe $\alpha > 1$ tel que $(n^\alpha u_n)$ est majorée alors la série $\sum u_n$ est convergente

$b \bullet$ S'il existe $\alpha \leq 1$ tel que $(n^\alpha u_n)$ est minorée par un nombre strictement positif alors la série $\sum u_n$ diverge

$\mathcal{I}-16 \bullet$ Convergence absolue :

Soit (u_n) une suite réelle. On dit que la série $\sum u_n$ est absolument convergente *si la série de terme général* $|u_n|$: $\left(\sum |u_n|\right)$ *converge*

$\mathcal{I}-17$ • *Soit* (u_n) *une suite réelle . Si* $\sum u_n$ *est absolument convergente , alors elle converge*

$\mathcal{I}-18$ • *Somme des séries géométriques dérivées :*

Pour tout $x \in]-1,1[$ *et* $p \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-p+1)x^{n-p} = \frac{p!}{(1-x)^{p+1}}$

$\mathcal{I}-19$ • *Formule du Binôme négatif*:

Pour tout entier p et $x \in]-1,1[$ *, on a* : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} C_{n+p}^{p} x^n = \sum_{n=p}^{+\infty} C_n^p x^{n-p} = \frac{1}{(1-x)^{p+1}} = (1-x)^{-(p+1)}$

$\mathcal{I}-20$ • *Formule du binôme généralisé*:

Pour tout entier n, x *et* y $(y \neq 0)$ *nombres réels tels que* $|x| < |y|$: $\displaystyle (x+y)^n = \sum_{p=0}^{+\infty} C_n^p x^p y^{n-p}$

$\mathcal{I}-21$ • *Critère de D'Alembert :*

Soit (u_n) *une suite à termes strictement positifs.*

On suppose que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda \in \overline{\mathbb{R}}$

a • *Si* $\lambda < 1$ *alors* $\sum u_n$ *converge*

b • *Si* $\lambda > 1$ *alors* $\sum u_n$ *diverge*

c • *Si* $\lambda = 1$ *on ne peut rien dire.*

$\mathcal{I}-22$ • *Critère de Cauchy :*

Soit (u_n) *une suite à termes strictement positifs.*

On suppose que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lambda \in \overline{\mathbb{R}}$

a • *Si* $\lambda < 1$ *alors* $\sum u_n$ *converge*

b • *Si* $\lambda > 1$ *alors* $\sum u_n$ *diverge* *c • Si $\lambda = 1$ on ne peut rien dire.*

$\mathcal{I}-23$ • Séries alternées :

La série $\sum u_n$ est dite alternée si pour tout n, u_n s'écrit $u_n = (-1)^n a_n$ avec (a_n) une suite positive

$\mathcal{I}-24$ • *Soit $u_n = (-1)^n a_n$ où (a_n) est une suite positive décroissante de limite 0 . Alors $\sum u_n$ est convergente, les sommes (S_n) et (S_{2n}) sont adjacentes , et le reste R_n est de signe de $(-1)^n$ et vérifie $|R_n| \leq a_{n+1}$*

$\mathcal{I}-25$ • Ordre des termes :

Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente, alors pourtoute bijection $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, la série $\sum u_{\sigma(n)}$ est absolument convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)}$$

Exercice 17 :

Énoncé

1) *Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de premier terme $U_0 = 1$ et de raison non nulle q*
   a) *Démontrer que la série de terme général U_n converge si et seulement si*
   $$|q| < 1 \text{ et que } \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$
   b) *Déduire :* $\sum_{n=l}^{+\infty} q^n$
2) *Déduire les expressions des premières séries géométriques dérivées :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n\, q^n \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} n\,(n-1) q^n$$

Corrigé

1)

a) $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = q^n \Rightarrow S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \begin{cases} n+1 \; si \; q = 1 \\ \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad si \; q \neq 1 \end{cases}$

$$Or \lim_{n\to+\infty} q^{n+1} = \begin{cases} 0 \; si \; |q| < 1 \\ (q^{n+1}) \; diverge \; si \; non \end{cases}$$

$$\sum U_n \; converge \; si \; |q| < 1 \; et \; \sum_{n=0}^{+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} \; D'où \; si \; \boxed{|q| < 1 \; \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}}$$

b) $\sum_{n=l}^{+\infty} U_n = \sum_{n=0}^{+\infty} U_n - \sum_{n=0}^{l-1} U_n = \frac{1}{1-q} - \frac{1-q^l}{1-q} \Rightarrow \boxed{\sum_{n=l}^{+\infty} q^n = \frac{q^l}{1-q}}$

2)

