Variable aléatoire discrète

A– 1 • Définition :

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ *un espace probabilisé. On appelle variable aléatoire discrète sur* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ *toute application* $X : \begin{matrix} \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega \longmapsto X(\omega) \end{matrix}$, *vérifiant les deux conditions suivants :*

a • *L'ensemble des images* $X(\Omega) = \{X(\omega), \omega \in \mathbb{R}\}$ *est une partie au plus dénombrable de* $\mathbb{R}$, *(on peut avoir* $X(\Omega) = \{x_0, x_1, \dots, x_k, \dots\}$*)*

b • *Pour tout* $x_k \in X(\Omega)$, $A_k = \{\omega \in \Omega, X(\omega) = x_k\}$ *fait partie de la famille* $\mathcal{F}$ *d'événements auxquels on peut attribuer une probabilité par P*

L'événement A_k *est aussi noté* $X^{-1}(\{x_k\})$ *ou plus commodément* $\{X = x_k\}$.

Nous utiliserons l'abréviation v.a. pour variable aléatoire.

Remarquons que la famille de tous les A_k *forme une partition de* Ω *: on classe chaque élément de* Ω *selon son image par X. Il en résulte :* $\sum_{x_k \in X(\Omega)} P(A_k) = \sum_{x_k \in X(\Omega)} P(X = x_k) = 1$

Remarque : *Pour tous les exemples classiques que nous rencontrerons, il est possible de les numéroter de manière croissante :* $x_0 < x_1 < \dots < x_k \dots$ *Mais ce n'est pas toujours le cas, car l'ensemble des valeurs possibles peut être par exemple les décimaux (ou les rationnels)*

A– 2 • Loi d'une variable aléatoire discrète :

Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$. *On lui associe la fonction d'ensemble* P_X *définie sur la famille de toutes les parties de* $\mathbb{R}$:

en posant $p_k = P_X(\{x_k\}) = P(A_k) = P(X = x_k)$

puis pour tout $B \subset \mathbb{R}$: $P_X(B) = \sum_{x_k \in B} P(X = x_k) = \sum_{x_k \in B} p_k$

Remarque : ***Deux variables aléatoires peuvent avoir même loi sans être égales.***

$\mathcal{A}-3$ • Fonction de répartition :

On appelle fonction de répartition de la variable aléatoire X, la fonction F_X définie sur $\mathbb{R}$

$$par : \begin{cases} \forall\, x \in \mathbb{R}, F_X(x) = P_X(]-\infty, x]) = P_X(X \leq x) & \text{«version anglo-saxonne»} \\ \forall\, x \in \mathbb{R}, F_X(x) = P_X(]-\infty, x[) = P_X(X < x) & \text{«version française»} \end{cases}$$

$$On\ a\ aussi : F_X(x) = P_X(X \leq x) = \sum_{\substack{x_k \in X(\Omega) \\ x_k \leq x}} P_X(X = x_k)$$

☑ *La fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète X est croissante sur $\mathbb{R}$, continue à droite et limitée à gauche en tout point. Elle tend vers 0 en $-\infty$*

$\left(F_X(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0\right)$ *et vers 1 en $+\infty$* $\left(F_X(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1\right)$

Elle caractérise la loi de X, autrement dit : $F_X = F_Y$ si et seulement si les variables aléatoires X et Y ont même loi

$\mathcal{A}-4$ • Propriétés de la fonction de répartition :

$\forall\, x \in \mathbb{R}$:

a • $0 \leq F_X(x) \leq 1$ b • $P_X(X \leq x) = P_X(]-\infty, x]) = F_X(x)$

c • $P_X(X > x) = P_X(]x, +\infty[) = 1 - P_X(X \leq x) = 1 - F_X(x)$

d • $P_X(X \leq x) = P_X(X < x) + P_X(X = x)$ e • $P_X(x_1 < X \leq x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1)$

f • $P_X(X = x) = F_X(x) - \lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} F_X(x - \varepsilon) = F_X(x) - \lim\limits_{n \to +\infty} F_X\left(x - \dfrac{1}{n}\right), n \in \mathbb{N}^*$

g • $P_X(X = t) = F_X(t) - F_X(t-1) = P_X(X \leq t) - P_X(X \leq t-1)$

$\mathcal{A}-5$ • Changement de variables :

