INSTITUT de FINANCEMENT du DEVELOPPEMENT du MAGHREB ARABE

CONCOURS DE RECRUTEMENT de la XXXVII PROMOTION (Banque)

Samedi 27 Août 2016

Epreuve de Méthodes Quantitatives **Corrigé**

********************************

**Exercice 1 :**

**Partie 1**

**1**- On a :

$E(Y_1) = E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) = 0$, et

$E(Y_2) = E(X_1 + 2X_2) = E(X_1) + 2E(X_2) = 0$

$Var(Y_1) = Var(X_1 + X_2) = Var(X_1) + Var(X_2) + 2Cov(X_1,X_2) = 2 + 2c$

$Var(Y_2) = Var(X_1 + 2X_2) = Var(X_1) + 4Var(X_2) + 4Cov(X_1,X_2) = 5 + 4c$

**2**-Nous avons :$Cov(Y_1, Y_2) = Cov(X_1 + X_2, X_1 + 2X_2) = 1 + c + 2c + 2 = 3 + 3c$

La matrice de variance-covariance du vecteur $Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}$est définie par la matrice

$$V = \begin{bmatrix} VY_1 & Cov(Y_1, Y_2) & = & 2 + 2c & 3 + 3c \\ Cov(Y_2, Y_1) & VY_2 & & 3 + 3c & 5 + 4c \end{bmatrix}$$

**3**- Les variables $Y_1$ et $Y_2$ sont des lois normales . Pour qu'elles soient indépendantes, il faut et il suffit que leur covariance soit nulle :

$3 + 3c = 0$, ce qui signifie que $c = -1$

**4**- Pour $c = -1$, $Var(Y_1) = 0$, ce qui signifie que $Y_1$ est une variable certaine nulle du fait que $E(Y_1) = 0$

En fait, pour $c = -1$, les deux variables $X_1$ et $X_2$ ont un coefficient de corrélation =-1, $X_1$ est une fonction affine de $X_2$, comme les espérences sont nulles, cela veut dire que : $X_1 = -X_2$

**Partie 2**

**1** - $B = A^2 - 3A + (2 - \alpha)I =$

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2-\alpha & 0 \\ 0 & 2-\alpha \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1+\alpha & 3\alpha \\ 3 & 4+\alpha \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 3\alpha \\ 3 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2-\alpha & 0 \\ 0 & 2-\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ainsi $B = 0$ pour toute valeur de $\alpha$

**2**-La matrice $A^{-1}$ l'inverse de la matrice $A$ existe si et seulement si son déterminant est différent de zéro, c'est à dire $(2 - \alpha) \neq 0$ ou encore $\alpha \neq 2$

Sous cette condition $A^{-1} = \frac{1}{DetA}$Cofacteurs$A = \frac{1}{2-\alpha}\begin{bmatrix} 2 & -\alpha \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

On vérifie que :

$$A^{-1}A = \frac{1}{2-\alpha}\begin{bmatrix} 2 & -\alpha \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2-\alpha}\begin{bmatrix} 2-\alpha & 0 \\ 0 & 2-\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

**3-** $C = -A + 3\,I = \begin{bmatrix} -1 & -\alpha \\ -1 & -2 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -\alpha \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = (2-\alpha)A^{-1}$

**4-** Pour $\alpha = 2$, la matrice $A$ devient égale à $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Pour $n = 2$, nous avons :

$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 3A = \lambda_2 A$ avec $\lambda_2 = 3$

Pour $n = 3$, nous avons : $A^3 = A^2A = 3AA = 3A^2 = 3(3A) = 9A = 3^2A = \lambda_3 A$ avec $\lambda_3 = 3^2$

Par récurrence, on admet que pour $n$ entier quelconque $n \geq 1$

$A^n = \lambda_n A$, avec $\lambda_n = 3^{n-1}$ cela donne $A^{n+1} = A^nA = \lambda_n AA = \lambda_n A^2 = \lambda_n 3A = \lambda_{n+1}A$ avec $\lambda_{n+1} = 3\lambda_n = 3^n$

**Exercice 2 :**

1. 1-On a $\hat{a} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$

$\hat{b} = \bar{y} - \hat{a}\bar{x} = \frac{198}{20} - 0.8 * \frac{210}{20} = 9.9 - 8.4 = 1.5$

2. $\hat{a} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})y_i}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$du fait que $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})\bar{y} = 0$

Ainsi $\hat{a} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})y_i}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\, y_i$ où $\alpha_i = \dfrac{(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$.

Nous avons : $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = \sum_{i=1}^{n}\dfrac{(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = 0$

et $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})x_i}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} = 1$

**3.** $V(\widehat{a}) = V(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, y_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2\, V(y_i)$ du fait que les $y_i$ sont indépendants. Par ailleurs, puisque $V(y_i) = \sigma^2$, on obtient :

$$V(\widehat{a}) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 = \sigma^2 \sum_{i=1 i}^{n} \frac{(x_i - \overline{x})^2}{[\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2]^2} = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$$

**4.** Le $T$ de Student de $\widehat{a}$ est égal à $\frac{\widehat{a}}{\sigma_{\widehat{a}}} = \frac{0.8}{0.01} = 80$ Cette valeur est nettement supérieure à 2, on refuse l'hypothèse de nullité de $a$

La variable $x$ est alors significative au seuil de 95 %. Le chiffre d'affaire de l'entreprise dépend significativement et positivement des investissements

**5.** Nous avons $\sum_{i=1}^{20}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) = \widehat{a} * \sum_{i=1}^{20}(x_i - \overline{x})^2 = 0.8 * 665 = 532$

D'autre part, nous avons d'après la question 3 que:

$\widehat{\sigma_a^2} = \dfrac{\widehat{\sigma^2}}{\sum_{i=1}^{20}(x_i - \overline{x})^2}$, ce qui donne

$$\widehat{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{20}(x_i - \overline{x})^2 * \widehat{\sigma_a^2} = 665 * (0.01)^2 = 0.0665$$

D'où $\widehat{\sigma} = \sqrt{0.0665} = 0.26$

**6.** On a $\widehat{\sigma^2} = \dfrac{\sum_{i=1}^{20}\widehat{\epsilon_i}^2}{n-2}$ , ce qui entraine que la somme des carrés des résidus $SCR$ est : $\sum_{i=1}^{20}\widehat{\epsilon_i}^2 = 18 * 0.0665 = 1.2$

La somme des carrés expliquée est égale à $SCE = \sum_{i=1}^{20}(\widehat{y_i} - \overline{y})^2 = \sum_{i=1}^{20}(\widehat{a}x_i + \widehat{b} - \widehat{a}\overline{x} - \widehat{b})^2 = \widehat{a}^2 \sum_{i=1}^{20}(x_i - \overline{x})^2 = 0.8^2 * 665 = 425.6$

Le coefficient de détermination

$$R^2 = \frac{SCE}{SC\ Totale} = \frac{SCE}{SCE + SCR} = \frac{425.6}{425.6 + 1.2} = 0.99$$

---