Les matrices

$\mathcal{A}$– 1 • *Une matrice A de taille* $n \times p$ *est ntée :* $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$

$\mathcal{A}$– 2 • *Si* $n = p$ *, la matrice est dite carrée :* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

$\mathcal{A}$– 3 • *Matrices colonnes :* $U = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)'$

$\mathcal{A}$– 4 • *Matrices lignes :* $V = (y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_n) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}'$.

$\mathcal{A}$– 5 • *Dans le cas d'une matrice carrée, les éléments* $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ *sont appelés les éléments diagonaux.*

$\mathcal{A}$– 6 • *Soit A une matrice de taille* $n \times n$*. on dit que A est triangulaire inférieure si ses éléments au dessus de la diagonale sont nuls: si* $i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$ *et* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

$\mathcal{A}$– 7 • *Soit A une matrice de taille* $n \times n$*. On dit que A est triangulaire supérieure si ses éléments en dessous de la diagonale sont nuls : si* $i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$ *et* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

$\mathcal{A}$– 8 • *Une matrice qui est triangulaire inférieure et supérieure à la fois est dite diagonale, c.-à-d. dit* $\forall i \neq j$ *on a :* $a_{ij} = 0$ *et* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = Diag(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$

$\mathcal{A}-9$ • I_n , la matrice identité s'écrit sous la forme : $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

$\mathcal{A}-10$ • Matrice scalaire : $Q = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha \end{pmatrix} = Diag(\alpha, \alpha, \dots, \alpha) = \alpha I_n$

L'addition des matrices

$\mathcal{B}-1$ • Soient A et B deux matrices de taille $n \times p$.
On définit leur somme $C = A + B$, de taille $n \times p$, par: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

$\mathcal{B}-2$ • $A + B = B + A$

$\mathcal{B}-3$ • $A + (B + C) = (A + B) + C$

$\mathcal{B}-4$ • $A + 0_{n\times p} = A$

$\mathcal{B}-5$ • le produit de la matrice A par le scalaire k est noté : $kA = (ka_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}}$

$\mathcal{B}-6$ • $\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall$ A de taille $n \times p$: $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

$\mathcal{B}-7$ • $\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall$ A de taille $n \times p$: $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$

$\mathcal{B}-8$ • Soit A la matrice de taille $n \times p$: $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}} \Rightarrow -A = (-a_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}}$

$\mathcal{B}-9$ • $A + (-A) = 0_{n\times p}$

Le produit matriciel

$\mathcal{C}-1$ • Le produit AB de deux matrices A et B est défini seulement si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de ligne de B. Soit A une matrice de taille $n \times p$:

$A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}}$ et B une matrice de taille $p \times q$: $B = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le p \\ 1\le j\le q}}$.

Alors le produit $C = AB$ est une matrice de taille $n \times q$ dont les éléments

sont définis par : $c_{ij} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$

$\mathcal{C}-2$ • $I_n A = A I_p = A$

$\mathcal{C}-3$ • $A(BC) = (AB)C$

$\mathcal{C}-4$ • $A(B + C) = AB + AC$

$\mathcal{C}-5$ • $(B+C)A = BA + CA$

$\mathcal{C}-6$ • $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

$\mathcal{C}-7$ • $A(\lambda B + \mu C) = \lambda AB + \mu AC$

$\mathcal{C}-8$ • $(\lambda A + \mu B)C = \lambda AC + \mu BC$

$\mathcal{C}-9$ • $A.0 = 0.A = 0$

$\mathcal{C}-10$ • *Le produit des matrices n'est pas nécessairement commutatif.*

On peut avoir : $AB \neq BA$

$\mathcal{C}-11$ • *Il peut arriver que* $AB = 0$ *avec* $A \neq 0$ *et* $B \neq 0$

$\mathcal{C}-12$ • $A^r = \underbrace{AA\ldots A}_{r\ facteurs}$

$\mathcal{C}-13$ • $A^r A^s = A^{r+s}$

$\mathcal{C}-14$ • $(A^r)^s = A^{rs}$

$\mathcal{C}-15$ • $(\lambda A)^r = \lambda^r A^r$; $\lambda \in \mathbb{R}$

$\mathcal{C}-16$ • *Soit A une matrice carrée de taille* $(n \times n)$: $A^0 = I_n$ *et* $A^r = AA^{r-1} = A^{r-1}A$

$\mathcal{C}-17$ • $I_n^r = I_n$

$\mathcal{C}-18$ • *Binôme de Newton: Soient A et B deux matrices carrées de tailles* $(n \times n)$

et telles que A et B commuttent , i.e. $AB = BA$ *alors on a:* $(A+B)^r = \displaystyle\sum_{k=0}^{r} C_r^k A^{r-k} B^k$

$\mathcal{C}-19$ • *Soit* $D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix}$ *une matrice diagonale, alors*

$$D^r = \begin{pmatrix} d_{11}^r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22}^r & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn}^r \end{pmatrix}$$

$\mathcal{C}-20$ • *M est une matrice idempotente si* $\forall\, r \in \mathbb{N}^*, M^r = M$

$\mathcal{C}-21$ • *M est une matrice nilpotente si* $\exists\, r \in \mathbb{N}, M^r = 0$

La transposition

$\mathcal{D}-1$ • *Soit A la matrice de taille* $n \times p$: $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$,

On appelle matrice transposée de A, la matrice $A^T = A'$ *de taille* $p \times n$ *définie par :*

$$A' = (a_{ji})_{\substack{1\leq j\leq p\\ 1\leq i\leq n}} \text{ ou encore : } A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1p} & a_{2p} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

$\mathcal{D}-2$ • $B = A' \Leftrightarrow \forall(i,j) \in [1,n] \times [1,p]: b_{ij} = a_{ji}$

$\mathcal{D}-3$ • *Une matrice A de taille $n \times p$ est dite symétrique si* $\forall(i,j) \in [1,n] \times [1,p]\ ;\ a_{ij} = a_{ji}$

$\mathcal{D}-4$ • *Une matrice A de taille $n \times p$ est dite antisymétrique si*

$\forall(i,j) \in [1,n] \times [1,p]\ ;\ a_{ij} = -a_{ji}$

$\mathcal{D}-5$ • $(A+B)' = A' + B'$

$\mathcal{D}-6$ • $(kA)' = kA'$, où *k est un scalaire*

$\mathcal{D}-7$ • $(AB)' = B'A'$

$\mathcal{D}-8$ • $(ABC)' = C'B'A'$

$\mathcal{D}-9$ • $(A')' = A$

$\mathcal{D}-10$ • $(A')^r = (A^r)'$

La trace

$\mathcal{E}-1$ • *Soit A une matrice carrée de taille $(n \times n)$, on appelle trace de A ,*

et on note trace(A) le nombre obtenu en additionnant les éléments diagonaux de A :

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

$\mathcal{E}-2$ • $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$, *A et B deux matrices carrées de taille* $(n \times n)$

$\mathcal{E}-3$ • $tr(\lambda A) = \lambda t(A)$, *pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$

$\mathcal{E}-4$ • $tr(A') = tr(A)$

$\mathcal{E}-5$ • $tr(AB) = tr(BA)$ *mais* $tr(AB) \neq tr(A)tr(B)$

$\mathcal{E}-6$ • $tr(ABC) = tr(BCA) = tr(CAB)$

Exercice 1 :

Énoncé

Soit D une matrice de dimension (n,p) et $E = D'D$.

Montrer que :

i. *E est symétrique*
ii. $tr(E) = \sum_i \sum_j d_{ij}^2$

Corrigé

i. $E' = (D'D)' = D'(D')' = D'D = E \Rightarrow \boxed{E \text{ est symétrique}}$

ii. Soit $\begin{cases} \Delta = D' \\ \Delta = (\delta_{ij})_{\substack{1\leq i\leq p \\ 1\leq j\leq n}} \end{cases} \Rightarrow \delta_{ij} = d_{ji}$ $(\mathcal{D}-2)$

$Or\ E = D'D = \Delta D,\ avec\ E = (e_{ij})_{\substack{1\leq i\leq p \\ 1\leq j\leq p}}$

$$Ainsi\ e_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik}\, d_{kj} = \sum_{k=1}^{n} d_{ki}\, d_{kj} \quad (\mathcal{C}-1)$$

$$On\ a:\ tr(E) = \sum_{j=1}^{p} e_{jj} = \sum_{j=1}^{p} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} d_{kj}\, d_{kj}}_{e_{jj}} = \sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{n} d_{kj}^2 \quad (\mathcal{E}-1)$$

$$D'où\ \boxed{tr(E) = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} d_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} d_{ij}^2}$$

Inverse d'une matrice carrée

$\mathcal{F}-1$ • *Soit A une matrice carrée de taille $(n\times n)$, on dit que la matrice A est inversible s'il existe une matrice, notée A^{-1} de même format telle que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.*

On appelle A^{-1}, inverse de la matrice A

$\mathcal{F}-2$ • *Soit A une matrice inversible. Alors :*

$$\begin{cases} \mathcal{F}-2/a \bullet A^{-1}\ inversible\ et\ (A^{-1})^{-1} = A \\ \mathcal{F}-2/b \bullet A^{r}\ inversible\ et\ (A^{r})^{-1} = (A^{-1})^{r} = A^{-r} \\ \mathcal{F}-2/c \bullet kA\ inversible\ ,si\ k\neq 0\ et\ (kA)^{-1} = \dfrac{1}{k}A^{-1} \\ \mathcal{F}-2/d \bullet A'\ inversible\ et\ (A')^{-1} = (A^{-1})' \end{cases}$$

$\mathcal{F}-3$ • *Soient A et B deux matrices carrées $(n\times n)$ inversibles. Alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$*

$\mathcal{F}-4$ • *Soient A, B et C trois matrices carrées $(n\times n)$ inversibles.*

Alors ABC est inversible et $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$

$\mathcal{F}-5$ • $D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix}$ *une matrice diagonale inversible si est seulement si* :

$\forall\, i \in [1, n]\ d_{ii} \neq 0$. *Ainsi* $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/d_{nn} \end{pmatrix}$, *en particulier* $I_n^{-1} = I_n$

$\mathcal{F}-6$ • *Soit A une matrice carrée de taille $(n \times n)$, on dit que la matrice A*

est orthogonale, si $A^{-1} = A'$ *ou* $AA' = I_n$

Exercice 2 :

Énoncé

On considère les matrices carrées A, B, C, D, E, F, G *et* H où E *et* F sont non singulières.

Développer le produit de la matrice $X = \{[AB + (CD)'][(EF)^{-1} + GH]\}'$

Corrigé

$$X = \{[AB + (CD)'][(EF)^{-1} + GH]\}' = [(AB + D'C')(F^{-1}E^{-1} + GH)]'$$

$$= (F^{-1}E^{-1} + GH)'(AB + D'C')' = [(F^{-1}E^{-1})' + (GH)'][(AB)' + (D'C')']$$

$$= [(E')^{-1}(F')^{-1} + H'G'][B'A' + (C')'(D')'] = [(E')^{-1}(F')^{-1} + H'G'][B'A' + CD]$$

$$D'\text{où} \quad \boxed{X = [(E')^{-1}(F')^{-1}B'A'] + [(E')^{-1}(F')^{-1}CD] + [H'G'B'A'] + [H'G'CD]}$$

Exercice 3 :

Énoncé

Soit I_3 la matrice identité de dimension $(3,3)$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\forall\, M \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$, *on pose* : $f(M) = DM'D$

1) Montrer que $f(I_3) = I_3$, $f(D) = D$ *et* $f \circ f(M) = M$
2) Montrer que $f(M_1M_2) = f(M_2)f(M_1)$
3) Montrer que si M est inversible, alors $f(M^{-1}) = [f(M)]^{-1}$

Corrigé

1)

$$\cdot\ f(I_3) = DI_3'D = DI_3D = D.D = D^2 = \begin{pmatrix} 1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1^2 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

$$D'\text{où } \boxed{f(I_3) = I_3}$$

$$\cdot\ f(D) = D\underbrace{D'}_{D}D = D^2.D = I_3D = D$$

$$D'\text{où } \boxed{f(D) = D}$$

$$\cdot\ f\circ f(M) = f[f(M)] = D[f(M)]'D = D[DM'D]'D = D\underbrace{D'}_{D}(M')'\underbrace{D'}_{D}D = \underbrace{D^2}_{I_3}M\underbrace{D^2}_{I_3} = I_3MI_3 = M$$

$$D'\text{où } \boxed{f\circ f(M) = M}$$

2) $f(M_1M_2) = D(M_1M_2)'D = DM_2'M_1'D = DM_2'\underbrace{I_3}_{D^2}M_1'D = DM_2'D^2M_1'D = \underbrace{(DM_2'D)}_{f(M_2)}.\underbrace{(DM_1'D)}_{f(M_1)}$

$D'\text{où } \boxed{f(M_1M_2) = f(M_2)f(M_1)}$

3) Si M est inversible :

$f(M^{-1}) = D(M^{-1})'D$

$or\ D^2 = I_3 \Leftrightarrow D.D = I_3 \Leftrightarrow D = D^{-1}$

$Par\ la\ suite\ f(M^{-1}) = D^{-1}(M^{-1})'D^{-1} = D^{-1}(M')^{-1}D^{-1}$ $(\mathcal{F}\text{– }2/\mathrm{d})$

$f(M^{-1}) = (DM'D)^{-1}$ $(\mathcal{F}\text{– }4)$

$D'\text{où } \boxed{f(M^{-1}) = [f(M)]^{-1}}$

Exercice 4 :

Énoncé

$Soient\ A\ et\ B\ des\ matrices\ carrées\ de\ taille\ n\ telles\ que\ I_n - AB\ soit\ inversible.$

$Calculer\ (I_n - BA)(I_n + B(I_n - AB)^{-1}A)$.

$I_n - BA\ Est - elle\ inversible$?

Corrigé

$$\begin{aligned}(I_n - BA)(I_n + B(I_n - AB)^{-1}A) &= I_n^2 + I_nB(I_n - AB)^{-1}A - BAI_n - BAB(I_n - AB)^{-1}A \\ &= I_n + B(I_n - AB)^{-1}A - BA - BAB(I_n - AB)^{-1}A \\ &= I_n - BA + B[(I_n - AB)^{-1}A - AB(I_n - AB)^{-1}A]\end{aligned}$$

$$= I_n - BA + B\left[[(I_n - AB)^{-1} - AB(I_n - AB)^{-1}]A\right]$$

$$= I_n - BA + B[I_n(I_n - AB)^{-1} - AB(I_n - AB)^{-1}]A$$

$$= I_n - BA + B\left[\underbrace{(I_n - AB)(I_n - AB)^{-1}}_{I_n}\right]A$$

$(I_n - AB$ étant inversible$)$

$(I_n - BA)(I_n + B(I_n - AB)^{-1}A) = I_n - BA + BI_nA = I_n - BA + BA = I_n$

D'où $(I_n - BA)(I_n + B(I_n - AB)^{-1}A) = I_n$ et $I_n - BA$ est inversible

$\boxed{\text{Si } I_n - AB \text{ est inversible alors } I_n - BA \text{ l'est aussi et } (I_n - BA)^{-1} = I_n + B(I_n - AB)^{-1}A}$

Déterminants

$\mathcal{G}-1$ • Soit A une matrice carrée de taille $(n \times n)$. Le déterminant de A,

noté $det(A)$ ou $|A|$, est l'élément de $\mathbb{R}$ définit par :

$$\begin{cases} \bullet\ si\ n = 1\ alors\ A = (a_{11})\ et\ det(A) = a_{11} \\ \bullet\ si\ n \geq 2\ alors\ A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}\ et\ \underbrace{det(A) = a_{11}\Delta_{11} - a_{21}\Delta_{21} + a_{31}\Delta_{31} - \cdots + (-1)^{n+1}\, a_{n1}\Delta_{n1}}_{\text{Développement suivant la première colonne}} \end{cases}$$

où Δ_{i1} est le déterminant de la matrice carrée de taille $[(n-1) \times (n-1)]$ obtenue

en enlvant à A la ligne n^o " i " et la première colonne

$\mathcal{G}-2$ • On obtient toujours même résultat en développant selon n'importe quelle ligne

ou selon n'importe quelle colonne :

• si $n \geq 2$, calculons $det(A)$ en développant selon l-ème colonne $\begin{pmatrix} a_{1l} \\ a_{2l} \\ a_{3l} \\ \vdots \\ a_{nl} \end{pmatrix}$:

$$det(A) = (-1)^{1+l}a_{1l}\Delta_{1l} + (-1)^{2+l}a_{2l}\Delta_{2l} + (-1)^{3+l}a_{3l}\Delta_{3l} + \cdots + (-1)^{n+l}\, a_{nl}\Delta_{nl} = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+l}\, a_{il}\Delta_{il}$$

où Δ_{il} est le déterminant de la matrice carrée de taille $[(n-1) \times (n-1)]$ obtenue

en enlvant à A la ligne n^o " i " et la l-ème colonne

• $si\ n \geq 2$,

$calculons\ det(A)\ en\ développant\ selon\ \ k-ème\ ligne\ (a_{k1}\quad a_{k2}\quad a_{k3}\quad \cdots\quad a_{kn})$:

$$det(A) = (-1)^{k+1}a_{k1}\Delta_{k1} + (-1)^{k+2}a_{k2}\Delta_{k2} + (-1)^{k+3}a_{k3}\Delta_{k3} + \cdots + (-1)^{k+n}\, a_{kn}\Delta_{kn}$$

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{k+j}\, a_{kj}\Delta_{kj}$$

où Δ_{kj} $est\ le\ déterminant\ de\ la\ matrice\ carrée\ de\ taille\ [(n-1)\times(n-1)\ ]\ obtenue$

$en\ enlvant$ à $A\ la\ ligne\ n^o$ " k " $et\ la\ j-ème\ colonne$

• $si\ n = 2\ alors\ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\ et\ det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

$\mathcal{G}-3$ • $(-1)^{i+j}\, a_{ij}\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}\, a_{ij}det(A_{ij})\ est\ appelé\ le\ cofacteur\ du\ terme\ a_{ij}$

où A_{ij} $la\ matrice\ obtenue\ en\ enlevant$ à $A\ sa\ i-ième\ ligne\ et\ sa\ j-ième\ colonne.$

$Le\ terme\ \Delta_{ij} = det(A_{ij})\ est\ appelé\ mineur\ du\ terme\ a_{ij}$

$\mathcal{G}-4$ • $Si\ D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix} une\ matrice\ diagonale, alors\ det(D) = \prod_{i=1}^{n} d_{ii}$

$\mathcal{G}-5$ • $Si\ A\ une\ matrice\ triangulaire\ inférieure, A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

$\left(resp. triangulaire\ supérieure, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \right)\ alors\ det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$

$\mathcal{G}-6$ • $Si\ Q = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha \end{pmatrix} est\ une\ matrice\ scalaire, alors\ det(Q) = \alpha^n$

$\mathcal{G}-7$ • $det(I_n) = 1$, où I_n $la\ matrice\ identité\ de\ taille\ (n\times n)$

$\mathcal{G}-8$ • $Si\ A = 0_{n\times n}\ alors\ det(A) = 0$

$\mathcal{G}-9$ • $Si\ M\ est\ une\ matrice\ idempotente, alors\ det(M) \in \{0, 1\}$

$\mathcal{G}-10$ • $Si\ M\ est\ une\ matrice\ nilpotente, alors\ det(M) = 0$

$\mathcal{G}-11$ • $Soit\ A\ une\ matrice\ de\ taille\ (n\times n)$,

A *est inversible si et seulement si* $det(A) \neq 0$ *et* $det(A^{-1}) = 1/det(A)$

G- 12 • *Soient A et B deux matrices de taille* $(n \times n)$. *Alors* $det(AB) = det(A)det(B)$

G- 13 • *Soit A une matrice de taille* $(n \times n)$, $det(A') = det(A)$

G- 14 • *Si on multiplie l'une des lignes (resp. colonnes) par un scalaire* $\lambda \in \mathbb{R}$, *alors*

le déterminant de cette matrice est multiplié par le même élément λ *de* $\mathbb{R}$

G- 15 • *Le déterminant d'une matrice carrée ayant une ligne (resp. une colonne) nulle*

est égale à 0

G- 16 • *Si on échange deux lignes (resp. une colonne) d'une matrice carrée,*

le déterminant est multiplié par (-1)

G- 17 • *Le déterminant d'une matrice carrée ayant deux lignes (resp. une colonne)*

identiques est nul.