Soient X et Y deux v.a. discrètes sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ φ une bijection de $I \subseteq X(\Omega)$ dans $J = Im(\varphi) \subseteq Y(\Omega)$. Pour détérminer la loi de probabilité de la v.a. $Y = \varphi(X)$, on doit exprimer la f.r. de Y en fonction de la f.r. de X :

☑ *Si φ est croissante :*

☞ $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\varphi(X) \leq y) = P\left(X \leq \varphi^{-1}(y)\right) = F_X\left(\varphi^{-1}(y)\right)$

☞ $P(Y = y) = F_Y(y) - F_Y(y-1) = F_X\left(\varphi^{-1}(y)\right) - F_X\left(\varphi^{-1}(y-1)\right)$

☑ *Si φ est décroissante :*

☞ $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\varphi(X) \leq y) = P\left(X \geq \varphi^{-1}(y)\right) = 1 - P\left(X < \varphi^{-1}(y)\right)$

$$= \begin{cases} 1 - \left[P\left(X \leq \varphi^{-1}(y)\right) - P\left(X = \varphi^{-1}(y)\right)\right], si\ \varphi^{-1}(y) \in X(\Omega) \\ 1 - P(X \leq t), si\ \varphi^{-1}(y) \notin X(\Omega), t\ \text{étant la valeur qui précède}\ \varphi^{-1}(y) \end{cases}$$

$\mathcal{A}-6$ • Les caractéristiques de tendance centrale :

On appelle quantile ou fractile d'ordre α , $(0 \le \alpha \le 1)$ d'une variable aléatoire X dont la fonction de répartition est $F_X(x)$, la valeur x_α telle que $F_X(x_\alpha) = P_X(X \le x_\alpha) = \alpha$.

x_α s'appelle quantile ou fractile d'ordre α

a • La médiane : *La médiane est le quantile d'ordre $\alpha = 1/2$ si elle est unique , elle sera notée $M_e(X)$, si non l'ensemble des valeurs médianes constitue un intervalle médian*

b • Les quartiles : *Les quartiles , notés $Q_i(X)$ (respectivement $i = 1, 2, 3$) correspondent aux quantiles d'ordre $(\alpha = 25\% , 50\% , 75\%)$. Notons que $Q_2(X) = M_e(X)$ L'intervalle inter-quartile est l'intervalle $[Q_1, Q_3]$. De même, on a $P_X(X \in [Q_1, Q_3]) = 0,5$*

c • Les déciles : *Le k-ième décile $(k = 1, 2, \dots, 9)$ est le quartile d'ordre$(k/10)$*

d • Les centiles : *Le k-ième centile $(k = 1, 2, \dots, 99)$ est le quartile d'ordre$(k/100)$*

e • Le mode : *M_o est la valeur de X associée à la plus grande probabilité*

$\mathcal{A}-7$ • Espérance mathématique :

Soit X une variable aléatoire discrète vérifiant :

$$\sum_{x_k \in X(\Omega)} |x_k| P(X = x_k) < +\infty \left(\sum_{k=0}^{+\infty} |x_k| P(X = x_k) \text{ est absolument convergente} \right)$$

On appelle espérance mathématique de X (ou moyenne ou premier moment non centré) le réel $E(X)$ défini par : $E(X) = \sum_{x_k \in X(\Omega)} x_k P(X = x_k)$

L'espérance de X apparaît ainsi comme le barycentre des valeurs possibles de X pondérées par leurs probabilités de réalisation. Notons que l'hypothèsede convergence absolue de la série $\sum_{k=0}^{+\infty} |x_k| P(X = x_k)$ garantit l'existence de $E(X)$.

On remarque aussi que l'espérance ne dépend que de la loi de X

$\mathcal{A}-8$ • Espérance d'une fonction d'une v. a. :

Soient X une v. a. discrète et φ une fonction numérique dont l'ensemble de définition contient $X(\Omega)$. Si $E[\varphi(X)]$ existe , alors : $E[\varphi(X)] = \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi(x_k) P(X = x_k)$

Remarques : *Si X et Y ont même loi , il est clair que $E(X) = E(Y)$. La réciproque est fausse*