- $Pour, |q| < 1, on \; a : \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \Leftrightarrow \frac{d\sum_{n=0}^{+\infty} q^n}{dq} = \frac{d\left(\frac{1}{1-q}\right)}{dq} \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d(q^n)}{dq} = -\frac{(1-q)'}{(1-q)^2}$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \Leftrightarrow \frac{1}{q}\sum_{n=0}^{+\infty} nq^n = \frac{1}{(1-q)^2}$$

$$D'où \; \boxed{\forall q \in]-1,1[\setminus \{0\}: \sum_{n=0}^{+\infty} nq^n = \frac{q}{(1-q)^2}}$$

- $Pour, |q| < 1, on \; a : \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} nq^n = \frac{q}{(1-q)^2} \Leftrightarrow \frac{d\sum_{n=0}^{+\infty} nq^n}{dq} = \frac{d\left(\frac{q}{(1-q)^2}\right)}{dq}$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d(nq^n)}{dq} = \frac{q'(1-q)^2 - q((1-q)^2)'}{(1-q)^4} \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 q^{n-1} = \frac{(1-q)^2 - q\big(2(1-q)'(1-q)\big)}{(1-q)^4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{q}\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 q^n = \frac{(1-q)^2 + 2q(1-q)}{(1-q)^4} \Leftrightarrow \frac{1}{q}\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 q^n = \frac{1-q+2q}{(1-q)^3} \Leftrightarrow \boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 q^n = \frac{q+q^2}{(1-q)^3}}$$

$$Par \; la \; suite, \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)q^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 q^n - \sum_{n=0}^{+\infty} nq^n = \frac{q+q^2}{(1-q)^3} - \frac{q}{(1-q)^2}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)q^n = \frac{q+q^2-q(1-q)}{(1-q)^3}$$

$D'o\grave{u}$ $\boxed{\forall q \in]-1,1[\setminus \{0\} : \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)q^n = \frac{2q^2}{(1-q)^3}}$

Exercice 18 :

Énoncé

On définit la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *par :* $u_n = p(1-p)^{n-1}$ *, où* $p \in]0,1[$.

1) *Montrer que la série de terme général* (u_n) *converge et que* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 1$
2) *Montrer que la série de terme général* (nu_n) *converge et que* $\sum_{n=1}^{+\infty} nu_n = \frac{1}{p}$
3) *Montrer que la série de terme général* (n^2u_n) *converge et que* $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2u_n = \frac{2-p}{p^2}$

Corrigé

1) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est une suite géométrique de raison* $q = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{p(1-p)^n}{p(1-p)^{n-1}} = 1-p$

Or $p \in]0,1[$ *, donc* $(1-p) \in]0,1[$ *, par la suite* $\sum u_n$ *converge puisqu'il s'agit d'une série géométriques de raison* $q = 1-p \in]0,1[$

or, pour $|x| < 1$ $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ *, donc :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} p(1-p)^{n-1} = \frac{p}{1-p}\sum_{n=1}^{+\infty}(1-p)^n = \frac{p}{1-p}\left[\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(1-p)^n\right) - (1-p)^0\right]$$

$$= \frac{p}{1-p}\left[\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(1-p)^n\right) - 1\right]$$

On a $|1-p| < 1$ *par la suite* $\sum_{n=0}^{+\infty}(1-p)^n = \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{1}{p}$

Ainsi $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{p}{1-p}\left[\frac{1}{p} - 1\right] = \frac{p}{1-p}\left[\frac{1-p}{p}\right]$ $d'o\grave{u}$ $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 1}$

2) $\sum_{n=1}^{+\infty} nu_n = \sum_{n=1}^{+\infty} np(1-p)^{n-1} = -p\sum_{n=1}^{+\infty} n\underbrace{(1-p)'}_{-1}(1-p)^{n-1} = -p\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{d(1-p)^n}{dp}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nu_n = -p\left[d\left(\sum_{n=1}^{+\infty}(1-p)^n\right)\Big/dp\right]$$

$$Or\ \sum_{n=1}^{+\infty}(1-p)^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty}(1-p)^n\right) - 1 = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1-p}{p}$$

$$Par\ la\ suite\ \sum_{n=1}^{+\infty} nu_n = -p\frac{d\left(\frac{1-p}{p}\right)}{dp} = -p\left(\frac{1-p}{p}\right)' = -p\left[\frac{-p-(1-p)}{p^2}\right] = -p\left[\frac{-1}{p^2}\right]$$

$$D'\text{où}\ \boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} nu_n = \frac{1}{p}}$$