G- 18 • *Le déterminant d'une matrice carrée ayant deux lignes (resp. une colonne)*

proportionnelles est nul.

G- 19 • *Le déterminant d'une matrice carrée ayant des lignes (resp. des colonnes)*

linéairement indépendantes est nul.

G- 20 • *Si à une ligne (resp. une colonne) d'une matrice on ajoute le produit d'un scalaire de* $\mathbb{R}$ *par une autre ligne (resp. une colonne), le déterminant est inchangé*

G- 21 • *Soit A une matrice de taille* $(n \times n)$, *dont on note* $L_1, L_2, \dots, L_n$ *les lignes.*

$L_i = (a_{i1} \quad a_{i2} \quad a_{i3} \quad \cdots \quad a_{in})$ *et soit L une ligne (matrices lignes de taille* $(1 \times n)$). *Alors:*

$$\bullet\ det\begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{i-1} \\ L_i \\ L_{i+1} \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} + det\begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{i-1} \\ L \\ L_{i+1} \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{i-1} \\ L_i + L \\ L_{i+1} \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} \qquad \bullet\ det\begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{i-1} \\ L_i \\ L_{i+1} \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} + \lambda det\begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{i-1} \\ L \\ L_{i+1} \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{i-1} \\ [L_i + \lambda L] \\ L_{i+1} \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} ;\ \lambda \in \mathbb{R}$$

G- 22 • *Soit A une matrice de taille* $(n \times n)$, *dont on note* $C_1, C_2, \dots, C_n$ *les colonnes.*

$C_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ a_{3j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ *et soit C une colonne (matrices colonne de taille* $(n \times 1)$). *Alors:*

• $det(C_1 \quad \cdots \quad C_{j-1} \quad C_j \quad C_{j+1} \quad \cdots \quad C_n) + det(C_1 \quad \cdots \quad C_{j-1} \quad C \quad C_{j+1} \quad \cdots \quad C_n)$
$= det(C_1 \quad \cdots \quad C_{j-1} \quad C_j + C \quad C_{j+1} \quad \cdots \quad C_n)$

• $det(C_1 \quad \cdots \quad C_{j-1} \quad C_j \quad C_{j+1} \quad \cdots \quad C_n) + \lambda det(C_1 \quad \cdots \quad C_{j-1} \quad C \quad C_{j+1} \quad \cdots \quad C_n)$
$= det(C_1 \quad \cdots \quad C_{j-1} \quad [C_j + \lambda C] \quad C_{j+1} \quad \cdots \quad C_n)$

$\mathcal{G}-23$ • $\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \lambda a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \lambda a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \lambda a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \lambda a_{np} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{vmatrix} \; ; \lambda \in \mathbb{R}$$

$\mathcal{G}-24$ • *Si A une matrice de taille* $(n \times n)$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$ *alors* $det(\lambda A) = \lambda^n det(A)$

$\mathcal{G}-25$ • *Si A est une matrice orthogonale alors* $det(A) = \pm 1$

$\mathcal{G}-26$ • (*Mineur et Cofacteur*). *Soit A une matrice carrée* $n \times n$: $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$.

On appelle mineur de l'élément a_{ij} *le déterminant de la sous-matrice obtenue en éliminant la i-ème ligne et la j-ème colonne de la matrice A. On le note* Δ_{ij}.

On appelle cofacteur de a_{ij}, *la quantité* $C_{ij} = (-1)^{i+j}\,\Delta_{ij}$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

On définit par la suite la Comatrice (ou la matrice des cofacteurs) de A :

$$Com(A) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix} \text{ tel que } A[Com(A)]' = [Com(A)]'A = det(A) \times I_n$$

Si A inversible alors : $A^{-1} = \dfrac{1}{det(A)}[Com(A)]'$

• $si\ n = 2\ alors\ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ $et\ C_{11} = (-1)^{1+1} \underbrace{\Delta_{11}}_{a_{22}} = a_{22}\ , C_{12} = (-1)^{1+2} \underbrace{\Delta_{12}}_{a_{21}} = -a_{21}$

$C_{21} = (-1)^{2+1} \underbrace{\Delta_{21}}_{a_{12}} = -a_{12}\ et\ C_{22} = (-1)^{2+2} \underbrace{\Delta_{22}}_{a_{11}} = a_{11}$.

$Ainsi, Com(A) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$

$\mathcal{G}-27$ • (*Propriétés de la comatrice*):

$$\begin{cases} \bullet\ Com(I_n) = I_n \\ \bullet\ Com(AB) = Com(A)Com(B)\ , A\ et\ B\ deux\ matrices\ carrées\ de\ taille\ n \times n \\ \bullet\ Com(A') = [Com(A)]' \\ \bullet\ Si\ n\ \geq 2\ , |Com(A)| = |A|^{n-1} \end{cases}$$

$\mathcal{G}-28$ •

Opérations élémentaires	*Déterminant*
$L_i \leftrightarrow L_j\ (i \neq j)$	*multiplié par* (-1)
$C_i \leftrightarrow C_j\ (i \neq j)$	*multiplié par* (-1)
$L_i \leftarrow \lambda L_i$	*multiplié par* λ
$C_i \leftarrow \lambda C_i$	*multiplié par* λ
$L_i \leftarrow \lambda L_i + \sum_{k \neq i} \lambda_k L_k$	*multiplié par* λ
$C_i \leftarrow \lambda C_i + \sum_{k \neq i} \lambda_k C_k$	*multiplié par* λ
$L_i \leftarrow L_i + \sum_{k \neq i} \lambda_k L_k$	*inchangé*
$C_i \leftarrow C_i + \sum_{k \neq i} \lambda_k C_k$	*inchangé*

Exercice 5 :

Énoncé

Calculer et factoriser les déterminants suivants :

$\cdot\ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}$, $\cdot\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix}$, $\cdot\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} (a-b-c) & 2a & 2a \\ 2b & (b-c-a) & 2b \\ 2c & 2c & (c-a-b) \end{vmatrix}$

Corrigé

$$\cdot\ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 & b^3-a^3 \\ 0 & c-b & c^2-b^2 & c^3-b^3 \\ 0 & d-c & d^2-c^2 & d^3-c^3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \end{matrix}$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}1 & a & a^2 & a^3\\ 0 & (b-a) & (b-a)(b+a) & (b-a)(b^2+ba+a^2)\\ 0 & (c-b) & (c-b)(c+b) & (c-b)(c^2+cb+b^2)\\ 0 & (d-c) & (d-c)(d+c) & (d-c)(d^2+dc+c^2)\end{vmatrix}$$

$$\Delta_1=(b-a)(c-b)(d-c)\begin{vmatrix}1 & a & a^2 & a^3\\ 0 & 1 & (b+a) & (b^2+ba+a^2)\\ 0 & 1 & (c+b) & (c^2+cb+b^2)\\ 0 & 1 & (d+c) & (d^2+dc+c^2)\end{vmatrix}$$

$$\Delta_1=(b-a)(c-b)(d-c)\times(+1)\begin{vmatrix}1 & (b+a) & (b^2+ba+a^2)\\ 1 & (c+b) & (c^2+cb+b^2)\\ 1 & (d+c) & (d^2+dc+c^2)\end{vmatrix}$$

$$\Delta_1=(b-a)(c-b)(d-c)\begin{vmatrix}1 & (b+a) & (b^2+ba+a^2)\\ 0 & (c+b)-(b+a) & (c^2+cb+b^2)-(b^2+ba+a^2)\\ 0 & (d+c)-(c+b) & (d^2+dc+c^2)-(c^2+cb+b^2)\end{vmatrix}\begin{matrix}\\ L_2'\leftarrow L_2'-L_1'\\ L_3'\leftarrow L_3'-L_2'\end{matrix}$$

$$\Delta_1=(b-a)(c-b)(d-c)\begin{vmatrix}1 & (b+a) & (b^2+ba+a^2)\\ 0 & (c-a) & (c^2-a^2+cb-ba)\\ 0 & (d-b) & (d^2-b^2+dc-cb)\end{vmatrix}$$

$$\Delta_1=(b-a)(c-b)(d-c)\begin{vmatrix}1 & (b+a) & (b^2+ba+a^2)\\ 0 & (c-a) & [(c-a)(c+a)+(c-a)b]\\ 0 & (d-b) & [(d-b)(d+b)+(d-b)c]\end{vmatrix}$$

$$\Delta_1=(b-a)(c-b)(d-c)\begin{vmatrix}1 & (b+a) & (b^2+ba+a^2)\\ 0 & (c-a) & (c-a)(c+b+a)\\ 0 & (d-b) & (d-b)(d+c+b)\end{vmatrix}$$

$$\Delta_1=(b-a)(c-b)(d-c)(c-a)(d-b)\begin{vmatrix}1 & (b+a) & (b^2+ba+a^2)\\ 0 & 1 & (c+b+a)\\ 0 & 1 & (d+c+b)\end{vmatrix}$$

$$\Delta_1=(b-a)(c-b)(d-c)(c-a)(d-b)\times(+1)\begin{vmatrix}1 & (c+b+a)\\ 1 & (d+c+b)\end{vmatrix}$$

$$\Delta_1=(b-a)(c-b)(d-c)(c-a)(d-b)[(d+c+b)-(c+b+a)]$$

D'où $\boxed{\Delta_1=(b-a)(c-b)(d-c)(c-a)(d-b)(d-a)}$

$$\cdot\ \Delta_2=\begin{vmatrix}1+x & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1-x & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1+z & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1-z\end{vmatrix}=\begin{array}{c}\begin{matrix}\quad & C_2-C_1 & C_3-C_2 & C_4-C_3\\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow\\ & C_2 & C_3 & C_4\end{matrix}\\ \begin{vmatrix}1+x & -x & 0 & 0\\ 1 & -x & x & 0\\ 1 & 0 & z & -z\\ 1 & 0 & 0 & -z\end{vmatrix}\end{array}$$

$$\Delta_2=(-x)(-z)\begin{vmatrix}1+x&1&0&0\\1&1&x&0\\1&0&z&1\\1&0&0&1\end{vmatrix}=xz\begin{vmatrix}1+x&1&0&0\\1&1&x&0\\0&0&z&0\\1&0&0&1\end{vmatrix}L_3\leftarrow L_3-L_4$$

$$\Delta_2=xz^2\begin{vmatrix}1+x&1&0&0\\1&1&x&0\\0&0&1&0\\1&0&0&1\end{vmatrix}=xz^2\times(+1)\begin{vmatrix}1+x&1&0\\1&1&0\\1&0&1\end{vmatrix}=xz^2\times(+1)\begin{vmatrix}1+x&1\\1&1\end{vmatrix}=xz^2(1+x-1)$$

D'où $\boxed{\Delta_2=x^2z^2}$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}(a-b-c)&2a&2a\\2b&(b-c-a)&2b\\2c&2c&(c-a-b)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}(a-b-c)&\overset{\overset{C_2-C_1}{\downarrow}}{C_2}\ \ 2a-(a-b-c)&\overset{\overset{C_3-C_2}{\downarrow}}{C_3}\ \ 0\\2b&(b-c-a)-2b&2b-(b-c-a)\\2c&0&(c-a-b)-2c\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}(a-b-c)&(a+b+c)&0\\2b&-(a+b+c)&(a+b+c)\\2c&0&-(a+b+c)\end{vmatrix}=(a+b+c)^2\begin{vmatrix}(a-b-c)&1&0\\2b&-1&1\\2c&0&-1\end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)^2\begin{vmatrix}(a-b-c)&1&0\\2(b+c)&-1&0\\2c&0&-1\end{vmatrix}L_2\leftarrow L_2+L_3=(a+b+c)^2\begin{vmatrix}(a-b-c)&1&0\\2(b+c)&-1&0\\2c&0&-1\end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)^2\times(+(-1))\begin{vmatrix}(a-b-c)&1\\2(b+c)&-1\end{vmatrix}=-(a+b+c)^2[-(a-b-c)-2(b+c)]$$

$$=-(a+b+c)^2(-a+b+c-2b-2c)=-(a+b+c)^2(-(a+b+c))$$

D'où $\boxed{\Delta_3=(a+b+c)^3}$

Rang d'une matrice

$\mathcal{H}-1$ • Le rang d'une matrice A de taille (n,p) est : le nombre maximal de vecteurs lignes (ou colonnes) linéairement indépendants

$\mathcal{H}-2$ • Soit $A=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1p}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2p}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{np}\end{pmatrix}$ ***une matrice A de taille (n,p).***

On peut décomposer A en colonnes : $A = (C_1 \quad C_2 \quad \cdots \quad C_p)$ *ou en lignes* $A = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}$.

Soit $\mathcal{L}(A)$ *le s.e.v engendré par les lignes de A et* $\mathcal{C}(A)$, *le s.e.v engendré par les colonnes de A :* $rg\,(A) = dim(\mathcal{L}(A)) = dim(\mathcal{C}(A))$

$\mathcal{H}-3$ • *Une matrice B est dite échelonnée en lignes si :*

① *chaque ligne non nulle de B commence avec strictement plus de* 0 *que la ligne précédente*

② *les lignes nulles (ne contenant que des* 0*) de B viennent en bas après les lignes non nulles.*

☞ *Le rang d'une matrice A est le nombre de lignes non nulles dans sa forme échelonnée en lignes. On le note rg A.*

$\mathcal{H}-4$ • $rg(A') = rg(A) = rg(A'A) = rg(AA')$

$\mathcal{H}-5$ • $rg(BA) \leq min(rg(B), rg(A))$

$\mathcal{H}-6$ • $rg(A+B) \leq rg(A) + rg(B)$

$\mathcal{H}-7$ • *Soit une matrice A de taille* (n,p). $rg\,(A) \leq min(n,p)$

$\mathcal{H}-8$ • *Le rang d'une matrice ne change pas :*

① *quand on change l'ordre des lignes (resp. colonnes)*

② *quand on multiplie (ou divise) une ligne (resp. colonne) par un nombre non nul*

③ *quand on ajoute (ou retranche) à une ligne (resp. colonne) une combinaison linéaire des autres*

④ *quand on ajoute (ou retranche) à la matrice une nouvelle ligne (resp. colonne) qui est combinaison linéaire des antres.*

⑤ *quand on ajoute (ou retranche) à la matrice une nouvelle ligne (resp. colonne)*

$\mathcal{H}-9$ • *Soit une matrice A de taille* (n,p), *B matrice carrée inversible de taille* (p,p) *et C matrice carrée inversible de taille* (n,n). *Alors :*

$rg\,(AB) = rg\,(A)$ *et* $rg\,(CA) = rg\,(A)$

BEN AHMED MOHSEN Téléphone: (+216) 97 619191 / 54 619191
omega.center.cp@gmail.com https://web.facebook.com/OMEGACENTER2014

$\mathcal{H}-10$ • *Soit une matrice A de taille (n,p), on appelle opérations élémenraires sur A les opérations suivantes :*

① *Permuter deux lignes de A (ou deux colonnes), notation :*

$L_i \leftrightarrow L_j$ $(resp. C_i \leftrightarrow C_j)$

② *Multiplier une ligne (ou une colonne) par un scalaire non nul, notation :*

$L_i \leftarrow \lambda L_j$ $(resp. C_i \leftarrow \lambda C_j)$

③ *Ajouter a une ligne (ou une colonne) un multiple d'une autre ligne ou une combinaison linéaire (resp. une autre colonne), notation :*

$$L_i \leftarrow L_i + \sum \lambda_j L_j \ (resp. C_i \leftarrow C_i + \sum \lambda_j C_j)$$

☞*Les opérations élémentaires conservent le rang de la matrice.*

☞*La suppression d'une colonne nulle ou d'une ligne nulle préserve le rang.*

$\mathcal{H}-11$ • *Soit A matrice carrée inversible de taille (n,n). $det(A) \neq 0 \Leftrightarrow rg\,(A) = n$*

$\mathcal{H}-12$ • $rg\left(0_{n\times p}\right) = 0$

Exercice 6 :

Énoncé

Déterminer les rangs des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & -4 \\ 3 & 2 & -3 & 17 \\ 5 & -3 & 8 & -10 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \ et\ C = \begin{pmatrix} -2 & -5 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

Corrigé

$$\cdot\ rg(A) = rg\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & -4 \\ 3 & 2 & -3 & 17 \\ 5 & -3 & 8 & -10 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} \mathrm{C_1 + 2C_2} & \mathrm{4C_2 + C_3} & \mathrm{C_3 + C_4} & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ \mathrm{C_1} & \mathrm{C_2} & \mathrm{C_3} & \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 7 & 5 & 14 & 17 \\ -1 & -4 & -2 & -10 \end{pmatrix}$$

$$rg(A) = rg\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} 2C_1'-C_3' & 14C_2'-5C_3' & & \\ \downarrow & \downarrow & & \\ C_1' & C_2' & & \end{array}\\ \begin{pmatrix} 0&0&0&-4\\0&0&14&17\\0&-46&-2&10\end{pmatrix}\end{array} = rg\begin{pmatrix}0&0&-4\\0&14&17\\-46&-2&10\end{pmatrix} = 3$$

$$car \begin{vmatrix}0&0&-4\\0&14&17\\-46&-2&10\end{vmatrix} \neq 0 \,.\, D'où\ \boxed{rg(A) = 3}$$

$$\cdot\ rg(B) = rg\begin{pmatrix}1&1&2&0\\1&-1&0&-2\\0&1&1&1\\1&0&1&-1\end{pmatrix} = rg\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} & C_2-C_1 & C_3-2C_2 & \\ & \downarrow & \downarrow & \\ & C_2 & C_3 & \end{array}\\ \begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&-2&2&-2\\0&1&-1&1\\1&-1&1&-1\end{pmatrix}\end{array}$$

$$rg(B) = rg\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} & C_2'+C_3' & C_3'+C_4 & \\ & \downarrow & \downarrow & \\ & C_2' & C_3' & \end{array}\\ \begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&-2\\0&0&0&1\\1&0&0&-1\end{pmatrix}\end{array} = rg\begin{pmatrix}1&0\\1&-2\\0&1\\1&-1\end{pmatrix} = 2$$

$$car \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}\ et\ \begin{pmatrix}0\\-2\\1\\-1\end{pmatrix}\ sont\ linéairement\ indépendantes$$

$$D'où\ \boxed{rg(B) = 2}$$

$$\cdot\ det(C) = \begin{vmatrix}-2&-5&0\\4&7&1\\1&5&-1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}-2&-5&0\\5&12&0\\1&5&-1\end{vmatrix} L_2 \leftarrow L_2 + L_3$$

$$det(C) = +(-1)\begin{vmatrix}-2&-5\\5&12\end{vmatrix} = -(-24+25) = -1$$

$$D'où\ \boxed{rg(C) = 3}$$

Diagonalisation

***I*– 1 • Une matrice A semblable à une matrice diagonale Δ si A s'écrit :**

$A = P\Delta P^{-1}$ ***ou bien*** $P^{-1}AP = \Delta$ ***, avec P une matrice inversible.***

$\mathcal{I}-2$ • $\textit{Diagonaliser } A \textit{, c'est trouver une matrice inversible } P = (V_1 \quad \cdots \quad V_n)$

$\left(\textit{avec } V_i \textit{ vecteur colonne de taille } (n \times 1)\right)$ *et une matrice diagonale* $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$

telles que $A = PDP^{-1}$ *, ou bien* $AP = PD$

$$PD = (V_1 \quad \cdots \quad V_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = (\lambda_1 V_1 \quad \cdots \quad \lambda_n V_n) \textit{ et } AP = (AV_1 \quad \cdots \quad AV_n),$$

D'où $AV_i = \lambda_i V_i$ *ou encore* $(A - \lambda_i I_n)V_i = 0_{n\times 1}$

$\mathcal{I}-3$ • *On dit qu'un vecteur* V *non nul est un vecteur propre de* A *s'il existe* $\lambda \in \mathbb{R}$

telle que: $AV = \lambda V$ *ou encore* $(A - \lambda I_n)V = 0_{n\times 1}$.

