Multicolinéarité

$\mathcal{A}$– 1 • Problème :

Il y a multicolinéarité lorsque l'hypothèse de l'orthogonalité des exogènes ou encore de leur indépendance linéaire $|X'X| \neq 0$ *est relâchée. Dans ce cas, la méthode des moindres carrés ordinaires est défaillante et il devient difficile d'isoler l'impact individuel de chaque exogène sur l'endogène.*

On distingue généralement deux types de multicolinéarité : la multicolinéarité parfaite ou exacte et la quasi multicolinéarité ou multicolinéarité imparfaite.

En cas de multicolinéarité parfaite, la matrice $X'X$ *est singulière, et par conséquent son inverse* $(X'X)^{-1}$ *n'existe pas, ce qui rend la méthode MCO complètement défaillante ; il est n'est donc pas possible devant une telle situation d'estimer les paramètres du modèle.*

Dans la pratique, c'est plutôt le cas de quasi multicolinéarité qui est fréquent. En effet, la multicolinéarité imparfaite correspond au cas où la matrice $X'X$ *est non singulière, mais son déterminant est proche de 0. La conséquence directe est qu'on aura des valeurs très grandes dans la matrice inverse* $(X'X)^{-1}$ *qui, par la méthode classique, est calculée comme suit :* $(X'X)^{-1} = \dfrac{1}{|X'X|}[Com(X'X)]'$.

Si $|X'X| \to 0$ *, la matrice* $(X'X)^{-1}$ *aura des valeurs de plus en plus grandes, la matrice* $\Omega_{\hat{\beta}} = \sigma^2_{\hat{\beta}} = \sigma^2_{\varepsilon}(X'X)^{-1}$ *également.*

La conséquence, et donc le problème posé par la multicolinéarité est que, du fait de la valeur élevée des variances des coefficients estimés, les résultats de l'estimation perdent en précision, c'est-à-dire que les t de Student seront faibles, et les coefficients

statistiquement nuls, pendant que le R^2 et le F sont élevés.

L'autre problème posé par la multicolinéarité est l'instabilité de paramètre et l'effet de masque qui rend difficile la mise en évidence de la contribution individuelle de différentes variables explicatives sur l'endogène.

☑ **Remarque :** ***Si les problèmes d'autocorrélation des erreurs et d'hétéroscédasticité peuvent se poser quel que soit le nombre d'exogènes intervenant dans le modèle, le problème de multicolinéarité, en revanche, n'a de sens que dans un modèle de régression linéaire multiple.***

$\mathcal{A}$– 2 • Détection de la multicolinéarité :

Les tests de détection de la multicolinéarité les plus populaires sont le test de Klein et le test de Farrar et Glauber.

a • Méthode de Klein :

La méthode de Klein consiste à examiner les carrés des coefficients de corrélation par paires r_{jk}^2 entre les variables explicatives x_j et x_k, avec $j \neq k$. Si l'un de ces coefficients est plus grand que R^2, alors on peut soupçonner la multicolinéarité.

☑ **Test de Klein :**

Soit le modèle $(M): y_i = \beta_1 + \sum_{j=2}^{k} \beta_j x_{ij} + \varepsilon_i \;;\; i = 1, 2 \ldots, n$

Le test de Klein se fait en trois étapes que voici :

- ***Estimer le modèle (M) et calculer le R^2***
- ***Calculer la matrice des coefficients de corrélation linéaire entre variables exogènes, prises deux à deux, soit :*** $\begin{pmatrix} 1 & r_{23}^2 & r_{24}^2 & \cdots & r_{2k}^2 \\ r_{32}^2 & 1 & r_{34}^2 & \cdots & r_{3k}^2 \\ r_{42}^2 & r_{43}^2 & 1 & \cdots & r_{4k}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{k2}^2 & r_{k3}^2 & r_{k4}^2 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$
- ***Comparer, enfin, le R^2 de la régression aux différents coefficients de corrélation.***

Il y a présomption de multicolinéarité si au moins un des r_{jk}^2 est supérieur à R^2

☞ *Le test de Klein n'est pas un test statistique au sens test d'hypothèses mais simplement un critère de présomption de multicolinéarité. C'est pourquoi il doit être complété par le test de Farrar et Glauber qui est bien un test statistique.*

b • Test de Farrar et Glauber :

Le test de Farrar et Glauber teste que le déterminant D de la matrice de corrélation est égal à 1. Le coefficient ne peut être égal à 1 que si les variables explicatives sont orthogonales, le test est donc :

$$\begin{cases} H_0 : \text{Absence de multicolinéarité} : D = 1 \ (\text{les séries sont orthogonales}) \\ H_1 : \text{Présence de multicolinéarité} : D < 1 \ (\text{les séries sont dépendantes}) \end{cases}$$

■ *Statistique de décision*: $Z = -\left[(n-1) - \frac{1}{6}(2k+5)\right] \mathrm{Ln}(D) \sim \chi^2\left[\frac{k(k-1)}{2}\right]$

où n est la taille de l'échantillon ; k le nombre de paramètres ; Ln le logarithme népérien et D le déterminant de la matrice des coefficients de corrélation linéaire entre exogènes, soit : $D = \begin{vmatrix} 1 & r_{23}^2 & r_{24}^2 & \dots & r_{2k}^2 \\ r_{32}^2 & 1 & r_{34}^2 & \cdots & r_{3k}^2 \\ r_{42}^2 & r_{43}^2 & 1 & \dots & r_{4k}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{k2}^2 & r_{k3}^2 & r_{k4}^2 & \dots & 1 \end{vmatrix}$

■ **Critère de décision :**

$$\text{On rejette } H_0 \ (\text{Présomption de multicolinéarité}) \ \text{si} \ Z_{obs} > \chi_\alpha^2\left(\frac{k(k-1)}{2}\right)$$

c • Remèdes à la multicolinéarité (Ridge Regression) :

Parmi les techniques permettant d'éliminer la multicolinéarité, on peut citer :

☞ *Augmenter la taille de l'échantillon*

☞ *Appliquer la « Ridge Regression » qui est une réponse purement numérique, il s'agit de transformer la matrice $X'X$ en une matrice $(X'X + \delta I_k)$, où δ est un nombre très petit. On commence par $\delta = 0,01$ et on augmente cette valeur jusqu'à ce que les estimateurs demeurent stables.*

L'estimateur Ridge est donné par : $\widehat{\beta}_{Ridge} = (X'X + \delta I_k)^{-1}(X'Y)$

BEN AHMED MOHSEN Téléphone: (+216) 97 619191 / 54 619191
omega.center.cp@gmail.com https://web.facebook.com/OMEGACENTER2014

Hétéroscédasticité

$\mathcal{B}-1$ • Introduction :

Soit le modèle général : $Y = X\beta + \mathcal{E}$ *, où* X *est une matrice de constantes ,* $E(\mathcal{E}) = 0$ *,*

$Var(\mathcal{E}) = \sigma_\varepsilon^2 \Omega = V$ *et* Ω *est une matrice* $n \times n$ *, symétrique, définie positive, de plein rang.*

La matrice $\Omega = \left(\omega_{ij}\right)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$ *n'est pas nécessairement diagonale.*

Les hypothèses d'homoscédasticité et de non-corrélation des termes d'erreur $(\mathcal{H}_4)$ *:*

sont donc levées.

$E(\mathcal{E}\mathcal{E}') \neq \sigma_\varepsilon^2 I_n$ où $E\left(\varepsilon_i \varepsilon_j\right) \neq \sigma_\varepsilon^2$ *, si* $i = j$ *: (erreurs hétéroscédastiques)*

La conséquence directe de cette violation est que les estimateurs des MCO, bien que encore non biaisés, ne sont plus efficients, puisque n'ayant plus une variance minimale.

Et par conséquent les t de Student et F de Fisher ne sont plus utilisables à des fins d'inférence.

$\mathcal{B}-2$ • Détection de l'hétéroscédasticité :

Il existe toute une batterie de tests permettant de détecter l'hétéroscédasticité, dont notamment:

- *Le test de Park*
- *Le test de Goldfeld-Quandt*
- *Le test de Glejser*
- *Le test de Breusch-Pagan-Godfrey*
- *Le test d'égalité des variances*
- *Le test de Koenker-Basset*
- *Le test de Harvey*
- *Le test de White*
- *Le test de rang de Spearman*
- *Le test ARCH*

a • Le test de White :

Le test de White sert à déterminer si les carrées des résidus sont liés aux variables explicatives. On estime d'abord les coefficients de la régression de la variable Y par les variables explicatives X au moyen de la méthode des moindres carrés ordinaires (MCO). Ensuite, on effectue une seconde régression où la variable dépendante est le carré du résidu $\hat{\varepsilon}_i$ *de la première régression et les variables explicatives sont les variables explicatives de la première régression auxquelles on ajoute les carrés de ces variables et* *leurs produits.*

Par exemple si le modèle pour lequel on soupçonne de l'hétéroscédasticité est:

$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \beta_4 x_{i4} + \varepsilon_i$

On estime par les MCO les coefficients $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ *et* β_4, *ce qui permet d'estimer les résidus* $\hat{\varepsilon}_i$.

On considère ensuite la régression :

$\hat{\varepsilon}_i^2 = \gamma_1 + \gamma_2 x_{i2} + \gamma_3 x_{i3} + \gamma_4 x_{i4} + \gamma_5 x_{i2}^2 + \gamma_6 x_{i3}^2 + \gamma_7 x_{i4}^2 + \gamma_8 x_{i2} x_{i3} + \gamma_9 x_{i2} x_{i4} + \gamma_{10} x_{i3} x_{i4} + u_i$

Si on note $R_{\hat{\varepsilon}}^2$ *le coefficient de détermination estimé pour ce nouveau modèle, il est possible de montrer que sous l'hypothèse nulle* (H_0) *d'homoscédasticité:*

$$LM = nR_{\hat{\varepsilon}}^2 \backsim \chi^2(k-1)$$

où $k-1$ *est le nombre de régresseurs (exogènes) dans l'expression estimée*

- **Critère de décision :** *On rejette* H_0 *si* $nR_{\hat{\varepsilon}}^2 > \chi_{1-\alpha}^2(k-1)$

☑ **Remarque :** *Un inconvénient de ce type de test est que le nombre de variables peut devenir très important au regard de la taille de l'échantillon.*

b • Le test de Goldfeld-Quandt :

Le test de Goldfeld-Quandt s'applique quand on soupçonne que l'hétéroscédasticité est liée à une variable particulière. Souvent cette variable est liée à un effet de taille. On soupçonne donc une relation positive entre une variable particulière et l'hétéroscédasticité. On commence par trier les données selon cette variable. Ensuite on calcule deux régressions séparées sur les l *premières et les* l *dernières observations. Il faut évidemment que* $2l \leq n$ *et que* $l > k$, *où* k *est le nombre de paramètres du modèle. On omet donc les* $c = n - 2l$ *observations centrales. On calcule ensuite* SCR_1, SCR_2, SCE_1 *et* SCE_2 *qui sont respectivement les sommes des carrés résiduelles et de la régression pour les* l *premières et les* l *dernières unités. La statistique de test est :*

$$F = \frac{SCR_2 / l-k}{SCR_1 / l-k} \backsim \mathcal{F}\big((l-k),(l-k)\big), \text{ sous l'hypothèse nulle } (H_0) \text{ d'homoscédasticité}$$

■ *Critère de décision* : $On\ rejette\ H_0\ si\ \ F_{obs} > f^2_{1-\alpha}\big((l-k),(l-k)\big)$

c • Le test de AutoRegressive Conditionnal Heteroscedasticity (Test ARCH):

Les hypothèses à formuler pour ce test sont : $\begin{cases} H_0: Homoscédasticité \\ H_1: Hétéroscédasticité \end{cases}$

Partant des résidus et issus de l'estimation du modèle: $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \beta_4 x_{i4} + \varepsilon_i$

, la détection de l'hétéroscédasticité par le test ARCH se fait en régressant le carré des résidus et sur leurs décalages puissance deux, soit :

$\hat{\varepsilon}_i^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{\varepsilon}_{i-1}^2 + \alpha_2 \hat{\varepsilon}_{i-2}^2 + \alpha_3 \hat{\varepsilon}_{i-3}^2 + \cdots + \alpha_p \hat{\varepsilon}_{i-p}^2 + v_t$

Le test est fondé soit sur un test de Fisher classique, soit sur le test du multiplicateur de Lagrange (LM): $LM = nR^2_{\hat{\varepsilon}} \rightsquigarrow \chi^2(p)$

où p est le nombre de retards des résidus et n le nombre d'observations

■ *Critère de décision* : $On\ rejette\ H_0\ si\ \ LM > \chi^2_{1-\alpha}(P)$*, il y a présence d'hétéroscédasticité*

B– 3 • L'estimateur de Aitken-Correction de l'hétéroscédasticité :

Soit le modèle general : $Y = X\beta + \mathcal{E}$ *, avec* $E(\mathcal{E}) = 0$ *,* $Var(\mathcal{E}) = \sigma_\varepsilon^2\Omega = V$ *et* Ω *est une matrice* $n \times n$ *, symétrique, définie positive, de plein rang.*

a • Si la variance est connue :

Il existe une application linéaire transformant le modèle $Y = X\beta + \mathcal{E}$ *en* $Y^* = X^*\beta + \mathcal{E}^*$ *telle que* $\mathcal{E}^*$ *vérifie les hypothèses de la régression classique, d'où l'utilisation des MCO.*

Ω *étant une matrice symétrique, il existe alors une matrice orthogonale C telle que :*

$C'\Omega C = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \Delta$; *où les* λ_i *sont les valeurs propres de* Ω *, or* Ω *est définie positive , donc* $\forall i$ *,* $\lambda_i > 0$*. On définit par la suite* $\Delta^{\frac{1}{2}} = diag\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\right)$

On a : $\Delta^{-\frac{1}{2}}\Delta\Delta^{-\frac{1}{2}} = I_n$ *autrement dit* $\Delta^{-\frac{1}{2}}(C'\Omega C)\Delta^{-\frac{1}{2}} = I_n$ *ou encore* $T\Omega T' = I_n$ *avec* $T = \Delta^{-\frac{1}{2}}C'$

D'où la transformation linéaire obtenue en prémultipliant $Y = X\beta + \mathcal{E}$ *par T , pour obtenir* $Y^* = X^*\beta + \mathcal{E}^*$ *, avec* $Y^* = TY$ *,* $X^* = TX$ *et* $\mathcal{E}^* = T\mathcal{E}$ *.*

$\mathcal{E}^*$ *va par la suite vérifier les hypothèses MCO , avec :*

$E(\mathcal{E}^*\mathcal{E}^{*\prime}) = E(T\mathcal{E}\mathcal{E}'T') = TE(\mathcal{E}\mathcal{E}')T' = T(\sigma_\varepsilon^2\Omega)T' = \sigma_\varepsilon^2 \underbrace{T\Omega T'}_{I_n} = \sigma_\varepsilon^2 I_n$

On vérifie bien que : $\Omega^{-1} = T'T$.

En appliquant la méthode MCO au modèle $Y^* = X^*\beta + \mathcal{E}^*$, *on obtient* :

$$\widehat{\beta}_{MCG} = (X'\Omega^{-1}X)^{-1}(X'\Omega^{-1}Y) = (X'V^{-1}X)^{-1}(X'V^{-1}Y)$$

On a aussi :

$$Var(\widehat{\beta}_{MCG}) = \Omega_{\widehat{\beta}_{MCG}} = \sigma^2_{\widehat{\beta}_{MCG}} = E\left[(\widehat{\beta}_{MCG} - \beta)(\widehat{\beta}_{MCG} - \beta)'\right] = \sigma_\varepsilon^2(X'\Omega^{-1}X)^{-1}$$

$$Or\ on\ a :\ \widehat{\beta}_{MCG} \sim \mathcal{N}(\beta, \sigma_\varepsilon^2(X'\Omega^{-1}X)^{-1}),\ donc :\ \widehat{Var}(\widehat{\beta}_{MCG}) = \widehat{\Omega}_{\widehat{\beta}_{MCG}} = \widehat{\sigma}^2_{\widehat{\beta}_{MCG}} = \widehat{\sigma}_\varepsilon^2(X'\Omega^{-1}X)^{-1}$$

Un estimateur sans biais de σ_ε^2 *est obtenu comme auparavant par* :

$$\widehat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{\mathcal{E}^{*\prime}\mathcal{E}^*}{n-k} = \frac{(Y^* - X^*\widehat{\beta}_{MCG})'(Y^* - X^*\widehat{\beta}_{MCG})}{n-k} = \frac{(Y - X\widehat{\beta}_{MCG})'\Omega^{-1}(Y - X\widehat{\beta}_{MCG})}{n-k}$$

L'estimateur MCO du modèle $Y = X\beta + \mathcal{E}$, $\widehat{\beta}_{MCO}$ *sera toujours sans biais* :

$$Var(\widehat{\beta}_{MCO}) = \Omega_{\widehat{\beta}_{MCO}} = \sigma^2_{\widehat{\beta}_{MCO}} = E\left[(\widehat{\beta}_{MCO} - \beta)(\widehat{\beta}_{MCO} - \beta)'\right] = E[(X'X)^{-1}X'\mathcal{E}\mathcal{E}'X(X'X)^{-1}]$$

$$= \sigma_\varepsilon^2(X'X)^{-1}(X'\Omega X)(X'X)^{-1}$$

par la suite : $\sigma^2_{\widehat{\beta}_{MCO}} \neq \sigma_\varepsilon^2(X'X)^{-1}$

***b* • Modèle sans constante et hétéroscédasticité :**

$y_i = \beta x_i + \varepsilon_i$ *étant un modèle sans constante et avec hétéroscédasticité*,

où $Var(\varepsilon_i) = \sigma_\varepsilon^2 x_i^2$

Pour se ramener à un modèle homoscédastique, on peut simplement diviser chacun des modèles par x_i, *ce qui donne* : $\frac{y_i}{x_i} = \beta + \frac{\varepsilon_i}{x_i}$, où $Var(\varepsilon_i) = \sigma_\varepsilon^2 x_i^2$

En posant $\tilde{y}_i = \frac{y_i}{x_i}$ *et* $u_i = \frac{\varepsilon_i}{x_i}$, *on obtient* : $\tilde{y}_i = \beta + u_i$, où $Var(u_i) = \sigma_u^2$

***c* • Si la variance est inconnue :**

Dans la plupart des cas, on ne dispose pas d'une variable auxiliaire proportionnelle à la variance. Il est également exclu d'estimer cette variance,

car la matrice $\Omega = \begin{pmatrix} \sigma^2_{\varepsilon_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma^2_{\varepsilon_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma^2_{\varepsilon_n} \end{pmatrix}$ *dépend de n paramètres. Le nombre de paramètres à estimer serait donc de* $n + p$ *et donc supérieur au nombre d'observations*, *ce qui est impossible.*

Cependant, quand aucune hypothèse ne peut être faite sur la forme de

l'hétéroscédasticité, White propose d'estimer la matrice par : $\hat{\Omega} = \begin{pmatrix} \hat{\varepsilon}_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \hat{\varepsilon}_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \hat{\varepsilon}_n^2 \end{pmatrix}$

où les $\hat{\varepsilon}_i$ *sont les résidus au moyen de la méthode des moindres carrés ordinaires.*

Notons que les $\hat{\varepsilon}_i^2$ *sont des estimateurs biaisés de* $\sigma_{\varepsilon_i}^2$ *mais on peut montrer que ce sont des estimateurs convergents. On obtient alors l'estimateur de White :*

$$\hat{\beta}_{MCG} = \left(X'\hat{\Omega}^{-1}X\right)^{-1}\left(X'\hat{\Omega}^{-1}Y\right) = \left(X'\hat{V}^{-1}X\right)^{-1}\left(X'\hat{V}^{-1}Y\right)$$

L'autocorrélation des erreurs

$\mathcal{C}$– 1 • Introduction :

Il y a autocorrélation des erreurs lorsque l'hypothèse $\left(Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = E(\varepsilon_i\varepsilon_j) = 0 \text{ , si } i \neq j\right)$ *est violée. La conséquence directe est que les estimateurs des MCO, bien qu'ils gardent encore leur caractère non biaisé, ne sont plus efficients, puisque n'ayant plus une variance minimale. Formellement, on a :*

En absence d'autocorrélation	En présence d'autocorrélation
$Y = X\beta + \mathcal{E}$	$Y = X\beta + \mathcal{E}$
$E(\mathcal{E}) = 0$	$E(\mathcal{E}) = 0$
$E(\mathcal{E}\mathcal{E}') = \sigma_\varepsilon^2 I_n$	$E(\mathcal{E}\mathcal{E}') = \sigma_\varepsilon^2\Omega \neq \sigma_\varepsilon^2 I_n$
$\Omega_{\hat{\beta}} = \sigma_{\hat{\beta}}^2 = \sigma_\varepsilon^2(X'X)^{-1}$	$\hat{\beta}_{MCG} = (X'\Omega^{-1}X)^{-1}(X'\Omega^{-1}Y)$
$\Omega_{\hat{\beta}} = \sigma_{\hat{\beta}}^2 = \sigma_\varepsilon^2(X'X)^{-1}$	$\Omega_{\hat{\beta}} = \sigma_{\hat{\beta}}^2 = \sigma_\varepsilon^2(X'X)^{-1}[X'\Omega X](X'X)^{-1}$ $\Rightarrow$ *Par conséquent les t de Student et F de Fisher ne sont plus utilisables.*

$\mathcal{C}$– 2 • La modélisation :

Quand les données sont issues d'observations temporelles, on peut soupçonner les termes d'erreur du modèle linéaire d'être autocorrélés. Le modèle est alors : $Y = X\beta + \mathcal{E}$

$$avec\ E(\mathcal{E}) = 0\ , Var(\mathcal{E}) = E(\mathcal{E}\mathcal{E}') = \sigma_\varepsilon^2\Omega\ , et\ \ \Omega = \begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{n-3} & \rho_{n-2} & \rho_{n-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{n-4} & \rho_{n-3} & \rho_{n-2} \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{n-5} & \rho_{n-4} & \rho_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho_{n-3} & \rho_{n-4} & \rho_{n-5} & \cdots & 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_{n-2} & \rho_{n-3} & \rho_{n-4} & \cdots & \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_{n-1} & \rho_{n-2} & \rho_{n-3} & \cdots & \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{pmatrix}$$

Les coefficients $-1 < \rho_j < 1$ *sont appelés coefficients d'autocorrélation. Cependant ce modèle est trop complexe pour être estimé directement, car il faudrait estimer* $(n-1)$ *coefficients d'autocorrélation, ce qui est impossible avec seulement n paramètres.*

On aura donc recours à des modèles plus simple comme les modèles autorégressifs d'ordre 1.

C– 3 • Processus autorégressif d'ordre un :

Le processus autorégressif d'ordre un est un cas simple de série statistique dont les termes d'erreur sont autocorrélés. Considérons la série temporelle des ε_i *pour toute valeur i de* $\mathbb{Z}$ *; et régie par le modèle suivant :* $\varepsilon_i = \rho\varepsilon_{i-1} + u_i\ , i \in \mathbb{Z}$

où :

- *Les* u_i *sont de moyennes nulles* $E(u_i) = 0$*, homoscédastique, de variance*

$Var(u_i) = \sigma_u^2$ *et non-corrélés, pour tout* $i \in \mathbb{Z}$, $E(u_t u_s) = 0\ \forall t \neq s$

- $|\rho| < 1$
- $E(\varepsilon_{i-j}u_i) = 0\ , si\ j \in \mathbb{N}^*$

a • Espérance et variance du processus autorégressif d'ordre 1 :

Le caractère récursif de la définition de ε_i *permet de réaliser le développement suivant:*

$$\varepsilon_i = \rho\varepsilon_{i-1} + u_i = \rho(\rho\varepsilon_{i-2} + u_{i-1}) + u_i\ = \rho^2\varepsilon_{i-2} + \rho u_{i-1} + u_i\ = \rho^2(\rho\varepsilon_{i-3} + u_{i-2}) + \rho u_{i-1} + u_i$$

$$= \rho^3\varepsilon_{i-3} + \rho^2 u_{i-2} + \rho u_{i-1} + u_i\ = \cdots = \rho^j\varepsilon_{i-j} + \sum_{k=0}^{j-1}\rho^k u_{i-k}\ \ , avec\ j > 0$$

$$\vdots$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty}\rho^k u_{i-k}$$

On peut alors calculer l'espérance :

$$E(\varepsilon_i) = E\left[\rho^j\varepsilon_{i-j} + \sum_{k=0}^{j-1}\rho^k u_{i-k}\right]\ , avec\ j > 0$$

$$= \rho^j E(\varepsilon_{i-j}) + \sum_{k=0}^{j-1} \rho^k \underbrace{E(u_{i-k})}_{0}$$

$$E(\varepsilon_i) = \rho^j E(\varepsilon_{i-j})$$

Si $|\rho| < 1$ *, alors en faisant tendre j vers l'infini, on obtient :*

$$E(\varepsilon_i) = \lim_{j\to+\infty} \rho^j E(\varepsilon_{i-j}) = 0$$

On peut également calculer la variance :

$$\sigma_\varepsilon^2 = Var(\varepsilon_i) = Var\left[\rho^j \varepsilon_{i-j} + \sum_{k=0}^{j-1} \rho^k u_{i-k}\right] \text{ , avec } j > 0$$

$$= \rho^{2j} Var(\varepsilon_{i-j}) + \sum_{k=0}^{j-1} \rho^{2k} \underbrace{Var(u_{i-k})}_{\sigma_u^2} = \rho^{2j} Var(\varepsilon_{i-j}) + \sigma_u^2 \sum_{k=0}^{j-1} \rho^{2k}$$

$$\sigma_\varepsilon^2 = Var(\varepsilon_i) = \rho^{2j} Var(\varepsilon_{i-j}) + \sigma_u^2 \left(\frac{1-\rho^{2j}}{1-\rho^2}\right)$$

Si $|\rho| < 1$ *, alors en faisant tendre j vers l'infini, on obtient :*

$$\sigma_\varepsilon^2 = Var(\varepsilon_i) = \lim_{j\to+\infty} \left[\rho^{2j} Var(\varepsilon_{i-j}) + \sigma_u^2 \left(\frac{1-\rho^{2j}}{1-\rho^2}\right)\right] = \frac{\sigma_u^2}{1-\rho^2}$$

Ensuite, on peut calculer l'autocovariance :

$$Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_{i-j}) = Cov\left[\left(\rho^j \varepsilon_{i-j} + \sum_{k=0}^{j-1} \rho^k u_{i-k}\right), \varepsilon_{i-j}\right] \text{, avec } j > 0$$

$$= Cov(\rho^j \varepsilon_{i-j}, \varepsilon_{i-j}) + \sum_{k=0}^{j-1} Cov(\rho^k u_{i-k}, \varepsilon_{i-j}) = \rho^j Var(\varepsilon_{i-j}) + \sum_{k=0}^{j-1} \rho^k \underbrace{Cov(u_{i-k}, \varepsilon_{i-j})}_{0}$$

$$= \rho^j \sigma_\varepsilon^2$$

$$Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_{i-j}) = \left(\frac{\rho^j}{1-\rho^2}\right) \sigma_u^2 \text{ , pour tout } j > 0$$

Enfin, on calcule l'autocorrélation :

$$\rho_{\varepsilon_i, \varepsilon_{i-j}} = \frac{Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_{i-j})}{\sqrt{Var(\varepsilon_i) Var(\varepsilon_{i-j})}} = \frac{\left(\frac{\rho^j}{1-\rho^2}\right)\sigma_u^2}{\sqrt{\frac{\sigma_u^2}{1-\rho^2} \times \frac{\sigma_u^2}{1-\rho^2}}} = \rho^j$$

On peut donc construire la matrice variance-covariance du vecteur $\mathcal{E} = (\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \cdots \quad \varepsilon_n)'$

$$Var(\mathcal{E}) = E(\mathcal{E}\mathcal{E}') = \sigma_u^2\Omega$$

$$\Omega = \frac{1}{1-\rho^2}\begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \cdots & \rho^{n-3} & \rho^{n-2} & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \rho & \cdots & \rho^{n-4} & \rho^{n-3} & \rho^{n-2} \\ \rho^2 & \rho & 1 & \cdots & \rho^{n-5} & \rho^{n-4} & \rho^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho^{n-3} & \rho^{n-4} & \rho^{n-5} & \cdots & 1 & \rho & \rho^2 \\ \rho^{n-2} & \rho^{n-3} & \rho^{n-4} & \cdots & \rho & 1 & \rho \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \rho^{n-3} & \cdots & \rho^2 & \rho & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est inversible et l'on peut vérifier par une simple multiplication que son

inverse est : $\Omega^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\rho & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho & 1+\rho^2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+\rho^2 & -\rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\rho & 1 \end{pmatrix}$

Le processus autorégressif d'ordre un ne dépend que d'un seul paramètre ρ .

Ce paramètre peut être estimé par la méthode des moindres carrés qui consiste à

minimiser la quantité : $Q(\rho) = \sum_{i=2}^{n}(\varepsilon_i - \rho\varepsilon_{i-1})^2$

On obtient : $\hat{\rho} = \sum_{i=2}^{n}\varepsilon_i\varepsilon_{i-1} \Big/ \sum_{i=2}^{n}\varepsilon_{i-1}^2$

b • Estimation avec des termes d'erreur autocorrélés :

Pour se ramener à la méthode des moindres carrés ordinaires, on peut vérifier par

simple multiplication que $\Omega^{-1} = T'T$ *, où* $T = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\rho^2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -\rho & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\rho & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\rho & 1 \end{pmatrix}$

De plus , $T\mathcal{E} = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\rho^2}\varepsilon_1 \\ -\rho\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ \vdots \\ -\rho\varepsilon_{i-1} + \varepsilon_i \\ \vdots \\ -\rho\varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n \end{pmatrix}$.

En remplaçant ε_i *par* $\rho\varepsilon_{i-1} + u_i$, *on obtient* : $T\mathcal{E} = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\rho^2}\varepsilon_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$

On a donc $E(T\mathcal{E}) = 0$ *et* $Var(T\mathcal{E}) = \sigma_u^2 I_n$.

D'où la transformation du modèle $Y = X\beta + \mathcal{E}$ *par la méthode de Aitken* : $TY = TX\beta + \underbrace{T\mathcal{E}}_{U}$

qui sera par la suite un modèle linéaire général avec des termes d'erreur homoscédastique et non-corrélés. L'estimateur linéaire optimal est alors l'estimateur des moindres carrés ordinaires qui s'écrit :

$$\widehat{\beta}_{MCG} = (X'\Omega^{-1}X)^{-1}(X'\Omega^{-1}Y) = (X'(T'T)X)^{-1}(X'(T'T)Y)$$

☑ *Cas où* ρ *est inconnu* : *En pratique* , ρ *est toujours inconnu. Cochrane et Orcutt suggèrent d'utiliser une procédure itérative. On commence d'abord par effectuer une régression classique par les MCO. En obtient ainsi des résidus* $\hat{\varepsilon}_i$, *ce qui permet d'obtenir une première estimation approximative de* ρ : $\hat{\rho} = \sum_{i=2}^{n} \hat{\varepsilon}_i \hat{\varepsilon}_{i-1} \Big/ \sum_{i=2}^{n} \hat{\varepsilon}_{i-1}^2$ *Ensuite, on répète les deux opérations suivantes.*

■ *Connaissant une approximation de* ρ , *on peut estimer le coefficient de régression au moyen de l'expression* $\widehat{\beta}_{MCG} = (X'\Omega^{-1}X)^{-1}(X'\Omega^{-1}Y) = (X'(T'T)X)^{-1}(X'(T'T)Y)$.
On obtient une estimation de β *qui permet d'obtenir une nouvelle estimation des résidus.*

■ *À partir de ces nouveaux résidus, on recalcule une estimation de* ρ

En répétant ces deux opérations plusieurs fois, on aboutit à une solution, qui n'est pas nécessairement optimale.

$\mathcal{C}$– 4 • *Le test de Durbin-Watson :*

Considèrons un modèle de type : $Y = X\beta + \mathcal{E}$ *, où* $Var(\varepsilon_i) = \sigma_\varepsilon^2$ *et* $Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \rho_{j-1}\sigma_\varepsilon^2$.

On peut estimer β *au moyen de l'estimateur des moindres carrés ordinaires* $\widehat{\beta}_{MCO}$ *ce qui ne procure pas un estimateur optimal, mais cet estimateur est sans biais. On peut dès lors calculer les résidus* $\widehat{\mathcal{E}} = Y - X\widehat{\beta}$

La statistique de Durbin-Watson permet de tester l'hypothèse nulle $H_0 : \rho = 0$ *, contre les hypothèses alternatives* $\rho \neq 0$ *, ou* $\rho > 0$ *, ou* $\rho < 0$ *. Sa distribution n'a pas pu être déterminée indépendamment de la forme de la matrice* X *. Il existe donc une zone de valeurs de cette statistique pour lesquelles on ne pourra rejeter l'hypothèse nulle* H_0 *, ni l'hypothèse alternative* H_1.

La statistique de Durbin-Watson est définie comme : $DW = \sum_{i=2}^{n} (\hat{\varepsilon}_i - \hat{\varepsilon}_{i-1})^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n} \hat{\varepsilon}_i^2$ *où les* $\hat{\varepsilon}_i$ *sont les résidus des moindres carrés ordinaires.*

La statistique de Durbin-Watson est approximée par :

$$DW = \sum_{i=2}^{n} (\hat{\varepsilon}_i - \hat{\varepsilon}_{i-1})^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n} \hat{\varepsilon}_i^2 \approx 2 - 2\left[\sum_{i=2}^{n} \hat{\varepsilon}_i \hat{\varepsilon}_{i-1} \Big/ \sum_{i=1}^{n} \hat{\varepsilon}_i^2\right] \approx 2(1 - \widehat{\rho})$$

On constate que :

- *Quand* ρ *est proche de* 0 *,* DW *est proche de* 2
- *Quand* ρ *est proche de* 1 *,* DW *est proche de* 0
- *Quand* ρ *est proche de* -1 *,* DW *est proche de* 4

Les règles de décision sont résumées dans le tableau suivant, avec toujours $H_0 : \rho = 0$:

H_1	$DW < d_L$	$d_L \leq DW \leq d_U$	$d_U \leq DW < 4 - d_U$	$4 - d_U \leq DW < 4 - d_L$	$4 - d_L \leq DW$
$\rho > 0$	*Rejeter* H_0	*Incertain*	*Ne pas rejeter* H_0		
$\rho < 0$	*Ne pas rejeter* H_0			*Incertain*	*Rejeter* H_0
$\rho \neq 0$	*Rejeter* H_0	*Incertain*	*Ne pas rejeter* H_0	*Incertain*	*Rejeter* H_0

☑ ***Remarque*** *: Le test de Durbin-Watson ne peut pas être employé lorsque les régresseurs incluent des variables retardées*

La table de valeurs critiques de Durbin-Watson fournit deux valeurs d_U *et* d_L *pour chaque combinaison de nombres d'observations* n *et de nombres de variables explicatives* $k - 1$ *et* $\alpha = 1\%$

BEN AHMED MOHSEN
Téléphone: (+216) 97 619191 / 54 619191
omega.center.cp@gmail.com
https://web.facebook.com/OMEGACENTER2014

Table de Durbin-Watson

La table donne les limites inférieures et supérieures des seuils de signification du test de Durbin-Watson pour

$$\alpha = 1\ \%$$

n	$k-1=1$		$k-1=2$		$k-1=3$		$k-1=4$		$k-1=5$	
	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U
15	0.81	1.07	0.70	1.25	0.59	1.46	0.49	1.70	0.39	1.96
16	0.84	1.09	0.74	1.25	0.63	1.44	0.53	1.66	0.44	1.90
17	0.87	1.10	0.77	1.25	0.67	1.43	0.57	1.63	0.48	1.85
18	0.90	1.12	0.80	1.26	0.71	1.42	0.61	1.60	0.52	1.80
19	0.93	1.13	0.83	1.26	0.74	1.41	0.65	1.58	0.56	1.77
20	0.95	1.15	0.86	1.27	0.77	1.41	0.68	1.57	0.60	1.74
21	0.97	1.16	0.89	1.27	0.80	1.41	0.72	1.55	0.63	1.71
22	1.00	1.17	0.91	1.28	0.83	1.40	0.75	1.54	0.66	1.69
23	1.02	1.19	0.94	1.29	0.86	1.40	0.77	1.53	0.70	1.67
24	1.04	1.20	0.96	1.30	0.88	1.41	0.80	1.53	0.72	1.66
25	1.05	1.21	0.98	1.30	0.90	1.41	0.83	1.52	0.75	1.65
26	1.07	1.22	1.00	1.31	0.93	1.41	0.85	1.52	0.78	1.64
27	1.09	1.23	1.02	1.32	0.95	1.41	0.88	1.51	0.81	1.63
28	1.10	1.24	1.04	1.32	0.97	1.41	0.90	1.51	0.83	1.62
29	1.12	1.25	1.05	1.33	0.99	1.42	0.92	1.51	0.85	1.61
30	1.13	1.26	1.07	1.34	1.01	1.42	0.94	1.51	0.88	1.61
31	1.15	1.27	1.08	1.34	1.02	1.42	0.96	1.51	0.90	1.60
32	1.16	1.28	1.10	1.35	1.04	1.43	0.98	1.51	0.92	1.60
33	1.17	1.29	1.11	1.36	1.05	1.43	1.00	1.51	0.94	1.59
34	1.18	1.30	1.13	1.36	1.07	1.43	1.01	1.51	0.95	1.59
35	1.19	1.31	1.14	1.37	1.08	1.44	1.03	1.51	0.97	1.59
36	1.21	1.32	1.15	1.38	1.10	1.44	1.04	1.51	0.99	1.59
37	1.22	1.32	1.16	1.38	1.11	1.45	1.06	1.51	1.00	1.59
38	1.23	1.33	1.18	1.39	1.12	1.45	1.07	1.52	1.02	1.58
39	1.24	1.34	1.19	1.39	1.14	1.45	1.09	1.52	1.03	1.58
40	1.25	1.34	1.20	1.40	1.15	1.46	1.10	1.52	1.05	1.58
45	1.29	1.38	1.24	1.42	1.20	1.48	1.16	1.53	1.11	1.58
50	1.32	1.40	1.28	1.45	1.24	1.49	1.20	1.54	1.16	1.59
55	1.36	1.43	1.32	1.47	1.28	1.51	1.25	1.55	1.21	1.59
60	1.38	1.45	1.35	1.48	1.32	1.52	1.28	1.56	1.25	1.60
65	1.41	1.47	1.38	1.50	1.35	1.53	1.31	1.57	1.28	1.61
70	1.43	1.49	1.40	1.52	1.37	1.55	1.34	1.58	1.31	1.61
75	1.45	1.50	1.42	1.53	1.39	1.56	1.37	1.59	1.34	1.62
80	1.47	1.52	1.44	1.54	1.42	1.57	1.39	1.60	1.36	1.62
85	1.48	1.53	1.46	1.55	1.43	1.58	1.41	1.60	1.39	1.63
90	1.50	1.54	1.47	1.56	1.45	1.59	1.43	1.61	1.41	1.64
95	1.51	1.55	1.49	1.57	1.47	1.60	1.45	1.62	1.42	1.64
100	1.52	1.56	1.50	1.58	1.48	1.60	1.46	1.63	1.44	1.

