Variable aléatoire continue

$\mathcal{A}-1$ • Définiton :

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ *un espace probabilisé. On appelle variable aléatoire continue sur* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ *toute application* $X : \begin{matrix} \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega \longmapsto X(\omega) \end{matrix}$ *, vérifiant les deux conditions suivants :*

a • *L'ensemble des images* $X(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$ *est un intervalle de* $\mathbb{R}$, *(on peut avoir* $X(\Omega) = \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty] = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\})$

b • $\forall x \in \mathbb{R}, P_X(\{x\}) = 0$

Remarque : $P_X(\{x\}) = 0$, *par contre* $P_X(x \in [x, x + dx[) \neq 0$

$\mathcal{A}-2$ • Fonction densité de probabilité :

a • **Définition 1 :** *Soit X une variable aléatoire continue sur* $X(\Omega) \subseteq \overline{\mathbb{R}}$.

Une fonction $f_X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est appelée densité de probabilité si elle est positive en tout point* $t \in \mathbb{R}$ *où elle est définie ,* $(f_X(t) \geq 0)$, *intégrable sur* $\mathbb{R}$ *et si* $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)dt = 1$

b • **Définition 2 :** *La variable aléatoire réelle X suit la loi de densité* f_X *si :*

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \; ; \; \forall b > a \, , P_X(x \in]a, b]) = \int_a^b f_X(t)dt$$

Remarque : *Deux variables aléatoires peuvent avoir même densité de probabilité sans être égales.*

$\mathcal{A}-3$ • Fonction de répartition :

On appelle fonction de répartition de la variable aléatoire X , la fonction F_X *définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \, , F_X(x) = P_X(]-\infty, x]) = P_X(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$$

☑ *La fonction de répartition d'une variable aléatoire continue X est croissante sur* $\mathbb{R}$, *continue, continuement dérivable sauf peut être en un nombre fini de points et on a en tout point x où* F_X *est continue :* $F'_X(x) = f_X(x)$.

☞ $F_X(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ *et* $F_X(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.

☞ *Elle caractérise la loi de X, autrement dit :* $F_X = F_Y$ *si et seulement si les variables aléatoires X et Y ont même loi*

$\mathcal{A}-4$ • Propriétés de la fonction de répartition :

a • $0 \le F_X(x) \le 1$ $\quad$ b • $P_X(X \le x) = P_X(X < x) = P_X(]-\infty, x]) = F_X(x)$

c • $P_X(X > x) = P_X(]x, +\infty[) = 1 - P_X(X \le x) = 1 - F_X(x)$

d • $P(X \in]x_1, x_2]) = P(X \in [x_1, x_2]) = P(X \in [x_1, x_2[) = P(X \in]x_1, x_2[) = F_X(x_2) - F_X(x_1)$

$$= \int_{x_1}^{x_2} f_X(t)dt$$

$\mathcal{A}-5$ • Les caractéristiques de tendance centrale :

On appelle quantile ou fractile d'ordre α, $(0 \le \alpha \le 1)$ *d'une variable aléatoire X dont la fonction de répartition est* $F_X(x)$, *la valeur* x_α *telle que* $F_X(x_\alpha) = P_X(X \le x_\alpha) = \int_{-\infty}^{x_\alpha} f_X(t)dt = \alpha$

x_α *s'appelle quantile ou fractile d'ordre* α

a • **La médiane** : *La médiane est le quantile d'ordre* $\alpha = 1/2$ *elle sera notée* $M_e(X)$

b • **Les quartiles** : *Les quartiles, notés* $Q_i(X)$ *(respectivement* $i = 1, 2, 3$*) correspondent aux quantiles d'ordre* $(\alpha = 25\%, 50\%, 75\%)$. *Notons que* $Q_2(X) = M_e(X)$

L'intervalle inter-quartile est l'intervalle $[Q_1, Q_3]$. *De même, on a* $P_X(X \in [Q_1, Q_3]) = 0,5$

c • **Les déciles** : *Le k-ième décile* $(k = 1, 2, \dots, 9)$ *est le quartile d'ordre* $k/10$

d • **Les centiles** : *Le k-ième centile* $(k = 1, 2, \dots, 99)$ *est le quartile d'ordre* $k/100$

e • **Le mode** : M_o *est la valeur de X qui maximise* $f_X(t)$

$\mathcal{A}-6$ • Espérance mathématique :

Soit X une variable aléatoire continue vérifiant : $xf_X(x)$ *intégrable sur* $X(\Omega)$ *et tel que :* $\int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)dx$ *converge. On appelle espérance mathématique de X (ou moyenne ou premier moment non centré) le réel* $E(X)$ *défini par :* $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)dx$

$\mathcal{A}-7$ • Espérance d'une fonction d'une v.a. :

Soient X une v.a. continue et φ *une fonction numérique continue sur un intervalle contient* $X(\Omega)$. *Si* $E[\varphi(X)]$ *existe, alors :* $E[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f_X(x)dx$

Remarques : *Si X et Y ont même loi, il est clair que* $E(X) = E(Y)$. *La réciproque est fausse.*

A-8 • Propriétés de l'espérance mathématique :

a • $E(aX+b)=aE(X)+b$, en particulier $E(aX)=aE(X)$, où a et b deux constantes

b • $E(c)=c$, où c est une constante. En particulier $E[E(X)]=E(X)$, puisque $E(X)$ n'est pas une variable aléatoire

c • Pour toutes variables aléatoires X et Y ayant chacune une espérance, on a :
$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$ et $E(X-Y)=E(X)-E(Y)$

☑ Généralisation : Pour toute suite de v.a. $(X_i)_{i=1,2,\dots,n}$ ayant chacune une espérance, on a : $E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)=\sum_{i=1}^{n} E(X_i)$

d • Positivité de l'espérance :

☞ Si $E(X)$ existe et si $X\geq 0$, alors $E(X)\geq 0$

☞ Si X et Y ont une espérance et si $X\leq Y$, alors $E(X)\leq E(Y)$

e • Inégalité de Jensen : Soit φ une fonction convexe de $\mathbb{R}$ vers lui même et X une v.a. telle que $E[\varphi(X)]$ existe. On a alors : $\varphi[E(X)]\leq E[\varphi(X)]$

☞ Rappel : Une fonction φ de $\mathbb{R}$ vers lui même est dite convexe si, pour tout couple (x,y) de $\mathbb{R}^2$ et pour tout $\lambda\in[0,1]$, on a : $\varphi[\lambda x+(1-\lambda)y]\leq\lambda\varphi(x)+(1-\lambda)\varphi(y)$
Notons, en particulier, qu'une fonction φ deux fois dérivables dont la dérivée seconde est positive $(\varphi''(x)\geq 0)$ est une fonction convexe.

f • Si $E(X)$ existe, alors $|E(X)|\leq E(|X|)<+\infty$

g • Pour toute suite de v.a. $(X_i)_{i=1,2,\dots,n}$ identiques ayant chacune une espérance égale à m, on a : $E(X_1)=E(X_2)=\cdots=E(X_n)=m$

A-9 • Variance :

Soit X une v.a. ayant un moment non centré d'ordre 2 $\left(E(X^2)\right)$.

On appelle respectivement variance de X et écart type de X les quantités :

$$Var(X)=E\left[\left(X-E(X)\right)^2\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x-E(X)\right)^2 f_X(x)dx \quad ,\sigma(X)=\sqrt{Var(X)}$$

La variance ou le deuxième moment centré de X est la quantité qui nous permet de mesurer la dispersion autour de la moyenne $E(X)$

A-10 • Propriétés de la variance :

a • $\forall\, a\in\mathbb{R}, \forall\, b\in\mathbb{R}, Var(aX+b)=a^2Var(X)$ b • $Var(c)=0$ où c est une constante.

$En\ particulier : Var(X) = 0 \Leftrightarrow X = E(X)\ (p.s.) \Leftrightarrow X\ est\ presque\ sûrement\ constante.$

c • Formule de Koenig : $Var(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)dx - \left(E(X)\right)^2$

d • $Var(X) \geq 0$ **e •** $Var(-X) = Var(X)$ **f •** $Var(X) = E\left[\left(X - E(X)\right)^2\right] = \inf_{a\in\mathbb{R}} E[(X-a)^2]$

g • Terminologie particulière : Soit X une v.a. Les v.a. $X^c = X - E(X)$ et $X^* = \dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$

sont respectivement appelées v.a. centrée et v.a. centrée réduite associées à X.

On a : $\begin{cases} E(X^c) = 0 \\ Var(X^c) = Var(X) = \sigma^2 \end{cases}$ et $\begin{cases} E(X^*) = 0 \\ Var(X^*) = 1 \end{cases}$

h • Pour toute suite de v.a. $(X_i)_{i=1,2,\ldots,n}$ identiques ayant chacune une variance égale à σ^2, on a : $Var(X_1) = Var(X_2) = \cdots = Var(X_n) = \sigma^2$

A– 11 • Les moments non-centrés d'ordre r :

Soit $r \in \mathbb{N}^*$. On appelle moment-centrés d'ordre r de la v.a. X, la quantité :

$m_r = E(X^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f_X(x)dx$, lorsqu'elle est convergente

☑ Si X possède un moment d'ordre r, alors elle possède aussi des moments de tout ordre $n \leq r$

☑ Si $r = 0 \Rightarrow m_0 = 1$ ☑ Si $r = 1 \Rightarrow m_1 = E(X)$ ☑ Si $r = 2 \Rightarrow m_2 = E(X^2)$

☑ $\forall\, r \in \mathbb{N}^*, \forall\, (\theta, \lambda) \in \mathbb{R}^2$:

$m_r(\theta X + \lambda) = E((\theta X + \lambda)^r) = \sum_{i=0}^{r} C_r^i \theta^{r-i} \lambda^i m_{r-i}(X) = \sum_{i=0}^{r} C_r^i \theta^i \lambda^{r-i} m_i(X)$, en particulier :

$m_1(\theta X + \lambda) = E(\theta X + \lambda) = \theta E(X) + \lambda = \theta m_1(X) + \lambda$

A– 12 • Les moments centrés d'ordre r :

Soit $r \in \mathbb{N}^*$. On appelle moment centré d'ordre r de la v.a. X, la quantité

$\mu_r = E\left[\left(X - E(X)\right)^r\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - E(X)\right)^r f_X(x)dx$, lorsqu'elle est convergente

☑ Si $r = 0 \Rightarrow \mu_0 = 1$ ☑ Si $r = 1 \Rightarrow \mu_1 = 0$

☑ Si $r = 2 \Rightarrow \mu_2 = E\left[\left(X - E(X)\right)^2\right] = Var(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 \Rightarrow \mu_2 = m_2 - m_1^2$

☑ $\forall\, r \in \mathbb{N}^*, \forall\, (\theta, \lambda) \in \mathbb{R}^2 : \mu_r(\theta X + \lambda) = \theta^r \mu_r(X)$

☑ Pour une loi symétrique : $\mu_{2k+1} = 0, \forall k \geq 0$

$\mathcal{A}$– 13 • *Relations entre moments non-centrés et moments centrés :*

a • Moments centrés en fonction des moments non-centrés :

$$\mu_r = \sum_{i=0}^{r} C_r^i m_{r-i}(-m_1)^i = \sum_{i=0}^{r} C_r^i m_i(-m_1)^{r-i} \quad \text{, en particulier :}$$

☞ *Pour* $r = 2$: $\mu_2 = m_2 - m_1^2$ *ou encore*, $Var(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$

☞ *Pour* $r = 3$: $\mu_3 = m_3 - 3m_2m_1 + 2m_1^3$ ☞ *Pour* $r = 4$: $\mu_4 = m_4 - 4m_3m_1 + 6m_2m_1^2 - 3m_1^4$

☞ *Pour* $r = 5$: $\mu_5 = m_5 - 5m_4m_1 + 10m_3m_1^2 - 10m_2m_1^3 + 4m_1^5$

b • Moments non-centrés en fonction des moments centrés :

$$m_r = \sum_{i=0}^{r} C_r^i \mu_{r-i}\mu^i = \sum_{i=0}^{r} C_r^i \mu_i \mu^{r-i} \quad \text{, en particulier :}$$

☞ *Pour* $r = 2$: $m_2 = \mu_2 + \mu_1^2$ *ou encore*, $E(X^2) = Var(X) + \left(E(X)\right)^2$

☞ *Pour* $r = 3$: $m_3 = \mu_3 + 3\mu_2\mu_1 + \mu_1^3$ ☞ *Pour* $r = 4$: $m_4 = \mu_4 + 4\mu_3\mu_1 + 6\mu_2\mu_1^2 + \mu_1^4$

☞ *Pour* $r = 5$: $m_5 = \mu_5 + 5\mu_4\mu_1 + 10\mu_3\mu_1^2 + 10\mu_2\mu_1^3 + \mu_1^5$

$\mathcal{A}$– 14 • *Le coefficient d'asymétrie:*

Le coefficient d'asymétrie γ_1 *est définie par rapport à l'espérance mathématique :*

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{E\left[\left(X - E(X)\right)^3\right]}{\left[E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right)\right]^{\frac{3}{2}}}$$

. C'est une valeur sans dimension qui n'est pas affecté par un changement d'origine et d'échelle. Selon la valeur du coefficient d'asymétrie, la fonction de densitépour les v.a. continues, prend une forme différente : étalée à droite $(\gamma_1 > 0)$, *symétrique* $(\gamma_1 = 0)$ *ou étalée à gauche* $(\gamma_1 < 0)$

$\mathcal{A}$– 15 • *Le coefficient d'aplatissement (kurtosis):*

Le coefficient d'aplatissement vise à situer la hauteur de la courbe de densité d'une loi par rapport à la référencequ'est la loi normale (Loi de Laplace-Gauss).

Noté γ_2, *sa formule est la suivante :* $\gamma_2 = \dfrac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \dfrac{E\left[\left(X - E(X)\right)^4\right]}{\left[E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right)\right]^2} - 3$

C'est un coefficient sans dimension, invariant par changement d'échelle et de dimension. La constante 3 a été choisie de manière à ce que le coefficient d'aplatissement de la loi normale soit égale à $\gamma_2 = 0$ *Selon la valeur du coefficient d'aplatissement, la fonction de densité pour les v.a. continues, prend une forme* *différente :*

☞ $\gamma_2 > 0$ *On parle de distribution leptokurtique (ou leptocurtique). Les échantillons ayant des queues plus épaisses que la normale aux extrémités, impliquant des valeurs anormales plus fréquentes*

☞ $\gamma_2 = 0$: *On parle de distribution mésokurtique (ou mésocurtique). La loi normale est un cas particulier de distribution mésokurtique pour laquelle le coefficient de dissymétrie* $\gamma_1 = 0$

☞ $\gamma_2 < 0$ *On parle de distribution platykurtique (ou platycurtique).*

Pour une même variance, la distribution est relativement « aplatie », son centre et ses queues étant appauvries au profit des flancs.

$\mathcal{A}-16$ • Fonction génératrice des moments (ou transformée de Laplace) :

Soit X une v.a. définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$. *Soit I un intervalle contenant* 0 , *pour tout réel* $t \in I$, *on appelle fonction génératrice des moments de X correspondant à t :* $M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x)dx$, *lorsqu'elle est convergente*

Elle génère les moments non-centrés : $M_X(0) = 1$, $M'_X(0) = E(X)$, $M''_X(0) = E(X^2)$ ...

$M_X^{(r)}(0) = E(X^r) = m_r$

$\mathcal{A}-17$ • Propriétés de la fonction génératrice des moments :

a • *La fonction génératrice des moments d'une v.a. caractérise la loi de cette variable aléatoire. Autrement dit :* $\left(M_X(t) = M_Y(t)\right) \Leftrightarrow$ *(X et Y ont la même loi)*

b • $M_{aX+b}(t) = e^{bt} M_X(at)$

$\mathcal{A}-18$ • Changement de variables :

Soient I et J deux ouverts de $\mathbb{R}$ *et X une v.a. continue à valeurs dans I et de densité* f_X .
Soit φ *une bijection de I dans* $J = Im(\varphi)$, *dérivable et inversible . Alors , la v.a.* $Y = \varphi(X)$ *continue sur J a pour densité :* $f_Y(y) = \left|(\varphi^{-1})'(y)\right| \left[f_X\left(\varphi^{-1}(y)\right)\right]$, $\forall y \in J$

Lois continues usuelles

$\mathcal{B}-1$ • Loi Uniforme Continue (ou sur un intervalla $[a,b]$) $\mathcal{U}_{[a,b]}$:

On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur le segment $[a,b]$ *et on note* $X \rightsquigarrow \mathcal{U}_{[a,b]}$, $(-\infty < a < b < +\infty)$ *si elle a une densité de probabilité sur cet intervalle et* *nulle ailleurs. On a :*

☑ **Fonction densité de probabilité :** $f_X(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, si\ t \in [a,b] \\ 0, si\ non \end{cases}$

☑ **Fonction de répartition :** $F_X(x) = \begin{cases} 0, si\ x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, si\ x \in [a,b[\\ 1, si\ x \geq b \end{cases}$

☑ **Espérance mathématique :** $E(X) = \dfrac{b+a}{2}$ ☑ **Variance :** $Var(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

☑ **Médiane :** $M_e(X) = \dfrac{b+a}{2}$ ☑ **Coefficient d'asymétrie :** $\gamma_1 = 0$

☑ **Coefficient d'aplatissement (kurtosis normalisé) :** $\gamma_2 = -\dfrac{6}{5}$

☑ **Fonction génératrice des moments :** $M_X(t) = \dfrac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}$

☑ **Remarques :**

☞ *Si* $X \rightsquigarrow \mathcal{U}_{[a,b]}$ *, alors pour tout intervalle* I *de* $\mathbb{R}$ *,* $P(X \in I) = \dfrac{\ell([a,b] \cap I)}{\ell([a,b])}$ *, où* $\ell(J)$ *désigne la longueur de l'intervalle* J*. En particulier* $P(X \in [a,b]) = 1$

☞ *Si X est une variable aléatoire réelle de fonction de répartition continue et strictement croissante F et si* $U \rightsquigarrow \mathcal{U}_{[0,1]}$ *, alors la variable* $Y = F^{-1}(U)$ *a même loi que X*

☞ *Si* $X \rightsquigarrow \mathcal{U}_{[a,b]}$ *, alors* $Y = \dfrac{X-a}{b-a} \rightsquigarrow \mathcal{U}_{[0,1]}$

$\mathcal{B}$– 2 • Loi Exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$:

Soit λ *un réel strictement positif. Une v.a. X à valeurs dans* $\mathbb{R}_+$ *est dite de loi exponentielle de paramètre* $\lambda > 0$ *, si elle admet une :*

☑ **Fonction densité de probabilité :** $f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, si\ x \in [0,+\infty[\\ 0, si\ non \end{cases}$

☑ **Fonction de répartition :** $F_X(x) = \begin{cases} 0, si\ x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, si\ x \geq 0 \end{cases}$

☑ **Espérance mathématique :** $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$ ☑ **Variance :** $Var(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$

☑ **Coefficient d'asymétrie :** $\gamma_1 = 2$

☑ **Coefficient d'aplatissement (kurtosis) :** $\gamma_2 = 6$

☑ ***Fonction génératrice des moments*** : $M_X(t) = \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-1}$

☑ ***Remarques*** :

☞ *Il est plus commode d'utiliser la fonction de survie* :

$$G_X(x) = P(X > x) = 1 - F_X(x) = \begin{cases} 1\ , si\ x \le 0 \\ e^{-\lambda x}\ , si\ x > 0 \end{cases}$$

☞ $Si\ X \rightsquigarrow \mathcal{E}(1) \Rightarrow \forall \lambda > 0\ , \frac{X}{\lambda} \rightsquigarrow \mathcal{E}(\lambda)$

☞ $Si\ X \rightsquigarrow \mathcal{E}(1) et\ Si\ Y = \lceil \theta X \rceil, \theta > 0 \Rightarrow Y \rightsquigarrow \mathcal{G}\left(1 - e^{-\frac{1}{\theta}}\right)$, *oi géométrique de paramètre* $\left(1 - e^{-\frac{1}{\theta}}\right)$, $\lceil u \rceil$ *étant la partie entière supérieure de u , définie par* : $\lceil u \rceil = \min\{k \in \mathbb{Z}/k \ge u\}$

☑ ***Utilisation*** : *Les lois exponentielles sont souvent utilisées pour modéliser des temps d'attente. Cette loi est très utilisée en étude de fiabilité.*

☑ ***Propriétés d'absence de mémoire*** :

① *Si la v.a.* $X \rightsquigarrow \mathcal{E}(\lambda)$, *alors elle vérifie la propriété d'absence de mémoire* : *pour tout* $t, s \ge 0$

$$P(X > s + t | X > t) = P(X > s) = G_X(s + t)/G_X(t) = G_X(s)$$

② *Réciproquement si une v.a. X vérifie* ① , *alors* $X \rightsquigarrow \mathcal{E}(\lambda)$

$\mathcal{B}$– 3 • Loi de Laplace– Gauss ou Loi Normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$:

On dit qu'une v.a. X suit une loi normale ou de Laplace– Gauss de paramètres $m \in \mathbb{R}$ *et* $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$ *et on note* $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ *si elle admet* :

☑ ***Fonction densité de probabilité*** : $\forall x \in \mathbb{R}\ , f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]$

On dit aussi que X est une v.a. normale ou gaussienne.

☑ ***Espérance mathématique*** : $E(X) = m$ ☑ ***Variance*** : $Var(X) = \sigma^2$

☑ ***Coefficient d'asymétrie*** : $\gamma_1 = 0$

☑ ***Coefficient d'aplatissement (kurtosis)*** : $\gamma_2 = 0$

☑ ***Fonction génératrice des moments*** : $M_X(t) = \exp\left(mt + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$

☑ ***Propriétés*** :

a • $Si\ X \rightsquigarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, *pour* $a \in \mathbb{R}^*$ *et* $b \in \mathbb{R}$, *on a* : $(aX + b) \rightsquigarrow \mathcal{N}\left((am + b), (a^2\sigma^2)\right)$

b • *Si* $X_1, X_2, \dots, X_n$ *n v.a. indépendantes tels que* $\forall i = 1, 2, \dots, n\ ;\ X_i \rightsquigarrow \mathcal{N}(m_i, \sigma_i^2)$

$$alors\ ,\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \backsim \mathcal{N}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\,,\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2\right)\ \ et\ b+\left(\sum_{i=1}^{n} a_iX_i\right) \backsim \mathcal{N}\left(\left[b+\sum_{i=1}^{n} a_im_i\right],\left[\sum_{i=1}^{n} a_i^2\sigma_i^2\right]\right)$$

où $a_i \in \mathbb{R}^*\ \forall i = 1,2,\dots,n$ et $b \in \mathbb{R}$

c • Si $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est une suite i.i.d de v.a. de $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, alors :

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \backsim \mathcal{N}\left(m,\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$$

d • $\begin{cases} P(m-\sigma \le Y \le m+\sigma) = 68,26\% \\ P(m-2\sigma \le Y \le m+2\sigma) = 95,44\% \\ P(m-3\sigma \le Y \le m+3\sigma) = 99,73\% \end{cases}$

e • La loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ converge vers la loi de Dirac au point m (δ_m) lorsque $\sigma \to 0$

☑ **Approximation d'une loi Binomiale et de la loi de Poisson par une loi Normale**:

① Soit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ de moyenne $m = np$ et d'écart-type $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$

On peut approximer $\mathcal{B}(n,p)$ par la loi $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ dès que : $\begin{cases} n > 30 \\ np > 5 \text{ et } np(1-p) > 5 \end{cases}$

② Soit une loi de poisson $\mathcal{P}(\lambda)$e moyenne $m = \lambda$ et d'écart-type $\sigma = \sqrt{\lambda}$

On peut approximer $\mathcal{P}(\lambda)$ par la loi $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ dès que : $\lambda > 15$

☑ **Utilisation** : Une v.a. X suit la loi normale (Loi gaussienne, Loi de Laplace-Gauss), lorsqu'elle est forméeà partir d'un grand nombre de facteurs s'additionnant les uns aux autres, aucune ne jouant un rôle prédominant, et agissant de manière indépendante.

Considérée pendant longtemps comme la loi universelle, ses caractéristiques se retrouvant dans de nombreux domaines, dans les sciences dures mais également dans les sciences humaines et sociales (ex. fluctuations économiques), elle a été depuis recadrée.

Néanmoins, la loi normale garde une place particulière de par sa simplicité.

Elle est à la base de nombreux résultats dans la statistique paramétrique, en théorie de l'estimation et théorie des tests.

Dans la régression linéaire multiple, les lois utilisées pour l'évaluation globale de la régression et l'évaluation individuelle des coefficients reposent sur la normalité des résidus.

B– 4 • Loi Normale centrée réduite ou Loi Normale standard $\mathcal{N}(0,1)$:

Si $X \leadsto \mathcal{N}(m,\sigma^2)$ *, alors* $Y = \dfrac{X-m}{\sigma} \leadsto \mathcal{N}(0,1)$

☑ *Fonction densité de probabilité :* $\forall y \in \mathbb{R}, f_Y(y) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$

☑ *Espérance mathématique :* $E(Y) = 0$ ☑ *Variance :* $Var(Y) = 1$

☑ *Médiane :* $M_e(Y) = 0$ ☑ *Fonction génératrice des moments :* $M_Y(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$

☑ *Propriétés de la Fonction de répartition :* $F_Y(y) = \Phi_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$

a • $\Phi(y) = P(Y \le y) = P(Y \ge -y) = 1 - P(Y \le -y) = 1 - \Phi(-y)$

b • *Pour* $y \ge 4$, $\Phi(y) \cong 1$ *et* $\Phi(-y) \cong 0$ *c* • $P(|Y| \le y) = 2\Phi(y) - 1$

B– 5 • Loi Log–normale $\mathcal{LN}(m,\sigma^2)$:

On dit que $X \leadsto \mathcal{LN}(m,\sigma^2)$ *, si* $Y = \ln X \leadsto \mathcal{N}(m,\sigma^2)$ *. C'est une loi définie sur* $[0,+\infty]$.

☑ *Fonction densité de probabilité :* $f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma x\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{[\ln(x)-m]^2}{2\sigma^2}\right), \text{si } x > 0 \\ 0 \text{ , si non} \end{cases}$

☑ *Fonction de répartition :* $\forall x > 0, F_X(x) = F_Y(\ln x)$

☑ *Espérance mathématique :* $E(X) = E(e^Y) = e^{\left(m+\frac{\sigma^2}{2}\right)}$

☑ *Variance :* $Var(X) = Var(e^Y) = \left(1 - e^{-\sigma^2}\right)\left(e^{2(m+\sigma^2)}\right)$

☑ *Utilisation : On rencontre fréquemment cette loi dans la distribution des salaires ou des revenus. Un grand nombre de personnes disposent d'un salaire modeste (proche du SMIC par exemple), et à mesure que la valeur s'élève, la proportion des personnes concernées diminue rapidement. La médiane est très inférieure à la moyenne pour ce type de loi.*

B– 6 • Lois de Cauchy (ou Loi de Lorentz) $\mathcal{C}(0,a)$:

Une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}$ *est dite de la loi de Cauchy* $\mathcal{C}(0,a)$, $a > 0$ *, si elle admet :*

☑ *Fonction densité de probabilité :* $\forall x \in \mathbb{R}, f_X(x) = \dfrac{a/\pi}{a^2 + x^2}$

☑ *Fonction de répartition :* $F_X(x) = \dfrac{1}{\pi} \arctan\left(\dfrac{x}{a}\right) + \dfrac{1}{2}$

☑ *Espérance mathématique :* $E(X)$ *n'est pas définie*

☑ *Variance :* $Var(X)$ *n'est pas définie*

☑ **Fonction génératrice des moments :** $M_X(t)$ *n'est pas définie*

☑ **Remarques :** *Il arrive parfois qu'on considère des lois de Cauchy centrées en* $x_0 \neq 0$, $\mathcal{C}(x_0\,,a)$. *Dans ce cas , la densité de probabilité est donnée par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}\,, f_X(x) = \frac{a/\pi}{a^2 + (x - x_0)^2}$$

B– 7 • Loi de Pareto $\mathfrak{P}(c\,,\alpha)$:

La loi de Pareto s'applique pour les distributions tronquées.

Prenons un exemple de la vie courante, la borne basse du salaire horaire est forcément le SMIC, il ne peut pas en être autrement.

La loi de Pareto permet de tenir compte de cette contrainte en restreignant le domaine de définition de la v. a. X

La loi possède 2 paramètres, $\alpha > 0$ *et c qui introduit la contrainte* $x > c$. *Le domaine de définition de X est* $]c, +\infty[$

☑ **Fonction densité de probabilité :** $\forall x \in \,]c, +\infty[\,, f_X(x) = \frac{\alpha}{c}\left(\frac{c}{x}\right)^{\alpha+1}$

☑ **Fonction de répartition :** $F_X(x) = \begin{cases} 0\,, si\ x < c \\ 1 - (c/x)^{\alpha}\,, si\ x \geq c \end{cases}$

☑ **Espérance mathématique :** $E(X) = \left(\frac{\alpha}{\alpha - 1}\right)c$, *pour* $\alpha > 1$

et $E(X^r) = \left(\frac{\alpha}{\alpha - r}\right)c^r$, *pour* $\alpha > r$

☑ **Variance :** $Var(X) = \left(\frac{\alpha}{(\alpha - 1)^2(\alpha - 2)}\right)c^2$, *pour* $\alpha > 2$

☑ **Fonction génératrice des moments :** $M_X(t)$ *n'est pas définie pour* $t > 0$

☑ **Propriétés d'une loi à queue longue (ou longue traîne) :** *La distribution de Pareto est à queue longue :* $\lim_{x\to+\infty} P(X > x + y | X > x) = 1$, *pour* $y > 0$

Par exemple, si X est le temps de vie d'un composant, plus il a vécu $(X > x)$ *plus il a de chances de vivre longtemps : le système rajeunit.*

On peut pallier l'inconvénient « longue queue » dans d'autres applications des distributions de Pareto telles que la distribution par taille des entreprises exprimée en nombre d'employés ou en chiffre d'affaires ou d'autres entités mesurables par taille dont la limite théorique est infinie en utilisant une échelle log- log après transformations appropriées des données analysées. Le phénomène longue queue

est causé par une variable pouvant atteindre des valeurs très grandes, valeurs pour lesquelles le nombre d'observations devient très petit ; en revanche le nombre d'observations pour les petites valeurs de la taille analysée sont souvent très élevées. Dans ce cas, on a le phénomène symétrique de la longue queue :

le long pic initial. Dans le cas de distributions de Pareto, le passage en coordonnées log-log transforme en ligne droite la courbe dont la forme originale est une hyperbole très étirée en abscisse (longue queue ou heavytailed) et ordonnée (hautes valeurs à la base)...

$\mathcal{B}-8$ • Loi de Laplace de paramètre $\lambda > 0, \mathcal{L}(\lambda)$:

☑ **Fonction densité de probabilité :** $\forall x \in \mathbb{R}, f_X(x) = \dfrac{1}{2\lambda} e^{-\frac{|x|}{\lambda}}$

☑ **Fonction de répartition :** $F_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} e^{\frac{x}{\lambda}}, si\ x < 0 \\ 1 - \dfrac{1}{2} e^{-\frac{x}{\lambda}}, si\ x \geq 0 \end{cases}$

☑ **Espérance mathématique :** $E(X) = 0$ ☑ **Variance :** $Var(X) = 2\lambda^2$

☑ **Fonction génératrice des moments :** $M_X(t) = \dfrac{1}{1 - \lambda^2 t^2}$

$\mathcal{B}-9$ • Loi de Gumbel de paramètres $\mu \in \mathbb{R}$ et $\beta > 0, \mathfrak{G}(\mu, \beta)$:

La loi de Gumbel est utilisée pour modéliser les valeurs extrêmes.

Par exemple, pour définir de manière adéquate la puissance d'un serveur, on s'intéresse au nombre maximal d'accès simultanés à un site web dans une journée, observé sur plusieurs jours.