On dit que λ *est une valeur propre de* A *associée à* V

$\mathcal{I}-4$ • (*Théorème des valeurs propres*) *Les valeurs propres* λ_i *d'une matrice carrée* A

sont les solutions de l'équation $det(A - \lambda I_n) = 0$

$det(A - \lambda I_n)$ *étant le polynome caractéristique de* A. *On note* $P_A(\lambda) = det(A - \lambda I_n)$

$\mathcal{I}-5$ • *Une matrice* A *est diagonalisable si et seulement si elle possède une famille*

de vecteurs propres formant une base, alors A *est diagonalisable.*

(*sinon,* A *peut être ou ne pas être diagonalisable*).

$\mathcal{I}-7$ • *Si* A *est une matrice réelle et symétrique, alors toutes les valeurs propres*

de A *sont réelles et* A *est diagonalisable.* $A = CDC^{-1}$, *où* $C = (V_1 \quad \cdots \quad V_n)$ *les vecteurs*

propres de A *correspondantes aux valeurs propres* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, *distinctes ou confondues.*

Les vecteurs propres propres d'une matrice symétrique sont orthogonaux,

ce qui entraîne : $\forall i \neq j, V_i' V_j = 0$

par la suite on obtient $C'C = I_n$ *ou encore* $C' = C^{-1}$, *donc* C *est une matrice orthogonale*

et $A = CDC' = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i V_i V_i'$ *cette expression est dite Décomposition spectrale de* A.

On obtient aussi : $A^n = CD^nC'$ *et* $A^{-1} = CD^{-1}C'$ (*pour* A *inversible*)

$\mathcal{I}-8$ • $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ *et* $det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$

$\mathcal{I}-9$ • *Soit* A *une matrice triangulaire. Alors les valeurs propres de* A *sont les* *éléments de la diagonale de A.*

J– 10 • $\boldsymbol{Si\ M\ est\ une\ matrice\ idempotente, \lambda_i\ les\ valeurs\ propres\ de\ M \Rightarrow \lambda_i \in \{0,1\}}$

J– 11 • *Soit A une matrice carrée, et soit r un entier. Si λ est une valeur propre de A, et V un vecteur propre correspondant, alors λ^r est une valeur propre de A^r et V reste le vecteur propre correspondant à λ^r*

J– 12 • *Soit* $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$ *une matrice carrée de taille $n \times n$.*

$$Si\ \ P_A(\lambda) = \lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + b_1\lambda + b_0\ alors \begin{cases} b_0 = (-1)^n det(A) \\ \quad et \\ b_{n-1} = -tr(A) \end{cases}$$

J– 13 • *Soit λ_1 et λ_2 deux valeurs propres distinctes d'une matrice carrée symétrique réelle. Alors les sous–espases propres E_{λ_1} et E_{λ_2} associés sont orthogonaux*

J– 14 • *Si A est diagonalisable alors A^n l'est aussi :* $A = PDP^{-1} \Rightarrow A^n = PD^nP^{-1}$

J– 15 • *Soit A une matrice inversible. Si A est diagonalisable alors A^{-1} l'est aussi :*

$A = PDP^{-1} \Rightarrow A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$

Exercice 7 :

Énoncé

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 7 & 4 \\ 3 & -9 & -5 \end{pmatrix}$

1) *Montrer que le polynôme caractéristique de A est* $P_A(\lambda) = -\lambda(1-\lambda)^2$
2) *Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A*
3) *Montrer que A s'écrit sous la forme $= PDP^{-1}$, D étant matrice diagonale. Calculer P^{-1}*
4) *Déduire que $B = A' + 2I_3$ est diagonalisable*
5) *Préciser les valeurs propres et les sous-espaces propres de B*

Corrigé

1) $P_A(\lambda) = |A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} -\lambda & 3 & 2 \\ -2 & 7-\lambda & 4 \\ 3 & -9 & -5-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda \\ -2 & 7-\lambda & 4 \\ 3 & -9 & -5-\lambda \end{vmatrix} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3$

$$P_A(\lambda) = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 7-\lambda & 4 \\ 3 & -9 & -5-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} \begin{matrix} C_1+2C_2-3C_3 \\ \downarrow \\ C_1 \end{matrix} & & \\ 0 & 1 & 1 \\ -2\lambda & 7-\lambda & 4 \\ 3\lambda & -9 & -5-\lambda \end{vmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = \lambda(1-\lambda)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 7-\lambda & 4 \\ 3 & -9 & -5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(1-\lambda)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & (1-\lambda) & \frac{2}{3}(1-\lambda) \\ 3 & -9 & -5-\lambda \end{vmatrix} L_2 \leftarrow L_2 + \frac{2}{3}L_3$$

$$P_A(\lambda) = \lambda(1-\lambda)^2\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 3 & -9 & -5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(1-\lambda)^2 \times (+3)\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{2}{3} \end{vmatrix}}_{-\frac{1}{3}}$$

$$D'\text{où } \boxed{P_A(\lambda) = -\lambda(1-\lambda)^2}$$

2)

A $\nearrow$ $\lambda_1 = 0$ *valeur propre simple*

A $\searrow$ $\lambda_2 = 1$ *valeur propre double*

· ***Soit*** E_1 ***le s.e.v propre associé à la valeur propre simple*** $\lambda_1 = 0$

$$E_1 = \{V \in \mathbb{R}^3 / (A - 0.I_3)V = 0_{3\times1}\}$$

$$V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \Leftrightarrow AV = 0_{3\times1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 7 & 4 \\ 3 & -9 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & -9 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} L_2 \leftarrow 3L_2 + 2L_3$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & -9 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_2' \Leftrightarrow \begin{cases} y \in \mathbb{R} \\ z = -\frac{3}{2}y \\ 3x - 9y - 5z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \in \mathbb{R} \\ z = -\frac{3}{2}y \\ 3x - 9y + \frac{15}{2}y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in \mathbb{R} \\ z = -\frac{3}{2}y \\ 3x = \frac{3}{2}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in \mathbb{R} \\ z = -\frac{3}{2}y \\ x = \frac{1}{2}y \end{cases}$$

$$V \in E_1 \Leftrightarrow V = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}y \\ y \\ -\frac{3}{2}y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}y\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}}_{V_1} \Rightarrow \{V_1\}\ est\ une\ famille\ génératrice\ de\ E_1$$

$Or\ V_1 \neq 0_{3\times1} \Rightarrow \{V_1\}\ est\ une\ famille\ libre\ .Ainsi\ \{V_1\}\ est\ une\ base\ de\ E_1$

$et\ \dim(E_1) = 1 =\ l'ordre\ de\ multiplicité\ de\ la\ valeur\ propre\ simple\ \lambda_1 = 0$

· $Soit\ E_2\ le\ s.e.v\ propre\ associé\ à\ la\ valeur\ propre\ double\ \lambda_2 = 1$

$E_2 = \{V \in \mathbb{R}^3 / (A - 1 \times I_3)V = 0_{3\times1}\}$

$$V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2 \Leftrightarrow (A - I_3)V = 0_{3\times1} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -2 & 6 & 4 \\ 3 & -9 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow 1/2\,L_2 \\ L_2 \leftarrow -1/3\,L_3 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} L'_2 \leftarrow L'_2 - L_1 \\ L'_3 \leftarrow L'_3 - L'_2 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + 3y + 2z = 0 \\ y \in \mathbb{R} \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y + 2z \\ y \in \mathbb{R} \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$V \in E_2 \Leftrightarrow V = \begin{pmatrix} 3y + 2z \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = y\underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{V_2} + z\underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{V_3}$$

$\Rightarrow \{V_2, V_3\}\ est\ une\ famille\ génératrice\ de\ E_2$

$On\ vérifie\ bien\ que\ \{V_2, V_3\}\ est\ une\ famille\ libre$

$Ainsi\ \{V_2, V_3\}\ \ est\ une\ base\ de\ E_2$

$et\ \dim(E_2) = 2 = l'ordre\ de\ multiplicité\ de\ la\ valeur\ propre\ double\ \lambda_2 = 1$

$\lambda_1 = 0\ valeur\ propre\ simple \rightarrow V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}\ vecteur\ propre\ correspondant$

A

$\lambda_2 = 1\ valeur\ propre\ double \rightarrow V_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} et\ V_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\ \ vecteurs\ propres\ correspondants$

3) $$\begin{cases} \dim(E_1) = 1 =\ l'ordre\ de\ multiplicité\ de\ la\ valeur\ propre\ simple\ \lambda_1 = 0 \\ \dim(E_2) = 2 = l'ordre\ de\ multiplicité\ de\ la\ valeur\ propre\ double\ \lambda_2 = 1 \\ \dim(E_1) + \dim(E_2) = 3 = dimension\ de\ la\ matrice\ A \end{cases}$$

$$\Rightarrow A\ est\ diagonalisable$$

$D'où\ l'existence\ d'une\ matrice\ de\ passage\ P\ de\ la\ base\ canonique\ \mathcal{B}^c = (e_1, e_2, e_3)$

$$\left(\text{où } e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \text{ et } e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) \text{ à la base propre } \mathcal{B}^p=(V_1,V_2,V_3)$$

$$P=\begin{pmatrix}1&3&2\\2&1&0\\-3&0&1\end{pmatrix} \text{ inversible, et une matrice diagonale } D=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

telles que $A=PDP^{-1}$

On vérifie bien que P est inversible : $det(P)=\begin{vmatrix}1&3&2\\2&1&0\\-3&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}7&3&0\\2&1&0\\-3&0&1\end{vmatrix}$ $L_1\leftarrow L_1-2L_3$

$$det(P)=\begin{vmatrix}7&3&0\\2&1&0\\-3&0&1\end{vmatrix}=(+1)\begin{vmatrix}7&3\\2&1\end{vmatrix}=1\neq 0$$

$$Com(P)=\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2&0\\-3&1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}2&1\\-3&0\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}3&2\\0&1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1&2\\-3&1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&3\\-3&0\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}3&2\\1&0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&2\\2&0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1&3\\2&1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2&3\\-3&7&-9\\-2&4&-5\end{pmatrix}$$

$$P^{-1}=\frac{1}{det(P)}[Com(P)]'=\begin{pmatrix}1&-3&-2\\-2&7&4\\3&-9&-5\end{pmatrix}$$

4) *On a* : $B=A'+2I_3$, *or* $A=PDP^{-1}\Rightarrow A'=(PDP^{-1})'=(P^{-1})'D'P'=(P')^{-1}DP'$

Soit $Q=(P')^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2&3\\-3&7&-9\\-2&4&-5\end{pmatrix}\Rightarrow Q^{-1}=P'=\begin{pmatrix}1&2&-3\\3&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}$

Par la suite $\begin{cases}A'=QDQ^{-1}\\2I_3=Q(2I_3)Q^{-1}\end{cases}\Rightarrow B=A'+2I_3=QDQ^{-1}+Q(2I_3)Q^{-1}$

$$\Rightarrow B=Q[DQ^{-1}+(2I_3)Q^{-1}]\ \Rightarrow B=Q[(D+(2I_3))Q^{-1}]$$

$$\Rightarrow B=Q\underbrace{[D+(2I_3)]}_{\Delta}Q^{-1}$$

$B=Q\Delta Q^{-1}$; *Q étant inversible*

et $\Delta=D+(2I_3)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}$, *matrice diagonale*

D'où B est diagonalisable.

Soient $U_1=\begin{pmatrix}1\\-3\\-2\end{pmatrix}$, $U_2=\begin{pmatrix}-2\\7\\4\end{pmatrix}$ *et* $U_3=\begin{pmatrix}3\\-9\\-5\end{pmatrix}$

BEN AHMED MOHSEN Téléphone: (+216) 97 619191 / 54 619191
omega.center.cp@gmail.com https://web.facebook.com/OMEGACENTER2014

$$D'autre\ part\ B = A' + 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 3 & 7 & -9 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 3 & 9 & -9 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

$On\ a$:

$$\cdot\ BU_1 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 3 & 9 & -9 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow BU_1 = \lambda'_1 U_1\ , \text{où}\ \lambda'_1 = 2$$

$$\cdot\ BU_2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 3 & 9 & -9 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 21 \\ 12 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow BU_2 = \lambda'_2 U_2\ , \text{où}\ \lambda'_2 = 3$$

$$\cdot\ BU_3 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 3 & 9 & -9 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -27 \\ -15 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ -5 \end{pmatrix} \Rightarrow BU_3 = \lambda'_2 U_3\ , \text{où}\ \lambda'_2 = 3$$

B

$$\lambda'_1 = 2\ valeur\ propre\ simple \rightarrow U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}\ vecteur\ propre\ correspondant$$

$$\lambda'_2 = 3\ valeur\ propre\ double \rightarrow U_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} et\ U_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ -5 \end{pmatrix}\ vecteurs\ propres\ correspondants$$

Sommes des valeurs

$\mathcal{J}-1$ • $Soient\ e = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ $une\ colonne\ de\ 1\ de\ taille\ (n \times 1)$, $U = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $et\ V = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. $On\ a$:

$$e'U = U'e = \sum_{i=1}^{n} x_i \Rightarrow \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n}e'U = \frac{1}{n}U'e \Rightarrow e'U = U'e = n\overline{x}$$

$\mathcal{J}-2$ • $U'U = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$

$\mathcal{J}-3$ • $U'V = V'U = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

$\mathcal{J}-4$ • $e\overline{x} = \overline{x}e = \frac{1}{n}ee'U = \frac{1}{n}eU'e = \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \vdots \\ \overline{x} \end{pmatrix}$

$\mathcal{J}-5$ • $\begin{pmatrix} x_1-\overline{x} \\ \vdots \\ x_n-\overline{x} \end{pmatrix} = U-\overline{x}e = U-e\overline{x} = U-\frac{1}{n}ee'U = I_nU-\frac{1}{n}ee'U = \underbrace{\left(I_n-\frac{1}{n}ee'\right)}_{M^0}U = M^0U$

$\mathcal{J}-6$ • $M^0 = I_n-\frac{1}{n}ee' = \begin{pmatrix} \left(1-\frac{1}{n}\right) & -\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & \left(1-\frac{1}{n}\right) & \cdots & -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & \left(1-\frac{1}{n}\right) & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} & \left(1-\frac{1}{n}\right) \end{pmatrix}$ *est une matrice idempotente*

$\left(i.e. \left(M^0\right)^n = M^0 \ \forall\, n \in \mathbb{N}^*\right)$ *et symétrique* $\left(i.e. \left(M^0\right)' = M^0\right)$ *qui transforme les observations en écarts par rapport qui transforme les observations en écarts par rapport aux moyennes des colonnes*

$\mathcal{J}-7$ • $M^0e = 0_{n\times 1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ *et* $e'M^0 = 0_{1\times n} = (0 \quad \cdots \quad 0)$

$\mathcal{J}-8$ • $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x}) = \underbrace{e'M^0}_{0_{1\times n}}U = 0$

$\mathcal{J}-9$ • $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2 = (U-\overline{x}e)'(U-\overline{x}e) = (M^0U)'(M^0U) = U'M^0U$

$\mathcal{J}-10$ • $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y}) = (U-\overline{x}e)'(V-\overline{y}e) = (M^0U)'(M^0V) = U'M^0V$

Exercice 8 :

Énoncé

On considère :

$X_1, X_2, \dots, X_n$ *n vecteurs colonnes de* $\mathbb{R}^k$ *où les* $X_i = (x_{i1} \quad \cdots \quad x_{ik})'$ *pour* $i = 1, 2, \dots, n$

· *e le vecteur unitaire de* $\mathbb{R}^k$: $e = (1 \quad \dots \quad 1)'$

· *La matrice* $M^0 = I_n-\frac{1}{n}ee'$

· *X la matrice de dimension* (n,k) *dont la ième ligne est* X_i'

$$X=\begin{pmatrix}X'_1\\ \vdots\\ X'_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{11} & \cdots & x_{1k}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ x_{n1} & \cdots & x_{nk}\end{pmatrix}$$

· $\bar{X}$ *vecteur colonne de* $\mathbb{R}^k$, *la moyenne des lignes (resp. colonnes) de la matrice* X' *(resp.* X*)*

