Institut de Financement du Développement du Maghreb Arabe
Concours de Recrutement de la 41 ème Promotion - Banque
Techniques Quantitatives

Septembre 2021
Durée : une heure et demie

Cette épreuve comporte deux pages
Aucun document n'est autorisé
****

Exercice 1 : (6 points : 1+1+1+1+2).

On s'intéresse à l'évolution du prix d'une matière première noté Y dont la densité de probabilité est définie par la fonction :

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \frac{1}{y} e^{-\frac{1}{2}(\mathrm{Log}(y))2} \text{ pour } y > 0 \text{ et } g(y) = 0 \text{ sinon}$$

On pose $X = Log(Y)$

1- Prouver que ΔX l'accroissement de X entre deux périodes consécutives est approximativement égal au taux de croissance du prix Y. Interpréter

2- Déterminer la relation entre F et G respectivement les fonctions de répartition de X et de Y

3- En déduire la densité de probabilité de X

4- Calculer la médiane de Y

5- Sachant que pour une loi normale centrée réduite Z la fonction génératrice est définie par $E(\mathbf{e}^{t\,Z}) = \mathbf{e}^{\frac{1}{2}\mathbf{t}^2}$

Calculer l'espérance mathématique et la variance de Y

Exercice 2 : (8 points : 1+2+2+1+1+1).

On note p_t et q_t respectivement le prix unitaire et la quantité vendue d'un produit donné observés à l'instant t pour $t = 1,2,3,\ldots$

On admet que les évolutions temporelles de ces grandeurs sont définies par les deux relations suivantes :

$$\begin{cases} p_t = \frac{3}{10}p_{t-1} + \frac{6}{10}q_{t-1} + 2 + \varepsilon_{1t} \\ q_t = \frac{1}{10}p_{t-1} + \frac{2}{10}q_{t-1} - 1 + \varepsilon_{2t} \end{cases} \quad \text{pour } t = 1,2,3,..$$

avec ε_{1t} et ε_{2t} sont deux termes d'erreurs indépendants entre eux centrés et réduits

On note $Y_t = \begin{bmatrix} p_t \\ q_t \end{bmatrix}$ pour $t = 0,1,2,..$

On admet que pour $t = 0$, l'espérance mathématique et la matrice de variance covariance de Y_0 sont définies par $E(Y_0) = 0$ et $V(Y_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

1- Prouver que $Y_t = A\, Y_{t-1} + B + \varepsilon_t$ où A , B et ε_t sont trois matrices à déterminer

2- Prouver que $AB = 0$ et que $A^t = (\frac{1}{2})^{k} A$ pour $t \geq 2,$ avec k une constante à déterminer.

3- En déduire les expressions de p_t et de q_t en fonction de p_0 de q_0 de t et de termes d'erreurs

4- Calculer $E(Y_t)$

5- Si l'on admet que les deux termes d'erreur ε_{1t} et ε_{2t} sont nuls pour tout t ,

i- Calculer la matrice de variance covariance $V(Y_t)$

ii-Trouver la valeur du coefficient de corrélation linéaire de p_t et de q_t. Commenter.

Exercice 3 : (6 points : 1 +1+1+1+2).

On s'intéresse à la régression $y_i = a\, x_i + u_i$ avec u_i des termes d'erreur indépendants d'espérance nulle et de variance σ_i^2 pour i=1, 2 et 3

Les valeurs de x_i de y_i et de σ_i^2 sont précisées dans le tableau suivant :

i	1	2	3
x_i	3	7	11
y_i	6	13	23
σ_i^2	1	9	4

1- Déterminer l'écriture matricielle de ce modèle en précisant ses principales caractéeristiques.

2- Déterminer l'estimation de a par les moindres carrés ordinaires

3- Cet estimateur est-il sans biais ? Est-il à variance minimale ? justifier vos réponses

4- Déterminer l'estimation de a par les moindres carrés généralisés

5- Etudier la significativité statistique des deux estimations de a.

Institut de Financement du Développement du Maghreb Arabe

Concours de Recrutement de la 41 ème Promotion - Banque
Techniques Quantitatives

Septembre 2021

Corrigé 1

1- Pour $X = Log(Y)$, nous avons $\Delta X = \Delta Log(Y) \approx \frac{\Delta Y}{Y}$ qui est approximativement égal au taux de croissance du prix Y

Ainsi Y est le prix alors que l'accroissement de X constitue son taux de croissance

2-Nous avons pour x réel quelconque :

$F(x) = P[X \leq x] = P[Log(Y) \leq x] = P[Y \leq e^x] = G(e^x)$

3- De ce qui précède, on obtient en dérivant par rapport à x :

$$f(x) = e^x g(e^x) = e^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{e^x} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{x}^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{x}^2}$$

qui est la densité de la loi normale centrée réduite

4- Soit My la médiane de Y. Nous avons : $G(My) = \frac{1}{2} = G(e^{Log(My)}) = F(LogMy)$

Cela signifie que $LogMy$ est la médiane de X ,cela entraine que : $LogMy = 0$ du fait que X est symétrique et donc $My = 1$

5- $E(Y) = E(e^X) = \Phi(1)$ où $\Phi(t) = E(\mathbf{e}^{tX}) = \mathbf{e}^{\frac{1}{2}\mathbf{t}^2}$ qui est la fonction génératrice de X.