Adresse : 2, Rue Ibn Arafa, av de l'environnement Manouba Centre, Manouba

BEN AHMED MOHSEN Téléphone: (+216) 97 619191 / 54 619191
omega.center.cp@gmail.com https://web.facebook.com/OMEGACENTER2014

Table de Durbin-Watson

La table donne les limites inférieures et supérieures des seuils de signification du test de Durbin-Watson pour

$\alpha = 5$ %.

n	$k-1=1$		$k-1=2$		$k-1=3$		$k-1=4$		$k-1=5$	
	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U
15	1.08	1.36	0.95	1.54	0.82	1.75	0.69	1.97	0.56	2.21
16	1.10	1.37	0.98	1.54	0.86	1.73	0.74	1.93	0.62	2.15
17	1.13	1.38	1.02	1.54	0.90	1.71	0.78	1.91	0.67	2.10
18	1.16	1.39	1.05	1.53	0.93	1.69	0.82	1.87	0.71	2.06
19	1.18	1.40	1.08	1.53	0.97	1.68	0.86	1.85	0.75	2.02
20	1.20	1.41	1.10	1.54	1.00	1.68	0.90	1.83	0.79	1.99
21	1.22	1.42	1.13	1.54	1.03	1.67	0.93	1.81	0.83	1.96
22	1.24	1.43	1.15	1.54	1.05	1.66	0.96	1.80	0.86	1.94
23	1.26	1.44	1.17	1.54	1.08	1.66	0.99	1.79	0.90	1.92
24	1.27	1.45	1.19	1.55	1.10	1.66	1.01	1.78	0.93	1.90
25	1.29	1.45	1.21	1.55	1.12	1.66	1.04	1.77	0.95	1.89
26	1.30	1.46	1.22	1.55	1.14	1.65	1.06	1.76	0.98	1.88
27	1.32	1.47	1.24	1.56	1.16	1.65	1.08	1.76	1.01	1.86
28	1.33	1.48	1.26	1.56	1.18	1.65	1.10	1.75	1.03	1.85
29	1.34	1.48	1.27	1.56	1.20	1.65	1.12	1.74	1.05	1.84
30	1.35	1.49	1.28	1.57	1.21	1.65	1.14	1.74	1.07	1.83
31	1.36	1.50	1.30	1.57	1.23	1.65	1.16	1.74	1.09	1.83
32	1.37	1.50	1.31	1.57	1.24	1.65	1.18	1.73	1.11	1.82
33	1.38	1.51	1.32	1.58	1.26	1.65	1.19	1.73	1.13	1.81
34	1.39	1.51	1.33	1.58	1.27	1.65	1.21	1.73	1.15	1.81
35	1.40	1.52	1.34	1.58	1.28	1.65	1.22	1.73	1.16	1.80
36	1.41	1.52	1.35	1.59	1.29	1.65	1.24	1.73	1.18	1.80
37	1.42	1.53	1.36	1.59	1.31	1.66	1.25	1.72	1.19	1.80
38	1.43	1.54	1.37	1.59	1.32	1.66	1.26	1.72	1.21	1.79
39	1.43	1.54	1.38	1.60	1.33	1.66	1.27	1.72	1.22	1.79
40	1.44	1.54	1.39	1.60	1.34	1.66	1.29	1.72	1.23	1.79
45	1.48	1.57	1.43	1.62	1.38	1.67	1.34	1.72	1.29	1.78
50	1.50	1.59	1.46	1.63	1.42	1.67	1.38	1.72	1.34	1.77
55	1.53	1.60	1.49	1.64	1.45	1.68	1.41	1.72	1.38	1.77
60	1.55	1.62	1.51	1.65	1.48	1.69	1.44	1.73	1.41	1.77
65	1.57	1.63	1.54	1.66	1.50	1.70	1.47	1.73	1.44	1.77
70	1.58	1.64	1.55	1.67	1.52	1.70	1.49	1.74	1.46	1.77
75	1.60	1.65	1.57	1.68	1.54	1.71	1.51	1.74	1.49	1.77
80	1.61	1.66	1.59	1.69	1.56	1.72	1.53	1.74	1.51	1.77
85	1.62	1.67	1.60	1.70	1.57	1.72	1.55	1.75	1.52	1.77
90	1.63	1.68	1.61	1.70	1.59	1.73	1.57	1.75	1.54	1.78
95	1.64	1.69	1.62	1.71	1.60	1.73	1.58	1.75	1.56	1.78
100	1.65	1.69	1.63	1.72	1.61	1.74	1.59	1.76	1.57	1.78

Adresse : 2, Rue Ibn Arafa, av de l'environnement Manouba Centre, Manouba

Les modèles de choix binaire

D– 1 • Introduction :

Auparavant, les variables utilisées étaient implicitement supposées continues.

Cependant, on s'intéresse souvent à des variables qualitatives, qui sont discrètes : diplôme obtenu, risque de défaillance d'une entreprise, comportement d'achat de tel ou tel produit…

Utiliser des variables explicatives de ce type ne pose pas de problème particulier.

En revanche, les choses sont un peu plus compliquées lorsque c'est la variable dépendante Y qui est discrète. On va s'intéresser ici à la spécification et l'estimation de modèles où la variable dépendante est une variable binaire, appelée encore variable dichotomique : $y \in \{0,1\}$.

Prenons l'exemple d'un modèle de régression simple permettant de relier le fait d'être, pour un individu i, propriétaire d'un logement à son revenu: $y_i = a_0 + a_1 x_i + \varepsilon_i \; ; i = 1, \dots, n$

Avec: $y_i = \begin{cases} 1, \text{si l'individu i est propriétaire de son logement} \\ 0, \text{si non} \end{cases}$

x_i : ***revenu en euros de l'individu i***

Ce modèle, appelé aussi modèle à probabilité linéaire, les hypothèses classiques de la régression linéaire conduisent à :

- $E(\varepsilon_i) = 0 \Longrightarrow E(y_i) = a_0 + a_1 x_i$
- ***La valeur prévue de la variable à expliquer*** y_i ***peut s'interpréter de la manière suivante :***
  - ***Soit,*** $P_i = P(y_i = 1) \Longrightarrow P(y_i = 0) = 1 - P_i$
  - $E(y_i) = [0 \times P(y_i = 0)] + [1 \times P(y_i = 1)] = P_i$

D'où, $\boxed{P_i = a_0 + a_1 x_i}$

- ***La variable*** y_i ***ne pouvant prendre que deux valeurs*** $(0 \text{ et } 1)$***, par voie de conséquence, l'erreur*** ε_i ***ne peut donc prendre que deux valeurs :***

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 1 - (a_0 + a_1 x_i), \text{avec la probabilité}, P_i \\ -(a_0 + a_1 x_i), \text{avec la probabilité}, 1 - P_i \end{cases}$$

$$V(\varepsilon_i) = E(\varepsilon_i^2) = \left[P_i\big(1 - (a_0 + a_1 x_i)\big)^2\right] + \left[(1 - P_i)\big(-(a_0 + a_1 x_i)\big)^2\right] \text{, or } P_i = a_0 + a_1 x_i$$

$\Rightarrow V(\varepsilon_i) = E(\varepsilon_i^2) = P_i(1-P_i)^2 + (1-P_i)P_i^2 = P_i(1-P_i)(1-P_i+P_i)$

$V(\varepsilon_i) = E(\varepsilon_i^2) = P_i(1-P_i)$

▪ ***Examinons les problèmes soulevés par l'application d'une méthode des moindres carrés ordinaires afin d'estimer ce modèle.***

◦ ***Dans l'équation*** $[y_i = a_0 + a_1x_i + \varepsilon_i]$, ***le codage de la variable endogène,*** y_i $(0 \text{ ou } 1)$ ***esttotalement arbitraire, par exemple si nous prenions un codage sous la forme*** $(0 \text{ ou } 10)$ ***les valeurs estimées des coefficients*** a_0 ***et*** a_1 ***seraient évidemment différentes*** $(10 \times a_k)$, $k = 1, 2$.

◦ ***Puisque l'erreur ne peut prendre que deux valeurs, elle suit donc une loi discrète, l'hypothèse de normalité des erreurs n'est donc pas vérifiée.***

◦ $V(\varepsilon_i) = E(\varepsilon_i^2) = P_i(1-P_i)$: ***cela implique l'existence d'une hétéroscédasticité. Cependant nous ne pouvons pas appliquer la méthode des moindres carrés généralisés car*** $(P_i = a_0 + a_1x_i)$ ***dépend des paramètres*** a_0 ***et*** a_1 ***du modèle.***

◦ ***Enfin, nous devons imposer une contrainte au modèle*** $0 \leq (P_i = a_0 + a_1x_i) \leq 1$ ***qui peut se révéler non compatible avec les données.***

Tous ces éléments indiquent clairement que nous sommes dans l'impossibilité d'utiliser la méthode des moindres carrés ordinaires.

D-2 • Modélisation par variable latente :

Les modèles à variables dépendantes discrètes sont souvent introduits par le biais d'une variable latente, c-à-d. une variable inobservée mais qui détermine complètement la réalisation de la variable indicatrice étudiée. Par exemple, on peut supposer qu'une personne adopte un comportement lorsque son utilité dépasse un seuil qui varie selon ses caractéristiques (observables ou non).

Formellement, on suppose qu'il existe une variable $y_i^* = a_0 + a_1x_i + \varepsilon_i$, ***appelée variable latente associée au modèle, telle que*** $y_i = \begin{cases} 1, si\ y_i^* > 0 \\ 0, si\ y_i^* \leq 0 \end{cases}$

Soit, $P_i = P(y_i = 1) = P(y_i^* > 0) = P(a_0 + a_1x_i + \varepsilon_i > 0) = P(\varepsilon_i > -(a_0 + a_1x_i))$

Si la distribution de ε_i ***est centrée par rapport à la moyenne, nous avons l'équivalence :***

$P(\varepsilon_i > -(a_0 + a_1x_i)) = P(\varepsilon_i < a_0 + a_1x_i)$

On obtient ainsi : $P_i = P(y_i = 1) = P(y_i^* > 0) = P(\varepsilon_i < a_0 + a_1x_i)$

Si on suppose que le résidu ε_i ***intervenant dans modélisation de la variable latente suit***

une loi Normale (resp. Logistique) et qu'il est indépendant des variables explicatives, on obtient le modèle Probit (resp. Logit).

D-3 • Modèles Probit, Logit et à Probabilité Linéaire :

▪ *Dans un modèle Probit la fonction de répartition de l'erreur ε_i est donnée par :*

$$P_i = \Phi(a_0 + a_1 x_i) = \int_{-\infty}^{a_0 + a_1 x_i} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$ *, Il s'agit d'une loi normale centrée et réduite $\mathcal{N}(0,1)$.*

▪ *La fonction logistique « Logit model » est donnée par l'expression suivante :*

$$P_i = G(a_0 + a_1 x_i) = \frac{e^{a_0 + a_1 x_i}}{1 + e^{a_0 + a_1 x_i}} = \frac{1}{1 + e^{-(a_0 + a_1 x_i)}}$$

Or $$\frac{P_i}{1 - P_i} = \frac{\frac{1}{1 + e^{-(a_0 + a_1 x_i)}}}{1 - \frac{1}{1 + e^{-(a_0 + a_1 x_i)}}} = \frac{\frac{1}{1 + e^{-(a_0 + a_1 x_i)}}}{\frac{1 + e^{-(a_0 + a_1 x_i)} - 1}{1 + e^{-(a_0 + a_1 x_i)}}} = \frac{1}{e^{-(a_0 + a_1 x_i)}} = e^{(a_0 + a_1 x_i)}$$

On obtient par la suite : $a_0 + a_1 x_i = \ln\left(\frac{P_i}{1 - P_i}\right)$

▪ *Le modèle de probabilité linéaire, consiste à utiliser une fonction linéaire tronquée:*

$$P_i = F(a_0 + a_1 x_i) = \begin{cases} 0, \, si \; a_0 + a_1 x_i < -0,5 \\ (a_0 + a_1 x_i) + 0,5 \, , si \; |a_0 + a_1 x_i| \le 0,5 \\ 1 \, , si \; a_0 + a_1 x_i > 0,5 \end{cases}$$

D-4 • Estimation par maximum de vraisemblance :

La variable aléatoire Y est une variable binaire telle que :

$P(Y_i = 1) = P_i = G(a_0 + a_1 X_i)$ *et* $P(y_i = 0) = 1 - P_i = 1 - G(a_0 + a_1 X_i)$

La distribution de probabilité s'écrit donc et d'une manière plus simple :

$$P(Y_i = y_{ij}) = \begin{cases} [G(a_0 + a_1 X_i)]^{y_{ij}} [1 - G(a_0 + a_1 X_i)]^{1 - y_{ij}} \, , si \; y_{ij} \in \{0,1\} \\ 0, \, si \; non \end{cases}$$

La fonction de vraisemblance de l'échantillon (Y_n) est alors donnée par :

$$L(a_0, a_1, y_{ij}) = \prod_{i=1}^{n} P(Y_i = y_{ij})$$

$(\hat{a}_0, \hat{a}_1)$ *maximise* $L(a_0, a_1, y_{ij}) \Leftrightarrow (\hat{a}_0, \hat{a}_1)$ *maximise* $\ln[L(a_0, a_1, y_{ij})]$

Introduction aux modèles Dynamiques

$\mathcal{E}-1$ • Retards échelonnées :

Soit le modèle : $y_t = a + b_0x_t + b_1x_{t-1} + \cdots + b_kx_{t-k} + u_t$

La variable dépendante y_t est une combinaison linéaire des valeurs présentes et passées de la variable explicative. Nous fournissons deux interprétations économiques de ce modèle :

- *Dans le cadre d'une fonction de consommation, il correspondrait à l'hypothèse que la consommation présente dépend du revenu espéré. Ce dernier est une combinaison linéaire des revenus observés, présents et passés. Il existe donc une sorte d'inertie dans le comportement du consommateur.*
- *Dans le cadre d'un modèle d'investissement, faisons les hypothèses suivantes :*

☞ *La valeur désirée des stocks, y_t^* est proportionnelle à la valeur prévue des ventes, x_t^*, à un terme d'erreur v_t près :* $y_t^* = \alpha x_t^* + v_t \quad (1)$

☞ *L'investissement (variation de stock entre les périodes t et $t-1$) est régi par le mécanisme suivant (**ajustement partiel**):* $y_t - y_{t-1} = \beta(y_t^* - y_{t-1})$, *avec* $0 < \beta < 1 \quad (2)$

On comble donc à la période t une fraction β de la différence entre le stock effectif précédent, y_{t-1}, et le stock désiré, y_t^*

☞ *La valeur prévue des ventes est régie par le mécanisme suivant (**anticipations adaptives**) :*

$x_t^* = x_{t-1}^* + \gamma(x_{t-1} - x_{t-1}^*)$, *avec* $0 < \gamma < 1 \quad (3)$

On comble donc à la période t un pourcentage γ de l'erreur de prévision faite à la période $t-1$.

*On va démontrer que les équations (1), (2) et (3) mènent à un **modèle à retard échelonnés***

Résolvons tout d'abord l'équation de récurrence (3):

$$x_t^* = x_{t-1}^* + \gamma(x_{t-1} - x_{t-1}^*) = \gamma x_{t-1} + (1-\gamma)x_{t-1}^* = \gamma x_{t-1} + (1-\gamma)[\gamma x_{t-2} + (1-\gamma)x_{t-2}^*]$$

$$x_t^* = \gamma x_{t-1} + \gamma(1-\gamma)x_{t-2} + (1-\gamma)^2x_{t-2}^*$$

et l'on obtient, après une infinité de substitutions, la régle de prévision suivante, dite de

(*lissage exponentielle*)

$$x_t^* = \gamma \sum_{i=1}^{+\infty} (1-\gamma)^{i-1} x_{t-i} \quad (4)$$

En résolvant (2) *en* y_t^*, *on obtient* :

$$y_t - y_{t-1} = \beta(y_t^* - y_{t-1}) \Leftrightarrow y_t - y_{t-1} = \beta y_t^* - \beta y_{t-1} \Leftrightarrow y_t - y_{t-1} + \beta y_{t-1} = \beta y_t^*$$

$$\Leftrightarrow \beta y_t^* = y_t - (1-\beta) y_{t-1} \Leftrightarrow y_t^* = \frac{1}{\beta}[y_t - (1-\beta)y_{t-1}] \quad (5)$$

Par ailleurs (1) *et* (4) : $\begin{cases} y_t^* = \alpha x_t^* + v_t \\ x_t^* = \gamma \sum_{i=1}^{+\infty} (1-\gamma)^{i-1} x_{t-i} \end{cases} \Rightarrow y_t^* = \alpha\gamma \sum_{i=1}^{+\infty} (1-\gamma)^{i-1} x_{t-i} + v_t \quad (6)$

En égalisant (5) *et* (6), $\begin{cases} y_t^* = \frac{1}{\beta}[y_t - (1-\beta)y_{t-1}] & (5) \\ y_t^* = \alpha\gamma \sum_{i=1}^{+\infty} (1-\gamma)^{i-1} x_{t-i} + v_t & (6) \end{cases}$, *on obtient* :

$$\frac{1}{\beta}[y_t - (1-\beta)y_{t-1}] = \alpha\gamma \sum_{i=1}^{+\infty} (1-\gamma)^{i-1} x_{t-i} + v_t \Leftrightarrow y_t = (1-\beta)y_{t-1} + \alpha\beta\gamma \sum_{i=1}^{+\infty} (1-\gamma)^{i-1} x_{t-i} + \underbrace{\beta v_t}_{u_t}$$

$$y_t = (1-\beta)y_{t-1} + \alpha\beta\gamma \sum_{i=1}^{+\infty} (1-\gamma)^{i-1} x_{t-i} + u_t \ (7)$$

☑ **Remarque** : *Cette dernière équation est linéaire dans les variables explicatives, et ne comporte plus que des variables observables. Elle comporte néanmoins une infinité de régreseurs. On peut évidemment supprimer les* x_{t-i} *pour i assez grand. Mais ceci ne résout que partiellement le problème, car il y a peut de degré de liberté : le nombre de paramètres à estimer reste grand, et l'onperd une observation par variable retardée. De plus, les* x_{t-i} *risquent d'être fortement colinéaires.*

La méthode de Koyck et d'Almon ont étaient proposées pour résoudre ce problème.

Ɛ– 2 • La méthode de Koyck :

Soit donc le modèle général : $y_t = a + b_0 x_t + b_1 x_{t-1} + \cdots + b_k x_{t-k} + u_t$

En fait l'hypothèseque les poids b_i *sont géométriquement décroissant, soit* :

$$b_i = \lambda^i b_0 \ avec\ 0 < \lambda < 1$$

Par conséquent :

$$\begin{cases} y_t = a + b_0x_t + \lambda b_0x_{t-1} + \lambda^2 b_0x_{t-2} + \cdots + \lambda^k b_0x_{t-k} + u_t \\ \text{et} \\ y_{t-1} = a + b_0x_{t-1} + \lambda b_0x_{t-2} + \lambda^2 b_0x_{t-3} + \cdots + \lambda^k b_0x_{t-k-1} + u_{t-1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_t = a + b_0x_t + \lambda b_0x_{t-1} + \lambda^2 b_0x_{t-2} + \cdots + \lambda^k b_0x_{t-k} + u_t \\ \text{et} \\ \lambda y_{t-1} = \lambda a + \lambda b_0x_{t-1} + \lambda^2 b_0x_{t-2} + \lambda^3 b_0x_{t-3} + \cdots + \lambda^{k+1} b_0x_{t-k-1} + \lambda u_{t-1} \end{cases}$$

que nous soustrayons pour obtenir :

$$y_t - \lambda y_{t-1} = (a - \lambda a) + b_0x_t - \lambda^{k+1} b_0x_{t-k-1} + (u_t - \lambda u_{t-1})$$

Si k est suffisement grand , $\lambda^{k+1} \approx 0$

Et nous pouvons alors retenir comme modèle :

$$y_t - \lambda y_{t-1} = \underbrace{(a - \lambda a)}_{a^*} + b_0x_t + \underbrace{(u_t - \lambda u_{t-1})}_{u_t^*} \Rightarrow y_t = a^* + \lambda y_{t-1} + b_0x_t + u_t^*$$

Nous n'avons donc plus que deux régresseurs et une constante . Il faut noter :

- *que cette transformation peut aussi s'appliquer à un nombre infini de retards*
- *que l'on peut retrouver l'équation de départ à partir d'estimations de* λ *et de* b_0 *obtenues grâce au modèle transformé*
- *que* $E(y_{t-1}u_t^*) \neq 0$ *. Nous sommes donc dans le cas où les estimateurs MCO ne sont pas convergents.*

Reprenons le modèle d'investissement : $y_t = (1-\beta)y_{t-1} + \alpha\beta\gamma\sum_{i=1}^{+\infty}(1-\gamma)^{i-1}x_{t-i} + u_t \ (7)$

et appliquons la méthode de Koyck :

$$\begin{cases} y_t = (1-\beta)y_{t-1} + \alpha\beta\gamma\sum_{i=1}^{+\infty}(1-\gamma)^{i-1}x_{t-i} + u_t \\ \text{et} \\ y_{t-1} = (1-\beta)y_{t-2} + \alpha\beta\gamma\sum_{i=1}^{+\infty}(1-\gamma)^{i-1}x_{t-i-1} + u_{t-1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_t = (1-\beta)y_{t-1} + \alpha\beta\gamma\sum_{i=1}^{+\infty}(1-\gamma)^{i-1}x_{t-i} + u_t \\ \text{et} \\ (1-\gamma)y_{t-1} = (1-\beta)(1-\gamma)y_{t-2} + \alpha\beta\gamma\sum_{i=1}^{+\infty}(1-\gamma)^{i}x_{t-i-1} + (1-\gamma)u_{t-1} \end{cases}$$

que nous soustrayons pour obtenir :

$$y_t-(1-\gamma)y_{t-1}=(1-\beta)y_{t-1}+\alpha\beta\gamma x_{t-1}-(1-\beta)(1-\gamma)y_{t-2}+\underbrace{[u_t-(1-\gamma)u_{t-1}]}_{u_t^*}$$

$$D'\text{où } y_t=\underbrace{(2-\beta-\gamma)}_{a_1}y_{t-1}+\underbrace{\alpha\beta\gamma}_{a_2}x_{t-1}\underbrace{-(1-\beta)(1-\gamma)}_{a_3}y_{t-2}+u_t^*$$

Appelons $\hat{a}_1,\hat{a}_2$ et $\hat{a}_3$ les estimations des coefficients de cette équation. Pour estimer les paramètres du modèle de départ, il faudrait résoudre le système :

$$\begin{cases}\hat{a}_1=2-\hat{\beta}-\hat{\gamma}\\ \hat{a}_2=\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}\\ \hat{a}_3=-(1-\hat{\beta})(1-\hat{\gamma})=\hat{\beta}+\hat{\gamma}-1-\hat{\beta}\hat{\gamma}\end{cases}$$

$\hat{\alpha}$ peut être obtenu comme $\dfrac{\hat{a}_2}{1-\hat{a}_1-\hat{a}_3}$. Il est identifiable.

Mais $\hat{\beta}$ et $\hat{\gamma}$ ne le sont pas. On ne peut déterminer que leur somme et leur produit.

$\mathcal{E}$– 3 • La méthode d'Almon :

L'hypothèse faite par Koyck que les poids b_i sont géométriquement décroissant est très restrictive. L'idée d'Almon est d'utiliser une approximation polynomiale de la fonction décrivant le comportement réel des b_i. On choisit, en pratique, un polynôme de degré supérieur d'au moins une unité au nombre de points stationnaires de cette fonction.

Si, par exemple, l'on pense que cette fonction a la forme d'un U ou d'un U renversé, on choisira une approximation quadratique : $b_i=\alpha_0+\alpha_1 i+\alpha_2 i^2$ que l'on substitue dans le modéle précédent : $y_t=a+b_0x_t+b_1x_{t-1}+\cdots+b_kx_{t-k}+u_t$, pour obtenir :

$$y_t=a+\alpha_0x_t+(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)x_{t-1}+(\alpha_0+2\alpha_1+4\alpha_2)x_{t-2}+\cdots+(\alpha_0+k\alpha_1+k^2\alpha_2)x_{t-k}+u_t$$

$$=a+\alpha_0\underbrace{\left(\sum_{i=0}^{k}x_{t-i}\right)}_{Z_{1t}}+\alpha_1\underbrace{\left(\sum_{i=0}^{k}ix_{t-i}\right)}_{Z_{2t}}+\alpha_2\underbrace{\left(\sum_{i=0}^{k}i^2x_{t-i}\right)}_{Z_{3t}}+u_t=a+\alpha_0Z_{1t}+\alpha_1Z_{2t}+\alpha_2Z_{3t}+u_t$$

Les paramètres de cette équation peuvent alors être estimés par la méthode MCO, et les estimateurs des b_i peuvent être calculés à l'aide de l'approximation polynomiale.

Notons aussi que cette technique se prête particulièrement bien à l'introduction de contraintes additionnelles sur les b_i. Supposons que l'on veuille imposer $b_1=1$. On a

$donc : 1 = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2$. En substituant, il vient :

$$y_t = a + (1 - \alpha_1 - \alpha_2)Z_{1t} + \alpha_1 Z_{2t} + \alpha_2 Z_{3t} + u_t$$

$$\Rightarrow \underbrace{y_t - Z_{1t}}_{y_t^*} = a + \alpha_1 \underbrace{(Z_{2t} - Z_{1t})}_{Z_{1t}^*} + \alpha_2 \underbrace{(Z_{3t} - Z_{1t})}_{Z_{2t}^*} + u_t$$

$$\Rightarrow y_t^* = a + \alpha_1 Z_{1t}^* + \alpha_2 Z_{2t}^* + u_t$$

$\mathcal{E}$– 4 • L'opérateur de retard :

L'opérateur de retard est définie par : $Lx_t = x_{t-1}$

Cet opérateur peut être traité comme une variable algébrique ordinaire. En effet :

- $L^j x_t = x_{t-j}$
- $L^j L^k x_t = L^{j+k} x_t = x_{t-j-k}$
- $L^j(a_1 x_{1t} + a_2 x_{2t}) = a_1 L^j x_{1t} + a_2 L^j x_{2t}$
- $\sum_j \mu_j x_{t-j} = \sum_j \mu_j L^j x_t = \mu(L)x_t$, où : $\mu(L) = \sum_j \mu_j L^j$

$\mu(L)$ *est traité comme un polynôme algébrique en* L. *Si les racines de* $\mu(L) = 0$ *sont strictement supérieurs à l'unité en valeur absolue, on peut définir l'opérateur réciproque comme :* $x_t = \frac{1}{\mu(L)} y_t$ *si* $y_t = \mu(L)x_t$

$\mathcal{E}$– 5 • Résolution d'équations linéaires de récurrence stochastiques :

Présentons maintenant une méthode de résolution de l'équation $\mu(L)y_t = \gamma(L)x_t$

Il s'agit de calculer les coefficients du polynôme $\gamma(L)/\mu(L)$.

Exemple : *Soit* $\gamma(L) = 2 + 3L + 4L^2$ *et* $\mu(L) = 1 - 0,75L + 0,125L^2$. *Comme les racines de* $\mu(L)$ *sont* 2 *et* 4, *on a :* $\mu(L) = (1 - L/4)(1 - L/2) \Rightarrow \frac{1}{\mu(L)} = \frac{A(1 - L/4) + B(1 - L/2)}{(1 - L/4)(1 - L/2)}$

où A *et* B *sont déterminés par la condition :* $A(1 - L/4) + B(1 - L/2) = 1$, *pour tout* L .

Ceci implque $A = 2$ *et* $B = -1$, *comme on le voit facilement, en posant* $L = 0$ *et* $L = 1$.

$$Par\ conséquent : \frac{1}{\mu(L)} = \frac{2}{1 - L/2} - \frac{1}{1 - L/4} = 2\left[1 + \left(\frac{L}{2}\right) + \left(\frac{L}{2}\right)^2 + \cdots\right] - \left[1 + \left(\frac{L}{4}\right) + \left(\frac{L}{4}\right)^2 + \cdots\right]$$

$$= 1 + \frac{3}{4}L + \frac{7}{16}L^2 + \frac{15}{64}L^3 + \cdots$$

$$Et\ donc\ \frac{\gamma(L)}{\mu(L)} = (2+3L+4L^2)\left(1+\frac{3}{4}L+\frac{7}{16}L^2+\frac{15}{64}L^3+\cdots\right) = 2+4,5L+7,125L^2+\cdots$$

Ceci peut être facilement généralisé. Si le polynôme normalisé

$\mu(L) = (1-\alpha L)(1-\beta L) = 0$ *a deux racines réelles distinctes :* $\frac{1}{\alpha}$ *et* $\frac{1}{\beta}$ *, on aura :*

$$\frac{1}{\mu(L)} = \frac{1}{(1-\alpha L)(1-\beta L)} = \frac{A(1-\alpha L)+B(1-\beta L)}{(1-\alpha L)(1-\beta L)}$$

Où A et B sont choisis tels que $A(1-\alpha L)+B(1-\beta L) = 1$ *, pour tout L. Ceci implique :*

$$A = \frac{\beta}{\beta-\alpha}\ et\ B = \frac{-\alpha}{\beta-\alpha}$$

$$et\ donc : \frac{1}{\mu(L)} = \frac{A}{(1-\beta L)} + \frac{B}{(1-\alpha L)} = A[1+\beta L+\beta^2L^2+\cdots] + B[1+\alpha L+\alpha^2L^2+\cdots]$$

$$= (A+B)+(\beta A+\alpha B)L+(\beta^2A+\alpha^2B)L^2+\cdots$$

$$\frac{1}{\mu(L)} = \frac{1}{\beta-\alpha}\sum_{i=1}^{+\infty}(\beta^i-\alpha^i)\,L^{i-1}$$

Dans le cas d'une racine réelle double $\frac{1}{\alpha}$ *, on obtient :*

$$\frac{1}{\mu(L)} = \frac{1}{(1-\alpha L)^2} = [1+\alpha L+\alpha^2L^2+\cdots][1+\alpha L+\alpha^2L^2+\cdots] = 1+2\alpha L+3\alpha^2L^2+4\alpha^3L^3+\cdots$$

$$\frac{1}{\mu(L)} = \sum_{i=0}^{+\infty}(1+i)\alpha^iL^i$$

$\mathcal{E}$– 6 • *Distribution rationnelle des retards* :

Nous sommes maintenant prêts à définir la distribution rationnelle des retards.

On l'écrit sous la forme : $y_t = a+\mu(L)x_t+u_t$

$$avec : \mu(L) = \frac{\gamma(L)}{w(L)} = \frac{\gamma_0+\gamma_1L+\cdots+\gamma_kL^k}{w_0+w_1L+\cdots+w_lL^l}$$

on normalise, en posant $w_0 = 1$.

Cette formulation est très générale, car toute structure des coefficients peut être approchée par ce rapport de deux polynômes. Nous pouvons en effet rendre l'approximation plus fine en augmentant k, l ou k et l.

L'équation $w(L)y_t = a^* + \gamma(L)x_t + w(L)u_t$ *peut s'appeler forme structurelle du modèle*

, l'équation $y_t = a + \mu(L)x_t + u_t$ porte le nom de forme finale. Cette dernière, par définition, exprime la variable endogène y_t en fonction de la seule variable exogène x_t et ses retards.

On constate facilement que la structure des retards postulée par Almon correpond à $w(L) = 1$ (donc $l = 0$), et $\gamma_i = a_0 + a_1 i + a_2 i^2 + \cdots + a_s i^s$

Celle de Koyck correpond à $\gamma(L) = b_0$, et $w(L) = 1 - \lambda L$ (donc $k = 0$, $l = 1$)

$\mathcal{E}$– 7 • Variables endogènes retardées :

Lors de l'application de la transformation de Koyck, nous avons fait apparaître des variables endogènes retardées dans le membre de droite de l'équation de régression. Il est important de mettre en évidence les conséquences de leur présence parmi les variables explicatives d'un modèle.