1) ***Montrer que*** :

a)
$$X'X=\sum_{i=1}^{n}X_iX'_i$$

b)
$$X'e=\sum_{i=1}^{n}X_i$$

c)
$$\bar{X}=\frac{X'e}{n}$$

2)

a) ***Vérifier que*** M^0 ***est à la fois idempotente et symétrique***

b) ***Déduire*** :
$$\sum_{i=1}^{n}(X_i-a)(X_i-a)'=X'M^0X+n(\bar{X}-a)(\bar{X}-a)'$$
Où a ***est un vecteur de*** $\mathbb{R}^k$

Corrigé

1)

a)
$$X'X=\begin{pmatrix}x_{11} & \cdots & x_{n1}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ x_{1k} & \cdots & x_{nk}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{11} & \cdots & x_{1k}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ x_{n1} & \cdots & x_{nk}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X_1 & \cdots & X_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X'_1\\ \vdots\\ X'_n\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{n}X_iX'_i$$

b)
$$X'e=\begin{pmatrix}X_1 & \cdots & X_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{n}X_i$$

c) $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\frac{1}{n}X'e\Rightarrow X'e=n\bar{X}$

2)

a) $(M^0)'=\left(I_n-\frac{1}{n}ee'\right)'=I'_n-\frac{1}{n}(ee')'=I_n-\frac{1}{n}ee'=M^0\Rightarrow M^0$ ***est symétrique***

$$(M^0)^2=\left(I_n-\frac{1}{n}ee'\right)\left(I_n-\frac{1}{n}ee'\right)=I_n^2-\frac{1}{n}ee'-\frac{1}{n}ee'+\frac{1}{n^2}e\underbrace{(e'e)}_{n}e'=I_n-\frac{2}{n}ee'+\frac{n}{n^2}ee'$$

$$(M^0)^2=I_n-\frac{2}{n}ee'+\frac{1}{n}ee'=I_n-\frac{1}{n}ee'=M^0\Rightarrow M^0\ \textit{est idempotente}$$

b)

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i-a)(X_i-a)'=\sum_{i=1}^{n}(X_i-a)(X_i'-a')=\sum_{i=1}^{n}(X_iX_i'-X_ia'-aX_i'+aa')$$

$$=\sum_{i=1}^{n}X_iX_i'-\sum_{i=1}^{n}X_ia'-\sum_{i=1}^{n}aX_i'+\sum_{i=1}^{n}aa'$$

$$=\sum_{i=1}^{n}X_iX_i'-\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)a'-a\left(\sum_{i=1}^{n}X_i'\right)+naa'$$

$$=\underbrace{\sum_{i=1}^{n}X_iX_i'}_{X'X}-\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)}_{X'e}a'-a\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)'}_{(X'e)'}+naa'$$

$$=X'X-X'ea'-a(X'e)'+naa'=X'X-n\bar{X}a'-a(n\bar{X})'+naa'$$

$$=X'X-n\bar{X}a'-na\bar{X}'+naa'=X'X-n\bar{X}\bar{X}'+n\bar{X}\bar{X}'-n\bar{X}a'-na\bar{X}'+naa'$$

$$=X'X-n\left(\frac{1}{n}X'e\right)\left(\frac{1}{n}X'e\right)'+n(\bar{X}\bar{X}'-\bar{X}a'-a\bar{X}'+aa')$$

$$=X'X-(X'e)\left(\frac{1}{n}e'X\right)+n\big(\bar{X}(\bar{X}'-a')-a(\bar{X}'-a')\big)$$

$$=X'X-\left(X'\frac{ee'}{n}X\right)+n\big(\bar{X}(\bar{X}'-a')-a(\bar{X}'-a')\big)$$

$$=X'\left(I_nX-\frac{ee'}{n}X\right)+n\big((\bar{X}-a)(\bar{X}'-a')\big)$$

$$=X'\left(\underbrace{\left(I_n-\frac{ee'}{n}\right)}_{M^0}X\right)+n(\bar{X}-a)(\bar{X}-a)'$$

D'où $\boxed{\sum_{i=1}^{n}(X_i-a)(X_i-a)'=X'M^0X+n(\bar{X}-a)(\bar{X}-a)'}$

Exercice 9 :

Énoncé

Soit la matrice $X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$

1) *Calculer* $P = X(X'X)^{-1}X'$ *et* $M = I_4 - P$ *, puis vérifier que* $MP = 0_{4\times4}$
2) *On pose* $Q = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$
   a) *Vérifier que les matrices M et P sont idempotentes et symétriques*
   b) *Calculer P et M fondées sur XQ au lieu de X*
   c) *Quelles sont les racines caractéristiques de M et P*

Corrigé

1) $X'X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \\ 1 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 54 \end{pmatrix} \Rightarrow (X'X)^{-1} = 1/108\begin{pmatrix} 27 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$P = X(X'X)^{-1}X' = 1/108\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \\ 1 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 27 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{108}\begin{pmatrix} 27 & 8 \\ 27 & -4 \\ 27 & 6 \\ 27 & -10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

$$D'\text{où } \boxed{P = \frac{1}{108}\begin{pmatrix} 59 & 11 & 51 & -13 \\ 11 & 35 & 15 & 47 \\ 51 & 15 & 45 & -3 \\ -13 & 47 & -3 & 77 \end{pmatrix}}$$

$$M = I_4 - P = \frac{1}{108}\left(\begin{pmatrix} 108 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 108 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 108 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 108 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 59 & 11 & 51 & -13 \\ 11 & 35 & 15 & 47 \\ 51 & 15 & 45 & -3 \\ -13 & 47 & -3 & 77 \end{pmatrix}\right)$$

$$D'\text{où } \boxed{M = \frac{1}{108}\begin{pmatrix} 49 & -11 & -51 & 13 \\ -11 & 73 & -15 & -47 \\ -51 & -15 & 63 & 3 \\ 13 & -47 & 3 & 31 \end{pmatrix}}$$

On a $P^2 = [X(X'X)^{-1}X'][X(X'X)^{-1}X'] = X\underbrace{(X'X)^{-1}X'X}_{I_2}(X'X)^{-1}X' = X(X'X)^{-1}X' = P$

Par la suite $MP = (I_4 - P)P = P - P^2 = P - P = 0_{4\times4}$

2)
   a) $P^2 = P \Rightarrow P$ *est idempotente*

$P' = [X(X'X)^{-1}X']' = (X')'((X'X)^{-1})'X' = X((X'X)')^{-1}X' = X(X'X)^{-1}X' \Rightarrow P$ *est symétrique*

$M' = (I_4 - P)' = I_4' - P' = I_4 - P = M \Rightarrow M$ *est symétrique*

BEN AHMED MOHSEN Téléphone: (+216) 97 619191 / 54 619191
omega.center.cp@gmail.com https://web.facebook.com/OMEGACENTER2014

$M^2 = (I_4 - P)(I_4 - P) = I_4^2 - P - P + P^2 = I_4 - 2P + P = I_4 - P = M \Rightarrow M$ *est idempotente*

b) $On\ a : (XQ)[(XQ)'(XQ)]^{-1}(XQ)' = (XQ)[Q'(X'X)Q]^{-1}Q'X' =$
$X\underbrace{QQ^{-1}}_{I_2}(X'X)^{-1}\underbrace{(Q')^{-1}Q'}_{I_2}X' = X(X'X)^{-1}X' = P$

$$\begin{cases} P = X^*(X^{*\prime}X^*)^{-1}X^{*\prime} \\ X^* = XQ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M = I_4 - P = I_4 - X^*(X^{*\prime}X^*)^{-1}X^{*\prime} \\ X^* = XQ \end{cases}$$

c) *M et P Deux matrices idempotentes, donc leurs valeurs propres doivent toutes être 0 ou 1. Or* $trace(P) = 2 = \sum_{i=1}^{4}\lambda_i$ *et* $trace(M) = 2 = \sum_{i=1}^{4}\lambda'_i$

P
- $\lambda_1 = 0$ *valeur propre double*
- $\lambda_2 = 1$ *valeur propre double*

M
- $\lambda'_1 = 0$ *valeur propre double*
- $\lambda'_2 = 1$ *valeur propre double*

Lemmes sur les matrices inversibles

$\mathcal{K}-1$ • *Identité de Woodbury* : *Soient A et C deux matrices carrées inversibles de tailles respectives* $(n \times n)$ *et* $(m \times m)$ *et les matrices B et D de tailles respectives* $(n \times m)$*et*$(m \times n)$

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(I_m + CDA^{-1}B)^{-1}CDA^{-1}$$
$$= A^{-1} - A^{-1}BC(C + CDA^{-1}BC)^{-1}DA^{-1}$$

$\mathcal{K}-2$ • *Formule de Sherman-Morrison* : $(A + UV')^{-1} = A^{-1} - \dfrac{A^{-1}UV'A^{-1}}{1 + V'A^{-1}U}$

$\mathcal{K}-3$ • $(I + A^{-1})^{-1} = A(A + I)^{-1}$

$\mathcal{K}-4$ • $(A + BB')^{-1}B = A^{-1}B(I + B'A^{-1}B)^{-1}$

$\mathcal{K}-5$ • $(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = A(A + B)^{-1}B = B(A + B)^{-1}A$

$\mathcal{K}-6$ • $A - A(A + B)^{-1}A = B - B(A + B)^{-1}B$

$\mathcal{K}-7$ • $A^{-1} + B^{-1} = A^{-1}(A + B)B^{-1}$

Adresse : 2, Rue Ibn Arafa, av de l'environnement Manouba Centre, Manouba

$\mathcal{K}-8$ • $(I+AB)^{-1} = I - A(I+BA)^{-1}B$

$\mathcal{K}-9$ • $(I+AB)^{-1}A = A(I+BA)^{-1}$

$\mathcal{K}-10$ • *Le déterminant d'Harville* $det(A+UV') = (1+V'A^{-1}U)det(A)$

$$= det(A) + V'[Com(A)]'U$$

En particulier : $det(I_n + UV') = 1 + V'U$

$\mathcal{K}-11$ • *Déterminant d'Harville-Généralisation :*

① *Soient* A *matrice carrée inversible de taille* $(n\times n)$, B *et* D *de tailles respectives* $(n\times m)$ *alors :* $det(A+BD') = det(I_m + D'A^{-1}B)det(A)$

② *Soient* A *et* C *deux matrices carrées inversibles de taille respectives* $(n\times n)$ *et* $(m\times m)$ *et les matrices* B *et* D *de tailles respectives* $(n\times m)$, *alors :*

$det(A+BCD') = det(C^{-1} + D'A^{-1}B)det(C)det(A)$

$\mathcal{K}-12$ • *Théorème de Sylvester :* *Soient* A *et* B *deux matrices de tailles respectives* $(m\times n)$ *et* $(n\times m)$, *alors :* $det(I_m + AB) = det(I_n + BA)$

$\mathcal{K}-13$ • *Soit* A *une matrice carrée de taille* $(n\times n)$.

$$\begin{cases} \bullet\ Si\ n=2 : det(I_2+A) = 1 + det(A) + tr(A) \\ \bullet\ Si\ n=3 : det(I_3+A) = 1 + det(A) + tr(A) + \frac{1}{2}[tr(A)]^2 - \frac{1}{2}tr(A^2) \\ \bullet\ Si\ n=4 : det(I_4+A) = 1 + det(A) + tr(A) + \frac{1}{2}[tr(A)]^2 - \frac{1}{2}tr(A^2) + \frac{1}{6}[tr(A)]^3 - \frac{1}{2}tr(A)tr(A^2) + \frac{1}{3}tr(A^3) \\ \bullet\ \forall n\geq 2, \epsilon\to 0 : det(I_n+\epsilon A) \cong 1 + det(A) + \epsilon tr(A) + \frac{1}{2}\epsilon^2[tr(A)]^2 - \frac{1}{2}\epsilon^2 tr(A^2) \end{cases}$$

Matrices partitionnées

$\mathcal{L}-1$ • $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22}\end{pmatrix}$

$\mathcal{L}-2$ • $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21}] & [A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22}] \\ [A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21}] & [A_{21}B_{12}+A_{212}B_{22}]\end{pmatrix}$

$\mathcal{L}-3$ • $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2\end{pmatrix}'\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2\end{pmatrix} = (A_1' \quad A_2')\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2\end{pmatrix} = [A_1'A_1 + A_2'A_2]$

$\mathcal{L}-4$ • $\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22}\end{pmatrix}'\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}'A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22}'A_{22}\end{pmatrix}$

$\mathcal{L}-5$ • $\begin{vmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{vmatrix} = |A_{11}||A_{22}|$

$\mathcal{L}-6$ • $\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = |A_{11}| \left| \underbrace{A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}}_{F_2^{-1}} \right| = \frac{|A_{11}|}{|F_2|} = |A_{22}| \left| \underbrace{A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}}_{F_1^{-1}} \right| = \frac{|A_{22}|}{|F_1|}$

$\mathcal{L}-7$ • $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1}[I + A_{12}F_2A_{21}A_{11}^{-1}] & -A_{11}^{-1}A_{12}F_2 \\ -F_2A_{21}A_{11}^{-1} & F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 & -A_{11}^{-1}A_{12}F_2 \\ -F_2A_{21}A_{11}^{-1} & F_2 \end{pmatrix}$

$Où\ F_1 = \left(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}\right)^{-1}\ et\ F_2 = \left(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}\right)^{-1}$

Exercice 10 : (Formule de Sherman–Morrison)

Énoncé

Soit une matrice régulière écrite sous la forme $A + BCD$ où A et C sont régulière.

1) $Calculer[A + BCD][A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1}]$.
   Déduire l'expression de l'inverse de la matrice $A + BCD$
2) *supposons maintenant que B et D sont respectivement des matrices colonne et ligne : $B = U \in \mathbb{R}^n$ et $D' = V \in \mathbb{R}^n$, et $C = \beta$ un scalaire non nul.*
   Démontrer que : $(A + U\beta V')^{-1} = A^{-1} - \left(\frac{\beta}{1 + \beta V'A^{-1}U}\right)A^{-1}UV'A^{-1}$
3) *Considérons la matrice* $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$
   a) *Vérifier que M admet une décomposition* : $M = A + U\beta V'$
      $Où\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \beta = 1\ et\ V = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
   b) *Déterminer M^{-1}*

Corrigé

1)
$[A + BCD][A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1}]$

$= \left[\underbrace{AA^{-1}}_{I}\right] - \left[\underbrace{AA^{-1}}_{I}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1}\right] + [BCDA^{-1}] - [BCDA^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1}]$

$= I - [B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1}] + [BCDA^{-1}] - [BCDA^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1}]$

$= I - B[(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1} - C + CDA^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}]DA^{-1}$

$= I - B[(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1} + CDA^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1} - C]DA^{-1}$

$= I - B[(I + CDA^{-1}B)(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1} - C]DA^{-1}$

$$= I - B\left[\left(\underbrace{CC^{-1}}_{I} + CDA^{-1}B\right)(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1} - C\right]DA^{-1}$$

$$= I - B\left[[(CC^{-1} + CDA^{-1}B)(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}] - C\right]DA^{-1}$$

$$= I - B\left[\left[C\underbrace{(C^{-1} + DA^{-1}B)(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}}_{I}\right] - C\right]DA^{-1} = I - \underbrace{B[C - C]DA^{-1}}_{0}$$

D'où $[A + BCD][A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1}] = I$

$$et\ \boxed{[A + BCD]^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1}}$$

2) β *est un scalaire donc* $\beta^{-1} = 1/\beta$

$\begin{cases} V \in \mathbb{R}^n \text{ donc } V' \text{ est un vecteur ligne de taille } (1 \times n) \\ A \text{ étant une matrice carrée inversible de taille } (n \times n)\text{, de même pour } A^{-1} \end{cases}$

$\Rightarrow \underbrace{V'}_{(1\times n)} \underbrace{A^{-1}}_{(n\times n)}$ *est un vecteur ligne de taille* $(1 \times n)$.

Or $U \in \mathbb{R}^n$ *donc* U *est un vecteur colonne de taille* $(n \times 1)$ $\Rightarrow \underbrace{V'A^{-1}}_{(1\times n)} \underbrace{U}_{(n\times 1)}$ *est un scalaire*

Notons $\alpha = V'A^{-1}U$, *ainsi on obtient* :

$$(A + U\beta V')^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U(\beta^{-1} + V'A^{-1}U)^{-1}V'A^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U\left(\frac{1}{\beta} + \alpha\right)^{-1} V'A^{-1}$$

$$= A^{-1} - A^{-1}U\left(\frac{1 + \beta\alpha}{\beta}\right)^{-1} V'A^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U\left(\frac{\beta}{1 + \beta\alpha}\right)V'A^{-1}$$

$$= A^{-1} - \left(\frac{\beta}{1 + \beta\alpha}\right)A^{-1}UV'A^{-1}$$

D'où $\boxed{(A + U\beta V')^{-1} = A^{-1} - \left(\frac{\beta}{1 + \beta V'A^{-1}U}\right)A^{-1}UV'A^{-1}}$

3)

a)

$$A + U\beta V' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times 1 \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}}_{M}$$

$$D'\text{où } \boxed{M = A + U\beta V'}$$

b)

$$M^{-1}=(A+U\beta V')^{-1}=A^{-1}-\left(\frac{\beta}{1+\beta V'A^{-1}U}\right)A^{-1}UV'A^{-1}=A^{-1}-\left(\frac{1}{1+V'A^{-1}U}\right)A^{-1}UV'A^{-1}$$

$$Or\ A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{1}&0&0\\0&\frac{1}{1}&0\\0&0&\frac{1}{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=A$$

$$Par\ la\ suite\ M^{-1}=A-\left(\frac{1}{1+V'AU}\right)AUV'A$$

$On\ a$:

$$\cdot\ V'A=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}'\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\end{pmatrix}$$

$$\cdot\ V'AU=\begin{pmatrix}1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=1-2-3=-4$$

$$\cdot\ AUV'A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\2&-2&-2\\-3&3&3\end{pmatrix}$$

$$En\ effet,\ M^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}-\left(\frac{1}{1+(-4)}\right)\begin{pmatrix}1&-1&-1\\2&-2&-2\\-3&3&3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-1&-1\\2&-2&-2\\-3&3&3\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\left[\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&-1&-1\\2&-2&-2\\-3&3&3\end{pmatrix}\right]$$

$$D'où\ \boxed{M^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4&-1&-1\\2&1&-2\\-3&3&0\end{pmatrix}}$$

Formes quadratiques et matrices définies

M-1 • Forme quadratique : *Soit A une matrice symétrique de taille $(n\times n)$ et* $U=\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$

un vecteur colonne $(n\times 1)$. On appelle forme quadratique de A et on note :

$$q = U'AU = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j a_{ij}$$

$\mathcal{M}-2$ • $Si\ U'AU > 0\ (resp.\ U'AU < 0\ )\ pour\ tout\ U \neq 0_{n\times1},\ alors\ A\ est\ définie\ positive$

$(resp.\ négative\ )$

$\mathcal{M}-3$ • $Si\ U'AU \geq 0\ (resp.\ U'AU \leq 0\ )\ pour\ tout\ U \neq 0_{n\times1},\ alors\ A\ est\ définie\ non\ négative$