On obtient : $E(Y) = \mathbf{e}^{\frac{1}{2}}$

Par ailleurs :$E(Y^2) = E(e^{2X}) = \Phi(2) = \mathbf{e}^2$

De ce fait $V(Y) = \mathbf{e}^2 - e.$

Corrigé2

1- Nous avons

$$Y_t = \begin{bmatrix} p_t \\ q_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{10} & \frac{6}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{2}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{t-1} \\ q_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix}$$

$$= A\ Y_{t-1} + B + \varepsilon_t$$

avec $A = \begin{bmatrix} \frac{3}{10} & \frac{6}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{2}{10} \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\varepsilon_t = \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix}$

2-Calculons les puissances de A

$$A^2 = \begin{bmatrix} \frac{3}{10} & \frac{6}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{2}{10} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{3}{10} & \frac{6}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{2}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{20} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{20} & \frac{1}{10} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}A$$

$$A^3 = A^2.A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{3}{10} & \frac{6}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{2}{10} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{3}{10} & \frac{6}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{2}{10} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}A.A = (\frac{1}{2})^2A$$

Par récurrence, si l'on admet que $A^t = (\frac{1}{2})^{t-1}A$ pour $t \geq 1$

Nous avons $A^{t+1} = A^tA = A(\frac{1}{2})^{t-1}A = (\frac{1}{2})^{t-1}A^2 = (\frac{1}{2})^{t-1}\frac{1}{2}A = (\frac{1}{2})^tA$ CQFD

Par ailleurs $AB = \begin{bmatrix} \frac{3}{10} & \frac{6}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{2}{10} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$

3- D'après l'expression $Y_t = A\ Y_{t-1}, +B + \varepsilon_t$, on en déduit que

$$Y_t = A^2Y_{t-2} + B + AB + \varepsilon_t + A\varepsilon_{t-1} = A^3Y_{t-3} + B + AB + A^2B + \varepsilon_t + A\varepsilon_{t-1} + A^2\varepsilon_{t-2}$$
$$= \ldots.. = A^tY_0 + B + AB + \ldots. + A^{t-1}B + \varepsilon_t + A\varepsilon_{t-1} + \ldots A^{t-1}\varepsilon_1$$

Ce qui donne :

$$Y_t = (\tfrac{1}{2})^{t-1}AY_0 + B + \mu_t$$

où μ_t est un vecteur de termes d'erreurs défini par :

$$\mu_t = \varepsilon_t + A\varepsilon_{t-1} + \ldots A^{t-1}\varepsilon_1 = \begin{bmatrix} \mu_{1t} \\ \mu_{2t} \end{bmatrix}$$

et donc $\begin{cases} p_t = \frac{3}{10}(\frac{1}{2})^{t-1}p_0 + \frac{6}{10}(\frac{1}{2})^{t-1}q_0 + 2 + \mu_{1t} \\ q_t = \frac{1}{10}(\frac{1}{2})^{t-1}p_0 + \frac{2}{10}(\frac{1}{2})^{t-1}q_0 - 1 + \mu_{2t} \end{cases} =$

4-Il est clair que $E(Y_t) = B$

5- i- Dans ce cas, le vecteur μ_t sera nul , on obtient alors :

$$V(Y_t) = (\tfrac{1}{2})^{2t-2}AV(Y_0)A' = (\tfrac{1}{2})^{2t-2}\begin{bmatrix} \frac{3}{10} & \frac{6}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{2}{10} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{6}{10} & \frac{2}{10} \end{bmatrix} = \frac{1}{100}(\tfrac{1}{2})^{2t-2}\begin{bmatrix} 45 & 15 \\ 15 & 5 \end{bmatrix}$$

5-ii- $Cov(p_t, q_t) = \frac{15}{100}(\frac{1}{2})^{2t-2}$

$$\rho = \frac{\frac{15}{100}(\frac{1}{2})^{2t-2}}{\sqrt{\frac{45}{100}(\frac{1}{2})^{2t-2}}\sqrt{\frac{5}{100}(\frac{1}{2})^{2t-2}}} = 1$$

En fait cela découle de l'existence d'une relation linéaire entre les deux grandeurs $p_t - 3q_t = -1$

Le coefficient de corrélation linéaire est $=1$

Corrigé 3 :

1- Le modèle est défini par : $Y = Xa + u$ où

$$y = \begin{bmatrix} 6 \\ 13 \\ 23 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix} \quad V(u) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \Omega$$

Le modéle est donc hétéroscédastique.

2- Estimation par MCO $\hat{a} = (X'X)^{-1}X'Y = \frac{X'Y}{X'X} == \frac{18 + 91 + 253}{9 + 169 + 529} = \frac{362}{707}$

3- Cet estimateur est sans biais.: $E(\hat{a}) = a$

Sa variance est :$(X'X)^{-1}X'\Omega X \ \ (X'X)^{-1}$Elle n′est pas n'est pas minimale (Cours)

4- L'estimation par les MCG est $\widehat{\hat{a}} = (X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}Y = \frac{X'\Omega^{-1}Y}{X'\Omega^{-1}X} =$

$$X'\Omega^{-1}X = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix} = 9 + \frac{49}{9} + \frac{121}{4} =$$

$$X'\Omega^{-1}Y = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 13 \\ 23 \end{bmatrix} = 18 + \frac{91}{9} + \frac{253}{4}$$

5- Pour $\widehat{\hat{a}}$, la variance est égale à $(X'\Omega^{-1}X)^{-1}$

alors que pour $\hat{a}$ la variance est $(X'X)^{-1}X'\Omega X \ \ (X'X)^{-1}$

****