Institut de Financement du Développement du Maghreb Arabe

CONCOURS DE RECRUTEMENT DE LA XXXII^{ème} PROMOTION

*****

Dimanche 15 juillet 2012

*****

Epreuve de Méthodes Quantitatives

Durée : 1h 30

Nombre de pages :02

Exercice 1 : **(5 points : 1 point par question)**

On considère deux variables X et Y indépendantes pouvant prendre chacune les valeurs $1, 2,$ et 3 avec la même probabilité $P[X = x] = P[Y = y] = \frac{1}{3}$ pour tout $x = 1,$ 2,et 3 et $y = 1, 2,$ et 3

1. Calculer les trois probabilités $P[X > Y]; P[X < Y]; P[X = Y]$.
2. On pose $U = Max(X, Y)$ qui désigne la valeur maximale de X et de Y

   i- Déterminer les valeurs de la variable U

   ii- Déterminer la loi de probabilité de U

   iii- Calculer $E(U)$ l'espérance mathématique de U

   iv- Déterminer la loi conditionnelle de U sachant $X = x$

Exercice 2 : (5 points:1 point par question)

On considère $X_1, X_2,...,X_n$ les prix de n biens ayant la même espérance mathématique: $E(X_1) =.E(X_2) =\ldots= E(X_n) = m$ avec $m > 0$ et la même variance : $V(X_1) = V(X_2) =\ldots.= V(X_n) = 1$ et ayant une covariance constante $Cov(X_i, X_j) = c$ pour tout i et j tels que $i \neq j$. On pose $\overline{X} = \frac{1}{n}[X_1 + X_2 +\ldots+X_n]$

1- Calculer l'espérance mathématique de $\overline{X}$

2-i- Pour $n = 3$, Déterminer la variance de $\overline{X}$ en fonction de c

-ii- Pour n quelconque, déterminer la variance de $\overline{X}$ en fonction de n et de c

3- Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre X_i et X_j pour $i \neq j$.

4- En déduire l'ensemble des valeurs possibles de la variance de $\overline{X}$.

Exercice 3 : (10 points: 1 point par question)

Le niveau des exportations à la période t, noté y_t, évolue en fonction du prix unitaire x_t selon la relation suivante :

$$y_t = a\, x_t + b\, t + c + u_t \qquad \text{pour } t = 1, 2, \ldots, T$$

avec u_t des termes d'erreur indépendants suivant la loi normale tels que $E(u_t) = 0; \quad Var(u_t) = \sigma^2$

Question 1 :

On suppose dans cette question que $b = 0$

Sachant que $T = 11, \quad \overline{y} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{t=T} y_t = 13.45 \qquad \overline{x} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{t=T} x_t = 6$

et $\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{t=T}(y_t - \overline{y})^2 = 37.15 \qquad \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{t=T}(x_t - \overline{x})^2 = 10;$

et $\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{t=T}(x_t - \overline{x})(y_t - \overline{y}) = -18.90$

i- Quelles sont les expressions et les valeurs des estimations de a et c par la méthode des moindres carrés ordinaires ?

ii- Quelles sont les interprétations économiques des résultats obtenus ?

iii-Prouver que la somme des carrés des résidus est approximativement égale à 15.6

iv- En déduire la valeur du coefficient de détermination R^2. Interpréter

v-Quelle est l'estimation sans biais de σ^2 ? justifier votre réponse

vi- Tester au niveau de 95 % la significativité de la variable x_t

On rappelle que pour une loi normale centrée réduite $N(0,1)$

Probabilité $[-2 \leq N(0,1) \leq 2] = 0.95$

Question 2 :

On suppose dans cette question que seul le coefficient a est nul : $a = 0$ et que $\sigma^2 = 1$

vii- Calculer pour T entier positif quelconque la valeur de $\sum_{t=1}^{t=T}(t - \overline{t})^2$ où $\overline{t} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{t=T} t$

Indication: On rappelle que $\sum_{t=1}^{t=T} t = \frac{T(T+1)}{2}$; $\sum_{t=1}^{t=T} t^2 = \frac{T(T+1)(2T+1)}{6}$

viii-Calculer la variance de l'estimation de b obtenue par les moindres carrés ordinaires

Question 3:

Dans cette question, on suppose que les deux coefficients a et b sont différents de zéro avec $\sigma^2 = 1$.

ix- Prouver que $\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$ est relié à $\Delta x_t = x_t - x_{t-1}$ avec un terme d'erreur ε_t dont il faut calculer l'espérance, la variance et les covariances

x- Expliquer comment on peut estimer d'une manière optimale les deux paramètres a et b