$\mathcal{A}$– 9 • *Propriétés de l'espérance mathématique* :

a • $E(aX+b) = aE(X)+b$, *en particulier* $E(aX) = aE(X)$, *où a et b deux constantes*

b • $E(c) = c$, *où c est une constante. En particulier* $E[E(X)] = E(X)$, *puisque* $E(X)$ *n'est pas une variable aléatoire*

c • *S'il existe une constante c telle que* $P\ (X \geq c\ ) = 1$, *alors* $E\ (X)\ \geq c$

d • *S'il existe une constante c' telle que* $P\ (X \leq c')\ = 1$, *alors* $E\ (X)\ \leq c'$

e • *S'il existe deux constantes c et c' telleque* $P\ (c \leq X \leq c')\ = 1$, *alors* $c \leq E(\ X)\ \leq c'$

f • *Si* $\begin{cases} P\ (X \geq c\ ) = 1 \\ \quad et \\ E\ (X)\ = c \end{cases}$, *alors* $\begin{cases} P\ (X = c\ ) = 1\ et\ P\ (X > c\ ) = 0 \\ \quad ou \\ P\ (X = E\ (X)\ ) = 1\ et\ P\ (X > E\ (X)\ ) = 0 \end{cases}$

g • *Pour toutes variables aléatoires X et Y ayant chacune une espérance , on a :*
$E(X+Y) = E(X)+E(Y)$ *et* $E(X-Y) = E(X)-E(Y)$

☑ ***Généralisation***: *Pour toute suite de v.a.* $(X_i)_{i=1,2,\dots,n}$ *ayant chacune une espérance , on a :* $E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$

h • ***Positivité de l'espérance*** :

☞ *Si* $E(X)$ *existe et si* $X \geq 0$, *alors* $E(X) \geq 0$

☞ *Si X et Y ont une espérance et si* $X \leq Y$, *alors* $E(X) \leq E(Y)$

j • ***Inégalité de Jensen*** : *Soit φ une fonction convexe de ℝ vers lui même et X une v.a. telle que* $E[\varphi(X)]$ *existe . On a alors :* $\varphi[E(X)] \leq E[\varphi(X)]$

☞ ***Rappel*** : *Une fonction φ de ℝ vers lui même est dite convexe si, pour tout couple* (x,y) *de* $\mathbb{R}^2$ *et pour tout* $\lambda \in [0,1]$, *on a :* $\varphi[\lambda x + (1-\lambda)y] \leq \lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(y)$

Notons , en particulier , qu'une fonction φ deux fois dérivables dont la dérivée seconde est positive $(\varphi''(x)\ \geq 0)$ *est une fonction convexe.*

k • *Si* $E(X)$ *existe , alors* $|E(X)| \leq E(|X|) < +\infty$

ℓ • *Pour toute suite de v.a.* $(X_i)_{i=1,2,\dots,n}$ *identiques ayant chacune une espérance égale à m , on a :* $E(X_1) = E(X_2) = \cdots = E(X_n) = m$

$\mathcal{A}$– 10 • *Variance* :

Soit X une v.a. ayant un moment non-centré d'ordre 2 $\left(E(X^2)\right)$.

On appelle respectivement variance de X et écart type de X les quantités :

$$Var(X)=E\left[\left(X-E(X)\right)^2\right]=\sum_{x_k\in X(\Omega)}\left(x_k-E(X)\right)^2P(X=x_k)\quad,\sigma(X)=\sqrt{Var(X)}$$

La variance ou le deuxième moment centré de X est la quantité qui nous permet de mesurer la dispersion autour de la moyenne $E(X)$

$\mathcal{A}-11$ • Propriétés de la variance :

a • $\forall\, a\in\mathbb{R},\forall\, b\in\mathbb{R}, Var(aX+b)=a^2Var(X)$

b • $Var(c)=0$ où c est une constante. En particulier : $Var(X)=0\Leftrightarrow X=E(X)$

c • **Formule de Koenig** : $Var(X)=E(X^2)-\left(E(X)\right)^2=\displaystyle\sum_{x_k\in X(\Omega)}x_k^2P(X=x_k)-\left(E(X)\right)^2$

d • $Var(X)\geq 0$ e • $Var(-X)=Var(X)$ f • $P(X=c)=1$, alors $Var(X)=0$

g • $Var(X)=0\Leftrightarrow X=E(X)\ (p.s.)\Leftrightarrow X$ est presque sûrement constante.

h • $Var(X)=E\left[\left(X-E(X)\right)^2\right]=\inf\limits_{a\in\mathbb{R}}E[(X-a)^2]$

i • Terminologie particulière : Soit X une v.a. Les v.a. $X^c=X-E(X)$ et $X^*=\dfrac{X-E(X)}{\sigma(X)}$ sont respectivement appelées v.a. centrée et v.a. centrée réduite associées à X.