Cette section n'étant qu'une introduction au problème, nous nous contenterons ici d'étudier un modèle très simple, qui est le suivant : $y_t = by_{t-1} + u_t$

avec $-1 < b < 1$ et diverses hypothèses sur l'erreurs u_t

On obtient aisément, par substitutions successives, la forme suivante :

$$y_t = u_t + bu_{t-1} + b^2 u_{t-2} + \cdots = \sum_{j=0}^{+\infty} b^j u_{t-j}$$

$\mathcal{E}$– 8 • Effet à long terme / Effet de court terme :

a • Modèle à retard fini :

Soit donc le modèle général : $Y_t = \alpha + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + \cdots + \beta_k X_{t-k} + u_t$, qui est un modèle à retards échelonnés avec un retard fini de k périodes. Le coefficient β_0 est connu sous le nom de multiplicateur de court terme ou effet à court terme ou encore l'impact immédiat parce qu'il fournit la variation de la valeur moyenne de Y qui suit une variation unitaire de X dans la même période : β_0 est la dérivée partielle de Y_t par rapport à X_t β_1 celle de Y_t par rapport à X_{t-1} et β_2 celle par rapport à X_{t-2} ... etc. Symboliquement :

$$\frac{\Delta Y_t}{\Delta X_{t-k}} = \beta_k$$

Si la variation de X est maintenue par la suite au même niveau, alors $(\beta_0 + \beta_1)$ fournit *la variation de (la valeur moyenne de) Y à la période suivante, $(\beta_0+\beta_1++\beta_2)$ à la période qui suit, ..., etc. Ces sommes partielles sont appelées intérimaires ou intermédiaire. Après k périodes, on a :* $\sum_{j=0}^{k}\beta_j=\beta$ *, expression connue sous le nom de multiplicateur de long terme, ou total, ou multiplicateur de retards échelonnés ou encore ou multiplicateur dynamique, si la somme β existe.*

Étant donné un modèle à retards échelonnés avec un retard fini de k périodes :

$$Y_t=\alpha+\beta_0X_t+\beta_1X_{t-1}+\cdots+\beta_kX_{t-k}+u_t$$

$$Y_t=\alpha+\beta_0X_t+\beta_1LX_t+\cdots+\beta_kL^kX_t+u_t=\alpha+\underbrace{\left(\beta_0+\beta_1L+\cdots+\beta_kL^k\right)}_{\gamma(L)}X_t+u_t$$

$$Y_t=\alpha+\gamma(L)X_t+u_t$$

On obtient : $ECT=\dfrac{\Delta Y_t}{\Delta X_t}=\gamma(0)=\beta_0$

$$Y_t=\alpha+\beta_0X_t+\beta_1X_{t-1}+\cdots+\beta_kX_{t-k}+u_t\Rightarrow\frac{\Delta Y_t}{\Delta X_t}=\beta_0$$

$$Y_{t+1}=\alpha+\beta_0X_{t+1}+\beta_1X_t+\cdots+\beta_kX_{t+1-k}+u_t\Rightarrow\frac{\Delta Y_{t+1}}{\Delta X_t}=\beta_1$$

$$Y_{t+2}=\alpha+\beta_0X_{t+2}+\beta_1X_{t+1}+\beta_2X_t+\cdots+\beta_kX_{t+2-k}+u_t\Rightarrow\frac{\Delta Y_{t+2}}{\Delta X_t}=\beta_2$$

$$\vdots$$

$$Y_{t+j}=\alpha+\beta_0X_{t+j}+\beta_1X_{t+j+1}+\cdots+\beta_jX_t+\cdots+\beta_kX_{t+j-k}+u_t\Rightarrow\frac{\Delta Y_{t+j}}{\Delta X_t}=\beta_j\ ,0\le j\le k$$

On obtient : $ELT=\sum_{j=0}^{k}\dfrac{\Delta Y_{t+j}}{\Delta X_t}=\gamma(1)=\sum_{j=0}^{k}\beta_j$

***b* • Présence d'une variable endogène retardée :**

Soit le modèle : $Y_t=\alpha+\beta_0X_t+\beta_1X_{t-1}+\cdots+\beta_kX_{t-k}+\lambda Y_{t-1}+u_t$ où $|\lambda|<1$

$$ECT=\frac{\Delta Y_t}{\Delta X_t}=\gamma(0)=\beta_0$$

$$Y_t-\lambda Y_{t-1}=\alpha+\beta_0X_t+\beta_1LX_t+\cdots+\beta_kL^kX_t+u_t$$

$$Y_t - \lambda L Y_t = \alpha + \underbrace{(\beta_0 + \beta_1 L + \cdots + \beta_k L^k)}_{\gamma(L)} X_t + u_t$$

$$\underbrace{(1 - \lambda L)}_{\mu(L)} Y_t = \alpha + \gamma(L) X_t + u_t$$

$$\mu(L) Y_t = \alpha + \gamma(L) X_t + u_t$$

Si les racines de $\mu(L) = 0$ sont strictement supérieurs à l'unité en valeur absolue, alors :

$$ELT = \frac{\gamma(1)}{\mu(1)} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\Delta Y_{t+j}}{\Delta X_t} = \left[\sum_{j=0}^{+\infty} \lambda^j\right]\left[\sum_{j=0}^{k} \beta_j\right] = \frac{1}{1-\lambda}\sum_{j=0}^{k} \beta_j$$

Pour mieux saisir l'effet à long terme considérons le modèle : $Y_t = \alpha + \beta_0 X_t + \lambda Y_{t-1} + u_t$

on pourra ainsi retrouver ce résultat par cette itération :

$Y_t = \alpha + \beta_0 X_t + \lambda Y_{t-1} + u_t \Rightarrow {}^{\Delta Y_t}/_{\Delta X_t} = \beta_0$

$Y_{t+1} = \alpha + \beta_0 X_{t+1} + \lambda Y_t + u_t \Rightarrow \ \Delta Y_{t+1}/\Delta Y_t = \lambda$

$Y_{t+2} = \alpha + \beta_0 X_{t+2} + \lambda Y_{t+1} + u_t \Rightarrow {}^{\Delta Y_{t+2}}/_{\Delta Y_{t+1}} = \lambda$

⋮

$Y_{t+j} = \alpha + \beta_0 X_{t+j} + \lambda Y_{t+j-1} + u_t \Rightarrow {}^{\Delta Y_{t+j}}/_{\Delta Y_{t+j-1}} = \lambda$

- $\frac{\Delta Y_t}{\Delta X_t} = \beta_0$ ▪ $\frac{\Delta Y_{t+1}}{\Delta X_t} = \left(\frac{\Delta Y_{t+1}}{\Delta Y_t}\right)\left(\frac{\Delta Y_t}{\Delta X_t}\right) = \lambda\beta_1$ ▪ $\frac{\Delta Y_{t+2}}{\Delta X_t} = \left(\frac{\Delta Y_{t+2}}{\Delta Y_t}\right)\left(\frac{\Delta Y_t}{\Delta X_t}\right) = \left(\frac{\Delta Y_{t+2}}{\Delta Y_{t+1}}\right)\left(\frac{\Delta Y_{t+1}}{\Delta Y_t}\right)\left(\frac{\Delta Y_t}{\Delta X_t}\right) = \lambda^2\beta_2$

⋮

- $\frac{\Delta Y_{t+j}}{\Delta X_t} = \left(\frac{\Delta Y_{t+j}}{\Delta Y_t}\right)\left(\frac{\Delta Y_t}{\Delta X_t}\right) = \left(\frac{\Delta Y_{t+j}}{\Delta Y_{t+j-1}}\right)\left(\frac{\Delta Y_{t+j-1}}{\Delta Y_{t+j-2}}\right) \times \ldots \times \left(\frac{\Delta Y_{t+1}}{\Delta Y_t}\right)\left(\frac{\Delta Y_t}{\Delta X_t}\right) = \lambda^j\beta_j$

⋮

$$ELT = \lambda\beta_0 + \lambda^2\beta_0 + \cdots \lambda^j\beta_0 + \cdots = \beta_0\left[\sum_{j=0}^{+\infty} \lambda^j\right] = \frac{\beta_0}{1-\lambda}$$

On pourra ainsi généraliser pour le modèle :

$Y_t = \alpha + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + \cdots + \beta_k X_{t-k} + \lambda Y_{t-1} + u_t$ où $|\lambda| < 1$

$$ELT = \frac{\gamma(1)}{\mu(1)} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\Delta Y_{t+j}}{\Delta X_t} = \left[\sum_{j=0}^{+\infty} \lambda^j\right]\left[\sum_{j=0}^{k} \beta_j\right] = \frac{1}{1-\lambda}\sum_{j=0}^{k} \beta_j$$

Si $|\lambda| > 1$ le système est dit explosif et n'admet pas d'équilibre.

$\mathcal{E}-9$ • *Le retard moyen* :

Le retard moyen exprime la vitesse d'ajustement de y suit à un choc sur x.

Lorsque cette valeur est faible l'ajustement de y suit à une variation de x est rapide.

On dit que l'effet de x sur y s'estompe rapidement. Dans le cas inverse une valeur élevée du retard moyen indique un délai d'ajustement plus grand et l'effet de x sur y dure plus longtemps.

Dans un modèle à retards échelonnées : $y_t = \alpha + B(L)x_t + \varepsilon_t$ ***, le Retard Moyen est défini par :*** $RM = \dfrac{B'(1)}{B(1)}$

Exemple : ***Soit*** $y_t = 2,14 + 0,34x_t + 0,46x_{t-1} + 0,6x_{t-2}$

$\Rightarrow y_t = 2,14 + 0,34x_t + 0,46Lx_t + 0,6L^2x_t \Rightarrow y_t = 2,14 + (0,34 + 0,46L + 0,6L^2)x_t$

$\Rightarrow B(L) = 0,34 + 0,46L + 0,6L^2$ ***et*** $B'(L) = 0,46 + 1,2L$

$B(1) = 0,34 + 0,46 + 0,6 = 1,4$ ***et*** $B'(1) = 0,46 + 1,2 = 1,66$

$RM = B'(1)/B(1) = 1,66/1,4 = 1,185$ ***périodes***

L'ELT est égal à 1,4 c'est l'effet total de long terme d'une augmentation de x d'une unité qui se traduit par une hausse de 1,4 unités de y.

Économétrie Des Séries Temporelles

Démarche de base en séries temporelles

A-1 • Tendance et saisonnalité d'une série temporelle :

Une série temporelle (ou chronologique) est une suite d'observations $y_1, y_2, \dots, y_T$ indexée par le temps. On supposera qu'il s'agit d'une réalisation d'un processus Y, c'est à dire d'une suite $\{Y_t\}$ de variables aléatoires.

Une série temporelle est généralement constituée de plusieurs éléments.

- **Tendance :** *représente l'évolution à long terme de la série (échelle interannuelle).*

Exemples : croissance économique, évolution climatologique à long terme (cyclique ou non)

- **Saisonnalité :** *évolution se répétant régulièrement tous les ans.*

Exemples :

  - *En météorologie, température plus faibles en hiver qu'en été.*
  - *En économie, saisonnalité induite par les périodes de vacances, les périodes de fêtes, le climat...*

- **Composante stationnaire (ou résiduelle)** *ce qui reste lorsque l'on a enlevé les autres composantes. Décrit l'évolution à court terme de la série (échelle journalière).*

L'hypothèse de la stationnarité des séries temporelles jouera un rôle fondamental dans la suite, et remplacera l'hypothèse usuelle des v.a i.i.d.

(ici, il peut exister une dépendance entre deux valeurs successives prises par la série observée).

La décomposition peut être additive, multiplicative ou combiner les deux aspects.

- $y_t = m_t + s_t + u_t$ où $E(u_t) = 0$
- $y_t = m_t s_t u_t$ où $E(u_t) = 1$

- $y_t = (m_t + s_t)u_t$ où $E(u_t) = 1$

Avec :

- t *est l'indice du temps, à valeurs dans* F*, sous ensemble de* $\mathbb{N}$ *ou* $\mathbb{Z}$
- m_t *est une fonction déterministe à variation que l'on espère lente (appelée tendance) qui capte les variations de niveau et que l'on espère assez lisse (variations à long terme)*
- s_t *est une fonction déterministe périodique (appelée saisonnalité) de période* r*, telle que* $\sum_{i=1}^{r} s_{t+i} = 0, \forall t \in F$
- u_t *est un bruit aléatoire stationnaire (terme restant à définir). On l'appelle parfois résidu.*

$\mathcal{A}$– 2 • Opérateur retard :

La manipulation pratique ou théorique des séries temporelles se trouve considérablement simplifiée par l'usage de l'opérateur retard (Lag operator).

a • Opérateur retard :

L'opérateur de retard est définie par : $Lx_t = x_{t-1}$

Cet opérateur peut être traité comme une variable algébrique ordinaire . En effet :

- $L^j x_t = x_{t-j}$
- $L^j L^k x_t = L^{j+k} x_t = x_{t-j-k}$
- $L^j(a_1 x_{1t} + a_2 x_{2t}) = a_1 L^j x_{1t} + a_2 L^j x_{2t}$
- $\sum_j \mu_j x_{t-j} = \sum_j \mu_j L^j x_t = \mu(L) x_t$, où : $\mu(L) = \sum_j \mu_j L^j$

$\mu(L)$ ***est traité comme un polynôme algébrique en*** L .

$\mathcal{b}$ • Opérateur différence :

La différence première est : $\Delta x_t = x_t - x_{t-1} = x_t - Lx_t = (1-L)x_t \Rightarrow \Delta x_t = (1-L)x_t$

C'est la série des accroissements, alors que la différence seconde Δ^2 ***donne la série des « accroissements des accroissements ». On a :***

$\Delta^2 x_t = \Delta(\Delta x_t) = (1-L)\Delta x_t = (1-L)^2 x_t = (1-2L+L^2)x_t \Rightarrow \Delta^2 x_t = x_t - 2x_{t-1} + x_{t-2}$

- ***On appelle différence d'ordre k de la série*** (X_t), ***les quantités :*** $\Delta^k x_t = x_{t+k} - x_t$, ***définies pour*** $k \in \mathbb{N}$

c • Opérateur différence saisonnière :

Etant donné une série mensuelle, il peut être important d'en examiner les accroissements d'une année sur l'autre (janvier sur janvier …). L'opérateur différence saisonnière,

$\Delta_{12} x_t = (1 - L^{12})x_t = x_t - x_{t-12}$

L'opérateur retard simplifie grandement l'écriture des équations relatives aux séries. Il permet d'écrire une équation de récurrence comme un polynôme de l'opérateur retard appliqué à une série.

Modèles de base en séries temporelles

B– 1 • Stationnarité :

Une série temporelle $\{y_t\}$, ***ou processus stochastique, est dite strictement stationnaire si la distribution conjointe de*** $(y_{t_1}, \dots, y_{t_k})$ ***est identique à celle de*** $(y_{t_1+t}, \dots, y_{t_k+t})$, ***quels que soient k le nombre d'instants considérés,*** $(t_1, \dots, t_k)$ ***les instants choisis et t, le décalage ; c'est-à-dire que, quels que soient le nombre de dates et les dates choisis, quand on décale ces dates d'une même quantité, la distribution ne change pas. En somme, la stationnarité stricte dit que la distribution conjointe de tout sous-vecteur de*** $\{y_t\}$, ***quels que soient sa longueur et les instants choisis, est invariante quand on translate ces instants d'une même quantité. Cette condition est difficile à vérifier et on utilise une version plus faible de stationnarité, la stationnarité faible ou du second ordre, souvent suffisante.***

a • Définition :

$\{y_t\}$ ***est dite faiblement stationnaire si :***

- $E(y_t) = \mu$, ***constante indépendante de t***
- $V(y_t) = \sigma^2 < \infty$, $\forall t$, ***constante indépendante de t***
- $Cov(y_t, y_{t-l})$ ***ne dépend que de l entier et dans ce cas elle est notée :*** $\gamma_l = Cov(y_t, y_{t-l})$

BEN AHMED MOHSEN Téléphone: (+216) 97 619191 / 54 619191
omega.center.cp@gmail.com https://web.facebook.com/OMEGACENTER2014

Ainsi, une série temporelle $\{y_t\}$ *est faiblement stationnaire si sa moyenne ne dépend pas de t et si la covariance entre* y_t *et* y_{t-l} *ne dépend que de* l *et non de* t.

B– 2 • Fonction d'autocorrélation d'une série stationnaire :

Soit $\{y_t\}$ *une série à valeurs réelles, stationnaire. La covariance* $\gamma_l = Cov(y_t, y_{t-l})$ *est appelée autocovariance d'ordre (ou de décalage)* l *(lag-* l *autocovariance).*

a • Définition (Fonction d'autocovariance) :

La fonction $l \longmapsto \gamma_l$, $l = \cdots, -1, 0, 1, 2, \ldots$ *est la fonction d'autocovariance de* $\{y_t\}$

Cette fonction vérifie notamment :

- $\gamma_0 = V(y_t) \geq 0$
- $|\gamma_l| \leq \gamma_0, \forall l$
- $\gamma_l = \gamma_{-l}, \forall l$

Cette fonction étant paire, on ne la représente que pour $l = 0, 1, 2, \ldots$.

b • Coefficient d'autocorrélation :

Le coefficient d'autocorrélation d'ordre l *est :* $\rho_l = \dfrac{Cov(y_t, y_{t-l})}{\sqrt{V(y_t)V(y_{t-l})}} = \dfrac{Cov(y_t, y_{t-l})}{V(y_t)} = \dfrac{\gamma_l}{\gamma_0}$

La dernière égalité tient car : $V(y_{t-l}) = V(y_t) = \gamma_0$

Enfin, en notant que par la stationnarité $E(y_t) = \mu$, *indépendant de t, on a en terme d'espérance mathématique :* $\rho_l = \dfrac{E\big[\big(y_t - E(y_t)\big)\big(y_{t-l} - E(y_{t-l})\big)\big]}{E[(y_t - \mu)^2]}$

c • Fonction d'autocorrélation :

La fonction $l \longmapsto \rho_l$, $l = 0, 1, 2, \ldots$ *est la fonction d'autocorrélation (théorique) de* $\{y_t\}$

Nous utiliserons l'abréviation anglaise, ACF, de préférence à FAC. On appelle son graphique corrélogramme. On voit que :

- $\rho_0 = 1$
- $-1 \leq \rho_l \leq 1$

d • Fonction d'autocorrélation empirique :

Etant donné une série observée y_t, $t = 1, 2, \ldots, T$, *notons* $\bar{y} = \dfrac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t$. *L'autocovariance*

Adresse : 2, Rue Ibn Arafa, av de l'environnement Manouba Centre, Manouba

empirique d'ordre l est :

- $\widehat{\gamma}_l = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(y_t - \overline{y})(y_{t-l} - \overline{y})\ , 0 \leq l \leq T-1$

Le coefficient d'autocorrélation empirique d'ordre l est :

- $\widehat{\rho}_l = \sum_{t=1}^{T}(y_t - \overline{y})(y_{t-l} - \overline{y}) \Big/ \sum_{t=1}^{T}(y_t - \overline{y})^2\ , 0 \leq l \leq T-1$

Observons que le dénominateur dans $\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(y_t - \overline{y})(y_{t-l} - \overline{y})$ *est T alors que le nombre de termes au numérateur dépend du décalage. Il faut se garder de corriger l'estimation en adoptant un dénominateur dépendant du nombre de termes dans la somme.*

En effet, avec un tel choix, la fonction d'autocovariance empirique, $l \longmapsto \widehat{\rho}_l$ *ne serait plus de type positif.*

La fonction : $l \longmapsto \widehat{\rho}_l\ , l = 0, 1, 2, \ldots$ *est la fonction d'autocorrélation empirique.*

On l'abrégera en ACF empirique ; son graphique est le corrélogramme empirique.

Supposons maintenant que $y_t\ , t = 1, 2, \ldots, T$ *soit une trajectoire de* $\{y_t\}$ *série stationnaire infinie. Alors, sous des conditions générales,* $\widehat{\rho}_l$ *est un estimateur convergent de* ρ_l.

$\mathcal{B}$– 3 • Bruit blanc :

a • Bruit blanc- Définition :

Un bruit blanc $\{z_t\}$ *est une suite de v.a. non corrélées (mais pas nécessairement indépendantes) de moyenne nulle et de variance constante* σ^2

$\mathscr{b}$ • Bruit blanc gaussien- Définition :

Un bruit blanc gaussien $\{z_t\}$ *est une suite de v.a.i.i.d.* $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, *on note :* $z_t \rightsquigarrow \mathcal{BBN}(0, \sigma^2)$

Un bruit blanc gaussien est une série strictement stationnaire.

☑ **Propriété :** *Si* $y_t\ , t = 1, 2, \ldots, T$ *est une observation d'une suite de v.a.i.i.d. de moment d'ordre 2 fini,* $E(y_t^2) < \infty$, *alors les* $\widehat{\rho}_l$ *sont approximativement indépendants et normalement distribués de moyenne 0 et de variance* $\frac{1}{T}$.

Série linéaire

$\mathcal{C}-1$ • Définition :

Une série $\{y_t\}$ *est dite linéaire si elle peut s'écrire :* $y_t = \mu + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \psi_i z_{t-i}$,

où $z_t \rightsquigarrow \mathcal{BBN}(0, \sigma^2)$, $\psi_0 = 1$ *et* $\sum_i |\psi_i| < \infty$

Une série $\{y_t\}$ *est dite linéaire et causale si elle est linéaire avec* $\psi_i = 0$, *pour* $i < 0$:

$$y_t = \mu + \sum_{i=0}^{+\infty} \psi_i z_{t-i}$$

On admettra qu'une série linéaire est stationnaire. L'étude des séries non causales conduit à des résultats non intuitifs difficilement utilisables, aussi nous ne considérerons parmi les séries linéaires que des séries causales. L'écriture de y_t *comme somme de v. a. non corrélées permet d'obtenir facilement :*

- $E(y_t) = \mu$
- $V(y_t) = \sigma^2 \left(1 + \sum_{i=1}^{+\infty} \psi_i^2\right)$
- $\gamma_l = Cov(y_t, y_{t-l}) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{+\infty} \psi_j \psi_{j+l}$

$\mathcal{C}-2$ • Modèles autorégressifs, moyennes mobiles :

On exprime souvent l'évolution d'une série en fonction de son passé. Les modèles autorégressifs sont les modèles les plus explicites pour exprimer cette dépendance.

a • Introduction aux modèles autorégressifs :

Considérons le modèle : $y_t = c + \phi y_{t-1} + z_t$, où $z_t \rightsquigarrow \mathcal{BB}(0, \sigma^2)$ 1

c *et* ϕ *sont des constantes, appelé modèle autorégressif d'ordre 1 et étudions-le.*

Par substitutions successives, on obtient :

$$y_t = c(1 + \phi + \cdots + \phi^{k-1}) + \phi^k y_{t-k} + \sum_{j=0}^{k-1} \phi^j z_{t-j}$$

- $Si\ |\phi| < 1\ , \left(\phi^k y_{t-k} \longrightarrow 0\right), on\ peut\ donc\ , représenter\ y_t\ par : y_t = \dfrac{c}{1-\phi} + \sum_{j=0}^{+\infty} \phi^j z_{t-j}$

$Ainsi, dans\ ce\ cas, y_t\ est\ une\ série\ linéaire, donc\ stationnaire\ et\ causale. Observons\ que$

$cette\ écriture\ s'obtient\ aussi\ directement\ à\ l'aide\ de\ l'opérateur\ retard. En\ effet,$

$l'équation$ 1 $s'écrit : (1-\phi L)y_t = c + z_t$

$Pour\ |\phi| < 1\ , nous\ avons : y_t = \dfrac{c}{1-\phi L} + \left(\dfrac{1}{1-\phi L}\right) z_t$

$Ensuite, en\ effectuant\ le\ développement\ en\ série : 1/1-\phi L = \sum_{n=0}^{+\infty} (\phi L)^n$

$Et\ par\ ailleurs, \phi\ constante, donc, c/1-\phi L = c/1-\phi$

$Par\ la\ suite,$

$$y_t = \frac{c}{1-\phi} + \left(1 + \phi L + (\phi L)^2 + \cdots + (\phi L)^k + \cdots\right) z_t$$

$$y_t = \frac{c}{1-\phi} + z_t + \phi L z_t + \phi^2 L^2 z_t + \cdots + \phi^k L^k z_t + \cdots$$

$$y_t = \frac{c}{1-\phi} + z_t + \phi L z_{t-1} + \phi^2 L^2 z_{t-2} + \cdots + \phi^k z_{t-k} + \cdots$$

$D'où, y_t\ est\ stationnaire, de\ moyenne :$ $E(y_t) = \mu = c/1-\phi$

$Un\ processus\ autorégressif\ d'ordre\ 1\ stationnaire\ est\ noté\ AR(1).$

- $Si\ \phi = 1\ , L'autorégressif$ 1 $n'est\ pas\ stationnaire.$

$C'est\ une\ marche\ aléatoire, avec\ dérive\ si\ c \neq 0$

- $Si\ |\phi| > 1\ , L'autorégressif$ 1 $est\ explosif.$

b • $Processus\ AR(p)$:

$Un\ processus\ \{y_t\}\ est\ un\ AR(p)\ s'il\ obéit\ à :$

$$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + z_t\ , où\ \ z_t \rightsquigarrow \mathcal{BB}(0, \sigma^2)$$

$avec, \phi_p \neq 0\ et\ il\ est\ stationnaire.$

$Supposons\ que\ p = 2\ . Appelons\ s_1\ et\ s_2\ les\ racines, réelles\ ou\ complexes, de$

$1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 = 0\ . On\ a\ donc\ 1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 = \left(1 - \dfrac{z}{s_1}\right)\left(1 - \dfrac{z}{s_2}\right)\ \ et\ on\ voit\ que$

le développement en série de $11 - \phi_1 z - \phi_2 z^2$ *est possible si les racines de ce polynôme sont en module strictement supérieures à* 1 ; $(|s_1| > 1$ *et* $|s_2| > 1)$ *dans ce cas* y_t *est stationnaire, de moyenne:* $E(y_t) = \mu = c/1 - \phi_1 - \phi_2$, *définie car* 1 *n'est pas racine du polynôme.*

Pour un ordre p quelconque, nous admettrons :

☑ **Proposition :** *Le processus autorégressif d'ordre p admet une représentation* $AR(\infty)$ *si les racines de l'équation :* $1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 - \cdots - \phi_p z^p = 0$ *sont strictement supérieures à* 1 *en module, est alors stationnaire ; c'est un* $AR(p)$

Dans ce cas : $E(y_t) = \mu = c/1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 - \cdots - \phi_p z^p$

et on peut encore écrire ❶ *comme :* $y_t = \mu + \dfrac{1}{1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \cdots - \phi_p L^p} z_t$, où $z_t \backsim \mathcal{BB}(0, \sigma^2)$

Dans ce cas, la série est la somme d'une tendance déterministe et d'une erreur stationnaire.

c • Introduction aux modèles moyennes mobiles :

☑ **Définition (Processus MA(q)):** $\{y_t\}$ *est un processus moyenne mobile d'ordre q,* $(MA(q))$ *si :* $y_t = \mu + z_t + \theta_1 z_{t-1} + \theta_2 z_{t-2} + \cdots + \theta_q z_{t-q}$, où $z_t \backsim \mathcal{BB}(0, \sigma^2)$, *avec* $\theta_q \neq 0$

Introduisant l'opérateur moyenne mobile : $\Theta(L) = 1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots + \theta_q L^q$

on peut noter de façon équivalente : $y_t = \mu + \Theta(L) z_t$

■ *Un* $MA(q)$ *est toujours stationnaire quelles que soient les valeurs des* θ ; *il est de moyenne* μ

■ *On aimerait pouvoir exprimer ce processus en fonction de son passé (observé) et pas seulement en fonction du bruit passé non observé. C'est la question de l'inversibilité du processus. Examinons le cas d'un* $MA(1)$ *centré :*

$y_t = \mu + z_t + \theta z_{t-1} = (1 + \theta L) z_t$, où $z_t \backsim \mathcal{BB}(0, \sigma^2)$

On voit que si $|\theta| < 1$, *on peut développer* $1/1 + \theta L$ *en série :*

$1/1 + \theta L = 1 - \theta L + \theta^2 L^2 - \theta^3 L^3 + \cdots - \cdots$ *et écrire* y_t, $MA(1)$, *comme une autorégression infinie :* $y_t = z_t + \theta y_{t-1} - \theta^2 y_{t-2} + \theta^3 y_{t-3} - \cdots + \cdots$

On dit qu'il est inversible. Observons que la condition d'inversibilité d'un $MA(1)$ est parallèle à la condition de représentation causale d'un $AR(1)$. Un $MA(q)$ est dit inversible si on peut le représenter comme une autorégression infinie.

☑ **Propriété :** *Un $MA(q)$ est inversible si les racines de :*

$1+\theta_1 z_t+\theta_2 z^2+\cdots+\theta_q z^q=0$ *sont, en module, strictement supérieures à 1.*

☑ **Définition (Processus ARMA(p, q)):** $\{y_t\}$ *obéit à un modèle $ARMA(p,q)$ s'il est stationnaire et vérifie :*

$$y_t=c+\phi_1 y_{t-1}+\phi_2 y_{t-2}+\cdots+\phi_p y_{t-p}+z_t+\theta_1 z_{t-1}+\theta_2 z_{t-2}+\cdots+\theta_q z_{t-q} \quad (2)$$

où $z_t \sim \mathcal{BB}(0,\sigma^2)$, avec c constante arbitraire, $\phi_p\neq 0$, $\theta_q\neq 0$ et les polynômes $(1-\phi_1L-\phi_2L^2-\cdots-\phi_pL^p)$ et $(1+\theta_1L+\theta_2L^2+\cdots+\theta_qL^q)$ n'ont pas de racines communes.

En utilisant l'opérateur retard, (2) s'écrit :

$$(1-\phi_1L-\phi_2L^2-\cdots-\phi_pL^p)y_t=c+(1+\theta_1L+\theta_2L^2+\cdots+\theta_qL^q)z_t$$

$\{y_t\}$ obéissant à (2) est stationnaire si, comme dans le cas des autorégressifs, les racines du polynôme d'autorégression, $1-\phi_1z-\phi_2z^2-\cdots-\phi_pz^p$ sont en module strictement supérieures à 1. Par un calcul identique à celui fait pour un $AR(p)$, on obtient que $E(y_t)=\mu$, vérifie : $(1-\phi_1-\phi_2-\cdots-\phi_p)\mu=c$

Par la stationnarité, $1-\phi_1-\phi_2-\cdots-\phi_p\neq 0$ *et* $\mu=\dfrac{c}{1-\phi_1-\phi_2-\cdots-\phi_p}$

Ainsi (2) peut encore s'écrire : $y_t=\mu+\left(\dfrac{1+\theta_1L+\theta_2L^2+\cdots+\theta_qL^q}{1-\phi_1L-\phi_2L^2-\cdots-\phi_pL^p}\right)z_t$

On peut alors écrire une représentation $MA(\infty)$ de la série : $y_t=\mu+\sum_{i=0}^{+\infty}\psi_i z_{t-i}$, $\psi_0=1$

Par ailleurs, $\{y_t\}$, $ARMA(p,q)$, est inversible si les racines de $\Theta(L)$ sont en module strictement supérieures à 1 et on peut écrire alors une représentation $AR(\infty)$ de la série :

$$y_t=c+\sum_{i=1}^{+\infty}\pi_i y_{t-i}+z_t$$

BEN AHMED MOHSEN Téléphone: (+216) 97 619191 / 54 619191
omega.center.cp@gmail.com https://web.facebook.com/OMEGACENTER2014

$d \bullet$ ***Marche au hasard (ou marche aléatoire) avec dérive :***

Soit le processus $\{X_t\}$ *tel que*: $X_t = X_{t-1} + \mu + u_t$ où u_t *est un bruit blanc et* μ *est une dérive*

Un tel processus est appelé marche au hasard avec dérive ou marche aléatoire avec dérive. La précédente équation est équivalente à : $X_t - X_{t-1} = \mu + u_t$

$X_t - X_{t-1}$ *est donc stationnaire et il sufit de différencier une fois* X_t *pour obtenir une expression stationnaire.*

On dit que le processus $\{X_t\}$ *est intégré d'ordre* 1. *Il peut etre représenté par la relation :*

$(1 - L)X_t = \mu + u_t$

La racine du polynôme caractéristique $1 - L$ *est égale à* 1.

On dit donc que le processus $\{X_t\}$ *a une racine unitaire.*

On peut expliciter la valeur du processus et celle de sa variance a chaque période :

- $t = 1 :\ X_1 = X_0 + \mu + u_1\ , E(X_1) = X_0 + \mu$ *et* $V(X_1) = \sigma_u^2$
- $t = 2 :\ X_2 = X_0 + 2\mu + u_1 + u_2\ , E(X_2) = X_0 + 2\mu$ *et* $V(X_1) = 2\sigma_u^2$
- $t = 3 :\ X_3 = X_0 + 3\mu + u_1 + u_2 + u_3\ , E(X_3) = X_0 + 3\mu$ *et* $V(X_1) = 3\sigma_u^2$
- …

Le processus $\{X_t\}$ *se forme par accumulation des chocs aléatoires* u_t *, si bien que sa variance augmente avec le temps. Il s'agit d'un cas de non-stationnarité d'origine aléatoire, stochastique: l'accumulation de chocs aléatoires est la tendance stochastique car elle fait augmenterla variance dans le temps. En toute période* t, *le processus vaut donc :* $X_t = X_0 + \mu t + (u_1 + u_2 + \cdots + u_t)$

Cela implique que : $E(X_t) = X_0 + \mu t$ *et* $V(X_t) = t\sigma_u^2$

La somme $(u_1 + u_2 + \cdots + u_t)$ *est la tendance stochastique et la partie déterministe de* X_t *est* $X_0 + \mu t$.

A la tendance stochastique s'ajoute une tendance déterministe si $\mu \neq 0$; *sinon, le processus est une marche aléatoire sans dérive.*

C-3 • Fonctions d'autocorrélation :

a • Fonction d'autocorrélation d'un AR :

Partant de la représentation $MA(\infty)$ *d'un* $AR(1)$, $\left(\frac{1}{1-\phi L}=\sum_{n=0}^{+\infty}(\phi L)^n\right)$, *on obtient :*

$$V(y_t)=\sigma^2\sum_{n=0}^{+\infty}(\phi^2)^n=\frac{\sigma^2}{1-\phi^2}$$

La fonction d'autocorrélation de l' $AR(1)$ *est donc :* $\rho_k=\phi^k, k=0,1,2,\dots$

Cette fonction décroît exponentiellement vers 0, *en oscillant si* $\phi<0$

b • Fonction d'autocorrélation d'un MA :

Commençons par calculer les moments d'ordre 2 d'un $MA(1)$.

La variance de y_t *définie par :* $(y_t=\mu+\Theta(L)z_t)$ *est la variance d'une combinaison linéaire de variables non corrélées donc :* $V(y_t)=(1+\theta^2)\sigma^2$.

