Mathématique Financière

① Interet simple

$$I = \frac{C \times i \times n}{36000}$$

← Nbre de jour
si en Nbre de mois (1200)
si en Trimestre (400)
si en Semestre (200)
si en Année (100)

$t=0$ $\qquad\qquad$ $t=n$

C_0 $\qquad\qquad$ C_n

* Valeur acquise (Valeur Capitalisée)

$$C_n = C_0 + I$$
$$= C_0 + \frac{C_0 \times i \times n}{36000}$$
$$= C_0 \left[1 + \frac{i \times n}{36000}\right]$$

* Valeur actuelle :

$$C_0 = \frac{C_n}{1 + \frac{i \times n}{36000}}$$

② Interêt Composé

$t=0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad \ldots \quad n$

C_0 $\qquad\qquad$ C_n

$$C_n = C_0 (1+i)^{n}$$

n est en année et
i : taux annuel
(Durée homogène avec le taux)

$$C_0 = \frac{C_n}{1+i}$$

③ Taux d'interêt proportionnel (interêt simple)

$$i_p = \frac{i_a}{\text{periode}}$$

$$i_m = \frac{i_a}{12}$$

$$i_T = \frac{i_a}{4}$$

$$i_S = \frac{i_a}{2}$$

Exemple Taux Annuel 9%

Taux Semes $= \frac{0,09}{2} = 0,045$ soit 4,5%

Taux trimes $= \frac{0,09}{4} = 0,0225$ soit 2,25%

Taux Trimes $= \frac{\text{Taux Sems}}{2} = \frac{0,045}{2} = 0,0225$

④ Taux equivalent (interêt Composé)

$$(1+i_a) = (1+i_p)^{\text{periode}}$$
$$= (1+i_S)^2$$
$$= (1+i_T)^4$$
$$= (1+i_m)^{12}$$

$i_a = (1+i_S)^2 - 1$ mel Semestriel → Annuel

$= (1+i_T)^4 - 1$ mel Trim → Annuel

$= (1+i_m)^{12} - 1$ mel Mensuel → Annuel

$i_{S/eq} = (1+i_a)^{1/2} - 1$ mel Annuel → Semestriel

$$i_{T/eq} = (1+i_a)^{1/4} - 1$$

$$i_{m/eq} = (1+i_a)^{1/12} - 1$$

⑤ Taux effectif / Coût

$$I = \frac{C_n \times T.\text{Eff} \times n}{36000}$$

6) Interêt précompté (Interêt simple)

C : Montant emprunté

$I = \frac{C \times i \times n}{36000}$: Interêt précompté

M : Montant reçu $= C - I$

Taux eff : r

$$I = \frac{M \times i \times n}{36000}$$

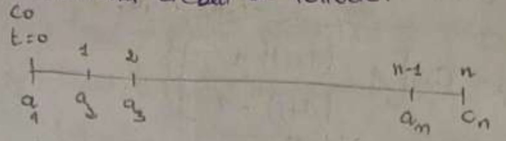
* Methode Rationnel :

$$I = \frac{C \times t \times n}{36000 + (t \times n)} \Rightarrow M = C - I$$

Taux eff : r

$$I = \frac{M \times r \times n}{36000}$$

* Valeur acquise d'une serie d'annuites Constantes debut de Periode :



$$C_n = a(1+i)^n + a(1+i)^{n-1} + \dots + a(1+i)$$

$$= a\left[(1+i)^n + (1+i)^{n-1} + \dots + (1+i)\right]$$

Suite géo de raison $(1+i)$ et 1er terme 1+i

$$\boxed{C_n = a(1+i)\,\frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

* Valeur actuelle d'une suite d'annuités Constantes début de periode

$$C_0 = a + a(1+i)^{-1} + \dots + a(1+i)^{-n+1}$$

$$= a\left[1 + (1+i)^{-1} + \dots + (1+i)^{-n+1}\right]$$

Suite géo de raison $(1+i)^{-1}$ et 1er terme 1

$$\boxed{C_0 = a(1+i)\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$$

* Emprunt indivis

Modalité de Remboursement
→ Amortissement Constant
→ Annuité Constante
→ Infine

* Amortissement constant

$$R = \frac{C_0}{n}$$

Periode	Capital Restant dû	Interet	Amort	Annuité
1	C_0	$I_1 = C_0 \times i$	$R = \frac{C_0}{n}$	$a_1 = R + I_1$
2	$C_1 = C_0 - R$	$I_2 = C_1 \times i$	$R = \frac{C_0}{n}$	$a_2 = R + I_2$
n	$C_{n-1} = C_{n-2} - R$	$I_n = C_{n-1} \times i$	$R = \frac{C_0}{n}$	$a_n = R + I_n$

~~Ensuite~~ À la periode $\underline{t}$: capital restant dû $= C_0 - (t-1)R$

L'interet à la periode t $= C \times i = C_0 i - (t-1)R i$

les interêts et les Annuités suivent une progression arithmétique de raison $\left(-\frac{C_0}{n}\right) i = -Ri$

* Remboursement infine

Periode	Capital Restant dû	Intérêt	Amort	Annuité
1	C_0	$I_1 = C_0 i$	–	$a_1 = C_0 i$
2	C_0	$I_2 = C_0 i$	–	$a_2 = C_0 i$
n	C_0	$I_n = C_0 i$	C_0	$a_n = C_0 + C_0 i$

