Dénombrement

$\mathcal{A}-1$ • *Inclusion, union, intersection, complémentaire :*

Soient A, B et C des parties d'un ensemble fini E :

a • $A \cap B = B \cap A$

b • $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$

c • $A \cap \emptyset = \emptyset$

d • $A \cap A = A$

e • $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$

f • $A \cup B = B \cup A$

g • $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$

h • $A \cup \emptyset = A$

i • $A \cup A = A$

j • $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$

k • $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

ℓ • $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

m • $\overline{A} = C_E A = E \setminus A$ (*Le complémentaire de A*)

n • $\overline{(\overline{A})} = A$

o • $A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$

p • $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$

q • $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$

$\mathcal{A}-2$ • *Cardinal d'un ensemble fini :*

Soit E un ensemble non vide. E est fini s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que E est en bijection avec

$\{1,2,\ldots,n\}$. *On note* : $Card(E) = n$, *le cardinal est unique* .

a • *Le cardinal d'unensemble fini est son nombre d'éléments*

b • $Card(\emptyset) = 0$

c • *Pour que deux ensembles finis A et B aient le même cardinal, il faut et il suffit qu'il existe une bijection de A sur B*

d • *Soient A et B deux ensembles finis tels que* $B \subset A$. *Alors* $Card(B) \le Card(A)$

e • *Si A et B sont des ensembles finis disjoints* (c-à-d. $A \cap B = \emptyset$) , *alors* :

$Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B)$

☑ **Généralisation:** *Soit* $p \ge 2$ *et* $\{A_1, A_2, \ldots A_p\}$ *une famille de p ensembles finis.*

Si pour tout $(i,j) \in [1,p]^2$ $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$, (*on dit que les* A_i *sont 2 à 2 disjoints*).

$$\text{Alors } Card\left(\bigcup_{i=1}^{p} A_i\right) = \sum_{i=1}^{p} Card(A_i)$$

f • *Si A est un ensemble fini et* $B \subset A$ *alors* $Card(A \setminus B) = Card(A) - Card(B)$

g • *A, B deux ensembles finis. Alors* : $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B)$

☑ **Généralisation:** (**Formule de Poincaré ou du crible**)

$n \ge 2$ *et* $\{A_1, A_2, \ldots A_n\}$ *une famille de p ensembles finis.*

$$Card\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Card(A_i) - \sum_{(i,j)/1\le i<j\le n} Card(A_i \cap A_j) + \sum_{(i,j,k)/1\le i<j<k\le n} Card(A_i \cap A_j \cap A_k)$$

$$- \cdots + (-1)^{n+1} Card(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$$

$$\text{Autrement : } Card\left(\bigcup_{i=1}^{p} A_i\right) = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} \sum_{1\le n_1<n_2<\cdots<n_i\le p} Card(A_{n_1} \cap A_{n_2} \cap \ldots \cap A_{n_i})$$

☞ **Pour $p = 3$** : $Card[A_1 \cup A_2 \cup A_3] = Card(A_1) + Card(A_2) + Card(A_3) - Card(A_1 \cap A_2)$
$- Card(A_1 \cap A_3) - Card(A_2 \cap A_3) + Card(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$

☞ **Pour $p = 4$** : $Card[A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4] = Card(A_1) + Card(A_2) + Card(A_3) + Card(A_4)$
$- Card(A_1 \cap A_2) - Card(A_1 \cap A_3) - Card(A_1 \cap A_4) - Card(A_2 \cap A_3) - Card(A_2 \cap A_4) - Card(A_3 \cap A_4)$
$+ Card(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + Card(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + Card(A_1 \cap A_3 \cap A_4) + Card(A_2 \cap A_3 \cap A_4)$
$- Card(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)$

h • *Si A et E sont deux ensembles finis tels que* $A \subset E$ *, alors l'ensemble* $\overline{A}$ *est finis et*

$Card(\overline{A}) = Card(E) - Card(A)$

i • **Produit catésien :** *Si A et B sont deux ensembles finis , alors le produit*

cartésien $A \times B$ *est fini et* $Card(A \times B) = Card(A) \times Card(B)$

☑ **Généralisation:** $Card\left(\prod_{i=1}^{p} A_i\right) = \prod_{i=1}^{p} Card(A_i)$

A– 3 • P-liste avec répétition (nombre d'applications) :

Le nombre d'application d'unensemble fini non vide F de cardinal p dans un ensemble

fini non vide E de cardinal n est : $Card(E)^{Card(F)} = n^p$

☑ **Tirages successifs avec remise :** *Soit* $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. *Dans une population*

d'effectif n, on effectue l'expérience aléatoire qui consiste à extraire successivement,

avec remise , p individus . Il en résulte que le même individu peut être choisi plusieurs

fois et que l'on peut avoir $p \geq n$.

