Institut de Financement du Développement du Maghreb Arabe
Concours de Recrutement de la 37ème Promotion - Assurance

Techniques Quantitatives
Avril 2018
Durée : une heure et demie

Cette épreuve comporte deux pages
Aucun document n'est autorisé.

Exercice 1 : (4 points: 1.5+1.5+1)

Considérons deux variables X et Y indépendantes ayant des espérances mathématiques notées m_x et m_y et des variances σ_X^2 et σ_Y^2

1-Exprimer en fonction de ces paramètres la variance de la variable produit $Z = X\,Y$

2-Dans quel cas, cette variance est-elle égale au produit des variances : $\sigma_X^2\,\sigma_Y^2$?

3- Utiliser les résultats précédents pour prouver que le produit de deux lois de Poisson indépendantes n'est pas une loi de Poisson

Exercice 2 : (6 points: 1+1+1+2+1)

On considère une suite $X_1,\ X_2, \ldots\ldots X_n$ ....de n variables de Bernoulli indépendantes telles que $P[X_i = 1] = \theta$ et $P[X_i = 0] = 1 - \theta$ où θ est un scalaire compris entre 0 et 1. On pose : $Y_n = X_1 +\ X_2 + \ldots\ldots + X_n$

1- Dans cette question, on suppose que n est connu

i- Déterminer la loi de probabilité de Y_n et celle de $n - Y_n$

ii- En déduire leurs espérances mathématiques et leurs variances

2-On admet dans cette question que n est une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ

i-Reprendre le calcul de l'espérance mathématique de Y_n

ii- Calculer la variance de Y_n

iii- La loi de Y_n est-elle la même que celle déterminée dans la question1 ?. Justifier votre réponse.

Exercice 3 : (10 points : Partie1: 1+1+1+2 Partie2 : 1+1+1.5+1.5)

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes

Considérons X une variable aléatoire ayant une densité exponentielle de paramètre θ définie par $f(x) = \theta\, e^{-\theta x}$ pour $x \geq 0$ et $f(x) = 0$ sinon et θ est un paramètre positif.

Première partie

1- Déterminer la fonction de répartition de X

2- Calculer en fonction de θ la médiane de X

3- On définit $Z = [X]$. qui désigne la partie entière de X : ce qui signifie que Z est le plus grand nombre entier inférieur à X

i- Déterminer la loi de probabilité de Z

ii- Calculer l'espérance mathématique de la variable Z

Deuxième partie

Le gain associé à un projet industriel suit une loi exponentielle telle que définie ci-dessus. Le projet peut prendre deux formes distinctes notées A et B pour les quels le paramètre de la variable gain correspondant est soit a soit b avec a et b deux paramètres inconnus positifs différents.

On dispose de n réalisations indépendantes $X_1, X_2, \ldots, X_n$ suivant toutes la même loi que la variable X de paramètre a et de n autres réalisations indépendantes $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ suivant toutes la même loi que la variable X de paramètre b

1- i-Déterminer les estimations de a et de b par la méthode du maximum de vraisemblance.

ii-Ces estimations sont elles efficaces ? justifier votre réponse

2-On dispose de $n = 10$ observations indépendantes pour chacun des deux types de projets .

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	12	5	10	17	14	11	13	9	8	11
B	15	11	17	6	12	13	17	11	12	16

i-Comparer les deux projets A et B au sens du gain espéré

ii- Comparer les deux projets A et B au sens du risque associé au gain.

****

Institut de Financement du Développement du Maghreb Arabe

Concours de Recrutement de la 37 ème Promotion - Assurance

Techniques Quantitatives
Avril 2018

Corrigé :Exercice 1

1-

$V(XY) = E(X^2Y^2) - (E(XY))^2 = EX^2EY^2 - (E(X))^2(E(Y))^2 = (m_x^2 + \sigma_X^2)(m_y^2 + \sigma_y^2) - m_x^2 m_y^2$
$= \sigma_X^2\sigma_y^2 + \sigma_X^2 m_y^2 + \sigma_y^2 m_x^2$

2- La variance de XY sera égal au produit $\sigma_X^2\sigma_y^2$ si et seulement si $\sigma_X^2 m_y^2 + \sigma_y^2 m_x^2 = 0$ ce qui est équivalent à $m_y = m_x = 0$

3-Pour deux lois de Poisson : $V(XY) = \lambda\ \mu + \lambda\mu^2 + \lambda^2\mu$

alors que $E(XY) = E(X)E(Y) = \lambda\ \mu$

On constate que $E(XY)$ est différente de $V(XY)$, ce qui prouve que XY n'est pas une loi de Poisson