De même, $Cov(y_t,y_{t-1})=Cov\big((z_t+\theta z_{t-1}),(z_{t-1}+\theta z_{t-2})\big)=\theta\sigma^2$

On voit que : $Cov(y_t,y_{t-k})=0, k>1$

En résumé, $\forall\theta$, *le processus* $MA(1)$, *définie par :* $(y_t=\mu+\Theta(L)z_t)$, *stationnaire, de moyenne* μ, *a pour fonction d'autocorrélation :*

$$\rho(k)=\begin{cases}1, si\ k=0\\ \dfrac{\theta}{1+\theta^2}, si\ k=1\\ 0, si\ k>1\end{cases}$$

Institut de Financement du Développement du Maghreb Arabe
CONCOURS DE RECRUTEMENT DE LA XXXIIIème PROMOTION
SEPTEMBRE 2013

Exercice 1 : (12 points : 1,5 point par question)

ÉNONCÉ

On considère la relation linéaire entre le taux d'endettement public en pourcentage du PIB (noté Y) et le taux d'investissement public (noté X) sur une période de 40 années :

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + \epsilon_t \,,\, t = 1, 2, \dots, 40 \qquad (1)$$

Avec ϵ_t un terme d'erreur vérifiant les hypothèses suivantes : $E(\epsilon_t) = 0 \;\; \forall\, t$,

$V(\epsilon_t) = \sigma^2 \;\forall\, t \,,\, Cov(\epsilon_t, \epsilon_s) = 0 \;\forall\, t \neq s \,,\, Cov(\epsilon_t, X_t) = 0 \;\forall\, t$.

$$\sum_{t=1}^{40} Y_t = -12 \,,\, \sum_{t=1}^{40} X_t = 320 \,,\, \sum_{t=1}^{40} (Y_t - \bar{Y})^2 = 200 \,,\, \sum_{t=1}^{40} (X_t - \bar{X})^2 = 160 \text{ et } \sum_{t=1}^{40} (Y_t - \bar{Y})(X_t - \bar{X}) = 80$$

1) *Estimer par la méthode des moindres carrés ordinaire (MCO) les paramètres α et β. Commenter.*
2) *Ecrire l'équation d'analyse de la variance et calculer ses composantes. En déduire le coefficient de détermination linéaire (R^2)*
3) *Calculer la variance estimée de $\hat{\beta}$*
4) *Sous l'hypothèse de la normalité des résidus, tester la significativité de β au seuil de 5%. Commenter.*

On rappelle que pour une loi normale centrée réduite Z, la probabilité

$P(-1{,}96 \leq Z \leq 1{,}96) = 0{,}95$

Pour tenir compte de la dynamique qui accompagne l'endettement et l'investissement, on décide d'estimer un modèle dynamique et à retard échelonné ; défini par :

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + \theta X_{t-1} + \lambda Y_{t-1} + \epsilon_t \,,\, t = 1, 2, \dots, 40 \qquad (2)$$

5) *Ecrire en fonction des paramètres les effets de court et de long terme d'une variation du taux d'investissement sur la variation du taux d'endettement public, notés respectivement ECT et ELT*

L'estimation de l'équation (2) a fournit les résultats suivants :

$$\hat{Y}_t = \underset{(1,5)}{-6,05} + \underset{(0,350)}{1,16}X_t - \underset{(0,18)}{0,44}X_{t-1} - \underset{(0,12)}{0,36}Y_{t-1}$$

Les chiffres entre parenthèses correspondent aux écart-types estimés des paramètres.

a) *Commenter économiquement cette relation*

b) *Calculer les estimateurs de ECT et ELT*

c) *Sous l'hypothèse de normalité des résidus, tester au seuil de 5%, l'hypothèse :* $H_0: ELT = 0,5$ *Sachant que la matrice de variance − covariance estimée est :*

$$\hat{V}\begin{pmatrix}\hat{\beta}\\ \hat{\theta}\\ \hat{\lambda}\end{pmatrix} = 10^{-4}\begin{pmatrix}5 & -1,5 & 2\\ -1,5 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

Corrigé

1)

$$\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{X} = \frac{1}{40}\left(\sum_{t=1}^{40} Y_t - \hat{\beta}\sum_{t=1}^{40} X_t\right) = \frac{1}{40}\left(-12 - (0,5\times 320)\right) \Rightarrow \boxed{\hat{\alpha} = -4,3}$$

$$\hat{\beta} = \sum_{t=1}^{40}(Y_t - \bar{Y})(X_t - \bar{X}) \bigg/ \sum_{t=1}^{40}(X_t - \bar{X})^2 = 80/160 \Rightarrow \boxed{\hat{\beta} = 0,5}$$

Ainsi une augmentation du taux d'investissement public (X) *d'une unité entraine une augmentation du taux d'endettement public de* $0,5$ *unité.*

2)

$$\underbrace{\sum_{t=1}^{40}(Y_t - \bar{Y})^2}_{SCT} = \underbrace{\sum_{t=1}^{40}(\hat{Y}_t - \bar{Y})^2}_{SCE} + \underbrace{\sum_{t=1}^{40}\hat{\epsilon}_t^2}_{SCR} \quad ou\ encore\ SCT = SCE + SCR$$

$$\boxed{SCT = \sum_{t=1}^{40}(Y_t - \bar{Y})^2 = 200}$$

$$SCE = \sum_{t=1}^{40}(\hat{Y}_t - \bar{Y})^2 = \hat{\beta}\sum_{t=1}^{40}(Y_t - \bar{Y})(X_t - \bar{X}) = 0,5\times 80 \Rightarrow \boxed{SCE = 40}$$

$$SCR = \sum_{t=1}^{40}\hat{\epsilon}_t^2 = SCT - SCE = 200 - 40 \Rightarrow \boxed{SCR = 160}$$

$$R^2 = \frac{SCE}{SCT} = \frac{40}{200} \Rightarrow \boxed{R^2 = 20\%}$$

Le pouvoir explicatif du facteur investissement public (X) *est très faible et il est de l'ordre de* 20%, *donc* $80\ \%$ *des taux d'endettement public en pourcentage du PIB restent* *inexpliqués.*

3)

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{SCR}{40-2} = \frac{160}{38} \Rightarrow \boxed{\hat{\sigma}^2 = 4,211} \Rightarrow \boxed{\hat{\sigma} = 2,052}$$

$$\hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}} = \hat{\sigma}^2 \Big/ \sum_{t=1}^{40} (X_t - \overline{X})^2 = 4,211/160 = 0,026 \Rightarrow \boxed{\hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}} = 0,026} \Rightarrow \boxed{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}} = 0,162}$$

4) $On\ se\ propose\ de\ tester\ H_0 : \beta = 0\ \ contre\ H_a : \beta \neq 0\ , sous\ un\ niveau\ de\ signification\ \alpha = 5\%$

$$T = \frac{\hat{\beta} - \beta}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}}} \backsim \mathcal{T}(40-2), la\ loi\ de\ Student\ de\ d.d.l\ (38)$$

$Règle\ de\ décision : on\ rejette\ H_0\ avec\ un\ risque\ de\ première\ espèce\ \alpha, si\ \ |T_0| \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(38)$

$$or\ \begin{cases} |T_0| = \left|\frac{\hat{\beta} - 0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}}}\right| = \left|\frac{0,5}{0,162}\right| = 3,087 \\ t_{1-\frac{\alpha}{2}}(38) = t_{0,975}(38) = 2,0244 \end{cases} \Rightarrow |T_0| \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(98)$$

$D'où\ \beta\ est\ significativement\ non\ nul\ au\ risque\ de\ 5\%$

5) $$\hat{Y}_t = \underset{(1,5)}{-6,05} + \underset{(0,350)}{1,16}X_t - \underset{(0,18)}{0,44}X_{t-1} - \underset{(0,12)}{0,36}Y_{t-1}$$

a) $Ce\ modèle\ fournit\ des\ éléments\ sur\ les\ relations\ d'équilibre\ entre\ taux\ d'endettement\ public\ en\ pourcentage\ du\ PIB\ (noté\ Y) qui\ est\ une\ combinaison\ linéaire\ des\ endettements\ public\ et\ taux\ d'investissement\ public, présents\ et\ passés, il\ fournira\ aussi\ des\ estimations\ sur\ les\ variations\ de\ l'endettement\ à\ court\ et\ à\ long\ terme\ par\ le\ biais\ fonction\ des\ paramètres\ les\ effets\ de\ court\ et\ de\ long\ terme\ d'une\ variation\ du\ taux\ d'investissement\ sur\ la\ variation\ du\ taux\ d'endettement\ public, notés\ respectivement\ ECT\ et\ ELT$

$$\boxed{ECT = \frac{\Delta Y_t}{\Delta X_t} = \beta}\ et\ \ ELT = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\Delta Y_{t+j}}{\Delta X_t} = (\beta + \theta) \underbrace{\sum_{j=0}^{+\infty} \lambda^j}_{\frac{1}{1-\lambda}} \Rightarrow \boxed{ELT = \frac{\beta + \theta}{1 - \lambda}}$$

b) $\boxed{\widehat{ECT} = \hat{\beta} = 1,16}$

$Sur\ le\ court\ terme\ une\ variation\ du\ taux\ d'investissement\ public\ de\ 1\%\ entraine\ une\ variation\ du\ taux\ d'endettement\ de\ l'ordre\ de\ 1,16\%$

$$\boxed{\widehat{ELT} = \frac{\hat{\beta} + \hat{\theta}}{1 - \hat{\lambda}}} = \frac{1,16 - 0,44}{1 + 0,36} \Rightarrow \boxed{\widehat{ELT} = 0,529}$$

Sur le long terme une variation durable et permanente du taux d'investissement public de 1% entraine une variation du taux d'endettement de l'ordre de 0,529 %

c)

On se propose de tester $H_0 : ELT = 0,5$ ***contre*** $H_a : ELT \neq 0,5$ ***sous un niveau de signification*** $\alpha = 5\%$

$$or\ H_0 : ELT = 0,5 \quad \Leftrightarrow \frac{\beta + \theta}{1 - \lambda} = 0,5$$

$$H_0 : \beta + \theta + 0,5\lambda = 0,5 \ ou\ encore\ H_0 :\ \underbrace{(1 \quad 1 \quad 0,5)}_{C'} \underbrace{\begin{pmatrix} \beta \\ \theta \\ \lambda \end{pmatrix}}_{\beta^c} = \underbrace{0,5}_{r}$$

Autrement dit, on se propose de tester $H_0 : C'\beta^c - r = 0$ ***contre*** $H_a : C'\beta^c - r \neq 0$

$$Statistique\ de\ décision : T = \frac{\left(C'\widehat{\beta}^c - r\right) - \left(C'\beta^c - r\right)}{\widehat{\sigma}\sqrt{C'(X^{c\prime}X^c)^{-1}C}} \rightsquigarrow \tau(40 - 4)$$

$$H_0\ sera\ rejetée\ si\ |T_0| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(36)\ avec\ T_0 = \frac{C'\widehat{\beta}^c - r}{\widehat{\sigma}\sqrt{C'(X^{c\prime}X^c)^{-1}C}} = \frac{C'\widehat{\beta}^c - r}{\sqrt{C'\underbrace{\widehat{\sigma}^2(X^{c\prime}X^c)^{-1}}_{\widehat{\sigma}^2_{\widehat{\beta}^c}}C}} = \frac{C'\widehat{\beta}^c - r}{\sqrt{C'\widehat{\sigma}^2_{\widehat{\beta}^c}C}}$$

$$or\ |T_0| = \left| \frac{(1 \quad 1 \quad 0,5)\begin{pmatrix} 1,16 \\ -0,44 \\ -0,36 \end{pmatrix} - 0,5}{\sqrt{(1 \quad 1 \quad 0,5) \times 10^{-4}\begin{pmatrix} 5 & -1,5 & 2 \\ -1,5 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0,5 \end{pmatrix}}} \right| = \left| \frac{1,16 - 0,44 - (0,5 \times 0,36) - 0,5}{10^{-2}\sqrt{(6,5 \quad 2 \quad 6)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0,5 \end{pmatrix}}} \right|$$

$$= \frac{0,04 \times 10^2}{\sqrt{11,5}}$$

$|T_0| = 1,18$ ***et*** $t_{0,975}(36) = 2,028$

$|T_0| \ngtr t_{1-\frac{\alpha}{2}}(36)$

Donc on accepte l'hypothèse de $ELT = 0,5$ ***avec un risque de première espèce*** $\alpha = 5\%$

BEN AHMED MOHSEN
Téléphone: (+216) 97 619191 / 54 619191
omega.center.cp@gmail.com
https://web.facebook.com/OMEGACENTER2014

Institut de Financement du Développement du Maghreb Arabe
CONCOURS DE RECRUTEMENT D'UNE PROMOTION SPÉCIALE
POUR LE COMPTE DU Ministère des Finances Tunisien
Mai 2015

Exercice 2 : *(12 points : 2 points par question)*

ÉNONCÉ

Sur une période de 31 années, on dispose des variables macroéconomiques suivantes

$Y = ln(Impôts\ indirects)$, $\quad X = ln(PIB\ hors\ agriculture)$

et $Z = ln(Importation\ des\ biens\ de\ consommation\ finale)$.

On considère le modèle économétrique ci-dessous : $Y_t = \alpha + \beta_1 X_t + \beta_2 Z_t + \xi_t$, $t = 1, 2, \dots, 31$

Le terme d'erreur ξ_t *vérifie les hypothèses de la méthode des moindres carrés ordinaire (MCO)*

1)
   a) *Rappeler les hypothèses de la méthode des moindres carrés ordinaire*
   b) *Quelles sont les interprétations économiques des paramètres*

2) *Donner l'expression de l'estimateur de* $\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$ *par la méthode des moindres carrés ordinaires, noté* $\tilde{\beta}$. *Calculer sa matrice de variance.*

3) *Calculer la valeur de l'estimateur* $\tilde{\beta}$ *sachant que :*

$$\sum_{i=1}^{31}(X_t - \bar{X})^2 = 24\,,\ \sum_{i=1}^{31}(Z_t - \bar{Z})^2 = 29\,,\ \sum_{i=1}^{31}(X_t - \bar{X})(Z_t - \bar{Z}) = 22\,,\ \sum_{i=1}^{31}(Y_t - \bar{Y})^2 = 20,$$

$$\sum_{i=1}^{31}(X_t - \bar{X})(Y_t - \bar{Y}) = 18 \ et \ \sum_{i=1}^{31}(Z_t - \bar{Z})(Y_t - \bar{Y}) = 22$$

Commenter.

4) *Dresser le tableau d'analyse de la variance. En déduire la valeur du coefficient de détermination linéaire* (R^2) *et une estimation sans biais de la variance des termes d'erreur.*

5) *Sous l'hypothèse de la normalité des termes d'erreur, tester au seuil de 5% l'hypothèse* $H_0: \beta_1 + \beta_2 = 1$.

6) *On considère à présent un modèle autorégressif et à retard échelonné, définit comme suit :* $Y_t = \alpha + \beta_1 X_t + \beta_2 Z_t + \lambda Y_{t-1} + \theta X_{t-1} + \xi_t$, $t = 1, 2, \dots, 31$, *Avec* $0 < \lambda < 1$
   a) *Donner les expressions de l'effet à long terme d'une variation de 1% du PIB*

hors agriculture et des importations des biens de consommation sur les impôts indirects en fonction des paramètres E_1 et E_2.

b) *Calculer les estimations de ces effets sachant que la méthode MCO a fournie les résultats suivants :* $\widehat{\beta}_1 = 0,9$, $\widehat{\beta}_2 = 0,15$, $\hat{\lambda} = 0,65$ *et* $\widehat{\theta} = -0,75$

c) *Commenter.*

Corrigé

1)

a)

Soit l'écriture matricielle du modèle :

$$Y = X\beta + \mathcal{E} \text{ où } Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_T \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 1 & X_1 & Z_1 \\ 1 & X_2 & Z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & X_T & Z_T \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \text{ et } \mathcal{E} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_T \end{pmatrix} \text{ avec } T = 31$$

- $\mathcal{H}_1$ (*Hypothèse structurelle*): $Y = X\beta + \mathcal{E}$:

Le modèle est linéaire ou linéarisable en X (ou sur ses paramètres)

- $\mathcal{H}_2$ (*Hypothèse structurelle*):

X est non aléatoire c.-à-d. les exogènes x_{ij} et la variable endogène Y sont sont observés sans erreur. Y est aléatoire par l'intermédiaire de $\mathcal{E}$.

- $\mathcal{H}_3$ (*Hypothèse stochastique*): $E(\mathcal{E}) = 0$

En moyenne les erreurs s'annulent c.-à-d. le modèle est bien spécifié.

- $\mathcal{H}_4$ (*Hypothèse stochastique*): $E(\mathcal{E}\mathcal{E}') = \sigma_\varepsilon^2 I_n = \Omega_\varepsilon$

$$\text{où } \begin{cases} Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0 \text{ , si } i \neq j : (\text{non-autocorrélation des erreurs}) \\ E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = \sigma_\varepsilon^2 \text{ , si } i = j : (\text{erreurs homoscédastiques}) \end{cases}$$

- $\mathcal{H}_5$ (*Hypothèse inférentielle*) : $\mathcal{E} \leadsto \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2 I_n)$:

Les erreurs ε_i et la variable endogène Y sont gaussiennes et stationnaires en niveau.

L'hypothèse de normalité des erreurs est un élément clé pour l'inférence statistique.

Elle est donc nécessaire pour mener les tests.

- $\mathcal{H}_6$ (*Hypothèse structurelle*) : *La matrice $(X'X)$ est régulière*

c.-à-d. $\det(X'X) \neq 0$ *et* $(X'X)^{-1}$ *existe.*

Elle indique l'absence de colinéarité entre les variables exogènes, autrement dit les

BEN AHMED MOHSEN Téléphone: (+216) 97 619191 / 54 619191
omega.center.cp@gmail.com https://web.facebook.com/OMEGACENTER2014

différents vecteurs $X_j = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix}$ *sont linéairement indépendants.*

En cas de multicolinéarité, la méthode des MCO devient défaillante.

Nous pouvons aussi voir cette hypothèse structurelle sous l'angle :

$rang(X) = rang(X'X) = k$

- $\mathcal{H}_7$*(Hypothèse structurelle)* : $rang(X) = k < n$

c.-à-d. le nombre d'observation est supérieur au nombre de paramètres à estimer $(les\ \beta_j)$

Lorsque $k > n$, *la matrice* $(X'X)$ *n'est plus inversible.*

- $\mathcal{H}_8$*(Hypothèse structurelle)* :

$X'X/n$ *tend vers une matrice finie non singulière lorsque* $n \to +\infty$

- $\mathcal{H}_9$*(Hypothèse stochastique)* : $E(X\mathcal{E}) = 0$ *ou encore* $Cov(\varepsilon_i, x_{ij}) = 0$:

Il y a indépendance entre la partie systématique et la partie stochastique

b)

- β_1 *est l'élasticité des Impôts indirects par rapport au PIB hors agriculture*

- β_2 *est l'élasticité des Impôts indirects par rapport aux Importation des biens de consommation finale*

2)

$$\tilde{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} = (X_c'X_c)^{-1}(X_c'Y_c) \text{ où } X_c'X_c = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{31}(X_t - \bar{X})^2 & \sum_{i=1}^{31}(X_t - \bar{X})(Z_t - \bar{Z}) \\ & \sum_{i=1}^{31}(Z_t - \bar{Z})^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } X_c'Y_c = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{31}(X_t - \bar{X})(Y_t - \bar{Y}) \\ \sum_{i=1}^{31}(Z_t - \bar{Z})(Y_t - \bar{Y}) \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\sigma_{\tilde{\beta}}^2 = \sigma^2(X_c'X_c)^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma_{\hat{\beta}_1}^2 & Cov(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) \\ & \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_2}^2 \end{pmatrix}}$$

3) $$X_c'X_c = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{31}(X_t - \bar{X})^2 & , \sum_{i=1}^{31}(X_t - \bar{X})(Z_t - \bar{Z}) \\ & \sum_{i=1}^{31}(Z_t - \bar{Z})^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{X_c'X_c = \begin{pmatrix} 24 & 22 \\ 22 & 29 \end{pmatrix}}$$

Adresse : 2, Rue Ibn Arafa, av de l'environnement Manouba Centre, Manouba

$$X'_cY_c = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{31}(X_t-\overline{X})(Y_t-\overline{Y}) \\ \sum_{i=1}^{31}(Z_t-\overline{Z})(Y_t-\overline{Y}) \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{X'_cY_c = \begin{pmatrix} 18 \\ 22 \end{pmatrix}}$$

$$|X'_cX_c| = (24\times 29) - 22^2 = 212 \;;\; Com(X'_cX_c) = \begin{pmatrix} 29 & -22 \\ -22 & 24 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (X'_cX_c)^{-1} = \frac{1}{|X'_cX_c|}[Com(X'_cX_c)]' = \frac{1}{212}\begin{pmatrix} 29 & -22 \\ -22 & 24 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{(X'_cX_c)^{-1} = \frac{1}{212}\begin{pmatrix} 29 & -22 \\ -22 & 24 \end{pmatrix}}$$

$$\widetilde{\beta} = \begin{pmatrix} \widehat{\beta}_1 \\ \widehat{\beta}_2 \end{pmatrix} = (X'_cX_c)^{-1}(X'_cY_c) = \frac{1}{212}\begin{pmatrix} 29 & -22 \\ -22 & 24 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 18 \\ 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38/212 \\ 132/212 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\widehat{\beta}_1 = 0,18\,, \widehat{\beta}_2 = 0,62}$$

· ***L'élasticité des Impôts indirects par rapport au PIB hors agriculture est égale à 0,18, ainsi une augmentation du PIB hors agriculture de l'ordre de 1% (toutes choses égales par ailleurs) entraine une augmentation de 0,18% des Impôts indirects***

· ***L'élasticité des Impôts indirects par rapport aux importations des biens de consommation finale est égale à 0,62, ainsi une augmentation des importations des biens de consommation finale de l'ordre de 1% (toutes choses égales par ailleurs) entraine une diminution des Impôts indirects de l'ordre de 0,62%***

4)

Tableau d'analyse de variance

Source de la variabilité	Somme des carrés	Degré de liberté	Carrés moyens
Régression	$SCE = 16,88$	$k-1=3-1=2$	$SCE\,/\,(k-1) = 8,44$
Résidus	SCR	$T-k=31-3=28$	$\widehat{\sigma}^2 = SCR/T-k = 0,11$
Total	SCT	$T-1=31-1=30$	$S^2 = SCT/T-1 = 10,55$

$$SCE = \widetilde{\beta}'(X'_cX_c)\widetilde{\beta} = \widetilde{\beta}'X'_cY_c = (0,18 \quad 0,62)\begin{pmatrix} 18 \\ 22 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{SCE = 16,88}$$

$$SCT = \sum_{i=1}^{31}(Y_t-\overline{Y})^2 \Rightarrow \boxed{SCT = 20}$$

$$SCR = SCT - SCE \Rightarrow \boxed{SCR = 3,12}$$

$$R^2=\frac{SCE}{SCT}=\frac{16,88}{20}\Rightarrow\boxed{R^2=84,4\%}$$

$$\hat{\sigma}^2=\frac{SCR}{T-k}=\frac{3,12}{28}\Rightarrow\boxed{\hat{\sigma}^2=0,11}$$

5)

$On\ se\ propose\ de\ tester\ H_0:\beta_1+\beta_2=1\ contre\ H_1:\beta_1+\beta_2\neq 1\ sous\ un\ niveau\ de\ signification\ \alpha=5\%$

$$Statistique\ de\ décision: T=\frac{(\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2)-(\beta_1+\beta_2)}{\sqrt{\hat{V}(\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2)}}=\frac{(\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2)-(\beta_1+\beta_2)}{\sqrt{\hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}_1}+\hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}_2}+2\widehat{Cov}(\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_2)}}\leadsto\tau(T-k)$$

$$Or\ \hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}}=\begin{pmatrix}\hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}_1} & \widehat{Cov}(\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_2)\\ & \hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}_2}\end{pmatrix}=\hat{\sigma}^2(X'_cX_c)^{-1}=\frac{0,11}{212}\begin{pmatrix}29 & -22\\ -22 & 24\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,015 & -0,011\\ -0,011 & 0,012\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\boxed{\hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}_1}=0,015},\boxed{\hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}_2}=0,012}\ et\ \boxed{\widehat{Cov}(\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_2)=-0,011}$$

$$H_0\ sera\ rejetée\ si\ |T_0|>t_{1-\frac{\alpha}{2}}(T-k)\ avec\ T_0=\frac{(\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2)-1}{\sqrt{\hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}_1}+\hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}_2}+2\widehat{Cov}(\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_2)}}$$

$$Or\begin{cases}|T_0|=\left|\dfrac{(0,18+0,62)-1}{\sqrt{0,015+0,012+2\times(-0,011)}}\right|=2,83\\ t_{1-\frac{\alpha}{2}}(T-k)=t_{0,975}(28)=2,048\end{cases}\Rightarrow|T_0|>t_{1-\frac{\alpha}{2}}(T-k)$$

$D'où\ on\ rejette\ l'hypothèse\ des\ rendements\ d'échelle\ constants(\beta_1+\beta_2=1)\ avec\ un\ niveau\ de\ signification\ \alpha=5\%$

6)

a)

$Modèle\ autorégressif\ à\ retard\ échelonné:$

$$Y_t=\alpha+\beta_1X_t+\beta_2Z_t+\lambda Y_{t-1}+\theta X_{t-1}+\xi_t,t=1,2,\dots,31\qquad avec\ \ 0<\lambda<1$$

$$E_1=\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{\Delta Y_{t+j}}{\Delta X_t}=(\beta_1+\theta)\underbrace{\sum_{j=0}^{+\infty}\lambda^j}_{1/1-\lambda}\Rightarrow\boxed{E_1=\frac{\beta_1+\theta}{1-\lambda}}$$

$$E_2=\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{\Delta Y_{t+j}}{\Delta Z_t}=\beta_2\underbrace{\sum_{j=0}^{+\infty}\lambda^j}_{1/1-\lambda}\Rightarrow\boxed{E_2=\frac{\beta_2}{1-\lambda}}$$

b)

$\widehat{\beta}_1 = 0,9\,, \widehat{\beta}_2 = 0,15\,, \widehat{\lambda} = 0,65 \;\; et\; \widehat{\theta} = -0,75$

$$\widehat{E}_1 = \frac{\widehat{\beta}_1 + \widehat{\theta}}{1-\widehat{\lambda}} = \frac{0,9 \;-0,75}{1-0,65} \Rightarrow \boxed{\widehat{E}_1 = 0,43}$$

$$\widehat{E}_2 = \frac{\widehat{\beta}_2}{1-\widehat{\lambda}} = \frac{0,15}{1-0,65} \Rightarrow \boxed{\widehat{E}_2 = 0,43}$$

c)

A long terme une variation durable et permanente de 1% du PIB hors agricultures ainsi que celle de l'importation des biens de consommation finale entraine la même variation des impôts indirects, soit 0,43%

Institut de Financement du Développement du Maghreb Arabe
CONCOURS DE RECRUTEMENT DE LA XXXIXème PROMOTION(BANQUE)
JUILLET 2019

Exercice 3 : *(10 points : 1,5+1,5+1+1+1,5+1,5+1+1)*

ÉNONCÉ

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes

On considère le modèle reliant la consommation y_t *à son niveau antérieur* y_{t-1} *et au revenu* x_t *sous la forme :*

$$y_t = ay_{t-1} + bx_t + c + \varepsilon_t$$

Où ε_t *suit une loi normale centrée avec* $V(\varepsilon_t) = \sigma^2$ *et* ε_t *indépendants pour* $t = 1, 2, \dots, T$

On admet que les variances empiriques de x_t *et* y_t *sont égales à l'unité :*

$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(x_t - \overline{x})^2 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(y_t - \overline{y})^2 = 1$ *, où* $\overline{x}$ *et* $\overline{y}$ *sont respectivement les moyennes empiriques de* x *et de* y

Question 1 : *On suppose dans cette question que* $a = 0$

1)

i. *Prouver que l'estimation de b par les moindres carrés ordinaires est égale au coefficient de corrélation linéaire entre x_t et y_t noté ρ*

ii. *Prouver que la somme des carrés des résidus est égale à* : $T(1-\rho^2)$

iii. *En déduire en fonction de ρ la valeur du coefficient de détermination de la régression*

iv. *Calculer la variance de b. Etudier sa significativité statistique*

Question 2 : *On suppose dans cette question que a est différent de zéro*

2)

i. *Interpréter économiquement la relation en insistant sur l'intérêt de la présence de la variable y_{t-1} dans la régression*

ii. *L'estimation par les moindres carrés ordinaires a fourni les résultats numériques suivants* :

$\hat{a} = 0,4$; $\hat{b} = 0,9$ *et* $\hat{c} = 1,3$

Et les variances estimées suivantes : $\hat{\sigma}^2_{\hat{a}} = 0,01$; $\hat{\sigma}^2_{\hat{b}} = 0,04$ *et* $\hat{\sigma}^2_{\hat{c}} = 0,09$

Etudier la significativité statistique des paramètres estimés.

iii. *Utiliser ces résultats pour évaluer les impacts de court et de long termes sur la consommation suite à une augmentation du revenu*

iv. *Sans faire de calcul, expliquer comment on peut évaluer le retard moyen entre les variations du revenu et celles de la consommation* ?

Corrigé

1) $y_t = bx_t + c + \varepsilon_t$

i.

$$\begin{cases} \hat{b} = \dfrac{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(y_t-\bar{y})(x_t-\bar{x})}{\underbrace{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(x_t-\bar{x})^2}_{1}} = \dfrac{1}{T}\displaystyle\sum_{t=1}^{T}(y_t-\bar{y})(x_t-\bar{x}) \\ \rho = \dfrac{S_{x_t,y_t}}{S_{x_t}S_{y_t}} = \dfrac{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(y_t-\bar{y})(x_t-\bar{x})}{\sqrt{\left(\underbrace{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(x_t-\bar{x})^2}_{1}\right)\left(\underbrace{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(y_t-\bar{y})^2}_{1}\right)}} = \dfrac{1}{T}\displaystyle\sum_{t=1}^{T}(y_t-\bar{y})(x_t-\bar{x}) \end{cases}$$

$\Longrightarrow \boxed{\hat{b} = \rho}$

ii.

$$\cdot\ SCT = \sum_{t=1}^{T}(y_t-\bar{y})^2 = TS^2_{y_t} = T$$

$$\cdot\ SCE = \sum_{t=1}^{T} (\hat{y}_t - \bar{y})^2 = \hat{b} \sum_{t=1}^{T} (y_t - \bar{y})(x_t - \bar{x}) = \rho(T\rho) = T\rho^2$$

$$\cdot\ SCR = \sum_{t=1}^{40} \hat{\varepsilon}_t^2 = SCT - SCE = T - T\rho^2$$

D'où : $\boxed{SCR = T(1-\rho^2)}$

iii.

$$R^2 = \frac{SCE}{SCT} = \frac{T\rho^2}{T} \Leftrightarrow \boxed{R^2 = \rho^2}$$

iv.

$$\cdot\ \hat{\sigma}^2 = \frac{SCR}{T-2} = \frac{T}{T-2}(1-\rho^2)$$

$$\cdot\ \hat{\sigma}_{\hat{b}}^2 = \frac{\hat{\sigma}^2}{\sum_{t=1}^{T}(x_t - \bar{x})^2} = \frac{\frac{T}{T-2}(1-\rho^2)}{TS_{x_t}^2} \Leftrightarrow \boxed{\hat{\sigma}_{\hat{b}}^2 = \frac{1-\rho^2}{T-2}}$$

- *On se propose de tester* $H_0 : b = 0$ *contre* $H_a : b \neq 0$, *sous un niveau de signification* α

$$F = T^2 = \left(\frac{\hat{b} - b}{\hat{\sigma}_{\hat{b}}}\right)^2 \rightsquigarrow \mathcal{F}(1, (T-2))$$

Règle de décision : on rejette H_0 *avec un risque de première espèce* α, *si* :

$$\left\{F_{obs} > f_{1-\frac{\alpha}{2}}(1,(T-2)) \text{ ou } F_{obs} < f_{\frac{\alpha}{2}}(1,(T-2))\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{F_{obs} > f_{1-\frac{\alpha}{2}}(1,(T-2)) \text{ ou } F_{obs} < \frac{1}{f_{1-\frac{\alpha}{2}}((T-2),1)}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{F_{obs} > f_{1-\frac{\alpha}{2}}(1,(T-2)) \text{ ou } \frac{1}{F_{obs}} > f_{1-\frac{\alpha}{2}}((T-2),1)\right\}$$

$$Avec, F_{obs} = \left(\frac{\hat{b} - 0}{\hat{\sigma}_{\hat{b}}}\right)^2 = \frac{\hat{b}^2}{\hat{\sigma}_{\hat{b}}^2} = \frac{\rho^2}{1-\rho^2/T-2} = \frac{(T-2)\rho^2}{1-\rho^2}$$

$$Rejet\ de\ H_0 : \left\{F_{obs} > f_{1-\frac{\alpha}{2}}(1,(T-2)) \text{ ou } \frac{1}{F_{obs}} > f_{1-\frac{\alpha}{2}}((T-2),1)\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\frac{(T-2)\rho^2}{1-\rho^2} > f_{1-\frac{\alpha}{2}}(1,(T-2)) \text{ ou } \frac{1-\rho^2}{(T-2)\rho^2} > f_{1-\frac{\alpha}{2}}((T-2),1)\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{(T-2)\rho^2 > (1-\rho^2) f_{1-\frac{\alpha}{2}}(1,(T-2)) \text{ ou } 1-\rho^2 > (T-2)\rho^2 f_{1-\frac{\alpha}{2}}((T-2),1)\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{(T-2)\rho^2 + \rho^2 f_{1-\frac{\alpha}{2}}(1,(T-2)) > f_{1-\frac{\alpha}{2}}(1,(T-2))\ ou\ (T-2)\rho^2 f_{1-\frac{\alpha}{2}}((T-2),1) + \rho^2 < 1\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\rho^2\left[(T-2) + f_{1-\frac{\alpha}{2}}(1,(T-2))\right] > f_{1-\frac{\alpha}{2}}(1,(T-2))\ ou\ \rho^2\left[1 + (T-2)f_{1-\frac{\alpha}{2}}((T-2),1)\right] < 1\right\}$$

$$Conclusion : \boxed{b\ est\ significativement\ non\ nul, si \begin{cases} \rho^2 > \dfrac{f_{1-\frac{\alpha}{2}}(1,(T-2))}{(T-2) + f_{1-\frac{\alpha}{2}}(1,(T-2))} \\ ou \\ \rho^2 < \dfrac{1}{1 + (T-2)f_{1-\frac{\alpha}{2}}((T-2),1)} \end{cases}}$$

On pourra se contenter de la valeur de ρ et déduire la significativité de b :

- *Si $0,8 < |\rho| < 1 \Rightarrow$ la corrélation est très fort : b est significativement non nul*
- *Si $0,65 < |\rho| < 0,8 \Rightarrow$ la corrélation est élevée : b est significativement non nul*
- *Si $|\rho| < 0,25 \Rightarrow$ la corrélation est très faible : b n'est pas significative*

2)

i.

- *Dans le cadre de la fonction de consommation, ce modèle élaboré par Thomas Brown (L'effet de cliquet) fait introduire un effet retard qui rend compte d'une certaine inertie dans le comportement de consommation.*

La consommation dépend donc du revenu et de la consommation de la période précédente.

- *Sur le court terme, l'ajustement de la consommation au revenu sera partiel car (y_{t-1}) freine les modifications de la consommation tant à la hausse qu'à la baisse.*

Et la propension marginale à consommer est alors : $ECT = \dfrac{\Delta y_t}{\Delta x_t} = b$

- *Sur le long terme, lorsque la consommation est stationnaire, cette même propension marginale à consommer sera par contre plus élevée et égale à :* $ELT = \displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\Delta y_{t+j}}{\Delta x_t} = \frac{b}{1-a}$

avec $0 < a < 1$

ii.

- *On se propose de tester $H_0: c = 0$ contre $H_a: c \neq 0$, au risque de 5%*

$T = \dfrac{\hat{c} - c}{\hat{\sigma}_{\hat{c}}} \backsim \mathcal{T}(T-2)$, *la loi de Student de d.d.l $(T-2)$*

Règle de décision :

on rejette H_0 avec un risque de première espèce α, si $|T_0| \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(T-2)$

· $\hat{c} = 1,3$ *et* $\hat{\sigma}^2_{\hat{c}} = 0,09 \Longrightarrow \hat{\sigma}_{\hat{c}} = 0,3$

$$or \begin{cases} |T_0| = \left|\dfrac{\hat{c}-0}{\hat{\sigma}_{\hat{c}}}\right| = \left|\dfrac{1,3}{0,3}\right| = 4,33 \\ t_{1-\frac{\alpha}{2}}(T-2) = t_{0,975}(T-2) \cong 2 \end{cases} \Rightarrow |T_0| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(T-2)$$

D'où $\boxed{c \text{ est significativement non nul au risque de } 5\%}$

▪ *On se propose de tester* $H_0: b = 0$ *contre* $H_a: b \neq 0$, *au risque de* 5%

$$T = \frac{\hat{b}-b}{\hat{\sigma}_{\hat{b}}} \backsim \mathcal{T}(T-2), \text{la loi de Student de d.d.l } (T-2)$$

Règle de décision :

on rejette H_0 avec un risque de première espèce α, si $|T_0| \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(T-2)$

· $\hat{b} = 0,9$ *et* $\hat{\sigma}^2_{\hat{b}} = 0,04 \Longrightarrow \hat{\sigma}_{\hat{b}} = 0,2$

$$or \begin{cases} |T_0| = \left|\dfrac{\hat{b}-0}{\hat{\sigma}_{\hat{b}}}\right| = \left|\dfrac{0,9}{0,2}\right| = 4,5 \\ t_{1-\frac{\alpha}{2}}(T-2) = t_{0,975}(T-2) \cong 2 \end{cases} \Rightarrow |T_0| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(T-2)$$

D'où $\boxed{b \text{ est significativement non nul au risque de } 5\%}$

▪ *On se propose de tester* $H_0: a = 0$ *contre* $H_a: a \neq 0$, *au risque de* 5%

$$T = \frac{\hat{a}-a}{\hat{\sigma}_{\hat{a}}} \backsim \mathcal{T}(T-2), \text{la loi de Student de d.d.l } (T-2)$$

Règle de décision :

on rejette H_0 avec un risque de première espèce α, si $|T_0| \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(T-2)$

· $\hat{a} = 0,4$ *et* $\hat{\sigma}^2_{\hat{a}} = 0,01 \Longrightarrow \hat{\sigma}_{\hat{a}} = 0,1$

$$or \begin{cases} |T_0| = \left|\dfrac{\hat{a}-0}{\hat{\sigma}_{\hat{a}}}\right| = \left|\dfrac{0,4}{0,1}\right| = 4 \\ t_{1-\frac{\alpha}{2}}(T-2) = t_{0,975}(T-2) \cong 2 \end{cases} \Rightarrow |T_0| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(T-2)$$

D'où $\boxed{a \text{ est significativement non nul au risque de } 5\%}$

iii.

- $ECT = \frac{\Delta y_t}{\Delta x_t} = b \Rightarrow \boxed{\widehat{ECT} = \hat{b} = 0,9}$

Sur le court terme une variation des revenus de 1% *entraine une variation de la consommation de l'ordre de* $0,9\%$

- $ELT = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\Delta y_{t+j}}{\Delta x_t} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\Delta y_{t+j}}{\Delta x_t} = b \underbrace{\sum_{j=0}^{+\infty} a^j}_{\frac{1}{1-a}} = \frac{b}{1-a} \Rightarrow \boxed{\widehat{ELT} = \frac{\hat{b}}{1-\hat{a}} = \frac{0,9}{1-0,4} = 1,5}$

Sur le long terme une variation durable et permanente des revenus de 1% *entraine une variation de la consommation de l'ordre de* $1,5\ \%$

iv.

Le modèle étant autorégressifs et à retards échelonnés, on doit l'écrire sous sa forme à retards échelonnés purs

$$y_t = ay_{t-1} + bx_t + c + \varepsilon_t \Leftrightarrow y_t - ay_{t-1} = bx_t + c + \varepsilon_t \Leftrightarrow y_t - aLy_t = bx_t + c + \varepsilon_t$$

$$\Leftrightarrow (1-aL)y_t = bx_t + c + \varepsilon_t \Leftrightarrow y_t = \frac{b}{1-aL}x_t + \underbrace{\frac{c}{1-aL}}_{c^*} + \underbrace{\frac{1}{1-aL}\varepsilon_t}_{u_t} \Leftrightarrow y_t = \frac{b}{1-aL}x_t + c^* + u_t$$

$$Or, \frac{b}{1-aL} = b[1 + (aL) + (aL)^2 + \cdots] = b\sum_{i=0}^{+\infty} a^i L^i = \gamma(L)$$

D'où la forme à retards échelonnés : $\boxed{y_t = \gamma(L)x_t + c^* + u_t\ , avec\ \gamma(L) = b\sum_{i=0}^{+\infty} a^i L^i}$

$$\boxed{le\ Retard\ Moyen, sera : RM = \frac{\gamma'(1)}{\gamma(1)}}$$

$$\gamma'(L) = \frac{d\gamma(L)}{dL} = b\frac{d(\sum_{i=0}^{+\infty} a^i L^i)}{dL} = b\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{d(a^i L^i)}{dL} = b\sum_{i=0}^{+\infty} a^i \left[\frac{d(L^i)}{dL}\right] = b\sum_{i=0}^{+\infty} ia^i L^{i-1}$$

$$\gamma(1) = b\sum_{i=0}^{+\infty} a^i 1^i = b\sum_{i=0}^{+\infty} a^i = \frac{b}{1-a} \quad ; pour\ \ 0 < a < 1$$

$$\gamma'(1) = b\sum_{i=0}^{+\infty} ia^i 1^{i-1} = b\sum_{i=0}^{+\infty} ia^i = \frac{ab}{(1-a)^2} \ ; pour\ \ 0 < a < 1$$

$$RM = \frac{\gamma'(1)}{\gamma(1)} = \frac{ab/(1-a)^2}{b/1-a} = \left[\frac{ab}{(1-a)^2}\right]\frac{1-a}{b}$$

$$\boxed{RM = \frac{a}{1-a}}$$

En effet une évolution d'une unité des revenus met en moyenne RM avant d'affecter la consommation.