$ou\ semi\text{-}définie\ positive\ (resp.\ non\ positive\ ou\ semi\text{-}définie\ négative\ )$

$\mathcal{M}-4$ • $A\ étant\ une\ matrice\ symétrique\ donc\ elle\ peut\ être\ décomposée\ comme : A = CDC'.$

$Ainsi\ la\ forme\ quadratique\ devient\ U'AU = U'CDC'U.\ Soit\ W = U'C = \begin{pmatrix}\omega_1\\ \vdots \\ \omega_n\end{pmatrix}.\ Alors :$

$$U'AU = WDW' = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\omega_i^2.\ \ On\ obtient : \begin{cases} Si\ \forall i,\ \lambda_i > 0 \Rightarrow \text{A est définie positive} \\ Si\ \forall i,\ \lambda_i < 0 \Rightarrow \text{A est définie négative}\end{cases}$$

$\mathcal{M}-5$ • **Matrices définies**: $Soit\ A\ une\ matrice\ symétrique.$

① $Si\ toutes\ les\ valeurs\ propres\ de\ A\ sont\ positives,\ alors\ A\ est\ définie\ positive$

② $Si\ toutes\ les\ valeurs\ propres\ de\ A\ sont\ négatives,\ alors\ A\ est\ définie\ négative$

③ $Si\ certaines\ valeurs\ propres\ de\ A\ sont\ nulles,\ alors\ A\ est\ non\ négative\ ou$
$semi\text{-}définie\ positive,\ si\ les\ valeurs\ propres\ restantes\ sont\ positives.$

④ $Si\ certaines\ valeurs\ propres\ de\ A\ sont\ nulles,\ alors\ A\ est\ non\ positive\ ou$
$semi\text{-}définie\ négative,\ si\ les\ valeurs\ propres\ restantes\ sont\ négatives.$

⑤ $Si\ A\ comporte\ à\ la\ fois\ des\ valeurs\ propres\ négatives\ et\ positives,\ alors$
$A\ est\ indéfinie.$

$\mathcal{M}-6$ • $Si\ A\ est\ définie\ non\ négative\ (ou\ semi\text{-}définie\ positive),\ alors\ det(A) \geq 0$

$\mathcal{M}-7$ • $Si\ A\ est\ définie\ positive,\ alors\ A^{-1}\ l'est\ aussi$

$\mathcal{M}-8$ • $I_n\ est\ définie\ positive$

$\mathcal{M}-9$ • $Si \begin{cases} A\ de\ taille\ (n\times k),\ avec\ n > k \\ rg(A) = k\ (A\ de\ plein\ rang)\end{cases},\ alors \begin{cases} A'A\ est\ définie\ positive \\ AA'\ est\ semi\text{-}définie\ positive\end{cases}$

$\mathcal{M}-10$ • $Si\ A\ est\ définie\ positive\ et\ B\ est\ une\ matrice\ inversible,\ alors :$

$B'AB\ est\ définie\ positive$

$\mathcal{M}-11$ • $Pour\ que\ A\ soit\ définie\ négatives,\ toutes\ les\ valeurs\ propres\ de\ A$

doivent être négatives. dans ce cas : $\begin{cases} det(A) > 0 \text{ , si } n \text{ pair} \\ det(A) < 0 \text{ , si } n \text{ impair} \end{cases}$

$\mathcal{M}$– 12 • *Toute matrice idempotente symétrique est définie positive*

$\mathcal{M}$– 13 • *Si A est symétrique et idempotente de taille* $(n \times n)$ *et de rang j, alors toute forme quadratique en A peut être écrite* : $U'AU = \sum_{i=1}^{n} \omega_i^2$

$\mathcal{M}$– 14 • ***Comparaison des matrices***: *Soient A et B deux matrices symétriques de même tailles. Une comparaison utile repose sur* : $d = U'AU - U'BU = U'(A-B)U$.

Si d est toujours positif pour tout vecteur non nul U, alors on peut dire, selon ce critère, que A est plus grande que B.

- *Si* $d > 0 \text{ , } \forall U \neq 0_{n\times 1}$ *, alors* $A - B$ *est définie positive.*
- *Si* $d \geq 0 \text{ , } \forall U \neq 0_{n\times 1}$ *, alors* $A - B$ *est semi-définie positive.*

$\mathcal{M}$– 15 • *Si* $\begin{cases} A \text{ est définie positive} \\ B \text{ est semi-définie positive} \end{cases}$ *, alors* $A + B \geq A$

$\mathcal{M}$– 16 • *Si* $A > B$ *alors* $B^{-1} > A^{-1}$

$\mathcal{M}$– 17 • ***Ordre des matrices définies positives***: *Si A et B sont deux matrices définies positives de même dimension et si toutes les valeurs propres de A sont plus grandes (resp. au moins aussi grandes) que les valeurs propres de B lorsque les deux ensembles de racines sont classés dans l'ordre décroissant,*

alors $A - B$ *est définie positive (resp. semi-définie positive)*

Dérivation matricielle-Optimisation

$\mathcal{N}$– 1 • *Soit le vecteur colonne* $U = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *, on considère une fonction scalaire du vecteur U, c'est à dire* $y = f(U) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. *Le vecteur des dérivées partielles, ou vecteur*

$$gradient, \frac{\partial f(U)}{\partial U} = \frac{\partial y}{\partial U} = \begin{pmatrix} \partial y/\partial x_1 \\ \partial y/\partial x_2 \\ \vdots \\ \partial y/\partial x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

La matrice de dérivées secondes ou le Hessien est :

$$H = \begin{pmatrix} \partial^2 y/\partial x_1\partial x_1 & \partial^2 y/\partial x_1\partial x_2 & \cdots & \partial^2 y/\partial x_1\partial x_n \\ \partial^2 y/\partial x_2\partial x_1 & \partial^2 y/\partial x_2\partial x_2 & \cdots & \partial^2 y/\partial x_2\partial x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial^2 y/\partial x_n\partial x_1 & \partial^2 y/\partial x_n\partial x_2 & \cdots & \partial^2 y/\partial x_n\partial x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{pmatrix}$$

En général H est carrée et symétrique.

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial(\partial y/\partial U)}{\partial x_1} & \frac{\partial(\partial y/\partial U)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial(\partial y/\partial U)}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \frac{\partial(\partial y/\partial U)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{\partial(\partial y/\partial U)}{\partial U'} = \frac{\partial^2 y}{\partial U \partial U'}$$

$\mathcal{N}-2$ • *Une fonction linéaire peut être écrite :* $Y = \beta' U = U'\beta = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i$

$$\Rightarrow \frac{\partial \beta' U}{\partial U} = \frac{\partial U'\beta}{\partial U} = \beta$$

Il faut faire attention $\frac{\partial \beta' U}{\partial U} \neq \beta'$

$\mathcal{N}-3$ • *Pour un ensemble d'équations linéaires* $Y = AU$ *, chaque élément* y_i *de* Y *est :*

$y_i = A_i' U$ *, où* A_i' *est la i-ième ligne de A.*

$$\frac{\partial y_i}{\partial U} = A_i = \text{la transposée de la i-ième ligne de } A \Rightarrow \begin{pmatrix} \partial y_1/\partial U' \\ \partial y_2/\partial U' \\ \vdots \\ \partial y_n/\partial U' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1' \\ A_2' \\ \vdots \\ A_n' \end{pmatrix}$$

En regroupant les termes. $\frac{\partial AU}{\partial U'} = A$ *ou* $\frac{\partial AU}{\partial U} = A'$

$\mathcal{N}-4$ • $\frac{\partial (U'AU)}{\partial U} = (A + A')U$ *; en particulier si A est symétrique, alors :* $\frac{\partial (U'AU)}{\partial U} = 2AU$

$\mathcal{N}-5$ • $\frac{\partial (U'AU)}{\partial A} = \frac{\partial (U'A'U)}{\partial A} = UU'$

$\mathcal{N}-6$ • $\frac{\partial (U'AW)}{\partial A} = UW'$

$\mathcal{N}-7$ • $\frac{\partial (U'A'W)}{\partial A} = WU'$

$\mathcal{N}-8$ • $\frac{\partial (U'A'WAV)}{\partial A} = W'AUV' + WAVU'$

$\mathcal{N}-9 \bullet \dfrac{\partial[(AU+V)'W(AU+V)]}{\partial A} = (W+W')(AU+V)U'$

$\mathcal{N}-10 \bullet$ **Optimisation :**

① *Condition de premier ordre :* $\dfrac{\partial f(U)}{\partial U} = 0_{n\times 1} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \partial y/\partial x_1 \\ \partial y/\partial x_2 \\ \vdots \\ \partial y/\partial x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

② *Condition de second ordre :* $H = \dfrac{\partial^2 f(U)}{\partial U \partial U'} \begin{cases} Définie + pour\ un\ minimum \\ Définie - pour\ un\ maximum \end{cases}$

$\mathcal{N}-11 \bullet$ **Optimisation contrainte :** *Le problème est :*

$$Maximiser_U[f(U)]\ \ sous\ les\ contraintes \begin{cases} c_1(U) = 0 \\ c_2(U) = 0 \\ \cdots \\ c_J(U) = 0 \end{cases}$$

Cette méthode (Multiplicateurs de Lagrange) consiste à trouver des points stationnaires, pour lesquels les dérivées s'annulent, de :

$$L^*(U,\lambda) = f(U) + \sum_{j=1}^{J} \lambda_j c_j(U) = f(U) + \lambda' c(U)$$

Les solutions doivent vérifier les équations :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L^*(U,\lambda)}{\partial U} = \dfrac{\partial f(U)}{\partial U} + \dfrac{\partial \lambda' c(U)}{\partial U} = \dfrac{\partial f(U)}{\partial U} + \dfrac{\partial [c(U)]'\lambda}{\partial U} = \dfrac{\partial f(U)}{\partial U} + \left[\dfrac{\partial [c(U)]'}{\partial U}\right]\lambda = \dfrac{\partial f(U)}{\partial U} + C'\lambda = 0_{n\times 1} \\ \dfrac{\partial L^*(U,\lambda)}{\partial \lambda} = c(U) = 0_{J\times 1} \end{cases}$$

Où C est la matrice de dérivées des contraintes par rapport à U. La $j-$ième ligne de la matrice C (de taille $(J\times n)$) est le vecteur de dérivées de la $j-$ième contrainte, $c_j(U)$ par rapport à U'

La solution contrainte ne peut être supérieure à la solution non contrainte car le gradient $\dfrac{\partial f(U)}{\partial U} \neq 0$, $\left(\dfrac{\partial f(U)}{\partial U} = -C'\lambda\right)$. *La solution contrainte ne peut pas être meilleure que la solution non contrainte.*

Exercice 11 :

Énoncé

On considère une matrice X de dimension (n,k), le vecteur $\beta = (\beta_1 \quad \beta_2 \quad \cdots \quad \beta_k)'$

et les vecteurs aléatoires $Y = (y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_n)'$ et $\varepsilon = (\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \cdots \quad \varepsilon_n)'$.

On suppose que les ε_i sont i.i.d de $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$, $\varepsilon = Y - X\beta$ et que $\hat{\varepsilon} = Y - X\hat{\beta}$

1) *Déterminer, en fonction de X et Y le vecteur $\hat{\beta}$ qui minimise $\sum_i \hat{\varepsilon}_i^2 = \hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}$*
2) *Démontrer que les matrices M et P sont idempotentes et symétriques ;*
   $P = X(X'X)^{-1}X'$ *et* $M = I_n - P$
3) *Vérifier que $MP = 0_{n\times n}$*
4) *Déterminer en fonction de M la variance de $\hat{\varepsilon}$ avec $\hat{\varepsilon} = Y - X\hat{\beta}$*

Corrigé

1)

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \varepsilon'\varepsilon = (Y - X\beta)'(Y - X\beta) = (Y' - (X\beta)')(Y - X\beta) = (Y' - \beta'X')(Y - X\beta)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = Y'Y - Y'X\beta - \beta'X'Y + \beta'X'X\beta$$

$$Or \begin{cases} \beta \text{ de taille } (k\times 1) \Rightarrow \beta' \text{ de taille } (1\times k) \\ X \text{ de taille } (n\times k) \Rightarrow X' \text{ de taille } (k\times n) \end{cases}$$

$\Rightarrow \beta'X'$ *de taille* $(1\times n)$ *et comme on a* Y *de taille* $(n\times 1)$

donc $\beta'X'Y$ *est un scalaire et* $(\beta'X'Y)' = \beta'X'Y \Leftrightarrow Y'X\beta = \beta'X'Y$

$$Par\ la\ suite \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = Y'Y - 2Y'X\beta + \beta'X'X\beta$$

$$\partial \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 \Big/ \partial\beta = \partial(Y'Y)/\partial\beta - 2(\partial(Y'X\beta)/\partial\beta) + (\partial(\beta'X'X\beta)/\partial\beta)$$

$$\frac{\partial(Y'Y)}{\partial\beta} = 0\ ;\ \frac{\partial(Y'X\beta)}{\partial\beta} = (Y'X)' = X'Y \text{ et } \frac{\partial(\beta'X'X\beta)}{\partial\beta} = 2(X'X)\beta$$

$$Ainsi,\ \partial \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 \Big/ \partial\beta = -2X'Y + 2(X'X)\beta$$

- *Condition de premier ordre :*

$$\partial\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2\Big/\partial\beta = 0_{k\times1} \Leftrightarrow -2[X'Y-(X'X)\beta] = 0_{k\times1} \Leftrightarrow X'Y-(X'X)\beta = 0_{k\times1} \Leftrightarrow (X'X)\beta = X'Y$$

Si $X'X$ est inversible, on obtient : $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}(X'Y\ )$

- *Condition de second ordre :* $H = \partial\left(\partial\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2\Big/\partial\beta\right)\Big/\partial\beta'$

$$H = \frac{\partial[-2(X'Y-(X'X)\beta)]}{\partial\beta'} = -2\left[\underbrace{\frac{\partial(X'Y)}{\partial\beta'}}_{0_{k\times1}} - \frac{\partial(X'X)\beta}{\partial\beta'}\right] = 2\frac{\partial(X'X)\beta}{\partial\beta'}$$

Donc $H = 2(X'X)$

En effet si $rg(X) = k < n$, *alors* $X'X$ *est définie positive* $\Rightarrow$ H *est définie positive*

$$D'\text{où}\ \boxed{\hat{\beta} = (X'X)^{-1}(X'Y)\ minimise\ \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2}$$

2) · $P^2 = [X(X'X)^{-1}X'][X(X'X)^{-1}X'] = X\underbrace{(X'X)^{-1}X'X}_{I_n}(X'X)^{-1}X' = X(X'X)^{-1}X' = P$

$\Rightarrow$ *P est idempotente*

· $P' = [X(X'X)^{-1}X']' = (X')'((X'X)^{-1})'X' = X((X'X)')^{-1}X' = X(X'X)^{-1}X' \Rightarrow$ *P est symétrique*

· $M' = (I_n-P)' = I_n'-P' = I_n-P = M \Rightarrow$ *M est symétrique*

· $M^2 = (I_n-P)(I_n-P) = I_n^2-P-P+P^2 = I_n-2P+P = I_n-P = M \Rightarrow$ *M est idempotente*

3)

$MP = (I_n-P)P = P-P^2 = P-P = 0_{n\times k}$

4) $\hat{\varepsilon} = Y - X\hat{\beta} = Y - X[(X'X)^{-1}(X'Y)] = Y - \underbrace{[X(X'X)^{-1}X']}_{P}Y = Y - PY = \underbrace{(I_n-P)}_{M}Y = MY$

Ainsi $V(\hat{\varepsilon}) = V(MY) = MV(Y)M'$

Or $V(Y) = V(\varepsilon+X\beta) = V(\varepsilon) = \sigma^2 I_n$ *car X et β sont non aléatoires*

Ce qui donne : $V(\hat{\varepsilon}) = M(\sigma^2 I_n)M' = \sigma^2(MI_nM') = \sigma^2\left(M\underbrace{M'}_{M}\right) = \sigma^2\underbrace{M^2}_{M} = \sigma^2 M$

$$D'\text{où}\ \boxed{V(\hat{\varepsilon}) = \sigma^2 M = \sigma^2[I_n - X(X'X)^{-1}X']}$$

Exercice 12 :

Énoncé

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 25 & 7 \\ 7 & 13 \end{pmatrix}$

1) *Trouver le vecteur U qui minimise* $Y = U'AU + 2x_1 + 3x_2 - 10$ *où* $U' = (x_1 \quad x_2)$
   Quelle est la valeur de Y au minimum ?
2) *Maintenant, minimiser Y sous la contrainte* $x_1 + x_2 = 1$
   Comparer les deux solutions.