Les résultats de ces tirages successifs, rangé dans l'ordre de leur obtention,

constituent une liste à p-éléments également appelée p-liste.

A chaque tirage, le nombre d'issus possibles est n et , puisqu'on effectue p– tirages

successifs , le nombre de listes à p-éléments est : n^p

A– 4 • P-liste sans répétition (nombre d'injections) :

Soit E un ensemble fini de cardinal n et $p \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Une p-liste d'éléments distincts de E est un élément $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in E^p$ *tel que pour tout*

$i \neq j$, $x_i \neq x_j$. *Le cardinal de l'ensemble des p-listes d'éléments distincts d'un ensemble*

à n élémentsest : $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$

Une p-liste est également appelée un arrangement de p parmi n.

Le nombre d'applicatios injectives d'unensemble à p-éléments dans un ensemble à

n-éléments est A_n^p

☑ **Tirages successifs sans remise :** *Soit* $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. *Dans une population*

d'effectif n , on extrait, successivement et sans remise p individus . Il en résulte que le même individu ne peut pas être choisi plusieurs fois et que $p \leq n$. Ces tirages successives sans remise sont dits tirages exhaustifs .

Les résultats , rangés dans l'ordre de leur obtention, constituent un arrangement de p éléments distincts choisis parmi n . On dit aussi arrangement de n éléments p à p.

$\mathcal{A}$– 5 • Permutations (nombre de bijections) :

Le nombre d'applications bijectives d'un ensemble à n éléments dans un ensemble à n éléments est $n! = A_n^n$.

C'est également le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments.

☑ **Ranger n-éléments :** ***On considère un ensemble à n éléments . On cherche le nombre de façons de ranger (on ordonne) ces n éléments.***

Il y a n choix pour l'élément placé en premier , $n-1$ choix pour le second , $n-2$ pour le troisième … par conséquent il y'a $n!$ façons d'ordonner n éléments

$\mathcal{A}$– 6 • Permutations avec répétitions :

Le nombre de permutations que l'on peut constituer si certains des éléments sont identiques est plus petit que si tous les éléments sont distincts. Lorsque seuls k éléments sont distincts . Lorsque seuls k éléments sont distincts ($k \leq n$) chacun d'eux apparaissant $n_1, n_2, \dots, n_k$ fois,

avec : $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ et $n_i \geq 1$, $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, on a : $\overline{P}_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \dfrac{n!}{n_1!\, n_2! \dots n_k!}$

En effet, si chacune des n_i places occupées par des éléments identiques, $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ était occupée par des éléments différents, le nombre de permutations serait alors à multiplier par $n_i!$, d'où $(n_1!\, n_2! \dots n_k!)\overline{P}_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = n!$

☑ **Exemple 1 :** ***Les $\dfrac{5!}{2!\,1!\,2!}$ permutations des 5 éléments a, a, b, c, c :***

aabcc	aacbc	aaccb	abacc	abcac	abcca	acabc	acacb	acbac	acbca
accab	accba	baacc	bacac	bacca	bcaac	bcaca	bccaa	caabc	caacb
cabac	cabca	cacab	cacba	cbaac	cbaca	cbcaa	ccaab	ccaba	ccbaa

☑ **Exemple 2 :** ***Combien d'anagrammes peut-on former avec les lettres du mot***

« ***excellence*** » ? : ***Réponce*** $\dfrac{10!}{4!\,1!\,2!\,2!\,1!} = 37800$

$\mathcal{A}-7$ • *Combinaison (le nombre d'applications strictement croissantes) :*

Le nombre d'applications strictement croissantes d'unensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments est $\binom{n}{p} = C_n^p = \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!}$

☑ ***Tirages simultanés :*** ***Soit E un ensemble fini de n éléments et soit p un entier tel que*** $0 \le p \le n$.

On appelle combinaison de p éléments de E toute partie de E ayant p éléments.

Le nombre de combinaisons d'un ensemble à n éléments est noté $\binom{n}{p} = C_n^p$

Il s'agit d'extraire simultanément, p individus parmi n

a • $C_n^0 = C_n^n = 1$

b • $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$

c • $C_n^2 = C_n^{n-2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$

d • $C_n^p = C_n^{n-p}$

e • ***Si*** $1 \le p \le n-1$ ***, alors*** $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$

$\mathcal{A}-8$ • *Nombre d'applications croissantes :*

Le nombre d'applicationscroissantes d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments est $C_{n+p-1}^p = \binom{n+p-1}{p}$.