* Annuité Constante

$$\boxed{a = C_0 \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}}$$

	Capital Restant dû	Interet	Amort	Annuité
1	C_0	$I_1 = C_0 \times i$	$m_1 = a - I_1$	$a_1 = a$
2	$C_0 - m_1 = C_1$	$I_2 = C_1 \times i$	$m_2 = a - I_2$	$a_2 = a$
n	C_{n-1}	$I_n = C_{n-1} \times i$	m_n	$a_n = a$

$$a_1 = \overbrace{C_0 \times i + m_1}^{a_1 = a} = \overbrace{(\underbrace{C_0 - m_1}_{C_1})\, i + m_2}^{a_2 = a} = a_2$$

$$\boxed{m_2 = m_1(1+i)}$$

Amort 2 = Amort 1 capitalisé

$$m_n = m_1 (1+i)^{n-1}$$

* Calcul usuel relatif aux annuités fin periode

$$C_0 = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$$

$$= m_1 + m_1(1+i) + \cdots + m_1(1+i)^{n-1}$$

$$\boxed{C_0 = m_1 \frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

$$\boxed{m_1 = \frac{C_0\, i}{(1+i)^n - 1}}$$

* Calcul du Montant Remboursé après P periode

$$R_p = m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_p$$

$$= m_1 + m_1(1+i) + \cdots + m_1(1+i)^{p-1}$$

$$\boxed{R_p = m_1 \frac{(1+i)^p - 1}{i}}$$

$$R_p = C_0 \frac{i}{(1+i)^n - 1} \times \frac{(1+i)^p - 1}{i}$$

$$\boxed{R_p = C_0 \times \frac{(1+i)^p - 1}{(1+i)^n - 1}}$$

* Calcul du Capital restant dû après p periodes

$$C_p = C_0 - R_p$$

$$= C_0 - C_0 \frac{(1+i)^p - 1}{(1+i)^n - 1}$$

$$= C_0 \left[1 - \frac{(1+i)^p - 1}{(1+i)^n - 1}\right]$$

$C_p = C_0$ ________

$$\boxed{C_p = C_0 \left[1 - \frac{(1+i)^p - 1}{(1+i)^n - 1}\right]}$$

$$C_p = a \times \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \left[1 - \frac{(1+i)^p - 1}{(1+i)^n - 1}\right]$$

$$\boxed{C_p = a \times \frac{1 - (1+i)^{p-n}}{i}}$$

$$\boxed{C_p = C_0 - m_1 \times \frac{(1+i)^p - 1}{i}}$$

Remarque !

Annuité fin periode :

$$a_{fin} = C_0 \frac{i}{1 - (1+i)^{-n}}$$

Annuité début periode :

$$a_{déb} = C_0 \frac{i}{1 - (1+i)^{-n}} \times \frac{1}{1+i}$$

$$\boxed{a_{déb} = \frac{a_{fin}}{1+i}}$$

Module 1 : Mathématique financière

Ex1 (3pts)

1) le taux d'intérêt annuel est de 9%.

a/ Taux trimestriel equivalent t_T

$$(1+t_a)^{1/4} = 1 + t_T$$

$$\Rightarrow t_T = (1+t_a)^{1/4} - 1$$

$$= (1+0,09)^{1/4} - 1$$

$$= 0,0217 \text{ soit } 2,17\%.$$

b) Taux mensuel proportionnel t_m

$$t_m = \frac{t_a}{12} = \frac{0,09}{12} = 7,5 \times 10^{-3}$$

soit 0,75%.

2) le taux d'intérêt mensuel est de 1,25%.

a/ Taux trimestriel equivalent t_T

$$1 + t_T = (1 + t_m)^3$$

$$t_T = (1+t_m)^3 - 1$$

$$= (1,0125)^3 - 1$$

$$= 0,0379 \text{ soit } 3,79\%.$$

b/ Taux annuel proportionnel : t_a

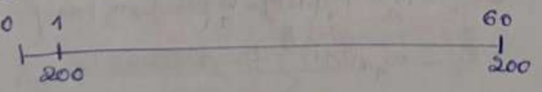
$$t_a = t_m \times 12 = 0,0125 \times 12$$

$$= 0,15 \text{ soit } 15\%.$$

Exercice 2 (6 pts)

Versement de 200 D pendant 60 mois
taux annuel : 6%.

1) La valeur acquise des versement



+ Taux mensuel prop : $\frac{6\%}{12} = 0,5\%$.

$$C_n = 200 \times \frac{(1,005)^{60} - 1}{0,005} = 13954$$

2) Crédit au taux annuel de 12%. remboursé par des echeances mensuelle constantes sur 120 mois

$$a = C_0 \times \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

i : Taux mensuel $= \frac{12\%}{12} = 1\%$.

$$a = 28000 \times \frac{0,01}{1-(1,001)^{-120}} = 401,718 D$$

Ex3 (6 pts)

Bq A	Bq B
Montant : 100 000 D	Montant : 100.000
Taux annuel 10,2%	Taux annuel : 10%
Durée 5ans	Durée 5 ans
Mode de R : Annuités Constants	Mode de R : Amortissement Constant
Echéance : Annuel	Echéance : ~~Annuel~~ Semestriel

Taux effectif (A) = Taux d'intérêt = 10,2%.

Taux effetif (B) = Taux equivalent

Taux Semestriel $= \frac{10\%}{2} = 5\%$.

Taux annuel equivalent : t_a

$$t_a = (1+0,05)^2 - 1$$

$$= 10,25\%.$$

le coût de la Bq A < au coût de la Bq B

$\Rightarrow$ L'investisseur doit choisir la Bq A.

Echéance annuel $\Rightarrow$ Taux eff = Taux Annu

Echéance Semestriel $\Rightarrow$ Taux semstriel

Taux eff = Taux Annuel équivalent du Taux semestriel

Ex4 (6pts)

Crédit 200000D (31/12/2004)

Durée 2 ans

Remb: Semestriel, annuités constantes

Taux d'intérêt = THM + 1%

1/ THM = 5% ⇒ Taux d'interet = 6%

a/ Tab d'amortissement.

Taux semestriel = $\frac{6\%}{2} = 3\%$

$$a = C_0 \times \frac{i}{1-(1+i)^{-4}} = \frac{0{,}03}{1-(1{,}03)^{-4}}$$

$$= 200000 \times \frac{0{,}03}{1-(1{,}03)^{-4}} = 53805{,}409$$

P	Capital Restant dû	Intérêt	Remboursement du Capital	Annuité
1	200.000	6000	47805,409	53805,409
2	152194,591	4565,837	49239,571	53805,409
3	102955,019	3088,650	50716,758	53805,409
4	52238,260	1567,14	52238,26	53805,409

b/ Coût effectif = Taux équivalent annuel

$$t_{eq} = (1+t_s)^2 - 1$$

$$= (1{,}03)^2 - 1 = 0{,}0609$$

soit 6,09%.