☑ **Fonction densité de probabilité :** $\forall x \in \mathbb{R}, f_X(x) = z e^{-\frac{z}{\beta}}$ où $z = e^{-\left(\frac{x-\mu}{\beta}\right)}$

☑ **Fonction de répartition :** $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \exp\left(-e^{-\left(\frac{x-\mu}{\beta}\right)}\right)$

☑ **Espérance mathématique :** $E(X) = \mu + \beta\gamma$ où γ est la constante d'Euler

$$\gamma = \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right] \cong 0,577\,215\,664\,9$$

☑ **Variance :** $Var(X) = \dfrac{\pi^2}{6}\beta^2$

$\mathcal{B}-10$ • Loi Gamma $\Gamma(\alpha,\beta)$, $\alpha>0$, $\beta>0$:

La loi $\Gamma(\alpha,\beta)$ décrit l'intervalle de temps entre le premier et le dernier évènement d'une suite de $(\alpha+1)$ évènements successifs.

On peut la considérer comme une généralisation de la loi exponentielle

☑ **Fonction densité de probabilité :** $f_X(x,\alpha,\beta)=\begin{cases}\dfrac{x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\beta}}}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}\ , si\ x\in[0,+\infty[\\ 0\ , si\ non\end{cases}$

$Pour\ \lambda=\dfrac{1}{\beta}\ , \forall x\in[0,+\infty[\ , f_X(x,\alpha,\lambda)=\left(\dfrac{\lambda^{\alpha}e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}\right)x^{\alpha-1}$

☑ **Propriétés de la fonction Gamma d'Euler $\Gamma(\alpha)$:**

a • $\forall\alpha>0\ ,\Gamma(\alpha)=\displaystyle\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ b • $\forall\alpha>0\ ,\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$

c • $\forall\alpha>0\ ,\forall n\in\mathbb{N}^*,\Gamma(\alpha)=\dfrac{\Gamma(\alpha+n)}{(\alpha+n-1)\ldots(\alpha+1)\alpha}$

d • $\forall n\in\mathbb{N}\ ,\Gamma(n+1)=n!$, *en particulier* $\Gamma(1)=\Gamma(2)=1$

e • $\forall n\in\mathbb{N}\ ,\Gamma\left(\dfrac{1}{2}+n\right)=\dfrac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n}(n!)}$, *en particulier* $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\ ,\Gamma\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$

☑ **Espérance mathématique :** $E(X)=\alpha\beta$ ☑ **Variance :** $Var(X)=\alpha\beta^2$

☑ **Coefficient d'asymétrie :** $\gamma_1=\dfrac{2}{\sqrt{\alpha}}$

☑ **Coefficient d'aplatissement (kurtosis) :** $\gamma_2=\dfrac{6}{\alpha}$

☑ **Fonction génératrice des moments :** $M_X(t)=(1-\beta t)^{-\alpha}$, *pour* $t<\dfrac{1}{\beta}$

☑ **Propriétés de la loi Gamma $\Gamma(\alpha,\beta)$:**

a • *Si* $X_1,X_2,\ldots,X_n$ *n v.a. indépendantes tels que* $\forall i=1,2,\ldots,n$; $X_i\rightsquigarrow\Gamma(\alpha_i,\beta)$ *alors*,

$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}X_i\rightsquigarrow\Gamma\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\ ,\beta\right)$

b • *Si* $X\rightsquigarrow\Gamma(\alpha,\beta)$, *alors* $\forall a>0\ ,aX\rightsquigarrow\Gamma(\alpha,a\beta)$

c • $X\rightsquigarrow\Gamma\left(1,\dfrac{1}{\lambda}\right)\Leftrightarrow X\rightsquigarrow\mathcal{E}(\lambda)$ *autrement dit :* $\Gamma\left(1,\dfrac{1}{\lambda}\right)\equiv\mathcal{E}(\lambda)$

d • *Pour* $n\in\mathbb{N}^*\ ,X\rightsquigarrow\Gamma\left(\dfrac{n}{2},2\right)\Leftrightarrow X\rightsquigarrow\chi^2(n)$ *autrement dit :* $\Gamma\left(\dfrac{n}{2},2\right)\equiv\chi^2(n)$,

$\chi^2(n)$ *étant la loi khi-deux à n degrés de liberté*

e • $Si\ \alpha \gg, alors\ \Gamma(\alpha,\beta) \approx \mathcal{N}(m,\sigma^2), avec\ m = (\alpha-1)\beta\ et\ \sigma^2 = (\alpha-1)\beta^2$

$\mathcal{B}$– 11 • Loi bêta $\mathfrak{B}(\alpha,\beta), \alpha > 0$ et $\beta > 0$:

☑ *Fonction densité de probabilité* : $f_X(x,\alpha,\beta) = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{\mathbb{B}(\alpha,\beta)}, si\ x \in [0,1] \\ 0, si\ non \end{cases}$

☑ *Propriétés de la fonction Bêta* $\mathbb{B}(\alpha,\beta)$:

a • $\forall \alpha > 0, \beta > 0, \mathbb{B}(\alpha,\beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt$ b • $\mathbb{B}(\alpha,\beta) = \mathbb{B}(\beta,\alpha) = \dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$

c • $\mathbb{B}(\alpha,\beta+1) = \left(\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\right)\mathbb{B}(\alpha,\beta)$ d • $\mathbb{B}(\alpha,\alpha) = 2^{1-2\alpha}\mathbb{B}\left(\dfrac{1}{2},\alpha\right)$

☑ *Espérance mathématique* : $E(X) = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$

☑ *Variance* : $Var(X) = \dfrac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$

☑ *Propriétés de la loi bêta* $\mathfrak{B}(\alpha,\beta)$:

a • $X \backsim \mathfrak{B}(1,1) \Leftrightarrow X \backsim \mathcal{U}_{[0,1]}$ *autrement dit* : $\mathfrak{B}(1,1) \equiv \mathcal{U}_{[0,1]}$

b • $Si \begin{cases} X \backsim \mathfrak{B}(\alpha,\theta) \\ Y \backsim \mathfrak{B}(\beta,\theta) \\ X\ et\ Y\ deux\ v.a.\ indépedantes \end{cases}, alors\ \dfrac{X}{X+Y} \backsim \mathfrak{B}(\alpha,\beta)$

c • $Si\ X \backsim \mathcal{U}_{[0,1]}, alors\ X^2 \backsim \mathfrak{B}\left(\dfrac{1}{2},1\right)$

$\mathcal{B}$– 12 • Loi de Pearson ou khi-deux à n degrés de liberté $\chi^2(k), k \in \mathbb{N}^*$:

☑ *Fonction densité de probabilité* : $f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\left(\frac{k}{2}-1\right)}e^{-\frac{x}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)2^{\frac{k}{2}}}, si\ x \in [0,+\infty[\\ 0, si\ non \end{cases}$

☑ *Espérance mathématique* : $E(X) = k$ ☑ *Variance* : $Var(X) = 2k$

☑ *Coefficient d'asymétrie* : $\gamma_1 = \sqrt{8/k}$

☑ *Coefficient d'aplatissement (kurtosis)* : $\gamma_2 = 12/k$

☑ *Fonction génératrice des moments* : $M_X(t) = (1-2t)^{-\frac{k}{2}}, pour\ 2t < 1$

☑ *Propriétés de la loi khi-deux à n degrés de liberté* $\chi^2(k)$:

a • $Soit\ (Z_1, Z_2, \dots, Z_n)\ est\ une\ suite\ i.i.d\ de\ v.a.\ de\ \mathcal{N}(0,1), alors\ X = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2 \backsim \chi^2(n)$

b • Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $X \rightsquigarrow \Gamma\left(\frac{k}{2}, 2\right) \Leftrightarrow X \rightsquigarrow \chi^2(k)$ autrement dit : $\Gamma\left(\frac{k}{2}, 2\right) \equiv \chi^2(k)$

c • Si $X \rightsquigarrow \chi^2(k)$, alors $\frac{1}{2}X \rightsquigarrow \Gamma\left(\frac{k}{2}, 1\right)$

d • Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ n v.a. indépendantes tels que $\forall i = 1, 2, \ldots, n$; $X_i \rightsquigarrow \chi^2(k_i)$ alors

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \rightsquigarrow \chi^2\left(\sum_{i=1}^{n} k_i\right)$$

e • Si $X \rightsquigarrow \chi^2(k)$, alors $\forall a > 0$, $aX \rightsquigarrow \Gamma\left(\frac{k}{2}, 2a\right)$

f • Si $X \rightsquigarrow \chi^2(k)$, $k > 50$ alors $\sqrt{2X} - \sqrt{2k-1} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$ et $\chi^2_\alpha(k) = \frac{1}{2}\left[\Phi^{-1}(\alpha) + \sqrt{2k-1}\right]^2$

$\mathcal{B}$– 13 • Loi de Student à k degrés de liberté $\mathcal{T}(k)$, $k \in \mathbb{N}^*$:

☑ **Fonction densité de probabilité :**

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{k\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{k}\right)^{-\left(\frac{k+1}{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{k}\,\mathbb{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{k}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{k}\right)^{-\left(\frac{k+1}{2}\right)}$$

☑ **Espérance mathématique :** $E(X) = 0$, si $k > 1$

☑ **Variance:** $Var(X) = \frac{k}{k-2}$, si $k > 2$ ☑ **Coefficient d'asymétrie:** $\gamma_1 = 0$, si $k > 3$

☑ **Coefficient d'aplatissement (kurtosis) :** $\gamma_2 = \frac{6}{k-4}$, si $k > 4$

☑ **Propriétés de la loi de Student à k degrés de liberté $\mathcal{T}(k)$, $k \in \mathbb{N}^*$:**

a • Si $\begin{cases} Z \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1) \\ X \rightsquigarrow \chi^2(k) \\ Z \text{ et } X \text{ deux v.a. indépendantes} \end{cases}$, alors $T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{X}{k}}} \rightsquigarrow \mathcal{T}(k)$

b • Pour $k = 1$, $X \rightsquigarrow \mathcal{T}(1) \Leftrightarrow X \rightsquigarrow \mathcal{C}(0,1)$ autrement dit :

$\mathcal{T}(1) \equiv \mathcal{C}(0,1)$, où $\mathcal{C}(0,1)$ est la

loi de Cauchy de paramètres 0 et 1

c • $\mathcal{T}(k) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$, en pratique pour $n > 30$

$\mathcal{B}$– 14 • Loi de Fisher-Snedecor à m et n degrés de liberté $\mathcal{F}(m,n)$, $m, n \in \mathbb{N}^*$:

☑ **Fonction densité de probabilité :**

$$f_X(x) = \begin{cases} \left[\dfrac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right) m^{\frac{m}{2}} n^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\right]\left[\dfrac{x^{\left(\frac{m}{2}-1\right)}}{(mx+n)^{\left(\frac{m+n}{2}\right)}}\right] = \left[\dfrac{m^{\frac{m}{2}} n^{\frac{n}{2}}}{\mathbb{B}\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)}\right]\left[\dfrac{x^{\left(\frac{m}{2}-1\right)}}{(mx+n)^{\left(\frac{m+n}{2}\right)}}\right], & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{si non} \end{cases}$$

☑ ***Espérance mathématique*** : $E(X) = \dfrac{n}{n-2}$, si $n > 2$

☑ ***Variance*** : $Var(X) = \dfrac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}$, si $n > 4$

☑ ***Propriétés de la loi de Fisher-Snedecor à m et n degrés de liberté*** $\mathcal{F}(m,n)$

a • Si $\begin{cases} X_1 \backsim \chi^2(k_1) \\ X_2 \backsim \chi^2(k_2) \\ X_1 \text{ et } X_2 \text{ deux v.a. indépendantes} \end{cases}$, alors $F = \dfrac{X_1/k_1}{X_2/k_2} \backsim \mathcal{F}(k_1,k_2)$

b • Si $X \backsim \mathcal{T}(k)$, alors $X^2 \backsim \mathcal{F}(1,k)$

c • Si $X \backsim \mathcal{F}(m,n)$, alors $\dfrac{1}{X} \backsim \mathcal{F}(n,m)$ ainsi $\mathcal{F}_{1-\alpha}(m,n) = \dfrac{1}{\mathcal{F}_\alpha(n,m)}$

d • Si $X \backsim \mathcal{F}(m,n)$, alors $Y = \lim\limits_{n\to+\infty} nX \backsim \chi^2(m)$

e • Si $X \backsim \mathcal{N}(0,1)$, alors $X^2 \backsim \mathcal{F}(1,+\infty)$

Modes de convergence

C-1 • Inégalité de Markov :

a • Si X est une variable aléatoire positive ayant une espérance , on a :

$$\forall t > 0 , P(X \geq t) \leq \frac{E(X)}{t}$$

b • Si X est une variable aléatoire ayant un moment d'ordre r :

$$\forall t > 0 , P(|X| \geq t) \leq \frac{E(|X|^r)}{t^r}$$

C-2 • Inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

Soit X une variable aléatoire réelle de variance finie. $\forall \epsilon > 0 , P(|X - E(X)| \geq \epsilon) \leq \dfrac{Var(X)}{\epsilon^2}$

C-3 • Convergence presque sûre :

a • ***Définition 1*** : Soit $(X_n)_{n\geq1}$ une suite de v.a. et X une v.a définies sur le même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{P})$. On dit que X_n converge presque sûrement vers X , si l'ensemble des ω tels que $X_n(\omega)$ converge vers $X(\omega)$ a pour probabilité 1

On note $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s} X$

b • ***Définition 2*** : La suite (X_n) converge presque sûrement vers X , noté $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s} X$

si $P\{\omega : X_n \nrightarrow X\} = 0$ *(en théorie de probabiloité :* $\forall\epsilon > 0\,,\ \lim\limits_{n\to+\infty} P\left\{\sup\limits_{k\geq n}|X_k - X| \geq \epsilon\right\} = 0$

$\mathcal{C}$– 4 • Convergence en probabilité :

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ *une suite de v.a. et X une v.a définies sur le même espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$.

On dit que X_n *converge en probabilité vers X*

si : $\forall\epsilon > 0\,,\ \lim\limits_{n\to+\infty} P(|X_n - X| \geq \epsilon) = 0$ *ou encore* $\forall\epsilon > 0\,,\ \lim\limits_{n\to+\infty} P(|X_n - X| < \epsilon) = 1$

On note $\operatorname*{plim}\limits_{n\to+\infty}(X_n) = X$ *ou encore* $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p} X$

a • **Théorème de Slutsky** : $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p} X \Rightarrow g(X_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{p} g(X)$ *, où g est une fonction continue de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$

b • $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s} X \Rightarrow X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p} X$

c • *Considérons les suites* $(X_n)_{n\geq 1}$ *et* $(Y_n)_{n\geq 1}$ *de v.a. Si on a les convergences*

$\begin{cases} X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p} X \\ Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p} Y \end{cases}$ *, alors , pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$ *,* $X_n + \lambda Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p} X + \lambda Y$ *et* $X_n Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p} X\,Y$

$\mathcal{C}$– 4 • Convergence en moyenne quadratique :

On dit qu'une suite de v.a. $(X_n)_{n\geq 1}$ *converge en moyenne quadratique vers la v.a. X*

et on note : $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{mq} X$ *, si et seulement si* $\lim\limits_{n\to+\infty} E(|X_n - X|^2) = 0$

Si les moments d'ordre1 et 2 existent , alors : $\left(X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{mq} X\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} E(X_n) = X \\ \lim\limits_{n\to+\infty} Var(X_n) = 0 \end{cases}$

a • $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{mq} X \Rightarrow X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p} X$

b • $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s} X \Rightarrow \big(E(X_n)\big)_{n\geq 1} \xrightarrow[n\to+\infty]{p} (X_n)_{n\geq 1}$

$\mathcal{C}$– 5 • Convergence en loi :

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ *une suite de v.a. et X une v.a définies sur le même espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$.

On dit que X_n *converge en loi vers X et on note* $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X$ *, si en tout point x où* F_X *est continue , on a* $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$

a • *On constate que la convergence en loi de la suite* $(X_n)_{n\geq 1}$ *vers X est équivalente à* $\lim\limits_{n\to+\infty} P(a < X_n \leq b) = P(a < X \leq b)$ *, où a et b sont deux points de contunuité de* F_X

b • *Si* $(X_n)_{n\geq 1}$ *est une suite de v.a. discrètes et si X est également discrète telle que*

$\forall n \in \mathbb{N}\ X_n(\Omega) \subset X(\Omega)$, *alors* $(X_n)_{n\geq 1}$ *converge en loi vers* X, *si et seulement si* :

$\forall x \in X(\Omega)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = x) = P(X = x)$

c • $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{mq} X \Rightarrow X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p} X \Rightarrow X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X$

d • *Si* $(X_n)_{n\geq 1}$ *est une suite de v.a. convergeant en loi vers une constante* a *de* $\mathbb{R}$, *alors elle converge également en probabilité vers la constante* a : $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} a \Rightarrow X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p} a$

e • *Supposons que l'on ait les convergences* : $\begin{cases} X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X \\ Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p} a \end{cases}$, *pour* a *constante réelle.*

Alors, on a : ① $X_n + Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X + a$ ② $X_nY_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} aX$ ③ $\dfrac{X_n}{Y_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \dfrac{X}{a}$, *si* $a \neq 0$

f • *Soit* $(X_N)_{N\geq 1}$ *une suite de v.a. de loi hypergéométrique* $\mathcal{H}(N,n,p)$. *On note* S, *l'ensemble des nombres entiers* N *tels que* Np *soit entier. Alors la suite* $(X_N)_{N\in\mathbb{N}}$ *converge en Loi vers une v.a. binomiale* $\mathcal{B}(n,p)$. *On note* : $X_N \rightsquigarrow \mathcal{H}(N,n,p) \Rightarrow X_N \xrightarrow[N\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{B}(n,p)$

g • *Soit* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de v.a. de lois binomiales* $\mathcal{B}(n,p_n)$ *respectivement.*
On suppose que la suite $(np_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers un réel positif* λ. *Alors la suite* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en loi vers une v.a. de Poisson* $\mathcal{P}(\lambda)$. *On note* :

$$\begin{cases} X_n \rightsquigarrow \mathcal{B}(n,p_n) \\ \lim\limits_{n\to+\infty} np_n = \lambda > 0 \end{cases} \Rightarrow X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{P}(\lambda)$$

h • Théorème de Moivre-Laplace : *Soit* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de v.a. de lois binomiales* $\mathcal{B}(n,p)$ *respectivement. On considère la v.a.* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *définie par* :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, T_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}.$$

Alors la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en loi vers une v.a. de loi normale centrée réduite.*

On note : $X_n \rightsquigarrow \mathcal{B}(n,p) \Rightarrow \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$

i • *Soit* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de v.a. de lois de Poisson* $\mathcal{P}(n\lambda)$ *respectivement.*
On considère la v.a. $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *définie par* : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, T_n = \dfrac{X_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}$.

Alors la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en loi vers une v.a. de loi normale centrée réduite.*

On note : $X_n \rightsquigarrow \mathcal{P}(n\lambda) \Rightarrow \dfrac{X_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$

j • *Soit* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de v.a. et* (M_{X_n}) *la suite des fonctions génératrices associées.* $\left(X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X\right) \Leftrightarrow \left(\lim\limits_{n\to+\infty} M_{X_n}(t) = M_X(t)\right)$

$\mathcal{C}-6$ • Loi faible des grands nombres :

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite de v.a. indépendantes ayant même variance et même espérance finies. Alors :* $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[n\to+\infty]{p} E(X_1)$

a • *Soit* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite de v.a. indépendantes de Bernoulli de même paramètre p* $\mathcal{B}(1,p)$. *Alors :* $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[n\to+\infty]{p} p$

$\mathcal{C}-7$ • Loi forte des grands nombres :

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite de v.a. indépendantes et de même loi, avec un moment d'ordre 4* $\left(i.e.\ E\left(X_i^4\right) < +\infty\right)$. *Alors :* $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s} E(X_1)$

$\mathcal{C}-8$ • Théorème central limite :

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite de v.a. indépendantes et de même loi, de moyenne m et de variance* σ^2 *(i.e. avec un moment d'ordre 2 fini).*

Notons M_n *les moyennes arithmétiques :* $M_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$

et Z_n *les variables centrées réduites associées :* $Z_n = \dfrac{M_n - m}{\sigma/\sqrt{n}} = \dfrac{\sqrt{n}(M_n - m)}{\sigma}$.

Alors pour tout intervalle $[a,b]$, *on a :* $\lim\limits_{n\to+\infty} P[a \le Z_n \le b] = \displaystyle\int_a^b \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dt$.

On dit que la v.a. $Z_n = \dfrac{\sqrt{n}(M_n - m)}{\sigma}$ *converge en loi vers la loi Normale standard* $\mathcal{N}(0,1)$: $\dfrac{\sqrt{n}(M_n - m)}{\sigma} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$

BEN AHMED MOHSEN Téléphone: (+216) 97 619191 / 54 619191
omega.center.cp@gmail.com https://web.facebook.com/OMEGACENTER2014

Vecteurs aléatoires continues

$\mathcal{C}-1$ • *Vecteurs aléatoires :*

On appelle couple (X,Y) ***de v.a. continues de*** $\mathbb{R}^2$***, s'il existe une fonction*** $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+$ ***telle que, pour tous intervalles*** I ***et*** J ***et pour toute fonction continue bornée*** h***, on ait :***

$$P\big((X,Y) \in I \times J\big) = \iint_{I\times J} f_{X,Y}(x,y)dxdy \quad et \quad E[h(X,Y)] = \iint_{\mathbb{R}^2} h(x,y) f_{X,Y}(x,y)dxdy$$

$\mathcal{C}-2$ • *Densité conjointe :*

$f_{X,Y}$ ***est une densité conjointe du couple*** (X,Y) ***si et seulement si :***

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dxdy = 1 \;\; et \;\; f_{X,Y}(x,y) \geq 0 \,, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$\mathcal{C}-3$ • *Densités marginales :*

Soit (X,Y) ***est un couple e v.a. continues de*** $\mathbb{R}^2$***, ses densités marginales*** f_X ***et*** f_Y ***peuvent se calculer par :***

☞ $f_X(x) = \int_{y\in\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)dy$ ☞ $f_Y(y) = \int_{x\in\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)dx$

☑ ***Remarques :*** ***La connaissance de la densité conjointe de*** (X,Y) ***permet de calculerles densités marginales. Il importe de bien comprendre que la réciproque est fausse. Il n'est généralement pas possible de calculer la densité*** $f_{X,Y}$ ***du couple aléatoire*** (X,Y) ***à partir de la seule connaissance de ses densités marginales*** f_X ***et*** f_Y

☑ ***Attention :*** ***Deux vecteurs aléatoires différents peuvent avoir les mêmes distributions marginales.***

$\mathcal{C}-4$ • *Indépendance de deux v.a. continues :*

Deux variables aléatoires continues sont dites indépendantes si et seulement si :

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$

$\mathcal{C}-5$ • *Indépendance d'une famille finie de v.a. :*

Les m variables aléatoires continues $X_1, X_2, \dots X_m$ ***sont dites indépendantes, si pour toutes parties*** $A_1, A_2, \dots A_m$ ***de*** $\mathbb{R}$***, les événements*** $\{X_1 \in A_1\}, \{X_2 \in A_2\}, \dots \{X_m \in A_m\}$ ***sont mutuellements indépendants :*** $f_{X_1,X_2,\dots X_m}(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{mi}) = \prod_{k=1}^{m} f_{X_k}(x_{ki})$

Adresse : 2, Rue Ibn Arafa, av de l'environnement Manouba Centre, Manouba

$\mathcal{C}-6$ • *Indépendance d'une suite de v.a. :*

Une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires continue est dite indépendante, si toute sous-suite finie est indépendante au sens de $\mathcal{C}-5$

$\mathcal{C}-7$ • *Indépendance de fonctions des variables aléatoires continue :*

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes et f et g deux fonctions telles que les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ sont intégrables, alors, on a :

$E[f(X)g(Y)] = E[f(X)]E[g(Y)]$ ***et les v.a. $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes***

$\mathcal{C}-8$ • *Somme de deux v.a. :* ***Si le couple (X,Y) admet pour densité conjointe $f_{X,Y}$, la variable $Z = X+Y$ aura également une densité g :***

$$g(z) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x, z-x)dx = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(z-y, y)dy$$

☞ ***Si, en particulier, X et Y sont deux v.a. indépendantes, alors la densité notée g de $Z = X+Y$ est le produit convolution de f_X et f_Y :***

$$g(z) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x)f_Y(z-x)dx = \int_{\mathbb{R}} f_X(z-y)f_Y(y)dy$$

$\mathcal{C}-9$ • *Fonction de répartition d'un couple de v.a. continues :*

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \le x, Y \le y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(u,v)dudv$$

☞ $\dfrac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial y \partial x} = f_{X,Y}(x,y)$ ☞ $\forall (x,y), 0 \le F_{X,Y}(x,y) \le 1$

☞ ***$F_{X,Y}$ est une fonction croissante***

☞ $\lim\limits_{x\to-\infty} F_{X,Y}(x,y) = \lim\limits_{y\to-\infty} F_{X,Y}(x,y) = 0$ ***ou encore*** $F_{X,Y}(-\infty, y) = F_{X,Y}(x, -\infty) = 0$

☞ $\lim\limits_{x\to+\infty}\lim\limits_{y\to+\infty} F_{X,Y}(x,y) = 1$ ***ou encore*** $F_{X,Y}(+\infty,+\infty) = 1$

☞ $P(a < X \le b, c < Y \le d) = F_{X,Y}(b,d) + F_{X,Y}(a,c) - F_{X,Y}(a,d) - F_{X,Y}(b,c) = \int_a^b\int_c^d f_{X,Y}(x,y)dxdy$

☞ ***$F_X = F_Y$ si et seulement si les variables aléatoires X et Y ont même loi***

$\mathcal{C}-10$ • *Fonctions de répartitions marginales :*

☞ $F_X(x) = \lim\limits_{y\to+\infty} F_{X,Y}(x,y) = F_{X,Y}(x,+\infty) = P_X(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du$

☞ $F_Y(y) = \lim\limits_{x\to+\infty} F_{X,Y}(x,y) = F_{X,Y}(+\infty,y) = P_X(Y \le y) = \int_{-\infty}^{x} f_Y(v)dv$

☞ $Si\ X\ et\ Y\ sont\ deux\ v.a.\ indépendantes\ , alors\ F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$

C– 11 • Conditionnement ou distributions conditionnelles :

☞ $f_{(Y|X=x)}(y) = \dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$ ☞ $f_{(X|Y=y)}(x) = \dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$

☞ $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{(Y|X=x)}(y)dy = 1$ ☞ $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X|Y=y)}(x)dx = 1$

☞ *Si la représentation graphique de $X(\omega) \times Y(\omega)$ n'est pas un rectangle alors X et Y ne sont pas indépendantes*

C– 12 • L'espérance mathématique d'une fonction φ de (X,Y) :

☞ *L'espérance du couple (X,Y) est définie si $E(X)$ et $E(Y)$ existent.*

On a alors : $E(X,Y) = \big(E(X), E(Y)\big)$

☞ *Si (X,Y) est un couple de variable aléatoire continue, pour toute fonction $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\iint_{\mathbb{R}^2} |\varphi(x,y)| f_{X,Y}(x,y)dxdy$ converge, alors* : $E[\varphi(X,Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x,y) f_{X,Y}(x,y)dxdy$

Ce qui nous permet d'écrire :

a • $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X,Y}(x,y)dxdy$ b • $E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y f_{X,Y}(x,y)dxdy$

c • $E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy f_{X,Y}(x,y)dxdy$ d • $E(AXB + C) = AE(X)B + C$

C– 13 • Espérance conditionnelle :

L'espérance marginale est l'espérance des espérances conditionnelles

a • *L'espérance conditionnelle $E(Y|X)$ de Y sachant X où X et Y sont des variables aléatoires continue* : $E(Y|X=x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{(Y|X=x)}(y)dy$

$$\Rightarrow E(Y) = E\big(E(Y|X=x)\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(Y|X=x) f_X(x)dx$$

b • *L'espérance conditionnelle $E(X|Y)$ de X sachant Y où X et Y sont des variables aléatoires continues* $E(X|Y=y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{(X|Y=y)}(x)dx$

$$\Rightarrow E(X) = E\big(E(X|Y=y)\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(X|Y=y) f_Y(y)dy$$

c • *Pour tout* $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, E(aY_1 + bY_2|X) = aE(Y_1|X) + bE(Y_2|X)$

d • *Si X et Y sont indépendantes, alors* $E(Y|X) = E(Y)$

e • *Si X et Y sont indépendantes, alors* $E(X|Y) = E(X)$

f • *(Inégalité de Cauchy Schwarz)* : $|E(XY)| \leq E(|XY|) \leq \sqrt{E(X^2)E(Y^2)}$

C– 14 • *Variance-Covariance* :

Soient X et Y deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$. *On appelle covariance de X et Y, et l'on note* $Cov(X,Y)$, *le réel* :

$$Cov(X,Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x - E(X))(y - E(Y))f_{X,Y}(x,y)dxdy$$

☑ ***Propriétés*** : *Soient X, Y et Z des variables aléatoires sur* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ *et* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

a • $Cov(X,X) = Var(X) \geq 0$ *b* • $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$

c • $Cov(aX,Y) = Cov(X,aY) = aCov(X,Y)$ *d* • $Cov(aX + bY, Z) = aCov(X,Z) + bCov(X,Z)$

e • $Cov(X, aY + bZ) = aCov(X,Y) + bCov(X,Z)$ *f* • $Cov(aX + b, cY + d) = acCov(X,Y)$

g • $Cov(X,b) = Cov(a,Y) = 0$ *h* • $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

i • $Cov\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{m} Y_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} Cov(X_i, Y_j)$

j • $Var\,(X) = E\left[(X - E(X))^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x - E(X))^2 f_{X,Y}(x,y)dxdy$

k • $Var\,(Y) = E\left[(Y - E(Y))^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(y - E(Y))^2 f_{X,Y}(x,y)dxdy$

ℓ • $V(aX + bY) = a^2V(X) + b^2V(Y) + 2abCov(X,Y)$

m • $Cov(X,Y) = \frac{1}{2}[Var(X + Y) - Var(X) - Var(Y)]$

n • ***Variances Conditionnelles*** :

La variance marginale est l'espérance des variances conditionnelles + la variance des espérances conditionnelles

☞ $V(X) = E\left(V(X = x_i|Y = y_j)\right) + V\left(E(X = x_i|Y = y_j)\right)$

☞ $V(Y) = E\left(V(Y = y_j|X = x_i)\right) + V\left(E(Y = y_j|X = x_i)\right)$

o • *(Inégalité de Cauchy Schwarz)* : $|Cov(X,Y)| \leq \sqrt{Var(X)Var(Y)}$

p • ***Matrice de Covariance*** : *Soient X et Y deux variables aléatoires sur* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$

Lorsque $Var(X), Var(Y)$ *et* $Cov(X,Y)$ *existent, la matrice de covariance du couple* (X,Y) *est la matrice* : $C = \begin{pmatrix} Var(X) & Cov(X,Y) \\ Cov(X,Y) & Var(Y) \end{pmatrix}$

Une matrice de covariance C est toujours une matrice symétrique et positive

q • $Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + 2 \sum_{1\leq i<j\leq n} Cov(X_i, X_j)$

☑ ***Cas des variables indépendantes :***

Soient X et Y deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ *indépendantes. On a alors :*

$\xRightarrow[\text{La réciproque de ce résultat est fausse}]{} E(XY) = E(X)E(Y)$

$\xRightarrow[\text{La réciproque de ce résultat est fausse}]{} Cov(X, Y) = 0$

$\xRightarrow[\text{La réciproque de ce résultat est fausse}]{} Var(X \pm Y) = Var(X) + Var(Y)$

$\xRightarrow[\text{La réciproque de ce résultat est fausse}]{} Var(XY) = Var(X)Var(Y) + \left(E(X)\right)^2 Var(Y) + \left(E(Y)\right)^2 Var(X)$

En particulier, si $E(X) = E(Y) = 0$, *alors* $Var(XY) = Var(X)Var(Y)$

☑ ***Remarques**: Attention, il ne s'agit pas d'une équivalence: il existe des couples* (X, Y) *de variables aléatoires dont la covariance est nulle mais qui ne sont pas indépendantes.*

☑ ***Remarques** : Soit* $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ *suite de v.a indépendantes. On a alors :*

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) \text{ et } E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i)$$

r • $Var(AU) = AVar(U)A'$, *U étant un vecteur aléatoire*

s • $Cov(AU, BV) = ACov(U, V)B'$, *U et V deux vecteurs aléatoires*

t • *Soient A une matrice symétrique*, $C = E(U)$ *et* $\Sigma = Var(U)$: $E(U'AU) = Tr(A\Sigma) + C'AC$

$\mathcal{C}$– 15 • *Coefficient de corrélation linéaire :*

Soient X et Y deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ *telles que* $\sigma(X) \neq 0$ *et* $\sigma(Y) \neq 0$.

