Institut de Financement du Développement du Maghreb
Concours de recrutement de la 44 ème Promotion Banque
Techniques Quantitatives
Septembre 2024 Durée : 1 h 30

Remarques: aucun document n'est autorisé
Le sujet comporte 2 pages

Exercice 1 : (6 points : 1+1+1+1+2)

On considère une population d'entreprises industrielles ayant obtenu des crédits de la part d'une banque donnée. On s'intéresse à l'estimation de la probabilité θ qu'une entreprise enregistre un défaut de paiement où θ est un paramètre inconnu tel que $0 < \theta < 1$. Pour estimer ce paramètre, on tire d'une manière aléatoire un échantillon représentatif de taille n d'entreprises industrielles à qui on associe, à chacune d'entre elles, une variable aléatoire X_i binaire prenant la valeur 1 en cas de la présence d'un défaut de paiement de la part de l'entreprise i et la valeur zéro sinon. On admet que les variables X_i sont indépendantes.

1- Ecrire la densité de probabilité de X_i pour $i = 1,2,\ldots,n$. En déduire l'expression de la vraisemblance de l'échantillon

2- Déterminer l'estimateur de θ par la méthode du maximum de vraisemblance

3– En admettant que le nombre d'observations n est élevé

3- i- approximer la loi de l'estimateur par une loi normale en précisant ses caractéristiques statistiques

3- ii- démontrer que le scalaire $\theta(1-\theta)$ est majoré par $\frac{1}{4}$

3- iii- En déduire des résultats précédents un intervalle de confiance de θ pour un niveau de confiance donné.(à 95 % à titre d'exemple.). Commenter ce résultat.

Exercice 2 : (6 points: 1.5+1.5+1+1+1)

La densité de probabilité d'une variable aléatoire X s'écrit sous la forme exponentielle suivante: $f(x) = K\,exp(-\dfrac{x^2}{2\,a})$ pour x un réel quelconque avec a et K deux paramètres strictement positifs

1–Prouver que X est une loi normale centrée. En déduire la valeur de la constante K en fonction de a

2- Déterminer le mode, la variance et la médiane de X

3- On dispose de n réalisations $X_1, X_{2,}, \ldots, X_n$ indépendantes ayant toutes la loi de X définie ci-dessus.

Déterminer l'estimation de a par la méthode du maximum de vraisemblance

4- Prouver que cet estimateur est sans biais

5- Expliquer, sans expliciter les calculs, comment on peut démontrer que cet estimateur est efficace

Exercice 3: (8 points): Cet exercice 3 se compose de deux parties indépendantes

On s'intéresse à la relation temporelle entre le niveau actuel de l'inflation y_t à son niveau décalé d'une période y_{t-1} et au taux d'intérêt x_t

$y_t = a\, y_{t-1} + b\, x_t + c + u_t$ pour $t = 1,2,3, .., T$ avec $\mathbf{0 \leq a < 1}$ **et** y_0 une valeur initiale connue

avec des termes d'erreurs u_t d'espérance mathématique nulle, indépendants entre eux et de même variance σ^2, alors que a, b et c sont trois paramètres.

Première partie : (4 points : 1+1+1+1)

1–i Quelle est la nature de ce modèle ? Commenter économiquement la valeur et le signe attendu du paramètre b ?

1–ii – L'estimation par les moindres carrés ordinaires sur $T = 200$ observations a permis de trouver :

une somme des carrés des résidus égale à 213

une variance empirique de y_t égale à 2.19

Calculer la valeur du coefficient de détermination de la régression

1-iii Déterminer l'estimation de la variance σ^2

1–iv- Commenter la qualité des estimateurs obtenus sachant que la statistique de Durbin Watson égale à $DW = 0.06$

. **Deuxième partie : (4 points 1+1.5+1.5)**

Dans cette question, on suppose que $b = 0$ et que y_0 est une variable initiale suivant une loi normale centée réduite indépendante de u_t

2–i Déterminer la nature du modèle considéré. Quel intéret présente-t-il pour l'analyse économique et la prévision ?