2/ Après les 2 premieres échéances, le THM est passé à 6% ⇒ Taux d'interet annuel = 7%

⇒ Taux semestriel = $\frac{7\%}{2} = 3{,}5\%$

$$a = 102955{,}019 \times \frac{0{,}035}{1-(1{,}035)^{-2}}$$

$$= 54195{,}5759$$

Ex5 (5pts)

crédit de 200.000 D

Taux : 6% l'an

Durée : 1 an (12 écheances mensuelles)

Mod-R : Annuités constants

les fond sont débloqués le 31/12/2012

1ère échéance : 31/01/2013.

1/ Annuité

* Taux mensuelle prop = $\frac{6\%}{12} = 0{,}5\%$

$$a = 200.000 \times \frac{0{,}005}{1-(1+0{,}005)^{-12}}$$

$$= 17213{,}28594$$

2/ Capital restant dû après reglement de la 5ème échéance.

$$C_5 = a \times \frac{1-(1+i)^{-12+5}}{i}$$

$$= 17213{,}28594 \times \frac{1-(1{,}005)^{-7}}{0{,}005}$$

$$= 118118{,}8425$$

3) Coût de fin = Taux équivalent

$$\hat{c} = (1+0{,}05)^{12} - 1$$

$$= 0{,}0616 \text{ soit } 6{,}16\%.$$

2ème méthode pour calculer C_5

$$C_5 = C_0 - m_1 - m_2 - m_3 - m_4 - m_5$$

$$= C_0 - m_1 - m_1(1+i) - m_1(1+i)^2 - m_1(1+i)^3$$

$$= C_0 - m_1 \times \frac{(1+i)^5 - 1}{i}$$

$$m_1 = a - I_1 = a - C_0 \times i$$

$$= 17213 - 200.000 \times 0{,}005$$

$$= 16213{,}28594$$

$$C_5 = 200.000 - 16213 \times \frac{(1{,}005)^5 - 1}{0{,}005}$$

$$= 118118{,}8425 \checkmark$$

Ex 6 (4 pts)

crédit de 100.000 u.m

Durée : 3 échéance annuelles

les fonds sont bloqués le 31/12/2017

Remb : 31/12/18 et 31/12/19 et 31/12/20

Annuités Constantes

Taux d'intérêt

2018 : 8%

2019 : 9%

2020 : 8%

Tableau d'amortissement

$$a_1 = 100.000 \times \frac{0{,}08}{1-(1{,}008)^{-3}} = 38803{,}35$$

$$I_1 = 100.000 \times 0{,}08 = 8000$$

$$R_1 = 30803{,}35 \quad (a_1 - I_1)$$

$$C_1 = C_0 - R_1 = 100.000 - 30803{,}35$$
$$= 69196{,}65$$

$$a_2 = C_1 \times \frac{0{,}09}{1-(1{,}09)^{-2}} = 39336{,}143$$

$$I_2 = C_1 \times 0{,}09 = 6227{,}698$$

$$R_2 = a_2 - I_2 = 33108{,}44$$

$$C_2 = C_1 - R_2 = \cancel{39336{,}143}\ 69196{,}65 - 33108{,}44$$
$$= \cancel{6227{,}699} \quad \checkmark \ \boxed{36088{,}21}$$

$$a_3 = C_2 \times \frac{0{,}08}{1-(1{,}08)^{-1}} = \cancel{6725{,}914} \ \cancel{363769{,}157} \ 38975{,}266$$

$$I_3 = C_2 \times 0{,}08 = \cancel{498{,}246}\ 2887{,}056$$

$$R_3 = \cancel{6227{,}699} \ \checkmark \ \boxed{36088{,}21}$$

P	Capital restant dû	Intérêt	Remboursement du Capital	Annuité
1	100.000	8000	30803,35	38803,35
2	69196,65	6227,698	33108,44	39336,143
~~3~~	~~6227,699~~	~~498,246~~	~~6227,699~~	~~6725,914~~
3	36088,21	2887,056	36088,21	38975,266

Ex6 (1 pts)

Placer un montant = C sur 1 an

	Bq 1	Bq 2
Taux annuel	8%	8%
Fréq de Capitalisation	Trimestrielle	Semestrielle

* Valeur acquise = $C \times (1+i)^m$

Pour la Bq 1 : Taux trimestriel = $\frac{8\%}{4} = 2\%$.

V acquise = $C \times (1{,}02)^4 = C \times 1{,}0824$

Pour la Bq 2 : Taux Semstre = $\frac{8\%}{2} = 4\%$

V. acquise = $C \times (1{,}04)^2 = C \times 1{,}0816$

~~Taux trimestriel~~ On choisit la Bq 1

Ex7

Taux d'interêt est 6% l'an.

1) le taux trimestriel equivalent T_s

$$T_s = (1+0{,}06)^{1/2} - 1$$
$$= 0{,}0295 \text{ soit } 2{,}95.$$

2) Valeur de l'annuité d'un crédit de 10.000 remboursable en 2 semestres par ann. const.