Le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y est le nombre réel $\rho(X, Y)$,

défini par : $\rho(X, Y) = \dfrac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = \dfrac{Cov(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$

☑ ***Propriétés** : Soient X et Y deux variables aléatoires sur* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ *telles que* $\sigma(X) \neq 0$ *et* $\sigma(Y) \neq 0$.

a • $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$ b • $\rho(X, Y) = 1$ *si et seulement si* $Y = a + bX$, $a \in \mathbb{R}$ *et* $b > 0$

c • $\rho(X, Y) = -1$ *si et seulement si* $Y = a + bX$, $a \in \mathbb{R}$ *et* $b < 0$

d • *Si X et Y sont indépendantes, alors* $\rho(X, Y) = 0$

e • *Si* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+^*$, *alors* $\rho(\lambda X, \mu Y) = \rho(X, Y)$

☑ ***Remarques :***

☞ ***Un coefficient de corrélation linéaire est une grandeur sans dimension et sans unité (dite aussi grandeur scalaire). Le dernier point signifie qu'il est indépendant des unités choisies pour X et Y***

☞ ***Si $\rho(X,Y) > 0$, on dit que X et Y sont corrélées positivement***

☞ ***Si $\rho(X,Y) < 0$, on dit que X et Y sont corrélées négativement***

☞ ***Si $\rho(X,Y) = 0$, on dit que X et Y ne sont pas corrélées***

☞ ***Une corrélation positive signifie que Y a «tendance à augmenter» quand X augmente (et, ce qui revient au même, que Y a «tendance à augmenter»quand X augmente)***

☞ ***Une corrélation négative signifie que Y a tendance à diminuer quand X augmente, une absence de corrélation qu'une augmentation de X n'a pasd'influence sur la «valeur moyenne» de Y.***

☞ ***Un coefficient de corrélation linéaire «proche de 1» en valeur absolue signifie que Y peut être «bien approchée» par une fonction affine de X, croissante si le coefficient est positif, décroissante sinon. C'est une question centraleen statistiques (moins en probabilités)***

☞ ***Deux variables sont non corrélées (linéairement)si et seulement si leur covariance est nulle. Cela ne signifie pas nécessairement qu'elles sont indépendantes sauf dans le cas très particulier de la propriété qui suit :***

☑ ***Soit (X,Y) un couple gaussien : $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(m_X, \sigma_X^2)$ et $Y \rightsquigarrow \mathcal{N}(m_Y, \sigma_Y^2)$. On a :***

$$Cov(X,Y) = 0 \Leftrightarrow \rho(X,Y) = 0 \Leftrightarrow X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes}$$

C– 16 • Fonction génératrice des moments :

On appelle transformée de Laplace (ou fonction génératrice des moments)du vecteur aléatoire (X,Y) (si elle existe), lafonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie pour (t_1, t_2) par :

$$M_{(X,Y)}(t_1,t_2) = E\left(e^{(t_1X+t_2Y)}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(t_1x+t_2y)} f_{X,Y}(x,y)dxdy$$

☑ Propriétés :

a • $M_{(X,Y)}(0,0) = 1$ ***b*** • $M_{(X,Y)}(t_1,t_2) \geq 0$ ***c*** • $M_{(X,Y)}(t_1,0) = M_X(t_1)$

d • $M_{(X,Y)}(0,t_2) = M_Y(t_2)$ ***e*** • $E(X^r.Y^s) = \left[\dfrac{\partial^{r+s}M_{(X,Y)}(t_1,t_2)}{\partial t_1^r \partial t_2^s}\right]|(0,0)$

f • $E(XY) = \left[\dfrac{\partial^2 M_{(X,Y)}(t_1,t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}\right]|(0,0)$ ***g*** • $E(X) = \left[\dfrac{\partial M_{(X,Y)}(t_1,t_2)}{\partial t_1}\right]|(0,0)$

$\mathcal{h} \bullet E(Y) = \left[\frac{\partial M_{(X,Y)}(t_1,t_2)}{\partial t_2}\right] |(0,0)$

$\mathcal{i} \bullet$ X *et* Y *deux v.a. indépendantes, alors :* $M_{(X,Y)}(t_1,t_2) = M_X(t_1)M_Y(t_2)$

$\mathcal{j} \bullet$ *Si* $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ *suite de v.a indépendantes, alors :* $M_{(X_1,X_2,\dots,X_n)}(t_1,t_2,\dots,t_n) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t_i)$

$\mathcal{k} \bullet$ *Si* $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ *suite de v.a indépendantes et* $a_i \in \mathbb{R}$*, alors :* $M_{\sum_{i=1}^n a_i X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(a_i t)$

$\mathcal{C}$– 17 • Maximum et minimum de variables aléatoires continues et indépendantes :

soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ *une suite de v.a indépendantes. On pose* $M_n = \max_{i\in\mathbb{N}^*}(X_i)$

et $m_n = \min_{i\in\mathbb{N}^*}(X_i)$ *. Alors :*

$\mathcal{a} \bullet F_{M_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(t) \Rightarrow f_{M_n}(t) = d\left[\prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(t)\right]/dt$

$\mathcal{b} \bullet F_{m_n}(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n}\left(1 - F_{X_i}(t)\right) \Rightarrow f_{M_n}(t) = -d\left[\prod_{i=1}^{n}\left(1 - F_{X_i}(t)\right)\right]/dt$

Vecteurs Gaussiens

$\mathcal{D}$– 1 • Exemple fondamental :

Considérons n variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ *indépendantes et de lois respectivement* $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2), \dots, \mathcal{N}(m_n, \sigma_n^2)$*. la densité conjointe du vecteur* $X = (X_1 \quad \cdots \quad X_n)'$

$f_X(x_1 \quad \cdots \quad x_n) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n} \times \frac{1}{\sqrt{|\Sigma_X|}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x-m)'\Sigma_X^{-1}(x-m)\right\}$ *, avec* $x = (x_1 \quad \cdots \quad x_n)'$,

$m = E(X) = (E(X_1) \quad \cdots \quad E(X_n))' = (m_1 \quad \cdots \quad m_n)'$, $\Sigma_X = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$ *La matrice de covariances du vecteur aléatoire* X *et* $\Sigma_X^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1/\sigma_n^2 \end{pmatrix}$

On vérifie que : $(x-m)'\Sigma_X^{-1}(x-m) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_i)^2/\sigma_i^2$

$\mathcal{D}-2$ • Définition :

Un vecteur aléatoire $X = (X_1 \quad \cdots \quad X_n)'$ *de* $\mathbb{R}^n$ *est dit vecteur gaussien si, pour tout*

$\lambda = (\lambda_1 \quad \cdots \quad \lambda_n)'$ *de* $\mathbb{R}^n$ *la v.a.* $\lambda' X = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i$ *est une variable de loi normale.*

Si son vecteur des espérances est m et sa matrice de covariances est Σ_X, *on note :*

$X \leadsto \mathcal{N}(m, \Sigma_X)$

a • Remarques :

☞ *Un vecteur dont toutes les composantes sont de loi normale, n'estpas nécessairement un vecteur gaussien.*

☞ *Tout sous vecteur d'un vecteur gaussien est encore un vecteur gaussien.*

☞ *On parle du vecteur gaussien standard en dimension n si* $E(X) = 0_{n\times 1}$ *et* $\Sigma_X = I_n$

b • Proposition 1 : *Si X est un vecteur gaussien de vecteur d'espérance* $m = (m_1 \quad \cdots \quad m_n)'$ *et de matrice de covariances* Σ_X, *alors, pour tout* λ *dans* $\mathbb{R}^n$, *la v.a.*

$\lambda' X \leadsto \mathcal{N}(\lambda' m, \lambda' \Sigma_X \lambda)$

c • Proposition 2 :

☞ *Soit X un vecteur gaussien de* $\mathbb{R}^n$ *d'espérancem et de matrice de covariances* Σ_X.

Lorsque Σ_X *est inversible, le vecteur aléatoire X est dit vecteur aléatoire gaussien non dégénéré et admet pour densité :* $f_X(x_1 \quad \cdots \quad x_n) = \dfrac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \times \dfrac{1}{\sqrt{|\Sigma_X|}} \exp\left\{-\dfrac{1}{2}(x-m)'\Sigma_X^{-1}(x-m)\right\}$

Un vecteur gaussien de matrice de covariances Σ_X *telle que* $|\Sigma_X| = 0$

$(i.e.\ \Sigma_X$ *non inversible*$)$ *et dit dégénéré et n'admet pas de densité.*

☞ *Pour un couple* (X, Y) *gaussien, on a :* $m = E(X) = \big(E(X), E(Y)\big)' = (m_X, m_Y)'$

et $\Sigma_X = \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \mathrm{Cov}(X,Y) \\ \mathrm{Cov}(X,Y) & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}$ *avec* $|\Sigma_X| = \sigma_X^2\sigma_Y^2 - \mathrm{Cov}^2(X,Y) = \sigma_X^2\sigma_Y^2\left(1 - \rho^2(X,Y)\right)$

Il en résulte : ① $(\rho(X,Y) = \pm 1 \Leftrightarrow Y = a + bX) \Rightarrow (X,Y)$ *dégénéré et n'admet pas de densité*

② $\rho(X,Y) \neq \pm 1 \Rightarrow (X,Y)$ *non-dégénéré et admet pas de densité* $f_{(X,Y)}$, *avec ,*

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma_X^2\sigma_Y^2(1-\rho^2)}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-m_X)^2}{\sigma_X^2} + \frac{(y-m_Y)^2}{\sigma_Y^2} - \frac{2\rho(x-m_X)(y-m_Y)}{\sigma_X\sigma_Y}\right]\right\}$$

d • Transformation linéaire d'un vecteur gaussien : *La transformée d'un vecteur gaussien de* $\mathbb{R}^n$ *pat une application linéaire de* $\mathbb{R}^n$ *vers* $\mathbb{R}^p$ *est encore un vecteur gaussien*

$$\begin{cases} X \sim \mathcal{N}(m, \Sigma_X) \\ A \text{ matrice de taille } (p \times n) \end{cases} \Rightarrow AX \sim \mathcal{N}(Am, A\Sigma_X A')$$

e • Vecteur gaussien standard : *Soit* $X \sim \mathcal{N}(m, \Sigma_X)$, *un vecteur gaussien non-dégénéré* , *alors* $\Sigma_X^{-\frac{1}{2}}(X - m) \sim \mathcal{N}(0_{n\times 1}, I_n)$: *vecteur gaussien standard*

$\mathcal{D}$– 3 • Indépendance de variables gaussiennes :

a • Proposition 1 : *Soit* X *un vecteur gaussien de* $\mathbb{R}^n$. *Pour que ses composantes* $X_1, \dots, X_n$ *soient indépendantes, il faut et il suffit que la matrice de covariances soit diagonale*

b • Corollaire : *Si le couple* (X, Y) *est un vecteur gaussien, on a* :

X *et* Y *deux v.a. indépendantes* $\Leftrightarrow Cov(X, Y) = 0$

c • Proposition 2 : *La densité d'un vecteur gaussien standard en dimension n est* :

$$f_X(x_1 \quad \cdots \quad x_n) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n} exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right\}$$

BEN AHMED MOHSEN Téléphone: (+216) 97 619191 / 54 619191
omega.center.cp@gmail.com https://web.facebook.com/OMEGACENTER2014

Institut de Financement du Développement du Maghreb Arabe
CONCOURS DE RECRUTEMENT DE LA XLème PROMOTION (BANQUE)
Octobre 2020

Exercice 1 : (5 points : 1 point par question)

Énoncé

La matrice de variances covariances du vecteur constitué des trois variables X, Y et Z est définie par :

$$V\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 7 & -4 \\ 7 & 16 & 0 \\ -4 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Où a est un paramètre inconnu.

1. *Calculer la variance de la variable : $Z - Y$*
2. *Calculer les coefficients de corrélations linéaires entre les deux variables X et Y d'une part et entre les deux variables X et Z d'autre part.*
3. *En déduire l'ensemble des valeurs possibles du paramètre a*
4. *Calculer en fonction de a la variance de la variable : $X + Y + Z$*
5. *Déterminer le paramètre a pour que le coefficient de corrélation linéaire entre les deux variables X et Y soit égal à $\frac{7}{8}$*

Corrigé

1.

On a d'une part $V\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 7 & -4 \\ 7 & 16 & 0 \\ -4 & 0 & 9 \end{bmatrix}$ *et d'autre part la forme générale de la matrice de variances covariances du vecteur aléatoire* $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$:

$$V\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V(X) & Cov(X,Y) & Cov(X,Z) \\ Cov(Y,X) & V(Y) & Cov(Y,Z) \\ Cov(Z,X) & Cov(Z,Y) & V(Z) \end{bmatrix}$$

Par identification, on obtient :

- $V(X) = a, V(Y) = 16, V(Z) = 9, Cov(X,Y) = 7, Cov(X,Z) = -4, Cov(Y,Z) = 0$

- $Var(Z - Y) = \underbrace{Var(Z)}_{9} + \underbrace{Var(Y)}_{16} - 2\underbrace{Cov(Y,Z)}_{0} \Rightarrow \boxed{Var(Z - Y) = 25}$

Adresse : 2, Rue Ibn Arafa, av de l'environnement Manouba Centre, Manouba

2.

$$\cdot\ \rho_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} = \frac{7}{\sqrt{16a}} \Rightarrow \boxed{\rho_{X,Y} = \frac{7}{4\sqrt{a}}}$$

$$\cdot\ \rho_{X,Z} = \frac{Cov(X,Z)}{\sqrt{V(X)V(Z)}} = \frac{-4}{\sqrt{9a}} \Rightarrow \boxed{\rho_{X,Z} = -\frac{4}{3\sqrt{a}}}$$

3.

$\cdot$ ***D'une part,*** $\rho_{X,Y}$ ***et*** $\rho_{X,Z}$ ***si et seulement si*** $(a > 0)$

$$\cdot\ D'autre\ part, \begin{cases} |\rho_{X,Y}| \le 1 \\ |\rho_{X,Z}| \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\frac{7}{4\sqrt{a}}\right| \le 1 \\ \left|-\frac{4}{3\sqrt{a}}\right| \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{7}{4\sqrt{a}} \le 1 \\ \frac{4}{3\sqrt{a}} \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{7}{4} \le \sqrt{a} \\ \frac{4}{3} \le \sqrt{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{7}{4}\right)^2 \le a \\ \left(\frac{4}{3}\right)^2 \le a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{49}{16} \le a \\ \frac{16}{9} \le a \end{cases}$$

$$Or, \frac{16}{9} < \frac{49}{16}$$

D'où l'ensemble des valeurs prises par a : $\boxed{a \in \left[\frac{49}{16}, +\infty\right[}$

4.

$$\cdot\ Var(X+Y+Z) = \underbrace{Var(X)}_{a} + \underbrace{Var(Y)}_{16} + \underbrace{Var(Z)}_{9} + 2\underbrace{Cov(X,Y)}_{7} + 2\underbrace{Cov(X,Z)}_{-4} + 2\underbrace{Cov(Y,Z)}_{0}$$

$$\Rightarrow Var(X+Y+Z) = a + 16 + 9 + 14 - 8$$

$$\Rightarrow \boxed{Var(X+Y+Z) = a + 31}$$

5.

$$\cdot\ \rho_{X,Y} = \frac{7}{8} \Leftrightarrow \frac{7}{4\sqrt{a}} = \frac{7}{8} \Leftrightarrow 4\sqrt{a} = 8 \Leftrightarrow \sqrt{a} = 2$$

$$D'où \boxed{\rho_{X,Y} = \frac{7}{8} \Leftrightarrow a = 4}$$

Institut de Financement du Développement du Maghreb Arabe
CONCOURS DE RECRUTEMENT DE LA XXXIXème PROMOTION (ASSURANCE)
Juin 2022

Exercice 2 : *(4 points : 2+2)*

ÉNONCÉ

On note σ_X et σ_Y les écarts-types respectivement de deux variables non-indépendantes X et Y.

1- *Comparer σ_{X+Y} à $\sigma_X + \sigma_Y$. Interpréter ce résultat en termes d'additivité du risque*
2- *Vérifier vos calculs sur l'exemple suivant : X et Y constituent un vecteur ayant pour matrice de variances-covariances :* $\begin{bmatrix} 16 & -10 \\ -10 & 25 \end{bmatrix}$

Corrigé

1-

$$On\ a : \begin{cases} \sigma_{X+Y}^2 = V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X,Y) \\ (\sigma_X + \sigma_Y)^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2\sigma_X\sigma_Y = V(X) + V(Y) + 2\sigma_X\sigma_Y \end{cases}$$

$$\sigma_{X+Y}^2 - (\sigma_X + \sigma_Y)^2 = 2Cov(X,Y) - 2\sigma_X\sigma_Y = 2\sigma_X\sigma_Y\left[\frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y} - 1\right] = 2\sigma_X\sigma_Y[\rho_{X,Y} - 1]$$

$$Or, -1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1 \Rightarrow \rho_{X,Y} - 1 \leq 0\ et\ 2\sigma_X\sigma_Y \geq 0$$

$$par\ la\ suite\ \sigma_{X+Y}^2 - (\sigma_X + \sigma_Y)^2 \leq 0\ ou\ encore\ \sigma_{X+Y}^2 \leq (\sigma_X + \sigma_Y)^2$$

$$Et\ comme\ on\ a : \sigma_{X+Y} \geq 0\ et\ \sigma_X + \sigma_Y \geq 0$$

$$D'où : \boxed{\sigma_{X+Y} \leq \sigma_X + \sigma_Y}$$

Presque l'unique qualité des écarts-types en termes de mesure de risque.

La sous-additivité représente l'effet de diversification : le capital requis après agrégation de deux risques est inférieur à la somme des besoins en capital de chaque risque pris séparément.

Toutefois une corrélation positive et parfaite $(\rho_{X,Y} = 1)$ entraine l'additivité du risque :

$$\sigma_{X+Y} = \sigma_X + \sigma_Y$$

2-

$$On\ a: \begin{cases} V\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & -10 \\ -10 & 25 \end{bmatrix} \\ V\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} V(X) & Cov(X,Y) \\ Cov(X,Y) & V(Y) \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow V(X) = 4^2, V(Y) = 5^2\ et\ Cov(X,Y) = -10$$

Calculons σ_{X+Y}^2 et $(\sigma_X + \sigma_Y)^2$:

$$\begin{cases} \sigma_{X+Y}^2 = V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X,Y) = 16 + 25 + \big(2 \times (-10)\big) = 21 \\ (\sigma_X + \sigma_Y)^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2\sigma_X\sigma_Y = V(X) + V(Y) + 2\sigma_X\sigma_Y = 16 + 25 + (2 \times 4 \times 5) = 81 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_{X+Y} = \sqrt{21} \cong 4,58 \\ \sigma_X + \sigma_Y = 9 \end{cases} \Rightarrow \sigma_{X+Y} \le \sigma_X + \sigma_Y$$

Ainsi, on réalise par le calcul la sous-additivité de l'écart-type

Institut de Financement du Développement du Maghreb Arabe
CONCOURS DE RECRUTEMENT DE LA XXVIIème PROMOTION
JUILLET 2007

Exercice 3 : (5 points :1+1+1+1+1)

ÉNONCÉ

On considère une variable aléatoire X normale centrée réduite $X \leadsto \mathcal{N}(0,1)$.
On pose $Y = |X|$

1) *Déterminer le domaine des valeurs possibles de Y*
2) *Déterminer $G(y)$ la fonction de répartition de Y en fonction de F la fonction de répartition de X*
3) *En déduire la densité de probabilité de la variable Y*
4) *Prouver que $E(Y^2)$ est égale à l'unité*
5) *Prouver que la médiane de Y est le troisième quartile de la variable X*

Corrigé

1) $X \leadsto \mathcal{N}(0,1) \Rightarrow \Omega_X =]-\infty, +\infty[$

$Y = |X| \Rightarrow \Omega_Y = [0, +\infty[$

2) $G(y) = P(Y \le y) = P(|X| \le y) = P(-y \le X \le y) = F(y) - F(-y)$

$F(y) = P(X \le y)$ *autrement dit* $F(y)$ *est la f.r de la v.a X*

or $F(-y) = 1 - F(y)$ *, donc* $G(y) = F(y) - \big(1 - F(y)\big)$

$$d'\text{où } \boxed{G(y) = 2F(y) - 1}$$

3) *Soit $g(y)$ la d.d.p de la v.a Y, or* $\frac{dG(y)}{dy} = g(y)$ *et* $\frac{dF(y)}{dy} = f(y)$

$$G(y) = 2F(y) - 1 \Rightarrow \forall\, y \in [0, +\infty[\ \frac{dG(y)}{dy} = \frac{d[2F(y) - 1]}{dy} \Rightarrow \forall\, y \in [0, +\infty[\ g(y) = 2\left(\frac{dF(y)}{dy}\right)$$

$$\Longrightarrow \forall\, y \in [0,+\infty[\ g(y) = 2f(y)$$

$$d'\text{où la d.d.p de la v.a } Y :\ \boxed{g(y) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\, e^{-\frac{y^2}{2}} & , \ \forall\, y \in [0,+\infty[\\ 0 & , \text{ailleurs} \end{cases}}$$

4) $E(Y^2) = E(|X|^2) = E(X^2)$

$$or \begin{cases} V(X) = 1 \\ V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 \Longrightarrow E(X^2) = 1\ D'\text{où} \boxed{E(Y^2) = 1} \\ E(X) = 0 \end{cases}$$

5) *Soit* Me_Y *la valeur médiane de la v.a* Y, *ce qui donne* $G(Me_Y) = \frac{1}{2}$

or $G(y) = 2F(y) - 1$ *donc en particulier* $G(Me_Y) = 2F(Me_Y) - 1 \Leftrightarrow 2F(Me_Y) - 1 = \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 2F(Me_Y) = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow F(Me_Y) = \dfrac{3}{4}$

Notons Q_{3_X} *le troisième quartile de la v.a* X, *ce qui donne* $F\left(Q_{3_X}\right) = \dfrac{3}{4}$

Comme toute f.r , F *réalise une bijection sur* Ω_X *par lusuite :* $F\left(Q_{3_X}\right) = G(Me_Y)$

$$d'\text{où} \boxed{Q_{3_X} = Me_Y}$$

Institut de Financement du Développement du Maghreb Arabe
CONCOURS DE RECRUTEMENT DE LA XXVIème PROMOTION
JUILLET 2006

Exercice 4 : *(8 points : 1+1,5+1+1,5+1,5+1,5)*

ÉNONCÉ

Le rendement X *d'une action à la bourse des valeurs suit une loi normale d'espérance mathématique* m *et de variance* σ^2 : $X \leadsto \mathcal{N}(m,\sigma^2)$. *On note* $F(x)$ *la fonction de répartition de la loi normale centrée-réduite.*

1) *Déterminer la valeur numérique de la probabilité pour que* X *soit comprise entre* $m - 2\sigma$ *et* $m + 2\sigma$: $(m - 2\sigma \leq X \leq m + 2\sigma)$
2) *Ayant* n *observations indépendantes de la variable* X *notées* $X_1, X_2, \dots, X_n$.

$On\ pose: \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \ \ et\ \ S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$

a) *Quelles sont les interprétations économiques des variables* $\overline{X}$ *et* S^2 ?

b) *Prouver que* $\overline{X}$ *est un estimateur sans biais de* m

c) *Dans cette question, on suppose que* $n = 2$.

i. *Prouver que* S^2 *s'écrit en fonction de* $(X_1 - X_2)$

ii. *Vérifier que* $\overline{X}$ *et* S^2 *sont indépendantes*

iii. *Interpréter ce dernier résultat en termes de relation entre la rentabilité et le risque.*

Corrigé

1) $P(m - 2\sigma \leq X \leq m + 2\sigma) = P\left(-2 \leq \frac{X-m}{\sigma} \leq 2\right)$

Ainsi $P(m - 2\sigma \leq X \leq m + 2\sigma) = P(-2 \leq Y \leq 2)$ *où* $Y = \dfrac{X-m}{\sigma} \leadsto \mathcal{N}(0,1)$, *si* $X \leadsto \mathcal{N}(m,\sigma^2)$

$P(m - 2\sigma \leq X \leq m + 2\sigma) = \mathrm{F}(2) - \mathrm{F}(-2) = \mathrm{F}(2) - \big(1 - \mathrm{F}(2)\big) = 2\mathrm{F}(2) - 1 = (2 \times 0{,}9772) - 1$

$$\boxed{P(m - 2\sigma \leq X \leq m + 2\sigma) = 95{,}44\%}$$

2)

a) $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$: *Le rendement moyen des actions*

$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$: *Un coefficient de risque, mesurant les écarts constatés entre les différents rendements et le rendement moyen.*

b) $E(\overline{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}E(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m = \frac{1}{n}(n.m) = m$

$$\boxed{\widehat{m} = \overline{X}\ \text{est un estimateur sans biais de } m}$$

c)

i. $S^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}(X_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{2}\left[(X_1 - \overline{X})^2 + (X_2 - \overline{X})^2\right]$. $Or\ \overline{X} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} X_i = \frac{X_1+X_2}{2}$

Par la suite $S^2 = \dfrac{1}{2}\left[\left(X_1 - \left(\dfrac{X_1+X_2}{2}\right)\right)^2 + \left(X_2 - \left(\dfrac{X_1+X_2}{2}\right)\right)^2\right] = \dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{X_1-X_2}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{X_1-X_2}{2}\right)^2\right]$

$$\boxed{S^2 = \left(\frac{X_1 - X_2}{2}\right)^2}$$

ii.

$\begin{cases} X_i \leadsto \mathcal{N}(m,\sigma^2)\ ;\ i = 1,2 \\ X_1\ et\ X_2\ sont\ indépendantes \end{cases} \Rightarrow (X_1 - X_2) \leadsto \mathcal{N}(0, 2\sigma^2) \Rightarrow S = \left(\dfrac{X_1 - X_2}{2}\right) \leadsto \mathcal{N}\left(0, \dfrac{\sigma^2}{2}\right)$

$et\ \overline{X} \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(m, \frac{\sigma^2}{2}\right)$ *donc* $\overline{X}$ *et* S *deux v. a. gaussiennes*

Calculons $Cov(\overline{X}, S)$:

$$Cov(\overline{X}, S) = Cov\left[\left(\frac{X_1 + X_2}{2}\right), \left(\frac{X_1 - X_2}{2}\right)\right] = \frac{1}{4}Cov[(X_1 + X_2), (X_1 - X_2)]$$

$$= 1/4\left[Cov[X_1, (X_1 - X_2)] + Cov[X_2, (X_1 - X_2)]\right]$$

$$= 1/4\,[Cov(X_1, X_1) + Cov(X_1, -X_2) + Cov(X_2, X_1) + Cov(X_2, -X_2)]$$

$$= 1/4\,[Var(X_1) - Cov(X_1, X_2) + Cov(X_1, X_2) - Cov(X_2, X_2)] = 1/4\,[Var(X_1) - Var(X_2)]$$

$Cov(\overline{X}, S) = 0$ *et* $\overline{X}$ *et* S *deux v. a. normales , donc* $\overline{X}$ *et* S *sont indépendantes*

Soient $f(\overline{X}) = \overline{X}$ *et* $g(S) = S^2$, $E[f(\overline{X})] = E(\overline{X}) = m$

$$D'autre\ part\ S = \left(\frac{X_1 - X_2}{2}\right) \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma^2}{2}\right) \Rightarrow \frac{S}{\sigma/\sqrt{2}} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1) \Rightarrow \left(\frac{S}{\sigma/\sqrt{2}}\right)^2 \rightsquigarrow \chi^2(1)$$

$$ainsi\ E\left[\left(\frac{S}{\sigma/\sqrt{2}}\right)^2\right] = 1 \Leftrightarrow E\left(\frac{S^2}{\sigma^2/2}\right) = 1 \Leftrightarrow E(S^2) = \frac{\sigma^2}{2}$$

et $E[g(S)] = E(S^2) = \frac{\sigma^2}{2}$ *en effet (les v. a.* $f(X)$ *et* $g(Y)$ *sont intégrables)*

$$d'où\ \boxed{\overline{X}\ et\ S^2\ sont\ indépendantes}$$

iii.

S^2 *mesure le risque ,* $\overline{X}$ *étant le rendement moyen d'un portefeuille équipondéré.*

$\overline{X}$ *et* S^2 *sont indépendantes , cela implique le rendement moyen d'un portefeuille équipondéré est indépendant du risque*

Institut de Financement du Développement du Maghreb Arabe
CONCOURS DE RECRUTEMENT DE LA XXXVIème PROMOTION (BANQUE)
AOÛT 2016

Exercice 5 - Partie 1 : (5 points : 2+1+1+1)

ÉNONCÉ

Partie 1 :

On considère deux variables aléatoires X_1 *et* X_2 *normales centrées* : $E(X_i) = 0$, *et réduites* $Var(X_i) = 1$; $i = 1, 2$ *ayant même covariance égale à* c : $Cov(X_1, X_2) = c$.

On pose $Y_1 = X_1 + X_2$ *et* $Y_2 = X_1 + 2X_2$

1) *Calculer les espérances mathématiques et les variances de* Y_1 *et de* Y_2
2) *Déterminer la matrice de variance-covariance du vecteur* $Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}$
3) *Pour quelles valeur de c les variables* Y_1 *et* Y_2 *sont elles indépendantes* ?

Justifier votre réponse.

4) *Pour cette valeur de c, calculer la variance de* Y_1 . *Prouver que cette variable est certaine* .