3) $\sum_{n=1}^{+\infty} nu_n = \frac{1}{p} \Leftrightarrow \frac{p}{1-p}\sum_{n=1}^{+\infty} n(1-p)^n = \frac{1}{p} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} n(1-p)^n = \frac{1-p}{p^2}$

$$\Leftrightarrow \frac{d\sum_{n=1}^{+\infty} n(1-p)^n}{dp} = \frac{d\left(\frac{1-p}{p^2}\right)}{dp} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} n^2(1-p)'(1-p)^{n-1} = \frac{(1-p)'p^2-(p^2)'(1-p)}{p^4}$$

$$\Leftrightarrow -\sum_{n=1}^{+\infty} n^2(1-p)^{n-1} = \frac{-p^2-2p(1-p)}{p^4} \Leftrightarrow -\sum_{n=1}^{+\infty} n^2(1-p)^{n-1} = \frac{-p^2-2p+2p^2}{p^4}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} n^2(1-p)^{n-1} = \frac{2-p}{p^3} \Leftrightarrow p\sum_{n=1}^{+\infty} n^2(1-p)^{n-1} = \frac{2-p}{p^2} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} n^2p(1-p)^{n-1} = \frac{2-p}{p^2}$$

$$D'\text{où}\ \boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} n^2u_n = \frac{2-p}{p^2}}$$

Intégrale d'une fonction d'une variable

J– 1 • *Soit* $f: I \to \mathbb{R}$ *une fonction définie sur un intervalle* I *. On dit que* $F: I \to \mathbb{R}$ *est une primitive de* f *sur* I *si* F *est une fonction dérivable sur* I *, vérifiant* $\forall x \in I$

$$F'(x) = f(x)\ et\ \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)\ \text{où}\ [a,b] \subset I$$

J– 2 • *Soit* $f: I \to \mathbb{R}$ *une fonction et* $F: I \to \mathbb{R}$ *une primitive de* f *. Toute primitive s'écrit*

$G = F + c\ \text{où}\ c \in \mathbb{R}$

$\mathcal{J}-3$ • $\boldsymbol{Soit\ f: I \to \mathbb{R}\ une\ fonction\ continue\ sur\ un\ intervalle\ I, x_0 \in I\ et\ y_0 \in \mathbb{R}.}$

$\boldsymbol{Alors\ il\ existe\ une\ primitive\ F\ de\ f\ et\ une\ seule\ ,telle\ que\ F(x_0) = y_0}$

$\mathcal{J}-4$ • $\boldsymbol{Soit\ f: [a,b] \to \mathbb{R}\ une\ fonction\ continue. La\ fonction\ F: I \to \mathbb{R}\ définie\ par}$

$\boldsymbol{F(x) = \int_a^x f(t)dt}$ $\boldsymbol{est\ l'unique\ primitive\ de\ f\ qui\ s'annule\ en\ a}$

$\mathcal{J}-5$ • $\boldsymbol{\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx}$ $\mathcal{J}-6$ • $\boldsymbol{\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx}$

$\mathcal{J}-7$ • $\boldsymbol{\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx}$

$\mathcal{J}-8$ • **Intégration par parties :** $\boldsymbol{\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx}$

$\mathcal{J}-9$ • $\boldsymbol{\int_a^a f(x)dx = 0}$ $\mathcal{J}-10$ • $\boldsymbol{\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx}$

$\mathcal{J}-11$ • **Relation de Chasles :**

$\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx}$ où $a < c < b$

$\mathcal{J}-12$ • **Théorème de la moyenne :**

$\boldsymbol{Soit\ une\ fonction\ f\ continue\ définie\ sur\ l'intervalle\ [a,b], \exists c \in]a,b[\ vérifiant}$

$\boldsymbol{f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx}$, $\boldsymbol{Le\ nombre\ f(c)\ est\ appelé\ la\ valeur\ moyenne\ de\ f\ sur\ [a,b]}$

$\mathcal{J}-13$ • $\boldsymbol{Si\ f\ est\ paire\ ,alors\ \int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx}$

$\mathcal{J}-14$ • $\boldsymbol{Si\ f\ est\ impaire\ ,alors\ \int_{-a}^a f(x)dx = 0}$

$\mathcal{J}-15$ • $\boldsymbol{Si\ f\ est\ périodique\ de\ période\ T, alors\ \int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx}$

$\mathcal{J}-16$ • **Positivité de l'intégrale :**

$\boldsymbol{Soient\ a\ et\ b\ deux\ réels\ tel\ que\ a < b\ , f\ et\ g\ deux\ fonctions\ intégrables\ sur\ [a,b].}$

$\boldsymbol{Si\ f \le g\ \ ,alors\ \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx}$

En particulier si $f \geq 0$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

J– 17 • Si f et $|f|$ sont intégrables sur $[a, b]$, alors $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

J– 18 • Sommes de Riemann :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[f a + k\left(\frac{b-a}{n}\right)\right] = \int_a^b f(x)dx$$

J– 19 • Théorème de la convergence dominée :

Soit $a < b$ et soit (f_n) une suite de fonctions intégrables au sens de Riemann sur $[a, b]$,

convergeant simplement vers une fonction f : $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$

On suppose la convergence est dominée (ou plutôt, «bornée»):

$\exists$ C telle que $\forall n \geq 1$, $\forall x \in]a, b[$ on a $|f_n(x)| \leq C$

Alors $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx$ existe et si f est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x) = \int_a^b f(x)dx$$

J– 20 • Changement de variable :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $\varphi : J \to I$ une bijection de classe C^1.