! Taux Semestriel prop. = $\frac{6\%}{2} = 3\%$

$$a = 10.000 \times \frac{0{,}03}{1-(1{,}03)^{-2}} = 5226{,}108$$

ici les annuités fin période

3) Valeur des annuités début periode

$$a_{deb} = \frac{a_{fin}}{1+i} = 5073,891$$

Ex 8 (2 pts)

crédit de 12000 au taux de 10% sur une periode de 180 jours avec intérêts précomptés (1 année = 360 jours)

1) coût effectif du crédit ?

$$I = \frac{C_0 \times i \times n}{36\,000} = 600$$

Interêt précompté ⇒ M = 12000 − 600
Montant reçu → = 11400

Coût effectif = r tq

$$600 = \frac{11400 \times r \times 180}{36\,000}$$

$$\Rightarrow r = \frac{600 \times 36\,000}{11400 \times 180} = 10,52\%$$

2) Interêt suivant la méthode rationnelle :

$$I = \frac{C_0 \times i \times n}{36000 + (n \times i)} = \frac{12000 \times 10 \times 180}{36000 + (180 \times 10)}$$

$$= 571,428.$$

Coût eff = r tq

$$571 = \frac{11428,571 \times r \times 180}{36.000}$$

$$r = \frac{571,428 \times 36000}{11428,571 \times 180} = 9,99 = 10\%$$

Ex 9 (3 pts)

Emprunt de 5000 à un taux de 8% sur 5 ans par 5 annuités constantes

1/ Valeur de l'annuité

$$a = 5000 \times \frac{i}{1-(1+i)^{-5}} = \frac{5000 \times 0,08}{1-(1,08)^{-5}} = 1252,282$$

2) Cout de financement par emprunt

$$i_{net} = i \times (1-T) = 0,08 \times 0,75 = 0,06 = 6\%$$

Obligation

Il s'agit de titre de créance émis par : Une sté, un établissement public, une collectivité local ou l'Etat en contre partie d'un prêt

Prix d'Emission, date de jouissance, date de règlement, coupons, durée, taux de R^d } Contrat d'émission de l'obligation

Types d'obligation

① **Ob. Assimilable au Trésor (OAT)**
→ Titre de créance qui représente une part d'un emprunt à LT émis par l'Etat

② **Ob. Convertible en Action (OCA)**
→ Ob ayant la possib- d'être convertible en action
→ Ob émises à un taux inférieur au Ob. Classiques qui permet au porteur de bénéficier d'une gestion flexible

③ **Ob. à coupons zéro**
→ Ob. émise à un prix bas et remboursée à un prix élevé.
→ plus-value intéressante

Obligation → Placement presque sûr

Avantages

1/ Rendements garantie

2/ Mise des fonds assurée d'être récupérée à l'échéance

3) En cas de ↓ des taux d'intérêt, il y a une possibilité de réaliser des gains en cas de vente des obligations avant l'échéance

Inconvénients

1/ Risque de signature ; si l'émetteur est en faillite, il ne pourra pas payer les intérêt ni rembourser l'obligation

2/ Risque de taux ; si i ↑, le cours des ob. ancienne ↘ car leur rend- devient < à ceux des Nv. Ob.

3/ Risque de perte de capital si les Ob ne sont pas conservées jusqu'à échéance.

\+ Prix de l'Obligation : $P_0 = \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k}{(1+t)^k}$

Prix = $\sum$ Flux actualisés qu'elle génère ($F_n = C + VR$)

\+ Taux actuariel brut → $P_0 = \sum \frac{F_k}{(1+r)^n}$ (r à déterminer)

\+ Coupon : $C = VN \times i$ (VN : Valeur Nominal ; i : Taux Nominal / facial.)

\+ Taux de rendement actuarial à l'émission $VE = \frac{VR}{(1+r)^n}$ (r à détermi)

Propriétés des obligation

Maturité
Échéance final
⇓
n

Durée de Vie Moyenne
$$\sum_{t=1}^{n} \frac{t \times A_t}{VN}$$
A_t : Flux de capital remboursé !

Duration
$$D = \frac{1}{P_0} \sum_{t=1}^{n} t \frac{F_t}{(1+r)^t}$$
⇓
c'est la moyenne des durées pondérées par les flux actualisés
Unité = Année

→ si Ob à coupon zéro $\Rightarrow D = n$

Sensibilité
Mesure la variation relative du prix suite à une variation de son taux actuariel

$$S = \frac{1}{P} \frac{\Delta P}{\Delta r}$$

$$S = -\frac{D}{1+r}$$

$$\Delta P = S \times P \times \Delta r$$

→ Si Ob à coupon zéro $S = -\frac{n}{1+r}$

DVM : Moyenne pondérée des échéance de remboursement de Capital, utilisé pour les Ob. amortissables.

Coût du Capital

ĉ de la dette ← → ĉ du fonds propres

① Coût des fonds propres

Model général : Gorden et Shapiro

$$\begin{array}{llll} t=0 & 1 & 2 & n \\ P_0 & D_1 & D_2 & D_n+P_n \end{array}$$

$$P_0 = \frac{D_1}{1+K} + \frac{D_2}{(1+K)^2} + \dots + \frac{D_n}{(1+K)^n} + \frac{P_n}{(1+K)^n}$$

$$= \sum_{t=1}^{n} \frac{D_t}{(1+K)^t} + \frac{P_n}{(1+K)^n}$$

si $n \to +\infty$ $\quad P_0 = \sum_{t=1}^{n} \frac{D_t}{(1+K)^t}$

Modèle de Gorden et Shapiro à dividende Constant

$$P_0 = \frac{D}{(1+K)} + \dots + \frac{D}{(1+K)^n}$$

$$\boxed{P_0 = D\,\frac{1-(1+K)^{-n}}{K}}$$

si $n \to \infty$ $\quad \boxed{P_0 = \frac{D}{K} \iff K = \frac{D}{P_0}}$

Modele de Gorden et Shapiro à dividende croissant

$$P_0 = \frac{D_1}{1+K} + \frac{D_1(1+g)}{(1+K)^2} + \dots + \frac{D_1(1+g)^{n-1}}{(1+K)^n}$$

$$\boxed{= \frac{D_1}{1+K} \times \frac{1-\left[\frac{1+g}{1+K}\right]^{-n}}{1-\left(\frac{1+g}{1+K}\right)}}$$

si $n \to \infty$ $\quad \boxed{P_0 = \frac{D_1}{K-g} \iff K = \frac{D_1}{P_0} + g}$