2–ii Déterminer les lois de probabilité de y_1 et de y_2

2–iii Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre y_1 et y_2

Corrigé 1 :
Voir cours : estimation d'une proportion par le maximum de vraisemblance et par intervalle de confiance

Corrigé 2 :

1- La ddp d'une loi normale de paramètres m et σ^2 est de la forme $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{(x-m)^2}{2\,\sigma^2}}$

$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ exp$ - $\frac{(x-m)^2}{2\,\sigma^2}$ ce qui sinifie que la variable considée X est une loi normale avec $m = 0$ et $\sigma^2 = a$, c'est à dire $\sigma = \sqrt{a}$

La constante K est alors $K = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{a\ 2\pi}}$ Ce qui donne

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{a\ 2\pi}} exp(-\ \frac{x^2}{2\ a}\ )$

2- La distribution de X est une loi normale : centrée et de varaince a elle est donc symétrique ce qui donne une médiane nulle et admet un mode égal à 0

3- La vraisemblance est égale : $\Pi_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{a\ 2\pi}} \exp(-\ \frac{x_i^2}{2\ a}\ )\ = c\ \ a^{-\frac{n}{2}} \exp(-\sum \frac{x_i^2}{2\ a})$

Son logarythme est égale à c'-$\frac{n}{2}$ $Log(a) - \sum \frac{x_i^2}{2\ a} -$

La maximisation de cette vraisemblance fournit la condition : $-\ \frac{n}{2a} + \sum \frac{x_i^2}{2\ a^2}\ = 0$

ou encore $\sum \frac{x_i^2}{a}\ =\ n$

ce qui donne $\widetilde{a} = \frac{\sum x_i^2}{n}$

4- De ce qui précéde, nous savons que $\frac{x_i^2}{a}$ est une loi de Khi-deux en tant que carré d'une variable normale centrée réduite

ce qui donne $E(\sum \frac{x_i^2}{a}) = n$ ou encore $E(\sum \frac{x_i^2}{n}) = a$ L'estimateur est alors sans biais

5- Il faudrait prouver que la variance de l'estimateur (en passant par la loi Khi-deux) est l'inverse de la quantité d'information qui est égale à la variance de la dérivée par rapport à a du logrithmique de la vraisemblance .

Corrigé 3 : partie 1

Le modèle est défini par : $y_t = a\, y_{t-1} + b\, x_t + c + u_t$

1- i Il s'agit d'un modèle autorégressif (dynamique) d'ordre un avec une variable exogène (une variable instrument qui est le taux d'intérêt) en plus de la constante

Le signe attendu du coefficient b est en principe égatif du fait qu'il représente l'effet instantanné du taux d'intérêt sur l'inflation

1-ii Nous savons que le coefficient de détermination R^2 est défini par

$$R^2 = 1 - \frac{\text{Variance résiduelle}}{\text{Variance totale}} = 1 - \frac{213/200}{2.19} = 1 - \frac{1.065}{2.19} = 0.51$$

1-iii L'estimation de σ^2est calculé par le rapport de la somme des carrés des résidus (213) par $n - k = (200 - 3)$ Cela donne $\widehat{\sigma^2} = \frac{213}{197} = 1.08$

1-iv La statistique de Durbin Watson égale $DW = 0.06$ signifie que $2(1 - \varrho)) = 0.06$ c'est à dire que le coefficient d'autocorrélation est voisin de l'unité.

La présence d'une autocorrélation d'ordre un des résidus dans un modèle autorégressif rend baisées toutes les estimations obtenues par MCO.

Corrigé 3 partie 2

2–i Il s'agit d'un modèle autorégressif d'ordre un sans variable exogène. Il permet

aprés estimation des paramètres a et c de calculer la prévision de $y_{T°+1}$ par la quantité $a\, y_{T°} + c$ (sans supposer que y_0 soit connue)

2-ii En partant des égalités $y_1 = a\, y_0 + c + u_1$ et

$$y_2 = a\, y_1 + c + u_2 = a(a\, y_0 + c + u_1) + c + u_2$$
$$= a^2 y_0 + ac + c + au_1 + u_2$$

on peut en déduire que :

$$E(y_1) = aE(y_0) + c + E(u_1) = c$$
$$V(y_1) = a^2 V(y_0) + V(u_1) = a^2 + \sigma^2$$

La variable y_1 suit une loi normale $N(c;\ a^2 + \sigma^2)$

Par ailleurs, :La variable y_2 suit une loi normale avec $E(y_2) = aE(y_1) + c + E(u_2) = a\, c + c$ et $V(y_2) = a^4 + a^2\sigma^2 + \sigma^2$

3- Cov$(y_1, y_2) = cov[a\, y_0 + c + u_1;\quad a^2 y_0 + ac + c + au_1 + u_2] = a^3 + a\,\sigma^2$

Ce qui donne $\varrho = \dfrac{a^3 + a\sigma^2}{\sqrt{a^2 + \sigma^2}\,\sqrt{a^4 + a^2\sigma^2 + \sigma^2}}$