Corrigé

Partie 1 :

1)

· $E(Y_1) = E(X_1 + X_2) = \underbrace{E(X_1)}_{0} + \underbrace{E(X_2)}_{0} \Rightarrow \boxed{E(Y_1) = 0}$

· $E(Y_1) = E(X_1 + 2X_2) = \underbrace{E(X_1)}_{0} + 2\,\underbrace{E(X_2)}_{0} \Rightarrow \boxed{E(Y_2) = 0}$

· $Var(Y_1) = Var(X_1 + X_2) = \underbrace{Var(X_1)}_{1} + \underbrace{Var(X_2)}_{1} + 2\,\underbrace{Cov(X_1, X_2)}_{c} \Rightarrow \boxed{Var(Y_1) = 2(1 + c)}$

· $Var(Y_2) = Var(X_1 + 2X_2) = \underbrace{Var(X_1)}_{1} + 2^2\,\underbrace{Var(X_2)}_{1} + \left[2 \times 1 \times 2\,\underbrace{Cov(X_1, X_2)}_{c}\right]$

$\Rightarrow \boxed{Var(Y_2) = 5 + 4c}$

2) *On a* $Var(Y_1) = 2(1 + c)$ *et* $Var(Y_2) = 5 + 4c$. *Calculons* $Cov(Y_1, Y_2)$:

$$Cov(Y_1,Y_2)=Cov\big((X_1+X_2),(X_1+2X_2)\big)=Cov\big(X_1,(X_1+2X_2)\big)+Cov\big(X_2,(X_1+2X_2)\big)$$

$$=\Big[\underbrace{Cov(X_1,X_1)}_{Var(X_1)}+Cov(X_1,2X_2)\Big]+\Big[\underbrace{Cov(X_2,X_1)}_{c}+Cov(X_2,2X_2)\Big]$$

$$=[Var(X_1)+2Cov(X_1,X_2)]+\Big[c+2\underbrace{Cov(X_2,X_2)}_{Var(X_2)}\Big]=[1+2c]+[c+2]$$

$$\boxed{Cov(Y_1,Y_2)=3(1+c)}$$

$$D'où:\ \boxed{\Omega_Y=Var\left(\begin{bmatrix}Y_1\\Y_2\end{bmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2(1+c)&3(1+c)\\3(1+c)&5+4c\end{pmatrix}}$$

3) ☑ ***Remarques :*** *On a :* $\begin{cases}X_i\rightsquigarrow\mathcal{N}(0,1)\,;\,i=1,2\\ Y_1(resp.Y_2)\text{ est une combinaison linéaire de }X_1\text{ et }X_2\end{cases}$

Pour que Y_1 et Y_2 soient distribuées normalment, il suffit donc d'avoir $Cov(X_1,X_2)=0$, autrement dit $c=0$ si non la stabilité ne sera pas garantie et on n'a pas nécessairement des v.a. normales ‼

En effet dire que Y_1 et Y_2 sont indépendantes sont indépendantes si et seulement si $Cov(Y_1,Y_2)=0$ (en d'autres termes $c=-1$) cela suppose que Y_1 et Y_2 soient distribuées normalment $(c=0)$ d'où l'absurdité de la question 3)

Reformulons donc la question 3) : Pour quelles valeur de c les variables Y_1 et Y_2 sont elles non corrélées ? Justifier votre réponse.

Y_1 *et* Y_2 *sont elles non corrélées* $\Leftrightarrow Cov(Y_1,Y_2)=0 \Leftrightarrow 3(1+c)=0$

$$\boxed{Y_1\text{ et }Y_2\text{ sont elles non corrélées }\Leftrightarrow c=-1}$$

4) *Ainsi pour $c=-1$, on obtient $V(Y_1)=2\big(1+(-1)\big)=0$*

et $Y_1=E(Y_1)=0\ (p.s.)\Leftrightarrow Y_1$ est presque sûrement constante.

En effet : $\begin{cases}P(Y_1=0)=1\\P(Y_1=0)=0\,,\text{pour tout }y_i\neq0\end{cases}$ *d'où Y_1 est une variable certaine et on ait presque sûre que $Y_1=0$.*

La loi de Y_1 sera donc celle de de Dirac δ_0 : $\boxed{Y_1\rightsquigarrow\delta_0}$

☑ ***Remarques :*** *Pour* $c=-1,\ \rho_{X_1,X_2}=\dfrac{Cov(X_1,X_2)}{\sqrt{V(X_1)V(X_2)}}=\dfrac{-1}{\sqrt{1\times1}}=-1\Rightarrow X_2=a+bX_1$

Or $E(X_1)=E(X_2)=0$, *par la suite :* $E(a+bX_1)=0\Leftrightarrow a+b\underbrace{E(X_1)}_{0}=0\Leftrightarrow a=0$

Donc, $X_2=bX_1$, *d'autre part :* $Cov(X_1,X_2)=-1\Rightarrow Cov(X_1,bX_1)=-1\Leftrightarrow b\underbrace{Cov(X_1,X_1)}_{V(X_1)}=-1$

$\Leftrightarrow b\underbrace{V(X_1)}_{1} = -1 \Leftrightarrow b = -1$

D'où $\boxed{X_2 = -X_1}$

Institut de Financement du Développement du Maghreb Arabe
CONCOURS DE RECRUTEMENT DE LA XXXVIIème PROMOTION(BANQUE)
AOÛT 2017

Exercice 6 -Deuxième Partie : *(3 points : 1,5+1,5)*

ÉNONCÉ

Deuxième Partie :

On suppose dans cette partie, que les paramètres a et b sont nuls en gardant les memes hypothèses sur les termes d'erreur ϵ_t

avec : ▪ $y_t = ax_t + b + \epsilon_t\ , t = 1, 2, \dots, 200$

▪ ϵ_t *sont des termes aléatoires identiquement distribués selon une loi normale d'espérance mathématique nulle et de variance* σ^2

1) *Calculer l'espérance mathématique et la variance de* y_t^2
2) *Déterminer la densité de probabilité de la variable* $z = y_t^2$

Corrigé

1) *On a* $a = b = 0$, *par la suite,* $y_t = \epsilon_t$, *or* $\epsilon_t \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, *donc de même pour la v.a.* y_t

En effet, $y_t \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2) \Rightarrow y_t/\sigma \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1) \Rightarrow y_t^2/\sigma^2 \rightsquigarrow \chi^2(1)$

ainsi : $\begin{cases} E(y_t^2/\sigma^2) = 1 \\ V(y_t^2/\sigma^2) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} E(y_t^2)/\sigma^2 = 1 \\ V(y_t^2)/\sigma^4 = 2 \end{cases}$. *D'où* $\boxed{\begin{cases} E(y_t^2) = \sigma^2 \\ V(y_t^2) = 2\sigma^4 \end{cases}}$

2)

$y_t \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, *donc la d.d.p de la v.a.Y sera :* $f_Y(y_t) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y_t^2}{2\sigma^2}}$ *où* $y_t \in \Omega_Y =]-\infty, +\infty[$

Notons $F_Y(y_t) = P(Y \leq y_t)$ *et* $F_Z(z_t) = P(Z \leq z_t)$, *les fonctions de répartitions respectives des v.a Y et Z,*

$On\ a:\ Z = Y^2, par\ la\ suite\ \Omega_Y =]-\infty,+\infty[\Rightarrow \Omega_Z \subseteq [0,+\infty[$

$$F_Z(z_t) = P(Z \le z_t) = P(Y^2 \le z_t) = P(-\sqrt{z_t} \le Y \le \sqrt{z_t}) = F_Y(\sqrt{z_t}) - F_Y(-\sqrt{z_t})$$

la d.d.p de la v.a. Z se déduit de sa f.r par dérivation :

$$\forall z_t \in]0,+\infty[\ ;\ f_Z(z_t) = \frac{dF_Z(z_t)}{dz_t} = \frac{dF_Y(\sqrt{z_t})}{dz_t} - \frac{dF_Y(-\sqrt{z_t})}{dz_t}$$

$$\forall z_t \in]0,+\infty[;\ f_Z(z_t) = (\sqrt{z_t})' f_Y(\sqrt{z_t}) - (-\sqrt{z_t})' f_Y(-\sqrt{z_t}) = \frac{1}{2\sqrt{z_t}} f_Y(\sqrt{z_t}) + \frac{1}{2\sqrt{z_t}} f_Y(-\sqrt{z_t})$$

On remarquera facilement que f_Y *est une fonction paire* $\Rightarrow f_Y(-\sqrt{z_t}) = f_Y(\sqrt{z_t})$

$$Par\ la\ suite, \forall z_t \in]0,+\infty[;\ f_Z(z_t) = \frac{1}{\sqrt{z_t}} f_Y(\sqrt{z_t}) = \frac{1}{\sqrt{z_t}} \frac{e^{-\frac{(\sqrt{z_t})^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} = \frac{e^{-\frac{z_t}{2\sigma^2}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2\sigma^2}\sqrt{z_t}}$$

$$\forall z_t \in]0,+\infty[;\ f_Z(z_t) = \frac{e^{-\frac{z_t}{2\sigma^2}}}{\sqrt{\pi}(2\sigma^2)^{\frac{1}{2}} z_t^{\frac{1}{2}}} = \frac{z_t^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{z_t}{2\sigma^2}}}{\sqrt{\pi}(2\sigma^2)^{\frac{1}{2}}}$$

D'où la densité de probabilité de la variable $Z = Y^2$:
$$\boxed{f_Z(z_t) = \begin{cases} \dfrac{\left[z_t^{\frac{1}{2}-1}\right]\left[e^{-\frac{z_t}{2\sigma^2}}\right]}{\sqrt{\pi}(2\sigma^2)^{\frac{1}{2}}}, si\ z_t > 0 \\ 0, si\ non \end{cases}}$$

On pourra remarquer que la v.a. Z est distribuée suivant la loi Gamma de paramètre $\frac{1}{2}$ *et* $2\sigma^2$: $\Gamma\left(\frac{1}{2}, 2\sigma^2\right)$

$$f_Z(z_t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi z_t}} e^{-\frac{z_t}{2\sigma^2}} = \frac{z_t^{\left(\frac{1}{2}-1\right)}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2\sigma^2}} e^{-\frac{z_t}{2\sigma^2}} = \frac{z_t^{\left(\frac{1}{2}-1\right)}}{\sqrt{\pi}(2\sigma^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{z_t}{2\sigma^2}} = \frac{\left[z_t^{\left(\frac{1}{2}-1\right)}\right]\left[e^{-\frac{z_t}{2\sigma^2}}\right]}{\Gamma(1/2)(2\sigma^2)^{\frac{1}{2}}}$$

car on a : $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

On pourra aussi déduire la distribution Gamma de la v.a. Z d'une autre manière, c-à-d. en introduisant la distribution de khi-deux :

on a : $y_t^2/\sigma^2 \rightsquigarrow \chi^2(1)$, *donc* $z_t/\sigma^2 \rightsquigarrow \chi^2(1)$, *or* $\Gamma(1/2, 2) \equiv \chi^2(1)$, *donc* $z_t/\sigma^2 \rightsquigarrow \Gamma(1/2, 2)$

or $z_t/\sigma^2 \rightsquigarrow \Gamma(1/2, 2) \Rightarrow \sigma^2(z_t/\sigma^2) \rightsquigarrow \Gamma(1/2, 2\sigma^2)$, *puisque* $\sigma^2 > 0$

d'où on retrouve : $\boxed{z_t \rightsquigarrow \Gamma(1/2, 2\sigma^2)}$ *et*
$$\boxed{f_Z(z_t) = \begin{cases} \dfrac{\left(z_t^{\frac{1}{2}-1}\right)\left(e^{-\frac{z_t}{2\sigma^2}}\right)}{\sqrt{\pi}(2\sigma^2)^{\frac{1}{2}}}, si\ z_t > 0 \\ 0, si\ non \end{cases}}$$

Institut de Financement du Développement du Maghreb Arabe
CONCOURS DE RECRUTEMENT D'UNE PROMOTION SPÉCIALE
Dédiée exclusivement au Ministère des Finances Tunisien
Mai 2023

Exercice 7 : (4 points : 1 point par question)

ÉNONCÉ

Soit X une variable normale centrée réduite : $E(X)=0$ *et* $V(X)=1$. *On pose* $Y=X^2$

1- *Déterminer la fonction de répartition de Y ainsi que sa densité de probabilité.*
2- *Prouver que la variable Y est une distribution de Khi-Deux avec le nombre de degrés de liberté à déterminer. En déduire la variance de Y*
3- *Comparer $E(Y)$ à la médiane de Y sachant que pour une loi normale centrée réduite ayant une fonction de répartition F, on a $F(1)=0,84$*
4- *Prouver que la covariance de X et de Y est nulle. Interpréter ce résultat*

Corrigé

1-

- $On\ a : \begin{cases} Y = X^2 \\ X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1) \Rightarrow X(\Omega)=\mathbb{R} \end{cases}$, *par la suite* $Y(\Omega)\subseteq [0,+\infty[$
- $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2\le y)=P(-\sqrt{y}\le X\le \sqrt{y})=F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y})$

$F_Y(y)=F_X(\sqrt{y})-\left(1-F_X(\sqrt{y})\right)$

$D'où$ $\boxed{\forall\, y\in[0,+\infty[,\ F_Y(y)=2F_X(\sqrt{y})-1}$

la d.d.p de la v.a. Y se déduit de sa f.r par dérivation :

$$\forall y\in\,]0,+\infty[\,;\ f_Y(y)=\frac{dF_Y(y)}{dy}=\frac{d[2F_X(\sqrt{y})-1]}{dy}=\frac{2d[F_X(\sqrt{y})]}{dy}=2(\sqrt{y})'F'_X(\sqrt{y})$$

$$f_Y(y)=2\left(\frac{1}{2\sqrt{y}}\right)f_X(\sqrt{y})=\frac{1}{\sqrt{y}}f_X(\sqrt{y})$$

$Or, \forall x\in\mathbb{R}\,;\ f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ *par la suite*, $f_X(\sqrt{y})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\sqrt{y})^2}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y}{2}}$

$D'où\ la\ d.d.p\ de\ la\ v.a\ X$: $\boxed{\forall\, y\in\,]0,+\infty[,\ f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-\frac{y}{2}}, si\ y>0\\ 0, si\ non\end{cases}}$

2-

$$La\ v.a.Y\ \text{é}tant\ le\ carr\text{é}\ d'une\ variable\ normale\ centr\text{é}e\ r\text{é}duite \begin{cases} Y = X^2 \\ X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1) \end{cases}$$

$$D'o\text{ù} \boxed{Y \rightsquigarrow \chi^2(1)} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} E(Y) = 1 \\ V(Y) = 2 \end{cases}}$$

3-

$$Soit\ Me_Y\ la\ valeur\ m\text{é}diane\ de\ la\ v.a\ Y, ce\ qui\ donne\ F_Y(Me_Y) = \frac{1}{2}$$

$$or\ \forall\ y \in [0,+\infty[, F_Y(y) = 2F_X(\sqrt{y}) - 1\ \ donc\ en\ particulier\ \ F_Y(Me_Y) = 2F_X(\sqrt{Me_Y}) - 1$$

$$Ainsi, 2F_X(\sqrt{Me_Y}) - 1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2F_X(\sqrt{Me_Y}) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow F_X(\sqrt{Me_Y}) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \Phi(\sqrt{Me_Y}) = \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{Me_Y} = \Phi^{-1}(0,75) = 0,6745 \Leftrightarrow \boxed{Me_Y = 0,455}$$

$En\ effet\ \boxed{E(Y) \geq Me_Y}\ puisque\ toute\ distribution\ de\ Khi\text{-}Deux\ est\ asym\text{é}trique$ à $droite$.

$N\text{é}anmoins\ pour\ des\ d.d.l\ assez\ grand\ cette\ distribution\ tend$ à $\text{ê}tre\ sym\text{é}trique$.

4-

$$Cov(X,Y) = E(XY) - \underbrace{E(X)}_{0} E(Y) = E(XY) = E(X.X^2) = E(X^3) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 f_X(x)dx$$

$$Cov(X,Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$x^3 f_X(x) = \frac{x^3}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\ est\ une\ fonction\ paire \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 f_X(x)dx = 0$$

$$D'o\text{ù} \boxed{Cov(X,Y) = 0}$$

$$Il\ \ en\ r\text{é}sulte\ que: \boxed{X\ et\ \ Y = X^2\ sont\ 2\ v.a.non\ corr\text{é}l\text{é}es}$$

Institut de Financement du Développement du Maghreb Arabe
CONCOURS DE RECRUTEMENT DE LA XXIVème PROMOTION
JUILLET 2004

Exercice 8 : *(10 points : 1 point par question)*

ÉNONCÉ

Considérons n variables aléatoires indépendantes $y_1, y_2, \dots, y_n$ *ayant pour espérance mathématique m et variance* σ^2 :

$$\begin{cases} E(y_i) = m \\ V(y_i) = \sigma^2 \end{cases} \text{ pour } i = 1, 2, \dots, n \text{ ; on note } \overline{y}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \text{ et } S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y}_n)^2$$

1) *Calculer* $E(\overline{y}_n)$ *et* $V(\overline{y}_n)$
2)
   a) *Exprimer* $\overline{y}_n$ *en fonction de* $\overline{y}_{n-1}$
   b) *Déterminer la covariance entre* $\overline{y}_{n-1}$ *et* $\overline{y}_n$
   c) *Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre* $\overline{y}_{n-1}$ *et* $\overline{y}_n$
   d) *Interpréter ce dernier résultat*
3)
   a) *Trouver un minorant pour* $P[-\alpha \le \overline{y}_n - m \le \alpha]$, *pour un scalaire positif* α
   b) *En déduire la limite en probabilité de* $\overline{y}_n$ *quand* $n \to +\infty$
4)
   a) *Prouver que l'on a :*
   $$nS^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - m)^2 - n(\overline{y}_n - m)^2$$
   b) *En admettant que les* y_i *sont des lois normales, prouver que* $\frac{nS^2}{\sigma^2}$ *est la différence de deux lois de Khi-Deux dont il faut préciser les degrés de liberté*
   c) *En admettant que* $\overline{y}_n$ *et* $\sum_{i=1}^{n}(y_i - m)^2$ *sont indépendantes, en déduire la loi de* $\dfrac{nS^2}{\sigma^2}$

Corrigé

1)

- $$E(\overline{y}_n) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\right) = \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(y_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m = \frac{1}{n}(n.m). \text{ D'où } \boxed{E(\overline{y}_n) = E(y_i) = m}$$

$$V(\overline{y}_n) = V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\right) = \frac{1}{n^2}V\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)$$

$or\ y_1, y_2, \dots, y_n\ sont\ des\ variables\ aléatoires\ indépendantes \Rightarrow V\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(y_i)$

$par\ la\ suite\ V(\overline{y}_n) = \frac{1}{n^2}V\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(y_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \sigma^2 = \frac{1}{n}(n.\sigma^2) = \frac{\sigma^2}{n}$

$$\boxed{V(\overline{y}_n) = \frac{V(y_i)}{n} = \frac{\sigma^2}{n}}$$

2)

a)

$$\overline{y}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{1}{n}\left(y_n + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right) = \frac{1}{n}[y_n + (n-1)\overline{y}_{n-1}] \Rightarrow \boxed{\overline{y}_n = \left(\frac{n-1}{n}\right)\overline{y}_{n-1} + \frac{1}{n}y_n}$$

b)

$$Cov(\overline{y}_{n-1}, \overline{y}_n) = Cov\left(\overline{y}_{n-1}, \left(\frac{n-1}{n}\right)\overline{y}_{n-1} + \frac{1}{n}y_n\right) = \frac{n-1}{n}Cov(\overline{y}_{n-1}, \overline{y}_{n-1}) + \frac{1}{n}Cov(\overline{y}_{n-1}, y_n)$$

$$Cov(\overline{y}_{n-1}, \overline{y}_n) = \frac{n-1}{n}V(\overline{y}_{n-1}) + \frac{1}{n}Cov(\overline{y}_{n-1}, y_n)$$

$or\ les\ y_1, y_2, \dots, y_n\ sont\ des\ variables\ aléatoires\ indépendantes$

$$Cov(\overline{y}_{n-1}, y_n) = Cov\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} y_i, y_n\right) = \frac{1}{n-1}Cov\left(\sum_{i=1}^{n-1} y_i, y_n\right) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} \underbrace{Cov(y_i, y_n)}_{0\,;\,\forall i \neq n}$$

$$\Rightarrow Cov(\overline{y}_{n-1}, y_n) = 0$$

$D'autre\ part\ V(\overline{y}_{n-1}) = \frac{\sigma^2}{n-1}, ainsi\ Cov(\overline{y}_{n-1}, \overline{y}_n) = \left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{\sigma^2}{n-1}\right)$

$D'où\ \boxed{Cov(\overline{y}_{n-1}, \overline{y}_n) = V(\overline{y}_n) = \frac{\sigma^2}{n}}$

c) $\rho_{\overline{y}_{n-1},\overline{y}_n} = \frac{Cov(\overline{y}_{n-1},\overline{y}_n)}{\sqrt{V(\overline{y}_{n-1})V(\overline{y}_n)}} = \frac{\sigma^2/n}{\sqrt{\left(\frac{\sigma^2}{n-1}\right)\left(\frac{\sigma^2}{n}\right)}} = \left(\frac{\sigma^2}{n}\right)\left(\frac{\sqrt{(n-1)n}}{\sigma^2}\right) \Rightarrow \boxed{\rho_{\overline{y}_{n-1},\overline{y}_n} = \sqrt{1 - \frac{1}{n}}}$

d) $Pour\ n\ assez\ grand, on\ obtient\ une\ corrélation\ positive\ parfaite$:

$$\begin{cases} \rho_{\overline{y}_{n-1},\overline{y}_n} > 0 & \Rightarrow \overline{y}_{n-1}\ et\ \overline{y}_n\ varient\ dans\ le\ même\ sens \\ \lim\limits_{n\to\infty} \rho_{\overline{y}_{n-1},\overline{y}_n} = 1 & \Rightarrow pour\ n\ assez\ grand, \overline{y}_{n-1}\ et\ \overline{y}_n\ ont\ des\ valeurs\ voisines \end{cases}$$

3)

a) $On\ a : P[-\alpha \leq \overline{y}_n - m \leq \alpha], or\ E(\overline{y}_n) = m$

$$donc\ P[-\alpha \le \overline{y}_n - m \le \alpha] = P[-\alpha \le \overline{y}_n - E(\overline{y}_n) \le \alpha] = P[|\overline{y}_n - E(\overline{y}_n)| \le \alpha\,]$$
$$= 1 - P[|\overline{y}_n - E(\overline{y}_n)| > \alpha\,]$$

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev on a $P[|\overline{y}_n - E(\overline{y}_n)| > \alpha\,] \le \dfrac{V(\overline{y}_n)}{\alpha^2}$

$V(\overline{y}_n) = \dfrac{\sigma^2}{n}$ *par la suite* $P[|\overline{y}_n - E(\overline{y}_n)| > \alpha\,] \le \dfrac{\sigma^2}{n\alpha^2} \Leftrightarrow 1 - P[|\overline{y}_n - E(\overline{y}_n)| > \alpha\,] \ge 1 - \dfrac{\sigma^2}{n\alpha^2}$

D'où $\boxed{P[-\alpha \le \overline{y}_n - m \le \alpha] \ge 1 - \dfrac{\sigma^2}{n\alpha^2}}$, $1 - \dfrac{\sigma^2}{n\alpha^2}$ *étant un minorant pour* $P[-\alpha \le \overline{y}_n - m \le \alpha]$

b) *On a ainsi :* $1 - \frac{\sigma^2}{n\alpha^2} \le P[-\alpha \le \overline{y}_n - m \le \alpha] \le 1$

Or $\lim_{n\to\infty}\left(1 - \dfrac{\sigma^2}{n\alpha^2}\right) = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} P[-\alpha \le \overline{y}_n - m \le \alpha] = 1$ *ou encore* $\lim_{n\to\infty} P[|\overline{y}_n - m| \le \alpha] = 1$

D'où $\overline{y}_n$ *converge en probabilité vers m :* $\boxed{\overline{y}_n \xrightarrow{P} m}$

4)

a) $nS^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \overline{y}_n)^2 = \sum_{i=1}^n [(y_i - m) - (\overline{y}_n - m)]^2$

$$nS^2 = \sum_{i=1}^n [(y_i - m)^2 - 2(\overline{y}_n - m)(y_i - m) + (\overline{y}_n - m)^2]$$
$$= \sum_{i=1}^n (y_i - m)^2 - 2(\overline{y}_n - m)\sum_{i=1}^n (y_i - m) + \sum_{i=1}^n (\overline{y}_n - m)^2$$
$$= \sum_{i=1}^n (y_i - m)^2 - 2(\overline{y}_n - m)\left(\underbrace{\sum_{i=1}^n y_i}_{n\overline{y}_n} - \underbrace{\sum_{i=1}^n m}_{n.m}\right) + n(\overline{y}_n - m)^2$$
$$= \sum_{i=1}^n (y_i - m)^2 - 2(\overline{y}_n - m)\big(n(\overline{y}_n - m)\big) + n(\overline{y}_n - m)^2$$
$$= \sum_{i=1}^n (y_i - m)^2 - 2n(\overline{y}_n - m)^2 + n(\overline{y}_n - m)^2$$

$$D'où\ \boxed{nS^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - m)^2 - n(\overline{y}_n - m)^2}$$

b)

$$y_i \backsim \mathcal{N}(m, \sigma^2) \Rightarrow \frac{y_i - m}{\sigma} \backsim \mathcal{N}(0,1) \Rightarrow \frac{(y_i - m)^2}{\sigma^2} \backsim \chi^2(1) \Rightarrow H = \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - m)^2}{\sigma^2} \backsim \chi^2(n) \quad (1)$$

$D'autre\ part\ \forall\ i \in \{1,2,\dots,n\}\ y_i \rightsquigarrow \mathcal{N}(m,\sigma^2)\ \ on\ a\ \overline{y}_n \rightsquigarrow \mathcal{N}\big(E(\overline{y}_n),V(\overline{y}_n)\big)$

$$or\ E(\overline{y}_n) = E(y_i) = m\ \ et\ \ V(\overline{y}_n) = \frac{V(y_i)}{n} = \frac{\sigma^2}{n} = \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2$$

$$on\ obtient\ \overline{y}_n \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(m,\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2\right) \Rightarrow U = \frac{\overline{y}_n - m}{\sigma/\sqrt{n}} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1) \Rightarrow U^2 = \frac{n(\overline{y}_n - m)^2}{\sigma^2} \rightsquigarrow \chi^2(1) \quad (2)$$

$$Par\ la\ suite\ \frac{nS^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - m)^2 - n(\overline{y}_n - m)^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n}\frac{(y_i - m)^2}{\sigma^2} - \frac{n(\overline{y}_n - m)^2}{\sigma^2} = H - U^2$$

$$D'où\ \boxed{W = \frac{nS^2}{\sigma^2} = H - U^2\ avec\ H \rightsquigarrow \chi^2(n)\ et\ U^2 \rightsquigarrow \chi^2(1)}$$

c) $Reformulons\ donc\ la\ question\ 4)$ b) : $En\ admettant\ que\ \overline{y}_n\ et\ \sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y}_n)^2\ sont\ indépendantes, en\ déduire\ la\ loi\ de\ \frac{nS^2}{\sigma^2}$

$$\overline{y}_n\ et\ \sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y}_n)^2\ sont\ indépendantes, d'après\ l'hypothèse\ de\ l'exercice.$$

$$Soient, f\ et\ g\ deux\ fonctions\ telles\ que :\ f(X) = \frac{X}{\sigma^2}\ et\ g(Y) = \frac{n(Y - m)^2}{\sigma^2}.$$

$$On\ vérifie\ facilement\ que : f\left(\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y}_n)^2\right) = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y}_n)^2 = W$$

$$et\ que\ g(\overline{y}_n) = \frac{n(\overline{y}_n - m)^2}{\sigma^2} = U^2$$

$D'autre\ part :\ f\ et\ g\ deux\ fonctions\ continues\ et :$

$E[g(\overline{y}_n)] = E(U) = 1\ , existe\ et\ finie\ , car\ U^2 \rightsquigarrow \chi^2(1)$

$$ainsi\ que\ E\left[f\left(\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y}_n)^2\right)\right] = E(W) = E(H - U^2) = E(H) - E(U^2) = n - 1, existe\ et\ finie\ ,$$

$car\ W = H - U^2\ , E(U^2) = 1\ et\ H \rightsquigarrow \chi^2(n), donc\ \ E(H) = n$

$$Il\ en\ résulte\ enfin\ que :\ W = f\left(\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y}_n)^2\right)\ et\ U^2 = g(\overline{y}_n)\ sont\ indépendantes.$$

$On\ se\ propose\ maintenant\ de\ déterminer\ la\ fonction\ génératrice\ des\ moments\ de$

$la\ variable\ aléatoire\ W = H - U^2$:

$Or\ W = H - U^2, donc\ H = W + U^2. Déterminons\ d'abord\ la\ fonction\ génératrice\ des$

$moments\ de\ la\ variable\ aléatoire\ H : M_H(t) = M_{W+U^2}(t) = M_W(t)M_{U^2}(t)\ , car\ les\ variables$

W *et* U^2 *sont indépendantes* $\Rightarrow M_W(t) = \dfrac{M_H(t)}{M_{U^2}(t)}$

$$or \begin{cases} H \leadsto \chi^2(n) \Rightarrow M_H(t) = (1-2t)^{-\frac{n}{2}}, \forall\, t < \dfrac{1}{2} \\ et \\ U^2 \leadsto \chi^2(1) \Rightarrow M_{U^2}(t) = (1-2t)^{-\frac{1}{2}}, \forall\, t < \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow M_W(t) = \frac{M_H(t)}{M_{U^2}(t)} = \frac{(1-2t)^{-\frac{n}{2}}}{(1-2t)^{-\frac{1}{2}}}$$

Il en résulte que $M_W(t) = (1-2t)^{-\frac{(n-1)}{2}}$ *d'où* $\boxed{\dfrac{nS^2}{\sigma^2} \leadsto \chi^2(n-1)}$

Institut de Financement du Développement du Maghreb Arabe
CONCOURS DE RECRUTEMENT DE LA XXIX^{ème} PROMOTION
Juillet 2009

Exercice 9 : (10 points : 1 point par question)

ÉNONCÉ

On considère une grandeur x_t *positive telle que* :

$y_t = \ln x_t = at + b + u_t$ *pour* $t = 1, 2, \dots, T$

Avec u_t *des termes d'erreurs indépendants, suivant la loi normale centrée réduite* :

$E(u_t) = 0\,; V(u_t) = 1$. *On pose* $\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$

1) *Prouver que si on néglige le terme d'erreur, le paramètre* a *est le taux de croissance moyen de la grandeur* y_t
2) *Calculer l'espérance mathématique et la variance de* Δy_t
3) *Prouver que le coefficient de corrélation linéaire entre* Δy_t *et* Δy_{t-1} *est égale à* $-\dfrac{1}{2}$
4) *Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre* Δy_t *et* Δy_{t-2}
5) *On suppose dans cette question que* $b = 0$
   i. *Déterminer en fonction des valeurs de* y_t *et de* t *pour* $t = 1, 2, \dots, T$ *l'expression de l'estimateur de* a *par les moindres carrés ordinaires*
   ii. *Exprimer cette estimation en fonction des valeurs de* x_t *et de* t *pour* $t = 1, 2, \dots, T$
6) *On suppose dans cette question que* $a = b = 0$
   i. *Déterminer la fonction de répartition de* x_t
   ii. *En déduire la densité de probabilité de* x_t

iii. *Déterminer la moyenne géométrique de x_t pour $t = 1, 2, \dots, T$ en fonction de la moyenne arithmétique des variables u_t*

iv. *En déduire l'espérance mathématique de cette moyenne géométrique*

Corrigé

1) $\Delta y_t = y_t - y_{t-1} = (at + b + u_t) - (a(t-1) + b + u_{t-1})$
$= (at + b + u_t) - (at - a + b + u_{t-1}) = a + (u_t - u_{t-1}) = a + \Delta u_t$

En négligeant les perturbations $(\Delta u_t \cong 0)$ *on obtient* $\boxed{\Delta y_t \cong a}$, *taux de croissance moyen de la grandeur* $,(y_t)$: $\dfrac{y_t - y_{t-1}}{t-(t-1)} = \dfrac{\Delta y_t}{1} = \Delta y_t$

2)

$\cdot\ E(\Delta y_t) = E\big(a + (u_t - u_{t-1})\big) = a + \underbrace{E(u_t)}_{0} - \underbrace{E(u_{t-1})}_{0}$. *D'où* $\boxed{E(\Delta y_t) = a}$

$\cdot\ V(\Delta y_t) = V\big(a + (u_t - u_{t-1})\big) = V(u_t - u_{t-1})$

or les termes d'erreurs (u_t) *forment une suite de variables aléatoires i.i.d de la loi* $\mathcal{N}(0,1)$

$\Rightarrow Cov(u_t, u_s) = \begin{cases} 0\ , si\ t \neq s \\ V(u_t) = 1\ , si\ t = s \end{cases}$

