

Institut de Financement du Développement du Maghreb
Concours de recrutement de la 39^{ème} Promotion Assurance

Techniques Quantitatives
Juin 2022 Durée : 1 h 30

Remarques:: aucun document n'est autorisé
Le sujet comporte 2 pages .

Exercice 1: (4 points: 2 +2)

On note σ_X et σ_Y les écarts types respectivement de deux variables non indépendantes X et Y

1- Comparer σ_{X+Y} à $\sigma_X + \sigma_Y$ Interpréter ce résultat en termes d'additivité du risque

2- Vérifier vos calculs sur l'exemple suivant : X et Y constituent un vecteur ayant pour matrice de variances- covariances :

$$\begin{bmatrix} 16 & -10 \\ -10 & 25 \end{bmatrix}$$

Exercice 2: (8 points : 2+2+2+2)

Le nombre X d'accidents commis par un client d'une compagnie d'assurance durant une période donnée suit une loi de Poisson de paramètre λ avec $\lambda > 0$

On rappelle que $P[X = x] = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$

1- Calculer $E(X)$ et $E(X^2)$

2- Déterminer en fonction de λ la valeur du paramètre $\theta = P[X \leq 1]$ En déduire un estimateur de θ en fonction d'un échantillon d'observations X_1, X_2, \dots, X_n indépendantes et de même loi que X

3- En admettant que n est élevé, expliquer sans faire de calcul comment on peut déterminer un intervalle de confiance à un niveau $(1 - \alpha)\%$ du paramètre λ où α est un scalaire strictement compris entre 0 et 1

4-La compagnie d'assurance a fixé pour chacun de ses clients le nombre de remboursement Y à m inférieur ou égal à 2

Déterminer la distribution de Y ainsi que son espérance mathématique. Conclure

Exercice 3 (8 points : 1.5+1.5+1.5+1.5+2)

Considérons un modèle, appelé le vrai modèle (VM) ayant $K = 2$ variables explicatives centrées sans constante :

$$y_i = a_1 x_{1i} + a_2 x_{2i} + u_i.$$

avec u_i des termes d'erreur ayant les propriétés classiques indépendantes d'espérances nulles et de variances σ^2 pour $i = 1, 2, \dots, n..$

L'erreur de l'analyste (l'économetre) a conduit à omettre (oublier) la variable x_2 du vrai modèle, ce qui donne un modèle erroné, appelé le faux modèle (FM) défini par :

$$y_i = \alpha x_{1i} + v_i.$$

- 1-Déterminer $\hat{\alpha}$ l'estimation par les MCO dans le faux modèle
 - 2- Calculer l'espérance mathématique de $\hat{\alpha}$ dans le vrai modèle
 - 3 En déduire que cette estimation est biaisé. Dans quel cas ce biais est-il-nul ?
Interpréter ce résultat.
 - 4- Calculer la variance du coefficient de la variable x_1 , dans le faux modèle.
 - 5 Comparer cette variance alors à la vraie valeur de la variance du coefficient de x_1 dans le modèle à deux variables.
-