C'est aussi le nombre de parties à p− éléments avec répétitions dans un ensemble à n-éléments ou le nombre de p− listes ordonnées de p parmi n

$\mathcal{A}-9$ • *Occurrence d'un élément dans une p-liste :*

Soit E un ensemble fini de cardinal n et $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in E^p$.

L'occurence de x dans la p-liste $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ ***est le nombre de fois où cet élément apparaît dans cette p-liste .***

Soit $k \in [0, p]$, ***le nombre de p− listes dont l'occurence de x est égale à k est :***

$C_p^k(n-1)^{p-k}$

$\mathcal{A}-10$ • Nombres de sous-ensembles :

Soit E un ensemble fini de cardinal n .

Il y a $2^{Card(E)}$ sous-ensembles de E : $Card[\mathcal{P}(E)] = 2^n$

Espace probabilisé

$\mathcal{B}-1$ • Événements :

Notations	Vocabulaire ensembliste	Vocabulaire probabiliste
$\emptyset$	Ensemble vide	Événement impossible
Ω	Ensemble plein	Événement certain
ω	Élément de Ω	Événement élémentaire
A	Sous-ensemble de Ω	Événement
$\omega \in A$	ω appartient à A	Le résultat ω est une des réalisation possible de A
$A \subset B$	A inclus dans B	A implique B
$A \cup B$	Réunion de A et B	Réalisation de l'un au moins des événements A , B
$A \cap B$	Intersection de A et B	Réalisation de tous les événements A et B
$\overline{A}$	Complémentaire de A dans Ω	Événement contraire de A
$A \cap B = \emptyset$	A et B sont disjoints	A et B sont incompatibles

☑ **Réalisation de l'un au moins des A_i $(1 \leq i \leq n)$:** $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$

est l'ensemble des ω qui sont dans l'un au moins des A_i .

On peut étendre cette définition aux réunions d'une suite infinie d'événements:

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}^*} A_i = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i$$

☑ **Réalisation de tous les A_i $(1 \leq i \leq n)$:** $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$

est l'ensemble des ω qui sont dans tout les A_i.

On peut étendre cette définition aux intersections d'une suite infinie d'événements:

$$\bigcap_{i\in\mathbb{N}^*} A_i = \bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i$$

$\mathcal{B}-2$ • Tribu (ou σ-algèbre) d'un ensemble de parties de Ω :

BEN AHMED MOHSEN Téléphone: (+216) 97 619191 / 54 619191
omega.center.cp@gmail.com https://web.facebook.com/OMEGACENTER2014

Soit Ω *un univers fini ou infini d'éventualités et* $\mathcal{P}(\Omega)$ *l'ensemble de tous les sous-ensembles de* Ω *. On appelle tribu ou σ-algèbre sur* Ω *toute partie* $\mathcal{F}$ *de* $\mathcal{P}(\Omega)$ *vérifiant les propriétés suivantes :*

☑ $\Omega \in \mathcal{F}$: ($\mathcal{F}$ *contient* Ω *et tous les singletons* $\{\omega\}$)

☑ $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{F}$

☑ *Pour toute suite* $(A_n)_{n\geq 0}$ *d'éléments de* $\mathcal{F}$, $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{F}$

$\mathcal{B}$– 3 • Espace probabilisé (ou univers probabilisé) :

On appelle espace (ou univers) probabilisé, tout triplet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *où :*

• Ω *est un ensemble (univers d'éventualités)*

• $\mathcal{F}$ *est un tribu sur* Ω *(ensemble des événements)*

• P *est une probabilité (ou mesure de probabilité) sur* $\mathcal{F}$ *i.e. une application :*

$P : \mathcal{F} \to [0,1]$ *vérifiant les propriétés suivantes :*

$$☑\ P(\Omega) = 1 \qquad et \qquad ☑\ P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$$

pour toute suite (A_n) *d'événements deux à deux incompatibles.*

• *Pour tout* $A \in \mathcal{F}$ *, le nombre* $P(A)$ *est la probabilité de l'événement* A

$\mathcal{B}$– 4 • Propriétés générales d'une probabilité :

Toute probabilité P *sur* $(\Omega, \mathcal{F})$ *vérifie les propriétés suivantes :*

a • $P(\emptyset) = 0$

b •

☞ *Si* $A \cap B = \emptyset$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