Institut de Financement du Développement du Maghreb Arabe
CONCOURS DE RECRUTEMENT DE LA XXXIIème PROMOTION
Juillet 2012

Exercice 4 : *(10 points : 1 point par question)*

ÉNONCÉ

Le niveau des exportations à la période t, noté y_t, évolue en fonction du prix unitaire x_t selon la relation suivante :

$$y_t = ax_t + bt + c + u_t \text{ , pour } t = 1, 2, \ldots, T$$

Avec u_t des termes d'erreur indépendants suivant la loi normale tels que : $E(u_t) = 0$ et $V(u_t) = \sigma^2$

Question 1 : *On suppose dans cette question que $b = 0$*

Sachant que : $T = 11$, $\bar{y} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t = 13,45$, $\bar{x} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} x_t = 6$, $\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(y_t - \bar{y})^2 = 37,15$

$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(x_t - \bar{x})^2 = 10$ *et* $\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(x_t - \bar{x})(y_t - \bar{y}) = -18,90$

i. *Quelles sont les expressions et les valeurs des estimations de a et c par la méthode des moindres carrés ordinaires ?*
ii. *Quelles sont les interprétations économiques des résultats obtenus ?*
iii. *Prouver que la somme des carrés des résidus est approximativement égale à $15,6$*
iv. *En déduire la valeur du coefficient de détermination R^2. Interpréter*
v. *Quelle est l'estimation sans biais de σ^2 ? justifier votre réponse*

vi. $\boldsymbol{Tester\ au\ niveau\ de\ 95\ \%\ la\ significativit\acute{e}\ de\ la\ variable\ x_t}$

$\boldsymbol{On\ rappelle\ que\ pour\ une\ loi\ normale\ centr\acute{e}e\ r\acute{e}duite\ \mathcal{N}(0,1)}$:

$\boldsymbol{P(-2 \leq \mathcal{N}(0,1) \leq 2) = 0,95}$

Question 2 : $\boldsymbol{On\ suppose\ dans\ cette\ question\ que\ seul\ le\ coefficient\ a\ est\ nul}$:

$\boldsymbol{a = 0\ \ et\ \ \sigma^2 = 1}$

i. $\boldsymbol{Calculer\ pour\ T\ entier\ positif\ quelconque\ la\ valeur\ de\ \sum_{t=1}^{T}(t-\bar{t})^2}$

$$\text{où } \bar{t} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} t$$

Indication : $\boldsymbol{On\ rappelle\ que}$: $\displaystyle\sum_{t=1}^{T} t = \frac{T(T+1)}{2}\ ;\ \sum_{t=1}^{T} t^2 = \frac{T(T+1)(2T+1)}{6}$

ii. $\boldsymbol{Calculer\ la\ variance\ de\ l'estimation\ de\ b\ obtenue\ par\ les\ moindres\ carr\acute{e}s\ ordinaires}$

Question 3 : $\boldsymbol{Dans\ cette\ question, on\ suppose\ que\ les\ deux\ coefficients\ a\ et\ b\ sont}$

$\boldsymbol{diff\acute{e}rents\ de\ z\acute{e}ro\ avec\ \sigma^2 = 1}$

i. $\boldsymbol{Prouver\ que\ \Delta y_t = y_t - y_{t-1}\ est\ reli\acute{e}\ \grave{a}\ \Delta x_t = x_t - x_{t-1}\ avec\ un\ terme\ d'erreur\ \varepsilon_t\ dont\ il\ faut\ calculer\ l'esp\acute{e}rance, la\ variance\ et\ les\ covariances}$

ii. $\boldsymbol{Expliquer\ comment\ on\ peut\ estimer\ d'une\ mani\grave{e}re\ optimale\ les\ deux\ param\grave{e}tres\ a\ et\ b}$

Corrigé

Question 1 :

i.

$\boldsymbol{y_t = ax_t + c + u_t\ , pour\ t = 1, 2, \ldots, T}$

$$\cdot\ \hat{a} = \frac{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(y_t-\bar{y})(x_t-\bar{x})}{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(x_t-\bar{x})^2} = \frac{-18,90}{10} \Longrightarrow \boxed{\hat{a} = -1,89}$$

$$\cdot\ \hat{c} = \bar{y} - \hat{a}\bar{x} = 13,45 - \big((-1,89)\times 6\big) \Longrightarrow \boxed{\hat{c} = 24,79}$$

ii.

$\cdot$ $\boldsymbol{Si\ le\ prix\ unitaire\ augmente\ d'une\ unit\acute{e}, alors\ le\ niveau\ des\ exportations\ diminue}$

$\boldsymbol{de\ 1,89}$

iii.

- $\hat{u}_t = y_t - \hat{y}_t = y_t - (\hat{a}x_t + \hat{c}) = y_t - (\hat{a}x_t + \bar{y} - \hat{a}\bar{x}) = (y_t - \bar{y}) - \hat{a}(x_t - \bar{x})$

- $SCR = \sum_{t=1}^{T} \hat{u}_t^2 = \sum_{t=1}^{T}(y_t - \bar{y})^2 + \hat{a}^2 \sum_{t=1}^{T}(x_t - \bar{x})^2 - 2\hat{a}\sum_{t=1}^{T}(x_t - \bar{x})(y_t - \bar{y})$

$$= \sum_{t=1}^{T} \hat{u}_t^2 = \sum_{t=1}^{T}(y_t - \bar{y})^2 + \hat{a}^2 \sum_{t=1}^{T}(x_t - \bar{x})^2 - 2\hat{a}\left(\hat{a}\sum_{t=1}^{T}(x_t - \bar{x})^2\right)$$

$$= \sum_{t=1}^{T} \hat{u}_t^2 = \sum_{t=1}^{T}(y_t - \bar{y})^2 + \hat{a}^2 \sum_{t=1}^{T}(x_t - \bar{x})^2 - 2\hat{a}^2\sum_{t=1}^{T}(x_t - \bar{x})^2$$

$$= \sum_{t=1}^{T} \hat{u}_t^2 = \sum_{t=1}^{T}(y_t - \bar{y})^2 - \hat{a}^2 \sum_{t=1}^{T}(x_t - \bar{x})^2$$

$$SCR = T\left[\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(y_t - \bar{y})^2 - \frac{\hat{a}^2}{T}\sum_{t=1}^{T}(x_t - \bar{x})^2\right] = 11 \times [37,15 - ((-1,89)^2 \times 10)]$$

$\boxed{SCR = 15,72}$

iv.

$$R^2 = 1 - \frac{SCR}{SCT} = 1 - \frac{SCR}{TS_y^2} = 1 - \frac{15,72}{11 \times 37,15}$$

$\boxed{R^2 = 96,15\%}$

En effet il s'agit d'un meilleur ajustement. Le prix unitaire x_t contribue à une explication du niveau des exportations y_t de l'ordre de 96,15%, ce qui nous permet de deviner avec précision les valeurs de y_t

v.

$\hat{\sigma}^2 = \frac{SCR}{T-2}$ *est un estimateur sans biais de σ^2, car* $E\left(\frac{SCR}{T-2}\right) = \sigma^2$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{15,72}{9} \Longrightarrow \boxed{\hat{\sigma}^2 = 1,75} \Longrightarrow \boxed{\hat{\sigma} = 1,32}$$

vi.

On se propose de tester $H_0 : a = 0$ contre $H_a : a \neq 0$, sous un niveau de signification $\alpha = 5\%$

$$T=\frac{\hat{a}-a}{\hat{\sigma}_{\hat{a}}}\rightsquigarrow \mathcal{T}(T-2), la\ loi\ de\ Student\ de\ d.d.l\ (9)$$

$Règle\ de\ décision : on\ rejette\ H_0\ avec\ un\ risque\ de\ première\ espèce\ \alpha, si\quad |T_0|\geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(9)$

$$\hat{\sigma}^2_{\hat{a}}=\frac{\hat{\sigma}^2}{\sum_{t=1}^{T}(x_t-\bar{x})^2}=\frac{\hat{\sigma}^2}{TS_x^2}=\frac{1,75}{11\times 10}=0,016\Longrightarrow \hat{\sigma}_{\hat{a}}=0,13$$

$$or\ \ |T_0|=\left|\frac{\hat{a}-0}{\hat{\sigma}_{\hat{a}}}\right|=\left|\frac{-1,89}{0,13}\right|=14,54\Rightarrow |T_0|\geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(98)$$

$D'où\ la\ variable\ prix\ unitaire\ x_t\ est\ statistiquement\ \ significative$

<u>Question 2</u> : $y_t=bt+c+u_t\ , pour\ t=1,2,\dots,T\ ;\ avec\ \sigma^2=1$

i.

$$\cdot\ \sum_{t=1}^{T}t=\frac{T(T+1)}{2}\Rightarrow \boxed{\bar{t}=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}t=\frac{T+1}{2}}$$

$$\cdot\ \sum_{t=1}^{T}t^2=\frac{T(T+1)(2T+1)}{6}\Rightarrow \sum_{t=1}^{T}(t-\bar{t})^2=\sum_{t=1}^{T}t^2-T\bar{t}^2=\frac{T(T+1)(2T+1)}{6}-\frac{T(T+1)^2}{4}$$

$$\Rightarrow \sum_{t=1}^{T}(t-\bar{t})^2=\frac{T(T+1)}{2}\left[\frac{2T+1}{3}-\frac{T+1}{2}\right]=\frac{T(T+1)}{2}\left[\frac{4T+2-3T-3}{6}\right]=\frac{T(T+1)(T-1)}{12}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{t=1}^{T}(t-\bar{t})^2=\frac{T\left(T^2-1\right)}{12}}$$

ii.

$$\sigma^2_{\hat{b}}=\frac{\sigma^2}{\sum_{t=1}^{T}(t-\bar{t})^2}=\frac{12\sigma^2}{T(T^2-1)}=\frac{12\times 1}{11\times(11^2-1)}\Rightarrow \boxed{\sigma^2_{\hat{b}}=0,095^2}$$

<u>Question 3</u> : $y_t=ax_t+bt+c+u_t\ , pour\ t=1,2,\dots,T\ ;\ avec\ \sigma^2=1$

i.

$$\cdot\ \Delta y_t=y_t-y_{t-1}=(ax_t+bt+c+u_t)-(ax_{t-1}+b(t-1)+c+u_{t-1})$$

$$\Delta y_t=y_t-y_{t-1}=a(x_t-x_{t-1})+b+(u_t-u_{t-1})=a\Delta x_t+b+\Delta u_t$$

$$\boxed{\Delta y_t=a\Delta x_t+b+\varepsilon_t\ , \text{où}\ \varepsilon_t=\Delta u_t}$$

$$\cdot\ E(\varepsilon_t)=E(\Delta u_t)=E(u_t-u_{t-1})=E(u_t)-E(u_{t-1})\Rightarrow \boxed{E(\varepsilon_t)=0}$$

$$\cdot\ V(\varepsilon_t)=V(\Delta u_t)=V(u_t-u_{t-1})=\underbrace{V(u_t)}_{1}+\underbrace{V(u_{t-1})}_{1}-2\,\underbrace{Cov(u_t,u_{t-1})}_{0}\Rightarrow \boxed{V(\varepsilon_t)=2}$$

· $Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = Cov(\Delta u_t, \Delta u_s) = Cov[(u_t - u_{t-1}), (u_s - u_{s-1})]$

$$= Cov(\Delta u_t, \Delta u_s) = Cov(u_t, u_s) - Cov(u_t, u_{s-1}) - Cov(u_{t-1}, u_s) + Cov(u_{t-1}, u_{s-1})$$

On envisage les suivants :

∘ $s = t$; ∘ $t = s - 1 \Leftrightarrow s = t + 1$; ∘ $t - 1 = s$ ou $s = t - 1$; ∘ $t - 1 = s - 1 \Leftrightarrow s = t$

∘ Si $s = t \Rightarrow Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_t) = V(\varepsilon_t) = 2$

∘ Si $s = t - 1$

$$\Rightarrow Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = \underbrace{Cov(u_t, u_{t-1})}_{0} - \underbrace{Cov(u_t, u_{t-2})}_{0} - \underbrace{Cov(u_{t-1}, u_{t-1})}_{V(u_{t-1})} + \underbrace{Cov(u_{t-1}, u_{t-2})}_{0} = -V(u_{t-1}) = -1$$

∘ Si $s = t + 1$

$$\Rightarrow Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = \underbrace{Cov(u_t, u_{t+1})}_{0} - \underbrace{Cov(u_t, u_t)}_{V(u_t)} - \underbrace{Cov(u_{t-1}, u_{t+1})}_{0} + \underbrace{Cov(u_{t-1}, u_t)}_{0} = -V(u_t) = -1$$

∘ Si $s \neq t$ et $s \neq t - 1$ et $s \neq t + 1$

$$\Rightarrow Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = \underbrace{Cov(u_t, u_s)}_{0} - \underbrace{Cov(u_t, u_{s-1})}_{0} - \underbrace{Cov(u_{t-1}, u_s)}_{0} + \underbrace{Cov(u_{t-1}, u_{s-1})}_{0} = 0$$

$$\boxed{Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = \begin{cases} 2 \text{ , si } s = t \\ -1 \text{ , si } s = t - 1 \text{ ou } s = t + 1 \\ 0 \text{ , si non} \end{cases}}$$

ii.

l'écriture matricielle du modèle $(\Delta y_t = b + a\Delta x_t + \varepsilon_t)$ *sera :*

$$Y = X\beta + \mathcal{E} \text{ , avec } Y = \begin{pmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \\ \vdots \\ \Delta y_T \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 1 & \Delta x_1 \\ 1 & \Delta x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \Delta x_T \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} \text{ et } \mathcal{E} = \begin{pmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \\ \vdots \\ \Delta u_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_T \end{pmatrix}$$

Nous sommes en présence d'autocorrélation des erreurs, puisque :

$$\cdot\ E(\mathcal{E}) = \begin{pmatrix} E(\mathcal{E}_1) \\ E(\mathcal{E}_2) \\ \vdots \\ E(\mathcal{E}_T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0_{T\times 1}$$

$$\cdot\ V(\mathcal{E}) = E(\mathcal{E}\mathcal{E}') = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \Omega \neq \sigma^2 I_n$$

· $\hat{\beta}_{MCO} = (X'X)^{-1}(X'Y)$ *reste sans biais de* β, *mais n'est plus efficients, puisque n'ayant* *plus une variance minimale.*

On adoptera alors la méthode des MCG pour estimer le modèle comportant une hétéroscédasticité des erreurs $(E(\mathcal{E}\mathcal{E}') \neq \sigma^2 I_n)$, *il sera sans biais évidemment mais aussi de variance minimale*

$$\boxed{\hat{\beta}_{MCG} = (X'\Omega^{-1}X)^{-1}(X'\Omega^{-1}Y)}$$

Institut de Financement du Développement du Maghreb Arabe
CONCOURS DE RECRUTEMENT DE LA XLIIème PROMOTION (BANQUE)
Septembre 2022

Exercice 5 : *(9 points : 2+1+1+1+1+1+1+1)*

ÉNONCÉ

On considère pour un pays donné, la relation temporelle entre la consommation courante y_t *d'une part et le revenu disponible* x_t *et le taux d'intérêt* z_t *d'autre part :*

$$y_t = ax_t + bz_t + u_t \ (1) \text{ pour } t = 1, 2, 3, \dots, T$$

avec des termes d'erreurs u_t *vérifiant :* $u_t = \varrho u_{t-1} + v_t$ *pour tout t et* v_t *des termes d'erreurs d'espérance mathématique nulle, indépendants entre eux et de même vcariance* σ^2, *alors que a et b sont deux paramètres et* ϱ *un réel de module inférieur strictement à 1.*

1- *Quelle est la nature de ce modèle ? que représentent économiquement parlant les paramètres a et b ? Préciser leurs signes attendus.*
2- *Expliquer pourquoi, les estimations de a et b par les Moindres Carrés Ordinaires ne sont pas les meilleurs estimations ?*
3- *On admet dans cette question que* ϱ *est connu,*
   i. *Prouver que l'on peut estimer a et b par les Moindres Carrés Ordinaires dans un modèle impliquant trois variables transformées* x_t^*, y_t^* *et* z_t^* *à définir.*
   ii. *En déduire de ce qui précède une procédure d'estimation des paramètres a et b.*
4- *Dans la suite de l'exercice, on admet que la variable* $z_t = 1$ *pour tout t*
   i. *L'application des Moindres Carrés Ordinaires sur le modèle (1) avec* $z_t = 1$ *a permis d'obtenir la statistique de Durbin Watson :* $DW = 0,6$ *, quelles sont les expressions des estimations de a et b et de* ϱ *quand ce dernier est inconnu.*

ii. *Exprimer $\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$ en fonction de $\Delta x_t = x_t - x_{t-1}$ et de u_{t-1}. Interpréter économiquement ce résultat.*

iii. *En déduire une autre manière d'estimer les paramètres a et b*

iv. *Dans le cadre des hypothèses de cette question 4, calculer l'espérance mathématique et la variance de y_t dans le cas où $\varrho = 1$ et $a = 0$.*

Corrigé

1-

▪ ***Il s'agit d'un modèle sans constante, à erreurs hétéroscédastiques (suivant un processus autorégressif d'ordre un : $AR(1)$***

▪ ***a : La Propension marginale à consommer, Elle se défini comme le rapport de la variation de la consommation sur la variation du revenu, la valeur de "a" est comprise entre 0 et 1.***

▪ ***b : Mesurant l'impact du taux d'intérêt sur la consommation, en effet une hausse du taux d'intérêt réel incite les ménages à reporter à plus tard leurs dépenses de consommation, car la quantité de biens auxquels ils doivent renoncer aujourd'hui pour consommer une unité supplémentaire dans le futur diminue. D'où un signe négatif de b.***

2-

$$y_t = ax_t + bz_t + u_t \quad (1)$$

L'écriture matricielle du modèle (1) sera : $\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_T \end{pmatrix}}_{Y} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_T & z_T \end{pmatrix}}_{X} \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}_{\beta} + \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_T \end{pmatrix}}_{U}$

▪ $\hat{\beta}_{MCO} = \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix} = (X'X)^{-1}(X'Y) = (X'X)^{-1}[X'(X\beta + U)] = (X'X)^{-1}[(X'X)\beta + X'U]$

$\hat{\beta}_{MCO} = (X'X)^{-1}(X'X)\beta + (X'X)^{-1}X'U = \beta + (X'X)^{-1}X'U = \beta + MU$ où $M = (X'X)^{-1}X'$

▪ $E(\hat{\beta}_{MCO}) = E(\beta + MU) = \beta + M\underbrace{E(U)}_{0_{3\times 1}}$

$\boxed{E(\hat{\beta}_{MCO}) = \beta \text{ , } \hat{\beta}_{MCO} \text{ sans biais de } \beta}$

▪ $V(\hat{\beta}_{MCO}) = V(\beta + MU) = V(MU) = MV(U)M' = M\Gamma M' = [(X'X)^{-1}X']\Gamma[(X'X)^{-1}X']'$

$V(\hat{\beta}_{MCO}) = [(X'X)^{-1}X']\Gamma[(X')'((X'X)')^{-1}] = [(X'X)^{-1}X']\Gamma[X(X'X)^{-1}]$

$\boxed{V(\hat{\beta}_{MCO}) = (X'X)^{-1}(X'\Gamma X)(X'X)^{-1} \neq \sigma^2(X'X)^{-1}}$

Donc l'estimateur des MCO n'est plus BLUE (de variance minimale)

3-

i.

Les erreurs (u_t) *suivent un processus* $AR(1)$: $u_t = \varrho u_{t-1} + v_t$

- $E(u_t) = 0$
- $V(u_t) = \dfrac{\sigma^2}{1-\varrho^2}$
- $Cov(u_t, u_{t-j}) = \left(\dfrac{\varrho^j}{1-\varrho^2}\right)\sigma^2$ *, pour tout* $j \in \mathbb{N}^*$
- $\rho_{u_t,u_{t-j}} = \dfrac{Cov(u_t, u_{t-j})}{\sqrt{V(u_t)V(u_{t-j})}} = \dfrac{\left(\dfrac{\varrho^j}{1-\varrho^2}\right)\sigma^2}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{1-\varrho^2}\times\dfrac{\sigma^2}{1-\varrho^2}}} = \varrho^j$*, pour tout* $j \in \mathbb{N}^*$

On peut donc construire la matrice variance-covariance du vecteur $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_T \end{pmatrix}$

$$V(U) = E(UU') = \frac{\sigma^2}{1-\varrho^2}\begin{pmatrix} 1 & \varrho & \varrho^2 & \cdots & \varrho^{n-3} & \varrho^{n-2} & \varrho^{n-1} \\ \varrho & 1 & \varrho & \cdots & \varrho^{n-4} & \varrho^{n-3} & \varrho^{n-2} \\ \varrho^2 & \varrho & 1 & \cdots & \varrho^{n-5} & \varrho^{n-4} & \varrho^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varrho^{n-3} & \varrho^{n-4} & \varrho^{n-5} & \cdots & 1 & \varrho & \varrho^2 \\ \varrho^{n-2} & \varrho^{n-3} & \varrho^{n-4} & \cdots & \varrho & 1 & \varrho \\ \varrho^{n-1} & \varrho^{n-2} & \varrho^{n-3} & \cdots & \varrho^2 & \varrho & 1 \end{pmatrix}$$

$$V(U) = E(UU') = \sigma^2\Omega \text{ où } \Omega = \frac{1}{1-\varrho^2}\begin{pmatrix} 1 & \varrho & \varrho^2 & \cdots & \varrho^{n-3} & \varrho^{n-2} & \varrho^{n-1} \\ \varrho & 1 & \varrho & \cdots & \varrho^{n-4} & \varrho^{n-3} & \varrho^{n-2} \\ \varrho^2 & \varrho & 1 & \cdots & \varrho^{n-5} & \varrho^{n-4} & \varrho^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varrho^{n-3} & \varrho^{n-4} & \varrho^{n-5} & \cdots & 1 & \varrho & \varrho^2 \\ \varrho^{n-2} & \varrho^{n-3} & \varrho^{n-4} & \cdots & \varrho & 1 & \varrho \\ \varrho^{n-1} & \varrho^{n-2} & \varrho^{n-3} & \cdots & \varrho^2 & \varrho & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est inversible et l'on peut vérifier par une simple multiplication que son

$$\textit{inverse est} : \Omega^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\varrho & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -\varrho & 1+\varrho^2 & -\varrho & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varrho & 1+\varrho^2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+\varrho^2 & -\varrho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\varrho & 1+\varrho^2 & -\varrho \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\varrho & 1 \end{pmatrix}$$

Pour se ramener à la méthode des moindres carrés ordinaires, on peut vérifier par

$$\textit{simple multiplication que } \Omega^{-1} = T'T \text{ , où } T = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\varrho^2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -\varrho & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varrho & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\varrho & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\varrho & 1 \end{pmatrix}$$

$$\textit{De plus}, TU = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\varrho^2}u_1 \\ -\varrho u_1 + u_2 \\ \vdots \\ -\varrho u_{i-1} + u_i \\ \vdots \\ -\varrho u_{T-1} + u_T \end{pmatrix}$$

$$\textit{En remplaçant } u_i \textit{ par } \varrho u_{i-1} + v_i \textit{, on obtient} : TU = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\varrho^2}u_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_i \\ \vdots \\ v_T \end{pmatrix}$$

On a donc $E(TU) = 0$ *et* $V(TU) = TV(U)T' = T(\sigma^2\Omega)T' = \sigma^2(T\Omega T')$

Or $\Omega^{-1} = T'T$ *par la suite* $\Omega = (T'T)^{-1} = T^{-1}(T')^{-1}$

et $V(TU) = \sigma^2(T\Omega T') = \sigma^2(TT^{-1}(T')^{-1}T') = \sigma^2 I_T$

D'où la transformation du modèle $Y = X\beta + U$ *par la méthode de Aitken* : $\underbrace{TY}_{Y^*} = \underbrace{TX}_{Y^*}\beta + \underbrace{TU}_{U^*}$

- $$U^* = TU = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\varrho^2}u_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_i \\ \vdots \\ v_T \end{pmatrix}$$

BEN AHMED MOHSEN Téléphone: (+216) 97 619191 / 54 619191
omega.center.cp@gmail.com https://web.facebook.com/OMEGACENTER2014

◦ $Y^* = TY = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\varrho^2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -\varrho & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varrho & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\varrho & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\varrho & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\varrho^2}\, y_1 \\ y_2 - \varrho y_1 \\ \vdots \\ y_T - \varrho y_{T-1} \end{pmatrix}$

◦ $X^* = TX = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\varrho^2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -\varrho & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varrho & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\varrho & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\varrho & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_T & z_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\varrho^2}\, x_1 & \sqrt{1-\varrho^2}\, z_1 \\ x_2 - \varrho x_1 & z_2 - \varrho z_1 \\ \vdots & \vdots \\ x_T - \varrho x_{T-1} & z_T - \varrho z_{T-1} \end{pmatrix}$

Autrement :

◦ $u_t = \varrho u_{t-1} + v_t \Rightarrow u_t - \varrho u_{t-1} = v_t$

Multipliant le modèle $y_t = ax_t + bz_t + u_t$ (1) *par* ϱ *, on obtient :* $\varrho y_t = a\varrho x_t + b\varrho z_t + \varrho u_t$

Nous soustrayons pour obtenir : $\underbrace{y_t - \varrho y_{t-1}}_{y_t^*} = a\,\underbrace{(x_t - \varrho x_{t-1})}_{x_t^*} + b\,\underbrace{(z_t - \varrho z_{t-1})}_{z_t^*} + \underbrace{(u_t - \varrho u_{t-1})}_{v_t}$

On se remmène ainsi à un modèle obéissant aux hypothèses MCO :

$y_t^* = ax_t^* + bz_t^* + v_t$ $(*)$ *, puisque :*

◦ $\forall t, E(v_t) = 0, V(v_t) = \sigma^2$ ◦ $\forall t \neq s, Cov(v_t, v_s) = 0$

ii.

Ainsi on obtient un modèle linéaire général avec des termes d'erreur homoscédastique et non-corrélés: $Y^* = X^*\beta + U^*$

L'estimateur linéaire optimal est alors l'estimateur des moindres carrés ordinaires qui s'écrit : $\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix} = (X^{*\prime}X^*)^{-1}(X^{*\prime}Y^*) = \left((TX)'(TX)\right)^{-1}\left((TX)'(TY)\right) = \left(X' \underbrace{[T'T]}_{\Omega^{-1}} X\right)^{-1} \left(X' \underbrace{[T'T]}_{\Omega^{-1}} Y\right)$

$\boxed{\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix} = (X'\Omega^{-1}X)^{-1}(X'\Omega^{-1}Y)}$ *, qui n'est autre que l'estimateur de White (Moindres Carrés généralisées)*

4-

i. *Pour* $z_t = 1, \forall t = 1, 2, 3, \ldots, T$; *notre modèle devient :* $y_t = b + ax_t + u_t$ (2)

Adresse : 2, Rue Ibn Arafa, av de l'environnement Manouba Centre, Manouba

$$Or\ \begin{cases} DW \approx 2(1-\widehat{\varrho}) \\ DW = 0,6 \end{cases} \Longrightarrow 2(1-\widehat{\varrho}) \approx 0,6 \Longrightarrow 1-\widehat{\varrho} \approx 0,3 \Longrightarrow \boxed{\widehat{\varrho} \approx 0,7}$$

$$\boxed{\widehat{\beta} = \begin{pmatrix} \widehat{a} \\ \widehat{b} \end{pmatrix} = \left(X'\widehat{\Omega}^{-1}X\right)^{-1}\left(X'\widehat{\Omega}^{-1}Y\right)\ avec\ \widehat{\Omega}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -0,7 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -0,7 & 1,49 & -0,7 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,7 & 1,49 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1,49 & -0,7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -0,7 & 1,49 & -0,7 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -0,7 & 1 \end{pmatrix}}$$

Autrement :

$$\begin{cases} y_t = ax_t + z_t + u_t \ \ (1) \\ z_t^* = 1-\widehat{\varrho} = 0,3 \end{cases} \Longrightarrow y_t^* = \underbrace{0,3b}_{c} + ax_t^* + v_t \ \ (*) \Longrightarrow y_t^* = c + ax_t^* + v_t$$

$Or\ ce\ modèle\ obéissant\ aux\ hypothèses\ MCO, ce\ qui\ donne$: $\begin{cases} \widehat{a} = \dfrac{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(y_t^* - \overline{y^*})(x_t^* - \overline{x^*})}{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(x_t^* - \overline{x^*})^2} \\ \hat{c} = \overline{y^*} - \widehat{a}\overline{x^*} \end{cases}$

ii.

$$\Delta y_t = y_t - y_{t-1} = (b + ax_t + u_t) - (b + ax_{t-1} + u_{t-1}) = a(x_t - x_{t-1}) + (u_t - u_{t-1})$$

$$\Delta y_t = a\Delta x_t + \Delta u_t = a\Delta x_t + (u_t - u_{t-1}) = a\Delta x_t + (\varrho u_{t-1} + v_t - u_{t-1})$$

$$\boxed{\Delta y_t = a\Delta x_t + (\varrho - 1)u_{t-1} + v_t}$$

Si on néglige les termes d'erreurs l'accroissement de la consommation courante serait

proportionnelle au revenu disponible et c'est l'effet court terme $a = \dfrac{\Delta y_t}{\Delta x_t}$

Le coefficient négatif $(\varrho - 1)$ *va intervenir dans l'accroissement à long terme*

iii.

$On\ a : \Delta y_t = a\Delta x_t + (\varrho - 1)u_{t-1} + v_t$

$Or, y_{t-1} = b + ax_{t-1} + u_{t-1} \Longrightarrow (\varrho - 1)y_{t-1} = b(\varrho - 1) + a(\varrho - 1)x_{t-1} + (\varrho - 1)u_{t-1}$

$\Longrightarrow (\varrho - 1)u_{t-1} = (\varrho - 1)y_{t-1} - b(\varrho - 1) - a(\varrho - 1)x_{t-1}$

$\Delta y_t = b(1 - \varrho) + a\Delta x_t + (\varrho - 1)y_{t-1} - a(\varrho - 1)x_{t-1} + v_t$

En fixant ϱ *on pourra estimer* a *et* b*, on les remplace par leurs valeurs trouvées puis on ré-estime* ϱ *... etc. et d'une manière itérative jusqu'à atteindre la stabilité des estimateurs (la convergence)*

iv.

$\varrho = 1$ *et* $a = 0 \Rightarrow \Delta y_t = v_t$, *donc le processus* $\{y_t\}$ *est une marche aléatoire c.à.d.*

$y_t = y_1 + (u_1 + u_2 + \cdots + u_t)$

$\boxed{E(y_t) = y_1}$

$\boxed{V(y_t) = t\sigma^2}$

Institut de Financement du Développement du Maghreb Arabe
CONCOURS DE RECRUTEMENT DE LA XXVIII^{ème} PROMOTION
JUILLET 2008

Exercice 6 : (8 points :1 point par question)

ÉNONCÉ

On désigne par y_t^* *le niveau cible d'une grandeur économique et par* y_t *le niveau réalisé à l'instant* t.

On admet que $y_t - y_{t-1} = \lambda(y_t^* - y_{t-1})$ *pour* $t = 2, 3, \dots, T$ *avec* $0 < \lambda < 1$

1)
   i. *Interpréter la relation précédente en termes d'accroissement réalisé et d'accroissement désiré : illustrer vos propos par un exemple économique*

   ii. *Examiner les deux cas particuliers où* $\lambda = 1$ *et* λ *proche de zéro*
2) *On suppose dans cette question que la cible :* $y_t^* = a + u_t$ *où* a *est une constante et* u_t *une suite de variables aléatoires centrées réduites indépendantes.*
   i. *Quelle est la nature du processus* y_t ?
   ii. *Calculer* $E(y_t)$ *pour t relativement grand*
   iii. *Comparer les variances du processus* y_t *et de la cible* y_t^*
   iv. *Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre* y_t *et* y_t^*
3) *On suppose dans la suite que la cible* y_t^* *est telle que :* $y_t^* = \mu y_{t-1}^* + u_t$ *où* $-1 < \mu < 1$
   i. *Trouver la relation entre* y_t *et ses réalisations passées* y_{t-1}, *de* y_{t-2} *et des termes d'erreur* u_t

   ii. *Prouver que* $y_t - \mu y_{t-1}$ *est autorégressif d'ordre 1*

Corrigé

1)
   i. *Prenons l'exemple d'un modèle d'ajustement du stock :*

$Soit\ y_t^*\ le\ niveau\ du\ capital\ désiré, qui\ sera\ par\ hypothèse\ proportionnel$ à $la\ valeur$ $prévue\ d'une\ production\ x_t^*$ à $un\ terme\ d'erreur\ v_t$: $(y_t^* = \alpha x_t^* + v_t)$.

$Le\ niveau\ désiré\ du\ capital\ est\ régi\ par\ le\ mécanisme\ d'ajustement\ partiel$:

$$y_t - y_{t-1} = \lambda(y_t^* - y_{t-1})\ avec\ 0 < \lambda < 1$$

$\lambda\ est\ appelé\ coefficient\ d'ajustement$

$y_t - y_{t-1} = variation\ actuelle$

$y_t^* - y_{t-1} = variation\ désirée$

$Cette\ même\ variation\ de\ stock\ de\ capital(y_t - y_{t-1})\ entre\ deux\ périodes\ n'est\ autre\ que$ $l'investissement\ I_t$ à $la\ période\ t$

ii.