Corrigé

1)

$$Y = U'AU + 2x_1 + 3x_2 - 10 = U'AU + W'U - 10 \text{ où } W = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

· *Condition de premier ordre :* $\dfrac{\partial Y}{\partial U} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\partial(U'AU + W'U - 10)}{\partial U} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial(U'AU)}{\partial U} + \frac{\partial(W'U)}{\partial U} - \underbrace{\frac{\partial(10)}{\partial U}}_{0} = 0$$

Or $\dfrac{\partial(U'AU)}{\partial U} = (A + A')U$ *et comme on a A symétrique, donc* $\dfrac{\partial(U'AU)}{\partial U} = 2AU$

$$\frac{\partial(W'U)}{\partial U} = (W')' = W$$

Par la suite $\dfrac{\partial Y}{\partial U} = 0 \Leftrightarrow 2AU + W = 0 \Leftrightarrow 2AU = -W \Leftrightarrow \hat{U} = -\dfrac{1}{2}A^{-1}W$

Calculons A^{-1}:

$$A = \begin{pmatrix} 25 & 7 \\ 7 & 13 \end{pmatrix} \Rightarrow det(A) = \begin{vmatrix} 25 & 7 \\ 7 & 13 \end{vmatrix} = (25 \times 13) - 7^2 = 276 \text{ et } Com(A) = \begin{pmatrix} 13 & -7 \\ -7 & 25 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}[Com(A)]' = \frac{1}{276}\begin{pmatrix} 13 & -7 \\ -7 & 25 \end{pmatrix}$$

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}A^{-1}W = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{276}\begin{pmatrix} 13 & -7 \\ -7 & 25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{552}\begin{pmatrix} 5 \\ 61 \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{x}_1 = -\frac{5}{552} \text{ et } \hat{x}_2 = -\frac{61}{552}$$

· *Condition de second ordre :* $H = \dfrac{\partial(\partial Y/\partial U)}{\partial U'} = \dfrac{\partial(2AU + W)}{\partial U'} = 2\left[\dfrac{\partial(AU)}{\partial U'}\right] + \underbrace{\dfrac{\partial(W)}{\partial U'}}_{0} = 2\left[\dfrac{\partial(AU)}{\partial U'}\right]$

Déterminons les signes des valeurs propres de A :

Soient λ_1 *et* λ_2 *des valeurs propres de A, or* $\begin{cases} tr(A) = 25 + 13 = 38 \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 = 38 > 0 \\ det(A) = 276 \Rightarrow \lambda_1\lambda_2 = 276 > 0 \end{cases}$

$En\ effet\ \ \lambda_1\ et\ \lambda_2\ , les\ valeurs\ propres\ de\ A\ sont\ toutes\ positives, donc\ A\ est\ définie$

$positive\ et\ H\ est\ définie\ positive$

$$D'où\ \boxed{\hat{U} = \begin{pmatrix} -\dfrac{5}{552} \\ -\dfrac{61}{552} \end{pmatrix}\ minimise\ Y = U'AU + 2x_1 + 3x_2 - 10}$$

2) $Maintenant, on\ va\ minimiser\ Y\ sous\ la\ contrainte$

$x_1 + x_2 - 1 = 0 \Leftrightarrow c(U) - 1 = 0$ où $c(U) = x_1 + x_2 = (1 \quad 1)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = e'U$

$Le\ problème\ d'optimisation\ sous\ contrainte\ peut\ être\ traité\ sous\ la\ forme\ d'un\ lagrangien$:

$L^*(U, \lambda) = Y + \lambda'[c(U) - 1] = Y + \lambda[c(U) - 1]$, $avec\ \lambda' = \lambda\ puisque\ \lambda\ est\ un\ scalaire$,

$puisqu'on\ a\ une\ seule\ contrainte.$

$Les\ solutions\ doivent\ vérifier\ les\ équations$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L^*(U,\lambda)}{\partial U} = \dfrac{\partial Y}{\partial U} + \lambda\left(\dfrac{\partial[c(U) - 1]}{\partial U}\right) = \dfrac{\partial Y}{\partial U} + \lambda\left(\dfrac{\partial c(U)}{\partial U}\right) = \dfrac{\partial Y}{\partial U} + \lambda\underbrace{\left(\dfrac{\partial(e'U)}{\partial U}\right)}_{e} = 0_{2\times1} \\ \dfrac{\partial L^*(U,\lambda)}{\partial \lambda} = c(U) - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2AU + W + \lambda e = 0_{2\times1} \\ e'U = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2AU + \lambda e = -W \\ e'U = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2A & e \\ e' & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -W \\ 1 \end{pmatrix}$$

$En\ insérant\ A, e, e', U\ et\ -W\ on\ obtient$: $\begin{pmatrix} 50 & 14 & 1 \\ 14 & 26 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 & 14 & 1 \\ 14 & 26 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 50 & 14 & 1 \\ 14 & 26 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 50 & 14 & 1 \\ -36 & 12 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = +1 \times \begin{vmatrix} -36 & 12 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -48$$

$$Com\begin{pmatrix} 50 & 14 & 1 \\ 14 & 26 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 26 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 14 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 14 & 26 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 14 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 50 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 50 & 14 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 14 & 1 \\ 26 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 50 & 1 \\ 14 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 50 & 14 \\ 14 & 26 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -12 \\ 1 & -1 & -36 \\ -12 & -36 & 1104 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 50 & 14 & 1 \\ 14 & 26 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \left[1\Big/det\begin{pmatrix} 50 & 14 & 1 \\ 14 & 26 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right]\left[Com\begin{pmatrix} 50 & 14 & 1 \\ 14 & 26 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right]' = -1/48\begin{pmatrix} -1 & 1 & -12 \\ 1 & -1 & -36 \\ -12 & -36 & 1104 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_2\\ \hat{\lambda}\end{pmatrix}=-\frac{1}{48}\begin{pmatrix}-1 & 1 & -12\\ 1 & -1 & -36\\ -12 & -36 & 1104\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\ -3\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13/48\\ 35/48\\ -25,75\end{pmatrix}$$

· $Y_{contrainte}=U'_{contrainte}AU_{contrainte}+W'U_{contrainte}-10$

$$=\left(\frac{1}{48^2}\begin{pmatrix}13 & 35\end{pmatrix}\begin{pmatrix}25 & 7\\ 7 & 13\end{pmatrix}\begin{pmatrix}13\\ 35\end{pmatrix}\right)+\left(\frac{1}{48}\begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}13\\ 35\end{pmatrix}\right)-10$$

$$=\left(\frac{1}{48^2}\begin{pmatrix}570 & 546\end{pmatrix}\begin{pmatrix}13\\ 35\end{pmatrix}\right)+\frac{131}{48}-10=\frac{1105}{96}+\frac{262}{96}-\frac{960}{96}$$

$$\boxed{Y_{contrainte}=407/96\cong 4,24}$$

· $Y_{non\ contrainte}=U'_{non\ contrainte}AU_{non\ contrainte}+W'U_{non\ contrainte}-10$

$$=\begin{pmatrix}-\frac{5}{552} & -\frac{61}{552}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}25 & 7\\ 7 & 13\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{5}{552}\\ -\frac{61}{552}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{5}{552}\\ -\frac{61}{552}\end{pmatrix}-10$$

$$=\frac{1}{552^2}\begin{pmatrix}5 & 61\end{pmatrix}\begin{pmatrix}25 & 7\\ 7 & 13\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\ 61\end{pmatrix}-\frac{1}{552}\begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\ 61\end{pmatrix}-10$$

$$=\frac{1}{552^2}\begin{pmatrix}552 & 828\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\ 61\end{pmatrix}-\frac{193}{552}-10=\frac{53628}{304704}-\frac{5713}{552}$$

$$\boxed{Y_{non\ contrainte}=-\frac{3099948}{304704}\cong -10,174}$$

La valeur de la fonction* à *la solution contrainte est plus grande que la valeur non contrainte

Institut de Financement du Développement du Maghreb Arabe
CONCOURS DE RECRUTEMENT DE LA XXXVIème PROMOTION (BANQUE)
AOÛT 2016

Exercice 13 : Partie 2 : (5 points : 1+1+1+2)

Énoncé

On considère la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ *où α est un paramètre inconnu.*

1) *Calculer la matrice* $B = A^2 - 3A + (2-\alpha)I$ *où I est la matrice identité. Vérifier que B est indépendante de la valeur de α*

2) *Calculer A^{-1}, l'inverse de la matrice A en précisant la condition qu'il faut imposer sur α pour que A^{-1} existe.*

3) *Comparer A^{-1} à la matrice C définie par : $C = A - 3I$.*

4) *On suppose dans cette question que $\alpha = 2$. Prouver que pour tout entier n supérieur ou égal à 1 $(n \geq 1)$, que $A^n = \lambda^n A$, avec λ un scalaire à déterminer.*

Corrigé

1)

· $A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 1+\alpha & 3\alpha \\ 3 & 4+\alpha \end{bmatrix}$

· $B = A^2 - 3A + (2-\alpha)I = \begin{bmatrix} 1+\alpha & 3\alpha \\ 3 & 4+\alpha \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + (2-\alpha)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1+\alpha & 3\alpha \\ 3 & 4+\alpha \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 3\alpha \\ 3 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2-\alpha & 0 \\ 0 & 2-\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+\alpha-3+2-\alpha) & (3\alpha-3\alpha+0) \\ (3-3+0) & 4+\alpha-6+2-\alpha \end{bmatrix}$$

D'où $\boxed{B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0_{2,2}\text{, la matrice nulle de dimension } 2\times 2\text{, donc évidemment indépendante de la valeur de } \alpha}$

2)

$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - \alpha$

$\boxed{A \text{ est inversible si et seulement si } det(A) \neq 0 \text{ donc pour } \alpha \neq 2}$

On a : $A^{-1} = \dfrac{1}{det(A)}[Com(A)]'$; *avec* $Com(A) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -\alpha & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow [Com(A)]' = \begin{bmatrix} 2 & -\alpha \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$Par\ la\ suite\ , \forall \alpha \neq 2, A^{-1} = \dfrac{1}{det(A)}[Com(A)]' = \dfrac{1}{2-\alpha}\begin{bmatrix} 2 & -\alpha \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\boxed{\forall \alpha \neq 2\ , A^{-1} = \frac{1}{2-\alpha}\begin{bmatrix} 2 & -\alpha \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{2-\alpha} & -\frac{\alpha}{2-\alpha} \\ -\frac{1}{2-\alpha} & \frac{1}{2-\alpha} \end{bmatrix}}$$

3)

$On\ a : A^2 - 3A + (2-\alpha)I = 0 \Leftrightarrow A^2 - 3A = -(2-\alpha)I \ \Leftrightarrow A(A-3I) = -(2-\alpha)I\ , or\ C = A - 3I$

$Ainsi\ , on\ obtient : AC = -(2-\alpha)I\ et\ pour\ \alpha \neq 2\ on\ aura\ A \times \left(\left(\dfrac{-1}{2-\alpha}\right)C\right) = I$

$Or\ par\ définition\ AA^{-1} = A^{-1}A = I\ et\ l'inverse d'une\ matrice\ carrée\ s'il\ existe\ il\ est$

$unique\ .\ D'où$ $\boxed{\forall \alpha \neq 2\ , A^{-1} = \left(\dfrac{-1}{2-\alpha}\right)C}$

4)

$\alpha\ étant\ égal\ à\ 2\ , donc \begin{cases} B = A^2 - 3A \\ \quad et \\ B = 0\ , \forall \alpha \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow A^2 - 3A = 0 \Rightarrow A^2 = 3A$

$Reformulons\ la\ question\ 4) :$ $Prouver\ que\ pour\ tout\ entier\ n\ supérieur\ ou\ égal\ à\ 1$

$(n \geq 1), A^{n+1} = \lambda^n A\ , avec\ \lambda\ un\ scalaire\ à\ déterminer.$

$Suggérons\ donc\ la\ propriété\ \mathcal{P}_n\ , pour\ tout\ n\ \in \mathbb{N}^* : A^{n+1} = 3^n A$

Initialisation : $Vérifions\ que\ \mathcal{P}_1\ est\ vraie :$

$On\ a\ A^{1+1} = A^2 = \begin{bmatrix} 1+2 & 3\times 2 \\ 3 & 4+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 3^1 A\ .\ \mathcal{P}_1\ est\ vraie$

Hérédité : $Supposons\ que\ \mathcal{P}_n\ est\ vraie\ , puis\ démontrons\ que\ \mathcal{P}_{n+1} est\ aussi\ vraie :$

$$A^{(n+1)+1} = \underbrace{A^{n+1}}_{\text{égal à } 3^n A \text{ par hypothèse}} A = (3^n A)A = 3^n \underbrace{A^2}_{3A} = 3^{n+1}A\ et\ \mathcal{P}_{n+1} est\ aussi\ vraie$$

$D'où$ $\boxed{\forall n\ \in \mathbb{N}^* : A^{n+1} = 3^n A}$

Institut de Financement du Développement du Maghreb Arabe
CONCOURS DE RECRUTEMENT D'UNE PROMOTION SPÉCIALE
Dédiée exclusivement au Ministère des Finances Tunisien
Mai 2023

Exercice 14 : *(4 points : 1 point par question)*

ÉNONCÉ

On considère la matrice $M = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{bmatrix}$ *où a est un scalaire réel en module inférieur strictement à 1.*

1- *Prouver que $M^2 - 2aM = \beta I$ où I est la matrice identité et β un scalaire dépendant de a qu'il faut déterminer.*
2- *En déduire de cette égalité l'expression de l'inverse de M*
3- *On suppose dans la suite que : $a = 0$*
   i. *Calculer M^n où n est un entier positif ou négatif*
   ii. *Calculer les valeurs du paramètre λ tel que le déterminant de $M - \lambda I$ est nul.*

Corrigé

1-

- $M^2 = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+1 & 2a \\ 2a & a^2+1 \end{bmatrix}$
- $M^2 - 2aM = \begin{bmatrix} a^2+1 & 2a \\ 2a & a^2+1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2a^2 & -2a \\ -2a & -2a^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-a^2 & 0 \\ 0 & 1-a^2 \end{bmatrix} = (1-a^2)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

D'où: $\boxed{M^2 - 2aM = (1-a^2)I_2}$

2-

On a $|a| < 1 \Longrightarrow a \neq -1$ *et* $a \neq 1$*. Par la suite :*

- $M^2 - 2aM = (1-a^2)I_2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{1-a^2}M(M - 2aI_2) = I_2 \Leftrightarrow M\left[\dfrac{1}{1-a^2}(M - 2aI_2)\right] = I_2$

D'où M est inversible et $\boxed{M^{-1} = \dfrac{1}{1-a^2}(M - 2aI_2)}$

- $M^{-1} = \dfrac{1}{1-a^2}(M - 2aI_2) = \dfrac{1}{1-a^2}\left(\begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2a & 0 \\ 0 & -2a \end{bmatrix}\right) = \dfrac{1}{1-a^2}\begin{bmatrix} -a & 1 \\ 1 & -a \end{bmatrix}$

$$\boxed{M^{-1} = \frac{1}{1-a^2}\begin{bmatrix} -a & 1 \\ 1 & -a \end{bmatrix}}$$

3-

i.

☑ $Si\ n \in \mathbb{N}$

◦ $Pour\ a = 0 : M^2 - 2aM = (1-a^2)I_2\ s'écrit :\ M^2 = I_2 \Rightarrow M^3 = I_2M = M \Rightarrow M^4 = M^2 = I_2$

$On\ pourra\ suggérer\ la\ propriété\ de\ récurrence\ \left\{\mathcal{P}_k, \forall\ k\ \in \mathbb{N} : M^k = \begin{cases} I_2, si\ k = 2p \\ M, si\ k = 2p+1 \end{cases}\right\}$

☑ $Si\ n \in \mathbb{Z}_-$

◦ $Pour\ a = 0 : M^{-1} = \dfrac{1}{1-a^2}(M - 2aI_2)\ s'écrit :\ M^{-1} = M \Rightarrow M^{-2} = M^{-1}M^{-1} = M^{-1}M = I_2$

$\Rightarrow M^{-3} = M^{-2}M^{-1} = I_2M^{-1} = M$

$On\ pourra\ suggérer\ la\ propriété\ de\ récurrence\ \left\{\mathcal{P}_k, \forall\ k\ \in \mathbb{N} : M^{-k} = \begin{cases} I_2, si\ k = -2p \\ M, si\ k = -2p-1 \end{cases}\right\}$

$De\ ce\ fait\ la\ propriété\ à\ démontrer\ par\ récurrence, pour\ n\ un\ entier\ positif\ ou$

$négatif\ sera : \left\{\mathcal{P}_n, \forall\ n\ \in \mathbb{Z} : M^n = \begin{cases} I_2, si\ n = 2p \\ M, si\ n = 2p+1 \end{cases}, p \in \mathbb{Z}\right\}$

$Initialisation :\ Vérifions\ que\ \mathcal{P}_0\ est\ vraie :$

$On\ a\ M^0 = I_2, donc\ \mathcal{P}_0\ est\ vraie$

$Hypothése : Supposons\ que\ \mathcal{P}_n\ est\ vraie : M^n = \begin{cases} I_2, si\ n = 2p \\ M, si\ n = 2p+1 \end{cases}$

$Hérédité :\ Démontrons\ que\ \mathcal{P}_{n+1} est\ aussi\ vraie :$

$$M^{n+1} = M^nM = \begin{cases} M, si\ n+1 = 2p+1 \\ M^2 = I_2, si\ n+1 = 2p+2 \end{cases}$$

$D'où\ \boxed{\forall n\ \in \mathbb{N}^* : \forall\ n\ \in \mathbb{Z} : M^n = \begin{cases} I_2, si\ n = 2p \\ M, si\ n = 2p+1 \end{cases}, p \in \mathbb{Z}}$

ii.

◦ $M - \lambda I_2 = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-\lambda & 1 \\ 1 & a-\lambda \end{bmatrix}, ainsi :$

◦ $det(M - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} a-\lambda & 1 \\ 1 & a-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)^2 - 1 = (\lambda - a)^2 - 1 = (\lambda - a - 1)(\lambda - a + 1)$

◦ $det(M - \lambda I_2) = 0 \Leftrightarrow \{\lambda - a - 1 = 0\ ou\ \lambda - a + 1 = 0\} \Leftrightarrow \lambda = a \pm 1$

$\boxed{det(M - \lambda I_2) = 0 \Leftrightarrow \lambda = a \pm 1}$

Remarque:

$det(M - \lambda I_2)\ est\ dit\ polynome\ caractéristique\ de\ M\ qui\ sera\ noter\ P_M(\lambda), \lambda_1 = a - 1\ et$

$\lambda_2 = a + 1\ seront\ les\ valeurs\ propres\ de\ M.$

$On\ pourra\ par\ la\ suite\ diagonaliser\ facilement\ M\ et\ retrouver\ ses\ puissances.$

BEN AHMED MOHSEN Téléphone: (+216) 97 619191 / 54 619191
omega.center.cp@gmail.com https://web.facebook.com/OMEGACENTER2014

Exercice 15 : Partie 2 : (5 points : 1,5+1,5+1+1)

Énoncé

On note X le vecteur colonne ayant pour composantes X_1 et X_2 deux variables normales centrées réduites indépendantes : $X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$. *On pose* $U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$, *le vecteur défini par :*

$U = AX$ *où* A *désigne la matrice :* $A = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/2 \\ 1/2 & 1/4 \end{bmatrix}$

1) *Vérifier que :* $A^2 = \frac{7}{12}A + \frac{1}{6}I$ *où* I *est la matrice identité.*
2) *En déduire que l'inverse de la matrice* A *est égale à :* $6A - \frac{7}{2}I$
3) *Démontrer que la matrice de variances- covariances du vecteur* U *est égale à* A^2
4) *Déterminer les densités de probabilité de* U_1 *et de* U_2

Corrigé

1) *On a :* $A^2 = \left(\frac{1}{12}\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}\right)\left(\frac{1}{12}\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{12^2}\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{144}\begin{bmatrix} 52 & 42 \\ 42 & 45 \end{bmatrix}$

Par la suite, $A^2 - \frac{7}{12}A - \frac{1}{6}I = \frac{1}{144}\begin{bmatrix} 52 & 42 \\ 42 & 45 \end{bmatrix} - \frac{7}{12}\left(\frac{1}{12}\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}\right) - \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \frac{1}{144}\left[\begin{bmatrix} 52 & 42 \\ 42 & 45 \end{bmatrix} - 7\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} - 24\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{144}\left[\begin{bmatrix} 52 & 42 \\ 42 & 45 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 28 & 42 \\ 42 & 21 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 24 \end{bmatrix}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

D'où : $A^2 = \frac{7}{12}A + \frac{1}{6}I$

2) $A^2 - \frac{7}{12}A = \frac{1}{6}I \Leftrightarrow 6A^2 - \frac{7}{2}A = I \Leftrightarrow A\left(6A - \frac{7}{2}I\right) = I$