☞ *Si les* A_i $(1 \leq i \leq n)$ *sont deux à deux disjoints :* $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{n=1}^{n} P(A_i)$

c • $\forall A \in \mathcal{F}, P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

d • $\forall A \in \mathcal{F}, \forall B \in \mathcal{F}, A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

e • $\forall A \in \mathcal{F}, \forall B \in \mathcal{F}, P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

f • $\forall A \in \mathcal{F}, \forall B \in \mathcal{F}, P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

$\mathcal{g}$ • ***Continuité monotone séquentielle :***

☞ $Si\ (B_n)_{n\geq 1}$ ***est une suite croissante d'événements de*** $\mathcal{F}$ ***convergente vers***

$B \in \mathcal{F}$, ***alors*** $P(B) = \lim\limits_{n\to+\infty} P(B_n)$. ***Notation :*** $B_n \uparrow B \Rightarrow P(B_n) \uparrow P(B)$, $(n \to +\infty)$

☞ $Si\ (C_n)_{n\geq 1}$ ***est une suite décroissante d'événements de*** $\mathcal{F}$ ***convergente vers***

$C \in \mathcal{F}$, ***alors*** $P(C) = \lim\limits_{n\to+\infty} P(C_n)$. ***Notation :*** $C_n \downarrow C \Rightarrow P(C_n) \downarrow P(C)$, $(n \to +\infty)$

$\mathcal{h}$ • $\forall A \in \mathcal{F}, \forall B \in \mathcal{F}, P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$

$\mathcal{i}$ • $\forall A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}\ P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{n=1}^{n} P(A_i)$

$\mathcal{j}$ • $\forall A_1, A_2, \dots, A_n \dots \in \mathcal{F}\ P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_i)$

$\mathcal{B}-5$ • Formule de Poincaré :

Pour tout $n \geq 2$ ***et tous les événéménts*** $A_1, A_2, \dots A_n$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{(i,j)/1\leq i<j\leq n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{(i,j,k)/1\leq i<j<k\leq n} P(A_i \cap A_j \cap A_k)$$

$$- \cdots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)$$

☞ ***Pour*** $p = 3$: $P[A_1 \cup A_2 \cup A_3] = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$

$$-P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

☞ ***Pour*** $p = 4$: $P[A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4] = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4)$

$-P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_4) - P(A_2 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_4) - P(A_3 \cap A_4)$

$+P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + P(A_1 \cap A_3 \cap A_4) + P(A_2 \cap A_3 \cap A_4)$

$-P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)$

$\mathcal{B}-6$ • Équiprobabilité :

Soit $\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_i, \dots\}$ ***un ensemble infini dénombrable.***

La donnée d'une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ ***équivaut à la donnée d'une suite*** $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ***de***

réel tels que : $P(\{\omega_i\}) = p_i$, $i \in \mathbb{N}$

BEN AHMED MOHSEN Téléphone: (+216) 97 619191 / 54 619191
omega.center.cp@gmail.com https://web.facebook.com/OMEGACENTER2014

Conditionnement et indépendance

C-1 • Probabilités conditionnelles :

Soit H un événement tel que $P(H) \neq 0$. Pour tout événement observable A, on définit :

$P(A|H) = \dfrac{P(A \cap H)}{P(H)}$ *appelée probabilité conditionnelles de l'événement A sous l'hypothèse H*

C-2 • Propriétés :

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé et H un événement fixé tel que $P(H) \neq 0$. Alors la fonction d'ensemble $P(\cdot|H)$ définie par : $P(\cdot|H) : \mathcal{F} \to [0,1]$, $B \mapsto P(B|H)$ est une nouvelle probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ la fonction d'ensemble $P(\cdot|H)$ vérifie :

- **a** • $P(\emptyset|H) = 0$, $P(\Omega|H) = 1$ *et si* $H \subset A$, *alors* $P(A|H) = 1$
- **b** • *Si les A_i sont deux à deux disjoints :* $P(\cup_{i=1}^{n} A_i|H) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(A_i|H)$
- **c** • *Pour tout* $B \in \mathcal{F}$, $P(\overline{B}|H) = 1 - P(B|H)$
- **d** • *Pour tout* $A \in \mathcal{F}$ *et* $B \in \mathcal{F}$, *si* $A \subset B$ *alors* $P(A|H) \leq P(B|H)$
- **e** • *Pour tout* $A \in \mathcal{F}$ *et* $B \in \mathcal{F}$, $P(A \cup B|H) = P(A|H) + P(B|H) - P(A \cap B|H)$
- **f** • *Pour toute suite* $(A_i)_{i\geq 1}$ *d'événements :* $P(\cup_{n=1}^{+\infty} A_n|H) \leq \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n|H)$
- **g** • *Si* $B_n \uparrow B$, *alors* $P(B_n|H) \uparrow P(B|H)$, $(n \to +\infty)$
- **h** • *Si* $C_n \downarrow C$, *alors* $P(C_n|H) \downarrow P(C|H)$, $(n \to +\infty)$

C-3 • Règle des conditionnements successifs :

Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont n événements tels que $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \neq 0$, on a :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \times \ldots \times P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

C-4 • Système complet :

Soit (A_i) une suite (finie ou infinie dénombrable) d'événements de $\mathcal{F}$.