· $Si\ \lambda = 1$:

$Le\ stock\ actuel\ du\ capital\ est$ égal $au\ stock\ désiré$ $(dans\ la\ même\ période)$

· $Si\ \lambda \cong 0$:

$Rien\ ne\ se\ modifie, puisque\ le\ stock\ actuel\ au\ temps\ t\ est\ identique$ à $celui\ observé$ à la $période\ antérieure.$

· $Si\ \lambda \in]0,1[$

λ Étant $le\ coefficient\ d'ajustement, et\ comme\ on\ a\ une\ petite\ valeur\ de\ \lambda\ comprise\ entre$ $la\ valeur\ nulle\ et\ l'unité\ donc\ la\ variation\ actuelle(y_t - y_{t-1})\ reste\ proportionnellement$ $faible\ par\ rapport$ à $la\ variation\ désirée(y_t^* - y_{t-1}), de\ ce\ fait\ ce\ mécanisme$ $d'ajustement\ partiel\ affiche\ une\ difficulté$ à $atteindre\ le\ stock\ du\ capital\ désiré.$

2)

i.

$$\begin{cases} y_t - y_{t-1} = \lambda(y_t^* - y_{t-1}) \\ y_t^* = a + u_t \end{cases} \Rightarrow y_t - y_{t-1} = \lambda(a + u_t - y_{t-1}) \Rightarrow y_t - y_{t-1} = \lambda a + \lambda u_t - \lambda y_{t-1}$$

$$\Rightarrow y_t = \underbrace{\lambda a}_{a^*} + \underbrace{(1-\lambda)}_{\theta} y_{t-1} + \underbrace{\lambda u_t}_{u_t^*} \Rightarrow \boxed{y_t = a^* + \theta y_{t-1} + u_t^*}$$

$Il\ s'agit\ d'un\ processus\ autorégressif\ stationnaire(car\ \theta \in]0,1[), d'ordre\ 1$

ii. $y_t = a^* + \theta y_{t-1} + u_t^*\ avec\ \theta = 1 - \lambda \in]0,1[$

$$E(y_t) = E(a^* + \theta y_{t-1} + u_t^*) = a^* + \theta E(y_{t-1}) + E(u_t^*)$$

$Or\ u_t\ est\ une\ suite\ de\ variables\ aléatoires\ centrées\ réduites\ indépendantes$

$\Rightarrow E(u_t^*) = E(\lambda u_t) = \lambda E(u_t) = 0$

$On\ pourra\ aborder\ Suite\ arithmético\text{-}géométrique, en\ posant E(y_t) = m_t\ \ ;\ \forall t$

$Ainsi\ E(y_t) = a^* + \theta E(y_{t-1}) \Leftrightarrow m_t = a^* + \theta m_{t-1}$

$On\ obtient\ par\ la\ suite : m_t = \theta^t \left(m_0 - \frac{a^*}{1-\theta}\right) + \frac{a^*}{1-\theta} \Rightarrow \lim_{t\to+\infty} m_t = \frac{a^*}{1-\theta} = \frac{\lambda a}{\lambda} = a$

$$D'où \boxed{\lim_{t\to+\infty} E(y_t) = a}$$

iii.

$$V(y_t) = V(a^* + \theta y_{t-1} + u_t^*) = V(\theta y_{t-1} + u_t^*) = \theta^2 V(y_{t-1}) + V\left(\underbrace{u_t^*}_{\lambda u_t}\right) + 2\theta Cov(y_{t-1}, u_t^*)$$

$$= \theta^2 V(y_{t-1}) + V(\lambda u_t) + 2\theta Cov(y_{t-1}, \lambda u_t) = \theta^2 V(y_{t-1}) + \lambda^2 \underbrace{V(u_t)}_{\sigma^2} + 2\lambda\theta \underbrace{Cov(y_{t-1}, u_t)}_{0}$$

$V(y_t) = \theta^2 V(y_{t-1}) + \lambda^2\sigma^2$

$D'autre\ part\ notons\ V(y_t) = V_t \Rightarrow V_t = \theta^2 V_{t-1} + \lambda^2\sigma^2, toujours\ suite$

$arithmético\text{-}géométrique$

$On\ obtient\ par\ la\ suite : V_t = (\theta^2)^t \left(V_0 - \frac{\lambda^2\sigma^2}{1-\theta^2}\right) + \frac{\lambda^2\sigma^2}{1-\theta^2}$

$$\Rightarrow \lim_{t\to+\infty} m_t = \frac{\lambda^2\sigma^2}{1-\theta^2} = \frac{\lambda^2\sigma^2}{1-(1-\lambda)^2} = \frac{\lambda^2\sigma^2}{2\lambda - \lambda^2}$$

$$D'où \boxed{\lim_{t\to+\infty} V(y_t) = \frac{\lambda\sigma^2}{2-\lambda}}$$

$Et\ comme\ on\ a\ y_t^* = a + u_t\ donc\ V(y_t^*) = V(u_t) = \sigma^2$

$pour\ t\ relativement\ grand, V(y_t^*) - V(y_t) = \sigma^2\left(1 - \frac{\lambda}{2-\lambda}\right) = 2\sigma^2\left(\frac{1-\lambda}{2-\lambda}\right) \geq 0$

$d'où \boxed{V(y_t) < V(y_t^*)}$

iv. $Toujours\ pour\ t\ relativement\ grand$:

$$\rho_{y_t, y_t^*} = \frac{Cov(y_t, y_t^*)}{\sqrt{V(y_t)V(y_t^*)}}$$

$Or\ on\ a :\ y_t - y_{t-1} = \lambda(y_t^* - y_{t-1}) \Leftrightarrow y_t - y_{t-1} = \lambda y_t^* - \lambda y_{t-1} \Leftrightarrow y_t = \lambda y_t^* - \lambda y_{t-1} + y_{t-1}$

$y_t - y_{t-1} \Leftrightarrow y_t = \lambda y_t^* + (1-\lambda) y_{t-1}$

$$Par\ la\ suite\ \rho_{y_t,y_t^*}=\frac{Cov(\lambda y_t^*+(1-\lambda)y_{t-1}y_{t-1},y_t^*)}{\sqrt{\left(\frac{\lambda\sigma^2}{2-\lambda}\right)\sigma^2}}=\frac{Cov(\lambda y_t^*+(1-\lambda)y_{t-1},y_t^*)}{\sigma^2\sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}}}$$

$$=\frac{Cov(\lambda y_t^*,y_t^*)+Cov\big((1-\lambda)y_{t-1},y_t^*\big)}{\sigma^2\sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}}}=\frac{\lambda V(y_t^*)+(1-\lambda)Cov(y_{t-1},y_t^*)}{\sigma^2\sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}}}$$

$$=\frac{\lambda\sigma^2+(1-\lambda)Cov\big(y_{t-1},(a+u_t)\big)}{\sigma^2\sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}}}=\frac{\lambda\sigma^2+(1-\lambda)\overbrace{Cov(y_{t-1},u_t)}^{0}}{\sigma^2\sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}}}=\frac{\lambda\sigma^2}{\sigma^2\sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}}}$$

$$=\frac{\lambda}{\sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}}}$$

D'où $\boxed{\rho_{y_t,y_t^*}=\sqrt{\lambda(2-\lambda)}}$

3)

i.

$$\begin{cases}Ly_t^*=y_{t-1}^*\ ;\ L\ \text{étant opérateur de retard}\\ y_t^*=\mu y_{t-1}^*+u_t\\ y_t=\lambda y_t^*+(1-\lambda)y_{t-1}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}Ly_t^*=y_{t-1}^*\\ y_t^*=\mu Ly_t^*+u_t\\ y_t=\lambda y_t^*+(1-\lambda)y_{t-1}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}Ly_t^*=y_{t-1}^*\\ (1-\mu L)y_t^*=u_t\\ y_t=\lambda y_t^*+(1-\lambda)y_{t-1}\quad(3)\end{cases}$$

$Multiplions\ (3)\ par\ (1-\mu L):(1-\mu L)y_t=(1-\mu L)\lambda y_t^*+(1-\mu L)(1-\lambda)y_{t-1}$

$$(1-\mu L)y_t=\lambda\underbrace{(1-\mu L)y_t^*}_{u_t}+(1-\lambda)(1-\mu L)y_{t-1}\Leftrightarrow y_t-\mu\underbrace{Ly_t}_{y_{t-1}}=\lambda u_t+(1-\lambda)\Big(y_{t-1}-\mu\underbrace{Ly_{t-1}}_{y_{t-2}}\Big)$$

$$\Leftrightarrow y_t=\mu y_{t-1}+(1-\lambda)(y_{t-1}-\mu y_{t-2})+\lambda u_t$$

$$\boxed{y_t=\big(\mu+(1-\lambda)\big)y_{t-1}-\mu(1-\lambda)y_{t-2}+\lambda u_t}$$

ii.

$$y_t-\mu y_{t-1}=\big(\mu+(1-\lambda)\big)y_{t-1}-\mu(1-\lambda)y_{t-2}+\lambda u_t-\mu y_{t-1}$$

$$=(1-\lambda)y_{t-1}-\mu(1-\lambda)y_{t-2}+\lambda u_t$$

$$y_t-\mu y_{t-1}=(1-\lambda)(y_{t-1}-\mu y_{t-2})+\lambda u_t\ ,notons\begin{cases}z_t=y_t-\mu y_{t-1}\Rightarrow z_{t-1}=y_{t-1}-\mu y_{t-2}\\ \theta=1-\lambda\Rightarrow\theta\in\,]0,1[\\ \lambda u_t=u_t^*\end{cases}$$

$On\ obtient\ par\ la\ suite:z_t=\theta z_{t-1}+u_t^*$

$Donc\ il\ s'agit\ d'un\ processus\ autorégressif\ stationnaire (car\ \theta \in]0,1[), d'ordre\ 1$

Institut de Financement du Développement du Maghreb Arabe
CONCOURS DE RECRUTEMENT DE LA XXXème PROMOTION
JUILLET 2010

Exercice 7 : (12 points:)

ÉNONCÉ

$L'estimation\ par\ les\ moindres\ carrés\ ordinaires\ sur\ T = 40\ observations\ temporelles$

$de\ la\ relation\ en\ le\ logarithme\ de\ la\ quantité\ de\ monnaie\ (LM) au\ logarithme\ du\ PIB$

$(LPIB)\ et\ au\ taux\ d'intérêt\ réel\ (r)\ fournit\ les\ résultats\ suivants$:

$$LM_t = \underset{(0,4)}{0,9} LPIB_t - \underset{(0,2)}{0,8} r_t + \underset{(0,3)}{1,2} + \hat{u}_t$$

$Avec\ \hat{u}_t le\ résidu\ de\ la\ régression.$

$R^2 = 0,88\ et\ DW = 1,2$

$Les\ chiffres\ entre\ parenthèses\ sont\ les\ écarts\ types\ estimés.$

1) $Interpréter\ économiquement\ les\ estimations\ des\ variables\ explicatives$
2) $Tester\ à\ un\ niveau\ de\ confiance\ de\ 95\%\ la\ significativité\ de\ chacune\ des\ variables\ explicatives$

$On\ admet\ que\ pour\ une\ loi\ de\ Student\ S\ quelconque, la\ probabilité\ que\ -2 \leq S \leq 2$

$est\ approximativement\ égale\ à\ 95\%$

3) $Expliquer\ sans\ faire\ de\ calcul, comment\ on\ peut\ tester\ la\ significativité\ globale\ de\ cette\ relation$
4) $Sachant\ que\ la\ variance\ empirique\ de\ la\ variable\ (LM)\ est\ égale\ à\ 2$
   i. $Déterminer\ la\ somme\ des\ carrés\ des\ résidus\ SCR$
   ii. $Calculer\ la\ variance\ expliquée\ et\ la\ variance\ résiduelle\ de\ la\ régression$
5) $A\ partir\ de\ la\ valeur\ de\ la\ statistique\ Durbin\ Watson (DW), calculer\ la\ valeur\ du\ coefficient\ d'autocorrélation. Interpréter\ ce\ résultat$
   $(il\ n'est\ pas\ demandé\ d'effectuer\ le\ testd'autocorrélation)$
   $Un\ examen\ plus\ approfondie\ prouve\ que\ la\ relation\ est\ dynamique$:
   $$LM_t = 0,5LM_{t-1} + 0,5LPIB_t - 0,3r_t + 0,6 + \hat{u}_t$$
   i. $Quelle\ est\ l'interprétation\ économique\ de\ cette\ nouvelle\ relation$? $Commenter.$
   ii. $Déterminer\ l'élasticité\ de\ long\ terme\ de\ la\ quantité\ de\ monnaie\ par\ rapport$

BEN AHMED MOHSEN Téléphone: (+216) 97 619191 / 54 619191
omega.center.cp@gmail.com https://web.facebook.com/OMEGACENTER2014

au PIB

Corrigé

1) *En se basant sur (la théorie explicative des déterminants du niveau général des prix), le modèle définit une fonction de demande de monnaie (la quantité de monnaie (LM)), PIB en tant qu'indicateur de revenu et le taux d'intérêt réel en tant que coût d'opportunité de la détention de monnaie.*

· *L'élasticité de la quantité de monnaie par rapport au PIB est estimée à 0,9, en effet une augmentation de 1% du PIB entraine une augmentation de 0,9% de la quantité de monnaie.*

· *D'autre part une augmentation d'unité (100%) du taux d'intérêt réel fait diminuer la quantité de monnaie de 80%*

2)

$$LM_t = \beta_1 + \beta_2 LPIB_t + \beta_3 r_t + u_t \ \ avec \begin{cases} \hat{\beta}_1 = 1,2 \ et \ \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1} = 0,3 \\ \hat{\beta}_2 = 0,9 \ et \ \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_2} = 0,4 \\ \hat{\beta}_3 = -0,8 \ et \ \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_3} = 0,2 \end{cases}$$

· *On se propose de tester* $H_0^{(2)}: \beta_2 = 0$ *contre* $H_a^2: \beta_2 \neq 0$, *sous un niveau de signification*

$\alpha = 5\%$

$$T^{(2)} = \frac{\hat{\beta}_2 - \beta_2}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_2}} \backsim \mathcal{T}(40-3), \text{la loi de Student de d.d.l } (37)$$

Règle de décision : on rejette $H_0^{(2)}$ *avec un risque de première espèce* α,

$$si \ \ \left|T_0^{(2)}\right| \geq t_{0,975}(37)$$

$$or \begin{cases} \left|T_0^{(2)}\right| = \left|\frac{\hat{\beta}_2 - 0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_2}}\right| = \left|\frac{0,9}{0,4}\right| = 2,25 \\ t_{0,975}(37) \cong 2 \end{cases} \Rightarrow |T_0| \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(98)$$

D'où β_2 *est significativement non nul au risque de 5% (le PIB est significatif)*

· *On se propose de tester* $H_0^{(3)}: \beta_3 = 0$ *contre* $H_a^3: \beta_3 \neq 0$, *sous un niveau de signification*

$\alpha = 5\%$

$$T^{(3)} = \frac{\hat{\beta}_3 - \beta_3}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_3}} \backsim \mathcal{T}(40-3), \text{la loi de Student de d.d.l } (37)$$

Règle de décision : on rejette $H_0^{(3)}$ *avec un risque de première espèce* α,

$si \ \ \left|T_0^{(3)}\right| \geq t_{0,975}(37)$

Adresse : 2, Rue Ibn Arafa, av de l'environnement Manouba Centre, Manouba

$$or \begin{cases} \left|T_0^{(3)}\right| = \left|\dfrac{\widehat{\beta}_3 - 0}{\widehat{\sigma}_{\beta_3}}\right| = \left|\dfrac{-0,8}{0,2}\right| = 4 \\ t_{0,975}(37) \cong 2 \end{cases} \quad \Rightarrow |T_0| \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(98)$$

D'où β_3 est significativement non nul au risque de 5% (le taux d'intérêt réel (r) est significatif)

3) *Le test de significativité globale consiste à vérifier si le modèle, pris dans sa globalité, est pertinent.*

L'hypothèse nulle correspond à la situation où aucune des variables exogènes n'emmène de l'information utile dans l'explication de Y c.à.d. Le modèle ne sert à rien.

$$Le\ test\ s'ecrit : \begin{cases} H_0 : \beta^c = 0 \\ \quad contre \\ H_a : \beta^c \neq 0 \end{cases} \quad où\ \beta^c = \begin{pmatrix} \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$$

La stat de décision est celle de Fisher :

$$F = \frac{\widehat{\beta}^{c'}(X^{c'}X^c)\widehat{\beta}^c / k-1}{\widehat{\sigma}^2} = \frac{SCE/k-1}{SCR/n-k} = \left(\frac{R^2}{1-R^2}\right)\left(\frac{n-k}{k-1}\right) \rightsquigarrow \mathcal{F}\big((k-1),(n-k)\big)$$

La région critique pour un risque α, sera pour :

$$F_{obs} > f_{1-\alpha}\big((k-1),(n-k)\big)$$

$$ou\ encore\ R^2 > \frac{(k-1)f_{1-\alpha}\big((k-1),(n-k)\big)}{(n-k)+(k-1)f_{1-\alpha}\big((k-1),(n-k)\big)}$$

4)

i.

$$R^2 = 1 - \frac{SCR}{SCT} \Leftrightarrow \frac{SCR}{SCT} = 1 - R^2 \Leftrightarrow \frac{SCR}{SCT} = 1 - R^2 \Leftrightarrow SCR = (1-R^2)SCT$$

$$\Leftrightarrow SCR = (1-R^2)\sum_{t=1}^{40}(LM_t - \overline{LM})^2 \Leftrightarrow SCR = 40(1-R^2)Var(LM)$$

$$\Leftrightarrow SCR = 40 \times (1 - 0,88) \times 2$$

$$\boxed{SCR = 9,6}$$

ii.

la variance résiduelle estimée: $\widehat{\sigma}^2 = \dfrac{SCR}{T-k} = \dfrac{9,6}{36} = 0,27$

la variance expliquée : $SCE = SCT - SCR = 2 - 0,27 = 1,73$

5) $DW_{obs} \approx 2(1-\varphi) \Rightarrow 2(1-\varphi) \approx 1,2$ *donc* $\varphi \approx 0,4$

À première vue on peut dire que les erreurs sont corrélées, (toujours avec réserve puisque seul le test d'autocorrélation qui peut confirmer ou démentir nos impressions)

Cette probable autocorrélation des erreurs sera éventuellement causée par l'omission *des variables explicatives importantes ou par une mauvaise spécification du modèle ou encore en présence d'effets dynamiques non modélisés.*

6)

i. *En fixant un objectif (cible à atteindre)* LM_t^*, *la quantité de monnaie optimale désirée, le coefficient de la variable endogène retardée* LM_{t-1} *mesure la vitesse du mécanisme d'ajustement partiel pour atteindre la valeur cible désirée.*

ii.

$$LM_t = \alpha + \beta LM_{t-1} + \gamma LPIB_t + \delta r_t + u_t$$

$$ELT_{LM_t/LPIB_t} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\Delta LM_{t+j}}{\Delta LPIB_t} = \gamma \underbrace{\sum_{j=0}^{+\infty} \beta^j}_{\frac{1}{1-\beta}} \Rightarrow \boxed{ELT_{LM_t/LPIB_t} = \frac{\gamma}{1-\beta}}$$

$$Or\ \widehat{LM}_t = 0,6 + 0,5LM_{t-1} + 0,5LPIB_t - 0,3r_t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{\beta} = 0,5 \\ \hat{\gamma} = 0,5 \end{cases} et\ \widehat{ELT}_{LM_t/LPIB_t} = \frac{\hat{\gamma}}{1-\hat{\beta}} = \frac{0,5}{1-0,5} = 1$$

Sur le long terme une variation durable et permanente du PIB de 1% entraine une variation la demande de monnaie de l'ordre de 1 %

Institut de Financement du Développement du Maghreb Arabe
CONCOURS DE RECRUTEMENT DE LA XLIème PROMOTION (BANQUE)
Septembre 2021

Exercice 8 : *(6 points : 1+1+1+1+2)*

ÉNONCÉ

On s'intéresse à la régression $y_i = ax_i + u_i$ *avec* u_i *des termes d'erreur indépendants d'espérance nulle et de variance* σ_i^2 *, pour* $i = 1, 2, 3$.

Les valeurs de x_i *de* y_i *et de* σ_i^2 *sont précisées dans le tableau suivant :*

i	1	2	3
x_i	3	7	11
y_i	6	13	23
σ_i^2	1	9	4

1. *Déterminer l'écriture matricielle de ce modèle en précisant ses principales caractéristiques.*
2. *Déterminer l'estimation de a par les moindres carrés ordinaires*
3. *Cet estimateur est-il sans biais ? Est-il à variance minimale ? justifier vos réponses*
4. *Déterminer l'estimation de a par les moindres carrés généralisés*
5. *Etudier la significativité statistique des deux estimations de a.*

Corrigé

1. *En réunissant les 3 observations sur l'équation de régression :*

$$y_i = ax_i + u_i \;;\; i = 1,2,3, \text{On obtient} : \underbrace{Y}_{(3\times1)} = \underbrace{X}_{(3\times1)} \underbrace{a}_{(1\times1)} + \underbrace{\mathcal{E}}_{(3\times1)} \;;\; avec\ Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

$$et\ \mathcal{E} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, avec\ E(\mathcal{E}) = E\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(u_1) \\ E(u_2) \\ E(u_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0_{3\times1}$$

$$Or, Cov(u_i, u_j) = \begin{cases} 0, pour\ i \neq j \\ \sigma_i^2, si\ non \end{cases}, \; i = 1,2,3$$

Ainsi la matrice variance-covariance du vecteur Des termes d'erreurs aléatoires $\mathcal{E}$ sera:

$$\Gamma = V(\mathcal{E}) = \begin{pmatrix} V(u_1) & Cov(u_1,u_2) & Cov(u_1,u_3) \\ Cov(u_1,u_2) & V(u_2) & Cov(u_2,u_3) \\ Cov(u_1,u_3) & Cov(u_2,u_3) & V(u_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Certes l'hypothèse d'absence d'autocorrélation des erreurs est respectée

$(Cov(u_i, u_j) \neq 0, pour\ i \neq j)$ *mais celui de l'homoscédasticité est violée* $(V(\mathcal{E}) \neq \sigma^2 I_3)$

2.

$$\hat{a}_{MCO} = (X'X)^{-1}(X'Y) = \left[(x_1 \quad x_2 \quad x_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right]^{-1}\left[(x_1 \quad x_2 \quad x_3)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right]$$

$$\hat{a}_{MCO} = \left[(3 \quad 7 \quad 11)\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}\right]^{-1}\left[(3 \quad 7 \quad 11)\begin{pmatrix} 6 \\ 13 \\ 23 \end{pmatrix}\right] = 179^{-1} \times 362 = \frac{362}{179} = 2,02$$

$$\boxed{\hat{a}_{MCO} = \frac{362}{179} = 2,02}$$

3.

- $\hat{a}_{MCO} = (X'X)^{-1}(X'Y) = (X'X)^{-1}[X'(Xa + \mathcal{E})] = (X'X)^{-1}[(X'X)a + X'\mathcal{E}]$

$$\hat{a}_{MCO} = (X'X)^{-1}(X'X)a + (X'X)^{-1}X'\mathcal{E} = a + (X'X)^{-1}X'\mathcal{E}$$

$$\boxed{\hat{a}_{MCO} = a + (X'X)^{-1}X'\mathcal{E} = a + M\mathcal{E}, \text{où } M = (X'X)^{-1}X'}$$

- $E(\hat{a}_{MCO}) = E(a + M\mathcal{E}) = a + M\underbrace{E(\mathcal{E})}_{0_{3\times1}}$

$$\boxed{E(\hat{a}_{MCO}) = a\ , \hat{a}_{MCO}\ \textit{sans biais de } a}$$

- $V(\hat{a}_{MCO}) = V(a + M\mathcal{E}) = V(M\mathcal{E}) = MV(\mathcal{E})M' = M\Gamma M' = [(X'X)^{-1}X']\Gamma[(X'X)^{-1}X']'$

$$V(\hat{a}_{MCO}) = [(X'X)^{-1}X']\Gamma[(X')'((X'X)')^{-1}] = [(X'X)^{-1}X']\Gamma[X(X'X)^{-1}]$$

$$\boxed{V(\hat{a}_{MCO}) = (X'X)^{-1}(X'\Gamma X)(X'X)^{-1} \neq \sigma^2(X'X)^{-1}}$$

- $M = (X'X)^{-1}X' = \left[\begin{pmatrix}3 & 7 & 11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\7\\11\end{pmatrix}\right]^{-1}\begin{pmatrix}3 & 7 & 11\end{pmatrix} = \frac{1}{179}\begin{pmatrix}3 & 7 & 11\end{pmatrix} \Rightarrow M' = \frac{1}{179}\begin{pmatrix}3\\7\\11\end{pmatrix}$

- $V(\hat{a}_{MCO}) = M\Gamma M' = \left[\frac{1}{179}\begin{pmatrix}3 & 7 & 11\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 9 & 0\\0 & 0 & 4\end{pmatrix} \times \left[\frac{1}{179}\begin{pmatrix}3\\7\\11\end{pmatrix}\right]$

$$V(\hat{a}_{MCO}) = \frac{1}{179^2}\begin{pmatrix}3 & 7 & 11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 9 & 0\\0 & 0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\7\\11\end{pmatrix} = \frac{1}{179^2}\begin{pmatrix}3 & 63 & 44\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\7\\11\end{pmatrix} = \frac{934}{179^2} = 0,03$$

On démontrera plus tard que l'estimateur MCO reste inefficace même s'il est sans biais.

On optera alors pour l'estimateur de White (MCG) qui sera le plus efficace des estimateurs linéaires sans biais (de variance minimale)

4.

$$\hat{a}_{MCG} = (X'\Gamma^{-1}X)^{-1}(X'\Gamma^{-1}Y)$$

- $\Gamma = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 9 & 0\\0 & 0 & 4\end{pmatrix} \Leftrightarrow \Gamma^{-1} = \begin{pmatrix}1^{-1} & 0 & 0\\0 & 9^{-1} & 0\\0 & 0 & 4^{-1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & \frac{1}{9} & 0\\0 & 0 & \frac{1}{4}\end{pmatrix} = \frac{1}{36}\begin{pmatrix}36 & 0 & 0\\0 & 4 & 0\\0 & 0 & 9\end{pmatrix}$

- $X'\Gamma^{-1}X = \begin{pmatrix}3 & 7 & 11\end{pmatrix} \times \left[\frac{1}{36}\begin{pmatrix}36 & 0 & 0\\0 & 4 & 0\\0 & 0 & 9\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}3\\7\\11\end{pmatrix} = \frac{1}{36}\begin{pmatrix}108 & 28 & 99\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\7\\11\end{pmatrix}$

$$X'\Gamma^{-1}X = \frac{1609}{36} \Leftrightarrow (X'\Gamma^{-1}X)^{-1} = \frac{36}{1609}$$

- $X'\Gamma^{-1}Y = \begin{pmatrix}3 & 7 & 11\end{pmatrix} \times \left[\frac{1}{36}\begin{pmatrix}36 & 0 & 0\\0 & 4 & 0\\0 & 0 & 9\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}6\\13\\23\end{pmatrix} = \frac{1}{36}\begin{pmatrix}108 & 28 & 99\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\13\\23\end{pmatrix}$

$$X'\Gamma^{-1}Y = \frac{3289}{36}$$

$$\hat{a}_{MCG} = (X'\Gamma^{-1}X)^{-1}(X'\Gamma^{-1}Y) = \frac{36}{1609} \times \frac{3289}{36}$$

$$\boxed{\hat{a}_{MCG} = \frac{3289}{1609} = 2,04}$$

5.

- $\hat{a}_{MCG} = (X'\Gamma^{-1}X)^{-1}(X'\Gamma^{-1}Y) = (X'\Gamma^{-1}X)^{-1}[X'\Gamma^{-1}(Xa+\mathcal{E})] = (X'\Gamma^{-1}X)^{-1}[(X'\Gamma^{-1}X)a + X'\Gamma^{-1}\mathcal{E}]$

$$\hat{a}_{MCG} = (X'\Gamma^{-1}X)^{-1}(X'\Gamma^{-1}X)a + (X'\Gamma^{-1}X)^{-1}X'\Gamma^{-1}\mathcal{E} = a + (X'\Gamma^{-1}X)^{-1}X'\Gamma^{-1}\mathcal{E}$$

$$\boxed{\hat{a}_{MCG} = a + (X'\Gamma^{-1}X)^{-1}X'\Gamma^{-1}\mathcal{E} = a + N\mathcal{E}, \text{où } N = (X'\Gamma^{-1}X)^{-1}X'\Gamma^{-1}}$$

- $E(\hat{a}_{MCG}) = E(a + N\mathcal{E}) = a + N\underbrace{E(\mathcal{E})}_{0_{3\times 1}}$

$$\boxed{E(\hat{a}_{MCG}) = a\,, \hat{a}_{MCG} \text{ sans biais de } a}$$

- $V(\hat{a}_{MCG}) = V(a + N\mathcal{E}) = V(N\mathcal{E}) = NV(\mathcal{E})N' = N\Gamma N' = [(X'\Gamma^{-1}X)^{-1}X'\Gamma^{-1}]\Gamma[(X'\Gamma^{-1}X)^{-1}X'\Gamma^{-1}]'$

$$V(\hat{a}_{MCG}) = (X'\Gamma^{-1}X)^{-1}X'\Gamma^{-1}\Gamma[(\Gamma')^{-1}(X')'((X'\Gamma^{-1}X)')^{-1}] = (X'\Gamma^{-1}X)^{-1}X'[\Gamma^{-1}X(X'(\Gamma')^{-1}X)^{-1}]$$

$$V(\hat{a}_{MCG}) = (X'\Gamma^{-1}X)^{-1}(X'\Gamma^{-1}X)(X'\Gamma^{-1}X)^{-1}$$

$$\boxed{V(\hat{a}_{MCG}) = (X'\Gamma^{-1}X)^{-1} = \frac{36}{1609} = 0,02}$$

$$\boxed{V(\hat{a}_{MCG}) < V(\hat{a}_{MCO}) \text{ d'où } \hat{a}_{MCG} \text{ est l'estimateur le plus efficace}}$$

L'inférence habituelle (comme le test de Student, le test de Fisher) n'est plus valide en raison de l'incohérence dans la matrice de covariance des coefficients de régression estimés. L'hétéroscédasticité est une situation rencontrée fréquemment dans les données, il est donc important de savoir la détecter et la corriger.

Institut de Financement du Développement du Maghreb Arabe
CONCOURS DE RECRUTEMENT DE LA XXIXème PROMOTION
JUILLET 2009

Exercice 9 : (10 points : 1 point par question)

ÉNONCÉ

On considère la relation entre le revenu disponible (R_t) *et la consommation finale* (C_t) *définie par :* $C_t = a + bR_t + \varepsilon_t$; $t = 1, 2, \ldots T$

ε_t *Terme d'erreur vérifiant les hypothèses de la méthode des moindres carrés ordinaires* (*MCO*).

On dispose des informations suivantes : $\bar{C} = 7,5$; $\bar{R} = 8$ *qui désignent respectivement les moyennes empiriques de* C_t *et de* R_t . $V(C) = 2,5$; $V(R) = 4$ *et* $Cov(C, R) = 3$

Qui désignent respectivement les variances empiriques de C_t *et de* R_t *et leur covariance.*

Le nombre d'observations est $T = 30$.

1) *Commenter la relation définie précédemment en précisant les interprétations économiques de a et b*
2) *Déterminer les valeurs numériques des estimateurs des paramètres a et b obtenus par les MCO, notés respectivement* $\hat{a}$ *et* $\hat{b}$.
3) *Prouver que la variance expliquée est égale à* $\hat{b}Cov(C, R)$
4) *En déduire une estimation sans biais de la variance* σ^2 *des erreurs.*
5) *Sous l'hypothèse de la normalité des termes d'erreur, tester au seuil de 5%, la significativité du paramètre b. On rappelle que pour une loi de Student notée S, nous avons approximativement :* $Probabilité[|S| > 2] = 0,05$
6) *On considère à présent que le modèle est définie par :*
$$C_t = a + b_0R_t + b_1R_{t-1} + b_2R_{t-2} + \varepsilon_t \quad avec \ t = 1, 2, \ldots T$$
   i. *Commenter la relation définie précédemment*
   ii. *Donner l'expression des effets de court terme et de long terme d'une variation unitaire du revenu disponible sur la consommation finale ; notés respectivement EC et EL.*
   iii. *On suppose que les paramètres* b_i *vérifient la relation suivante :* $b_i = \theta_0 + \theta_1 i$; *pour* $i = 0, 1$ *et* 2. *Réécrire le modèle en fonction des paramètres* θ_0 *et* θ_1.
   iv. *Exprimer EC et EL en fonction de* θ_0 *et* θ_1 ; *calculer leurs estimateurs*

sachant que $\hat{\theta}_0 = 0,2$ *et* $\hat{\theta}_1 = 0,05$. *Commenter*.

v. *Recalculer EL en fonction de* α *et* b_0 *si l'on admet que* :
$C_t = \alpha C_{t-1} + b_0 R_t + \varepsilon_t$, *avec* $|\alpha| < 1$.

Corrigé

1) *Il s'agit d'une expression de la fonction de consommation keynésienne, la consommation* C_t *dépend, avant tout, du revenu courant disponible (ou revenu disponible)* R_t. *Des facteurs indépendants du revenu courant peuvent agir sur la consommation globale des ménages mais ils sont d'importance minime (le temps, le patrimoine, le niveau des prix, …). Ces facteurs déterminent la consommation incompressible a (consommation autonome au revenu) et b représente la propension marginale à consommer* $(0 < b < 1)$

2)

$$\hat{b} = \frac{\sum_{t=1}^{T}(R_t - \bar{R})(C_t - \bar{C})}{\sum_{t=1}^{T}(R_t - \bar{R})^2} = \frac{Cov(C,R)}{V(R)} = \frac{3}{4} = 0,75$$

$$\hat{a} = \bar{C} - \hat{b}\bar{R} = 7,5 - (0,75 \times 8) = 1,5$$

3)

$$VE = \frac{SCE}{T} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(\hat{C}_t - \bar{\hat{C}}\right)^2 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(\hat{C}_t - \bar{C}\right)^2 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left[(\hat{a} + \hat{b}R_t) - (\hat{a} + \hat{b}\bar{R})\right]^2$$

$$VE = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left[\hat{a} + \hat{b}R_t - \hat{a} - \hat{b}\bar{R}\right]^2 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left[\hat{b}(R_t - \bar{R})\right]^2 = \frac{\hat{b}^2}{T}\sum_{t=1}^{T}(R_t - \bar{R})^2 = \hat{b}^2 V(R) = \hat{b}\underbrace{\hat{b}}_{\frac{Cov(C,R)}{V(R)}} V(R)$$

$$VE = \hat{b}\frac{Cov(C,R)}{V(R)}V(R)$$

$$D'\text{où } \boxed{VE = \hat{b}Cov(C,R)}$$

4)

$$On\ a:\ SCR = SCT - SCE \Leftrightarrow \frac{SCR}{T} = \frac{SCT}{T} - \frac{SCE}{T} \Leftrightarrow VR = VT - VE$$

$$Or\ VT = \frac{SCT}{T} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(\hat{C}_t - \bar{C}\right)^2 = V(C) = 2,5$$

$$Et\ VE = \hat{b}Cov(C,R) = 0,75 \times 3 = 2,25, ainsi\ VR = VT - VE = 2,5 - 2,25 = 0,25$$

$$Or\ SCR = T \times VR = 30 \times 0,25 = 7,5$$

$$on\ a:\ \hat{\sigma}^2 = \frac{SCR}{T-2} = \frac{7,5}{28} = 0,268$$

5) *Calculons premièrement* $\hat{\sigma}_{\hat{b}}$:

$$\hat{\sigma}_{\hat{b}}^2 = \frac{\hat{\sigma}^2}{\sum_{t=1}^{T}(R_t - \bar{R})^2} = \frac{\hat{\sigma}^2}{TV(R)} = \frac{0,268}{30 \times 4} = 0,0022 \Rightarrow \hat{\sigma}_{\hat{b}} = 0,047$$

Pour tester $H_0: b = 0$ contre $H_a: b \neq 0$, sous un niveau de signification $\alpha = 5\%$

On doit utiliser la statistique de décision suivante :

$$T = \frac{\hat{b} - b}{\hat{\sigma}_{\hat{b}}} \rightsquigarrow \mathcal{T}(30-2), \text{la loi de Student de d.d.l } (28)$$

La règle de décision sera : rejet de H_0 avec un risque de $1^{ère}$ espèce α, si $|T_0| \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(28)$

$$or \begin{cases} |T_0| = \left|\frac{\hat{b} - 0}{\hat{\sigma}_{\hat{b}}}\right| = \left|\frac{0,75}{0,047}\right| = 15,96 \\ t_{1-\frac{\alpha}{2}}(28) = t_{0,975}(28) \cong 2 \end{cases} \Rightarrow |T_0| \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(98)$$

D'où b est significativement non nul au risque de 5% ou encore la variable revenu disponible est significative à 95 %

6)

i. $C_t = a + b_0 R_t + b_1 R_{t-1} + b_2 R_{t-2} + \varepsilon_t$ avec $t = 1,2,\ldots T$

Il s'agit d'un modèle à retards échelonnés où les b_i sont les coefficients de retards.

Ils déterminent la façon dont la consommation finale C_t va répondre à un changement dans les revenus disponibles R_t en reliant le passé et le présent.

ii.

$$L'effet\ du\ court\ terme\ est : EC = \frac{\Delta C_t}{\Delta R_t} = b_0$$

$$L'effet\ de\ long\ terme\ est : EL = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\Delta C_{t+j}}{\Delta R_t} = b_0 + b_1 + b_2$$

iii.

$$\begin{cases} b_i = \theta_0 + \theta_1 i \quad ; \quad i = 0,1 \text{ et } 2 \\ C_t = a + b_0 R_t + b_1 R_{t-1} + b_2 R_{t-2} + \varepsilon_t \end{cases} \Rightarrow C_t = a + \theta_0 R_t + (\theta_0 + \theta_1) R_{t-1} + (\theta_0 + 2\theta_1) R_{t-2} + \varepsilon_t$$

$$\Rightarrow C_t = a + \theta_0 (R_t + R_{t-1} + R_{t-2}) + \theta_1 (R_{t-1} + 2R_{t-2}) + \varepsilon_t$$

iv.

$$EC = b_0 = \theta_0$$

$$EL = \theta_0 + (\theta_0 + \theta_1) + (\theta_0 + 2\theta_1) = 3(\theta_0 + \theta_1)$$

$$Or\ \hat{\theta}_0 = 0,2 \text{ et } \hat{\theta}_1 = 0,05 \Rightarrow \begin{cases} \widehat{EC} = \hat{\theta}_0 = 0,2 \\ \widehat{EL} = 3(\hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_1) = 3(0,2 + 0,05) = 0,75 \end{cases}$$

Sur le court terme une variation revenus disponibles de 1% entraine une variation la consommation finale de l'ordre de 0,2% alors que sur le long terme une variation durable et permanente des revenus disponibles de 1% entraine une variation la consommation finale de l'ordre de 0,75 %.

v.

Dans un modèle dynamique et à retard échelonné, on a : $EL = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\Delta C_{t+j}}{\Delta R_t} = b_0 \underbrace{\sum_{j=0}^{+\infty} \alpha^j}_{\frac{1}{1-\alpha}} = \frac{b_0}{1-\alpha}$

Institut de Financement du Développement du Maghreb Arabe CONCOURS DE RECRUTEMENT DE LA XXXVIème PROMOTION (ASSURANCE) MAI 2016

Exercice 10 : (12 points : 1 +2+2+2+2+3)

ÉNONCÉ

On considère la régression entre le logarithme des exportations (y) et le logarithme de l'investissement industriel (x) pour une période de $T = 24$ années :

$$y_t = \alpha + \beta x_t + \epsilon_t \text{ , } t = 1, 2, \dots, 24$$

où ϵ_t sont des termes aléatoires identiquement et indépendamment distribués d'espérance mathématique zéro et de variance σ^2, α et β sont des paramètres à estimer .