Modèle d'evaluation des actifs financiers MEDAF

$$K = E(R_i) = r_f + (R_m - r_f) \times \beta$$

$E(R_i)$: R^d du titre ; r_f : R^d sans risque ; R_m : R^d du marché ; β : coeff de volatilité

* Ratio de Rentabilité financière

$$RF = \frac{R^t \text{ net}}{\text{Capitaux propre}}$$

② Coût de la Dette

Taux d'actualisation

$$\boxed{\hat{C}\text{eff} \quad K_d = i(1-T)}$$

$$\begin{array}{llll} t=0 & & & n \\ C_0 & a_1 & a_2 \dots & \end{array}$$

$$C_0 = \frac{a_1}{(1+K_d)} + \frac{a_2}{(1+K_d)^2} + \dots + \frac{a_n}{(1+K_d)^n}$$

$$= \sum_{t=1}^{n} \frac{a_t}{(1+K_d)^t}$$

→ le ĉ d'une source de financement est le taux d'actualisation qui egalise le montant des fonds reçus à $t=0$ et la valeur actuelle des sortie des fond futur.

V. Actuelle des encaissement = V.A. des décaissement

③ Coût Moyen Pondéré du Capital CMPC

$$CMPC = K_{cp} \times \frac{KP}{KP+D} + K_d \frac{D}{KP+D}(1-T)$$

si il y a impôt

$L = \frac{D}{KP}$: levier

$$\boxed{CMPC = K_{KP} \times \frac{1}{1+L} + K_d \times \frac{L}{1+L}(1-T)}$$

Analyse de l'équilibre financier

- Les états de flux de trésorerie : États qui retracent les encaissements et les décaissements (Flux d'Inv, Flux d'Exp - Flux de Financement)

3 Indicateurs financiers

① **FR** : Présente le ressource stable (capitaux permanent) qui reste disponible après avoir financer les investissements (immobilisé) c'est la marge de sécurité qui sert à financer l'exploitation (BFR)

FR = Capitaux Permanents − Actifs immobilisés
(KP + D.LT)

= Actifs Circulants − Passifs Circulants
(Stock + Créance + Autre A.C) (D. CT)

FR > 0 L'ent a un excédent de R. Stables pour financer son cycle d'exploitation.

FR = 0 Pas de marge de sécurité

FR < 0 Déséquilibre financier ; l'ent finance son L.T avec du CT les ressources stables ne couvrent pas les immobilisations

② **BFR** le besoin de financement lié à l'activité de l'ent. C'est l'argent qu'il faut mobiliser pour financer le cycle d'exp entre le moment où l'ent paye les fournisseurs et celui où elle encaisse ses clients

BFR = Actif Circulant d'Exp − Passif Circulant d'Exp
(Stock + Créance) (− Dette CT)

BFR > 0 Un besoin en FR ; les emplois d'Exp > aux Ressources d'Exp

Causes	Solution
- Stocks long / Trop d'invendus	- Réduire les délais clients (Escompte)
- Délai Clients long	- Négocier les délais fourniss. plus longs
- Pas de délais fournisseur	- Réduire les stocks

BFR < 0 les ressources à C.T financent les emplois à CT et dégagent un surplus. Four > Client + stock
⇒ Excédent de financement

③ **Trésorerie Net : TN** L'argent réellement disponible dans l'ent (en banque et en caisse) après avoir financer les stocks et les clients.

TN = FR − BFR

→ **TN > 0** Equilibre, Surplus
Il faut penser à placer l'argent

→ **TN < 0** : Déséquilibre
Besoin

$$BFR_j = \frac{BFR}{CA} \times 360$$

Analyse financière

① Rentabilité

R. Economique (ROA) $= \dfrac{R^t \text{ d'Exp}}{\text{Tot Actifs}}$ ← (ROA) : Capacité à gérer des profit

R. Financière (ROE) $= \dfrac{R^t \text{ Net}}{\text{Cap. propres}}$ ← Rent. des actionnaire

② Solvabilité

Ration d'endettement $= \dfrac{\text{Dettes}}{\text{Cap. propres}}$ ← Evalue le levier financier

③ Ratios de gestion

Delai de Rotation Clients : $DRC = \dfrac{\text{Client}}{CA} \times 360$

$DRF = \dfrac{\text{Four}}{\text{Achat}} \times 360$

$DRS = \dfrac{\text{Stock}}{\text{Achat}} \times 360$

Ĉ de production

R^t fin : $\boxed{ROE = \dfrac{R^t \text{ Net}}{KP}} = \boxed{\dfrac{R^t \text{ Net}}{CA}} \times \boxed{\dfrac{CA}{TA}} \times \boxed{\dfrac{TA}{KP}}$

ROE = Marge Nette × Rotation des Actifs × levier financier

- Marge Nette → Rentabilité des ventes
- Rotation des Actifs → l'efficacité à utiliser les actifs pour générer des ventes
- levier financier → mesure le niveau d'endettement

- Marge Nette = 10% ⇒ Benefice = 10% des ventes
- R^t des Actifs $= \dfrac{CA}{TA} = 0{,}5$ ⇒ Pour chaque 1D investie, l'ent génère 0,5D de vente
- levier fin : $\dfrac{TA}{KP} = 2$ ⇒ la moitié des Actif est financer par dette

CAF = Capacité d'Autofinancement.

Présente la capacité de l'ent à generer des ressources internes permettant de financer ses investissement sans recourir à l'emprunt

Autofinancement Net = CAF − Dividende

CAF = Encaissement − Décaissement
$= R^t \text{ Net} + DA \text{ mort}$

Effet de Levier financier

$$R_f = R_e + (R_e - i)\frac{D}{KP}(1-T)$$

Levier L

L'effet levier mesure l'impact de l'endettement sur la R^t des KP

si $R_e > \hat{C}_d \Rightarrow EL > 0$: L'endettement aug la R^t des KP

si $R_e < \hat{C}_d \Rightarrow EL < 0$: L'endettement détériore la R^t financière

Choix d'investissement en avenir Certain

* Les paramètres d'investissements :
  - Montant d'Inv I_0
  - Durée de vie : n
  - Les CFN générés

* Les critères de Choix

① **VAN** Mesure la richesse crée par le projet, en actualisant les flux de trésorerie qu'il génère, moins l'investissement initial

$$VAN = \sum_{t=1}^{n} CF_t (1+k)^{-t} - I_0$$

k ← coût du Capital

$VAN > 0 \Rightarrow$ Projet rentable.