On dit que les A_i forment un système complet si en tant qu'ensembles ils forment une partition de Ω et ils sont tous de probabilité non nulle. Autrement dit

☞ *Les A_i sont deux à deux incompatibles*

☞ $\bigcup_i A_i = \Omega$

☞ $\forall i, P(A_i) > 0$

C-5 • Formule de la probabilité totale :

☞ *Si H est tel que $P(H) \neq 0$ et $P(\overline{H}) \neq 0$, on a $\forall B \in \mathcal{F}$:*

$$P(B) = P(B|H)P(H) + P(B|\overline{H})P(\overline{H})$$

☞ *Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont n événements tels que $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$,*

on a : Soit (A_i) un système complet d'événements et soit $B \in \mathcal{F}$. Alors :

$$P(B) = \sum_i P(B|A_i)P(A_i)$$

C-6 • Formule de Bayes :

Soit (A_i) un système complet et B un événement de probabilité non nulle.

Supposons connus les nombres $P(B|A_i)$ et les nombres $P(A_i)$.

Alors pour tout i : $P(A_i|B) = \dfrac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B|A_j)P(A_j)}$

C-7 • Indépendance de deux événements :

a • Définition : *Soient A et B deux événements de probabilité non nulle, les trois égalités suivantes sont équivalentes :*

☞ $\{P(B|A) = P(B)\} \Leftrightarrow \{P(A|B) = P(A)\} \Leftrightarrow \{P(A \cap B) = P(A)P(B)\}$

b • Théorème : *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé. Deux événements A et B de cet espace sont dits indépendants lorsque : $P(A \cap B) = P(A)P(B)$*

c • Propriété : *Si A et B sont indépendants, il en est de même pour les paires d'événements : $(A \text{ et } \overline{B})$, $(\overline{A} \text{ et } B)$, $(\overline{A} \text{ et } \overline{B})$*

C-8 • Indépendance mutuelle :

Trois événements A, B et C sont dits mutuellement indépendants, lorsqu'ils vérifient les quatres conditions :

- $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
- $P(B \cap C) = P(B)P(C)$

- $P(C \cap A) = P(C)P(A)$
- $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$

$\mathcal{C}$– 9 • Indépendance mutuelle-généralisation :

Les n événements $A_1, A_2, \dots A_n$ sont dits mutuellement indépendants si pour toute famille $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots A_{i_k}$, avec $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$, on a :

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \times \dots \times P(A_{i_k})$$

☞ *L'indépendance mutuelle implique évidemment l'indépendance deux à deux et la réciproque est fausse*

☞ *Attention la notion d'indépendance est délicate ; elle est relative à la probabilité P considérée. Ainsi des événements peuvent être indépendants pour une probabilité P et ne plus l'être pour une autre probabilité $\widetilde{P}$. De plus n événements $(n \geq 3)$ peuvent être deux à deux indépendants sans être indépendants dans leur ensemble.*

a • Propriétés :

☞ *Si $\{A_1, A_2, \dots A_n\}$ est une famille de n événements indépendants, toute famille obtenue en remplaçant certains des A_i par leur complémentaires est encore indépendante*

☞ *Une suite infinie d'événements est dite indépendante si toute sous suite finie est formée d'événements mutuellement indépendants.*

$\mathcal{C}$– 10 • Épreuves répétées :

On dit que les épreuves sont indépendantes si toute suite $(A_i)_{i \geq 1}$ telle que la réalisation de chaque A_i est déterminée uniquement par le résultat de la i-éme épreuve est une suite indépendante d'événements.

Exercice 1 :

Énoncé

Au cours de la fabrication d'un certain type de lentilles, chacune de ces lentilles doit subir deux traitements notés T_1 et T_2 . On prélève au hasard une lentille dans la production.