On a : $\begin{cases}E(X^c)=0\\Var(X^c)=Var(X)=\sigma^2\end{cases}$ et $\begin{cases}E(X^*)=0\\Var(X^*)=1\end{cases}$

j • Pour toute suite de v.a. $(X_i)_{i=1,2,\dots,n}$ identiques ayant chacune une variance égale à σ^2, on a : $Var(X_1)=Var(X_2)=\cdots=Var(X_n)=\sigma^2$

$\mathcal{A}-12$ • Les moments non-centrés d'ordre r :

Soit $r\in\mathbb{N}^*$. On appelle moment non-centrés d'ordre r de la v.a. X, la quantité

$m_r=E(X^r)=\displaystyle\sum_{x_k\in X(\Omega)}x_k^rP(X=x_k)$, lorsqu'elle est définie, c'est à dire, si la série $\displaystyle\sum_{x_k\in X(\Omega)}|x_k^r|P(X=x_k)$ est absolument convergente

☑ Si X possède un moment d'ordre r, alors elle possède aussi des moments de tout ordre $n\leq r$

☑ Si $r=0\Rightarrow m_0=1$ ☑ Si $r=1\Rightarrow m_1=E(X)$ ☑ Si $r=2\Rightarrow m_2=E(X^2)$

☑ $\forall\, r\in\mathbb{N}^*,\forall\,(\theta,\lambda)\in\mathbb{R}^2$:

$$m_r(\theta X+\lambda)=E((\theta X+\lambda)^r)=\sum_{i=0}^{r}C_r^i\theta^{r-i}\lambda^i m_{r-i}(X)=\sum_{i=0}^{r}C_r^i\theta^i\lambda^{r-i}m_i(X)\quad,\text{en particulier :}$$

$m_1(\theta X+\lambda)=E(\theta X+\lambda)=\theta E(X)+\lambda=\theta m_1(X)+\lambda$

$\mathcal{A}$– 13 • Les moments centrés d'ordre r :

Soit $r\in\mathbb{N}^*$. *On appelle moment centré d'ordre r de la v.a. X , la quantité*

$$\mu_r=E\left[(X-E(X))^r\right]=\sum_{x_k\in X(\Omega)}(x_k-E(X))^rP(X=x_k)\ ,\text{lorsqu'elle est convergente}$$

☑ $Si\ r=0\Rightarrow\mu_0=1$ ☑ $Si\ r=1\Rightarrow\mu_1=0$

☑ $Si\ r=2\Rightarrow\mu_2=E\left[(X-E(X))^2\right]=Var(X)=E(X^2)-(E(X))^2\Rightarrow\mu_2=m_2-m_1^2$

☑ $\forall\ r\in\mathbb{N}^*,\forall\ (\theta,\lambda)\in\mathbb{R}^2:\mu_r(\theta X+\lambda)=\theta^r\mu_r(X)$

☑ *Pour une loi symétrique* : $\mu_{2k+1}=0\ ,\forall k\geq 0$

$\mathcal{A}$– 14 • Relations entre moments non-centrés et moments centrés :

a • Moments centrés en fonction des moments non-centrés :

$$\mu_r=\sum_{i=0}^{r}C_r^im_{r-i}(-m_1)^i=\sum_{i=0}^{r}C_r^im_i(-m_1)^{r-i}\quad ,\text{en particulier :}$$

☞ *Pour* $r=2:\mu_2=m_2-m_1^2$ *ou encore* , $Var(X)=E(X^2)-(E(X))^2$

☞ *Pour* $r=3:\mu_3=m_3-3m_2m_1+2m_1^3$

☞ *Pour* $r=4:\mu_4=m_4-4m_3m_1+6m_2m_1^2-3m_1^4$

☞ *Pour* $r=5:\mu_5=m_5-5m_4m_1+10m_3m_1^2-10m_2m_1^3+4m_1^5$

b • Moments non-centrés en fonction des moments centrés :

$$m_r=\sum_{i=0}^{r}C_r^i\mu_{r-i}\mu^i=\sum_{i=0}^{r}C_r^i\mu_i\mu^{r-i}\quad ,\text{en particulier :}$$