Corrigé Exercice 2

1- i-Y_n est par définition une loi binomiale $B(n,\ \theta)$

ii– $E(Y_n) = n\ \theta$ et $V(Y_n) = n\ \theta(1-\theta)$

2- Nous avons en conditionnant par rapport à n

i- $E(Y_n|n) = n\ \theta$, et $Var(Y_n|n) = n\ \theta(1-\theta)$ ce qui donne $E(Y_n) = EE(Y_n|n) = E(n\ \theta) = \theta\lambda$

ii- $Var(Y_n) = VarE(Y_n|n) + EVar(Y_n|n) = Var(n\theta) + E(n\,\theta(1-\theta)) = \theta^2\lambda + \lambda\,\theta(1-\theta) = \lambda\,\theta$

iii- La loi de Y_n n'est pas la même que dans la question1. Ses caractéristiques ont changé

Corrigé Exercice 3
Première partie

1- Pour x positif, on a $F(x) = P(X \le x) = \int_0^x \theta\, e^{-\theta\, t}dt = [-\,e^{-\theta\, t}]_0^x = 1 - e^{-\theta\, x}$

alors que pour x négatif : $F(x) = 0$

2- La médiane M vérifie l'équation : $F(M) = \frac{1}{2}$, ce qui donne $1 - e^{-\theta\, M} = \frac{1}{2}$ et donc : $M = \frac{1}{\theta}Log(2)$,

3- i–La variable Z prend ses valeurs dans **N** l'ensemble des entiers positifs ou nuls.

Pour z entier positif $P[Z = z] = P[z \le X < z+1] = (1 - e^{-\theta\,(z+1)}) - (1 - e^{-\theta\, z}) = e^{-\theta\, z} - e^{-\theta\,(z+1)} = e^{-\theta\, z}(1 - e^{-\theta})$

ii- L'espérance mathématique de la variable Z est :

$$E(Z) = \sum_0^\infty zP[Z = z] = (1 - e^{-\theta})\sum_0^\infty ze^{-\theta\, z}$$

Or : $\sum_0^\infty ze^{-\theta\, z} = e^{-\theta} + 2e^{-2\theta} + 3e^{-3\theta} + \ldots$ est la dérivée de

$$-e^{-\theta} - e^{-2\theta} - e^{-3\theta} + \ldots = \frac{-e^{-\theta}}{1 - e^{-\theta}} = 1 - \frac{1}{1 - e^{-\theta}}$$

ce qui donne : $\sum_0^\infty ze^{-\theta\, z} = \dfrac{e^{-\theta}}{(1 - e^{-\theta})^2}$

et donc $E(Z) = \dfrac{e^{-\theta}}{(1 - e^{-\theta})} = \dfrac{1}{e^{\theta} - 1}$

iii- Nous avons : $Z = [X] \le X$, ce qui signifie que $E(Z) \le E(X)$

D'ailleurs : $E(Z) = \sum_0^\infty zP[Z = z] = (1 - e^{-\theta})\sum_0^\infty ze^{-\theta\, z} \le \theta\sum_0^\infty ze^{-\theta\, z}$ du fait que $1 - e^{-\theta} \le \theta$

La fonction $f(\theta) = 1 - e^{-\theta} - \theta$ est décroissante avec $f(0) = 0$, ce qui signifie qu'elle est négative.

Deuxième partie

1-i-La densité de probabilité de l'échantillon $X_1, X_2, \ldots, X_n$ (projet forme$A$) est : $f(x_1, x_2, \quad x_n) = a^n\, e^{-a\,(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)}$ pour $x_i \ge 0$ avec $i = 1,2,\ldots,n$

- L'estimateur de a par la méthode du maximum de vraisemblance s'obtient par l'annulation de la dérivée de

$Log(a) - a(x_1 + x_2 + \ldots x_n)$ Cela donne : $\frac{1}{a} - (x_1 + x_2 + \ldots x_n) = 0$ et donc : $\widehat{a_{MV}} = \dfrac{n}{x_1 + x_2 + \ldots x_n}$

Le même calcul conduit à l'estimation $\widehat{b_{MV}} = \dfrac{n}{y_1 + y_2 + \ldots y_n}$

ii- Les deux estimations ne sont pas efficaces (question du cours) du fait que

$E(\widehat{a_{MV}}) = E(\frac{n}{x_1 + x_2 + \ldots x_n})$ différent de a

Il en est de même pour $\widehat{b_{MV}}$

2- Les calculs numériques conduisent à $x_1 + x_2 + \ldots x_n = 110$ et donc $\widehat{a_{MV}} = \frac{10}{110}$

et $y_1 + y_2 + \ldots y_n =$ $\widehat{b_{MV}} = \frac{10}{130}$

i-On a donc gain espéré pour le projet A : $\frac{1}{a} = 11$ alors que pour le projet B : $\frac{1}{b} = 13$

Ainsi le projet B est préféré à A au sens du gain espéré

ii En terme de risque; la variance de A est $\frac{1}{a^2} = 121$ alors que la variance de B est $\frac{1}{b^2} = 169$

Le projet A est préféré à B au sens du risque