Limites
* Ne donne aucune info sur la liquidité du projet
* On ne peut savoir le moment où le montant investi est entièrement récupéré.

② **TRI** le taux d'actualisation qui annule la VAN. (le taux réel du projet)

$$\sum CF_t (1+TRI)^{-t} - I_0 = 0$$

$K_1 \longrightarrow VAN > 0$

$K_2 \longrightarrow VAN < 0$

TRI > Taux exigé (coût du Capital) $\Rightarrow$ Projet rentable

$$TRI = K_1 + VAN_1 \frac{K_2 - K_1}{VAN_1 - VAN_2}$$

Limites Critère qui nécessite de disposer d'un taux de référence.

③ **Indice de Profitabilité / VAN Unitaire**

$$VANU + 1 = IP = \frac{\sum CF_t (1+k)^{-t}}{I_0}$$

$IP > 1 \Rightarrow VAN > 0$

Interprétation : IP = 1,2 Chaque 1 u.m investie rapporte 1,2 u.m $\Rightarrow$ Projet rentable.

④ Délai de récupération :

le nbre d'années nécessaire au bout duquel, le cumul des CF générés par le projet égalise le montant investi I_0

Plus DR important, plus le projet est risqué

Limites : DR n'est pas un critère de rentabilité
Ne tient pas compte des flux générés après le délai

Critères	Rentabilité du Projet	Choix entre 2 projets
VAN	$VAN > 0$	$VAN_1 > VAN_2 \Rightarrow$ Projet 1
TRI	$TRI > K$	$TRI_1 > TRI_2 \Rightarrow$ Projet 1
IP	$IP > 1$	$IP_1 > IP_2 \Rightarrow$ Projet 1
DR	-	$DR_1 < DR_2 \Rightarrow$ Projet 1

* Critères Intégrés

CF_1 CF_2 CF_n

$\longrightarrow CF_1 (1+t)^{n-1}$

$\longrightarrow CF_2 (1+t)^{n-2}$

$\vdots$

CF_n

Les CF sont investis au taux t

À $t = n$: Somme des CF investis

$$= \sum_{t=1}^{n} CF_t (1+t)^{n-t}$$

$$VANI \left\{ \frac{\sum}{(1+k)^n} \right.$$

$$\text{VAN I} = \frac{\sum_{i=1}^{n} CF_i \, (1+t)^{n-i}}{(1+k)^m} - I_0$$

$t \rightarrow$ taux de placement

k : taux d'actualisation

TRI I : le taux d'actualisation qui annule la VANI

$$k^* \text{ tel que } \frac{\sum CF_i \, (1+t)^{n-i}}{(1+k^*)^m} = I_0$$

$$k^* = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} CF_i \, (1+t)^{m-i}}{I_0} \right)^{1/m} - 1$$

Choix d'investissement en avenir incertain

* Methode de mesure de risque d'un projet

① Projet d'une seule période $\boxed{n=1}$

$$\begin{cases} E(VAN) = \sum P_j VAN_j \\ V(VAN) = \sigma^2(VAN) = \sum P_j \left[VAN_j - E(VAN_j)\right]^2 \end{cases}$$

choix des projets

Cas 1	Cas 2	Cas 3
$E(VAN) \neq$, $\sigma(VAN)$ egaux	$E(VAN)$ egaux, $\sigma(VAN) \neq$	$E(VAN) \neq$, $\sigma(VAN) \neq$, $CV = \frac{\sigma(VAN)}{E(VAN)}$
Retenir le projet ayant l'espérance de VAN la plus elevée	Retenir le projet ayant le risque le plus faible	Retenir le projet ayant le Coeff de Variation le plus faible

② $\boxed{n>1}$

$$E(VAN) = \frac{\sum_{t=1}^{n} CF_t}{(1+i)^t} - I_0$$

Somme des CF espérés actualisés $- I_0$

i : taux sans risque

$$\sigma^2(VAN) = \sum_{t=0}^{n} \frac{\sigma^2(CF_t)}{(1+i)^{2t}} \Rightarrow \cancel{\sigma(VAN) = \sum_{t=0}^{n} \frac{\sigma(CF_t)}{(1+i)^t}}$$

$$\Rightarrow Var(VAN) = \frac{\sum Var(CF_t)}{(1+i)^{2t}}$$

← les CF sont Indépendants

* Si les CF sont ⊕ et parfaitement corrélés

$$\sigma(VAN) = \sum_{t=0}^{n} \frac{\sigma(CF_t)}{(1+i)^t}$$

Règle de décision

* Investisseur averse au risque ⇒ On se base sur le minimum de risque
* Investisseur préfere le risque ⇒ Maximum de Rentabilité

Fonction d'Utilité

L'attitude de l'inv est présentée par une fonction
$U(w)$ w: Richesse.