On dispose des statistiques suivantes $\sum_{t=1}^{24} y_t = 81$; $\sum_{t=1}^{24} x_t = 185$; $\sum_{t=1}^{24} (y_t - \overline{y})^2 = 106$;

$\sum_{t=1}^{24} (x_t - \overline{x})^2 = 860$ *et* $\sum_{t=1}^{24} (x_t - \overline{x})(y_t - \overline{y}) = 300$

$\overline{y}$ et $\overline{x}$ sont les moyennes empiriques de y et de x

1) *Donner l'interprétation économique de la relation définie précédemment ainsi que celle des paramètres α et β*

2) *Estimer par la méthode des moindres carrés ordinaires les paramètres α et β, que l'on note $\widehat{\alpha}$ et $\widehat{\beta}$.*

3) *Donner la valeur numérique de l'estimateur sans biais de la variance des termes*

d'erreur, notée $\hat{\sigma}^2$

4) *Calculer la variance estimée de* $\hat{\beta}$. *La variable* x *est-elle significative ? Justifier votre réponse.*

5) *Quelle sera l'expressionde l'estimation du paramètre* β *par la méthode des moindres carrés ordinaires si on oublie que le modèle comporte la constante* α ?

Prouver sue cette dernière estimation de β *est biaisée. Evaluer ce biais.*

6) *En fait un traitement économétrique plus approfondi a permis de trouver le modèle estimé suivant :*

$$\hat{y}_t = 0{,}2y_{t-1} + 0{,}8x_t + 1{,}5$$

Interpréter ce nouveau modèle. Ecrire sa forme en retards échelonnées. Evaluer les effet de x *sur* y *sur le court terme et sur le long terme.*

Corrigé

1)

· *Le modèle étant logarithmique (variations des exportations en fonction des variations des investissements industriels) donc* β *sera l'élasticité des exportations* (y) *par rapport aux investissements industriels.*

· *Pour un investissement industriel unique* $(x = 1 \Rightarrow \ln(x) = 0)$, *on fait correspendre* e^{α} *volume d'exportations*

2)

Les hypothèses de la régression classique étant réalisée donc, en minimisant la somme des carrés des résidus : $\left(\min_{\hat{\alpha},\hat{\beta}} \sum_{t=1}^{n} \hat{\varepsilon}_t^2\right)$, *la méthode des moindres carrés ordinaires fournira les estimateurs non biaisés et convergents de* α *et* β :

$$\begin{cases} \hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x} = \dfrac{1}{T}\left[\left(\sum_{t=1}^{T} y_t\right) - \hat{\beta}\left(\sum_{t=1}^{T} x_t\right)\right] = \dfrac{1}{24}\left[81 - \left(\dfrac{300}{860} \times 185\right)\right] \Rightarrow \boxed{\hat{\alpha} = 0{,}69} \\ \hat{\beta} = \sum_{t=1}^{T}(x_t - \bar{x})(y_t - \bar{y}) \Big/ \sum_{t=1}^{T}(x_t - \bar{x})^2 = \dfrac{300}{860} \Rightarrow \boxed{\hat{\beta} = 0{,}35} \end{cases}$$

3)

$$SCR = \sum_{t=1}^{T} \hat{\varepsilon}_t^2 = \sum_{t=1}^{T}(y_t - \bar{y})^2 - \hat{\beta}^2 \sum_{t=1}^{T}(x_t - \bar{x})^2 = 106 - [(0{,}35)^2 \times 860] \Rightarrow \boxed{SCR = 0{,}65}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{SCR}{T-2} = \frac{0,65}{24-2} \Rightarrow \boxed{\hat{\sigma}^2 = 0,03}$$

4)

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}}^2 = \hat{\sigma}^2 \Big/ \sum_{t=1}^{T}(x_t - \bar{x})^2 = 0,03/860 \Rightarrow \boxed{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}}^2 = 0,35 \times 10^{-4}} \Rightarrow \boxed{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}} = 0,59 \times 10^{-2}}$$

On pourra tester $H_0 : \beta = 0$ *contre* $H_a : \beta \neq 0$, *sous un niveau de signification*

$\alpha = 5\%$

$$T = \frac{\hat{\beta} - \beta}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}}} \sim \mathcal{T}(24-2), \textit{la loi de Student de d.d.l } (22)$$

Règle de décision : on rejette H_0 *avec un risque de première espèce* α, *si* $|T_0| \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(22)$

$$or \begin{cases} |T_0| = \left|\frac{\hat{\beta} - 0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}}}\right| = \left|\frac{0,35}{0,59 \times 10^{-2}}\right| = 59,32 \\ t_{1-\frac{\alpha}{2}}(22) = t_{0,975}(22) = 2,074 \end{cases} \Rightarrow |T_0| \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(22)$$

D'où β *est significativement non nul au risque de* 5% *ou encore la variable* x *est significative sous un seuil de signification* 5%

5)

En oubliant la constante le modèle précédent prendra la forme suivante :

$y_t = bx_t + \epsilon_t$, $t = 1, 2, \dots, 24$

L'estimateur MCO de b *sera :*

$$\boxed{\hat{b} = \sum_{t=1}^{T} x_t y_t \Big/ \sum_{t=1}^{T} x_t^2}$$

En se rappelant de la présence de la constante lors de l'étude des qualités de cet estimateur, on s'aperçoit que :

$$\hat{b} = \frac{\sum_{t=1}^{T} x_t(\alpha + \beta x_t + \epsilon_t)}{\sum_{t=1}^{T} x_t^2} = \frac{\sum_{t=1}^{T}(\alpha x_t + \beta x_t^2 + x_t\epsilon_t)}{\sum_{t=1}^{T} x_t^2} = \frac{\left(\alpha \sum_{t=1}^{T} x_t\right) + \left(\beta \sum_{t=1}^{T} x_t^2\right) + \left(\sum_{t=1}^{T} x_t\epsilon_t\right)}{\sum_{t=1}^{T} x_t^2}$$

$$= \frac{\alpha \sum_{t=1}^{T} x_t}{\sum_{t=1}^{T} x_t^2} + \frac{\beta \sum_{t=1}^{T} x_t^2}{\sum_{t=1}^{T} x_t^2} + \frac{\sum_{t=1}^{T} x_t\epsilon_t}{\sum_{t=1}^{T} x_t^2} = \beta + \alpha\left(\frac{\sum_{t=1}^{T} x_t}{\sum_{t=1}^{T} x_t^2}\right) + \frac{\sum_{t=1}^{T} x_t\epsilon_t}{\sum_{t=1}^{T} x_t^2}$$

Ce qui donne :

$$E(\hat{b}) = E\left(\beta + \alpha\left(\frac{\sum_{t=1}^{T} x_t}{\sum_{t=1}^{T} x_t^2}\right) + \frac{\sum_{t=1}^{T} x_t\epsilon_t}{\sum_{t=1}^{T} x_t^2}\right) = \beta + \alpha E\left(\frac{\sum_{t=1}^{T} x_t}{\sum_{t=1}^{T} x_t^2}\right) + E\left(\frac{\sum_{t=1}^{T} x_t\epsilon_t}{\sum_{t=1}^{T} x_t^2}\right)$$

$$= \beta + \alpha\left(\frac{\sum_{t=1}^{T} x_t}{\sum_{t=1}^{T} x_t^2}\right) + \frac{1}{\sum_{t=1}^{T} x_t^2} E\left(\sum_{t=1}^{T} x_t \epsilon_t\right) = \beta + \alpha\left(\frac{\sum_{t=1}^{T} x_t}{\sum_{t=1}^{T} x_t^2}\right) + \frac{1}{\sum_{t=1}^{T} x_t^2} \sum_{t=1}^{T} E(x_t \epsilon_t)$$

$$= \beta + \alpha\left(\frac{\sum_{t=1}^{T} x_t}{\sum_{t=1}^{T} x_t^2}\right) + \frac{1}{\sum_{t=1}^{T} x_t^2} \sum_{t=1}^{T} x_t \underbrace{E(\epsilon_t)}_{0}$$

$$E(\hat{b}) = \beta + \alpha\left(\frac{\sum_{t=1}^{T} x_t}{\sum_{t=1}^{T} x_t^2}\right)$$

d'où $\hat{b}$ *est biaisé de* β

$$Biais(\hat{b}, \beta) = E(\hat{b}) - \beta = \alpha\left(\frac{\sum_{t=1}^{T} x_t}{\sum_{t=1}^{T} x_t^2}\right)$$

☑ ***Remarque 1 :***

En considérant le modèle sans terme constant $y_t = bx_t + \epsilon_t$, ***on pourra démontrer facilement que*** $\hat{b}$ ***sera sans biais de*** b :

$$\hat{b} = \frac{\sum_{t=1}^{T} x_t(bx_t + \epsilon_t)}{\sum_{t=1}^{T} x_t^2} = \frac{\sum_{t=1}^{T}(bx_t^2 + x_t\epsilon_t)}{\sum_{t=1}^{T} x_t^2} = \frac{\left(b\sum_{t=1}^{T} x_t^2\right) + \left(\sum_{t=1}^{T} x_t\epsilon_t\right)}{\sum_{t=1}^{T} x_t^2} = \frac{b\sum_{t=1}^{T} x_t^2}{\sum_{t=1}^{T} x_t^2} + \frac{\sum_{t=1}^{T} x_t\epsilon_t}{\sum_{t=1}^{T} x_t^2}$$

$$\hat{b} = b + \frac{\sum_{t=1}^{T} x_t\epsilon_t}{\sum_{t=1}^{T} x_t^2}$$

$$E(\hat{b}) = E\left(b + \frac{\sum_{t=1}^{T} x_t\epsilon_t}{\sum_{t=1}^{T} x_t^2}\right) = b + E\left(\frac{\sum_{t=1}^{T} x_t\epsilon_t}{\sum_{t=1}^{T} x_t^2}\right) = b + \frac{1}{\sum_{t=1}^{T} x_t^2} E\left(\sum_{t=1}^{T} x_t\epsilon_t\right) = b + \frac{1}{\sum_{t=1}^{T} x_t^2} \sum_{t=1}^{T} E(x_t\epsilon_t)$$

$$= b + \frac{1}{\sum_{t=1}^{T} x_t^2} \sum_{t=1}^{T} x_t \underbrace{E(\epsilon_t)}_{0}$$

$$E(\hat{b}) = b$$

On pourra aussi démontrer qu'il sera plus efficace que $\hat{\beta}$!

$$\left(\sum_{i=m}^{n} x_i\right)^2 = \sum_{m \le i,j \le n} x_i x_j = \sum_{i=m}^{n}\sum_{j=m}^{n} x_i x_j = \sum_{i=m}^{n} x_i^2 + \sum_{\substack{m \le i,j \le n \\ i \ne j}} x_i x_j = \sum_{i=m}^{n} x_i^2 + 2\sum_{m \le i < j \le n} x_i x_j$$

$$Ainsi : Var(\hat{b}) = E\left(\left(\hat{b} - E(\hat{b})\right)^2\right) = E\left(\left(\hat{b} - b\right)^2\right) = E\left(\left(\frac{\sum_{t=1}^{T} x_t\epsilon_t}{\sum_{t=1}^{T} x_t^2}\right)^2\right)$$

$$= \frac{1}{\left(\sum_{t=1}^{T} x_t^2\right)^2} E\left(\left(\sum_{t=1}^{T} x_t \epsilon_t\right)^2\right) = \frac{1}{\left(\sum_{t=1}^{T} x_t^2\right)^2} E\left(\sum_{t=1}^{T} (x_t \epsilon_t)^2 + 2 \sum_{1 \le t < s \le T} (x_t \epsilon_t)(x_s \epsilon_s)\right)$$

$$= \frac{1}{\left(\sum_{t=1}^{T} x_t^2\right)^2} \sum_{t=1}^{T} E((x_t \epsilon_t)^2) + 2 \sum_{1 \le t < s \le T} E\left((x_t x_s)(\epsilon_t \epsilon_s)\right)$$

$$= \frac{1}{\left(\sum_{t=1}^{T} x_t^2\right)^2} \sum_{t=1}^{T} x_t^2 \underbrace{E\left(\epsilon_t^2\right)}_{\sigma^2} + 2 \sum_{1 \le t < s \le T} x_t x_s \underbrace{E(\epsilon_t \epsilon_s)}_{0} = \frac{\sigma^2\left(\sum_{t=1}^{T} x_t^2\right)}{\left(\sum_{t=1}^{T} x_t^2\right)^2}$$

$$\boxed{Var(\hat{b}) = \frac{\sigma^2}{\sum_{t=1}^{T} x_t^2}}$$

$$Or\ Var(\hat{\beta}) = \frac{\sigma^2}{\sum_{t=1}^{T} (x_t - \bar{x})^2}$$

$$donc\ \frac{Var(\hat{b})}{Var(\hat{\beta})} - 1 = \frac{\sigma^2 / \sum_{t=1}^{T} x_t^2}{\sigma^2 / \sum_{t=1}^{T} (x_t - \bar{x})^2} - 1 = \frac{\sum_{t=1}^{T} (x_t - \bar{x})^2}{\sum_{t=1}^{T} x_t^2} - 1 = \frac{\sum_{t=1}^{T} x_t^2 - T\bar{x}^2}{\sum_{t=1}^{T} x_t^2} - 1$$

$$= \frac{\left(\sum_{t=1}^{T} x_t^2 - T\bar{x}^2\right) - \sum_{t=1}^{T} x_t^2}{\sum_{t=1}^{T} x_t^2} = -\frac{T\bar{x}^2}{\sum_{t=1}^{T} x_t^2} < 0$$

d'où $Var(\hat{b}) < Var(\hat{\beta})$ *et* $\hat{b}$ *sera plus efficace que* $\hat{\beta}$

☑ **Remarque 2 :**

Du fait que $\sum_{t=1}^{T} \hat{\epsilon}_t \neq 0$

· *La décomposition de la variance telle que décrite pour un modèle avec constante n'est plus valable* $(SCT \neq SCE + SCR)$

· *Le coefficient de détermination* R^2 *ne peut plus être lu en termes de proportion de variance expliquée par la régression. Il peut même prendre des valeurs négatives ;* $R^2 \notin [0,1]$

· *Le test de Fisher n'a plus de sens*

· *L'estimateur de la variance de l'erreur et le Student théorique doivent tenir compte des degrés de liberté, c'est-à-dire :* $\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{t=1}^{T} \hat{\epsilon}_t^2}{n-1}$ *et* $\frac{\hat{\beta} - \beta}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}}} \backsim \mathcal{T}(n-1)$

6)

Il s'agit d'un modèle autorégressif d'ordre 1 , $|0,2|<1$, *donc ce modèle est stable* (*si non , il sera explosif*)

il correspondrait à l'hypothèse que les exportations présente dépendent des investissements industriels observés, et des exportations passés.

Soit l'opérateur de retard L, donc $Ly_t = y_{t-1}$

Ainsi le modèle initialement sous sa forme autorégressif d'ordre 1

$y_t = \mu + \theta y_{t-1} + \beta x_t + u_t$ *deviendra* $y_t = \mu + \theta L y_t + \beta x_t + u_t$

ou encore $(1-\theta L)y_t = \mu + \beta x_t + u_t$, *et en divisant les deux membres par* $1-\theta L$

on arrive a un modèle à retards échelonnés infinis: $y_t = \dfrac{\mu}{1-\theta} + \dfrac{\beta}{1-\theta L}x_t + \dfrac{1}{1-\theta L}u_t$

$$y_t = \frac{1,5}{1-0,2} + \frac{0,8}{1-0,2L}x_t + \frac{1}{1-0,2L}\hat{u}_t \Rightarrow y_t = 1,875 + \frac{0,8}{1-0,2L}x_t + \frac{1}{1-0,2L}\hat{u}_t$$

ou bien en terme de sommes infinies: $y_t = \dfrac{\mu}{1-\theta} + \beta\sum_{i=0}^{+\infty}\theta^i x_{t-i} + \sum_{i=0}^{+\infty}\theta^i u_{t-i}$

L'effet du court terme est : $ECT = \dfrac{\Delta y_t}{\Delta x_t} = \beta \Rightarrow \widehat{ECT} = \hat{\beta} = 0,8$

Sur le court terme une variation des investissements industriels de 1% *entraine une variation des exportations de l'ordre de* $0,8\%$

L'effet de long terme est : $ELT = \sum_{j=0}^{+\infty}\dfrac{\Delta y_{t+j}}{\Delta x_t} = \beta\left[\sum_{j=0}^{+\infty}\theta^j\right] = \dfrac{\beta}{1-\theta} \Rightarrow \widehat{ELT} = \dfrac{\hat{\beta}}{1-\hat{\theta}} = \dfrac{0,8}{1-0,2} = 1$

Sur le long terme une variation durable et permanente des investissements industriels de 1% *entraine une variation des exportations de l'ordre de* 1%.

BEN AHMED MOHSEN Téléphone: (+216) 97 619191 / 54 619191
omega.center.cp@gmail.com https://web.facebook.com/OMEGACENTER2014

Institut de Financement du Développement du Maghreb Arabe
CONCOURS DE RECRUTEMENT D'UNE PROMOTION SPÉCIALE
Dédiée exclusivement au Ministère des Finances Tunisien
Mai 2023

Exercice 11 : *(12 points : 1,5 par question)*

ÉNONCÉ

On note y_t et x_t les logarithmes du Produit Intérieur Brut et des Dépenses publiques d'un pays donné observées à la fin de l'année t pour $t = 1, 2, \dots, T$

Considérons la relation : $y_t = ax_t + b\,x_{t-1} + c + u_t$ *pour* $t = 2, 3, \dots, T$

Où les u_t ont des termes d'erreur indépendants, d'espérance mathématique nulle et de variance σ^2 alors que a, b et c sont des paramètres inconnus.

1-

- **i.** *Quelle est l'interprétation économique de cette relation ?*
  Que désignent les paramètres a, b et c ? Quels sont leurs signes attendus ?
  Justifier votre réponse.
- **ii.** *Expliquer, sans faire de calculs, comment on estime les paramètres a, b et c ainsi que le paramètre σ^2*

2- *Les observations ont permis d'obtenir les estimations par les moindres carrés suivantes :* $\hat{a} = 0,1$; $\hat{b} = 0,4$ *et* $\hat{c} = 0,2$

avec respectivement les rapports de Student associés suivants:

$S(\hat{a}) = 1,5$; $S(\hat{b}) = 5,2$ *et* $S(\hat{c}) = 3$

- **i.** *Etudier la significativité statistique de chacun des coefficients au seuil de risque de* 5%

On rappelle que pour une loi S de Student à T degrés de liberté, on admet pour T élevé que

Probabilité $(-2 \leq S \leq 2) = 0,95$

- **ii.** *Déterminer les estimations des écarts types des paramètres a, b et c*

3- *En fait, la relation initiale est remplacée par la spécification suivante :*
$y_t = \alpha y_{t-1} + ax_t + c + u_t$; *pour* $t = 2, 3, \dots, T$
avec α un paramètre de module inférieur strictement à 1.

- **i.** *Quelle est la nature du nouveau modèle ? Préciser brièvement son apport pour l'analyse économique de la relation considérée.*
- **ii.** *Les valeurs numériques des estimations de α et a sont :* $\hat{\alpha} = 0,5$ *et* $\hat{a} = 0,4$

Adresse : 2, Rue Ibn Arafa, av de l'environnement Manouba Centre, Manouba

Déterminer le multiplicateur de court et de long terme des dépenses publiques sur le PIB

iii. *En posant* $\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$ *et* $\Delta x_t = x_t - x_{t-1}$ *Prouver que l'on peut réécrire le nouveau modèle en reliant* Δy_t *à* Δx_t *d'une part et à une combinaison linéaire retardée entre* y_{t-1} *et* x_{t-1} *d'autre part*

iv. *Interpréter cette dernière écriture en termes de mécanisme de correction des erreurs à court terme.*

Corrigé

1-

i.

$$\ln(PIB_t) = c + a\ln(G_t) + b\ln(G_{t-1}) + u_t$$

Ce modèle fournit des éléments sur les relations d'équilibre entre PIB qui est une combinaison linéaire des niveaux des dépenses publiques public, présents et passés, il fournira aussi des estimations sur les variations de l'endettement à court et à long terme par le biais fonction des paramètres les effets de court et de long terme d'une variation du taux d'investissement sur la variation du taux d'endettement public, notés respectivement ECT et ELT

Les trois coefficients sont positifs.

ii.

- $\hat{a}, \hat{b}$ *et* $\hat{c}$ *sont obtenus par la méthode MCO, qui consiste à minimiser*

$$SCR = \sum_{t=2}^{T}(y_t - \hat{y}_t)^2 = \sum_{t=2}^{T}\left(y_t - \hat{c} - \hat{a}x_t + \hat{b}\,x_{t-1}\right)^2$$

- $\hat{\sigma}^2 = \dfrac{SCR}{T-3}$

2-

i.

- *On se propose de tester* $H_0: a = 0$ *contre* $H_a: a \neq 0$, *au risque de* 5%

$$T = \frac{\hat{a} - a}{\hat{\sigma}_{\hat{a}}} \rightsquigarrow \mathcal{T}(T-3), \text{ la loi de Student de d.d.l } (T-3)$$

Règle de décision :

on rejette H_0 *avec un risque de première espèce* α, *si* $|T_0| \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(T-3)$

$$\begin{cases} |T_0| = \left|\frac{\hat{a}-0}{\hat{\sigma}_{\hat{a}}}\right| = \left|\frac{\hat{a}}{\hat{\sigma}_{\hat{a}}}\right| = |S(\hat{a})| = 1,5 \\ t_{1-\frac{\alpha}{2}}(T-3) = t_{0,975}(T-3) = 2 \end{cases}$$

$$|T_0| \ngeq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(T-3)$$

L'effet présent des dépenses publiques sur le PIB courant n'est pas significatif

- *On se propose de tester* $H_0: b = 0$ *contre* $H_a: b \neq 0$, *au risque de* 5%

$$T = \frac{\hat{b}-b}{\hat{\sigma}_{\hat{b}}} \backsim \mathcal{T}(T-3), \text{la loi de Student de d.d.l } (T-3)$$

Règle de décision :

on rejette H_0 *avec un risque de première espèce* α, *si* $|T_0| \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(T-3)$

$$\begin{cases} |T_0| = \left|\frac{\hat{b}-0}{\hat{\sigma}_{\hat{b}}}\right| = \left|\frac{\hat{b}}{\hat{\sigma}_{\hat{b}}}\right| = |S(\hat{b})| = 5,2 \\ t_{1-\frac{\alpha}{2}}(T-3) = t_{0,975}(T-3) = 2 \end{cases}$$

$$|T_0| \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(T-3)$$

L'historique des dépenses publiques est significatif

- *On se propose de tester* $H_0: c = 0$ *contre* $H_a: c \neq 0$, *au risque de* 5%

$$T = \frac{\hat{c}-c}{\hat{\sigma}_{\hat{c}}} \backsim \mathcal{T}(T-3), \text{la loi de Student de d.d.l } (T-3)$$

Règle de décision :

on rejette H_0 *avec un risque de première espèce* α, *si* $|T_0| \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(T-3)$

$$\begin{cases} |T_0| = \left|\frac{\hat{c}-0}{\hat{\sigma}_{\hat{c}}}\right| = \left|\frac{\hat{c}}{\hat{\sigma}_{\hat{c}}}\right| = |S(\hat{c})| = c \\ t_{1-\frac{\alpha}{2}}(T-3) = t_{0,975}(T-3) = 2 \end{cases}$$

$$|T_0| \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(T-3)$$

Le paramètre (c) *est statistiquement significatif*

ii.

- $S(\hat{a}) = \frac{\hat{a}}{\hat{\sigma}_{\hat{a}}} \Leftrightarrow \hat{\sigma}_{\hat{a}} = \frac{\hat{a}}{S(\hat{a})} = 0,067$

- $S(\hat{b}) = \dfrac{\hat{b}}{\hat{\sigma}_{\hat{b}}} \Leftrightarrow \hat{\sigma}_{\hat{b}} = \dfrac{\hat{b}}{S(\hat{b})} = 0,077$

- $S(\hat{c}) = \dfrac{\hat{c}}{\hat{\sigma}_{\hat{c}}} \Leftrightarrow \hat{\sigma}_{\hat{c}} = \dfrac{\hat{c}}{S(\hat{c})} = 0,067$

3-

i.

Il s'agit d'un modèle autorégressif d'ordre 1 avec une variable exogène en plus d'une constante, ce modèle fournira des éléments sur les relations d'équilibre entre PIB qui est une combinaison linéaire des dépenses publiques, présents et passés ainsi que l'historique du PIB, il fournira aussi des estimations sur les variations du PIB à court et à long terme par le biais fonction des paramètres les effets de court et de long terme d'une variation des dépenses publiques sur le PIB, notés respectivement ECT et ELT

ii.

- $ECT = \dfrac{\Delta y_t}{\Delta x_t} = a \Rightarrow \widehat{ECT} = \hat{a} = 0,4$

Sur le court terme une variation des dépenses publiques de 1% entraine une variation du PIB de l'ordre de 0,4%

- $ELT = \sum_{j=0}^{+\infty} \dfrac{\Delta y_{t+j}}{\Delta x_t} = \dfrac{a}{1-\alpha} \Rightarrow \widehat{ELT} = \dfrac{\hat{a}}{1-\hat{\alpha}} = \dfrac{0,4}{1-0,5} = 0,8$

Sur le long terme une variation durable et permanente des dépenses publiques de 1% entraine une variation du PIB de l'ordre de 0,8 %

iii.

En posant $\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$ et $\Delta x_t = x_t - x_{t-1}$ Prouver que l'on peut réécrire

$$\Delta y_t = y_t - y_{t-1} = y_t = \alpha y_{t-1} - y_{t-1} + a x_t + c + u_t = (\alpha - 1) y_{t-1} + a x_t + c + u_t$$

$$\Delta y_t = (\alpha - 1) y_{t-1} + a x_t - a x_{t-1} + a x_{t-1} + c + u_t$$

$$\Delta y_t = (\alpha - 1) y_{t-1} + a \Delta x_t + a x_{t-1} + c + u_t$$

$$\Delta y_t = a \Delta x_t + (\alpha - 1)\left[y_{t-1} + \frac{a}{\alpha - 1} x_{t-1} + \frac{c}{\alpha - 1}\right] + u_t$$

iv.

$$\Delta y_t = ECT \Delta x_t + (\alpha - 1)\left[y_{t-1} - ELT x_{t-1} + \frac{c}{\alpha - 1}\right] + u_t$$

Le MCE, (mécanisme de correction des erreurs à court terme) permet de modéliser conjointement les dynamiques de court terme (représentées par les variables en différence première) et de long terme (représentées par les variables en niveau).

Institut de Financement du Développement du Maghreb Arabe
CONCOURS DE RECRUTEMENT DE LA XLIII^{ème} PROMOTION (BANQUE)
Août 2023

Exercice 12 : (8 points : 1+1+1+1+2+2)

Énoncé

On note respectivement y_t et x_t le prix et le rendement d'un actif financier observé sur un ensemble de T périodes successives. On admet que les rendements x_t sont indépendants et suivent chacune une loi normale centrée et de variance égale à $t\sigma^2$ pour $t = 1, 2, \dots, T$ où σ^2 est un paramètre positif inconnu.

1- Quelle est l'interprétation économique de l'hypothèse faite sur la variance de x_t ? Commenter.
2- Quelle est la relation entre x_t, y_t et y_{t-1} ? En déduire l'expression de y_t en fonction de $x_t, x_{t-1}, \dots, x_1$ et la valeur initiale y_0
3- Déterminer la densité de probabilité de x_t, ainsi que la densité de l'échantillon $(x_1, x_2, \dots, x_T)$
4- Déterminer $\hat{\sigma}^2$ l'estimation de σ^2 par la méthode de maximum de vraisemblance.
5- Prouver que $T\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}$ est une loi de Khi-deux à un nombre de degrés de liberté à préciser. En déduire que l'estimateur $\hat{\sigma}^2$ est sans biais.
6- Expliquer brièvement, sans faire de calcul, comment on peut définir un intervalle de confiance de σ^2 pour un niveau de confiance donné.

Corrigé

1-

Cette hypothèse stipule que la volatilité des actions est proportionnelle au facteur temps, pour deux instants t et t' tels que $t < t'$ on obtient $t\sigma^2 < t'\sigma^2$. En effet cette volatilité augmente en fonction du temps

2-

$$y_t - y_{t-1} = \alpha + \beta x_t + u_t$$

- $y_1 - y_0 = \alpha + \beta x_1 + u_1$
- $y_2 - y_1 = \alpha + \beta x_2 + u_2$
- $y_3 - y_2 = \alpha + \beta x_3 + u_3$
- $\vdots$
- $y_t - y_{t-1} = \alpha + \beta x_t + u_3$

$On\ obtient$ à $la\ fin$: $y_t = t\alpha + y_0 + \beta(x_1 + x_2 + \cdots + x_t) + (u_1 + u_2 + \cdots + u_t)$

3-

$$X_t \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, t\sigma^2) \Leftrightarrow f_{X_t}(x_t, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\ t\sigma^2}} e^{-\frac{x_t^2}{2t\sigma^2}}$$

La fonction de vraisemblance de l'échantillon sera :

$$L(x_t, \sigma^2) = \prod_{t=1}^{T} f_{X_t}(x_t, \sigma^2) = \prod_{t=1}^{T} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\ t\sigma^2}} e^{-\frac{x_t^2}{2t\sigma^2}} \right]$$

$$L(x_t, \sigma^2) = \left(\prod_{t=1}^{T} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \right) \left(\prod_{t=1}^{T} t^{-\frac{1}{2}} \right) \left(\prod_{t=1}^{T} \sigma^{-1} \right) \left(\prod_{t=1}^{T} e^{-\frac{x_t^2}{2t\sigma^2}} \right)$$

$$L(x_t, \sigma^2) = (2\pi)^{-\frac{T}{2}} \left(\prod_{t=1}^{T} t \right)^{-\frac{1}{2}} \sigma^{-T} \exp\left[\sum_{t=1}^{T} -\frac{x_t^2}{2t\sigma^2} \right]$$

$$\boxed{L(x_t, \sigma^2) = (2\pi)^{-\frac{T}{2}} (T!)^{-\frac{1}{2}} \sigma^{-T} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=1}^{T} \frac{x_t^2}{t} \right]}$$

4-

La fonction log-vraisemblance sera :

$$\ln\left(L(x_t, \sigma^2)\right) = -\frac{T}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\ln(T!) - T\ln(\sigma) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=1}^{T} \frac{x_t^2}{t}$$

Calculons les dérivées partielles premières et secondes de $\ln[L(x_i, \theta)]$ *par rapport* à *la variable* σ :

$$\frac{\partial \ln[L]}{\partial \sigma} = -\frac{T}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} \sum_{t=1}^{T} \frac{x_t^2}{t} \Rightarrow \frac{\partial^2 \ln[L]}{\partial \sigma^2} = \frac{T}{\sigma^2} - \frac{3}{\sigma^4} \sum_{t=1}^{T} \frac{x_t^2}{t}$$

BEN AHMED MOHSEN Téléphone: (+216) 97 619191 / 54 619191
omega.center.cp@gmail.com https://web.facebook.com/OMEGACENTER2014

$\hat{\sigma}$ *L'EMV de* σ *sera la solution du système suivant :*

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \ln[L]}{\partial\sigma}=0\\ \dfrac{\partial^2 \ln[L]}{\partial\sigma^2}<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\dfrac{T}{\hat{\sigma}}+\dfrac{1}{\hat{\sigma}^3}\displaystyle\sum_{t=1}^{T}\dfrac{x_t^2}{t}=0\\ \dfrac{T}{\hat{\sigma}^2}-\dfrac{3}{\hat{\sigma}^4}\displaystyle\sum_{t=1}^{T}\dfrac{x_t^2}{t}<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{\hat{\sigma}^3}\displaystyle\sum_{t=1}^{T}\dfrac{x_t^2}{t}=\dfrac{T}{\hat{\sigma}}\\ \dfrac{T}{\hat{\sigma}^2}-\dfrac{3}{\hat{\sigma}^4}\displaystyle\sum_{t=1}^{T}\dfrac{x_t^2}{t}<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\displaystyle\sum_{t=1}^{T}\dfrac{x_t^2}{t}=\dfrac{T\hat{\sigma}^3}{\hat{\sigma}}\\ \dfrac{T}{\hat{\sigma}^2}-\dfrac{3}{\hat{\sigma}^4}\displaystyle\sum_{t=1}^{T}\dfrac{x_t^2}{t}<0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{T}\displaystyle\sum_{t=1}^{T}\dfrac{x_t^2}{t}\\ \dfrac{T}{\hat{\sigma}^2}-\dfrac{3}{\hat{\sigma}^4}\underbrace{\displaystyle\sum_{t=1}^{T}\dfrac{x_t^2}{t}}_{T\hat{\sigma}^2}<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{T}\displaystyle\sum_{t=1}^{T}\dfrac{x_t^2}{t}\\ \dfrac{T}{\hat{\sigma}^2}-\dfrac{3T\hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}^4}<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{T}\displaystyle\sum_{t=1}^{T}\dfrac{x_t^2}{t}\\ \dfrac{T}{\hat{\sigma}^2}-\dfrac{3T}{\hat{\sigma}^2}<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{T}\displaystyle\sum_{t=1}^{T}\dfrac{x_t^2}{t}\\ -\dfrac{2T}{\hat{\sigma}^2}<0\,,(vérifiée)\end{cases}$$

$$D'où\ \boxed{\hat{\sigma}^2=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\frac{X_t^2}{t}\ \text{est L'EMV de } \sigma^2}$$

5-

$$X_t \sim \mathcal{N}(0,t\sigma^2)\Rightarrow\frac{X_t-0}{\sqrt{t\sigma^2}}\sim\mathcal{N}(0,1)\Rightarrow\frac{X_t^2}{t\sigma^2}\sim\chi^2(1)$$

Or les $(X_t)_{1\le t\le T}$ *sont i.i.d de la loi* $\mathcal{N}(0,t\sigma^2)$ *donc* $\left(\dfrac{X_t^2}{t\sigma^2}\right)_{1\le t\le T}$ *sont i.i.d de la loi* $\chi^2(1)$

$$et\ \sum_{t=1}^{T}\frac{X_t^2}{t\sigma^2}\sim\chi^2(T)\Rightarrow\frac{1}{\sigma^2}\underbrace{\sum_{t=1}^{T}\frac{X_t^2}{t}}_{T\hat{\sigma}^2}\sim\chi^2(T)$$

$$D'où\ \boxed{T\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(T)}$$

Biais :

$$T\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(T)\Rightarrow E\left(T\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}\right)=T$$

$$E\left(T\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}\right)=T\Leftrightarrow\frac{T}{\sigma^2}E(\hat{\sigma}^2)=T$$

$$D'où\ \boxed{E(\hat{\sigma}^2)=\sigma^2\ et\ \hat{\sigma}^2\ Sans\ biais\ de\ \sigma^2}$$

6-

On se propose de construire un intervalle de confiance de niveau $1-\alpha=$ *pour* σ^2

Adresse : 2, Rue Ibn Arafa, av de l'environnement Manouba Centre, Manouba

en prenant des risques symétriques.

$$On\ a\ P\left(k_1 \le T\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \le k_2\right) = 1-\alpha$$

$$Ce\ qui\ donne : \begin{cases} P\left(T\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} < k_1\right) = \frac{\alpha}{2} \\ P\left(T\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} > k_2\right) = \frac{\alpha}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P\left(T\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} < k_1\right) = \frac{\alpha}{2} \\ P\left(T\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \le k_2\right) = 1-\frac{\alpha}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(T) \\ k_2 = \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(T) \end{cases}$$

$$Par\ la\ suite:\ P\left(\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(T) \le T\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \le \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(T)\right) = 1-\alpha \Leftrightarrow P\left(\frac{1}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(T)} \le \frac{\sigma^2}{T\hat{\sigma}^2} \le \frac{1}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(T)}\right) = 1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{T\hat{\sigma}^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(T)} \le \sigma^2 \le \frac{T\hat{\sigma}^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(T)}\right) = 1-\alpha$$

D'où la construction de l'intervalle de confiance, bilatéral et symétrique de niveau

$$1-\alpha\ \ pour\ \sigma^2 : \boxed{IC_{1-\alpha}(\theta) = \left[\frac{T\hat{\sigma}^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(T)}, \frac{T\hat{\sigma}^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(T)}\right]}$$

Institut de Financement du Développement du Maghreb Arabe
CONCOURS DE RECRUTEMENT DE LA XLIIIème PROMOTION (BANQUE)
Août 2023

Exercice 13 : (7 points : 1+1+1+1+2+2)

Énoncé

On s'intéresse à la relation entre le niveau de l'inflation et le PIB à travers des observations trimestrielles durant $T = 100$ périodes numérotées par $t = 1, 2, \dots, T$.

Plus précisément, on note $I_t = 1$, si l'inflation augmente durant la période t comparativement à la période précédente ou reste stable et $I_t = 0$, dans le cas où l'inflation baisse. Parallèlement, on note $Q_t = 1$ si le PIB a augmenté $Q_t = 0$ si le PIB diminue.