$V(\Delta y_t) = \underbrace{V(u_t)}_{1} + \underbrace{V(u_{t-1})}_{1} - 2\,\underbrace{Cov(u_t, u_{t-1})}_{0}$. *D'où* $\boxed{V(\Delta y_t) = 2}$

3)

$$Cov(\Delta y_t, \Delta y_{t-1}) = Cov(a + \Delta u_t, a + \Delta u_{t-1}) = Cov(\Delta u_t, \Delta u_{t-1}) = Cov\big((u_t - u_{t-1}), (u_{t-1} - u_{t-2})\big)$$
$$= \underbrace{Cov(u_t, u_{t-1})}_{0} - \underbrace{Cov(u_t, u_{t-2})}_{0} - \underbrace{Cov(u_{t-1}, u_{t-1})}_{V(u_t)=1} + \underbrace{Cov(u_{t-1}, u_{t-2})}_{0}$$

par la suite , $Cov(\Delta y_t, \Delta y_{t-1}) = -1$

Or $V(\Delta y_{t-1}) = V\big(a + (u_{t-1} - u_{t-2})\big) = V(u_{t-1} - u_{t-2}) = \underbrace{V(u_{t-1})}_{1} + \underbrace{V(u_{t-2})}_{1} - 2\,\underbrace{Cov(u_{t-1}, u_{t-2})}_{0} = 2$

$\rho_{\Delta y_t, \Delta y_{t-1}} = \dfrac{Cov(\Delta y_t, \Delta y_{t-1})}{\sqrt{V(\Delta y_t)V(\Delta y_{t-1})}} = \dfrac{-1}{\sqrt{2 \times 2}}$. *D'où* $\boxed{\rho_{\Delta y_t, \Delta y_{t-1}} = -1/2}$

4)

$$Cov(\Delta y_t, \Delta y_{t-2}) = Cov(a + \Delta u_t, a + \Delta u_{t-2}) = Cov(\Delta u_t, \Delta u_{t-2}) = Cov\big((u_t - u_{t-1}), (u_{t-2} - u_{t-3})\big)$$
$$= \underbrace{Cov(u_t, u_{t-2})}_{0} - \underbrace{Cov(u_t, u_{t-3})}_{0} - \underbrace{Cov(u_{t-1}, u_{t-2})}_{0} + \underbrace{Cov(u_{t-1}, u_{t-3})}_{0}$$

par la suite , $Cov(\Delta y_t, \Delta y_{t-2}) = 0$ *et* $\boxed{\rho_{\Delta y_t, \Delta y_{t-2}} = 0}$

5)

i. $y_t = \ln x_t = at + u_t \Longrightarrow \hat{y}_t = \widehat{\ln x_t} = \hat{a}t$

$\hat{u}_t = y_t - \hat{y}_t$

La méthode des moindres carrés ordinaires consiste à minimiser la somme des carrés

des résidus : $\sum_{t=1}^{T} \hat{u}_t^2 = \Psi(\hat{a}) \Longrightarrow \Psi(\hat{a}) = \sum_{t=1}^{T} (y_t - \hat{y}_t)^2 = \sum_{t=1}^{T} (y_t - \hat{a}t)^2$

$$\Psi'(\hat{a}) = \sum_{t=1}^{T} 2 \underbrace{(y_t - \hat{a}t)'}_{-t} (y_t - \hat{a}t) = \sum_{t=1}^{T} -2t\,(y_t - \hat{a}t) = \sum_{t=1}^{T} (-2ty_t + 2\hat{a}t^2)$$

$$\Psi''(\hat{a}) = \sum_{t=1}^{T} 2t^2$$

$$\hat{a} \text{ solution de } (S) \begin{cases} \Psi'(\hat{a}) = 0 \\ \Psi''(\hat{a}) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{t=1}^{T} (-2ty_t + 2\hat{a}t^2) = 0 & (1) \\ \sum_{t=1}^{T} 2t^2 > 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1): \sum_{t=1}^{T} (2ty_t - 2\hat{a}t^2) = 0 \Leftrightarrow 2\sum_{t=1}^{T} ty_t - 2\hat{a}\sum_{t=1}^{T} t^2 = 0 \Leftrightarrow \hat{a}\sum_{t=1}^{T} t^2 = \sum_{t=1}^{T} ty_t \Leftrightarrow \hat{a} = \frac{\sum_{t=1}^{T} ty_t}{\sum_{t=1}^{T} t^2}$$

$$(2): \sum_{t=1}^{T} 2t^2 > 0 \text{ évidente . D'où } \boxed{\hat{a} = \left(\sum_{t=1}^{T} ty_t\right) \Big/ \left(\sum_{t=1}^{T} t^2\right)}$$

ii. $\boxed{\hat{a} = \left(\sum_{t=1}^{T} t \ln x_t\right) / \left(\sum_{t=1}^{T} t^2\right)}$

6)

i. $y_t = \ln x_t = u_t \Leftrightarrow x_t = e^{u_t}$

avec $u_t \leadsto \mathcal{N}(0,1)$, *donc la d.d.p de la v.a. U sera* : $f_U(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}$ où $u \in \Omega_U =]-\infty, +\infty[$

Notons $F_U(u) = P(U \le u)$ *et* $F_X(x) = P(X \le x)$, *les fonctions de répartitions respectives des v.a U et X*

$F_X(x) = P(X \le x) = P(e^U \le x)$ *or Ln est* $\nearrow$ *sur* $]0, +\infty[$

donc $F_X(x) = P\left(\ln(e^U) \le \ln(x)\right) \Leftrightarrow F_X(x) = P\left(U \le \ln(x)\right) = F_U\left(\ln(x)\right)$

$$D'\text{où } \boxed{F_X(x) = F_U\left(\ln(x)\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\ln(x)} e^{-\frac{u^2}{2}} du}$$

ii. $f_X(x) = F'_X(x) = \left(ln(x)\right)' F'_U\left(ln(x)\right) = \frac{1}{x} f_U\left(ln(x)\right)$

Par la suite $\boxed{f_X(x) = \frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(ln(x)\right)^2}{2}} \text{ où } x \in \Omega_X =]0, +\infty[}$

iii.

$$\overline{G}_X = \sqrt[T]{\prod_{t=1}^{T} x_t} = \left(\prod_{t=1}^{T} x_t\right)^{\frac{1}{T}}$$

ainsi, $ln(\overline{G}_X) = ln\left(\left(\prod_{t=1}^{T} x_t\right)^{\frac{1}{T}}\right) = \frac{1}{T} ln\left(\prod_{t=1}^{T} x_t\right) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} ln\, x_t = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} u_t$. *D'où* $\boxed{ln(\overline{G}_X) = \overline{U}}$

iv. $ln(\overline{G}_X) = \overline{U} \Leftrightarrow \overline{G}_X = e^{\overline{U}}$

or $M_{\overline{U}}(\alpha) = E\left(e^{\alpha\overline{U}}\right) = E\left(\left(e^{\overline{U}}\right)^{\alpha}\right) = E((\overline{G}_X)^{\alpha}) \Rightarrow M_{\overline{U}}(1) = E((\overline{G}_X)^{1}) = E(\overline{G}_X)$

Calculons d'abords $M_{\overline{U}}(\alpha)$: $M_{\overline{U}}(\alpha) = M_{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} u_t}(\alpha) = M_{\sum_{t=1}^{T} u_t}\left(\frac{1}{T}\alpha\right) = \prod_{t=1}^{T} M_{u_t}\left(\frac{1}{T}\alpha\right)$

or $M_{u_t}(\alpha) = e^{\frac{\alpha^2}{2}}$ *puisque* $u_t \leadsto \mathcal{N}(0,1) \Rightarrow M_{u_t}\left(\frac{1}{T}\alpha\right) = e^{\frac{\left(\frac{1}{T}\alpha\right)^2}{2}} = e^{\frac{\alpha^2}{2T^2}}$

$M_{\overline{U}}(\alpha) = \prod_{t=1}^{T} e^{\frac{\alpha^2}{2T^2}} = \left(e^{\frac{\alpha^2}{2T^2}}\right)^{T} = e^{\frac{\alpha^2}{2T}} \Rightarrow M_{\overline{U}}(1) = e^{\frac{1}{2T}}$. *D'où* $\boxed{E(\overline{G}_X) = e^{\frac{1}{2T}}}$

Institut de Financement du Développement du Maghreb Arabe
CONCOURS DE RECRUTEMENT DE LA XLIème PROMOTION (BANQUE)
Septembre 2021

Exercice 10 : *(6 points : 1+1+1+1+2)*

ÉNONCÉ

On s'intéresse à l'évolution du prix d'une matière première noté Y dont la densité de probabilité est définie par la fonction : $g(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{y}e^{-\frac{1}{2}[\ln(y)]^2}, pour\ y > 0 \\ 0, si\ non \end{cases}$

On pose $X = \ln(Y)$

1. *Prouver que ΔX, l'accroissement de X entre deux périodes consécutives est approximativement égal au taux de croissance du prix Y. Interpréter*
2. *Déterminer la relation entre F et G respectivement les fonctions de répartition de X et de Y*
3. *En déduire la densité de probabilité de X*
4. *Calculer la médiane de Y*
5. *Sachant que pour une loi normale centrée réduite Z la fonction génératrice est définie par :* $E(e^{tZ}) = e^{\frac{t^2}{2}}$
   Calculer l'espérance mathématique et la variance de Y

Corrigé

1.

Du fait que $\lim\limits_{u\to 1}\frac{\ln(u)}{u-1} = 1$*, on obtient :* $\ln(u) \sim_1 (u-1)$

Ainsi, si Y_{t-1} est proche de Y_t alors $\frac{Y_t}{Y_{t-1}} \to 1$ *et* $\underbrace{\ln\left(\frac{Y_t}{Y_{t-1}}\right)}_{\ln(Y_t)-\ln(Y_{t-1})} \sim \underbrace{\frac{Y_t}{Y_{t-1}} - 1}_{\mathcal{T}_y}$

$$\Rightarrow \ln(Y_t) - \ln(Y_{t-1}) \sim \frac{Y_t - Y_{t-1}}{Y_{t-1}} \Rightarrow \Delta\ln(Y) \sim \frac{\Delta Y}{Y}\ d'où\ \boxed{\Delta X \sim \frac{\Delta Y}{Y}}$$

L'accroissement logarithmique des prix $(\Delta\ln(prix))$ est approximativement égal à son taux de croissance $\left(\frac{\Delta prix}{prix}\right)$

2.

- $\begin{cases} Y(\Omega) =]0, +\infty[\\ X = \ln(Y) \end{cases} \Rightarrow \boxed{X(\Omega) = \mathbb{R}}$

- $\begin{cases} F(x) = F_X(x) = P(X \leq x) \\ G(y) = F_Y(y) = P(Y \leq y) \end{cases}$

On se propose d'exprimer la f.r. de X en fonction de la f.r. de Y :

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in]0, +\infty[: F_X(x) = P(X \leq x) = P(\ln(Y) \leq x) = P(Y \leq e^x) = F_Y(e^x)$

$D'où, \boxed{\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = G(e^x)}$

3.

- $Notons \begin{cases} f = f_X, la\ d.d.p.de\ la\ v.a.c.X \\ g = f_Y, la\ d.d.p.de\ la\ v.a.c.Y \end{cases}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \frac{d[F_Y(e^x)]}{dx} = (e^x)'F'_Y(e^x) = e^x f_Y(e^x)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^x g(e^x) = e^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{e^x} e^{-\frac{1}{2}[\ln(e^x)]^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$D'où\ la\ d.d.p.de\ la\ v.a.c\ X : \boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}}\ et\ \boxed{X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)}$

4.

$Notons\ M_{e_Y}\ la\ médiane\ de\ Y, ainsi\ F_Y(M_{e_Y}) = G(M_{e_Y}) = P(Y \leq M_{e_Y}) = \frac{1}{2}$

$D'autre\ part, G(M_{e_Y}) = G(e^{\ln(M_{e_Y})})$

$Or, \forall x \in \mathbb{R}, G(e^x) = F(x), en\ particulier\ G(e^{\ln(M_{e_Y})}) = F(\ln(M_{e_Y}))$

$M_{e_X} = 0\ la\ médiane\ de\ la\ v.a.c.normale\ centrée\ réduite\ X \Rightarrow F(0) = \frac{1}{2}$

$$On\ obtient : \begin{cases} G(M_{e_Y}) = \frac{1}{2} \\ G(M_{e_Y}) = G(e^{\ln(M_{e_Y})}) = F(\ln(M_{e_Y})) \\ F(0) = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F(\ln(M_{e_Y})) = \frac{1}{2} \\ F(0) = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow F(\ln(M_{e_Y})) = F(0)$$

$La\ f.r.étant\ bijective, ce\ qui\ donne : \ln(M_{e_Y}) = 0. D'où\ \boxed{M_{e_Y} = 1}$

5.

$La\ f.g.m.de\ la\ loi\ normale\ centrée\ réduite\ étant : M_X(t) = E(e^{tX}) = e^{\frac{t^2}{2}}, \forall t \in \mathbb{R}$

$$Or, X = \ln(Y) \Leftrightarrow Y = e^X, par\ la\ suite, \begin{cases} E(Y) = E(e^X) = E(e^{1.X}) = M_X(1) = e^{\frac{1^2}{2}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e} \\ E(Y^2) = E((e^X)^2) = E(e^{2.X}) = M_X(2) = e^{\frac{2^2}{2}} = e^2 \end{cases}$$

$V(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = e^2 - [\sqrt{e}]^2 = e^2 - e$

$d'où : \boxed{E(Y) = \sqrt{e}}\ et\ \boxed{V(Y) = e^2 - e}$

Institut de Financement du Développement du Maghreb Arabe
CONCOURS DE RECRUTEMENT DE LA XXXVIIème PROMOTION (ASSURANCE)
Avril 2018

Exercice 11 – Partie 1 : (5 points : 1+1+1+2)

ÉNONCÉ

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Considérons X une variable aléatoire ayant une densité exponentielle de paramètre θ ,

$définie\ par : f(x) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x}\ , pour\ x \geq 0 \\ 0\ , si\ non \end{cases}$; *θ est un paramètre positif.*

Première Partie :

1) *Déterminer la fonction de répartition de X*
2) *Calculer en fonction de θ la médiane de X*
3) *On définit $Z = \lfloor X \rfloor$ qui désigne la partie entière de X : ce qui signifie que Z est le plus grand nombre entier inférieur à X*
   i. *Déterminer la loi de probabilité de Z*
   ii. *Calculer l'espérance mathématique de la variable Z*

Corrigé

1)

· $Si\ x < 0\ , alors\ F_X(x) = P(X \leq x) = 0$

· $Si\ x \geq 0\ , alors\ F_X(x) = P(X \leq x) = \int_0^x f_X(t)dt = \int_0^x \theta e^{-\theta t}dt = \int_x^0 (-\theta t)' e^{-\theta t}dt = [e^{-\theta t}]_x^0$

$Si\ x \geq 0\ , alors\ F_X(x) = 1 - e^{-\theta x}\ . D'où\ \boxed{F_X(x) = \begin{cases} 0, si\ x < 0 \\ 1 - e^{-\theta x}\ , si\ x \geq 0 \end{cases}}$

2) $P(X \leq M_e) = F_X(M_e) = 1/2 \Leftrightarrow 1 - e^{-\theta M_e} = 1/2 \Leftrightarrow e^{-\theta M_e} = 1/2 \Leftrightarrow -\theta M_e = \ln(1/2)$

$\Leftrightarrow -\theta M_e = -\ln(2)\,.\, D'où\ \boxed{M_e = \dfrac{\ln(2)}{\theta}}$

3)

i. $Déterminons\ la\ loi\ de\ probabilité\ de\ Z$:

$Tout\ d'abord\ Z(\Omega) = \mathbb{N}, ce\ qui\ signifie\ que\ Z\ est\ une\ variable\ aléatoire\ discrète.$

$$P(Z = z) = P(\lfloor X \rfloor = z) = P(z \le X < z+1) = F_X(z+1) - F_X(z) = \left[1 - e^{-\theta(z+1)}\right] - \left[1 - e^{-\theta z}\right]$$

$$P(Z = z) = e^{-\theta z} - e^{-\theta z - \theta} = e^{-\theta z}\left(1 - e^{-\theta}\right)$$

$Notons\ p = 1 - e^{-\theta}, par\ la\ suite\ 1 - p = e^{-\theta}.$

$On\ vérifie\ aussi\ que\ \theta \in]0,1[$:

$$\theta > 0 \Leftrightarrow -\theta < 0 \Leftrightarrow 0 < e^{-\theta} < 1 \Leftrightarrow -1 < -e^{-\theta} < 0 \Leftrightarrow 0 < \underbrace{1 - e^{-\theta}}_{p} < 1$$

$$P(Z = z) = \left(e^{-\theta}\right)^z\left(1 - e^{-\theta}\right) = (1-p)^z p\ ;avec\ p = 1 - e^{-\theta}$$

$$\boxed{P(Z = z) = \begin{cases} \left(e^{-\theta}\right)^z\left(1 - e^{-\theta}\right), si\ z \in \mathbb{N} \\ 0\ , si\ non \end{cases}}$$

iii. $Démontrons\ que\ la\ v.a.\ T = Z + 1 \sim \mathcal{G}\left(1 - e^{-\theta}\right)$:

$\cdot \begin{cases} T = Z + 1 \\ Z(\Omega) = \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow \boxed{T(\Omega) = \mathbb{N}^*}$

$\cdot\ F_T(t) = P(T \le t) = P(Z + 1 \le t) = P(Z \le t - 1) \Leftrightarrow \boxed{F_T(t) = F_Z(t-1)}$

$Déterminons\ la\ fonction\ de\ répartition\ de\ la\ v.a.Z$:

$$\cdot\ \forall z \ge 0, F_Z(z) = P(Z \le z) = 1 - P(Z > z) = 1 - P(Z \ge z+1) = 1 - \sum_{u=z+1}^{+\infty} P(Z = u)$$

$$\forall z \ge 0, F_Z(z) = 1 - \sum_{u=z+1}^{+\infty} \left(e^{-\theta}\right)^z\left(1 - e^{-\theta}\right) = 1 - \left(1 - e^{-\theta}\right)\sum_{u=z+1}^{+\infty}\left(e^{-\theta}\right)^z$$

$$on\ a\ \theta > 0, ce\ qui\ donne : e^{-\theta} \in]0,1[\ ainsi\ \sum_{u=z+1}^{+\infty}\left(e^{-\theta}\right)^z = \frac{\left(e^{-\theta}\right)^{z+1}}{1 - e^{-\theta}}$$

$$\forall z \ge 0, F_Z(z) = 1 - \left(1 - e^{-\theta}\right)\left[\frac{\left(e^{-\theta}\right)^{z+1}}{1 - e^{-\theta}}\right] = 1 - \left(e^{-\theta}\right)^{z+1}$$

$$\boxed{F_Z(z) = \begin{cases} 0\ , si\ z < 0 \\ 1 - \left(e^{-\theta}\right)^{z+1}, si\ z \ge 0 \end{cases}}$$

$$\cdot\ \forall t \ge 1, F_T(t) = F_Z(t-1) = 1 - \left(e^{-\theta}\right)^{(t-1)+1}$$

$$\boxed{F_T(t) = \begin{cases} 0\,, si\ t < 1 \\ 1 - \left(e^{-\theta}\right)^t\,, si\ t \geq 1 \end{cases}}$$

· $On\ a : \forall t \in \mathbb{N}^*, P(T = t) = P(T \leq t) - P(T \leq t-1) = F_T(t) - F_T(t-1)$

$$\forall t \in \mathbb{N}^*, P(T = t) = \left[1 - \left(e^{-\theta}\right)^t\right] - \left[1 - \left(e^{-\theta}\right)^{t-1}\right] = \left(e^{-\theta}\right)^{t-1} - \left(e^{-\theta}\right)^t = \left(e^{-\theta}\right)^{t-1}\left(1 - e^{-\theta}\right)$$

$$\boxed{P(T = t) = \begin{cases} \left(e^{-\theta}\right)^{t-1}\left(1 - e^{-\theta}\right) = (1-p)^{t-1}p\,, si\ t \in \mathbb{N}^* \\ 0\,, si\ non \end{cases} \quad avec\ p = \left(1 - e^{-\theta}\right) \in]0,1[}$$

$$D'\text{où}\ \boxed{T \leadsto \mathcal{G}\left(1 - e^{-\theta}\right)}$$

$$En\ effet\ \boxed{E(T) = \frac{1}{1 - e^{-\theta}}}$$

$$Or\ T = Z + 1\,, Par\ la\ suite\ E(Z+1) = \frac{1}{1 - e^{-\theta}} \Leftrightarrow E(Z) + 1 = \frac{1}{1 - e^{-\theta}}$$

$$\Leftrightarrow E(Z) = \frac{1}{1 - e^{-\theta}} - 1 = \frac{1 - 1 + e^{-\theta}}{1 - e^{-\theta}} = \frac{e^{-\theta}}{1 - e^{-\theta}} = \frac{1}{e^{\theta} - 1}\ .\ D'\text{où}\ \boxed{E(Z) = \frac{1}{e^{\theta} - 1}}$$

Institut de Financement du Développement du Maghreb Arabe
CONCOURS DE RECRUTEMENT DE LA XXXVIIIème PROMOTION (ASSURANCE)
Septembre 2020

Exercice 12 : *(7 points : 1 point par question)*

ÉNONCÉ

La perte causée par un accident est une variable aléatoire X ayant pour densité de probabilité la fonction définie par : $f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{x^5}\ pour\ x \geq 1 \\ 0, si\ non \end{cases}$ *; où c est une costante.*

1) *Déterminer la valeur de la constante c*
2) *Calculer l'espérance mathématique de X*
3) *Déterminer la fonction de répartition de la variable X. En déduire la médiane de X.*
4) *La distribution de X est-elle symétrique ? Justifier votre réponse.*

Suite à cet accident, le remboursement Y effectué par une compagnie d'assurance est définie par :

$$Y = \begin{cases} X, pour\ x < B \\ B, pour\ x \geq B \end{cases}$$

5) *Interpréter la valeur de B*
6) *Déterminer la loi de probabilité de la variable Y*
7) *Quelle condition faut-il imposer sur la valeur de B pour que* $E(Y) = \frac{7}{6}$?
   Commenter ce résultat

Corrigé

1)

$$f_X(x) est\ une\ d.d.p \Leftrightarrow \begin{cases} \int_1^{+\infty} f_X(x)dx = 1 & (1) \\ f_X(x) \geq 0, \forall x \in [1, +\infty[& (2) \end{cases}$$

$$(1): \int_1^{+\infty} f_X(x)dx = 1 \Leftrightarrow \int_1^{+\infty} \frac{c}{x^5}dx = 1 \Leftrightarrow -\frac{c}{4}\left[\frac{1}{x^4}\right]_1^{+\infty} = 1 \Leftrightarrow \frac{c}{4} = 1 \Leftrightarrow c = 4$$

$$(2): f_X(x) = \frac{4}{x^5} \geq 0, \forall x \in [1, +\infty[$$

$$D'où, \boxed{f_X(x) = \begin{cases} \frac{4}{x^5}\ pour\ x \geq 1 \\ 0, si\ non \end{cases}}$$

2)

$$E(X) = \int_1^{+\infty} x f_X(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{4}{x^4}dx = -\frac{4}{3}\left[\frac{1}{x^3}\right]_1^{+\infty} = -\frac{4}{3}[0-1]$$

$$\boxed{E(X) = \frac{4}{3} \cong 1,33}$$

3)

- $$F_X(x) = P(X \leq x)\begin{cases} 0, si\ x < 1 \\ \int_1^x f_X(t)dt\ , si\ x \geq 1 \end{cases}$$

$$Pour\ tout\ x \geq 1, on\ a : F_X(x) = \int_1^x \frac{4}{t^5}dt = -\frac{4}{4}\left[\frac{1}{t^4}\right]_1^x = 1 - \frac{1}{x^4}$$

$$D'où, \boxed{F_X(x) = P(X \leq x)\begin{cases} 0, si\ x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x^4}\ , si\ x \geq 1 \end{cases}}$$

- M_e *est une soltion de l'équation :* $F_X(x) = \frac{1}{2}$ *sur l'intervalle* $[1, +\infty[$

$$Or, F_X(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x^4} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{x^4} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^4 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt[4]{2}$$

$$D'où, \boxed{M_e = \sqrt[4]{2} \cong 1,19}$$

4)
$M_e \neq E(X)$, *donc la distribution n'est pas symétrique*

En calculant le coefficient d'asymétrie $\gamma_1 = \mu_3/\sigma^3 = E\left[\left(X - E(X)\right)^3\right] / \left[E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right)\right]^{\frac{3}{2}}$,

on trouvera $\gamma_1 \neq 0$ *et on peut affirmer que la distribution n'estpas symétrique.*

5) *B est le plafond la somme maximum de remboursement prévue au contrat d'assurance. En cas de sinistre, l'assureur s'engage à indemniser l'assuré à hauteur de cette somme mais pas au-delà.*
Ce plafond de garantie est fixé dans notre cas par sinistre (perte).

6)

$$Y = \begin{cases} X, pour\ x < B \\ B, pour\ x \geq B \end{cases} \Longrightarrow Y(\Omega) = [1, B[\cup \{B\} = [1, B]$$

En effet, $Y = \min(X, B)$

- $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\min(X, B) \leq y) = 1 - P(\min(X, B) > y) = 1 - P(X > y\,, B > y)$

B étant une variable certaine donc elle est indépendante avec toute autre variable aléatoire, par la suite :

$$F_Y(y) = 1 - P(X > y)P(B > y) = 1 - \left[\left(1 - P(X \leq y)\right)\left(1 - P(B \leq y)\right)\right]$$
$$= 1 - \left[\left(1 - F_X(y)\right)\left(1 - \mathbb{1}_{[B,+\infty[}(y)\right)\right]$$

$$Avec F_X(y) = P(X \leq y) \begin{cases} 0, si\ y < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{y^4}\,, si\ y \geq 1 \end{cases}$$

et $\mathbb{1}_{[B,+\infty[}(y) \begin{cases} 0, si\ y \in]-\infty, B[\\ 1\,, si\ y \in [B, +\infty[\end{cases}$, *la fonction indicatrice sur l'intervalle* $[B, +\infty[$ *qui est aussi la f.r. de la distribution de Dirac au point* B : δ_B *ayant pour loi de probabilité :*

$$\delta_B(y) = P(Y = y) = \begin{cases} 1, si\ y = B \\ 0\,, si\ non \end{cases}$$

$$F_Y(y) = 1 - \left[1 - \mathbb{1}_{[B,+\infty[}(y) - F_X(y) + F_X(y)\mathbb{1}_{[B,+\infty[}(y)\right]$$

$$\boxed{F_Y(y) = \mathbb{1}_{[B,+\infty[}(y) + F_X(y) - F_X(y)\mathbb{1}_{[B,+\infty[}(y)}$$

- $Si\ y < 1 \Longrightarrow F_X(y) = 0\ et\ \mathbb{1}_{[B,+\infty[}(y) = 0, donc, F_Y(y) = 0$
- $Si\ 1 \leq y < B \Longrightarrow F_X(y) = 1 - \dfrac{1}{y^4}\ et\ \mathbb{1}_{[B,+\infty[}(y) = 0, donc, F_Y(y) = 1 - \dfrac{1}{y^4}$
- $Si\ y \geq B \Longrightarrow F_X(y) = 1 - \dfrac{1}{B^4}\ et\ \mathbb{1}_{[B,+\infty[}(y) = 1, donc, F_Y(y) = 1 + 1 - \dfrac{1}{B^4} - \left(1 - \dfrac{1}{B^4}\right) = 1$

$$On\ obtient :\ F_Y(y) = \begin{cases} 0, si\ y < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{y^4}, si\ 1 \leq y < B \\ 1, si\ y \geq B \end{cases}$$

F_Y *n'est ni constante par morceaux (comme les v.a. discrètes) ni continue (comme les v.a. à densité). Une telle v.a. est dite mixte.*

- $f_Y(y) = F'_Y(y) = \mathbb{1}'_{[B,+\infty[}(y) + F'_X(y) - \left[F'_X(y)\mathbb{1}_{[B,+\infty[}(y) + F_X(y)\mathbb{1}'_{[B,+\infty[}(y)\right]$

$$\boxed{f_Y(y) = \delta_B(y) + f_X(y) - f_X(y)\mathbb{1}_{[B,+\infty[}(y) - F_X(y)\delta_B(y)}$$

- $Si\ y < 1 \Longrightarrow F_X(y) = 0, f_X(y) = 0, \delta_B(y) = 0\ et\ \mathbb{1}_{[B,+\infty[}(y) = 0, donc, f_Y(y) = 0$

◦ $Si\ 1 \le y < B \Longrightarrow F_X(y) = 1 - \frac{1}{y^4}, f_X(y) = \frac{4}{y^5}, \delta_B(y) = 0\ et\ \mathbb{1}_{[B,+\infty[}(y) = 0, donc, f_Y(y) = \frac{4}{y^5}$

◦ $Si\ y = B \Longrightarrow F_X(y) = 1 - \frac{1}{B^4}, f_X(y) = 0, \delta_B(y) = 1\ et\ \mathbb{1}_{[B,+\infty[}(y) = 1,$

$donc, P(Y = y) = 1 - \left(1 - \frac{1}{B^4}\right) = \frac{1}{B^4}$

◦ $Si\ y > B \Longrightarrow f_Y(y) = 0$

On vérifie bien que Y est une loi de probabilité mixte :

$$\int_1^B f_Y(y)dy + P(Y = B) = F_Y(B) - F_Y(1) + \frac{1}{B^4} = 1 - \frac{1}{B^4} - 0 + \frac{1}{B^4} = 1$$

D'où la loi de probabilité mixte de Y : $\boxed{f_Y(y) = \begin{cases} f_X(y) = \frac{4}{y^5}, si\ 1 \le y < B \\ P(Y = B) = 1 - F_Y(B) = \frac{1}{B^4}, si\ y = B \\ 0\ ailleurs \end{cases}}$

7)

▪ *Calculons d'abord, E(Y):*

$$E(Y) = \left(\int_1^B y f_Y(y)dy\right) + BP(Y = B) = \left(\int_1^B \frac{4}{y^4}dy\right) + \frac{1}{B^3} = 4\left[\frac{1}{-3y^3}\right]_1^B + \frac{1}{B^3} = -\frac{4}{3}\left[\frac{1}{y^3}\right]_1^B + \frac{1}{B^3}$$

$$E(Y) = -\frac{4}{3}\left(\frac{1}{B^3} - 1\right) + \frac{1}{B^3} = \frac{4}{3} - \frac{4}{3B^3} + \frac{3}{3B^3} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3B^3}$$

$$\boxed{E(Y) = \frac{4}{3} - \frac{1}{3B^3}}$$

▪ $E(Y) = \frac{7}{6} \Leftrightarrow \frac{4}{3} - \frac{1}{3B^3} = \frac{7}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{3B^3} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{B^3} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow B^3 = 2$

$$\boxed{E(Y) = \frac{7}{6} \Leftrightarrow B = \sqrt[3]{2} \cong 1,26}$$

En moyenne le remboursement est légèrement inferieure à la moyenne des pertes

Exercice 13 : *(Indépendance de variables aléatoires gaussiennes et corrélation)*

ÉNONCÉ

Soient X et Y deux variables améatoires indépendantes suivant la même loi $\mathcal{N}(0,1)$.

On pose $U = X - Y$ *et* $V = X + Y$.

