

Institut de Financement du Développement du Maghreb Arabe
Concours de Recrutement de la 40^{ème} Promotion - Banque
Techniques Quantitatives

Octobre–2020

Durée : une heure et demie

Cette épreuve comporte deux pages
Aucun document n'est autorisé

Exercice 1 : (5 points : 1 point par question).

La matrice de variances covariances du vecteur constitué des trois variables X , Y et Z est définie par :

$$V \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 7 & -4 \\ 7 & 16 & 0 \\ -4 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

où a est un paramètre inconnu.

1-Calculer la variance de la variable : $Z - Y$

2-Calculer les coefficients de corrélation linéaire entre les deux variables X et Y d'une part et entre les deux variables X et Z d'autre part.

3- En déduire l'ensemble des valeurs possibles du paramètre a

4-Calculer en fonction de a la variance de la variable : $X + Y + Z$

5-Déterminer le paramètre a pour que le coefficient de corrélation linéaire entre les deux variables X et Y soit égal à $\frac{7}{8}$

Exercice 2 : (5 points : 1 point par question)

Deux projets d'investissement indépendants, notés A et B , peuvent générer des gains aléatoires notés respectivement X et Z . La variable X peut prendre deux valeurs $X = 0$ et $X = 1$ avec la même probabilité $\frac{1}{2}$ alors que la distribution de la variable Z est définie par : $P[Z = 0] = P[Z = \frac{1}{2}] = P[Z = 1] = \frac{1}{3}$

1- Calculer la probabilité de l'événement $(X \geq Z)$

2- i- Comparer les espérances mathématiques de X et de Z .

-ii- Calculer les variances des deux variables X et Z . En déduire le projet le moins risqué entre A et B .

3- On veut constituer un projet composé C d'une part α (avec $0 \leq \alpha \leq 1$) du projet A et une part $(1 - \alpha)$ du projet B

i-Déterminer l'espérance mathématique et la variance du gain Y du projet C

ii- Déterminer le valeur de α pour que le projet C soit le moins risqué possible.

Exercice 3 : (10 points : un point par question)

Pour un ensemble de n entreprises, on relie leurs profits y_i (mesurés en logarithme : $y_i = \text{Log}(\text{profit})$) à leurs niveaux de vente x_i (mesurés en logarithme: $x_i = \text{Log}(\text{vente})$) selon l'équation :

$$y_i = a x_i + b + u_i$$

avec u_i des termes d'erreurs indépendants tels que $E(u_i) = 0$ et $V(u_i) = \sigma^2$

1- Interpréter économiquement cette relation en précisant les signes attendus des paramètres a et b

2- Quelle signification économique revêt l'hypothèse σ^2 constante (valeur indépendante de i) ? Quelle hypothèse alternative peut-on envisager ?

Commenter

3- Les observations relatives à $n = 10$ entreprises ont fourni les résultats suivants :

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = 40 \quad \sum_{i=1}^{10} y_i = 50 \quad \sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 170$$

$$\sum_{i=1}^{10} y_i^2 = 262 \quad \sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 207$$

3-1 Calculer

$$\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) ; \quad \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{10} (y_i - \bar{y})^2$$

où

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{n} \quad \text{et} \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{10} y_i}{n}$$

3-2 Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre les variables x et y

3-3 Calculer les estimations de a et de b par les moindres carrés ordinaires

3-4 Dresser le tableau d'analyse de la variance associé à cette régression

3-5 Calculer la variance estimée du paramètre a .

3.6 La variable X est elle -significative ? Justifier votre réponse

3-7 Calculer le coefficient de détermination associé à ce modèle. Commenter ce résultat

3-8 Que se passe-t-il au niveau de l'estimation du paramètre a si on oublie de mettre la constante b dans le modèle étudié ?