Pour tout $a, b \in J$ on a : $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b \varphi'(t)[f(\varphi(t))]dt$

Si F est une primitive de f alors $F \circ \varphi$ est une primitive de $\varphi'(f \circ \varphi)$

En pratique , si l'on note $x = \varphi(t)$ alors $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$ donc $dx = \varphi'(t)dt$

$f(x)$	$Domaine\ d'existence$	$F(x)$
$\mathcal{J}-21 \bullet 0$	$\mathbb{R}$	$c\ (constante)$
$\mathcal{J}-22 \bullet a$	$\mathbb{R}$	$ax+c$
$\mathcal{J}-23 \bullet x^n\,,(n\in\mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$
$\mathcal{J}-24 \bullet \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$ln\lvert x\rvert+c$
$\mathcal{J}-25 \bullet x^\alpha\,,(\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{-1\})$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c$
$\mathcal{J}-26 \bullet a^x\ \ (a\in\mathbb{R}_+^*)$	$\mathbb{R}$	$\frac{a^x}{ln\,a}+c$
$\mathcal{J}-27 \bullet ln\,x$	$]0,+\infty[$	$-x+x\,ln\,x+c$
$\mathcal{J}-28 \bullet e^{(ax+b)}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{a}e^{(ax+b)}+c$
$\mathcal{J}-29 \bullet sin\,x$	$\mathbb{R}$	$-\,cos\,x+c$
$\mathcal{J}-30 \bullet cos\,x$	$\mathbb{R}$	$sin\,x+c$
$\mathcal{J}-31 \bullet tan\,x$	$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$	$-\,ln\lvert cos\,x\rvert+c$
$\mathcal{J}-32 \bullet \frac{1}{sin\,x}$	$\mathbb{R}\setminus\{k\pi\,,k\in\mathbb{Z}\}$	$ln\left\lvert tan\frac{x}{2}\right\rvert+c$
$\mathcal{J}-33 \bullet \frac{1}{cos\,x}$	$\mathbb{R}\setminus\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\,,k\in\mathbb{Z}\right\}$	$ln\left\lvert tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\rvert+c$
$\mathcal{J}-34 \bullet \frac{1}{sin^2\,x}=1+cot^2\,x$	$\mathbb{R}\setminus\{k\pi\,,k\in\mathbb{Z}\}$	$-\,cot\,x+c$
$\mathcal{J}-35 \bullet \frac{1}{cos^2\,x}=1+tan^2\,x$	$\mathbb{R}\setminus\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\,,k\in\mathbb{Z}\right\}$	$tan\,x+c$
$\mathcal{J}-36 \bullet cot\,x$	$\mathbb{R}\setminus\{k\pi\,,k\in\mathbb{Z}\}$	$ln\lvert sin\,x\rvert+c$
$\mathcal{J}-37 \bullet \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1,1[$	$Arcsin\,x+c$
$\mathcal{J}-38 \bullet \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1,1[$	$Arccos\,x+c$
$\mathcal{J}-39 \bullet \frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$Arctan\,x+c$
$\mathcal{J}-40 \bullet \frac{-1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$Arccot\,x+c$
$\mathcal{J}-41 \bullet shx$	$\mathbb{R}$	$chx+c$
$\mathcal{J}-42 \bullet chx$	$\mathbb{R}$	$shx+c$
$\mathcal{J}-43 \bullet thx$	$\mathbb{R}$	$ln(chx)+c$
$\mathcal{J}-44 \bullet \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\mathbb{R}$	$Argshx+c$ $=ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+c$
$\mathcal{J}-45 \bullet \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$]1,+\infty[$	$Argchx+c$ $=ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)+c$
$\mathcal{J}-46 \bullet \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$]-\infty,-1[$	$ln\left(\left\lvert x+\sqrt{x^2-1}\right\rvert\right)+c$
$\mathcal{J}-47 \bullet \frac{1}{1-x^2}$	$]-1,1[$	$Argthx+c$ $=\frac{1}{2}ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+c$
$\mathcal{J}-48 \bullet \frac{1}{1-x^2}$	$]-\infty,-1[\,\cup\,]1,+\infty[$	$\frac{1}{2}ln\left\lvert\frac{1+x}{1-x}\right\rvert+c$
$\mathcal{J}-49 \bullet \int u'(x)u^\alpha(x)dx=\frac{u^\alpha(x)}{\alpha+1}+c\quad(\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{-1\})$		
$\mathcal{J}-50 \bullet \int\frac{u'(x)}{u(x)}dx=ln\lvert u(x)\rvert+c$		
$\mathcal{J}-51 \bullet \int u'(x)e^{u(x)}dx=e^{u(x)}+c$		