Calculer ρ *le coefficient de corrélation linéaire entre U et V .*

Corrigé

$$\begin{cases} X, Y \backsim \mathcal{N}(0,1) \\ X\ et\ Y\ deux\ v.a.\ indépendantes \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U = X - Y \backsim \mathcal{N}\big(E(X - Y), V(X - Y)\big) \\ V = X + Y \backsim \mathcal{N}\big(E(X + Y), V(X + Y)\big) \end{cases}$$

$or, E(U) = E(X - Y) = E(X) - E(Y) = 0\ , E(V) = E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 0$

$et\ V(U) = V(X - Y) = V(X + Y) = V(V) = V(X) + V(Y) = 2$

$ainsi\,, U\ et\ V\ deux\ v.a.\,de\ même\ loi\ \mathcal{N}(0,2)$

$Calculons\ Cov(U,V)$:

$$Cov(U,V) = Cov[(X-Y),(X+Y)] = Cov(X,X) + \underbrace{Cov(X,Y)}_{0} - \underbrace{Cov(Y,X)}_{0} - Cov(Y,Y)$$

$$= V(X) - V(Y)$$

$Cov(U,V) = 0$ équivaut à $dire\ que\ X\ et\ Y\ non\ seulement\ non\text{-}corrélées\ mais\ aussi$

$indépendantes, puisqu'il\ s'agit\ de\ deux\ v.a.\,de\ distribution\ normale$

$$\boxed{\rho = \frac{Cov(U,V)}{\sqrt{V(U)V(V)}} = 0}\ U\ et\ V\ sont\ aussi\ deux\ v.a.\,indépendantes$$

Exercice 14 : (Transformations de variables-Inégalité de Jensen)

ÉNONCÉ

$La\ densité\ de\ probabilité\ f(x)\ d'une\ variable\ aléatoire\ X\ s'écrit\ sous\ la\ forme$:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3}\ , pour\ x \geq 1 \\ 0\ , si\ non \end{cases}$$

1) $Déterminer\ la\ fonction\ de\ répartition\ de\ X$
2) $Calculer\ la\ médiane\ de\ X$
3) $On\ définit, Z = \frac{1}{X}\ .\,Déterminer\ la\ loi\ de\ probabilité\ de\ Z$
4) $Comparer\ E\left(\frac{1}{X}\right)$ à $\frac{1}{E(X)}$

Corrigé

1) $\forall x \geq 1, F_X(x) = P(X \leq x) = \int_1^x f_X(t)dt = 2\int_1^x t^{-3}dt = 2\left[\frac{t^{-3+1}}{-3+1}\right]_1^x = -\left[\frac{1}{t^2}\right]_1^x = 1 - \frac{1}{x^2}$

$D'où,$ $\boxed{F_X(x) = \begin{cases} 0\ , si\ x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{x^2}\ , si\ x \geq 1 \end{cases}}$

2) $F_X(M_e) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{M_e^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{M_e^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow M_e^2 = 2, D'où\ \boxed{M_e = \sqrt{2}}$

3) $\begin{cases} X(\Omega) = [1,+\infty[\\ Z = \frac{1}{X} \end{cases} \Rightarrow Z(\Omega) =]0,1]$

$Déterminons\ la\ fonction\ de\ répartition\ de\ la\ v.a.\,Z\ ; \forall z \in]0,1]\ et\ \forall x \in [1,+\infty[$:

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P\left(\frac{1}{X} \leq z\right) = P\left(X \geq \frac{1}{z}\right) = 1 - P\left(X < \frac{1}{z}\right) = 1 - F_X\left(\frac{1}{z}\right)$$

$la\ d.d.p\ de\ la\ v.a.\ \ Z\ se\ déduit\ de\ sa\ f.r\ par\ dérivation$:

$$\forall z \in]0,1] \; ; \; f_Z(z) = \frac{dF_Z(z)}{dz} = \frac{d\left[1 - F_X\left(\frac{1}{z}\right)\right]}{dz} = -\left(\frac{1}{z}\right)' f_X\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z^2} \times \frac{2}{\left(\frac{1}{z}\right)^3} = 2z$$

$D'où,$ $\boxed{f_Z(z) = \begin{cases} 2z\,, si\; z \in]0,1] \\ 0\,, si\; non \end{cases}}$

4) $E\left(\frac{1}{X}\right) = E(Z) = \int_0^1 z f_Z(z)dz = 2\int_0^1 z^2 dz = 2\left[\frac{z^{2+1}}{2+1}\right]_0^1 = \frac{2}{3}[z^3]_0^1 = \frac{2}{3}$

$$E(X) = \int_1^{+\infty} x f_X(x)dx = 2\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}\;, converge\;(intégrale\;de\;Riemann, pour\;\alpha = 2 > 1)$$

$$E(X) = 2\left[\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right]_1^{+\infty} = -2\left[\frac{1}{x}\right]_1^{+\infty} = -2\left[\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\right) - 1\right] = 2$$

$D'où,$ $\boxed{\frac{1}{E(X)} < E\left(\frac{1}{X}\right)}$

On pourra arriver à ce résultat autrement, en utilisant l'inégalité de Jensen : Il suffit de remarquer que $\varphi(u) = \frac{1}{u}$ *est une fonction convexe sur* $[1, +\infty[$ *, puisque* $\varphi'(u) = -\frac{1}{u^2} \Rightarrow \varphi''(u) = \frac{2}{u^3} > 0\,, \forall u \in [1,+\infty[$ *. D'après l'inégalité de Jensen, on retrouve :*

$\varphi[E(X)] \leq E[\varphi(X)]$*, autrement dit :* $\frac{1}{E(X)} < E\left(\frac{1}{X}\right)$

Exercice 15 : *(Corrélation entre variables la loi normale centrée réduite)*

ÉNONCÉ

On considère deux variables X et Y normales centrées réduites avec une covariance, $Cov(X,Y) = c$ *. On pose :* $Z = X - aY$

1) *Déterminer a pour que X et Z soient non corrélées*
2) *Calculer, alors la variance de Z*

Corrigé

1) $X, Y \backsim \mathcal{N}(0,1) \Rightarrow E(X) = E(Y) = 0$ *et* $V(X) = V(Y) = 1$

X et Z soient non corrélées $\Leftrightarrow Cov(X,Z) = 0 \Leftrightarrow Cov[X,(X - aY)] = 0$

$$\Leftrightarrow Cov(X,X) - aCov(X,Y) = 0 \Leftrightarrow V(X) - aCov(X,Y) = 0 \Leftrightarrow 1 - ac = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{c}\;, c \neq 0$$

$$D'où, \boxed{X \text{ et } Z \text{ soient non corrélées} \Leftrightarrow \begin{cases} X \text{ et } Y \text{ soient non corrélées } (c.-à-d. \, c \neq 0) \\ a = \dfrac{1}{c} \end{cases}}$$

2) $V(Z) = V(X - aY) = V(X) + a^2V(Y) - 2aCov(X,Y) = 1 + a^2 - 2ac = 1 + \frac{1}{c^2} - 2$

$$D'où, \boxed{pour \; c \neq 0, et \; a = \frac{1}{c}, V(Z) = \frac{1-c^2}{c^2}}$$

Exercice 16 : *(Transformations de variables-Loi Exponentielle)*

ÉNONCÉ

$Soit \; X \rightsquigarrow \mathcal{E}(1), calculer \; la \; d.d.p. \; de \; la \; v.a. \; Y = \ln X$

Corrigé

$$X \rightsquigarrow \mathcal{E}(1) \Rightarrow f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, pour \; x \geq 0 \\ 0, si \; non \end{cases}$$

$$\begin{cases} X(\Omega) = \mathbb{R}_+ \\ Y = \ln X \end{cases} \Rightarrow Y(\Omega) = \mathbb{R}, pour \; x > 0$$

$Déterminons \; la \; fonction \; de \; répartition \; de \; la \; v.a. \; Y$:

$\forall y \in \mathbb{R} \; et \; \forall x \in]0, +\infty[\; , F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\ln X \leq y) = P(X \leq e^y) = F_X(e^y)$

$la \; d.d.p \; de \; la \; v.a. \; Y \; se \; déduit \; de \; sa \; f.r \; par \; dérivation$:

$$\forall y \in \mathbb{R}; \; f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{dF_X(e^y)}{dy} = (e^y)' f_X(e^y) = e^y e^{-(e^y)} = e^{(y-e^y)}$$

$$D'où \boxed{f_Y(y) = e^{(y-e^y)}, \forall y \in \mathbb{R}}$$

Exercice 17 : *(Transformations de variables-Loi Normale centrée-réduite)*

ÉNONCÉ

$Soit \; X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1), calculer \; la \; d.d.p. \; de \; la \; v.a. \; Y = e^X$

Corrigé

$$X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1) \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\begin{cases} X(\Omega) = \mathbb{R} \\ Y = e^X \end{cases} \Rightarrow Y(\Omega) =]0, +\infty[$$

$Déterminons \; la \; fonction \; de \; répartition \; de \; la \; v.a. \; Y; \; \forall x \in \mathbb{R} \; et \; \forall y \in]0, +\infty[$:

$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(e^X \leq y) = P(X \leq \ln y) = F_X(\ln y)$

la d.d.p de la v.a. Y se déduit de sa f.r par dérivation :

$$\forall y \in]0,+\infty[\ ;\ f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{dF_X(\ln y)}{dy} = (\ln y)' f_X(\ln y) = \frac{1}{y} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln y)^2}{2}}$$

$$D'où\ \boxed{f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi y^2}} e^{-\frac{(\ln y)^2}{2}}, si\ y > 0 \\ 0\ , si\ non \end{cases}}$$

Exercice 18 : (Transformations de variables- Loi khi-deux à 1 degré de liberté)

ÉNONCÉ

Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ *et définissons* $Y = X^2$.

1) *Trouver la fonction de répartition de Y et sa densité.*

N.B. : Cette distribution est appelée une loi de khi-deux à 1 degré de liberté : $\chi^2(1)$

2) *Soit maintenant la v.a. U définie par :* $U = \ln(Y)$ *. Trouver la fonction de répartition de U et sa densité.*

Corrigé

1) *On a :* $X \sim \mathcal{N}(0,1) \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\ ;\ \begin{cases} X(\Omega) = \mathbb{R} \\ Y = X^2 \end{cases} \Rightarrow Y(\Omega) = [0,+\infty[$

Déterminons la fonction de répartition de la v.a. Y ; $\forall (x,y) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty[$:

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(X^2 \le y) = P(-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) = \Phi(\sqrt{y}) - \Phi(-\sqrt{y})$$

$$= \Phi(\sqrt{y}) - \left(1 - \Phi(\sqrt{y})\right) = 2\Phi(\sqrt{y}) - 1$$

la d.d.p de la v.a. Y se déduit de sa f.r par dérivation: $\forall y \in]0,+\infty[\ ; f_Y(y) = \dfrac{d[2\Phi(\sqrt{y}) - 1]}{dy}$

$$\forall y \in]0,+\infty[\ ; f_Y(y) = 2(\sqrt{y})' f_X(\sqrt{y}) = \frac{1}{\sqrt{y}} f_X(\sqrt{y}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{y}} e^{-\frac{(\sqrt{y})^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{y}{2}}$$

Comme $X \sim \mathcal{N}(0,1) \Rightarrow Y = X^2 \sim \chi^2(1)$ *, on en déduit alors la d.d.p de la loi* $\chi^2(1)$:

$$\boxed{f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{y}{2}}, si\ y \in]0,+\infty[\\ 0\ , si\ non \end{cases}}$$

2) *On a :* $Y \sim \chi^2(1) \Rightarrow \forall y \in]0,+\infty[\ , f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{y}{2}}\ ;\ \begin{cases} Y(\Omega) =]0,+\infty[\\ U = \ln(Y) \end{cases} \Rightarrow U(\Omega) = \mathbb{R}$

Déterminons la fonction de répartition de la v.a. U ; $\forall (y,u) \in]0,+\infty[\times \mathbb{R}$:

$F_U(u) = P(U \le u) = P(\ln(Y) \le u) = P(Y \le e^u) = F_Y(e^u) = 2\Phi(\sqrt{e^u}) - 1 = 2\Phi\left(e^{\frac{u}{2}}\right) - 1$

la d.d.p de la v.a. U se déduit de sa f.r par dérivation : $\forall u \in \mathbb{R}\,; f_U(u) = \dfrac{d\left[2\Phi\left(e^{\frac{u}{2}}\right) - 1\right]}{du}$

$$\forall u \in \mathbb{R}\,; f_U(u) = 2\left(e^{\frac{u}{2}}\right)' f_X\left(e^{\frac{u}{2}}\right) = e^{\frac{u}{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\left(e^{\frac{u}{2}}\right)^2/2}\right] = \frac{e^{\frac{u}{2}}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(e^u)}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(u-e^u)}{2}}$$

$$\boxed{\forall u \in \mathbb{R}\,; f_U(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(u-e^u)}{2}}}$$

Exercice 19 : (Transformations de variables-Loi Uniforme continue-Loi Exponentielle)

ÉNONCÉ

Soit $V \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$. *Calculer la fonction de répartition de* $W = -\frac{1}{\lambda}\ln(V)$ *et sa densité.* λ *étant un réel strictement positif .*

De quelle loi s'agit-il ?

Corrigé

On a $V \sim \mathcal{U}_{[0,1]} \Rightarrow \forall v \in \mathbb{R}\,, f_V(v) = \begin{cases} 1\,, si\ v \in [0,1] \\ 0\,, si\ non \end{cases}$

$\forall v \in [0,1]$, *on a* : $\ln(v) \le 0$, *or* $\lambda > 0$, *donc* $-\frac{1}{\lambda}\ln(V) \ge 0$

$$\begin{cases} V(\Omega) = [0,1] \\ W = -\frac{1}{\lambda}\ln(V) \end{cases} \Rightarrow W(\Omega) = [0,+\infty[$$

Déterminons la fonction de répartition de la v.a. W ; $\forall v \in [0,1]$ *et* $\forall w \in [0,+\infty[$:

$$F_W(w) = P(W \le w) = P\left(-\frac{1}{\lambda}\ln(V) \le w\right) = P(\ln(V) \ge -\lambda w) = P\left(V \ge e^{-\lambda w}\right) = 1 - P\left(V < e^{-\lambda w}\right)$$

$$= 1 - P\left(V \le e^{-\lambda w}\right) = 1 - F_V\left(e^{-\lambda w}\right)$$

la d.d.p de la v.a. W se déduit de sa f.r par dérivation :

$$\forall w \in [0,+\infty[\ ;\ f_W(w) = \frac{d\left[1 - F_V\left(e^{-\lambda w}\right)\right]}{dw} = -\left(e^{-\lambda w}\right)' f_V\left(e^{-\lambda w}\right) = \lambda e^{-\lambda w} f_V\left(e^{-\lambda w}\right)$$

Or $w \in [0,+\infty[\ \Longrightarrow -\lambda w \le 0 \Longrightarrow 0 \le e^{-\lambda w} \le 1$ *et* $f_V\left(e^{-\lambda w}\right) = 1$

D'où la d.d.p. de la v.a. W : $\boxed{f_W(w) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda w}\,, si\ w \in [0,+\infty[\\ 0\,, si\ non \end{cases} \quad et\ W \sim \mathcal{E}(\lambda)}$

Exercice 20 : (Transformations de variables-Loi de Weibull-Loi Exponentielle)

ÉNONCÉ

Soit X une variable aléatoire distribuée suivant la loi de Weibull de paramètres $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. La densité de X est donc définie par la fonction :

$$f_X(x) = \begin{cases} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}} \text{, pour } x \geq 0 \\ 0 \text{ , si non} \end{cases}$$

Soit $Y = (X/\alpha)^{\beta}$. Calculer la fonction de densité de Y. De quelle loi s'agit-il ?

Corrigé

$\forall x \in [0,+\infty[$, on a : $(x/\alpha)^{\beta} > 0$, puisque $\alpha > 0$ et $\beta > 0$

$$\begin{cases} X(\Omega) = [0,+\infty[\\ Y = (X/\alpha)^{\beta} \end{cases} \Rightarrow Y(\Omega) = [0,+\infty[$$

Déterminons la fonction de répartition de la v.a. Y :

$$\forall (x,y) \in [0,+\infty[^2, F_Y(y) = P(Y \leq y) = P\left(\left(\frac{X}{\alpha}\right)^{\beta} \leq y\right) = P\left(\frac{X}{\alpha} \leq y^{\frac{1}{\beta}}\right) = P\left(X \leq \alpha y^{\frac{1}{\beta}}\right) = F_X\left(\alpha y^{\frac{1}{\beta}}\right)$$

la d.d.p de la v.a. Y se déduit de sa f.r par dérivation :

$$\forall w \in [0,+\infty[\; ; \; f_Y(y) = \frac{d\left[F_X\left(\alpha y^{\frac{1}{\beta}}\right)\right]}{dy} = \alpha\left(y^{\frac{1}{\beta}}\right)' f_X\left(\alpha y^{\frac{1}{\beta}}\right)$$

$$= \left[\frac{\alpha}{\beta} y^{\left(\frac{1}{\beta}-1\right)}\right]\left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\left(\frac{\left(\alpha y^{\frac{1}{\beta}}\right)}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{\left(\alpha y^{\frac{1}{\beta}}\right)}{\alpha}\right)^{\beta}}\right] = \left[y^{\left(\frac{1}{\beta}-1\right)}\right]\left[\left(y^{\frac{1}{\beta}}\right)^{\beta-1} e^{-\left(y^{\frac{1}{\beta}}\right)^{\beta}}\right]$$

$$= \underbrace{y^{\left(\frac{1}{\beta}-1\right)} y^{\left(1-\frac{1}{\beta}\right)}}_{1} e^{-y}$$

D'où la d.d.p. de la v.a. W : $\boxed{f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y} \text{ , si } y \in [0,+\infty[\\ 0 \text{ , si non} \end{cases} \quad \text{et } Y \rightsquigarrow \mathcal{E}(1)}$

Exercice 21 : *(Transformations de variables-Loi de Cauchy)*

ÉNONCÉ

Soit V une variable aléatoire distribuée suivant la loi de Cauchy $\mathcal{C}(0\,,1)$ *de densité :*

$$\forall v \in \mathbb{R}\,, f_V(v) = \frac{1/\pi}{1+v^2}\,.$$

Soit $Z = \dfrac{1}{V}$ *. Calculer la densité de Z. Que remarquez-vous ?*

Corrigé

Déterminons la fonction de répartition de la v.a. Z :

$$\forall (v,z) \in (\mathbb{R}^*)^2, F_Z(z) = P(Z \le z) = P\left(\frac{1}{V} \le z\right) = P\left(V \ge \frac{1}{z}\right) = 1 - P\left(V \le \frac{1}{z}\right) = 1 - F_V\left(\frac{1}{z}\right)$$

la d.d.p de la v.a. Z se déduit de sa f.r par dérivation :

$$\forall z \in \mathbb{R}^* \;;\; f_Z(z) = \frac{d\left[1 - F_V\left(\frac{1}{z}\right)\right]}{dz} = -\left(\frac{1}{z}\right)' f_V\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z^2}\left[\frac{1/\pi}{1+\left(\frac{1}{z}\right)^2}\right] = \frac{1}{z^2}\left[\frac{1/\pi}{\frac{1+z^2}{z^2}}\right] = \frac{1/\pi}{1+z^2}$$

La variable aléatoire Z est aussi une variable aléatoire suivant une loi de Cauchy :

$$\boxed{\begin{cases} V \sim \mathcal{C}(0\,,1) \\ Z = \dfrac{1}{V} \end{cases} \Rightarrow Z \sim \mathcal{C}(0\,,1)}$$

Exercice 22 : *(Répartition des richesses-Loi de Pareto)*

ÉNONCÉ

Considérons deux paramètres $a > 0$ *et* $\alpha > 0$ *. On dira que X suit une loi de Pareto de paramètres* $(a\,,\alpha)$*, si X est une variable aléatoire de densité f définie par :*

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{a}\left(\dfrac{a}{x}\right)^{\alpha+1} , si\; x \ge a \\ 0\,, si\; non \end{cases}$$

Cette variable aléatoire décrit par exemple la répartition des richesses.

1) *Montrer que f est bien une densité de probabilité. Allure du graphe de f : on pourra prendre,* $a = 1$ *et* $\alpha = 3$
2) *Calculer* $P(X > x)$ *. Allure de la fonction de réparation pour les paramètres ci-dessus.*
3) *Soit* $y > 0$ *fixé. Calculer* $\lim\limits_{x\to+\infty} P(X > x + y | X > x)$ *. Qu'en conclure ?*
   Cette propriété est-elle vraie pour une variable exponentielle ?
4) *Montrer que X admet une espérance si et seulement si* $\alpha > 1$ *.*

Calculer $E(X)$ dans ce cas

5) *Montrer que X admet une variance si et seulement si $\alpha > 2$.*
Calculer $V(X)$ dans ce cas

Corrigé

1) $f_X(x)$ *est une d.d.p* $\Leftrightarrow \begin{cases} \int_a^{+\infty} f_X(x)dx = 1 & (1) \\ f_X(x) \geq 0 \,, \forall x \in [a, +\infty[& (2) \end{cases}$

$$(1) : \int_a^{+\infty} f_X(x)dx = \int_a^{+\infty} \frac{\alpha}{a}\left(\frac{a}{x}\right)^{\alpha+1} dx = \alpha(a)^\alpha \int_a^{+\infty} \frac{1}{x^{(\alpha+1)}} dx$$

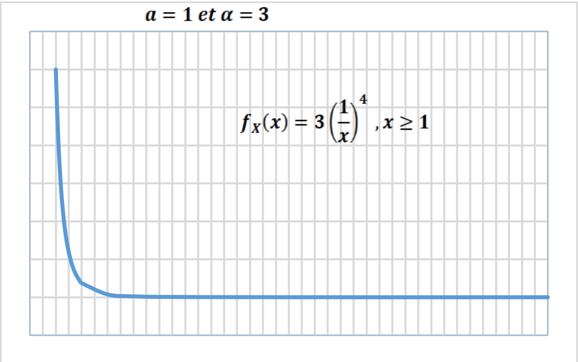
or $\alpha > 0 \Longrightarrow \alpha + 1 > 1$ *, par la suite* $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^{(\alpha+1)}} dx$ *, converge , (Intégrale de Riemann)*

$$\int_a^{+\infty} f_X(x)dx = \alpha(a)^\alpha \int_a^{+\infty} x^{-(\alpha+1)} dx = \alpha(a)^\alpha \left[\frac{x^{-(\alpha+1)+1}}{-(\alpha+1)+1}\right]_a^{+\infty} = -(a)^\alpha \left[\frac{1}{x^\alpha}\right]_a^{+\infty}$$

$$\int_a^{+\infty} f_X(x)dx = -(a)^\alpha \left[\underbrace{\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\right)}_{0} - \frac{1}{a^\alpha}\right] = 1 \text{ , ainsi (1) est véeifiée}$$

(2) : $a > 0$ *et* $\alpha > 0, f_X(x) = \frac{\alpha}{a}\left(\frac{a}{x}\right)^{\alpha+1} \Rightarrow f_X(x) \geq 0 \,, \forall x \in [a, +\infty[$ *, ainsi (2) est véeifiée*

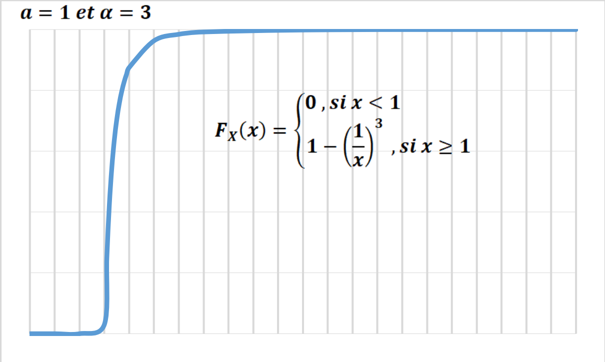
D'où $\boxed{f_X(x) \text{ est une d.d.p}}$



2) $F_X(x) = 1 - P(X > x) = 1 - \int_x^{+\infty} f_X(t)dt = -(a)^\alpha \left[\frac{1}{t^\alpha}\right]_x^{+\infty} = 1 + (a)^\alpha \left[\underbrace{\left(\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\right)}_{0} - \frac{1}{x^\alpha}\right]_x^{+\infty}$

$$= 1 - \left(\frac{a}{x}\right)^\alpha \text{ , si } x \geq a$$

D'où, $\boxed{F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ , si } x < a \\ 1 - \left(\frac{a}{x}\right)^\alpha \text{ , si } x \geq a \end{cases}}$



3) $P(X > x + y | X > x) = \frac{P[X \in \{](x+y), +\infty[\cap]x, +\infty[\}]}{P(X > x)}$

or pour, $y > 0$, $](x+y), +\infty[\, \cap\,]x, +\infty[\, = \,](x+y), +\infty[$ *, par la suite :*

$$P(X > x + y | X > x) = \frac{P(X > x + y)}{P(X > x)} = \frac{1 - F_X(x+y)}{1 - F_X(x)} = \frac{(a/x+y)^\alpha}{(a/x)^\alpha} = \left(\frac{x}{x+y}\right)^\alpha$$

$$En\ effet, \lim_{x \to +\infty} P(X > x + y | X > x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{x+y}\right)^\alpha = 1$$

· ***Cela veut dire que plus X prend de grandes valeurs, plus elle a de chances d'en prendre de plus grandes. Cette loi fut introduite par Pareto comme modèle de richesse, celui-ci ayant remarqué au début du 20ème siècle que 20% de la population possédait 80% des richesses. D'autres phénomènes ont ce même type de propriété : pour un service, 20% des clients sont responsables de 80% des réclamations …***

· ***Cela n'est pas vrai pour la loi exponentielle qui n'a pas de mémoire :***

$$\forall x, y > 0 : P(X > x + y | X > x) = P(X > y) = 1 - F_X(y) = \left(\frac{a}{y}\right)^\alpha$$

$$Par\ la\ suite, \lim_{x \to +\infty} P(X > x + y | X > x) = \left(\frac{a}{y}\right)^\alpha$$

4) $E(X) = \int_a^{+\infty} x f_X(x) dx = \alpha (a)^\alpha \int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ *, converge si* $\alpha > 1$, *(Intégrale de Riemann)*

$\boxed{E(X)\ existe, si\ et\ seulement\ si\ \alpha > 1}$

$$E(X) = \alpha(a)^\alpha \int_a^{+\infty} x^{-\alpha} dx = \alpha(a)^\alpha \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_a^{+\infty} = -\frac{\alpha(a)^\alpha}{\alpha-1}\left[\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right]_a^{+\infty} = \frac{\alpha(a)^\alpha}{\alpha-1}\left[\frac{1}{a^{\alpha-1}} - \underbrace{\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right)}_{0}\right]$$

$$= \frac{\alpha(a)^\alpha}{(\alpha-1)a^{\alpha-1}}, d'où : \boxed{pour, \alpha > 1 : E(X) = \frac{\alpha a}{\alpha - 1}}$$

5) $E(X^2) = \int_a^{+\infty} x^2 f_X(x) dx = \alpha(a)^\alpha \int_a^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha-1}} dx$ *, converge si* $\alpha - 1 > 1$ *ou encre , si* $\alpha > 2$

$$E(X^2) = \alpha(a)^\alpha \int_a^{+\infty} x^{1-\alpha} dx = \alpha(a)^\alpha \left[\frac{x^{1-\alpha+1}}{1-\alpha+1}\right]_a^{+\infty} = -\frac{\alpha(a)^\alpha}{\alpha-2}\left[\frac{1}{x^{\alpha-2}}\right]_a^{+\infty}$$

$$= \frac{\alpha(a)^{\alpha}}{\alpha-2}\left[\frac{1}{a^{\alpha-2}} - \underbrace{\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{\alpha-2}}\right)}_{0}\right] = \frac{\alpha(a)^{\alpha}}{(\alpha-2)a^{\alpha-2}} = \frac{\alpha a^2}{\alpha-2}$$

$$En\ effet : V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{\alpha a^2}{\alpha-2} - \frac{\alpha^2 a^2}{(\alpha-1)^2} = \alpha a^2\left[\frac{1}{\alpha-2} - \frac{\alpha}{(\alpha-1)^2}\right]$$

$$= \alpha a^2\left[\frac{(\alpha-1)^2 - \alpha(\alpha-2)}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2}\right] = \alpha a^2\left[\frac{\alpha^2 - 2\alpha + 1 - \alpha^2 + 2\alpha}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2}\right]$$

$$D'\text{où} : \boxed{pour, \alpha > 2 : V(X) = \frac{\alpha a^2}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2}}$$

Exercice 23 : *(Maximum de variables aléatoires continues et indépendantes)*

ÉNONCÉ

Un analyste financier dispose de données historiques $X_1, X_2, \dots, X_n$ de rendement d'une certaine action. On suppose par simplicité que ces observations sont indépendantes avec fonction de répartition $F_X(x)$ et densité $f_X(x)$. Soit $T = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$ la variable aléatoire qui représente le rendement maximal.

1) *Montrer que, $F_T(t) = [F_X(t)]^n$, où $F_T(t)$ est la fonction de répartition de T.*
2) *Soit : $f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{\theta^2}x \text{ , si } 0 < x < \theta \\ 0 \text{ , si non} \end{cases}$*
   Dans ce cas, calculer $E(T)$.
3) *Calculer la probabilité que le rendement maximal soit supérieur à un certain seuil a.*

Corrigé

1) *Etant donné $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ suite de v.a indépendantes et de même loi ; on a :*

$$F_T(t) = P(T \le t) = P(\max(X_1, X_2, \dots, X_n) \le t) = P(X_1 \le t, X_2 \le t, \dots, X_n \le t) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \le t)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} F_X(x) = [F_X(t)]^n$$

$$D'\text{où} \boxed{F_T(t) = [F_X(t)]^n}$$

2) *La d.d.p de la v.a. T se déduit de sa f.r par dérivation :*

$$\forall t \in]0, \theta[\ ; \ f_T(t) = \frac{d[F_T(t)]}{dt} = \frac{d\left[\left(F_X(t)\right)^n\right]}{dt} = nF'_X(t)\left(F_X(t)\right)^{n-1} = nf_X(t)\left(F_X(t)\right)^{n-1}$$

Adresse : 2, Rue Ibn Arafa, av de l'environnement Manouba Centre, Manouba

$$Or\ on\ a : f_X(t) = \begin{cases} \frac{2}{\theta^2} t\ , si\ 0 < t < \theta \\ 0\ , si\ non \end{cases} \Rightarrow F_X(t) = \begin{cases} 0\ , si\ x \le 0 \\ \int_0^t \frac{2}{\theta^2} x dx\ \ , si\ 0 < t < \theta \\ 1\ , si\ t \ge \theta \end{cases}$$

$$F_X(t) = \begin{cases} 0\ , si\ x \le 0 \\ \frac{2}{\theta^2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^t\ , si\ 0 < t < \theta \\ 1\ , si\ t \ge \theta \end{cases} \Rightarrow F_X(t) = \begin{cases} 0\ , si\ x \le 0 \\ \left(\frac{t}{\theta}\right)^2\ \ , si\ 0 < t < \theta \\ 1\ , si\ t \ge \theta \end{cases}$$

$$Par\ la\ suite, \forall t \in]0, \theta[\ ;\ f_T(t) = n f_X(t)\big(F_X(t)\big)^{n-1} = n\left(\frac{2t}{\theta^2}\right)\left(\left(\frac{t}{\theta}\right)^2\right)^{n-1} = \left(\frac{2nt}{\theta^2}\right)\left(\frac{t^{2(n-1)}}{\theta^{2(n-1)}}\right)$$

$$D'où, \boxed{f_T(t) = \begin{cases} \frac{2nt^{2n-1}}{\theta^{2n}}\ , si\ 0 < t < \theta \\ 0\ , si\ non \end{cases}}$$

$$Enfin, E(T) = \int_0^\theta t f_T(t) dt = \int_0^\theta \frac{2nt^{2n}}{\theta^{2n}} dt = \frac{2n}{\theta^{2n}} \int_0^\theta t^{2n} dt = \frac{2n}{\theta^{2n}}\left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^\theta$$

$$= \frac{2n}{(2n+1)\theta^{2n}}(\theta^{2n+1} - 0)$$

$$D'où, \boxed{E(T) = \left(\frac{2n}{2n+1}\right)\theta}$$

3) *On se propose de calculer la probabilité* :

$$P(T > a) = 1 - P(T \le a) = 1 - F_T(a) = 1 - [F_X(a)]^n$$

$$D'où, \boxed{P(T > a) = \begin{cases} 1\ , si\ x \le 0 \\ 1 - \left(\frac{t}{\theta}\right)^{2n}\ \ , si\ 0 < t < \theta \\ 0\ , si\ t \ge \theta \end{cases}}$$

Exercice 24 : (Inégalité de Tchebychev)

ÉNONCÉ

La fluctuation journalière du prix de l'action d'une société donnée, cotée en bourse, est une variable aléatoire d'espérance 0 *et de variance* σ^2 *. Cela veut dire que, si* Y_n *représente le prix de l'action du* $n^{ème}$ *jour, alors* $Y_n = Y_{n-1} + U_n$; $n > 1$ *où* $U_1, U_2, \dots, U_n$ *sont des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées d'espérance* 0 *et de variance* σ^2*. Supposons que le prix de l'action soit aujourd'hui de* 100*, c-à-d.* $Y_1 = y_1 = 100$ *et que* $\sigma^2 = 1$.