Critère de Choix:

$$\boxed{E(U(VAN)) = \sum p_i \, U(VAN_i)}$$

* Fonction d'Utilité **concave** $U' > 0$ et $U'' < 0$
  Inv **averse au risque**
* Fonction d'Utilité **convexe** $U' > 0$ et $U'' > 0$
  Inv **aime le risque** (preneur de risque)
* Fonction d'Utilité **linéaire** $U'' = 0$
  Inv **neutre au risque**

Mesure d'aversion pour le risque

* Aversion Absolue au risque $AAR = -\frac{U''(w)}{U'(w)}$

$AAR > 0$: Averse au risque
$AAR < 0$: Attiré par le risque
$AAR = 0$: Neutre

* 2 investisseurs I_1 et I_2, $AAR_1 > AAR_2 > 0$
  $\Rightarrow$ l'inv I_1 est plus averse au risque

* Si AAR est une fct ↗ (↘) de la richesse (w)
  cela signifie que le montant investi ↘ (↗) avec w
* Si AAR = cte $\Rightarrow$ le montant investi est indep de w

* Aversion Relative au Risque $ARR = -w \, \frac{U''(w)}{U'(w)}$

AAR : indique la façon dont la demande d'actif risqué évolue avec la richesse

Gestion de Portefeuille

* Espérance de rendement d'un titre

$$\boxed{E(R) = \sum \underset{\text{Rendement Possible}}{r_k} \underset{\text{Prop}}{p_k}} \qquad \boxed{E\left[\sum x_i R_i\right] = \sum x_i E(R_i)}$$

* Variance et Covariance

• $V(R) = E(R - E(R))^2 = \sum p_k (r_k - E(R))^2$
$= E(R^2) - [E(R)]^2$

• $Cov(R_1, R_2) = E\left((R_1 - E(R_1))(R_2 - E(R_2))\right)$
$= E(R_1 R_2) - E(R_1) E(R_2)$

* Coeff de Corrélation

$$\rho_{R_1 R_2} = \frac{cov(R_1, R_2)}{\sigma_{R_1} \times \sigma_{R_2}}$$

$\rho = 1$ Corrélation + parfaite
les 2 titres évoluent dans le m̂ sens

$\rho = -1$ corrélation - parfaite
évolution dans le sens inverse

$\rho = 0$ Indépendants

I/ Gestion de Portefeuille à deux actifs risqués

$P(x_1, x_2) \qquad x_1 + x_2 = 1$

$E(R_p) = x_1 E(R_1) + x_2 E(R_2)$

$V(R_p) = x_1^2 V(R_1) + x_2^2 V(R_2) + 2 x_1 x_2 cov(R_1, R_2)$

Portf $\begin{cases} x\% \text{ Actif 1} \\ (1-x)\% \text{ Actif 2} \end{cases}$ $\begin{cases} E(R_p) = x E(R_1) + (1-x) E(R_2) \\ V(R_p) = x^2 V(R_1) + (1-x)^2 V(R_2) + 2x(1-x) \underbrace{cov(R_1, R_2)}_{\rho \sigma_{R_1} \sigma_{R_2}} \end{cases}$

* Chercher x qui minimise la Variance

1ère cond: $\frac{\partial V(R_p)}{\partial x} = 0 \Rightarrow$ sol: x^*

2e cond: $\frac{\partial^2 V(R_p)}{\partial x^2} < 0$

$$x^* = \frac{V(R_2) - \sigma(R_1)\sigma(R_2)\rho}{V(R_1) + V(R_2) - 2\sigma(R_1)\sigma(R_2)\rho}$$

$$= \frac{V(R_2) - cov(R_1, R_2)}{V(R_1) + V(R_2) - 2 cov(R_1, R_2)}$$

A Retenir
La diversification diminue le risque.

* Portefeuille efficient : Portf dont la rentabilité moyenne est maximal pour un niv de risque donné ou dont le risque est minimal pour une R^t donnée

II - Gestion de portefeuille avec un actif sans Risque

$$\text{Portf} \begin{cases} x\%\ \text{Actif risqué} ① \ (E(R_1) ; V(R_1)) \\ (1-x)\%\ \text{Actif sans risque} ② \ (\underbrace{E(R_2)}_{= R_f} ; 0) \end{cases}$$

$$E(R_p) = x\,E(R_1) + (1-x)\,E(R_2)$$

$$V(R_p) = x^2\,V(R_1) \Rightarrow \boxed{x = \frac{\sigma_{R_P}}{\sigma_{R_1}}}$$

$$\Rightarrow E(R_p) = x\,E(R_1) + \underbrace{E(R_2)}_{R_f} - x\,\underbrace{E(R_2)}_{R_f}$$

$$= R_f + x\left(E(R_1) - R_f\right)$$

$$= R_f + \boxed{\frac{E(R_1) - R_f}{\sigma_{R_1}}} \times \sigma_{R_P}$$

Ration de Shape
Mesure la prime de risque par unité de risque
choisir le Portf dont le Ratio Shape le plus elevé

Remarque :

$$\frac{E(R_p) - R_f}{\sigma_{R_P}} = \frac{E(R_1) - R_f}{\sigma_{R_1}}$$

$\Rightarrow$ le portf a le m̃ Ratio Shape que l'actif risqué qu'il contient.

III - MEDAF

$$E(R_p) = R_f + \frac{E(R_m) - R_f}{\sigma_M} \times \sigma_P$$

À l'eq, tous les portefeuilles ont le m̃ Ratio Shape que le marché

Rentabilité d'un titre

$$E(R_i) = R_f + \underbrace{(R_m - R_f)}_{\text{Prime de risque}} \times \boxed{\beta_i}$$

mesure le risque systématique

coût du capital = taux sans risque + β x prime de risque

Risque Total
- Risque spécifique peut être eliminer par diversification (Micro-economiq)
- Risque systémique (Non diversifiable) d'origine macro-économique

Les options

Définition : Un contrat financier qui donne à son acheteur le droit, mais pas l'obligation, d'acheter ou de vendre un actif à un prix fixé à l'avance (prix d'exercice / Strike) à une date donnée (échéance), en échange du paiement d'une prime.