Exercice 19 :

Énoncé

$\boldsymbol{Calculer\ les\ intégrales\ suivantes}$:

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}dx$, (à $l'aide\ d'un\ changement\ de\ variable\ simple$)

2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x+1}{(x+1)^2}dx$, ($décomposition\ en\ éléments\ simples$)

3) $\displaystyle\int_0^1 x^2e^xdx$, ($intégration\ par\ parties$)

Corrigé

1) $Posons\ le\ changement\ de\ variable$: $u=e^x \Rightarrow du=e^xdx \Rightarrow dx=\dfrac{du}{u}$ et $\begin{cases} x=0 \Rightarrow u=1 \\ x=1 \Rightarrow u=e \end{cases}$

$par\ la\ suite,$ $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}dx=\int_1^e \left(\frac{u}{\sqrt{1+u}}\right)\left(\frac{du}{u}\right)=\int_1^e \frac{du}{\sqrt{1+u}}=2\int_1^e \frac{(1+u)'}{2\sqrt{1+u}}du=2\left[\sqrt{1+u}\right]_1^e$

$$\boxed{\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}dx=2\left(\sqrt{1+e}-\sqrt{2}\right)}$$

2) $Commençons\ par\ décomposer\ la\ fraction\ en\ éléments\ simples$:

$$\frac{3x+1}{(x+1)^2}=\frac{\alpha}{(x+1)}+\frac{\beta}{(x+1)^2}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to(-1)}(x+1)^2\left[\dfrac{3x+1}{(x+1)^2}\right]=\lim\limits_{x\to(-1)}(x+1)^2\left[\dfrac{\alpha}{(x+1)}+\dfrac{\beta}{(x+1)^2}\right] \\ \dfrac{(3\times 0)+1}{(0+1)^2}=\dfrac{\alpha}{(0+1)}+\dfrac{\beta}{(0+1)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to(-1)}3x+1=\lim\limits_{x\to(-1)}[\alpha(x+1)+\beta] \\ 1=\alpha+\beta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2=\beta \\ 1=\alpha-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=-2 \\ \alpha=3 \end{cases}$$

$On\ obtient\ ainsi\ la\ décomposition\ en\ éléments\ simples$: $\dfrac{3x+1}{(x+1)^2}=\dfrac{3}{(x+1)}-\dfrac{2}{(x+1)^2}$

et $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x+1}{(x+1)^2}dx=3\int_0^1 \frac{dx}{x+1}-2\int_0^1 (x+1)'(x+1)^{-2}dx=3[\ln|x+1|]_0^1-2\left[\frac{(x+1)^{-1}}{-1}\right]_0^1$

$$\int_0^1 \frac{3x+1}{(x+1)^2}dx=3\ln 2+2\left[\frac{1}{(x+1)}\right]_0^1=3\ln 2+2\left(\frac{1}{2}-1\right)$$

$$\boxed{\int_0^1 \frac{3x+1}{(x+1)^2}dx = 3\ln 2 - 1}$$

3) *On intègre par parties en posant* : $\begin{cases} u(x) = x^2 \\ v'(x) = e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 2x \\ v(x) = e^x \end{cases}$

On obtient donc : $\int_0^1 x^2e^xdx = [x^2e^x]_0^1 - 2\int_0^1 xe^xdx = e - 2\underbrace{\int_0^1 xe^xdx}_{I} = e - 2I$

Pour calculer I, *il nous faut une deuxième intégration par parties*: $\begin{cases} A(x) = x \\ B'(x) = e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A'(x) = 1 \\ B(x) = e^x \end{cases}$

Par la suite, $\int_0^1 x^2e^xdx = e - 2I = e - 2\left[[xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^xdx\right] = e - 2\left[e - [e^x]_0^1\right] = e - 2[e - (e-1)]$

$$\boxed{\int_0^1 x^2e^xdx = e - 2}$$

Intégrale généralisées

$\mathcal{K}-1$ • *Soit* f *une fontion définie sur* $[a,b]$, *continue sur* $[a,b[$ *et admettant une limite finie à gauche en* b (b^-) *alors* f *est intégrable sur* $[a,b]$ *et* $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \check{f}(x)dx$