☞ *Pour* $r=2:m_2=\mu_2+\mu_1^2$ *ou encore* , $E(X^2)=Var(X)+(E(X))^2$

☞ *Pour* $r=3:m_3=\mu_3+3\mu_2\mu_1+\mu_1^3$ ☞ *Pour* $r=4:m_4=\mu_4+4\mu_3\mu_1+6\mu_2\mu_1^2+\mu_1^4$

☞ *Pour* $r=5:m_5=\mu_5+5\mu_4\mu_1+10\mu_3\mu_1^2+10\mu_2\mu_1^3+\mu_1^5$

$\mathcal{A}$– 15 • Les moments factoriels :

On appelle moment factoriel d'ordre r la quantité :

$$\mu_{[r]}(X)=E\left(\frac{X!}{(X-r)!}\right)=\sum_{x_k\in X(\Omega)}\left(\frac{x_k!}{(x_k-r)!}\right)P(X=x_k)=E\left[X(X-1)(X-2)\dots(X-(r-1))\right]$$

☑ *Les moments factoriels se calculent essentiellement sur les v.a. discrètes.*

☑ *Il est possible d'exprimer les moments non-centrés à l'aide des moments*

$$factoriels: \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \\ m_6 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 7 & 6 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 15 & 25 & 10 & 1 & 0 & \cdots \\ 1 & 31 & 90 & 65 & 15 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_{[1]} \\ \mu_{[2]} \\ \mu_{[3]} \\ \mu_{[4]} \\ \mu_{[5]} \\ \mu_{[6]} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$\mathcal{A}$– 16 • Le coefficient d'asymétrie (skewness):

Le coefficient d'asymétrie γ_1 est définie par rapport à l'espérance mathématique :

$$\gamma_1 = \mu_3/\sigma^3 = E\left[\left(X - E(X)\right)^3\right] / \left[E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right)\right]^{\frac{3}{2}}$$

C'est une valeur sans dimension qui n'est pas affecté par un changement d'origine et d'échelle. Selon la valeur du coefficient d'asymétrie, la fonction de densité pour les v.a. continues, prend une forme différente : étalée à droite ($\gamma_1 > 0$), symétrique ($\gamma_1 = 0$) ou étalée à gauche ($\gamma_1 < 0$)

$\mathcal{A}$– 17 • Le coefficient d'aplatissement (kurtosis):

Le coefficient d'aplatissement vise à situer la hauteur de la courbe de densité d'une loi par rapport à la référence qu'est la loi normale (Loi de Laplace-Gauss).

Noté γ_2, sa formule est la suivante : $\gamma_2 = \dfrac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \dfrac{E\left[\left(X - E(X)\right)^4\right]}{\left[E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right)\right]^2} - 3$

C'est un coefficient sans dimension, invariant par changement d'échelle et de dimension. La constante 3 a été choisie de manière à ce que le coefficient d'aplatissement de la loi normale soit égale à $\gamma_2 = 0$.

☞ $\gamma_2 > 0$ *On parle de distribution leptokurtique (ou leptocurtique). Les échantillons ayant des queues plus épaisses que la normale aux extrémités, impliquant des valeurs anormales plus fréquentes*

☞ $\gamma_2 = 0$: *On parle de distribution mésokurtique (ou mésocurtique). La loi normale est un cas particulier de distribution mésokurtique pour laquelle le coefficient de dissymétrie $\gamma_1 = 0$*

☞ $\gamma_2 < 0$ *On parle de distribution platykurtique (ou platycurtique).*

Pour une même variance, la distribution est relativement « aplatie », son centre et ses queues étant appauvries au profit des flancs.