Donner une borne inferieure pour la probabilité que le prix de l'action sera compris entre 95 et 105 dans 10 jours, en utilisant l'inégalité de Tchebychev.

Corrigé

· $On\ a : Y_2 = Y_1 + U_2\ , Y_3 = Y_2 + U_3 = Y_1 + U_2 + U_3 , Y_4 = Y_3 + U_4 = Y_1 + U_2 + U_3 + U_4 \ldots$

Le prix de l'action dans 10 jours s'écrit : $Y_{11} = Y_1 + \sum_{i=2}^{11} U_i$

· *Son espérance est alors :* $E(Y_{11}) = E\left(Y_1 + \sum_{i=2}^{11} U_i\right) = E\left(100 + \sum_{i=2}^{11} U_i\right) = 100 + E\left(\sum_{i=2}^{11} U_i\right)$

$$E(Y_{11}) = 100 + \sum_{i=2}^{11} \underbrace{E(U_i)}_{0} = 100$$

· *Et sa variance :* $V(Y_{11}) = V\left(Y_1 + \sum_{i=2}^{11} U_i\right) = V\left(100 + \sum_{i=2}^{11} U_i\right) = V\left(\sum_{i=2}^{11} U_i\right)$

Or les variables aléatoires $U_1, U_2, \ldots, U_n$ *sont i.i.d , donc* $V\left(\sum_{i=2}^{11} U_i\right) = \sum_{i=2}^{11} \underbrace{V(U_i)}_{\sigma^2} = 10\sigma^2 = 10$

Ainsi, $V(Y_{11}) = 10$

· $P(95 < Y_{11} < 105) = P(-5 < Y_{11} - 100 < 5) = P(|Y_{11} - E(Y_{11})| < 5)$

$$= 1 - P(|Y_{11} - E(Y_{11})| \geq 5)$$

Or par l'inégalité de Tchebychev : $P(|Y_{11} - E(Y_{11})| \geq 5) \leq \frac{Var(Y_{11})}{5^2}$

$$\Leftrightarrow P(|Y_{11} - E(Y_{11})| \geq 5) \leq \frac{10}{25} \Leftrightarrow -P(|Y_{11} - E(Y_{11})| \geq 5) \geq -0,4 \Leftrightarrow 1 - P(|Y_{11} - E(Y_{11})| \geq 5) \geq 0,6$$

et $\boxed{0,6 \leq P(95 < Y_{11} < 105)}$

c-à-d. qu'il y a, au moins 60 % de chance que le prix de l'action se trouve entre 95 et 105 dans 10 jours.

Exercice 25 : *(Transformations de variables-Loi lo-normale-Modes de convergence)*

ÉNONCÉ

Ce problème est basé sur l'article « The Long-Term Expected Rate of Return : Setting it Right », publié par O. de la Grandville dans le Financial Analysts Journal (1998, pages 75-80).

Soit S_t *la valeur d'un actif à la fin de l'année t et* $R_{0,n}$ *le taux de rendement sur un horizon* *de n années, c-à-d. que $R_{0,n}$ est la solution de l'équatiuon :* $S_n = S_0\left(1+R_{0,n}\right)^n$.

Sous l'hypothèse que $\left(\dfrac{S_t}{S_{t-1}}\right)_{t\in\mathbb{N}^*}$ *est une suite de v.a.i.i.d de la loi log-normale* $\mathcal{LN}(\mu,\sigma^2)$

1) *Vérifier que si* $X \rightsquigarrow \mathcal{LN}(\mu,\sigma^2)$ *, alors* $Y = \ln X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$
2)
   a) *Calculer l'espérance mathématique de X*
   b) *Calculer la variance de X*
3) *Déduire alors l'espérance et la variance de* $R_{0,n}$
4) *Que se passe-t-il quand* $n \to +\infty$

Indication : $X \rightsquigarrow \mathcal{LN}(\mu,\sigma^2) \Rightarrow f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma x\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\dfrac{[\ln(e^y)-\mu]^2}{2\sigma^2}\right), \text{si } x>0 \\ 0 \text{ , si non} \end{cases}$

Corrigé

1) $\begin{cases} X(\Omega) =]0,+\infty[\\ Y = \ln X \end{cases} \Rightarrow Y(\Omega) = \mathbb{R}$

Déterminons la fonction de répartition de la v.a. Z :

$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(\ln X \le y) = P(X \le e^y) = F_X(e^y)$

La d.d.p de la v.a. Y se déduit de sa f.r par dérivation :

$$f_Y(y) = \frac{d[F_X(e^y)]}{dy} = (e^y)' f_X(e^y) = e^y\left[\frac{1}{\sigma e^y\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(\ln(e^y)-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)\right] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

D'où, $\boxed{X \rightsquigarrow \mathcal{LN}(\mu,\sigma^2) \Longrightarrow Y = \ln X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)}$

2)
   a) $Y = \ln X \Leftrightarrow X = e^Y$

$E(X) = E(e^Y) = M_Y(1)$ *, la fonction génératrice des moments de la v.a.Y en 1*

D'autre part $Y \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu,\sigma^2) \Longrightarrow Z = \dfrac{Y-\mu}{\sigma} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$

$$\begin{cases} M_Z(t) = e^{\frac{t^2}{2}} \\ Y = \sigma Z + \mu \end{cases} \Longrightarrow M_Y(t) = M_{\sigma Z+\mu}(t) = e^{\mu t}M_Z(\sigma t) \Longrightarrow M_Y(1) = e^{\mu}M_Z(\sigma) = e^{\mu}e^{\frac{\sigma^2}{2}} = e^{\left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right)}$$

D'où, $\boxed{X \rightsquigarrow \mathcal{LN}(\mu,\sigma^2) \Longrightarrow E(X) = e^{\left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right)}}$

   b)

$\cdot\ E(X^2) = E[(e^Y)^2] = E(e^{2Y}) = M_Y(2) = e^{2\mu}M_Z(2\sigma) = e^{2\mu}e^{\frac{(2\sigma)^2}{2}} = e^{2(\sigma^2+\mu)}$

$\cdot\ V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = e^{2(\sigma^2+\mu)} - \left[e^{\left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right)}\right]^2 = e^{(2\mu+2\sigma^2)} - e^{(2\mu+\sigma^2)} = e^{2(\sigma^2+\mu)}\left(1-e^{-\sigma^2}\right)$

$D'o\grave{u},\ \boxed{X \sim \mathcal{LN}(\mu,\sigma^2) \Longrightarrow V(X) = e^{2(\sigma^2+\mu)}\left(1 - e^{-\sigma^2}\right)}$

3)

$$S_n = S_0\left(1 + R_{0,n}\right)^n \Leftrightarrow \left(1 + R_{0,n}\right)^n = \frac{S_n}{S_0} \Leftrightarrow 1 + R_{0,n} = \left(\frac{S_n}{S_0}\right)^{\frac{1}{n}} \Leftrightarrow R_{0,n} = \left(\frac{S_n}{S_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1$$

En utilisant la propriété des produits télescopiques, on obtient : $\prod_{t=1}^{n} \frac{S_t}{S_{t-1}} = \frac{S_n}{S_0}$

$$Par\ la\ suite, R_{0,n} = \left(\prod_{t=1}^{n} \frac{S_t}{S_{t-1}}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 = \prod_{t=1}^{n} \left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 = \exp\left(\ln\left(\prod_{t=1}^{n}\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)^{\frac{1}{n}}\right)\right) - 1$$

$$R_{0,n} = \exp\left(\sum_{t=1}^{n} \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)^{\frac{1}{n}}\right) - 1 = \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)\right) - 1 = \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} Q_t\right) - 1 = e^{\bar{Q}} - 1$$

Avec, $Q_t = \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)$

Comme ona : $\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) \sim \mathcal{LN}(\mu,\sigma^2) \Longrightarrow\ Q_t = \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$

Soit $f(u) = \ln(u)$, *donc* $Q_t = f\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)$, *f continue sur* $\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)(\Omega) =]0,+\infty[$ **(1)**

$\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)_{t\in\mathbb{N}^*}$ *est une suite de v.a.i.i.d de la loi log-normale* $\mathcal{LN}(\mu,\sigma^2)$ **(2)**

$E\left(f\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)\right) = E(Q_t) = \mu$, *existe et finie* **(3)**

(1) + (2) + (3) $\Rightarrow (Q_t)_{t\in\mathbb{N}^*}$ *est une suite de v.a.i.i.d. de* $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2) \Rightarrow \bar{Q} \sim \mathcal{N}\left(E(\bar{Q}),V(\bar{Q})\right)$

$$O\grave{u}\ E(\bar{Q}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} Q_t\right) = \frac{1}{n}E\left(\sum_{t=1}^{n} Q_t\right) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\underbrace{E(Q_t)}_{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\mu = \mu$$

$$Et\ V(\bar{Q}) = V\left(\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} Q_t\right) = \frac{1}{n^2}V\left(\sum_{t=1}^{n} Q_t\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{t=1}^{n}\underbrace{V(Q_t)}_{\sigma^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{t=1}^{n}\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

Ce qui donne : $\bar{Q} \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2/n)$

On a démontré que : $R_{0,n} = e^{\bar{Q}} - 1$ *donc*, $\begin{cases} E(R_{0,n}) = E(e^{\bar{Q}} - 1) = E(e^{\bar{Q}}) - 1 = E(H) - 1 \\ V(R_{0,n}) = V(e^{\bar{Q}} - 1) = V(e^{\bar{Q}}) = V(H) \end{cases}$

où $H = e^{\bar{Q}}$

Compte tenu des résultats précédents : $\begin{cases} Y \leadsto \mathcal{N}(\mu,\sigma^2) \\ X = e^Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E(X) = e^{\left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right)} \\ V(X) = e^{2(\sigma^2+\mu)}\left(1-e^{-\sigma^2}\right) \end{cases}$

Il en résulte que : $\begin{cases} \bar{Q} \leadsto \mathcal{N}\left(\mu, \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2\right) \\ H = e^{\bar{Q}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E(H) = e^{\left(\mu+\frac{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2}{2}\right)} \\ V(H) = e^{2\left(\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2+\mu\right)}\left(1-e^{-\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2}\right) \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} E(H) = e^{\left(\mu+\frac{\sigma^2}{2n}\right)} \\ V(H) = e^{2\left(\frac{\sigma^2}{n}+\mu\right)}\left(1-e^{-\frac{\sigma^2}{n}}\right) \end{cases} \quad D'où \boxed{\begin{cases} E(R_{0,n}) = e^{\left(\mu+\frac{\sigma^2}{2n}\right)} - 1 \\ V(R_{0,n}) = e^{2\left(\frac{\sigma^2}{n}+\mu\right)}\left(1-e^{-\frac{\sigma^2}{n}}\right) \end{cases}}$$

4)

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} E(R_{0,n}) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[e^{\left(\mu+\frac{\sigma^2}{2n}\right)} - 1\right] = e^{\mu} - 1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} V(R_{0,n}) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[\underbrace{e^{2\left(\frac{\sigma^2}{n}+\mu\right)}}_{e^{2\mu}}\underbrace{\left(1-e^{-\frac{\sigma^2}{n}}\right)}_{0}\right] = 0 \end{cases} \quad D'où \boxed{\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} E(R_{0,n}) = e^{\mu} - 1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} V(R_{0,n}) = 0 \end{cases}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{R_{0,n} \xrightarrow[n\to+\infty]{mq} e^{\mu} - 1} \Rightarrow \boxed{R_{0,n} \xrightarrow[n\to+\infty]{p} e^{\mu} - 1}$$

Exercice 26 : *(Minimum de variables aléatoires continues et indépendantes-Modes de convergence)*

ÉNONCÉ

Soit $X_1, X_2, \dots, X_n$ *une séquence de variables aléatoires i.i.d par la loi :*

$$f(t) = \begin{cases} e^{-(t-2)}, si\ t \geq 2 \\ 0, si\ non \end{cases}$$

Soit $Y_n = \min\limits_{1\leq i\leq n}(X_i)$

1) *Déterminer la loi de* Y_n
2) *En déduire la fonction de répartition et la fonction génératrice des moments de* Y_n
3) *Montrer que la suite de v.a* $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en probabilité vers une constante que l'on déterminera*
4) *Soit* $T_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - Y_n)$.
   Montrer que la suite de v.a $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en probabilité vers une constante et déterminer sa valeur.*

Corrigé

1) $Etant\ donné\ (X_1, X_2, \dots, X_n)\ suite\ de\ v.a\ indépendantes\ et\ de\ même\ loi\ ; on\ a:$

· $F_{Y_n}(y) = P(Y_n \le y) = P\left(\min_{1\le i\le n}(X_i) \le y\right) = 1 - P\left(\min_{1\le i\le n}(X_i) > y\right)$

$$= 1 - P(X_1 > y, X_2 > y, \dots, X_n > y) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(X_i > y) = 1 - \prod_{i=1}^{n}[1 - P(X_i \le y)]$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^{n}\left(1 - F_{X_i}(y)\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n}\left(1 - F_X(y)\right) = 1 - [1 - F_X(y)]^n$$

D'où $\boxed{F_{Y_n}(y) = 1 - [1 - F_X(y)]^n}$

· $La\ d.d.p\ de\ la\ v.a.\ T\ se\ déduit\ de\ sa\ f.r\ par\ dérivation:$

$$\forall y \ge 2\ ;\ f_{Y_n}(y) = \frac{d\left[1 - \left(1 - F_X(y)\right)^n\right]}{dy} = -\frac{d\left[\left(1 - F_X(y)\right)^n\right]}{dy} = -n\left(1 - F_X(y)\right)'\left(1 - F_X(y)\right)^{n-1}$$

$$= n f_X(y)\left(1 - F_X(y)\right)^{n-1}$$

$$Or\ on\ a: f_X(t) = \begin{cases} e^{-(t-2)}, si\ t \ge 2 \\ 0, si\ non \end{cases} \Rightarrow F_X(x) = \begin{cases} 0, si\ x < 2 \\ \int_2^x e^{-(t-2)} dt\ , si\ x \ge 2 \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, si\ x < 2 \\ -\left[e^{-(t-2)}\right]_2^x, si\ x \ge 2 \end{cases} \Rightarrow F_X(x) = \begin{cases} 0, si\ x < 2 \\ -\left[e^{-(x-2)} - 1\right], si\ x \ge 2 \end{cases} \Rightarrow F_X(t) = \begin{cases} 0, si\ x < 2 \\ 1 - e^{-(x-2)}, si\ x \ge 2 \end{cases}$$

$$Par\ la\ suite, \forall y \ge 2\ ;\ f_{Y_n}(y) = n f_X(y)\left(1 - F_X(y)\right)^{n-1} = n e^{-(y-2)}\left[1 - \left(1 - e^{-(y-2)}\right)\right]^{n-1}$$

$$\forall y \ge 2\ ;\ f_{Y_n}(y) = n e^{-(y-2)} e^{-(n-1)(y-2)} = n e^{-n(y-2)}$$

$$D'où, \boxed{f_{Y_n}(y) = \begin{cases} n e^{-n(y-2)}, si\ y \ge 2 \\ 0, si\ non \end{cases}}$$

2)

· $\forall y \ge 2, F_{Y_n}(y) = 1 - [1 - F_X(y)]^n = 1 - \left[1 - \left(1 - e^{-(y-2)}\right)\right]^n = 1 - e^{-n(y-2)}$

$$\boxed{F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0, si\ y < 2 \\ 1 - e^{-n(y-2)}, si\ y \ge 2 \end{cases}}$$

· $\forall y \ge 2, M_{Y_n}(t) = E(e^{tY_n}) = \int_2^{+\infty} e^{ty} f_{Y_n}(y) dy = \int_2^{+\infty} n e^{ty} e^{-n(y-2)} dy = n \int_2^{+\infty} e^{[(t-n)y + 2n]} dy$

$Or\ M_{Y_n}(t)\ existe\ si\ et\ seulement\ si \int_2^{+\infty} e^{[(t-n)y+2n]} dy$ c-à-d.: $t - n < 0\ ou\ encore\ t \in\ ]-\infty, n[$

$$\forall t \in]-\infty, n[\,, M_{Y_n}(t) = n\left[\frac{e^{[(t-n)y+2n]}}{t-n}\right]_2^{+\infty} = \frac{n}{t-n}\left[\left(\underbrace{\lim_{y\to+\infty} e^{[(t-n)y+2n]}}_{0}\right) - \left(e^{[2(t-n)+2n]}\right)\right]$$

$$= \frac{-n}{t-n}\left(e^{[2t-2n+2n]}\right) = \frac{ne^{2t}}{n-t}$$

$$\boxed{\forall t \in]-\infty, n[\,, M_{Y_n}(t) = \frac{ne^{2t}}{n-t}}$$

3)

· $\boldsymbol{Déterminons\ E(Y_n)\ et\ V(Y_n)}$ à $\boldsymbol{partir\ de\ M_{Y_n}(t)}$:

$$\frac{dM_{Y_n}(t)}{dt} = n\left(\frac{e^{2t}}{n-t}\right)' = n\left(\frac{(e^{2t})'(n-t) - e^{2t}(n-t)'}{(n-t)^2}\right) = n\left(\frac{2e^{2t}(n-t) + e^{2t}}{(n-t)^2}\right)$$

$$\frac{dM_{Y_n}(t)}{dt} = \frac{ne^{2t}(1+2(n-t))}{(n-t)^2} \Rightarrow E(Y_n) = M'_{Y_n}(0) = \frac{ne^{0}(1+2(n-0))}{(n-0)^2} = \frac{n(2n+1)}{n^2} = \frac{2n+1}{n}$$

$$\boxed{E(Y_n) = \frac{2n+1}{n}}$$

$$\frac{d^2M_{Y_n}(t)}{dt^2} = \left[\frac{ne^{2t}(1+2(n-t))}{(n-t)^2}\right]' = n\left[\frac{\left[e^{2t}(1+2(n-t))\right]'(n-t)^2 - e^{2t}(1+2(n-t))[(n-t)^2]'}{(n-t)^4}\right]$$

▪ $\left[e^{2t}(1+2(n-t))\right]' = (e^{2t})'(1+2(n-t)) + e^{2t}(1+2(n-t))' = 2e^{2t}(1+2(n-t)) - 2e^{2t}$

$$= 2e^{2t}(1+2(n-t)-1) = 4e^{2t}(n-t)$$

▪ $[(n-t)^2]' = 2(n-t)'(n-t) = -2(n-t)$

$$\frac{d^2M_{Y_n}(t)}{dt^2} = n\left[\frac{4e^{2t}(n-t)^3 + 2e^{2t}(1+2(n-t))(n-t)}{(n-t)^4}\right] = \frac{2ne^{2t}[2(n-t)^2 + 2(n-t) + 1]}{(n-t)^3}$$

$$\frac{d^2M_{Y_n}(t)}{dt^2} = \frac{2ne^{2t}[2(n-t)^2 + 2(n-t) + 1]}{(n-t)^3}$$

$$\Rightarrow E(Y_n^2) = M''_{Y_n}(0) = \frac{2ne^{0}[2(n-0)^2 + 2(n-0) + 1]}{(n-0)^3} = \frac{2n[2n^2+2n+1]}{n^3} = \frac{2(2n^2+2n+1)}{n^2}$$

$$V(Y_n) = E(Y_n^2) - [E(Y_n)]^2 = \frac{2(2n^2+2n+1)}{n^2} - \frac{(2n+1)^2}{n^2} = \frac{4n^2+4n+2-4n^2-4n-1}{n^2} = \frac{1}{n^2}$$

$$\boxed{V(Y_n) = \frac{1}{n^2}}$$

$$\cdot \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} E(Y_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n+1}{n} = 2 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} V(Y_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{mq} 2 \Rightarrow \boxed{Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p} 2}$$

4)

· $Soit\ Z = X - 2\ , ainsi \begin{cases} X(\Omega) = [2, +\infty[\\ Z = X - 2 \end{cases} \Rightarrow Z(\Omega) = [0, +\infty[$

Déterminons la fonction de répartition de la v.a. Z :

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P(X - 2 \le z) = P(X \le z + 2) = F_X(z + 2)$$

La d.d.p de la v.a. Z se déduit de sa f.r par dérivation :

$$f_Z(z) = \frac{d[F_Z(z)]}{dz} = (z+2)' f_X(z+2) = e^{-((z+2)-2)} = e^{-z}$$

$$f_Z(z) = \begin{cases} e^{-z}\ , si\ z \ge 0 \\ 0\ , si\ non \end{cases} \Rightarrow Z \rightsquigarrow \mathcal{E}(1) \Rightarrow E(Z) = V(Z) = 1 \Rightarrow \begin{cases} E(X-2) = 1 \\ V(X-2) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E(X) = 3 \\ V(X) = 1 \end{cases}$$

· $On\ a\ T_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - Y_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_n = \bar{X} - \bar{Y}_n$

▪ $Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p} 2 \Rightarrow \bar{Y}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p} 2$

▪ $$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} E(\bar{X}) = \lim\limits_{n\to+\infty} E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{E(X_i)}_{3} = 3 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} V(\bar{X}) = \lim\limits_{n\to+\infty} V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\left[\sum_{i=1}^{n} \underbrace{Var(X_i)}_{1} + 2\sum_{1\le i<j\le n} \underbrace{Cov(X_i, X_j)}_{0}\right] \end{cases}$$

$$\left(\lim_{n\to+\infty} E(\bar{X}) = 3\ \ et\ \lim_{n\to+\infty} V(\bar{X}) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0\right) \Leftrightarrow \bar{X} \xrightarrow[n\to+\infty]{mq} 3 \Rightarrow \bar{X} \xrightarrow[n\to+\infty]{p} 3$$

▪ $$\begin{cases} \bar{Y}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p} 2 \\ \bar{X} \xrightarrow[n\to+\infty]{p} 3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{T_n = \bar{X} - \bar{Y}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p} 1}$$

Exercice 27 : *(Variables de Bernoulli-Modes de convergence)*

ÉNONCÉ

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite de variables aléatoires de Bernoulli, indépendantes, de même paramètre* $p \in]0, 1[$ *. Pour tout entier naturel n non nul, on définit la variable aléatoire*
$Y_n = 2X_n + X_{n+1} - X_n X_{n+1}$

1) *Déterminer la loi de* Y_n *, calculer son espérance et sa variance en fonction de p.*
2)
   a) *On note* $Z_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k$ *, calculer* $E(Z_n)$
   b) *Calculer* $Cov(Y_i, Y_j)$ *, pour* $1 \le i < j \le n$

c) $Valculer\ V(Z_n)$

3) $Montrer\ que\ la\ suite\ (Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $converge\ en\ probabilit$é $vers\ la\ variable\ certaine$ $\acute{e}gale$ à $3p-p^2$

Corrigé

1) $X_n \rightsquigarrow \mathcal{B}(1,p) \Rightarrow X_n(\Omega) = X_n(\Omega) = \{0,1\}$

$On\ a : Y_n = 2X_n + X_{n+1} - X_nX_{n+1}$, $donc$:

X_n \ X_{n+1}	$X_{n+1}=0$	$X_{n+1}=1$
$X_n=0$	$Y_n = 2X_n + X_{n+1} - X_nX_{n+1} = 0$	$Y_n = 2X_n + X_{n+1} - X_nX_{n+1} = 1$
$X_n=1$	$Y_n = 2X_n + X_{n+1} - X_nX_{n+1} = 2$	$Y_n = 2X_n + X_{n+1} - X_nX_{n+1} = 2$

$\Rightarrow Y_n(\Omega) = \{0,1,2\}$

· $P(Y_n=0) = P(X_n=0, X_{n+1}=0) = P(X_n=0)P(X_{n+1}=0) = (1-p)^2$

· $P(Y_n=1) = P(X_n=0, X_{n+1}=1) = P(X_n=0)P(X_{n+1}=1) = p(1-p)$

· $P(Y_n=2) = P(X_n=1, X_{n+1}=0) + P(X_n=1, X_{n+1}=1)$

$$= P(X_n=1)P(X_{n+1}=0) + P(X_n=1)P(X_{n+1}=1) = p(1-p) + p^2 = p$$

· $E(Y_n) = \sum_{y_n\in\{0,1,2\}} y_nP(Y_n = y_n) = [0\times P(Y_n=0)] + [1\times P(Y_n=1)] + [2\times P(Y_n=2)]$

$$= p(1-p) + 2p = 3p - p^2 = p(3-p)\ .\ D'où\ \boxed{E(Y_n) = p(3-p)}$$

· $E(Y_n^2) = \sum_{y_n\in\{0,1,2\}} y_n^2P(Y_n = y_n) = 0 + P(Y_n=1) + 4\times P(Y_n=2) = p(1-p) + 4p = 5p - p^2$

· $V(Y_n) = E(Y_n^2) - [E(Y_n)]^2 = 5p - p^2 - [p(3-p)]^2 = 5p - p^2 - p^2(3-p)^2$

$$= p[5 - p - p(3-p)^2] = p[5 - p - p(9 - 6p + p^2)] = p[5 - p - (9p - 6p^2 + p^3)]$$

$$= p[5 - p - 9p + 6p^2 - p^3] = p(1-p)(p^2 - 5p + 5).$$

$D'où\ \boxed{V(Y_n) = p(1-p)(p^2-5p+5)}$

2)

a)

$$E(Z_n) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k\right) = \frac{1}{n}E\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(Y_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}[p(3-p)]\ .\ D'où\ \boxed{E(Z_n) = p(3-p)}$$

b)

· $Si\ i+1 \neq j\ ou\ encore\ si\ i+1 < j \Rightarrow i \neq j\ , i \neq j+1\ et\ i+1 \neq j+1$

$Y_iY_j = (2X_i + X_{i+1} - X_iX_{i+1})(2X_j + X_{j+1} - X_jX_{j+1})$

$$= 4X_iX_j + 2X_iX_{j+1} - 2X_iX_jX_{j+1} + 2X_{i+1}X_j + X_{i+1}X_{j+1} - X_{i+1}X_jX_{j+1} - 2X_iX_{i+1}X_j - X_iX_{i+1}X_{j+1} + X_iX_{i+1}X_jX_{j+1}$$

$Or\ (X_n)_{n\in\mathbb{N}^*} une\ suite\ de\ v.a.i.i.d\ de\ \mathcal{B}(1,p) \Rightarrow E\left(\prod_{k=1}^{n} X_k\right) = \prod_{k=1}^{n} E(X_k) = \prod_{k=1}^{n} p = p^n$

$Ainsi\ E(Y_iY_j) = 4p^2 + 2p^2 - 2p^3 + 2p^2 + p^2 - p^3 - 2p^3 - p^3 + p^4$

$E(Y_iY_j) = 9p^2 - 6p^3 + p^4 = (3p - p^2)^2 = p^2(3-p)^2$

$Cov(Y_i, Y_j) = E(Y_iY_j) - E(Y_i)E(Y_j) = p^2(3-p)^2 - p^2(3-p)^2 = 0$

$Doù$, $\boxed{si\ i+1 \neq j : Cov(Y_i, Y_j) = 0}$

· $Si\ i+1 = j$

$Y_iY_j = Y_iY_{i+1} = 4X_iX_{i+1} + 2X_iX_{i+2} - 2X_iX_{i+1}X_{i+2} + 2X_{i+1}^2 + X_{i+1}X_{i+2} - X_{i+1}^2X_{i+2} - 2X_iX_{i+1}^2 - X_iX_{i+1}X_{i+2} + X_iX_{i+1}^2X_{i+2}$

$$Ainsi\ E(Y_iY_j) = 4p^2 + 2p^2 - 2p^3 + 2p^2 + 2p - p^2 - p^3 - E(X_{i+1}^2X_{i+2}) - 2E(X_iX_{i+1}^2) + E(X_iX_{i+1}^2X_{i+2})$$
$$= 2p + 7p^2 - 3p^3 - E(X_{i+1}^2X_{i+2}) - 2E(X_iX_{i+1}^2) + E(X_iX_{i+1}^2X_{i+2})$$

▪ $X_k \leadsto \mathcal{B}(1,p) \Rightarrow X_k(\Omega) = X_k^2(\Omega) = \{0,1\}\ et \begin{cases} P(X_k^2 = 0) = P(X_k = 0) = 1-p \\ P(X_k^2 = 1) = P(X_k = 1) = p \end{cases} \Rightarrow X_k^2 \leadsto \mathcal{B}(1,p)$

$P(X_{k+l}^2 = 0, X_k = 0) = P(X_{k+l} = 0, X_k = 0) = P(X_{k+l} = 0)P(X_k = 0) = (1-p)^2 = P(X_{k+l}^2 = 0)P(X_k = 0)$, $l \in \mathbb{N}^*$

$P(X_{k+l}^2 = 1, X_k = 0) = P(X_{k+l} = 1, X_k = 0) = P(X_{k+l} = 1)P(X_k = 0) = p(1-p) = P(X_{k+l}^2 = 1)P(X_k = 0), l \in \mathbb{N}^*$

$P(X_{k+l}^2 = 0, X_k = 1) = P(X_{k+l} = 0, X_k = 1) = P(X_{k+l} = 0)P(X_k = 1) = p(1-p) = P(X_{k+l}^2 = 0)P(X_k = 1), l \in \mathbb{N}^*$

$P(X_{k+l}^2 = 1, X_k = 1) = P(X_{k+l} = 1, X_k = 1) = P(X_{k+l} = 1)P(X_k = 1) = p^2 = P(X_{k+l}^2 = 1)P(X_k = 1), l \in \mathbb{N}^*$

$On\ obtient : \forall\, l \in \mathbb{N}^*, X_{k+l}^2\ et\ X_k de\ v.a.i.i.d\ de\ \mathcal{B}(1,p) \Rightarrow \begin{cases} X_{i+1}^2\ et\ X_i deux\ v.a.i.i.d\ de\ \mathcal{B}(1,p) \\ X_{i+1}^2\ et\ X_{i+2} deux\ v.a.i.i.d\ de\ \mathcal{B}(1,p) \end{cases}$

$\Rightarrow X_i\ , X_{i+1}^2\ et\ X_{i+2}\ des\ v.a.i.i.d\ de\ \mathcal{B}(1,p)$

$$Ce\ qui\ donne : E(Y_iY_j) = 2p + 7p^2 - 3p^3 - E(X_{i+1}^2)E(X_{i+2}) - 2E(X_i)E(X_{i+1}^2) + E(X_i)E(X_{i+1}^2)E(X_{i+2})$$
$$= 2p + 7p^2 - 3p^3 - p^2 - 2p^2 + p^3 = 2p + 4p^2 - 2p^3$$

$$Cov(Y_i, Y_j) = E(Y_iY_j) - E(Y_i)E(Y_j) = 2p + 4p^2 - 2p^3 - p^2(3-p)^2$$
$$= p[(2 + 4p - 2p^2) - p(3-p)^2] = p[2 + 4p - 2p^2 - p(9 - 6p + p^2)] = p[2 + 4p - 2p^2 - 9p + 6p^2 - p^3]$$
$$= p[2 - 5p + 4p^2 - p^3] = p(1-p)(2 - 3p + p^2) = p(1-p)(1-p)(2-p) = p(p-1)^2(2-p)$$

$$D'où\ \boxed{Cov(Y_i, Y_j) = \begin{cases} 0\ , si\ , i+1 < j \\ p(p-1)^2(2-p)\ , si\ , i+1 = j \end{cases}}$$

c)

$$V(Z_n) = V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) = \frac{1}{n^2}\left[\sum_{i=1}^{n} Var(Y_i) + 2\sum_{1 \le i < j \le n} Cov(Y_i, Y_j)\right]$$

$$= \frac{1}{n^2}\left[\sum_{k=1}^{n} p(1-p)(p^2 - 5p + 5) + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} Cov(Y_i, Y_j)\right]$$

$$=\frac{1}{n^2}\left[np(1-p)(p^2-5p+5)+2\sum_{i=1}^{n-1}\left(Cov(Y_i,Y_{i+1})+\underbrace{\sum_{j=i+2}^{n}Cov(Y_i,Y_j)}_{0}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{n^2}\left[np(1-p)(p^2-5p+5)+2\sum_{i=1}^{n-1}p(1-p)^2(2-p)\right]$$

$$=\frac{np(1-p)(p^2-5p+5)+2(n-1)p(1-p)^2(2-p)}{n^2}=\frac{p(1-p)\left(n(p^2-5p+5)+2(n-1)(1-p)(2-p)\right)}{n^2}$$

$$=\frac{p(1-p)\left(5n-5np+np^2+2(n-1)(2-3p+p^2)\right)}{n^2}$$

$$=\frac{p(1-p)(5n-5np+np^2+4(n-1)-6(n-1)p+2(n-1)p^2)}{n^2}=\frac{p(1-p)(9n-4-11np+6p+3np^2-2p^2)}{n^2}$$

D'où, $\boxed{V(Z_n)=\frac{(n(9-11p+3p^2)-4+6p-2p^2)p(1-p)}{n^2}}$

3)

$$\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty}E(Z_n)=p(3-p)\\ \lim\limits_{n\to+\infty}V(Z_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(n(9-11p+3p^2)-4+6p-2p^2)p(1-p)}{n^2}=0\end{cases}\Leftrightarrow Z_n\xrightarrow[n\to+\infty]{mq}p(3-p)$$

$$\Rightarrow \boxed{Z_n\xrightarrow[n\to+\infty]{p}p(3-p)}$$

Exercice 28 : *(Taux de panne- Loi de Weibull- Loi des extrêmes- Loi exponentielle)*

ÉNONCÉ

Soit X une v.a. positive de densité f_X et de f.r. F_X. On appelle taux de panne, la quantité :

$t(x)=\frac{f_X(x)}{1-F_X(x)}$, $x\in\mathbb{R}_+$.

