

Institut de Financement du Développement du Maghreb Arabe

Concours de Recrutement : promotion spéciale dédiée exclusivement au ministère des finances tunisien.

Epreuve de Techniques Quantitatives

Mai 2023

Durée : 1 heure 30 minutes

Nombre de pages : deux

Aucun document n'est autorisé

Exercice 1 : (4 points : 1 point par question)

Soit X une variable normale centrée réduite : $E(X) = 0$ et $V(X) = 1$. On pose $Y = X^2$

- 1- Déterminer la fonction de répartition de Y ainsi que sa densité de probabilité.
- 2- Prouver que la variable Y est une distribution de Khi-deux avec un nombre de degrés de liberté à déterminer. En déduire la variance de Y
- 3- Comparer $E(Y)$ à la médiane de Y sachant que pour une loi normale centrée réduite ayant une fonction de répartition F , on a $F(1) = 0.84$
- 4- Prouver que la covariance de X et de Y est nulle. Interpréter ce résultat

Exercice 2 : (4 points : 1 point par question)

On considère la matrice $M = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{bmatrix}$ où a est un scalaire réel en module inférieur strictement à 1.

- 1- Prouver que $M^2 - 2aM = \beta I$ où I est la matrice identité et β un scalaire dépendant de a qu'il faut déterminer
- 2- En déduire de cette égalité l'expression de l'inverse de M
- 3- On suppose dans la suite que : $a=0$
 - 3-i Calculer M^n où n est un entier positif ou négatif
 - 3-ii Calculer les valeurs du paramètre λ tel que le déterminant de $(M-\lambda I)$ est nul.

Exercice 3 : (12 points : 1.5 par question)

On note y_t et x_t les logarithmes du Produit Intérieur Brut et des Dépenses publiques d'un pays donné observées à la fin de l'année t pour $t = 1, 2, \dots, T$

Considérons la relation : $y_t = a x_t + b x_{t-1} + c + u_t$ pour $t = 2, 3, \dots, T$

Où les u_t ont des termes d'erreur indépendants, d'espérance mathématique nulle et de variance σ^2 alors que a , b et c sont des paramètres inconnus.

1-i-Quelle est l'interprétation économique de cette relation ? Que désignent les paramètres a , b et c ? Quels sont leurs signes attendus ? Justifier votre réponse.

1-ii- Expliquer, sans faire de calculs, comment on estime les paramètres a , b et c ainsi que le paramètre σ^2

2- Les observations ont permis d'obtenir les estimations par les moindres carrés suivantes :

$$\hat{a} = 0.1 \quad \hat{b} = 0.4 \quad \hat{c} = 0.2$$

avec respectivement les rapports de Student associés suivants:

$$S(\hat{a})=1.5 \quad S(\hat{b})=5.2 \quad \text{et} \quad S(\hat{c})=3$$

2-i Etudier la significativité statistique de chacun des coefficients au seuil de risque de 5%

On rappelle que pour une loi S de Student à T degrés de liberté, on admet pour T élevé que Probabilité ($-2 \leq S \leq 2$) = 0.95

2-ii Déterminer les estimations des écarts types des paramètres a , b et c

3- En fait, la relation initiale est remplacée par la spécification suivante :

$$y_t = \alpha y_{t-1} + a x_t + c + u_t \text{ pour } t = 2, 3, \dots, T$$

avec α un paramètre de module inférieur strictement à 1.

3-i Quelle est la nature du nouveau modèle ? Préciser brièvement son apport pour l'analyse économique de la relation considérée.

3-ii Les valeurs numériques des estimations de α et a sont : $\hat{\alpha} = 0.5$ et $\hat{a} = 0.4$

Déterminer le multiplicateur de court et de long terme des dépenses publiques sur le PIB

3-iii En posant $\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$ et $\Delta x_t = x_t - x_{t-1}$ Prouver que l'on peut réécrire le nouveau modèle en reliant Δy_t à Δx_t d'une part et à une combinaison linéaire retardée entre y_{t-1} et x_{t-1} d'autre part

3-iv Interpréter cette dernière écriture en termes de mécanisme de correction des erreurs à court terme.