

Institut de Financement du Développement du Maghreb Arabe
 Concours de Recrutement de la XXXIII^{ème} promotion—Septembre 2013
 Epreuve de Méthodes Quantitatives
 Durée : 1h30 ***** Nombre de pages :02

Exercice 1 : (8 points : 1+1+1+1+1+1.5+1.5)

On note X et Y les gains prévus de deux projets différents où X peut prendre la valeur $X = 0$ ou la valeur $X = 4$ avec la probabilité $\frac{1}{2}$:

$P[X = 0] = P[X = 4] = \frac{1}{2}$ alors que Y peut prendre la valeur $Y = 0$ ou la valeur $Y = a$ avec respectivement des probabilités égales à $\frac{3}{4}$ et $\frac{1}{4}$:

$$P[Y = 0] = \frac{3}{4} \quad \text{et} \quad P[Y = a] = \frac{1}{4} \quad \text{avec } a \text{ un paramètre inconnu.}$$

1. Calculer l'espérance mathématique de X ainsi que sa variance
2. Déterminer la valeur du paramètre a pour que $E(X) = E(Y)$
3. On pose $Z = X + Y$ le gain global des deux projets. En admettant que les projets sont indépendants, déterminer les valeurs possibles de Z ainsi que les probabilités associées à ces valeurs
4. En fait, on dispose de la distribution de probabilité conjointe du couple (X, Y) selon le tableau suivant :

	$Y = 0$	$Y = a$
$X = 0$	$\frac{1}{2}$	0
$X = 4$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

avec a la valeur trouvée dans la question 2

- i- Prouver que les gains X et Y ne sont plus indépendants
- ii- Calculer la covariance entre X et Y
- iii- En déduire la valeur du coefficient de corrélation linéaire entre X et Y
- iv- Comparer la variance de Z à celle trouvée dans la question 3. Commenter.

Exercice 2 : (12 points: 1.5 point par question)

On considère la relation linéaire entre le taux d'endettement public en pourcentage du PIB (noté Y) et le taux d'investissement public en pourcentage du PIB (noté X) sur une période de 40 années :

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + \epsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, 40 \quad (1)$$

avec ϵ_t une terme d'erreur vérifiant les hypothèses suivantes $E(\epsilon_t) = 0 \quad \forall t$,
 $V(\epsilon_t) = \sigma^2 \quad \forall t$, $Cov(\epsilon_t, \epsilon_s) = 0 \quad \forall t \neq s$ $Cov(\epsilon_t, X_s) = 0 \quad \forall t$.

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^{40} Y_t &= -12, \quad \sum_{t=1}^{40} X_t = 320, \quad \sum_{t=1}^{40} (Y_t - \bar{Y})^2 = 200, \\ \sum_{t=1}^{40} (X_t - \bar{X})^2 &= 160 \text{ et } \sum_{t=1}^{40} (Y_t - \bar{Y})(X_t - \bar{X}) = 80\end{aligned}$$

1. Estimer par la méthode des moindres carrés ordinaires (mco) les paramètres α et β , notés respectivement $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$. Commenter.
2. Ecrire l'équation d'analyse de la variance et calculer ses composantes. En déduire le coefficient de détermination linéaire (R^2)
3. Calculer la variance estimée de $\hat{\beta}$
4. Sous l'hypothèse de la normalité des résidus, tester la significativité de β au seuil de 5%. Commenter.
On rappelle que pour une loi normale centrée réduite Z , la probabilité $P[-1.96 \leq Z \leq 1.96] = 0.95$

Pour tenir compte de la dynamique qui accompagne l'endettement et l'investissement, on décide d'estimer un modèle dynamique et à retards échelonnés; défini par :

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + \theta X_{t-1} + \lambda Y_{t-1} + \epsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, 40 \quad (2)$$

5. Ecrire en fonction des paramètres les effets de court et de long terme d'une variation du taux d'investissement sur la variation du taux d'endettement public, notés respectivement ECT et ELT

L'estimation de l'équation (2) a fournit les résultats suivants:

$$\hat{Y}_t = \underset{(1.5)}{-6.05} + \underset{(0.350)}{1.16} X_t - \underset{(0.18)}{0.44} X_{t-1} - \underset{(0.12)}{0.36} Y_{t-1}$$

les chiffres entre parenthèses correspondent aux écart-types estimés des paramètres.

- a. Commenter économiquement cette relation
- b. Calculer les estimateurs de ECT et ELT .
- c. Sous l'hypothèse de la normalité des résidus, tester au seuil de 5%, l'hypothèse $H_0 : ECT = 0.5$ sachant que la matrice de variances covariances estimée est :

$$\hat{V} \begin{pmatrix} \hat{\beta} \\ \hat{\theta} \\ \hat{\lambda} \end{pmatrix} = 10^{-4} \begin{pmatrix} 5 & -1.5 & 2 \\ -1.5 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$