La distribution statistique conjointe des deux variables binaires I_t et Q_t observées durant *les 100 périodes est définie par le tableau suivant :*

I \ Q	$I = 0$	$I = 1$
$Q = 0$	30	40
$Q = 1$	20	10

1- *Déterminer les deux distributions marginales de Q et de I*
2- *Calculer les moyennes et les variances de ces deux variables*
3- *Comparer les deux distributions conditionnelles de Q sachant $I = 0$ et de Q sachant $I = 1$. Commenter sur le degré de dépendance des deux variables Q et I*
4- *Calculer la covariance entre ces deux variables*
5- *On envisage d'estimer les paramètres d'une régression linéaire de Q en fonction de I et d'une constante.*
Quelles seraient les valeurs estimées par les moindres carrés ordinaires de a et de b, les coefficients de la régression ?
6- *Expliquer pourquoi cette modélisation est inappropriée. Quelle démarche peut-on adopter pour évaluer et modéliser la relation entre les deux variables ?*

Corrigé

1-

I \ Q	$I = 0$	$I = 1$	$\sum$
$Q = 0$	30	40	70
$Q = 1$	20	10	30
$\sum$	50	50	100

Distribution statistique de la variable Q :

Q	$n_{i\bullet}$	$f_{i\bullet}$	$f_{i\bullet}\, Q_i$	$f_{i\bullet} Q_i^2$
$Q = 0$	70	0,7	0	0
$Q = 1$	30	0,3	0,3	0,3
$\sum$	100	1	$\overline{Q} = 0,3$	0,3

Distribution statistique de la variable I :

I	$n_{\bullet j}$	$f_{\bullet j}$	$f_{\bullet j}\, I_j$	$f_{\bullet j} I_j^2$
$I = 0$	50	0,5	0	0
$I = 1$	50	0,5	0,5	0,5
$\sum$	100	1	$\overline{I} = 0,5$	0,5

2-

- $\overline{Q} = \sum_{i=1}^{2} f_{i\bullet}\, Q_i = 0,3$ - $\overline{I} = \sum_{j=1}^{2} f_{\bullet j}\, I_j = 0,5$

- $S_Q^2 = \sum_{i=1}^{2} f_{i\bullet} Q_i^2 - \overline{Q}^2 = 0,21$ - $S_I^2 = \sum_{j=1}^{2} f_{\bullet j} I_j^2 - \overline{I}^2 = 0,25$

3-

$(Q\|I=0)$	n_{i1}	$f_{i/1}$	$f_{i/1}Q_i$
$Q=0$	30	0,6	0
$Q=1$	20	0,4	0,4
$\sum$	50	1	$\bar{Q}_1=0,4$

$(Q\|I=1)$	n_{i2}	$f_{i/2}$	$f_{i/2}Q_i$
$Q=0$	40	0,8	0
$Q=1$	10	0,2	0,2
$\sum$	50	1	$\bar{Q}_2=0,2$

$\bar{Q}_1 \neq \bar{Q}_2 \Longrightarrow$ ***le niveau de l'inflation et le PIB ne sont pas indépendantes***

4-

$$S_{Q,I}=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} f_{ij}Q_iI_j-\bar{Q}\bar{I}$$

$$S_{Q,I}=[(0,3\times 0\times 0)+(0,4\times 0\times 1)+(0,2\times 1\times 0)+(0,1\times 1\times 1)]-(0,3\times 0,5)$$

$$\boxed{S_{Q,I}=-0,05}$$

$S_{Q,I}\neq 0 \Longrightarrow$ ***On retrouve le résultat de la dernière question***

5-

$(M_1): Q_t=\beta_1+\beta_2 I_t+\varepsilon_t \Longrightarrow (\widehat{M}_1): \widehat{Q}_t=\widehat{\beta}_1+\widehat{\beta}_2 I_t$, ***avec*** :

$$\begin{cases}\widehat{\beta}_1=\bar{Q}-\widehat{\beta}_2\bar{I}=0,3+(0,2\times 0,5)=0,4\\ \widehat{\beta}_2=\dfrac{S_{Q,I}}{S_I^2}=-0,2\end{cases}$$

6-

- ***Soit***, $P_t=P(Q_t=1)\Longrightarrow P(Q_t=0)=1-P_t$
- $E(Q_t)=[0\times P(Q_t=0)]+[1\times P(Q_t=1)]=P_t$
- $E(\varepsilon_t)=0\Longrightarrow E(Q_t)=(\beta_1+\beta_2 I_t)$

La variable Q_t ***ne pouvant prendre que deux valeurs*** $(0$ ***et*** $1)$, ***par voie de conséquence***, ***l'erreur*** ε_t ***ne peut donc prendre que deux valeurs*** :

$$\varepsilon_t=\begin{cases}1-(\beta_1+\beta_2 I_t), \text{avec la probabilité}, P_t=P(Q_t=1)\\ -(\beta_1+\beta_2 I_t), \text{avec la probabilité}, 1-P_t\end{cases}$$

$$V(\varepsilon_t)=E(\varepsilon_t^2)=\left[P_t\left(1-(\beta_1+\beta_2 I_t)\right)^2\right]+\left[(1-P_t)\left(-(\beta_1+\beta_2 I_t)\right)^2\right], \text{or } P_t=\beta_1+\beta_2 I_t$$

$$\Longrightarrow V(\varepsilon_t)=E(\varepsilon_t^2)=P_t(1-P_t)^2+(1-P_t)P_t^2=P_t(1-P_t)P_t$$

$$V(\varepsilon_i)=E(\varepsilon_t^2)=P_t(1-P_t)$$

- ***Examinons les problèmes soulevés par l'application d'une méthode des moindres carrés ordinaires afin d'estimer ce modèle.***
  - ***Puisque l'erreur ne peut prendre que deux valeurs, elle suit donc une loi***

discrète, l'hypothèse de normalité des erreurs n'est donc pas vérifiée.

- $V(\varepsilon_i) = E(\varepsilon_t^2) = P_t(1 - P_t)$: *cela implique l'existence d'une hétéroscédasticité.*

Cependant nous ne pouvons pas appliquer la méthode des moindres carrés généralisés car $(P_t = \beta_1 + \beta_2 I_t)$ *dépend des paramètres* β_1 *et* β_2 *du modèle.*

D'où l'impossibilité d'utiliser la méthode MCO.

La démarche à suivre pour résoudre ce problème est la suivante :

- *La variable aléatoire Q est une variable binaire telle que :*

$P(Q_t = 1) = P_t = G(\beta_1 + \beta_2 I_t)$

$$\text{Où } G(x) = \begin{cases} \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \text{ , s'ils'agit d'un modèle Probit} \\ \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{1}{1+e^{-x}} \text{ , s'ils'agit d'un modèle Logit} \end{cases}$$

- *Pour l'estimation, on utilisera la méthode de maximum de vraisemblance :*

$$P(Q_t = q_{ts}) = \begin{cases} [G(\beta_1 + \beta_2 I_t)]^{q_{ts}} [1 - G(\beta_1 + \beta_2 I_t)]^{1-q_{ts}} \text{ , si } q_{ts} \in \{0, 1\} \\ 0, \text{si non} \end{cases}$$

La fonction de vraisemblance de l'échantillon (Q_t) *est alors donnée par :*

$$L(\beta_1, \beta_2, q_{ts}) = \prod_{t=1}^{T} P(Q_t = q_{ts})$$

$$(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) \text{ maximise } L(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, q_{ts}) \Leftrightarrow (\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) \text{ maximise } \ln[L(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, q_{ts})]$$

Institut de Financement du Développement du Maghreb Arabe
CONCOURS DE RECRUTEMENT DE LA XXXVIIIème PROMOTION(BANQUE)
JUILLET 2018

Exercice 14 : (8 points : 1,5+1,5+1+1+1+2)

ÉNONCÉ

Considérons une variable aléatoire ε *suivant une loi normale centrée réduite et* u_t *une suite de variable aléatoires indépendantes centrées réduites.*

On pose : $X_t = u_t + au_{t-1} + a^2u_{t-2} + a^3u_{t-3} + \cdots$ *et* $Y_t = u_t + bu_{t-1} + b^2u_{t-2} + b^3u_{t-3} + \cdots$

$avec, a$ et b $deux$ $scalaires$ $inférieurs$ en $module$ à $l'unité$: $|a| < 1$ et $|b| < 1$ et $Z_t = (-1)^t \varepsilon$

1- $Calculer$ $l'espérance$ $mathématique$ de Z_t, sa $variance$ et les $covariances$ de Z_t et Z_s, $pour$ t et s $entiers$ $positifs$ $quelconques$
2- $Calculer$ $l'espérance$ $mathématique$ de X_t, sa $variance$ et la $covariances$ de X_t $avec$ X_{t-1}
3- $Calculer$ le $coefficient$ de $corrélation$ $linéaire$ $entre$ X_t et Y_t
4-
   i. $Prouver$ que X_t $s'exprime$ en $fonction$ de X_{t-1} et de u_t
   ii. $Quelle$ est la $nature$ $statistique$ du $processus$ X_t ?
5- On $pose$ $S_t = X_t + Y_t$. $Exprimer$ S_t en $fonction$ de S_{t-1} de S_{t-2}, de u_t et u_{t-1}

Corrigé

1)

$\cdot\ E(Z_t) = E((-1)^t \varepsilon) = (-1)^t \underbrace{E(\varepsilon)}_{0} = 0, car\ \varepsilon \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$

$\boxed{E(Z_t) = 0}$

$\cdot\ V(Z_t) = V((-1)^t \varepsilon) = ((-1)^t)^2 \underbrace{V(\varepsilon)}_{1} = (-1)^{2t} = 1, car\ \varepsilon \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$

$\boxed{V(Z_t) = 1}$

$\cdot\ Cov(Z_t, Z_s) = Cov((-1)^t \varepsilon, (-1)^s \varepsilon) = (-1)^t (-1)^s \underbrace{Cov(\varepsilon,\varepsilon)}_{V(\varepsilon)} = (-1)^{t+s} \underbrace{V(\varepsilon)}_{1} = (-1)^{t+s}$

$Ainsi$: $\boxed{Cov(Z_t, Z_s) = \begin{cases} 1, si\ t = s \\ (-1)^{t+s}, si\ t \neq s \end{cases}}$

2) $(u_t)_{t\in\mathbb{N}}$ est une $suite$ $v.a.$ $indépendantes$ $centrées$ $réduites$ $\Rightarrow E(u_t) = 0$ et

$Cov(u_t, u_s) = \begin{cases} 1, si\ t = s \\ 0, si\ t \neq s \end{cases}$

$\cdot\ E(X_t) = E\left(\sum_{j=0}^{+\infty} a^j u_{t-j}\right) = \sum_{j=0}^{+\infty} E(a^j u_{t-j}) = \sum_{j=0}^{+\infty} a^j \underbrace{E(u_{t-j})}_{0} = 0$

$\boxed{E(X_t) = 0}$

$\cdot\ (u_t)_{t\in\mathbb{N}}$ est une $suite$ $v.a.$ $indépendantes$ $centrées$ $réduites$ $\Rightarrow E(u_t) = 0$ et

$Cov(u_t, u_s) = \begin{cases} 1, si\ t = s \\ 0, si\ t \neq s \end{cases}$, par la $suite$ $(a^j u_{t-j})_{t\in\mathbb{N}, j\in\mathbb{N}}$ $reste$ $aussi$ une $suite$ $v.a.$

$indépendantes$

$$Ainsi\ ,V(X_t) = V\left(\sum_{j=0}^{+\infty} a^j u_{t-j}\right) = \sum_{j=0}^{+\infty} V(a^j u_{t-j}) = \sum_{j=0}^{+\infty} a^{2j} \underbrace{V(u_{t-j})}_{1} = \sum_{j=0}^{+\infty} (a^2)^j = \frac{1}{1-a^2}\ ,car\ |a| < 1$$

$$\boxed{V(X_t) = \frac{1}{1-a^2}}$$

$$\cdot\ Cov(X_t, X_{t-1}) = Cov\left(\left(\sum_{j=0}^{+\infty} a^j u_{t-j}\right), \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a^k u_{t-k-1}\right)\right) = \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} a^j a^k Cov(u_{t-j}, u_{t-k-1})$$

$$Or, Cov(u_{t-j}, u_{t-k-1}) = \begin{cases} 1, si\ t-j = t-k-1 \\ 0\ , si\ t-j \neq t-k-1 \end{cases} = \begin{cases} 1, si\ j = k+1 \\ 0\ , si\ j \neq k+1 \end{cases}$$

$$Par\ la\ suite, Cov(X_t, X_{t-1}) = \sum_{k=0}^{+\infty} a^{k+1} a^k = a\sum_{k=0}^{+\infty} a^{2k} = a\sum_{k=0}^{+\infty} (a^2)^k = a\left(\frac{1}{1-a^2}\right)\ ,car\ |a| < 1$$

$$\boxed{Cov(X_t, X_{t-1}) = \frac{a}{1-a^2}}$$

3)

$$\cdot\ Cov(X_t, Y_t) = Cov\left(\left(\sum_{j=0}^{+\infty} a^j u_{t-j}\right), \left(\sum_{k=0}^{+\infty} b^k u_{t-k}\right)\right) = \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} a^j b^k Cov(u_{t-j}, u_{t-k})$$

$$Or, Cov(u_{t-j}, u_{t-k}) = \begin{cases} 1, si\ t-j = t-k \\ 0\ , si\ t-j \neq t-k \end{cases} = \begin{cases} 1, si\ j = k \\ 0\ , si\ j \neq k \end{cases} = \begin{cases} 1, si\ j = k \\ 0\ , si\ j \neq k \end{cases}$$

$$Par\ la\ suite, Cov(X_t, Y_t) = \sum_{k=0}^{+\infty} (ab)^k = \frac{1}{1-ab}\ ,car\ (|a| < 1\ et\ |b| < 1) \Rightarrow |ab| < 1$$

$$\boxed{Cov(X_t, Y_t) = \frac{1}{1-ab}}$$

$\cdot\ (u_t)_{t\in\mathbb{N}}$ *est une suite v.a. indépendantes centrées réduites* $\Rightarrow E(u_t) = 0$ *et*

$Cov(u_t, u_s) = \begin{cases} 1, si\ t = s \\ 0\ , si\ t \neq s \end{cases}$ *, par la suite* $(a^j u_{t-j})_{t\in\mathbb{N}, j\in\mathbb{N}}$ *reste aussi une suite v.a.*

indépendantes

$$Ainsi\ ,V(Y_t) = V\left(\sum_{j=0}^{+\infty} b^j u_{t-j}\right) = \sum_{j=0}^{+\infty} V(b^j u_{t-j}) = \sum_{j=0}^{+\infty} b^{2j} \underbrace{V(u_{t-j})}_{1} = \sum_{j=0}^{+\infty} (b^2)^j = \frac{1}{1-b^2}\ ,car\ |b| < 1$$

$$\boxed{V(Y_t) = \frac{1}{1-b^2}}$$

$$\cdot\ \rho_{X_t,Y_t} = \frac{Cov(X_t,Y_t)}{\sqrt{V(X_t)V(Y_t)}} = \frac{\frac{1}{1-ab}}{\sqrt{\left(\frac{1}{1-b^2}\right)\left(\frac{1}{1-a^2}\right)}} = \frac{\frac{1}{1-ab}}{\frac{1}{\sqrt{(1-b^2)(1-a^2)}}} = \frac{\sqrt{(1-b^2)(1-a^2)}}{1-ab}$$

$$\boxed{\rho_{X_t,Y_t} = \frac{\sqrt{(1-b^2)(1-a^2)}}{1-ab}}$$

4)

i.

$$\begin{cases} X_t = u_t + au_{t-1} + a^2u_{t-2} + a^3u_{t-3} + \cdots = \sum_{j=0}^{+\infty} a^j u_{t-j} \\ X_{t-1} = u_{t-1} + au_{t-2} + a^2u_{t-3} + a^3u_{t-4} + \cdots = \sum_{j=0}^{+\infty} a^j u_{t-j-1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow aX_{t-1} = au_{t-1} + a^2u_{t-2} + a^3u_{t-3} + a^4u_{t-4} + \cdots = a\sum_{j=0}^{+\infty} a^j u_{t-j-1} = \sum_{j=0}^{+\infty} a^{j+1} u_{t-(j+1)} = \sum_{k=1}^{+\infty} a^k u_{t-k}$$

$$\Rightarrow aX_{t-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} a^k u_{t-k} = \sum_{j=1}^{+\infty} a^j u_{t-j} = \left(\sum_{j=0}^{+\infty} a^j u_{t-j}\right) - a^0u_{t-0} = \left(\sum_{j=0}^{+\infty} a^j u_{t-j}\right) - u_t$$

$$\Rightarrow aX_{t-1} = X_t - u_t$$

$$\boxed{X_t = aX_{t-1} + u_t}$$

☑ ***Remarque*** : *On pourra retrouver d'une autre manière le résultat de 2) :*

$$Cov(X_t,X_{t-1}) = \frac{a}{1-a^2}$$

$$\cdot\ X_t = aX_{t-1} + u_t \Leftrightarrow X_{t-1} = \frac{1}{a}(X_t - u_t)$$

Par la suite,

$$\cdot\ Cov(X_t,X_{t-1}) = Cov\left(X_t, \frac{1}{a}(X_t - u_t)\right) = \frac{1}{a}Cov(X_t,(X_t-u_t))$$

$$= \frac{1}{a}[Cov(X_t,X_t) - Cov(X_t,u_t)] = \frac{1}{a}\left[V(X_t) - Cov\left(\sum_{j=0}^{+\infty} a^j u_{t-j}, u_t\right)\right]$$

$$= \frac{1}{a}\left[\frac{1}{1-a^2} - Cov\left(\left(u_t + \sum_{j=1}^{+\infty} a^j u_{t-j}\right), u_t\right)\right]$$

$$=\frac{1}{a}\left[\frac{1}{1-a^2}-Cov(u_t,u_t)-Cov\left(\left(\sum_{j=1}^{+\infty}a^j u_{t-j}\right),u_t\right)\right]$$

$$=\frac{1}{a}\left[\frac{1}{1-a^2}-\underbrace{V(u_t)}_{1}-\sum_{j=1}^{+\infty}a^j Cov(u_{t-j},u_t)\right]$$

$$=\frac{1}{a}\left[\frac{1}{1-a^2}-1-\sum_{j=1}^{+\infty}a^j \underbrace{Cov(u_{t-j},u_t)}_{0}\right],\forall j\geq 1, on\ a\ t-j\neq j\Rightarrow Cov(u_{t-j},u_t)=0$$

$$=\frac{1}{a}\left[\frac{1-1+a^2}{1-a^2}\right]=\frac{1}{a}\left[\frac{a^2}{1-a^2}\right]=\frac{a}{1-a^2}$$

$$\boxed{Cov(X_t,X_{t-1})=\frac{a}{1-a^2}}$$

ii.

· $X_t=aX_{t-1}+u_t\ ,t\in\mathbb{N}$

· *Les* u_t *sont de moyennes nulles* $E(u_t)=0$

· *Les* u_t *homoscédastique, de variance* $V(u_t)=1$

· *Les* u_t *sont non-corrélés,* $Cov(u_t,u_s)=0,\forall t\neq s$

· $|a|<1$ · $\forall r\in\mathbb{N}^*, Cov(X_{t-r},u_t)=0$

Puisque, $\forall r\in\mathbb{N}^*, Cov(X_{t-r},u_t)=Cov\left(\sum_{j=0}^{+\infty}a^j u_{t-r-j}\ ,u_t\right)=\sum_{j=0}^{+\infty}a^j \underbrace{Cov(u_{t-r-j},u_t)}_{0}=0$

$\forall r\in\mathbb{N}^*,\forall j\in\mathbb{N}, on\ a:\ t-r-j\neq t\Rightarrow Cov(u_{t-r-j},u_t)=0$

Il s'agit, donc d'un processus autorégressif d'ordre 1 stationnaire : $AR(1)$.

5)

On a démontré que: $X_t=aX_{t-1}+u_t$ *, on démontre de la même manière que :* $Y_t=bY_{t-1}+u_t$

$$\cdot\begin{cases}Y_t=u_t+bu_{t-1}+b^2u_{t-2}+b^3u_{t-3}+\cdots=\sum_{j=0}^{+\infty}b^ju_{t-j}\\ Y_{t-1}=u_{t-1}+bu_{t-2}+b^2u_{t-3}+b^3u_{t-4}+\cdots=\sum_{j=0}^{+\infty}b^ju_{t-j-1}\end{cases}$$

$$\Rightarrow bY_{t-1}=bu_{t-1}+b^2u_{t-2}+b^3u_{t-3}+b^4u_{t-4}+\cdots=b\sum_{j=0}^{+\infty}b^ju_{t-j-1}=\sum_{j=0}^{+\infty}b^{j+1}u_{t-(j+1)}=\sum_{k=1}^{+\infty}b^ku_{t-k}$$

$$\Rightarrow bY_{t-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} b^k u_{t-k} = \sum_{j=1}^{+\infty} b^j u_{t-j} = \left(\sum_{j=0}^{+\infty} b^j u_{t-j}\right) - b^0 u_{t-0} = \left(\sum_{j=0}^{+\infty} b^j u_{t-j}\right) - u_t$$

$$\Rightarrow bY_{t-1} = Y_t - u_t$$

$$\boxed{Y_t = bY_{t-1} + u_t}$$

$$\begin{cases} X_t = aX_{t-1} + u_t \\ Y_t = bY_{t-1} + u_t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_t + bX_{t-1} = (a+b)X_{t-1} + u_t & (1) \\ Y_t + aY_{t-1} = (a+b)Y_{t-1} + u_t & (2) \end{cases}$$

$(1) + (2) \Rightarrow (X_t + Y_t) + bX_{t-1} + aY_{t-1} = (a+b)(X_{t-1} + Y_{t-1}) + 2u_t$

Or $S_t = X_t + Y_t \Rightarrow S_{t-1} = X_{t-1} + Y_{t-1}$ *et* $S_{t-2} = X_{t-2} + Y_{t-2}$

Par la suite, $(1) + (2) \Rightarrow S_t + (bX_{t-1} + aY_{t-1}) = (a+b)S_{t-1} + 2u_t \quad (3)$

D'autre part, $\begin{cases} X_t = aX_{t-1} + u_t \\ Y_t = bY_{t-1} + u_t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_{t-1} = aX_{t-2} + u_{t-1} \\ Y_{t-1} = bY_{t-2} + u_{t-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} bX_{t-1} = abX_{t-2} + bu_{t-1} & (4) \\ aY_{t-1} = abY_{t-2} + au_{t-1} & (5) \end{cases}$

$$(4) + (5) \Rightarrow bX_{t-1} + aY_{t-1} = ab(X_{t-2} + Y_{t-2}) + (a+b)u_{t-1} = abS_{t-2} + (a+b)u_{t-1}$$

En replaçant $(bX_{t-1} + aY_{t-1})$ *par sa valeur dans* (3)*, on obtient :*

$S_t + abS_{t-2} + (a+b)u_{t-1} = (a+b)S_{t-1} + 2u_t$

D'où : $\boxed{S_t = (a+b)S_{t-1} - abS_{t-2} + 2u_t - (a+b)u_{t-1}}$

Institut de Financement du Développement du Maghreb Arabe
CONCOURS DE RECRUTEMENT DE LA XLème PROMOTION (ASSURANCE)
Mai 2024

Exercice 15 : *(7 points : 0,5+0,5+0,5+1,5+1,5+1,5+1)*

ÉNONCÉ

On considère une variable quantitative y_t *observée dans le temps suivant un modèle autorégressif d'ordre deux (appelé également dynamique)*

$y_t = 0,9y_{t-1} - 0,2y_{t-2} + u_t$ *, pour* $t = 1, 2, \dots, T$

Où u_t *sont des termes d'erreurs indépendants, d'espérance mathématique nulle et de*

BEN AHMED MOHSEN Téléphone: (+216) 97 619191 / 54 619191
omega.center.cp@gmail.com https://web.facebook.com/OMEGACENTER2014

$variance\ \sigma^2$.

$On\ pose:\ x_t = y_t - 0,5y_{t-1}\ et\ z_t = y_t - 0,4y_{t-1}$

1-
   i. $Exprimer\ x_t\ en\ fonction\ de\ x_{t-1}\ et\ de\ u_t$
   ii. $En\ déduire\ que\ la\ variable\ x_t\ est\ autorégressive$
   iii. $Prouver\ que\ pour\ t\ assez\ grand\ x_t\ est\ une\ somme\ infinie\ pondérée\ des\ termes\ d'erreurs\ u_t, u_{t-1}, u_{t-2}, \ldots.$
2- $Reprendre\ les\ questions\ 1\text{-}i., 1\text{-}ii., 1\text{-}iii.\ pour\ la\ variable\ z_t$
3-
   i. $Prouver\ que\ y_t\ est\ une\ somme\ pondérée\ des\ deux\ variables\ x_t\ et\ z_t$
   ii. $En\ déduire\ l'expression\ de\ y_t\ comme\ une\ somme\ infinie\ pondérée\ des\ termes\ d'erreurs\ u_t, u_{t-1}, u_{t-2}, \ldots.$
4- $Calculer\ la\ covariance\ entre\ x_t\ et\ z_t\ .Commenter$

Corrigé

1-
   i.

$On\ a: x_t = y_t - 0,5y_{t-1} \Rightarrow x_{t-1} = y_{t-1} - 0,5y_{t-2}$

$d'autre\ part\ y_t = 0,9y_{t-1} - 0,2y_{t-2} + u_t \Rightarrow \underbrace{y_t - 0,5y_{t-1}}_{x_t} = 0,9y_{t-1} - 0,5y_{t-1} - 0,2y_{t-2} + u_t$

$\Rightarrow x_t = 0,4y_{t-1} - 0,2y_{t-2} + u_t \Rightarrow x_t = 0,4\underbrace{(y_{t-1} - 0,5y_{t-2})}_{x_{t-1}} + u_t$

$D'où: \boxed{x_t = 0,4x_{t-1} + u_t}$

   ii.

· $x_t = 0,4x_{t-1} + u_t\ , t = 1,2,\ldots,T$

· $Les\ u_t\ sont\ de\ moyennes\ nulles\ E(u_t) = 0$

· $Les\ u_t\ homoscédastique, de\ variance\ V(u_t) = \sigma^2$

· $Les\ u_t\ sont\ indépendants, donc\ non\text{-}corrélés, Cov(u_t, u_s) = 0, \forall t \neq s$

· $|0,4| < 1$

· $\forall r \in \mathbb{N}^*, Cov(x_{t-r}, u_t) = 0$

$Il\ s'agit, donc\ d'un\ processus\ autorégressif\ d'ordre\ 1\ stationnaire:\ AR(1).$

$\boxed{\{x_t\} \rightsquigarrow AR(1)}$

iii.

- $x_t = 0,4x_{t-1} + u_t$
- $x_{t-1} = 0,4x_{t-2} + u_{t-1}$
- $x_{t-2} = 0,4x_{t-3} + u_{t-2}$
- $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.$
- $x_2 = 0,4x_1 + u_2$

On obtient, par substitutions successives, la forme suivante :

$$x_t = 0,4(0,4x_{t-2} + u_{t-1}) + u_t = 0,4^2x_{t-2} + 0,4u_{t-1} + u_t = 0,4^2(0,4x_{t-3} + u_{t-2}) + 0,4u_{t-1} + u_t$$

$$x_t = 0,4^3x_{t-3} + 0,4^2u_{t-2} + 0,4u_{t-1} + u_t$$

On démontrera aisément par récurrence que : $x_t = (0,4)^{t-1}x_1 + \sum_{i=0}^{t-2}(0,4)^i u_{t-i}$

Or pour t assez grand, on a : $\lim_{t\to+\infty}(0,4)^{t-1} = 0$

D'où : $\boxed{x_t = \sum_{i=0}^{+\infty}(0,4)^i u_{t-i}}$

2-

- *Exprimer* z_t *en fonction de* z_{t-1} *et de* u_t

On a : $z_t = y_t - 0,4y_{t-1} \Rightarrow z_{t-1} = y_{t-1} - 0,4y_{t-2}$

d'autre part $y_t = 0,9y_{t-1} - 0,2y_{t-2} + u_t \Rightarrow \underbrace{y_t - 0,4y_{t-1}}_{z_t} = 0,9y_{t-1} - 0,4y_{t-1} - 0,2y_{t-2} + u_t$

$$\Rightarrow z_t = 0,5y_{t-1} - 0,2y_{t-2} + u_t \Rightarrow x_t = 0,5\underbrace{(y_{t-1} - 0,4y_{t-2})}_{z_{t-1}} + u_t$$

D'où : $\boxed{z_t = 0,5z_{t-1} + u_t}$

- *Montrons que* $\{z_t\}$ *suit un processus autorégressif d'ordre 1 stationnaire*

- $z_t = 0,5z_{t-1} + u_t$, $t = 1,2,\ldots,T$
- *Les* u_t *sont de moyennes nulles* $E(u_t) = 0$
- *Les* u_t *homoscédastique, de variance* $V(u_t) = \sigma^2$
- *Les* u_t *sont indépendants, donc non-corrélés,* $Cov(u_t, u_s) = 0, \forall t \neq s$
- $|0,5| < 1$
- $\forall r \in \mathbb{N}^*, Cov(z_{t-r}, u_t) = 0$

Il s'agit, donc d'un processus autorégressif d'ordre 1 stationnaire : $AR(1)$.

$\boxed{\{z_t\} \rightsquigarrow AR(1)}$

- *Prouvons que pour t assez grand z_t est une somme infinie pondérée des termes d'erreurs $u_t, u_{t-1}, u_{t-2}, \dots$*

- $z_t = 0,5z_{t-1} + u_t$
- $z_{t-1} = 0,5z_{t-2} + u_{t-1}$
- $z_{t-2} = 0,5z_{t-3} + u_{t-2}$
- … … … … … … … … … ….
- $z_2 = 0,5z_1 + u_2$

On obtient, par substitutions successives, la forme suivante :

$$z_t = 0,5(0,5z_{t-2} + u_{t-1}) + u_t = 0,5^2 z_{t-2} + 0,5u_{t-1} + u_t = 0,5^2(0,5z_{t-3} + u_{t-2}) + 0,5u_{t-1} + u_t$$

$$z_t = 0,5^3 z_{t-3} + 0,5^2 u_{t-2} + 0,5u_{t-1} + u_t$$

On démontrera aisément par récurrence que : $z_t = (0,5)^{t-1} z_1 + \sum_{j=0}^{t-2} (0,5)^j u_{t-j}$

Or pour t assez grand, on a : $\lim_{t \to +\infty} (0,5)^{t-1} = 0$

D'où : $\boxed{z_t = \sum_{j=0}^{+\infty} (0,5)^j u_{t-j}}$

3-

i.

- $\begin{cases} x_t = y_t - 0,5y_{t-1} \ (1) \\ z_t = y_t - 0,4y_{t-1} \ (2) \end{cases}$

$(2) - (1)$: $z_t - x_t = 0,1y_{t-1} \Longrightarrow y_{t-1} = 10(z_t - x_t)$ *et* $y_{t-2} = 10(z_{t-1} - x_{t-1})$

Or $y_t = 0,9y_{t-1} - 0,2y_{t-2} + u_t$ *, par la suite :*

$$y_t = [0,9 \times 10(z_t - x_t)] - [0,2 \times 10(z_{t-1} - x_{t-1})] + u_t$$

$$y_t = 9(z_t - x_t) - 2(z_{t-1} - x_{t-1}) + u_t \ (3)$$

- *On a aussi* : $\begin{cases} x_t = 0,4x_{t-1} + u_t \\ z_t = 0,5z_{t-1} + u_t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_t - u_t = 0,4x_{t-1} \\ z_t - u_t = 0,5z_{t-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{t-1} = 2,5(x_t - u_t) \ (4) \\ z_{t-1} = 2(z_t - u_t) \ (5) \end{cases}$

Avec les relations, $(3) + (4) + (5)$ *on obtient :*

$$y_t = 9(z_t - x_t) - 2\Big(\big(2(z_t - u_t)\big) - \big(2,5(x_t - u_t)\big)\Big) + u_t$$

$$y_t = 9(z_t - x_t) - 2\big((2z_t - 2u_t) - (2,5x_t - 2,5u_t)\big) + u_t$$

$$y_t = 9(z_t - x_t) - \left((4z_t - 4u_t) - (5x_t - 5u_t)\right) + u_t = 9z_t - 9x_t - (4z_t - 4u_t - 5x_t + 5u_t) + u_t$$

$$y_t = 9z_t - 9x_t - 4z_t + 5x_t - u_t + u_t = -4x_t + 5z_t$$

$D'où\ :\ \boxed{y_t = -4x_t + 5z_t}$

ii.

$$On\ a : \begin{cases} x_t = \sum_{i=0}^{+\infty} (0,4)^i u_{t-i} \\ z_t = \sum_{j=0}^{+\infty} (0,5)^j u_{t-j} \\ y_t = -4x_t + 5z_t \end{cases}$$

$$Par\ la\ suite :\ y_t = -4\sum_{i=0}^{+\infty}(0,4)^i u_{t-i} + 5\sum_{j=0}^{+\infty}(0,5)^j u_{t-j} = -4\sum_{j=0}^{+\infty}(0,4)^j u_{t-j} + 5\sum_{j=0}^{+\infty}(0,5)^j u_{t-j}$$

$$En\ effet :\ \boxed{y_t = \sum_{j=0}^{+\infty}[5(0,5)^j - 4(0,4)^j]u_{t-j}}$$

4-

$$\cdot\ Cov(x_t, z_t) = Cov\left(\sum_{i=0}^{+\infty}(0,4)^i u_{t-i}, \sum_{j=0}^{+\infty}(0,5)^j u_{t-j}\right)$$

$Or\ \forall i \neq j\ , on\ a\ (t-i) \neq (t-j)\ par\ la\ suite\ Cov\left((0,4)^i u_{t-i}, (0,5)^j u_{t-j}\right) = 0$

$De\ la\ double\ somme\ on\ ne\ garde\ que\ les\ valeurs\ où\ i\ coïncide\ avec\ j$:

$$Cov(x_t, z_t) = \sum_{i=0}^{+\infty}(0,4)^i(0,5)^i Cov(u_{t-i}, u_{t-i}) = \sum_{i=0}^{+\infty}(0,2)^i \underbrace{V(u_{t-i})}_{\sigma^2} = \sigma^2\sum_{i=0}^{+\infty}(0,2)^i = \frac{\sigma^2}{1-0,2}$$

$$D'où :\ \boxed{Cov(x_t, z_t) = \frac{5\sigma^2}{4}}$$

$$\cdot\ V(x_t) = V\left(\sum_{i=0}^{+\infty}(0,4)^i u_{t-i}\right) = \sum_{i=0}^{+\infty}V((0,4)^i u_{t-i})\ \ car\ les\ (u_t)\ sont\ indépendantes$$

$$V(x_t) = \sum_{i=0}^{+\infty}(0,4)^{2i}V(u_{t-i}) = \sigma^2\sum_{i=0}^{+\infty}(0,16)^i = \frac{\sigma^2}{1-0,16} = \frac{25\sigma^2}{21}$$

$$\cdot\ V(z_t) = V\left(\sum_{i=0}^{+\infty}(0,5)^i u_{t-i}\right) = \sum_{i=0}^{+\infty}V((0,5)^i u_{t-i})\ \ car\ les\ (u_t)\ sont\ indépendantes$$

$$V(z_t) = \sum_{i=0}^{+\infty}(0,5)^{2i}V(u_{t-i}) = \sigma^2\sum_{i=0}^{+\infty}(0,25)^i = \frac{\sigma^2}{1-0,25} = \frac{4\sigma^2}{3}$$

· $\textit{Calculons maintenant le coefficient de corrélation linéaire entre } x_t \textit{ et } z_t$:

$$\rho_{x_t,z_t} = \frac{Cov(x_t,z_t)}{\sqrt{V(x_t)V(z_t)}} = \frac{\frac{5\sigma^2}{4}}{\sqrt{\frac{25\sigma^2}{21}\times\frac{4\sigma^2}{3}}} = \frac{\frac{5\sigma^2}{4}}{\sqrt{\frac{100\sigma^4}{3^2\times 7}}} = \frac{\frac{5\sigma^2}{4}}{\frac{10\sigma^2}{3\sqrt{7}}} = \frac{5\sigma^2}{4}\times\frac{3\sqrt{7}}{10\sigma^2} = \frac{3\sqrt{7}}{8} = 0,99$$

Il y a présence d'une corrélation positive et quasi parfaite entre x_t *et* z_t

$\Longrightarrow z_t = \alpha + \beta x_t$ *et* $\beta > 0$

$$on\ a : \begin{cases} E(z_t) = E(\alpha+\beta x_t) \\ V(z_t) = V(\alpha+\beta x_t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \frac{4\sigma^2}{3} = \beta^2\left(\frac{25\sigma^2}{21}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \frac{4\sigma^2}{3} = \beta^2\left(\frac{25\sigma^2}{21}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta^2 = \frac{28}{25} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = \pm\frac{\sqrt{28}}{5} \end{cases} or\ \beta > 0\ , donc\ \beta = \frac{2\sqrt{7}}{5}$$

$$En\ effet : z_t = \frac{2\sqrt{7}}{5}x_t$$

$$et\ y_t = -4x_t + 5z_t\ entraine\ y_t = -4x_t + 5\left(\frac{2\sqrt{7}}{5}x_t\right)$$

$$D'où : \ y_t = \left(2\sqrt{7}-4\right)x_t$$

BEN AHMED MOHSEN Téléphone: (+216) 97 619191 / 54 619191
omega.center.cp@gmail.com https://web.facebook.com/OMEGACENTER2014

Axe ⑨ : Table des matières

Économétrie Des Séries Temporelles

Adresse : 2, Rue Ibn Arafa, av de l'environnement Manouba Centre, Manouba