

INSTITUT de FINANCEMENT du DEVELOPPEMENT du MAGHREB  
ARABE  
CONCOURS DE RECRUTEMENT DE LA XXIX<sup>ème</sup> PROMOTION

- juillet 2009 -

Epreuve de Méthodes Quantitatives

Durée : 1h 30

Nombre de pages : 02

**Aucun document n'est autorisé.**

**L'usage de la calculatrice est permis**

**Exercice 1 : (10 points : 1 point par question)**

On considère une grandeur  $x_t$  positive telle que :

$$y_t = \text{Log}(x_t) = a t + b + u_t \quad \text{pour } t = 1, 2, \dots, T$$

avec  $u_t$  des termes d'erreur indépendants, suivant la loi normale centrée réduite :

$$E(u_t) = 0; V(u_t) = 1. \quad \text{On pose } \Delta y_t = y_t - y_{t-1}$$

1- Prouver que si l'on néglige le terme d'erreur, le paramètre  $a$  est le taux de croissance moyen de la grandeur  $x_t$

2- Calculer l'espérance mathématique et la variance de  $\Delta y_t$

3- Prouver que le coefficient de corrélation linéaire entre  $\Delta y_t$  et  $\Delta y_{t-1}$  est égal à  $-\frac{1}{2}$

4- Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre  $\Delta y_t$  et  $\Delta y_{t-2}$

5 -On suppose dans cette question que  $b = 0$ ,

i- Déterminer en fonction des valeurs de  $y_t$  et de  $t$  pour  $t = 1, 2, \dots, T$  l'expression de l'estimation de  $a$  par les moindres carrés ordinaires

ii- Exprimer cette estimation en fonction des valeurs de  $x_t$  et de  $t$  pour  $t = 1, 2, \dots, T$

6 -On suppose dans cette question que  $a = b = 0$

i- Déterminer la fonction de répartition de  $x_t$

ii- En déduire la densité de probabilité de  $x_t$

iii- Déterminer la moyenne géométrique de  $x_t$  pour  $t = 1, 2, \dots, T$  en fonction de la moyenne arithmétique des variables  $u_t$ .

iv- En déduire l'espérance mathématique de cette moyenne géométrique.

**Exercice 2 : (10 points : 1 point par question)**

On considère la relation entre le revenu disponible ( $R_t$ ) et la consommation finale ( $C_t$ ) définie par :

$$C_t = a + bR_t + \varepsilon_t, \quad \text{pour } t = 1, 2, \dots, T$$

$\varepsilon_t$  un terme d'erreur vérifiant les hypothèses de la méthode des moindres carrés ordinaires (mco).

On dispose des informations suivantes:  $\bar{C} = 7.5$ ;  $\bar{R} = 8$  qui désignent respectivement les moyennes empiriques de  $C_t$  et de  $R_t$ ;  $V(C) = 2.5$ ;  $V(R) = 4$  et  $\text{Cov}(C, R) = 3$  qui désignent respectivement les variances empiriques de  $C_t$  et de  $R_t$  et leur covariance et le nombre d'observations est  $T = 30$ .

1- Commenter la relation définie précédemment en précisant les interprétations

économiques des paramètres  $a$  et  $b$

2- Déterminer les valeurs numériques des estimateurs des paramètres  $a$  et  $b$  obtenus par les par MCO; notés respectivement  $\hat{a}$  et  $\hat{b}$ .

3- Prouver que la variance expliquée est égale à :  $\hat{b} \cdot Cov(C, R)$

4- En déduire une estimation sans biais de la variance  $\sigma^2$  des erreurs.

5- Sous l'hypothèse de la normalité des termes d'erreur, tester au seuil de 5%, la significativité du paramètre  $b$ . On rappelle que pour une loi de Student notée  $S$ , nous avons approximativement : Probabilité [ $| S | > 2$ ] = 0.05

6- On considère à présent que le modèle est défini par :

$$C_t = a + b_0 R_t + b_1 R_{t-1} + b_2 R_{t-2} + \varepsilon_t, \text{ avec } t = 1, 2, \dots, T$$

i- Commenter la relation définie précédemment.

ii- Donner l'expression des effets de court terme et de long terme d'une variation unitaire du revenu disponible sur la consommation finale ; notés respectivement  $EC$  et  $EL$ .

iii- On suppose que les paramètres  $b_i$  vérifient la relation suivante :  $b_i = \theta_0 + \theta_1 i$  pour  $i = 0, 1$  et  $2$ . Réécrire le modèle en fonction des paramètres  $\theta_0$  et  $\theta_1$ .

iv- Exprimer  $EC$  et  $EL$  en fonction de  $\theta_0$  et  $\theta_1$  ; calculer leurs estimateurs sachant que  $\hat{\theta}_0 = 0.2$  et  $\hat{\theta}_1 = 0.05$ . Commenter.

v- Recalculer  $EL$  en fonction de  $\alpha$  et  $b_0$  si l'on l'on admet que :

$$C_t = \alpha C_{t-1} + b_0 R_t + \varepsilon_t,$$

avec  $|\alpha| < 1$ .

---