$\mathcal{A}-18$ • Fonction génératrice des moments (ou transformée de Laplace) :

Soit X une v.a. définie sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{P})$. Soit I un intervalle contenant 0, pour tout réel $t\in I$, on appelle fonction génératrice des moments de X correspondant à t : $M_X(t)=E(e^{tX})=\sum_{x_k\in X(\Omega)} e^{tx_k}P(X=x_k)$ *, lorsqu'elle est convergente*

Elle génère les moments non-centrés : $M_X(0)=1$, $M'_X(0)=E(X)$, $M''_X(0)=E(X^2)$ …

$M_X^{(r)}(0)=E(X^r)=m_r$

$\mathcal{A}-19$ • Propriétés de la fonction génératrice des moments :

a • *La fonction génératrice des moments d'une v.a. caractérise la loi de cette variable aléatoire. Autrement dit :* $\big(M_X(t)=M_Y(t)\big)\Leftrightarrow$ *X et Y ont la même loi*

b • $M_{aX+b}(t)=e^{bt}M_X(at)$

$\mathcal{A}-20$ • Fonction génératrice des probabilités :

Soit une quantité certaine (non-aléatoire) $u\in[0,1]$. On appelle fonction génératrice des probabilités, noté $g_X(u)=E(u^X)=\sum_{x_k\in X(\Omega)} u^{x_k}P(X=x_k)$ *, lorsqu'elle est convergente*

Elle génère les moments factoriels : $g'_X(1)=\mu_{[1]}$, $g''_X(1)=\mu_{[2]}$ …

$g_X^{(r)}(1)=\mu_{[1]}$, où $g_X^{(r)}(u)=\dfrac{d^r g_X(u)}{du^r}$

Lois de probabilité discrètes usuelles

$\mathcal{B}-1$ • Loi uniforme sur un ensemble fini d'entiers ou Loi uniforme discrète $\mathcal{U}_{(n)}$:

La variable aléatoire X suit la loi uniforme sur l'ensemble de réels $\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ si P_X est l'équiprobabilité sur cet ensemble.

Autrement dit, l'ensemble des valeurs possibles de X est $X(\Omega)=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$

☞ : *On peut ordonner $X(\Omega)$ de la manière suivante :*

$$X(\Omega)=\{a,a+1,\dots,b-1,b\}\text{, avec }\begin{cases}a=\inf\limits_{x_k\in X(\Omega)}\big(X(\Omega)\big)\\ b=\sup\limits_{x_k\in X(\Omega)}\big(X(\Omega)\big)\end{cases},(a,b)\in\mathbb{Z}^2\text{ et }n=b-a+1$$

☑ **Loi de probabilité :** $\forall k=1,2,\dots,n$, $P(X=x_k)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}\text{, si }x_k\in X(\Omega)\\ 0\text{, si non}\end{cases}$, $n\in\mathbb{N}^*$

☑ **Espérance mathématique** : $E(X) = \dfrac{n+1}{2}$ ☑ **Variance** : $Var(X) = \dfrac{n^2-1}{12}$

☑ **Médiane** : $M_e(X) = \dfrac{n+1}{2}$

☑ **Coefficient d'asymétrie** : $\gamma_1 = 0$, la distribution est symétrique par rapport à la valeur $\dfrac{n+1}{2}$

☑ **Coefficient d'aplatissement (kurtosis normalisé)** : $\gamma_2 = -\dfrac{6(n^2+1)}{5(n^2-1)}$

☑ **Fonction génératrice des moments** : $M_X(t) = \dfrac{1}{n}\sum_{x=1}^{n} e^{tx} = \left(\dfrac{e^t}{e^t-1}\right)\left(\dfrac{e^{nt}-1}{n}\right)$

$\mathcal{B}$– 2 • Loi de Dirac δ_{x_0} :

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Une v. a. X est dite de loi de Dirac δ_{x_0} si elle est à valeurs dans $\mathbb{R}$ et telee que $P_X = \delta_{x_0}$. On a donc , pour tout $A \in \mathcal{F}$: $P_X(A) = \delta_{x_0}(A) = \begin{cases} 1 \text{ , si } x_0 \in A \\ 0 \text{ , si non} \end{cases}$

De plus on a : $\begin{cases} P_X(\{x_0\}) = P_X(X = x_0) = 1 \\ P_X(\{x\}) = P_X(X = x) = 0 \text{ , pour tout } x \neq x_0 \end{cases}$

On dit que la v. a. X est presque sûrement (p. s.) égale à x_0

$\mathcal{B}$– 3 • Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1, p)$:

Soit une v. a. X dite variable aléatoire de Bernoulli de paramètre p , $p \in [0, 1]$, si elle ne prend que deux valeurs 0 et 1 avec : $X(\Omega) = \{0, 1\}$

☞ : Si A est un événement de probabilité p, son indicatrice définie par :