$\check{f}$ *étant la fonction déduite de* f *par prolongement par continuité en* b

$\mathcal{K}-2$ • *Soit* f *une fonction continue sur* $[a,b[$ *et admettant une limite finie à gauche en* b : (b^-), *alors* $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{x\to b^-} F(x)$ *où* F *est la fonction définie sur* $[a,b[$ *par*

$F(x) = \int_a^x f(t)dt$. *On note aussi* : $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{x\to b^-} \int_a^x f(t)dt$

$\mathcal{K}-3$ • *Soit* f *une fonction continue sur* $]a,b]$ *et admettant une limite finie à droite en* a : (a^+), *alors* $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{x\to a^+} F(x)$ *où* F *est la fonction définie sur* $]a,b]$ *par*

$F(x) = \int_x^b f(t)dt$. On note aussi : $\int_a^b f(x)dx = \lim_{x\to a^+} \int_x^b f(t)dt$

$\mathcal{K}$– 4 • *Soit f une fonction continue sur $[a, +\infty[$, alors on dit que l'intégrale* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *existe ou qu'elleest convergente , si la fonction* $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ *admet une limite finie l lorsque $x \to +\infty$, dans ces conditions* $\int_a^{+\infty} f(x)dx = l$.

On note aussi $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)dt = l$

$\mathcal{K}$– 5 • *Soit f une fonction continue sur $]-\infty, a]$, alors on dit que l'intégrale* $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ *existe ou qu'elle converge si la fonction* $\int_x^a f(t)dt$ *admet une limite finie l lorsque $x \to +\infty$, dans ces conditions* $\int_{-\infty}^a f(x)dx = l$

On note aussi $\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{x\to-\infty} \int_x^a f(t)dt = l$

$\mathcal{K}$– 6 • *Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, alors on dit que l'intégrale* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ *existe ou qu'elle est convergente si les deux intégrales* $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ *et* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *existent* $(a \in \mathbb{R})$. *Dans ces conditions* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx$

$\mathcal{K}$– 7 • *Soit f une fonction continue sur $]a, b[$ et admettant des limites finies respectivement à droite en a et à gauche en b , alors on dit que l'intégrale* $\int_a^b f(x)dx$ *existe ou qu'elle est convergente. Si les intégrales* $\int_a^c f(x)dx$ *et* $\int_c^b f(x)dx$ $(c \in]a, b[)$ *sont convergentes. Dans ces conditions on a* $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

$\mathcal{K}$– 8 • *Soient f une fonction continue et positive sur $[a, +\infty[$ et F la fonction définie*

$sur\ [a,+\infty[\ par\ F(x)=\int_a^x f(t)dt$, $alors\ l'intégrale\ \int_a^{+\infty} f(x)dx\ existe\ si\ et\ seulement$

$si\ F\ est\ majorée$

$\mathcal{K}-9$ • $Soient\ f\ et\ g\ deux\ fonctions\ continues\ sur\ [a,+\infty[\ et\ telles\ que$

$\forall x\in\ [a,+\infty[\ ,0\le f(x)\le g(x)\ alors$:

☑ $\int_a^{+\infty} g(x)dx\ converge\ \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx\ converge$

☑ $\int_a^{+\infty} f(x)dx\ diverge\ \Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x)dx\ diverge$

$\mathcal{K}-10$ • $Pour\ tout\ a>0\ :\ \int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}\begin{cases} converge\ si\ \alpha>1\\ et\\ diverge\ si\ \alpha\le 1\end{cases}$

$\mathcal{K}-11$ • $Soient\ f\ et\ g\ deux\ fonctions\ continues\ sur\ [a,+\infty[\ et\ telles\ que$

$f(x)\sim g(x)\ au\ \mathcal{V}(+\infty)$, $alors\ \int_a^{+\infty} f(x)dx\ et\ \int_a^{+\infty} g(x)dx\ \ sont\ de\ même\ nature$

$\mathcal{K}-12$ • $Soit\ f\ une\ fonction\ continue\ sur\ [a,+\infty[\ et\ telle\ que\ f(x)\sim\frac{A}{x^\alpha}\ au\ \mathcal{V}(+\infty)$

$A\ étant\ constante\ (A\neq 0)$, $alors$: $\int_a^{+\infty} f(x)dx\begin{cases} converge\ si\ \alpha>1\\ et\\ diverge\ si\ \alpha\le 1\end{cases}$

$\mathcal{K}-13$ • $Soit\ F\ une\ fonction\ croissante\ sur\ [a,b[$, $alors\ F\ admet\ une\ limite\ finie$