On désigne par A l'événement : « la lentille présente un défaut pour le traitement T_1 »

On désigne par B l'événement : « la lentille présente un défaut pour le traitement T_2 »

Une étude a montré que :

- *La probabilité qu'une présente un défaut pour le traitement T_1 est $P(A) = 0,10$*
- *La probabilité qu'une présente un défaut pour le traitement T_2 est $P(B) = 0,20$*
- *La probabilité qu'une lentille présente aucun des deux défauts est $0,75$*

1) *Calculer la probabilité qu'une lentille, prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour au moins un des deux traitements T_1 ou T_2*
2) *Calculer la probabilité qu'une lentille, prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour les deux traitements T_1 et T_2*
3) *Les évènements A et B sont-ils indépendants ? Justifier votre réponse*
4) *Calculer la probabilité qu'une lentille, prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour un seul des deux traitements*
5) *Calculer la probabilité qu'une lentille, prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour le traitement T_2 sachant qu'il présente un défaut pour le traitement T_1*

Corrigé

1) $P(A \cup B) = 1 - P\left(\overline{(A \cup B)}\right) = 1 - \underbrace{P(\overline{A} \cap \overline{B})}_{\text{La lentille présente aucun des deux défauts}} = 1 - 0,75 = 0,25$

$$\boxed{P(A \cup B) = 0,25}$$

2) $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,10 + 0,20 - 0,25 = 0,05$

$$\boxed{P(A \cap B) = 0,05}$$

3) $P(A) \times P(B) = 0,02 \Rightarrow P(A) \times P(B) \neq P(A \cap B)$. D'où $\boxed{A \text{ et } B \text{ ne sont pas indépendants}}$
4) *Notons D l'événement : « La lentille présente un défaut pour un seul des deux traitements »*

$$P(D) = P[(A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})] = P(A \cap \overline{B}) + P(B \cap \overline{A}) - \underbrace{P\left[\underbrace{(A \cap \overline{B}) \cap (B \cap \overline{A})}_{\emptyset}\right]}_{0}$$

$$= P(A \cap \overline{B}) + P(B \cap \overline{A}) = [P(A) - P(A \cap B)] + [P(B) - P(B \cap A)]$$

Adresse : 2, Rue Ibn Arafa, av de l'environnement Manouba Centre, Manouba

$$= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = 0,10 + 0,20 - (2 \times 0,05)$$

$$\boxed{P(D) = 0,2}$$

5)

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0,05}{0,10} \Rightarrow \boxed{P(B|A) = 0,5}$$

Exercice 2 :

Énoncé

A l'issue d'une compétition, des sportifs sont contrôlés par un comité anti-dopage qui doit se prononcer sur leur positivité ou négativité au dopage. Or, d'une part, certains produits dopants restent indétectables aux contrôles, d'autre part, certains médicaments ont un effet de dopage inconnu du sportif. Le comité prend donc sa décision avec un risque d'erreur.

On note :

D, ***l'événement*** : «***Le sportif est dopé*** »

O, ***l'événement*** : «***Le sportif est déclaré positif*** »

E, ***l'événement*** : «***Le comité a commis une erreur***»

1) ***Dans cette question, on suppose que parmi les sportifs, 50% ne sont pas dopés et que le comité déclare positifs 20% des sportifs indépendamment du fait que le sportif soit dopé ou pas. On choisit un sportif au hasard. Calculer*** :

   a) ***La probabilité que le sportif soit non dopé et déclaré positif***
   b) ***La probabilité que le sportif soit dopé et déclaré négatif***
   c) ***La probabilité de l'événement E***

2) ***Dans cette question, on note p la proportion de dopés parmi les sportifs. On suppose que la probabilité d'être déclaré positif n'est pas la même selon que le sportif soit réellement dopé ou non*** :
   - ***La probabilité qu'un sportif dopé soit déclaré positif est*** $0,9$
   - ***La probabilité qu'un sportif non dopé soit déclaré positif est*** $0,1$

On choisit un sportif au hasard.

   a) ***Calculer la probabilité de E***
   b) ***Calculer, en fonction de p, la probabilité que ce sportif soit déclaré positif***

c) *On s'intéresse à la probabilité qu'un sportif ayant été déclaré positif soit réellement dopé.*

Montrer que cette probabilité est : $f(p) = \dfrac{0,9p}{0,1+0,8p}$

3) *Résoudre l'inéquation:* $f(p) \geq 0,9$ *. Interpréter ce résultat.*

Corrigé

1) *Dans cette question, On cherche la probabilité de l'évènement la probabilité que le sportif soit non dopé et déclaré positif :* $\bar{D} \cap O$

On a respectivement :