À L'échéance :

- Détenteur (Acheteur) décide s'il exerce ou non l'option
- Emetteur (Vendeur) Obligé d'honorer la décision du détenteur

Détenteur	Emetteur
- Il paie une prime au début	- Il reçoit la prime.
- Il a le choix d'exercer l'option ou de ne faire rien.	- ~~Il peut perdre l'argent si l'option va dans le sens du détenteur~~
- Il agit uniquement si cela l'avantage	

Type d'Option

Option d'Achat — Call

Donne droit à acheter l'actif à X, prime = C

Option de vente — Put

Donne droit de vendre l'actif à X, prime P

À L'échéance :
Prix de l'actif = S_t prix : Cours Spot

Call X عندي الحق باش نشري ب Put عندي الحق نبيع ب X

	Acheteur	Vendeur
Prime	$-C$	$+C$
Echéance	si $S_t < X$	si $S_t < X$
Décision	Ne pas exercer	Soumis à la décision de l'acheteur
Valeur	0	0
Profit	$-C$	

Profit $= (S_t - X) - C$ (si exercé)

Call

	Acheteur		Vendeur	
Prime	$-C$		$+C$	
Echéance	$S_t < X$	$S_t > X$	$S_t < X$	$S_t > X$
Décision	Ne pas exercer	Exercer	Soumis à la décision de l'acheteur	
Valeur	0	$S_t - X$	0	$-(S_t - X)$
Profit	$-C$	$S_t - X - C$	$+C$	$C - (S_t - X)$

Put	Acheteur		Vendeur	
Prime	$-P$		$+P$	
Echéance	$S_t < X$	$S_t > X$	$S_t < X$	$S_t > X$
Décision	Exercer	Ne pas exercer		
Valeur	$X - S_t$	0	$-(X - S_t)$	0
Profit	$X - S_t - P$	$-P$	$P - (X - S_t)$	$+P$

À l'échéance ; Valeur d'un Call : $C(T) = \max(0, S_t - X)$

Valeur d'un Put : $P(T) = \max(0, X - S_t)$

Cas le plus risqué

Etre Vendeur (émetteur) d'une option d'achat (Call)

↳ Risque illimité si le prix monte

Acheteur d'un Call : 3andou l7ag bech yechri au prix X
Achat — Yechri si $S_t > X$ — كان سوم طلع هو يشري بسوم رخيص

Vendeur d'un Call : Lazem ybi3 au prix X
si S_t X
si $S_t > X$: bech ya5ser Montant $(S_t - X)$ — كان سوم طلع برشا باش يخسر فلوس

Acheteur d'un Put : 3andou l7ag bech ybi3 b X
ybi3 si $S_t < X$ — يبيع بسوم أكبر من X
بيربح $S_t - X$

Vendeur d'un Put : Lazem yechri au prix X
si $S_t < X$ Lazem yechri avec un prix > prix Marché
لازم يشري بـ X حتى كان هو سوم أقل من X
يشري بالغالي حاجة رخيصة
أما في حقيقة السوم مدهبطش برشا

Def Forward / Futur / Swap

* **Contrat Forward** : Contrat privé entre deux parties pour acheter ou vendre un actif à une date future déterminée, à un prix fixé aujourd'hui (sur un marché de gré à gré) OTC

Option	Forward
• Donne le choix (non l'obligat°)	• Engagement ferme.
• Tu peut acheter ou vendre	• Tu dois acheter ou vendre
• Tu paie une prime	• Pas de prime
• Risque limité (pour le détenteur	• Risque élevé

* **Contrat Futur** : Même principe qu'un forward, mais standardisé et négocié sur un marché organisé
* **Contrat Swap** : Contrat d'échange de flux financiers entre deux parties, souvent pour se couvrir contre un risque de taux ou de devise. (Sur un marché de gré à gré)

Lieu d'échange d'une monnaie contre une autre ⇄ **Marché de change**

- Taux de change : Prix d'une monnaie exprimé dans une autre
- Taux nominal : Taux affiché sur le marché
- Taux Réel : Taux nominal ajusté par l'inflation

$$\text{Taux Réel} = \text{Taux Nominal} \times \frac{\text{Prix étranger}}{\text{Prix local}}$$

1 euro = 3,3 DT

Prix d'un bien en Tunisie = 100
Prix du même bien en Europe = 30

$$\text{Taux Réel} = 3{,}3 \times \frac{100}{30} = 3{,}3 \times 3{,}33 = 10{,}99$$

⇒ le bien en Tunisie est plus cher.
Tu achète un bien à 100 DT or sa valeur réel est 30 x 3,3 = 99 DT

- Bid / Cours acheteur : Prix auquel la bq achète la devise
- Ask / Cours Vendeur : Prix auquel la Bq vend la devise
- Spread / Marge : Spread = Ask - Bid
- Cours Moyen : Moyenne entre Ask et Bid

$$\text{Cours Moyen} = \frac{\text{Ask} + \text{Bid}}{2} = CM$$

$$\begin{cases} \text{Ask} = CM + \frac{\text{Spread}}{2} \\ \text{Bid} = CM - \frac{\text{Spread}}{2} \end{cases}$$

- Cours Croisés

$$EUR/USD = \frac{EUR/TND}{USD/TND}$$

$$\begin{cases} EUR/TND = 3{,}3534 / 3{,}3565 \\ USD/TND = 3{,}1397 / 3{,}1407 \end{cases}$$

- Cours Acheteur Bid

$$EUR/USD_{Bid} = \frac{EUR/TND_{Bid}}{USD/TND_{ASK}} = \frac{3{,}3534}{3{,}1407} = 1{,}0677$$

- Cours Vendeur Ask

$$EUR/USD_{Ask} = \frac{EUR/TND_{ASK}}{USD/TND_{Bid}} = \frac{3{,}3565}{3{,}1397} = 1{,}0691$$

⇒ EUR/USD = 1,0677 / 1,0691

Formules

$$\begin{cases} EUR/USD_{Bid} = EUR/TND_{Bid} \times \overset{!!}{\boxed{TND/USD_{Bid}}} = \frac{1}{USD/TND_{ASK}} \\ EUR/USD_{ASK} = EUR/TND_{ASK} \times \overset{!!}{\boxed{TND/USD_{ASK}}} = \frac{1}{USD/TND_{Bid}} \end{cases}$$

ou bien.

$$\begin{cases} EUR/USD_{Bid} = \frac{EUR/TND_{Bid}}{USD/TND_{ASK}} \\ EUR/USD_{Ask} = \frac{EUR/TND_{ASK}}{USD/TND_{Bid}} \end{cases}$$

plus facile