$lorsque\ x\to b^-\ si\ et\ seulement\ si\ F\ est\ majorée$

$\mathcal{K}-14$ • $Soit\ f\ une\ fonction\ continue\ et\ positive\ sur\ [a,b[\ et\ telle\ que\ \lim_{x\to b^-} f(x)=+\infty$,

$et\ soit\ F\ la\ fonction\ définie\ sur\ [a,b[\ par\ F(x)=\int_a^x f(t)dt$, $alors\ \ l'intégrale$

$\int_a^b f(x)dx\ converge\ si\ et\ seulement\ si\ F\ \ est\ majorée$

$\mathcal{K}-15$ • $Soient\ f\ et\ g\ deux\ fonctions\ continues\ et\ positives\ sur\ [a,b[$, $admettant$

$pour\ limite\ +\infty\ lorsque\ x\to b^-$, $et\ telles\ que\ \forall x\in [a,b[\ 0\le f(x)\le g(x)$, $alors$

☑ $\int_a^b g(x)dx\ converge\ \Rightarrow \int_a^b f(x)dx\ converge$

☑ $\int_a^b f(x)dx$ *diverge* $\Rightarrow \int_a^b g(x)dx$ *diverge*

$\mathcal{K}-16$ • $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}\begin{cases} converge\ si\ \alpha<1 \\ et \\ diverge\ si\ \alpha\geq 1\end{cases}$

$\mathcal{K}-17$ • *Soient* f *et* g *deux fonctions continues sur* $[a,b[$ *et telles que*

$f(x)\sim g(x)$ *au* $\mathcal{V}(b^-)$, *alors* $\int_a^b f(x)dx$ *et* $\int_a^b g(x)dx$ *sont de même nature*

$\mathcal{K}-18$ • *Soit* f *une fonction continue sur* $[a,b[$ *et telle que* $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=+\infty$

et $f(x)\sim\frac{A}{(b-x)^\alpha}$ *au* $\mathcal{V}(b^-)$ A *étant constante* $(A\neq 0)$,

alors : $\int_a^b f(x)dx \begin{cases} converge\ si\ \alpha<1 \\ et \\ diverge\ si\ \alpha\geq 1\end{cases}$

$\mathcal{K}-19$ • *Soit* f *une fonction continue sur* $]a,b]$ *et telle que* $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$

et $f(x)\sim\frac{A}{(x-a)^\alpha}$ *au* $\mathcal{V}(a^+)$ A *étant constante* $(A\neq 0)$,

alors : $\int_a^b f(x)dx \begin{cases} converge\ si\ \alpha<1 \\ et \\ diverge\ si\ \alpha\geq 1\end{cases}$

$\mathcal{K}-20$ • *Si* $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha f(x)=0$ $\left(ou \ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\frac{1}{x^\alpha}}=0\right)$ *avec* $f(x)$ *et* $\frac{1}{x^\alpha}$ *continues sur* $[a,+\infty[$

alors $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *et* $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ *sont de même nature*

Exercice 20 :

Énoncé

Montrer la convergence et calculer la valeur des intégrales :

$$I_1=\int_0^{+\infty} t^3e^{-t}dt\ ,I_2=\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t\sqrt{t^2+1}}$$

Corrigé

· $I_1 = \int_0^{+\infty} t^3 e^{-t} dt = \int_0^1 t^3 e^{-t} dt + \int_1^{+\infty} t^3 e^{-t} dt$

✓ $En\ +\infty :\ \lim_{t \to +\infty} t^{\alpha}(t^3 e^{-t}) = \lim_{t \to +\infty} \frac{t^5}{e^t} = 0\ ,(pour\ \alpha = 2)$

$alors\ \int_1^{+\infty} t^3 e^{-t} dt\ \ et \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}\ sont\ de\ même\ nature. Or \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}\ converge\ puisque\ \alpha > 1, (\alpha = 2)$

✓ $En\ 0 :\ \lim_{t \to 0} t^{\alpha}(t^3 e^{-t}) = \lim_{t \to 0} \frac{t^{\frac{5}{2}}}{e^t} = 0\ ,\left(pour\ \alpha = \frac{1}{2}\right)$

$alors\ \int_0^1 t^3 e^{-t} dt\ \ et \int_0^1 \frac{dt}{t^2}\ sont\ de\ même\ nature. Or \int_0^1 \frac{dt}{t^{\frac{1}{2}}}\ converge\ puisque\ \alpha < 1, \left(\alpha = \frac{1}{2}\right)$

$I_1 = \int_0^{+\infty} t^3 e^{-t} dt\ converge$

$Calculons\ par\ intégrations\ par\ parties\ \ I_1 : \begin{cases} u_1(t) = t^3 \\ v_1'(t) = e^{-t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1'(t) = 3t^2 \\ v_1(t) = -e^{-t} \end{cases}$

