INSTITUT de FINANCEMENT du DEVELOPPEMENT du MAGHREB ARABE

CONCOURS DE RECRUTEMENT de la XXXVII PROMOTION (Banque)

Samedi 26 Août 2017

Epreuve de Méthodes Quantitatives

Corrigé

****

Exercice 1:

On a la répartition

X Région	$R1$	$R2$
10	150	50
20	A	200
40	300	B

1-On doit avoir $(150+50)+(A+200)+(300+B) = 1000$, cela donne : $A+B = 300$

2- La moyenne de X est

$Mx = 28 = 10*0.2+20*(A+200)/1000+40*(300+B)/1000$

ce qui donne : $28 = 2+0.02*(A+200)+0.04*(B+300)$

ou encore : $28 = 2+0.02A+4+0.04*B+12$

On a $10 = 0.02A+0.04*B$ c'est à dire $500 = A+2B$

En utilisant les deux équations : $A+B = 300$ et $500 = A+2B$, on trouve : $B = 200$ et $A = 100$

3- La répartition marginale de X est fournie par le tableau

X	fréquence %
10	20
20	30
40	50

4-La variance de X est égale

$= 10*10*0.2+20*20*0.3+40*40*0.5-28*28 = 20+120+800-784 = 156$

5-

Mx/R1= $10*150/550+20*100/550+40*300/550 = (1500+2000+12000)/550 = 15500$

Mx/R2=$10*50/450+20*200/450+40*200/450 = (500+4000+8000)/450 = 12500/450$

6- Les deux caractères sont dépendants du fait que la moyenne de X change d'une région à une autre.

Exercice 2 :

Première Partie :

1-On a $\hat{a} = \dfrac{\sum_{t=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{t=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \dfrac{Cov(x,y)}{V(x)} = \dfrac{6.12}{6.21} = 0.98$ Cette estimation

représente l'élasticité du PIB par rapport aux dépenses publiques (rapport du taux de croissance du PIB avec le taux de croissance des dépenses publiques).

$\hat{b} = \bar{y} - \hat{a}\bar{x} = \frac{1610}{200} - 0.98 * \frac{1027}{200} = 3.0$

2- Le coefficient de corrélation linéaire :r entre y et x est défini par

$r = \dfrac{Cov(x,y)}{\sqrt{V(x)V(y)}} = \dfrac{6.12}{\sqrt{8.54 * 6.21}} = 0.84$

Ce coefficient est assez élevé, il existe probablement une relation linéaire entre Y et X

3- Pour une régression linéaire avec constante, le coefficient de détermination R^2 est le carré du coefficient de corrélation linéaire :

$$R^2 = r^2 = \frac{Cov^2(x,y)}{V(x)V(y)} = \frac{6.12^2}{8.54 * 6.21} = 0.84^2 = 0.7$$

4- On a, en notant SCR la somme des carrés des résidus et SCT la somme des carrés totale : $R^2 = 1 - \dfrac{SCR}{SC\ Totale} = 1 - \dfrac{SCR}{T * V(y)} = 1 - \dfrac{SCR}{200 * 8.53} = 0.7$

Ce qui donne : $SCR = 0.3 * 200 * 8.53 = 511$

5- L'estimation sans biais de la variance σ^2 est définie par

$\widehat{\sigma^2} = \dfrac{SCR}{T-2} = \dfrac{511}{198} = 2.58 = (1.6)^2$

6- La variance de $\hat{a}$ est estimée par

$\widehat{\sigma_a^2} = \dfrac{\widehat{\sigma^2}}{\sum_{t=1}^{200}(x_t - \bar{x})^2} = \dfrac{2.58}{200 * 6.21} = 0.0020 = (0.045)^2$

7= Le T de Student du coefficient estimé $\hat{a}$ est égal $S = \dfrac{\hat{a}}{\widehat{\sigma_a}} = \dfrac{0.98}{0.045} = 21.7$

Cette valeur est lagement supérieure à la valeur tabulée associée à un niveau de confiance de 95%, le test $a = 0$ est rejeté: la variable x est significative.

Deuxième partie:

8- Dans le cas où $a = b = 0$, on obtient $y_t = \epsilon_t$ qui est une loi normale centrée de variance σ^2

De ce fait: $E(y_t) = 0 \quad E(y_t^2) = \sigma^2$

Par ailleurs, comme $\frac{y_t}{\sigma}$ est une loi normale centrée réduite, $(\frac{y_t}{\sigma})^2$

est une loi de Khi-deux à un seul degré de liberté. Son espérance est égal à 1, sa variance est 2. On retouve que $E(y_t^2) = \sigma^2$ et Var$(y_t^2) = 2\sigma^4$

9- $Z = y_t^2$ Z est une variable positive. Sa fonction de répartition est $G(z) = Prob[Z \leq z] = Prob[y_t^2 \leq z] = Prob[-\sqrt{z} \leq y_t \leq \sqrt{z}] =$

$$= Prob[-\frac{\sqrt{z}}{\sigma} \leq \frac{y_t}{\sigma} \leq \frac{\sqrt{z}}{\sigma}] = 2F(\frac{\sqrt{z}}{\sigma}) - 1$$

Ce qui donne la densité de probabilité $g(z) = 2f(\frac{\sqrt{z}}{\sigma})\frac{1}{2\sigma\sqrt{z}}$ où f est la densité de probabilité de la loi normale centrée réduite.