D*, l'événement : «Le sportif est dopé », avec* $P(\bar{D}) = 50\% = 0,5$

O*, l'événement : «Le sportif est déclaré positif », avec* $P(O) = 20\% = 0,2$

E*, l'événement : «Le comité a commis une erreur»*

a) *Les deux évènements* $\bar{D}$ *et* O *étant supposés indépendants, par la suite :*

$P(\bar{D} \cap O) = P(\bar{D})P(O) = 0,5 \times 0,2 = 0,1$

$$\boxed{P(\bar{D} \cap O) = 0,1}$$

b) $\bar{D}$ *et* O *étant supposés indépendants* $\Rightarrow$ D *et* $\bar{O}$ *le sont aussi .*

Ainsi , $P(D \cap \bar{O}) = P(D)P(\bar{O}) = \left(1 - P(\bar{D})\right)\left(1 - P(O)\right) = 0,5 \times 0,8 = 0,4$

$$\boxed{P(D \cap \bar{O}) = 0,4}$$

c) *On cherche la probabilité de l'évènement "Le sportif non dopé et déclaré positif ou qu'il était dopé et déclaré négatif."*

En effet $P(E) = P[(\bar{D} \cap O) \cup (D \cap \bar{O})]$

Or, on vérifie bien que $(\bar{D} \cap O)$ *et* $(D \cap \bar{O})$ *sont incompatibles, par la suite :*

$P(E) = P[(\bar{D} \cap O) \cup (D \cap \bar{O})] = P(\bar{D} \cap O) + P(D \cap \bar{O}) = 0,1 + 0,4 = 0,5$

$$\boxed{P(E) = 0,5}$$

2) *Dans cette question les deux évènements* D *et* O *ne sont plus indépendants, on aussi :* $P(D) = p$.

Avec $P(O|D) = 0,9$ *et* $P(O|\bar{D}) = 0,1$

a) *On se propose de calculer* $P(E)$ *:*

On a toujours $P(E) = P[(\bar{D} \cap O) \cup (D \cap \bar{O})]$ *,* $(\bar{D} \cap O) \cup (D \cap \bar{O})$ *étant incompatibles , donc :*

$P(E) = P[(\bar{D} \cap O) \cup (D \cap \bar{O})] = P(\bar{D} \cap O) + P(D \cap \bar{O})$

Or $P(\bar{D} \cap O) = P(\bar{D})P(O|\bar{D}) = \left(1 - P(D)\right)P(O|\bar{D})$

$$et\ P(D\cap\bar{O}) = P(D)P(\bar{O}|D) = P(D)\big(1-P(O|D)\big)$$

$$Ainsi\ P(E) = P(\bar{D}\cap O) + P(D\cap\bar{O}) = \big[\big(1-P(D)\big)P(O|\bar{D})\big] + \big[P(D)\big(1-P(O|D)\big)\big]$$

$$= [(1-p)P(O|\bar{D})] + \big[p\big(1-P(O|D)\big)\big] = [0,1(1-p)] + [p(1-0,9)]$$

$$= 0,1 - 0,1p + 0,1p$$

$$D'\text{où}\ \boxed{P(E) = 0,1}$$

b) $\{D,\bar{D}\}$ *forment un systéme complet , d'après la formule de probabilité totale, on obtient* : $P(O) = P(O\cap D) + P(O\cap\bar{D}) = [P(D)P(O|D)] + [P(\bar{D})P(O|\bar{D})]$

$$= [P(D)P(O|D)] + \big[\big(1-P(D)\big)P(O|\bar{D})\big] = (0,9p) + 0,1(1-p)$$

$$= 0,9p + 0,1 - 0,1p$$

$$D'\text{où}\ \boxed{P(O) = 0,8p + 0,1}$$

c) *On s'interesse à l'évènement qu'"un sportif positif soit réellement dopé", en d'autres termes* $P(D|O)$. $\{D,\bar{D}\}$ *forment un systéme complet , d'après la formule*

$$de\ Bayes : P(D|O) = \frac{P(D)P(O|D)}{[P(D)P(O|D)] + [P(\bar{D})P(O|\bar{D})]} = \frac{P(D)P(O|D)}{P(O)}$$

$$d'\text{où}\ \boxed{P(D|O) = \frac{0,9p}{0,8p+0,1}}$$

3)

$$f(p) = P(D|O) = \frac{0,9p}{0,8p+0,1}\ ,par\ la\ suite : f(p)\geq 0,9 \Leftrightarrow \frac{0,9p}{0,8p+0,1}\geq 0,9$$

$$\Leftrightarrow 0,9p \geq 0,9(0,8p+0,1)\ ; puisque\ 0,8p+0,1>0\ \Leftrightarrow 0,9p\geq 0,72p+0,09 \Leftrightarrow 0,9p-0,72p\geq 0,09$$

$$\Leftrightarrow 0,9p\geq 0,72p+0,09 \Leftrightarrow 0,9p-0,72p\geq 0,09 \Leftrightarrow 0,18p\geq 0,09$$

$$d'\text{où}\ \boxed{f(p)\geq 0,9 \Leftrightarrow p\geq 0,5}$$

On a $f(p) = P(D|O)$ *et* $P(D) = p$

Donc il suffit d'avoir au moins 50% de dopés pour que la probabilité qu'un sportif choisit au hasard et déclaré positif le soit réellement reste supérieure ou égale à 90%.