$On\ obtient\ donc : I_1 = \int_0^{+\infty} t^3 e^{-t} dt = \underbrace{\left[-t^3 e^{-t}\right]_0^{+\infty}}_{0} + 3 \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt = 3 \underbrace{\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt}_{K_1} = 3K_1$

$Une\ deuxième\ intégration\ par\ parties\ pour\ le\ calcul\ de\ K_1 : \begin{cases} u_2(t) = t^2 \\ v_2'(t) = e^{-t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_2'(t) = 2t \\ v_2(t) = -e^{-t} \end{cases}$

$On\ obtient\ donc : K_1 = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt = \underbrace{\left[-t^2 e^{-t}\right]_0^{+\infty}}_{0} + 2 \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt = 2 \underbrace{\int_0^{+\infty} t e^{-t} dt}_{K_2} = 2K_2$

$Une\ troisième\ intégration\ par\ parties\ pour\ le\ calcul\ de\ K_2 : \begin{cases} u_3(t) = t \\ v_3'(t) = e^{-t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_3'(t) = 1 \\ v_3(t) = -e^{-t} \end{cases}$

$On\ obtient\ donc : K_2 = \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt = \underbrace{\left[-t e^{-t}\right]_0^{+\infty}}_{0} + \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1$

$Ainsi, I_1 = 3K_1 et\ K_1 = 2K_2 = 2$

$D'où\ \boxed{I_1 = \int_0^{+\infty} t^3 e^{-t} dt = 6}$

- $I_2=\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t\sqrt{t^2+1}}$

$\frac{1}{t\sqrt{t^2+1}}\sim\frac{1}{t^2}$ *au* $\mathcal{V}(+\infty)$ *, alors* $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t\sqrt{t^2+1}}$ *et* $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^2}$ *sont de même nature.*

Or $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^2}$ *converge puisque* $\alpha>1,(\alpha=2)$ *donc* $I_2=\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t\sqrt{t^2+1}}$ *converge*

Calculons I_2 : *posons le changement de variable* : $u=t^2+1\Rightarrow du=2tdt\implies dt=\frac{du}{2t}$

$,\begin{cases}(t\to+\infty)\Rightarrow(u\to+\infty)\\ t=1\Rightarrow u=2\end{cases}$ *et* $t=\sqrt{u-1}\implies dt=\frac{du}{2\sqrt{u-1}}$

Ainsi, $I_2=\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t\sqrt{t^2+1}}=\int_2^{+\infty}\frac{du/2\sqrt{u-1}}{\sqrt{u-1}\sqrt{u}}=\frac{1}{2}\int_2^{+\infty}\frac{du}{(u-1)\sqrt{u}}$

On fait le changement de variable : $v=\sqrt{u}\Rightarrow dv=\frac{1}{2\sqrt{u}}du\implies du=2\sqrt{u}dv=2vdv$

$,\begin{cases}(u\to+\infty)\Rightarrow(v\to+\infty)\\ u=2\Rightarrow v=\sqrt{2}\end{cases}$ *et* $u=v^2$

Ainsi, $I_2=\frac{1}{2}\int_2^{+\infty}\frac{du}{(u-1)\sqrt{u}}=\frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^{+\infty}\frac{2vdv}{(v^2-1)v}=\int_{\sqrt{2}}^{+\infty}\frac{dv}{v^2-1}=\int_{\sqrt{2}}^{+\infty}\left(\frac{1/2}{v-1}-\frac{1/2}{v+1}\right)dv$

$$I_2=\frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^{+\infty}\frac{dv}{v-1}-\frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^{+\infty}\frac{dv}{v+1}=\frac{1}{2}\left([\ln|v-1|]_{\sqrt{2}}^{+\infty}-[\ln|v+1|]_{\sqrt{2}}^{+\infty}\right)=\frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{v-1}{v+1}\right|\right]_{\sqrt{2}}^{+\infty}$$

On a : $\lim_{v\to+\infty}\ln\left|\frac{v-1}{v+1}\right|=\ln 1=0\Rightarrow I_2=\frac{1}{2}\left(0-\ln\left|\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right|\right)=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right|=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}\right|$

D'où $\boxed{I_2=\ln(\sqrt{2}+1)}$

BEN AHMED MOHSEN
Téléphone: (+216) 97 619191 / 54 619191
omega.center.cp@gmail.com
https://web.facebook.com/OMEGACENTER2014

Axe ① : Table des matières

Adresse : 2, Rue Ibn Arafa, av de l'environnement Manouba Centre, Manouba