D'où A *est inversible et* $\boxed{A^{-1} = 6A - \frac{7}{2}I}$

Adresse : 2, Rue Ibn Arafa, av de l'environnement Manouba Centre, Manouba

3) X_1 et X_2 2 v.a i.i.d de la loi $\mathcal{N}(0,1) \Rightarrow \begin{cases} E(X_1) = E(X_2) = 0 \\ V(X_1) = V(X_2) = 1 \\ Cov(X_1, X_2) = 0 \end{cases}$

Par la suite, $C = V(X) = \begin{bmatrix} Var(X_1) & Cov(X_1,X_2) \\ Cov(X_1,X_2) & Var(X_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$

En effet $\Gamma = V(U) = V(AX) = AV(X)A' = AIA' = AA'$

Or A est une matrice symétrique, puisque, $A' = A$. D'où $\boxed{\Gamma = V(U) = A^2 = \frac{1}{144}\begin{bmatrix} 52 & 42 \\ 42 & 45 \end{bmatrix}}$

4) $U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = AX = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/2 \\ 1/2 & 1/4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{X_1}{3} + \frac{X_2}{2} \\ \frac{X_1}{2} + \frac{X_2}{4} \end{bmatrix}$

· En calculant de deux manières, on obtient :

$$\begin{cases} E(U) = \begin{bmatrix} E(U_1) \\ E(U_2) \end{bmatrix} \\ E(U) = \begin{bmatrix} E\left(\frac{X_1}{3} + \frac{X_2}{2}\right) \\ E\left(\frac{X_1}{2} + \frac{X_2}{4}\right) \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E(U_1) = E\left(\frac{X_1}{3} + \frac{X_2}{2}\right) = \frac{1}{3}E(X_1) + \frac{1}{2}E(X_2) = 0 \\ E(U_2) = E\left(\frac{X_1}{2} + \frac{X_2}{4}\right) = \frac{1}{2}E(X_1) + \frac{1}{4}E(X_2) = 0 \end{cases}$$

· D'autre part $\Gamma = V(U) = \begin{bmatrix} V(U_1) & Cov(U_1,U_2) \\ Cov(U_1,U_2) & V(U_2) \end{bmatrix}$ et comme on a $\Gamma = \begin{bmatrix} \frac{13}{36} & \frac{7}{24} \\ \frac{7}{24} & \frac{5}{16} \end{bmatrix}$, donc

par identification, on obtient : $\begin{cases} V(U_1) = 13/36 \\ V(U_2) = 5/16 \\ Cov(U_1,U_2) = 7/24 \end{cases}$

Rappelons que X_1 et X_2 2 v.a i.i.d de la loi $\mathcal{N}(0,1) \Rightarrow \begin{cases} U_1 = \frac{X_1}{3} + \frac{X_2}{2} \rightsquigarrow \mathcal{N}\big(E(U_1), V(U_1)\big) \\ U_2 = \frac{X_1}{2} + \frac{X_2}{4} \rightsquigarrow \mathcal{N}\big(E(U_2), V(U_2)\big) \end{cases}$

D'où : $\boxed{U_1 \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(0, \left(\frac{\sqrt{13}}{6}\right)^2\right) \text{ et } U_2 \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(0, \left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)^2\right)}$

· d.d.p de la v.a U_1 : $\boxed{f_{U_1}(u) = \sqrt{\frac{18}{13\pi}}\, e^{-\frac{18u^2}{13}}}$

· d.d.p de la v.a U_2 : $\boxed{f_{U_2}(u) = \sqrt{\frac{8}{5\pi}}\, e^{-\frac{8u^2}{5}}}$

Institut de Financement du Développement du Maghreb Arabe
CONCOURS DE RECRUTEMENT DE LA XXXVIIIème PROMOTION (ASSURANCE)
Septembre 2020

Exercice 16 : (5 points : 2+1+1+1)

Énoncé

On considère 3 projets d'investissement dont les rendements, notés X_1, X_2 et X_3, sont des distributions normales centrées réduites avec des covariances :

$Cov(X_i, X_j) = \rho$ *pour tout* $i \neq j$ *où* ρ *est un paramètre.*

1. *Déterminer l'espérance mathématique et la matrice de variances-covariances* Ω *du vecteur constitué par les trois variables* X_1, X_2 *et* X_3
2. *Calculer le déterminant de* Ω
3. *Déterminer l'espérance mathématique et la variance de la somme* $X_1 + X_2 + X_3$
4. *Pour quelles valeurs de* ρ, *cette variance est-elle maximale ? minimale ? Commenter.*

Corrigé

1. $\forall i \in \{1,2,3\}, X_i \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1) \Rightarrow \begin{cases} E(X_1) = E(X_2) = E(X_3) = 0 \\ V(X_1) = V(X_2) = V(X_3) = 1 \end{cases}$ *et* $\forall i \neq j, Cov(X_i, X_j) = \rho$

Notons U le vecteur aléatoire constitué par les trois variables X_1, X_2 *et* $X_3 \Rightarrow U = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$

- $E(U) = \begin{pmatrix} E(X_1) \\ E(X_2) \\ E(X_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{E(U) = 0_{3\times 1}}$

- $V(U) = E\left[(U - E(U))(U - E(U))'\right] = \Omega = \begin{pmatrix} V(X_1) & Cov(X_1, X_2) & Cov(X_1, X_3) \\ Cov(X_2, X_1) & V(X_2) & Cov(X_2, X_3) \\ Cov(X_3, X_1) & Cov(X_3, X_2) & V(X_3) \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \boxed{\Omega = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho \\ \rho & 1 & \rho \\ \rho & \rho & 1 \end{pmatrix}}$

2.

$$|\Omega| = \begin{vmatrix} 1 & \rho & \rho \\ \rho & 1 & \rho \\ \rho & \rho & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \begin{matrix} C_1 - C_2 \\ \downarrow \\ C_1 \end{matrix} & \begin{matrix} C_2 - C_3 \\ \downarrow \\ C_2 \end{matrix} & \\ (1-\rho) & 0 & \rho \\ -(1-\rho) & (1-\rho) & \rho \\ 0 & -(1-\rho) & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1-\rho)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & \rho \\ -1 & 1 & \rho \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1-\rho)^2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & (1+2\rho) \\ -1 & 1 & \rho \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \mathrm{L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3}$$

$$= (1+2\rho)(1-\rho)^2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & \rho \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1+2\rho)(1-\rho)^2 \underbrace{\left[(+1) \times \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}\right]}_{1}$$

D'où, $\boxed{|\Omega| = (1+2\rho)(1-\rho)^2}$

3.

- $E(X_1 + X_2 + X_3) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) \Rightarrow \boxed{E(X_1 + X_2 + X_3) = 0}$

- $V(X_1 + X_2 + X_3) = V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) + 2Cov(X_1, X_2) + 2Cov(X_1, X_3) + 2Cov(X_2, X_3)$

$\Rightarrow \boxed{V(X_1 + X_2 + X_3) = 3(1+2\rho)}$

4.

- $\forall i, j \in \{1, 2, 3\}$, *le coefficient de corrélation linéaire entre* X_i *et* X_j, *sera* :

$$\rho_{X_i X_j} = \frac{Cov(X_i, X_j)}{\sqrt{V(X_i)V(X_j)}} = \rho \text{ , or } \rho_{X_i X_j} \in [-1, 1]$$

$D'autrepart, V(X_1 + X_2 + X_3) \geq 0 \Rightarrow 3(1+2\rho) \geq 0 \Rightarrow \rho \geq -\dfrac{1}{2}$

$ainsi \boxed{\rho \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]}$

- $-\dfrac{1}{2} \leq \rho \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq 2\rho \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq 1 + 2\rho \leq 3 \Leftrightarrow 0 \leq 3(1+2\rho) \leq 9$

$\boxed{0 \leq V(X_1 + X_2 + X_3) \leq 9}$

- $\max_{\rho}\left(V(X_1 + X_2 + X_3)\right) = 9 \Leftrightarrow \rho = 1 \Rightarrow |\Omega| = 0$

◦ $\boldsymbol{Il\ est\ \text{é}vident, pour\ une\ corr\text{é}lation\ parfaite\ entre\ les\ rendements\ et\ qui\ implique}$ $\boldsymbol{une\ sp\text{é}cialisation\ va\ g\text{é}n\text{é}rer\ un\ risque\ maximal\ et\ cela\ se\ traduit\ par\ une\ corr\text{é}lation}$ $\boldsymbol{parfaite\ entre\ les\ investissements\ et\ qui\ va\ conduire\ bien\ \text{é}videmment\ \text{à}\ une\ matrice\ des}$ $\boldsymbol{variances\text{-}covariances\ des\ rentabilit\text{é}s\ singuli\text{è}re\ (non\ inversible)}$

- $\boldsymbol{\min_{\rho}\big(V(X_1+X_2+X_3)\big)=0 \Leftrightarrow \rho=-\frac{1}{2} \Rightarrow |\Omega|=0}$

◦ $\boldsymbol{C'est\ l'investissement\ sans\ risque\ ou\ l'effet\ d'une\ diversification, certes}$ $\boldsymbol{rationnelles\ permettant\ de\ compenser\ la\ baisse\ de\ certains\ rendements\ par\ la\ hausse}$ $\boldsymbol{des\ autres, puisque\ la\ corr\text{é}lation\ est\ n\text{é}gative\ \left(\rho=-\frac{1}{2}\right) mais\ qui\ conduit\ toujours\ \text{à}}$ $\boldsymbol{une\ matrice\ des\ variances\text{-}covariances\ des\ rentabilit\text{é}s\ singuli\text{è}re\ (|\Omega|=0)}$

Institut de Financement du Développement du Maghreb Arabe
CONCOURS DE RECRUTEMENT DE LA XLIIIème PROMOTION (BANQUE)
Août 2023

Exercice 17 : *(5 points : 1point par question)*

Énoncé

$\boldsymbol{On\ consid\text{è}re\ la\ matrice\ M\ d'ordre(3,3)\ et\ le\ vecteur\ colonne\ J\ d\text{é}finis\ par}$:

$$M=\begin{bmatrix} a & 1-a & 0 \\ \frac{1}{2}(1-a) & a & \frac{1}{2}(1-a) \\ 0 & 1-a & a \end{bmatrix}, J=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{O\text{ù}\ a\ est\ un\ scalaire\ r\text{é}el.}$

1.
   i. $\boldsymbol{Pour\ quelle\ valeur\ du\ param\text{è}tre\ a, la\ matrice\ M\ est\text{-}elle\ sym\text{é}trique}$?
   ii. $\boldsymbol{En\ d\text{é}duire\ dans\ ce\ cas\ la\ valeur\ du\ d\text{é}terminant\ de\ M}$
2. $\boldsymbol{Dans\ cette\ question\ 2), on\ suppose\ que\ a=1/2}$
   i. $\boldsymbol{La\ matrice\ M\ est\text{-}elle\ sym\text{é}trique}$? $\boldsymbol{Est\text{-}elle\ inversible}$?
   $\boldsymbol{Justifier\ votre\ r\text{é}ponse.}$
   ii. $\boldsymbol{V\text{é}rifier\ que\ MJ=J. En\ d\text{é}duire\ par\ r\text{é}currence\ que\ M^nJ=J, o\text{ù}\ n\ est\ un}$ $\boldsymbol{entier\ positif}$

3. $\textit{Dans la suite de l'exrcice, le paramètre a est un scalaire} : 0 < a < 1.$
$\textit{pour quelles valeurs de a la matrice M est-elle inversible}?$

Corrigé

1.

i.

$$M = \begin{bmatrix} a & 1-a & 0 \\ \frac{1}{2}(1-a) & a & \frac{1}{2}(1-a) \\ 0 & 1-a & a \end{bmatrix} \Leftrightarrow M' = \begin{bmatrix} a & \frac{1}{2}(1-a) & 0 \\ 1-a & a & 1-a \\ 0 & \frac{1}{2}(1-a) & a \end{bmatrix}$$

$$Or\,, M \text{ est symétrique } \Leftrightarrow M' = M \Leftrightarrow \frac{1}{2}(1-a) = (1-a) \Leftrightarrow -\frac{1}{2}(1-a) = 0$$

$$D'où \boxed{M \text{ est symétrique } \Leftrightarrow a = 1}$$

ii.

$$Pour, a = 1, \text{on obtient} : \; M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3 \Longrightarrow, \boxed{|M| = |I_3| = 1}$$

2.

i.

$$Pour, a = \frac{1}{2}, \text{on obtient} : \; M = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

- $M' = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix} \Longrightarrow M' \neq M$

$$D'où : \boxed{Pour, a = \frac{1}{2}\,, M \text{ n'est pas symétrique}}$$

- $|M| = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \\ \end{array} \begin{vmatrix} & \begin{matrix} C_2 - C_1 \\ \downarrow \\ C_2 \end{matrix} & \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{vmatrix} = 0$

$$D'où : \boxed{Pour, a = \frac{1}{2}\,, |M| = 0 \text{ et } M \text{ n'est pas inversible}}$$

ii.

▪ $MJ = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+0 \\ \frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4} \\ 0+\frac{1}{2}+\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

D'où : $\boxed{Pour, a = \frac{1}{2}, MJ = J}$

▪ Démontrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}_n$: " $\forall n \in \mathbb{N} : M^n J = J$ "

Initialisation : Vérifions que $\mathcal{P}_0$ est vraie :

On a $M^0 J = I_3 J = J$. $\mathcal{P}_0$ est vraie

Hypothèse : Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie jusqu'à l'ordre p : $(M^p J = J)$

Hérédité : Démontrons que $\mathcal{P}_n$ est aussi vraie à l'ordre $p+1$:

$M^{p+1}J = M.\underbrace{(M^p J)}_{\text{égal à } J \text{ par hypothèse}} = MJ = J$ et $\mathcal{P}_n$ est a vraie à l'ordre $p+1$.

D'où $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} : M^n J = J}$

3.

▪ Pour, $a \in]0,1[$, $|M| = \begin{vmatrix} a & 1-a & 0 \\ \frac{1}{2}(1-a) & a & \frac{1}{2}(1-a) \\ 0 & 1-a & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \begin{matrix} C_1+C_2+C_3 \\ \downarrow \\ C_1 \end{matrix} & & \\ 1 & 1-a & 0 \\ 1 & a & \frac{1}{2}(1-a) \\ 1 & 1-a & a \end{vmatrix}$

$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1-a & 0 \\ 0 & 2a-1 & \frac{1}{2}(1-a) \\ 0 & -(2a-1) & \frac{1}{2}(3a-1) \end{vmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1-a & 0 \\ 0 & 2a-1 & \frac{1}{2}(1-a) \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} L'_3 \leftarrow L'_3 + L'_2$

$|M| = +a\begin{vmatrix} 1 & 1-a \\ 0 & 2a-1 \end{vmatrix} = a(2a-1)$

▪ M est inversible $\Leftrightarrow |M| \neq 0$

D'où, $\boxed{M \text{ est inversible si et seulement si } a \neq 0 \text{ et } a \neq \frac{1}{2}}$

Institut de Financement du Développement du Maghreb Arabe
CONCOURS DE RECRUTEMENT DE LA XLIème PROMOTION (BANQUE)
Septembre 2021

Exercice 18 : (8 points : 1+2+2+1+1+1)

Énoncé

On note p_t et q_t respectivement le prix unitaire et la quantité vendue d'un produit donné observés à l'instant t pour $t = 1, 2, 3, \ldots$

On admet que les évolutions temporelles de ces grandeurs sont définies par les deux relations suivantes :

$$\begin{cases} p_t = \dfrac{3}{10}p_{t-1} + \dfrac{6}{10}q_{t-1} + 2 + \varepsilon_{1t} \\ q_t = \dfrac{1}{10}p_{t-1} + \dfrac{2}{10}q_{t-1} - 1 + \varepsilon_{2t} \end{cases} ; \text{ pour } t = 1, 2, 3, \ldots$$

avec ε_{1t} et ε_{2t} sont deux termes d'erreurs indépendants entre eux centrés et réduits.

On note $Y_t = \begin{bmatrix} p_t \\ q_t \end{bmatrix}$; pour $t = 0, 1, 2, \ldots$

On admet que pour $t = 0$, l'espérance mathématique et la matrice de variance-covariance de Y_0 sont définies par : $E(Y_0) = 0$ et $V(Y_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

1. Prouver que : $Y_t = AY_{t-1} + B + \mathcal{E}_t$, où A, B et $\mathcal{E}_t$ sont trois matrices à déterminer
2. Prouver que $AB = 0$ et que $A^t = \left(\frac{1}{2}\right)^k A$, pour, $t \geq 2$, avec k une constante à déterminer
1. En déduire les expressions de p_t et de q_t en fonction de p_0 de q_0 de t et de termes d'erreurs
2. Calculer $E(Y_t)$
3. Si l'on admet que les deux termes d'erreurs ε_{1t} et ε_{2t} sont nuls pout tout t,
   i. Calculer la matrice variance-covariance $V(Y_t)$
   ii. Trouver la valeur du coefficient de corrélation linéaire de p_t et de q_t. Commenter.

Corrigé

1.

$$(S)\begin{cases} p_t = \frac{3}{10}p_{t-1} + \frac{6}{10}q_{t-1} + 2 + \varepsilon_{1t} \\ q_t = \frac{1}{10}p_{t-1} + \frac{2}{10}q_{t-1} - 1 + \varepsilon_{2t} \end{cases}$$

L'écriture matricielle du système linéaire (S) sera : $\begin{bmatrix} p_t \\ q_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{10} & \frac{6}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{2}{10} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{t-1} \\ q_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix}$

D'où : $\boxed{Y_t = AY_{t-1} + B + \mathcal{E}_t, \text{avec } Y_t = \begin{bmatrix} p_t \\ q_t \end{bmatrix}, Y_{t-1} = \begin{bmatrix} p_{t-1} \\ q_{t-1} \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} \frac{3}{10} & \frac{6}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{2}{10} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ et } \mathcal{E}_t = \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix}}$

2.