Exercice 3 :

Énoncé

Étant donné trois événements quelconques A, B et C définis sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. On se donne les probabiltés : $P(A) = 0,4$; $P(B) = 0,45$; $P(C) = 0,45$; $P(A \cap B \cap C) = 0,07$; $P(A \cap B) = 0,25$; $P(B \cap C) = 0,15$ *et* $P(A \cap C) = 0,2$

1) *Trouver les expressions mathématiques des événements suivants :*
   a) *Seulement A et B se produisent*
   b) *Deux exactement se produisent*
   c) *Au moins un événement se produit*
2) *Calculer les probabilités conditionnelles :* $P(A|B)$; $P(B|A)$; $P[(A \cap B)|C]$ *et* $P\left[\overline{(A \cup B)}|C\right]$

Corrigé

1)

a) $P(A \cap B \cap \overline{C}) = P\left(\overbrace{A \cap B}^{H} \cap \overline{C}\right) = P(H \cap \overline{C}) = P(H) - P(H \cap C)$

$$= P(A \cap B) - P(A \cap B \cap C) = 0,25 - 0,07$$

$$\boxed{P(A \cap B \cap \overline{C}) = 0,18}$$

b) $(A \cap B \cap \overline{C}), (A \cap C \cap \overline{B})$ *et* $(B \cap C \cap \overline{A})$ *sont mutuellement incompatibles, car,* $(A \cap B \cap \overline{C}) \cap (A \cap C \cap \overline{B}) \cap (B \cap C \cap \overline{A}) = A \cap \overline{A} \cap B \cap \overline{B} \cap C \cap \overline{C} = \emptyset$. *Ce qui donne :*

$P[(A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap C \cap \overline{B}) \cup (B \cap C \cap \overline{A})] = P(A \cap B \cap \overline{C}) + P(A \cap C \cap \overline{B}) + P(B \cap C \cap \overline{A})$

Avec $P(A \cap C \cap \overline{B}) = P(A \cap C) - P(A \cap C \cap B) = 0,2 - 0,07 = 0,13$

et $P(B \cap C \cap \overline{A}) = P(B \cap C) - P(B \cap C \cap A) = 0,15 - 0,07 = 0,08$

Ainsi, $P[(A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap C \cap \overline{B}) \cup (B \cap C \cap \overline{A})] = 0,18 + 0,13 + 0,08$

$$\boxed{P[(A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap C \cap \overline{B}) \cup (B \cap C \cap \overline{A})] = 0,39}$$

c)
$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

$$= 0,4 + 0,45 + 0,45 - 0,25 - 0,2 - 0,15 + 0,07$$

$$\boxed{P(A \cup B \cup C) = 0,77}$$

2)

• $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0,25}{0,45} = \dfrac{5}{9}$

- $P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{0,25}{0,4}=\dfrac{5}{8}$

- $P[(A\cap B)|C]=\dfrac{P(A\cap B\cap C)}{P(C)}=\dfrac{0,07}{0,45}=\dfrac{7}{45}$

- $P\left[\overline{(A\cup B)}|C\right]=1-P[(A\cup B)|C]=1-\left[P(A|C)+P(B|C)-P[(A\cap B)|C]\right]$

$$=1-\left[\frac{P(A\cap C)}{P(C)}+\frac{P(B\cap C)}{P(C)}-P[(A\cap B)|C]\right]=1-\left[\frac{0,2}{0,45}+\frac{0,15}{0,45}-\frac{7}{45}\right]$$

$$\boxed{P\left[\overline{(A\cup B)}|C\right]=\frac{17}{45}}$$

BEN AHMED MOHSEN Téléphone: (+216) 97 619191 / 54 619191
omega.center.cp@gmail.com https://web.facebook.com/OMEGACENTER2014

Axe ③ : Table des matières

Adresse : 2, Rue Ibn Arafa, av de l'environnement Manouba Centre, Manouba