1) *Montrer que* $F_X(x)=1-e^{-T(x)}$, *où on a posé* $T(x)=\int_0^x t(u)du$, $x\in\mathbb{R}_+$.
2) *Calculer $t(x)$ dans les cas suivants :*
   a) $X\leadsto\mathcal{E}(\theta)$, $\theta>0$
   b) *X suit une loi de Weibull, $\mathcal{W}(\alpha,\theta)$ de d.d.p. :* $f_X(x)=\begin{cases}\alpha\theta x^{\alpha-1}e^{-(\theta x^\alpha)}, si\ x>0\\ 0, si\ non\end{cases}$;
   α et θ étant deux paramètres strictement positif.
   c) *X suit une loi dite "des extrêmes" de d.d.p. :*
   $f_X(x)=\begin{cases}\theta e^{[x-\theta(e^x-1)]}, si\ x>0\\ 0, si\ non\end{cases}$; $\theta>0$.
   (N.B. : *on pourra faire le changement de variables :* $u=\theta(e^t-1)$, *pour calculer* $F_X(x)$).

Corrigé

1) $T(x)=\int_0^x t(u)du=\int_0^x \frac{f_X(u)}{1-F_X(u)}du=-\int_0^x \frac{(1-F_X(u))'}{1-F_X(u)}du=-[\ln|1-F_X(u)|]_0^x$

$$T(x)=\ln(1-F_X(0))-\ln(1-F_X(x)),\, Or\ F_X(x)=\begin{cases}0\,,si\ x<0\\ \int_0^x f_X(u)du\ ,si\ x\geq 0\end{cases}\Rightarrow F_X(0)=0$$

$$Par\ la\ suite, T(x)=-\ln(1-F_X(x))\Leftrightarrow 1-F_X(x)=e^{-T(x)}\,,d'où\,,\boxed{\forall\, x\in\mathbb{R}_+, F_X(x)=1-e^{-T(x)}}$$

2)

a) $X\sim\mathcal{E}(\theta)\Leftrightarrow f_X(x)=\begin{cases}\theta e^{-\theta x}\,,si\ x\geq 0\\ 0\,,si\ non\end{cases}\Leftrightarrow F_X(x)=\begin{cases}0\,,si\ x<0\\ \int_0^x f_X(u)du\ ,si\ x\geq 0\end{cases}$

$$\forall\, x\in\mathbb{R}_+, F_X(x)=-\int_0^x(-\theta u)'e^{-\theta u}du=-[e^{-\theta u}]_0^x=e^0-e^{-\theta x}=1-e^{-\theta x}$$

$$Par\ la\ suite, \forall\, x\in\mathbb{R}_+, t(x)=\frac{f_X(x)}{1-F_X(x)}=\frac{\theta e^{-\theta x}}{e^{-\theta x}}\,,doù\,\boxed{si\ X\sim\mathcal{E}(\theta)\,,alors\ t(x)=\theta}$$

b) $f_X(x)=\begin{cases}\alpha\theta x^{\alpha-1}e^{-(\theta x^\alpha)}\,,si\ x>0\\ 0\,,si\ non\end{cases}\Leftrightarrow F_X(x)=\begin{cases}0\,,si\ x\leq 0\\ \int_0^x f_X(u)du\ ,si\ x>0\end{cases}$

$$\forall\, x\in\mathbb{R}_+^*, F_X(x)=\int_0^x\alpha\theta u^{\alpha-1}e^{-(\theta u^\alpha)}du=-\int_0^x(\theta u^\alpha)'e^{-(\theta u^\alpha)}du=-\left[e^{-(\theta u^\alpha)}\right]_0^x=e^0-e^{-(\theta x^\alpha)}$$

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*, F_X(x)=1-e^{-(\theta x^\alpha)}.\, Par\ la\ suite, \forall\, x\in\mathbb{R}_+, t(x)=\frac{f_X(x)}{1-F_X(x)}=\frac{\alpha\theta x^{\alpha-1}e^{-(\theta x^\alpha)}}{e^{-(\theta x^\alpha)}}=\alpha\theta x^{\alpha-1}$$

$$Doù\ \boxed{si\ X\sim\mathcal{W}(\alpha,\theta)\,,alors\ t(x)=\alpha\theta x^{\alpha-1}}$$

c) $f_X(x)=\begin{cases}\theta e^{[x-\theta(e^x-1)]}\,,si\ x>0\\ 0\,,si\ non\end{cases}\Leftrightarrow F_X(x)=\begin{cases}0\,,si\ x\leq 0\\ \int_0^x f_X(u)du\ ,si\ x>0\end{cases}$

$$\forall\, x\in\mathbb{R}_+^*, F_X(x)=\int_0^x\theta e^{[u-\theta(e^u-1)]}du$$

$$Posons\ z=\theta(e^u-1)\Rightarrow\ z+\theta=\theta e^u\Rightarrow e^u=\frac{z+\theta}{\theta}\Rightarrow u=\ln\left(\frac{z+\theta}{\theta}\right)$$

$$et\ dz=[\theta(e^u-1)]'dt=\theta e^u du\Rightarrow du=\frac{dz}{\theta e^u}=\frac{dz}{z+\theta}\,;\begin{cases}u=0\Rightarrow z=0\\ u=x\Rightarrow z=\theta(e^x-1)\end{cases}$$

$$F_X(x)=\int_0^x\theta e^{[u-\theta(e^u-1)]}du=\int_0^{\theta(e^x-1)}\theta\exp\left[\ln\left(\frac{z+\theta}{\theta}\right)-z\right]\frac{dz}{z+\theta}=\int_0^{\theta(e^x-1)}\frac{\theta e^{\ln\left(\frac{z+\theta}{\theta}\right)}e^{-z}}{z+\theta}dz$$

$$=\int_0^{\theta(e^x-1)}\frac{\theta\left(\frac{z+\theta}{\theta}\right)e^{-z}}{z+\theta}dz=\int_0^{\theta(e^x-1)}e^{-z}dz=-[e^{-z}]_0^{\theta(e^x-1)}\,.Ainsi\,,F_X(x)=1-e^{-\theta(e^x-1)}$$

$$Par\ la\ suite, \forall\ x \in \mathbb{R}_+, t(x) = \frac{f_X(x)}{1 - F_X(x)} = \frac{\theta e^{[x-\theta(e^x-1)]}}{e^{-\theta(e^x-1)}} = \theta e^x$$

$$Doù \boxed{si\ f_X(x) = \begin{cases} \theta e^{[x-\theta(e^x-1)]}\ , si\ x > 0 \\ 0\ , si\ non \end{cases}, alors\ t(x) = \theta e^x}$$

Exercice 29 : (Variable tronquée)

ÉNONCÉ

Il peut arriver au cours d'une phase de recueil d'informations que la variable objet de l'étude ne soit observée que sur un domaine plus restreint que celui sur lequel elle doit prendre, théoriquement, ses valeurs : c.-à-d. qu'au-delà d'un certain seuil θ, on n'observe aucune donnée. On s'intéresse à ce type de situation. Soit X une v.a. réelle de f.r. $F_X(x)$ continue et strictement croissante, et de densité $f_X(x)$, continue.

1) *Soit Y_θ la v.a. X observée sur $]-\infty, \theta]$.*
   Calculer la f.r. G_θ de Y_θ. En déduire sa densité g_θ.
2) *Soient $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ n v.a. indépendantes suivant la même loi que Y_θ. Quelle est la densité $g_{n,\theta}$ de $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$?*
3) *Tracer la courbe représentative de $g_{n,\theta}(y_1, y_2, \dots, y_n)$ en fonction de θ. En déduire qu'il existe un maximum unique atteint en un point $s_n(y_1, y_2, \dots, y_n)$ que l'on précisera.*
4) *Soit S_n la v.a. associée à s_n. Quelle est la loi de S_n ?*
5) *Montrer que S_n converge en probabilité vers θ*
6) *Soit $h = \ln(F)$ et $U_n = n(\theta - S_n)$.*
   a) *Exprimer $P(U_n < u)$, $u \in \mathbb{R}$*
   b) *En déduire la convergence en loi de U_n, quand n tend vers l'infini, vers une loi que l'on précisera (on admettra que $h'(\theta) \neq 0$)*

Corrigé

1) $$G_\theta(y) = P(Y_\theta \le y) = P\big((X \le y)\big|(X \in]-\infty, \theta])\big) = P\big((X \in]-\infty, y])\big|(X \in]-\infty, \theta])\big)$$
$$= \frac{P[X \in (]-\infty, y] \cap]-\infty, \theta])]}{P(X \le \theta)}$$

$$\cdot\ Si\ y \ge \theta \Rightarrow]-\infty, y] \cap]-\infty, \theta] =]-\infty, \theta]\ et\ G_\theta(y) = \frac{P(X \le \theta)}{P(X \le \theta)} = 1$$

$$\cdot\ Si\ y < \theta \Rightarrow]-\infty, y] \cap]-\infty, \theta] =]-\infty, y]\ et\ G_\theta(y) = \frac{P(X \le y)}{P(X \le \theta)} = \frac{F_X(y)}{F_X(\theta)}$$

$$D'où \boxed{G_\theta(y) = \begin{cases} 1\ , si\ y \ge \theta \\ \dfrac{F_X(y)}{F_X(\theta)}\ , si\ y < \theta \end{cases}}.\ Or\ g_\theta(y) = \frac{dG_\theta(y)}{dy} \Rightarrow \boxed{g_\theta(y) = \begin{cases} \dfrac{f_X(y)}{F_X(\theta)}\ , si\ y < \theta \\ 0, si\ non \end{cases}}$$

BEN AHMED MOHSEN Téléphone: (+216) 97 619191 / 54 619191
omega.center.cp@gmail.com https://web.facebook.com/OMEGACENTER2014

2) $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ *est une suite de v.a.i.i.d., par la suite :*

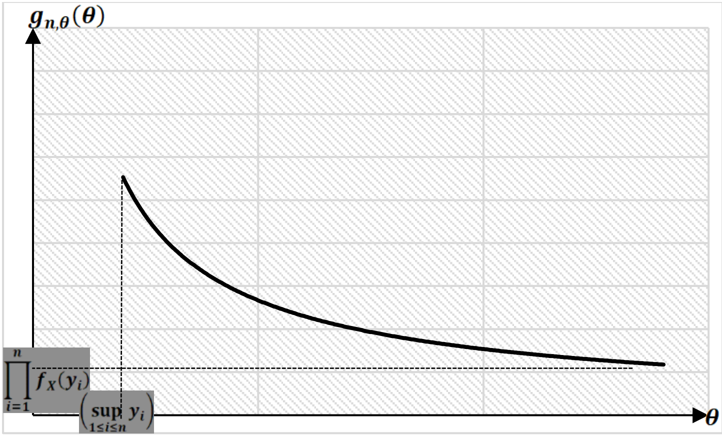
$$g_{n,\theta}(y_1, y_2, \dots, y_n) = \prod_{i=1}^{n} g_\theta(y_i) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{n} \dfrac{f_X(y_i)}{F_X(\theta)} \text{, si } \forall i = 1, 2, \dots, n, y_i < \theta \\ 0, \text{ si non} \end{cases}$$

D'où $$\boxed{g_{n,\theta}(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{cases} \dfrac{1}{\left(F_X(\theta)\right)^n} \prod_{i=1}^{n} f_X(y_i) \text{ , si } \left(\sup\limits_{1 \le i \le n} y_i\right) < \theta \\ 0, \text{ si non} \end{cases}}$$

3) $\frac{dg_{n,\theta}(\theta)}{d\theta} = -n\left(\prod_{i=1}^{n} f_X(y_i)\right) \frac{\left(F_X(\theta)\right)'}{\left(F_X(\theta)\right)^{n+1}} \le 0$, *car* ▪ $\forall i\,; f_X(y_i) \ge 0 \Rightarrow \prod_{i=1}^{n} f_X(y_i) \ge 0$

▪ $0 \le F_X(\theta) \le 1$ *et* ▪ $F_X(\theta)$ *est strictement croissante, donc* $\left(F_X(\theta)\right)' > 0$

Ainsi $g_{n,\theta}(\theta)$ *est décroissante . on a aussi :* $\lim\limits_{\theta \to +\infty} \left(F_X(\theta)\right)^n = 1$



D'où $\boxed{g_{n,\theta}(y_1, y_2, \dots, y_n) \text{ atteint son maximum au point d'abscisse } s_n(y_1, y_2, \dots, y_n) = \sup\limits_{1 \le i \le n} y_i}$

4) $F_{S_n}(s) = P(S_n \le s) = P\left(\sup\limits_{1 \le i \le n} Y_i \le s\right) = P(Y_1 \le s, Y_2 \le s, \dots, Y_n \le s) = \prod_{i=1}^{n} P(Y_i \le s)$

$$= \prod_{i=1}^{n} G_\theta(s) = \prod_{i=1}^{n} \frac{F_X(s)}{F_X(\theta)} = \left(\frac{F_X(s)}{F_X(\theta)}\right)^n$$

$$F_{S_n}(s) = \begin{cases} 1 \text{ , si } s \ge \theta \\ \left(\dfrac{F_X(s)}{F_X(\theta)}\right)^n \text{ , si } y < \theta \end{cases}$$

Par la suite, $f_{S_n}(s) = \dfrac{dF_{S_n}(s)}{ds} = \dfrac{nf_X(s)}{\left(F_X(\theta)\right)^n} \left(F_X(s)\right)^{n-1}$

$$\Rightarrow \boxed{f_{S_n}(s) = \begin{cases} \dfrac{nf_X(s)}{\left(F_X(\theta)\right)^n} \left(F_X(s)\right)^{n-1} \text{ , si } s < \theta \\ 0, \text{ si non} \end{cases}}$$

Adresse : 2, Rue Ibn Arafa, av de l'environnement Manouba Centre, Manouba

5) Y_θ *étant la v.a. X observée sur* $]-\infty,\theta], S_n = \sup_{1\le i\le n} Y_i \Rightarrow P(S_n < \theta) = 1$

$$Or\ \forall\epsilon > 0\ ,\ \lim_{n\to+\infty} P(|S_n-\theta|\ge\epsilon) = \lim_{n\to+\infty}\left[P\underbrace{(S_n\ge\theta+\epsilon)}_{\emptyset} + P(S_n\le\theta-\epsilon)\right] = \lim_{n\to+\infty} F_{S_n}(\theta-\epsilon)$$

$$\forall\epsilon>0\ ,\ \lim_{n\to+\infty} P(|S_n-\theta|\ge\epsilon) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{F_X(\theta-\epsilon)}{F_X(\theta)}\right)^n = 0\ ,car\ 0\le\frac{F_X(\theta-\epsilon)}{F_X(\theta)}\le 1$$

$$D'où\ \boxed{S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p} \theta}$$

6)

a) $\begin{cases} U_n = n(\theta-S_n) \\ S_n(\Omega) =]-\infty,\theta[\end{cases} \Rightarrow U_n(\Omega) = \mathbb{R}_+^*,$

$$P(U_n<u) = P(n(\theta-S_n)<u) = P\left(\theta-S_n<\frac{u}{n}\right) = P\left(\theta-\frac{u}{n}<S_n\right) = 1-P\left(S_n\le\theta-\frac{u}{n}\right)$$

$$P(U_n<u) = 1-F_{S_n}\left(\theta-\frac{u}{n}\right)\ .D'où,\ \boxed{\forall u>0, P(U_n<u) = 1-\left(\frac{F_X\left(\theta-\frac{u}{n}\right)}{F_X(\theta)}\right)^n}$$

b) $P(U_n<u) = F_{U_n}(u) = \begin{cases} 1\ ,si\ u\le 0 \\ 1-\left(\frac{F_X\left(\theta-\frac{u}{n}\right)}{F_X(\theta)}\right)^n\ ,si\ u>0 \end{cases}$

$$\lim_{n\to+\infty} F_{U_n}(u) = \lim_{n\to+\infty}\left[1-\left(\frac{F_X\left(\theta-\frac{u}{n}\right)}{F_X(\theta)}\right)^n\right] = \lim_{n\to+\infty}\left[1-e^{\ln\left(\frac{F_X\left(\theta-\frac{u}{n}\right)}{F_X(\theta)}\right)^n}\right] = \lim_{n\to+\infty}\left[1-e^{n\ln\left(\frac{F_X\left(\theta-\frac{u}{n}\right)}{F_X(\theta)}\right)}\right]$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left[1-e^{n\left[\ln\left(F_X\left(\theta-\frac{u}{n}\right)\right)-\ln(F_X(\theta))\right]}\right]\ ;or\ h=\ln(F)\ ,par\ la\ suite:$$

$$\lim_{n\to+\infty} F_{U_n}(u) = \lim_{n\to+\infty}\left[1-e^{n\left[h\left(\theta-\frac{u}{n}\right)-h(\theta)\right]}\right] = \lim_{n\to+\infty}\left[1-e^{\left[\frac{h\left(\theta-\frac{u}{n}\right)-h(\theta)}{1/n}\right]}\right] = \lim_{n\to+\infty}\left[1-e^{u\left[\frac{h\left(\theta-\frac{u}{n}\right)-h(\theta)}{u/n}\right]}\right]$$

$$= \lim_{t\to0}\left[1-e^{u\left[\frac{h(\theta-t)-h(\theta)}{t}\right]}\right],avec\ ,t=\frac{u}{n}\ et\ (si, n\to+\infty, alors, t\to0)$$

$$= \lim_{v\to\theta}\left[1-e^{-u\left[\frac{h(v)-h(\theta)}{v-\theta}\right]}\right],avec\ ,v=\theta-t\ et\ (si, t\to0, alors, v\to\theta)$$

$$\lim_{n\to+\infty} F_{U_n}(u) = 1-e^{-[h'(\theta)]u}$$

$$Soit\ la\ v.a.\ U \sim \mathcal{E}(h'(\theta)) \Leftrightarrow f_U(u) = \begin{cases} h'(\theta)e^{-[h'(\theta)]u}\ ,si\ u\in[0,+\infty[\\ 0\ ,si\ non \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow F_U(u) = \begin{cases} 0 \text{ , } si\ u < 0 \\ 1 - e^{-[h'(\theta)]u} \text{ , } si\ u \geq 0 \end{cases}$$

D'où $\boxed{U_n \text{ converge en loi vers } U : \ U_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} U \text{ , où } U \backsim \mathcal{E}\big(h'(\theta)\big)}$

Exercice 30 : *(Théorème de Fisher-Cochran)*

ÉNONCÉ

Le but de cet exercice est de démontrer d'une autre façon le théorème de Fisher

établissant l'indépendance de $\bar{X}_n$ *et* $S_n^2 = \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$.

Soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *un échantillon i.i.d issu de la loi normale* $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, *on sait que la*

moyenne empirique $\bar{X}_n \backsim \mathcal{N}\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$

1) *On admet que,* $\forall i$, $(X_i - \bar{X}_n)$ *suit une loi normale. Déterminer les paramètres de cette loi*
2) *Montrer que* $Cov\big(\bar{X}_n, (X_i - \bar{X}_n)\big) = 0$ *et en déduire que les variables aléatoires* $\bar{X}_n$ *et* $(X_i - \bar{X}_n)$ *sont indépendantes*
3) *Finalement en déduire que* $\bar{X}_n$ *et* S_n^2 *sont indépendantes*

Corrigé

1)

· $E(X_i - \bar{X}_n) = E(X_i) - E(\bar{X}_n) = \mu - \mu = 0$

· $X_i - \bar{X}_n = X_i - \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k = \left(X_i - \dfrac{1}{n}X_i\right) - \dfrac{1}{n}\sum_{k\neq i}^{n} X_k = \left(\dfrac{n-1}{n}\right)X_i - \dfrac{1}{n}\sum_{k\neq i}^{n} X_k$

· $V(X_i - \bar{X}_n) = V\left(\left(\dfrac{n-1}{n}\right)X_i - \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k\neq i}^{n} X_k\right)$

$$= \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 V(X_i) + \frac{1}{n^2}V\left(\sum_{k\neq i}^{n} X_k\right) - \frac{2(n-1)}{n^2}Cov\left(X_i, \sum_{k\neq i}^{n} X_k\right)$$

▪ $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ échantillon i.i.d. de $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$$\Rightarrow V\left(\sum_{k\neq i}^{n} X_k\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} Var(X_k)\right) - V(X_i) = n\sigma^2 - \sigma^2 = (n-1)\sigma^2$$

- $(X_i)_{1\le i\le n}$ échantillon i.i.d. de $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2) \Rightarrow Cov\left(X_i,\sum_{k\neq i}^{n}X_k\right)=\sum_{k\neq i}^{n}Cov(X_i,X_k)=0$

$$Par\ la\ suite, V(X_i-\overline{X}_n)=\left(\frac{n-1}{n}\right)^2V(X_i)+\frac{1}{n^2}V\left(\sum_{k\neq i}^{n}X_k\right)-\frac{2(n-1)}{n^2}Cov\left(X_i,\sum_{k\neq i}^{n}X_k\right)$$

$$=\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\sigma^2+\left(\frac{n-1}{n^2}\right)\sigma^2=\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{n-1}{n}+\frac{1}{n}\right)\sigma^2=\left(\frac{n-1}{n}\right)\sigma^2$$

$$D'\text{où}\ \boxed{(X_i-\overline{X}_n)\sim\mathcal{N}\left(0,\left(\frac{n-1}{n}\right)\sigma^2\right)}$$

2) $Cov(\overline{X}_n,(X_i-\overline{X}_n))=Cov(\overline{X}_n,X_i)-Cov(\overline{X}_n,\overline{X}_n)=Cov(\overline{X}_n,X_i)-V(\overline{X}_n)=Cov(\overline{X}_n,X_i)-\frac{\sigma^2}{n}$

- $Cov(X_i,\overline{X}_n)=Cov\left[X_i,\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k\right]=Cov\left[X_i,\frac{1}{n}\left(X_i+\sum_{k\neq i}^{n}X_k\right)\right]=\frac{1}{n}Cov\left[X_i,\left(X_i+\sum_{k\neq i}^{n}X_k\right)\right]$

$$=\frac{1}{n}\left[Cov(X_i,X_i)+\underbrace{Cov\left(X_i,\sum_{k\neq i}^{n}X_k\right)}_{0}\right]=\frac{1}{n}V(X_i)=\frac{\sigma^2}{n}$$

D'où : $\boxed{Cov(\overline{X}_n,(X_i-\overline{X}_n))=0\ ; les\ variables \overline{X}_n,(X_i-\overline{X}_n)\ sont\ non\text{-}corrélées}$

- On a : $\begin{cases}\overline{X}_n\sim\mathcal{N}\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)\\(X_i-\overline{X}_n)\sim\mathcal{N}\left(0,\left(\frac{n-1}{n}\right)\sigma^2\right)\\Cov(\overline{X}_n,(X_i-\overline{X}_n))=0\end{cases}\Leftrightarrow\boxed{Les\ variables\ \overline{X}_n,(X_i-\overline{X}_n)\ sont\ indépendantes}$

3)

- Soit $f(u)=u^2$, donc $(X_i-\overline{X}_n)^2=f((X_i-\overline{X}_n))$, f continue sur $\mathbb{R}$ (1)
- $g(u)=u$, donc $\overline{X}_n=g(\overline{X}_n)$, g continue sur $\mathbb{R}$ (2)
- $(X_i-\overline{X}_n)\sim\mathcal{N}\left(0,\left(\frac{n-1}{n}\right)\sigma^2\right)\Rightarrow\sqrt{\frac{n}{n-1}}\left(\frac{X_i-\overline{X}_n}{\sigma}\right)\sim\mathcal{N}(0,1)\Rightarrow\frac{n(X_i-\overline{X}_n)^2}{(n-1)\sigma^2}\sim\chi^2(1)$

$$Ainsi, E\left[\frac{n(X_i-\overline{X}_n)^2}{(n-1)\sigma^2}\right]=1\Rightarrow\frac{n}{(n-1)\sigma^2}E((X_i-\overline{X}_n)^2)=1$$

Ce qui donne : $E\left(f((X_i-\overline{X}_n))\right)=E((X_i-\overline{X}_n)^2)=\frac{(n-1)\sigma^2}{n}$, existe et finie (3)

- $\overline{X}_n\sim\mathcal{N}\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)\Rightarrow E(g(\overline{X}_n))=E(\overline{X}_n)=\mu$, existe et finie (4)
- es variables $\overline{X}_n,(X_i-\overline{X}_n)$ sont indépendantes (5)

$(1)+(2)+(3)+(4)+(5) \Rightarrow$ ***Les variables*** $\overline{X}_n, (X_i-\overline{X}_n)^2$ ***sont indépendantes***

Les v.a. $\overline{X}_n, (X_i-\overline{X}_n)^2$ ***sont indépendantes*** $\Rightarrow g(\overline{X}_n)=\overline{X}_n$ ***et*** $h(X_i-\overline{X}_n)^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X}_n)^2$

sont aussi indépendantes.

D'où $\boxed{\overline{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k \text{ et } S_n^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}_n\right)^2 \text{ sont indépendantes}}$

Axe ⑤ : Table des matières

- ☑ *Fonction génératrice des moments :*
- ☑ *Propriétés :*
- ☑ *Approximation d'une loi Binomiale et de la loi de Poisson par une loi Normale :*
- ☑ *Utilisation :*

- ***Loi Normale centrée réduite ou Loi Normale standard*** $N(0,1)$:
  - ☑ *Fonction densité de probabilité :*
  - ☑ *Espérance mathématique :*
  - ☑ *Variance :*
  - ☑ *Médiane :*
  - ☑ *Fonction génératrice des moments :*
  - ☑ *Propriétés de la Fonction de répartition :*
- ***Loi Log–normale*** $LN(m,\sigma^2)$:
  - ☑ *Fonction densité de probabilité :*
  - ☑ *Fonction de répartition :*
  - ☑ *Espérance mathématique :*
  - ☑ *Variance :*
  - ☑ *Utilisation :*
- ***Lois de Cauchy (ou Loi de Lorentz)*** $C(0\,,a)$:
  - ☑ *Fonction densité de probabilité :*
  - ☑ *Fonction de répartition :*
  - ☑ *Espérance mathématique :*
  - ☑ *Variance :*
  - ☑ *Fonction génératrice des moments :*
  - ☑ *Remarques :*
- ***Loi de Pareto*** $P(c\,,\alpha)$:
  - ☑ *Fonction densité de probabilité :*
  - ☑ *Fonction de répartition :*
  - ☑ *Espérance mathématique :*
  - ☑ *Variance :*
  - ☑ *Fonction génératrice des moments :*
  - ☑ *Propriétés d'une loi à queue longue (ou longue traîne) :*
- ***Loi de Laplace*** $L(\lambda)$:
  - ☑ *Fonction densité de probabilité :*
  - ☑ *Fonction de répartition :*
  - ☑ *Espérance mathématique :*
  - ☑ *Variance :*
  - ☑ *Fonction génératrice des moments :*
- ***Loi de Gumbel*** $G(\mu\,,\beta)$:
  - ☑ *Fonction densité de probabilité :*
  - ☑ *Fonction de répartition :*
  - ☑ *Espérance mathématique :*
  - ☑ *Variance :*
- ***Loi Gamma*** $\Gamma(\alpha,\beta)\ ,\alpha>0\,,\beta>0$:
  - ☑ *Fonction densité de probabilité :*
  - ☑ *Propriétés de la fonction Gamma d'Euler* $\Gamma(\alpha)$:
  - ☑ *Espérance mathématique :*
  - ☑ *Variance :*
  - ☑ *Coefficient d'asymétrie :*
  - ☑ *Coefficient d'aplatissement (kurtosis) :*
  - ☑ *Fonction génératrice des moments :*
  - ☑ *Propriétés de la loi Gamma :*
- ***Loi bêta*** $B(\alpha,\beta),\alpha>0 \text{ et } \beta>0$:
  - ☑ *Fonction densité de probabilité :*
  - ☑ *Propriétés de la fonction Bêta* $B(\alpha,\beta)$:
  - ☑ *Espérance mathématique :*
  - ☑ *Variance :*
  - ☑ *Propriétés de la loi Bêta :*
- ***Loi de Pearson ou khi-deux à n degrés de liberté*** $\chi^2(k)\,,k\in\mathbb{N}^*$:
  - ☑ *Fonction densité de probabilité :*
  - ☑ *Espérance mathématique :*
  - ☑ *Variance :*
  - ☑ *Coefficient d'asymétrie :*
  - ☑ *Coefficient d'aplatissement (kurtosis) :*
  - ☑ *Fonction génératrice des moments :*
  - ☑ *Propriétés de la loi khi-deux à n degrés de liberté* $\chi^2(k)$:
- ***Loi de Student à k degrés de liberté*** $T(k),k\in\mathbb{N}^*$:
  - ☑ *Fonction densité de probabilité :*
  - ☑ *Espérance mathématique :*
  - ☑ *Variance :*
  - ☑ *Coefficient d'asymétrie :*
  - ☑ *Coefficient d'aplatissement (kurtosis) :*
  - ☑ *Propriétés de la loi de Student à k degrés de liberté* $T(k),k\in\mathbb{N}^*$:
- ***Loi de Fisher-Snedecor à m et n degrés de liberté*** $F(m,n)\,,m,n\in\mathbb{N}^*$:
  - ☑ *Fonction densité de probabilité :*
  - ☑ *Espérance mathématique :*