- $AB = \begin{bmatrix} \frac{3}{10} & \frac{6}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{2}{10} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\boxed{AB = 0_{2\times 1}}$

- ***Calculons A^2 puis A^3:***

  - $A^2 = \left(\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right)\left(\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{10^2}\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{10^2}\begin{bmatrix} 15 & 30 \\ 5 & 10 \end{bmatrix} = \frac{5}{10}\underbrace{\left(\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right)}_{A}$

$A^2 = \frac{1}{2}A$

  - $A^3 = AA^2 = A\left(\frac{1}{2}A\right) = \frac{1}{2}A^2$

$A^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 A$

- ***Suggérons la propriété*** $\left(\mathcal{P}_t : \forall t \in \mathbb{N}^*, A^t = \left(\frac{1}{2}\right)^{t-1} A\right)$ ***qu'on démontrera par récurrence :***

  - ***Initialisation pour*** $(t = 1)$: $\begin{cases} A^1 = A \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{1-1} A = \left(\frac{1}{2}\right)^0 A = A \end{cases} \Rightarrow A^1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{1-1} A$ ***. Donc $\mathcal{P}_1$ est vraie***

  - ***Hypothèse: Supposons que $\mathcal{P}_t$ est vraie jusqu'à l'ordre (s), $1 \leq s \leq t$:***

$\left(\boldsymbol{Pour}, 1 \leq s \leq t\,, A^s = \left(\frac{1}{2}\right)^{s-1} A\right)$

◦ ***Hérédité* : *Démontrons*** $\left(\mathcal{P}_{s+1} : A^{s+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{s} A\right)$ ***est aussi vraie* :**

$$A^{s+1} = AA^s = A\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{s-1} A\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{s-1} A^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{s-1}\left(\frac{1}{2}A\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{s} A$$

Donc $\mathcal{P}_{s+1}$ ***est vraie***

D'où $(\mathcal{P}_s$ ***vraie*** $\Rightarrow \mathcal{P}_{s+1}$ ***est vraie***$)$ ***est vraie et*** $\boxed{\forall t \in \mathbb{N}^*, A^t = \left(\frac{1}{2}\right)^{t-1} A}$

3.

▪ ***On a***: $Y_t = AY_{t-1} + B + \mathcal{E}_t = A(AY_{t-2} + B + \mathcal{E}_{t-1}) + B + \mathcal{E}_t = A^2Y_{t-2} + \underbrace{AB}_{0_{2\times1}} + A\mathcal{E}_{t-1} + B + \mathcal{E}_t$

$$\Leftrightarrow Y_t = A^2(AY_{t-3} + B + \mathcal{E}_{t-2}) + A\mathcal{E}_{t-1} + B + \mathcal{E}_t = A^3Y_{t-3} + A\left(\underbrace{AB}_{0_{2\times1}}\right) + A^2\mathcal{E}_{t-2} + A\mathcal{E}_{t-1} + B + \mathcal{E}_t$$

$$\Leftrightarrow Y_t = A^3Y_{t-3} + A^2\mathcal{E}_{t-2} + A\mathcal{E}_{t-1} + B + \mathcal{E}_t$$

▪ ***Suggérons la propriété* :** $\mathcal{P}_t :\ \forall t \in \mathbb{N}^*, Y_t = A^tY_0 + \mathcal{E}_t + A\mathcal{E}_{t-1} + A^2\mathcal{E}_{t-2} + \cdots + A^{t-1}\mathcal{E}_1 + B$

En d'autres termes $\left(\mathcal{P}_t :\ \forall t \in \mathbb{N}^*, Y_t = A^tY_0 + \sum_{i=0}^{t-1} A^i\mathcal{E}_{t-i} + B\right)$ ***qu'on démontrera***

***par récurrence* :**

◦ ***Initialisation pour*** $(t = 1)$: $\begin{cases} Y_1 = AY_{1-1} + \mathcal{E}_1 + B = AY_0 + \mathcal{E}_1 + B \\ A^1Y_0 + \sum_{i=0}^{0} A^i\mathcal{E}_{1-i} + B = AY_0 + \mathcal{E}_1 + B \end{cases} \Rightarrow \mathcal{P}_1$ ***est vraie***

◦ ***Hypothèse***: ***Supposons que*** $\mathcal{P}_t$ ***est vraie jusqu'à l'ordre*** $(s)\,, 1 \leq s \leq t$ **:**

$\left(\boldsymbol{Pour}, 1 \leq s \leq t\,, Y_s = A^sY_0 + \sum_{i=0}^{s-1} A^i\mathcal{E}_{s-i} + B\right)$

◦ ***Hérédité* : *Démontrons*** $\left(\mathcal{P}_{s+1} : Y_{s+1} = A^{s+1}Y_0 + \sum_{i=0}^{s} A^i\mathcal{E}_{s+1-i} + B\right)$ ***est aussi vraie* :**

$$Or, Y_{s+1} = AY_s + \mathcal{E}_{s+1} + B = A\left(A^sY_0 + \sum_{i=0}^{s-1} A^i\mathcal{E}_{s-i} + B\right) + \mathcal{E}_{s+1} + B$$

$$Y_{s+1}=A^{s+1}Y_0+\left(\sum_{i=0}^{s-1}A^{i+1}\mathcal{E}_{s-i}\right)+\underbrace{AB}_{0_{2\times1}}+\mathcal{E}_{s+1}+B$$

$$Effectuons\ la\ réindexation\ suivante: k=i+1\Rightarrow i=k-1\ et\ \begin{cases}i=s-1\Rightarrow k=s\\ i=0\Rightarrow k=1\end{cases}$$

$$Par\ la\ suite, \sum_{i=0}^{s-1}A^{i+1}\mathcal{E}_{s-i}=\sum_{k=1}^{s}A^k\mathcal{E}_{s-(k-1)}=\sum_{k=1}^{s}A^k\mathcal{E}_{s+1-k}=\sum_{i=1}^{s}A^i\mathcal{E}_{s+1-i}$$

$$Ainsi, Y_{s+1}=A^{s+1}Y_0+\left(\sum_{i=1}^{s}A^i\mathcal{E}_{s+1-i}\right)+\mathcal{E}_{s+1}+B=A^{s+1}Y_0+\underbrace{\left[\left(\sum_{i=1}^{s}A^i\mathcal{E}_{s+1-i}\right)+A^0\mathcal{E}_{s+1-0}\right]}_{\sum_{i=0}^{s}A^i\mathcal{E}_{s+1-i}}+B$$

$$En\ effet, Y_{s+1}=A^{s+1}Y_0+\sum_{i=0}^{s}A^i\mathcal{E}_{s+1-i}+B$$

$$Donc\ \mathcal{P}_{s+1}\ est\ vraie$$

$$(\mathcal{P}_s\ vraie\ \Rightarrow\mathcal{P}_{s+1}\ est\ vraie)\ est\ vraie. Or\ A^t=\left(\frac{1}{2}\right)^{t-1}A.$$

$$D'où\ \boxed{\forall t\in\mathbb{N}^*, Y_t=\left(\frac{1}{2}\right)^{t-1}AY_0+\sum_{i=0}^{t-1}A^i\mathcal{E}_{t-i}+B}$$

$$D'autres\ part: \sum_{i=0}^{t-1}A^i\mathcal{E}_{t-i}=\sum_{i=0}^{t-1}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}A\mathcal{E}_{t-i}\right]=A\sum_{i=0}^{t-1}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}\mathcal{E}_{t-i}\right]=A\sum_{i=0}^{t-1}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}\begin{bmatrix}\varepsilon_{1,t-i}\\ \varepsilon_{2,t-i}\end{bmatrix}\right)$$

$$\sum_{i=0}^{t-1}A^i\mathcal{E}_{t-i}=A\sum_{i=0}^{t-1}\begin{bmatrix}\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}\varepsilon_{1,t-i}\\ \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}\varepsilon_{2,t-i}\end{bmatrix}=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}3&6\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sum_{i=0}^{t-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}\varepsilon_{1,t-i}\\ \sum_{i=0}^{t-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}\varepsilon_{2,t-i}\end{bmatrix}$$

$$\sum_{i=0}^{t-1}A^i\mathcal{E}_{t-i}=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}3\left(\sum_{i=0}^{t-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}\varepsilon_{1,t-i}\right)+6\left(\sum_{i=0}^{t-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}\varepsilon_{2,t-i}\right)\\ \left(\sum_{i=0}^{t-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}\varepsilon_{1,t-i}\right)+2\left(\sum_{i=0}^{t-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}\varepsilon_{2,t-i}\right)\end{bmatrix}$$

$$\sum_{i=0}^{t-1}A^i\mathcal{E}_{t-i}=\begin{bmatrix}\frac{3}{10}\left(\sum_{i=0}^{t-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}\varepsilon_{1,t-i}\right)+\frac{6}{10}\left(\sum_{i=0}^{t-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}\varepsilon_{2,t-i}\right)\\ \frac{1}{10}\left(\sum_{i=0}^{t-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}\varepsilon_{1,t-i}\right)+\frac{2}{10}\left(\sum_{i=0}^{t-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}\varepsilon_{2,t-i}\right)\end{bmatrix}$$

$L'\acute{e}criture\ matricielle\ Y_t = \left(\frac{1}{2}\right)^{t-1} AY_0 + \sum_{i=0}^{t-1} A^i\mathcal{E}_{t-i} + B\ , nous\ donne\ le\ syst\grave{e}me\ suivant :$

$$\begin{bmatrix} p_t \\ q_t \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)^{t-1} \times \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_0 \\ q_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{10}\left(\sum_{i=0}^{t-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} \varepsilon_{1,t-i}\right) + \frac{6}{10}\left(\sum_{i=0}^{t-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} \varepsilon_{2,t-i}\right) \\ \frac{1}{10}\left(\sum_{i=0}^{t-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} \varepsilon_{1,t-i}\right) + \frac{2}{10}\left(\sum_{i=0}^{t-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} \varepsilon_{2,t-i}\right) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p_t \\ q_t \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)^{t-1} \begin{bmatrix} \frac{3}{10}p_0 + \frac{6}{10}q_0 \\ \frac{1}{10}p_0 + \frac{2}{10}q_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 + \frac{3}{10}\left(\sum_{i=0}^{t-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} \varepsilon_{1,t-i}\right) + \frac{6}{10}\left(\sum_{i=0}^{t-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} \varepsilon_{2,t-i}\right) \\ -1 + \frac{1}{10}\left(\sum_{i=0}^{t-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} \varepsilon_{1,t-i}\right) + \frac{2}{10}\left(\sum_{i=0}^{t-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} \varepsilon_{2,t-i}\right) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p_t \\ q_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3\left(\frac{1}{2}\right)^{t-1} p_0 + 6\left(\frac{1}{2}\right)^{t-1} q_0}{10} \\ \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{t-1} p_0 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^{t-1} q_0}{10} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 + \frac{3}{10}\left(\sum_{i=0}^{t-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} \varepsilon_{1,t-i}\right) + \frac{6}{10}\left(\sum_{i=0}^{t-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} \varepsilon_{2,t-i}\right) \\ -1 + \frac{1}{10}\left(\sum_{i=0}^{t-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} \varepsilon_{1,t-i}\right) + \frac{2}{10}\left(\sum_{i=0}^{t-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} \varepsilon_{2,t-i}\right) \end{bmatrix}$$

$D'o\grave{u}\ les\ expressions\ de\ p_t\ et\ de\ q_t\ en\ fonction\ de\ p_0\ de\ q_0\ de\ t\ et\ de\ termes\ d'erreurs :$

$$\begin{cases} p_t = \frac{1}{10}\left[3\left(\frac{1}{2}\right)^{t-1} p_0 + 6\left(\frac{1}{2}\right)^{t-1} q_0 + 20 + 3\sum_{i=0}^{t-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} \varepsilon_{1,t-i} + 6\sum_{i=0}^{t-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} \varepsilon_{2,t-i}\right] \\ q_t = \frac{1}{10}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{t-1} p_0 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^{t-1} q_0 - 10 + \sum_{i=0}^{t-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} \varepsilon_{1,t-i} + 2\sum_{i=0}^{t-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} \varepsilon_{2,t-i}\right] \end{cases}$$

$Notons\ le\ vecteur\ de\ termes\ al\acute{e}atoires : \xi_t = \begin{bmatrix} \epsilon_{1t} \\ \epsilon_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\sum_{i=0}^{t-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} \varepsilon_{1,t-i} + 6\sum_{i=0}^{t-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} \varepsilon_{2,t-i} \\ \sum_{i=0}^{t-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} \varepsilon_{1,t-i} + 2\sum_{i=0}^{t-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} \varepsilon_{2,t-i} \end{bmatrix}$

$On\ obtient\ finalement :$ $\boxed{\begin{cases} p_t = \frac{1}{10}\left[3\left(\frac{1}{2}\right)^{t-1} p_0 + 6\left(\frac{1}{2}\right)^{t-1} q_0 + 20 + \epsilon_{1t}\right] \\ q_t = \frac{1}{10}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{t-1} p_0 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^{t-1} q_0 - 10 + \epsilon_{2t}\right] \end{cases}}$

4.

$$On\ a : Y_t = \left(\frac{1}{2}\right)^{t-1} AY_0 + \sum_{i=0}^{t-1} A^i\mathcal{E}_{t-i} + B \Rightarrow E(Y_t) = E\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{t-1} AY_0 + \sum_{i=0}^{t-1} A^i\mathcal{E}_{t-i} + B\right]$$

$$E(Y_t) = \left(\frac{1}{2}\right)^{t-1} A\underbrace{E(Y_0)}_{0_{2\times1}} + E\left[\sum_{i=0}^{t-1} A^i\mathcal{E}_{t-i}\right] + B = \left[\sum_{i=0}^{t-1} A^i E(\mathcal{E}_{t-i})\right] + B = \left[\sum_{i=0}^{t-1} A^i E\begin{bmatrix}\varepsilon_{1,t-i}\\ \varepsilon_{2,t-i}\end{bmatrix}\right] + B$$

$$E(Y_t) = \left[\sum_{i=0}^{t-1} A^i \underbrace{\begin{bmatrix}E(\varepsilon_{1,t-i})\\ E(\varepsilon_{2,t-i})\end{bmatrix}}_{0_{2\times1}}\right] + B$$

D'où, $\boxed{E(Y_t) = B}$

5.

i. *On a :*

- $V(Y_0) = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = I_2$
- $\forall t, \varepsilon_{1t} = \varepsilon_{2t} = 0 \Rightarrow \forall t, \mathcal{E}_t = \begin{bmatrix}\varepsilon_{1t}\\ \varepsilon_{2t}\end{bmatrix} = 0_{2\times1}$
- $\begin{cases}\forall t, \mathcal{E}_t = \begin{bmatrix}\varepsilon_{1t}\\ \varepsilon_{2t}\end{bmatrix} = 0_{2\times1}\\ \forall t \in \mathbb{N}^*, Y_t = \left(\frac{1}{2}\right)^{t-1} AY_0 + \sum_{i=0}^{t-1} A^i\mathcal{E}_{t-i} + B\end{cases} \Rightarrow \forall t \in \mathbb{N}^*, Y_t = \left(\frac{1}{2}\right)^{t-1} AY_0 + B$

$$Par\ la\ suite, V(Y_t) = V\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{t-1} AY_0 + B\right] = V\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{t-1} AY_0\right] = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{t-1}\right)^2 V[AY_0] = \left(\frac{1}{2}\right)^{2t-2} V[AY_0]$$

$$V(Y_t) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2t-2} AV[Y_0]A' = \left(\frac{1}{2}\right)^{2t-2} AI_2A' = \left(\frac{1}{2}\right)^{2t-2} AA' = \left(\frac{1}{2}\right)^{2t-2}\left(\frac{1}{10}\begin{bmatrix}3 & 6\\ 1 & 2\end{bmatrix}\right)\left(\frac{1}{10}\begin{bmatrix}3 & 6\\ 1 & 2\end{bmatrix}\right)'$$

$$V(Y_t) = \frac{1}{10^2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2t-2}\begin{bmatrix}3 & 6\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 1\\ 6 & 2\end{bmatrix} = \frac{1}{100}\left(\frac{1}{2}\right)^{2t-2}\begin{bmatrix}45 & 15\\ 15 & 5\end{bmatrix} = \frac{5}{25}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2t-2}\begin{bmatrix}9 & 3\\ 3 & 1\end{bmatrix}$$

D'où: $\boxed{V(Y_t) = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{4}\right)^{t}\begin{bmatrix}9 & 3\\ 3 & 1\end{bmatrix}}$

ii.

- $V(Y_t) = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{4}\right)^{t}\begin{bmatrix}9 & 3\\ 3 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{9}{5\times4^t} & \frac{3}{5\times4^t}\\ \frac{3}{5\times4^t} & \frac{1}{5\times4^t}\end{bmatrix}$
- $On\ a\ aussi, V(Y_t) = V\left(\begin{bmatrix}p_t\\ q_t\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}V(p_t) & Cov(p_t, q_t)\\ Cov(p_t, q_t) & V(q_t)\end{bmatrix}$

- $\boldsymbol{Par\ identification, on\ obtient:\ V(p_t) = \frac{9}{5\times 4^t}, V(q_t) = \frac{1}{5\times 4^t}\ et\ Cov(p_t, q_t) = \frac{3}{5\times 4^t}}$

$\boldsymbol{On\ obtient\ par\ la\ suite\ le\ coefficient\ de\ corrélation\ linéaire\ entre\ p_t\ et\ q_t:}$

$$\rho_{p_t,q_t} = \frac{Cov(p_t,q_t)}{\sqrt{V(p_t)V(q_t)}} = \frac{\frac{3}{5\times 4^t}}{\sqrt{\left(\frac{9}{5\times 4^t}\right)\left(\frac{1}{5\times 4^t}\right)}}$$

$$\boxed{\rho_{p_t,q_t} = 1}$$

$\boldsymbol{p_t\ et\ q_t\ sont\ parfaitement\ corrélées.}$

$\boldsymbol{D'où\ l'existence\ d'une\ corrélation\ linéaire\ entre le\ prix\ unitaire, p_t\ et\ la\ quantité\ vendue}$

$\boldsymbol{d'un\ produit, q_t : p_t = \alpha + \beta q_t}$

$\boldsymbol{On\ se\ propose\ de\ déterminer\ les\ paramètres\ \alpha\ et\ \beta:}$

$$On\ a: E(Y_t) = B \Leftrightarrow E\left(\begin{bmatrix} p_t \\ q_t \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} E(p_t) \\ E(q_t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow E(p_t) = 2\ et\ E(q_t) = -1$$

$\boldsymbol{Ainsi,}$

- $p_t = \alpha + \beta q_t \Rightarrow E(p_t) = E(\alpha + \beta q_t) \Rightarrow \boxed{2 = \alpha - \beta}$ 1

- $p_t = \alpha + \beta q_t \Rightarrow V(p_t) = V(\alpha + \beta q_t) \Rightarrow V(p_t) = \beta^2 V(q_t) \Rightarrow \frac{9}{5\times 4^t} = \frac{\beta^2}{5\times 4^t} \Rightarrow \beta^2 = 9$

$\Rightarrow \beta = \pm 3$, $or\ \rho_{p_t,q_t} = 1 > 0$, $\beta\ et\ \rho_{p_t,q_t}$ $étant\ de\ même\ signe, donc$ $\boxed{\beta = 3}$ 2

$$1 + 2 \Rightarrow \begin{cases} \beta = 3 \\ 2 = \alpha - \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 3 \\ \alpha = 5 \end{cases}$$

$D'où$ $\boxed{p_t = 5 + 3q_t}$

BEN AHMED MOHSEN
omega.center.cp@gmail.com
Téléphone: (+216) 97 619191 / 54 619191
https://web.facebook.com/OMEGACENTER2014

Axe ⑦ : Table des matières

Adresse : 2, Rue Ibn Arafa, av de l'environnement Manouba Centre, Manouba