$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 \text{ , si } \omega \in A \\ 0 \text{ , si } \omega \in \overline{A} \end{cases} = \begin{cases} 1 \text{ , si A est réalisé} \\ 0 \text{ , si A n'est pas réalisé} \end{cases}$, est une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p . On peut toujours écrire $X = \mathbb{1}_A$ en définissant $A = \{\omega \in \Omega , X(\omega) = 1\}$

☑ **Loi de probabilité** : $P(X = x) = \begin{cases} p^x(1-p)^{1-x} \text{ , } \forall x \in \{0, 1\} \\ 0 \text{ , si non} \end{cases}$

☑ **Fonction de répartition** : $F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ , si } x < 0 \\ 1 - p \text{ , si } x \in [0, 1[\\ 1 \text{ , si } x \geq 1 \end{cases}$

☑ **Espérance mathématique** : $E(X) = p$ et $\forall r \in \mathbb{N}^*$, $m_r = E(X^r) = p$

☑ **Variance** : $Var(X) = p(1-p) \leq 1/4$

☑ **Coefficient d'asymétrie** : $\gamma_1 = \dfrac{1-2p}{\sqrt{p(1-p)}}$

☑ **Coefficient d'aplatissement (kurtosis) :** $\gamma_2 = \dfrac{1}{p(1-p)} - 3$

☑ **Fonction génératrice des moments :** $M_X(t) = 1 - p + pe^t$

☑ **Remarques :**

☞ : *Le terme variable aléatoire de Bernoulli est synonyme de variable aléatoire indicatrice*

☞ : *La loi de Bernoulli dépend d'un seul paramètre p*

☞ : $X \backsim \mathcal{B}(1,p) \Rightarrow 1 - X \backsim \mathcal{B}(1,(1-p))$

☑ **Utilisation :** *Soit p la proportion d'individus possédant un certain caractère $\mathcal{C}$ dans une population $\mathbb{P}$. On choisit au hasard un individu dans cette population ; on définit la v.a X comme suit* $X = \begin{cases} 1 \text{ si l'individu choisi possède le caractère } \mathcal{C} \\ 0 \text{ , si non} \end{cases}$

$\mathcal{B}$– 4 • Loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$:

Soit une épreuve de Bernoulli. À n répétitions indépendantes de cette épreuve de Bernoulli sont associées n variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ indépendantes.

On considère la variable aléatoire $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

Cette variable désigne le nombre de succès lors des n épreuves. L'univers image sera :
$X(\Omega) = \{0, 1, 2, \dots, n\}$

☞ : *Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ une famille de n événements mutuellement indépendants ayant tous même probabilité p et notons X_i la variable de Bernoulli indicatrice de A_i*

$$(X_i = \mathbb{1}_{A_i}) : \mathbb{1}_{A_i}(\omega) = X_i(\omega) = \begin{cases} 1 \text{ , si } \omega \in A_i \\ 0 \text{ , si } \omega \in \bar{A}_i \end{cases} = \begin{cases} 1 \text{ , si } A \text{ est réalisé} \\ 0 \text{ , si } A \text{ n'est pas réalisé} \end{cases}$$

Alors la variable $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ *suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$*

☑ **Loi de probabilité :** $P(X = x) = \begin{cases} C_n^x p^x (1-p)^{n-x} \text{ , } \forall x \in \{0, 1, 2, \dots, n\} \\ 0 \text{ , si non} \end{cases}$

☑ **Fonction de répartition :** $F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ , si } x < 0 \\ \sum_{k=0}^{x} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \text{ , si } a \le x < a+1 \text{ , } a \in X(\Omega) \\ 1 \text{ , si } x \ge n \end{cases}$

☑ **Espérance mathématique :** $E(X) = np$ ☑ **Variance :** $Var(X) = np(1-p)$

☑ **Coefficient d'asymétrie :** $\gamma_1 = \dfrac{1-2p}{\sqrt{np(1-p)}}$

☑ **Coefficient d'aplatissement (kurtosis) :** $\gamma_2 = 3 - \frac{6}{n} + \frac{1}{np(1-p)}$

☑ **Fonction génératrice des moments :** $M_X(t) = (1 - p + pe^t)^n$

☑ **Stabilité :** *Si X et Y sont deux v.a. indépendantes telles que :* $\begin{cases} X \backsim \mathcal{B}(n,p) \\ \text{et} \\ Y \backsim \mathcal{B}(m,p) \end{cases}$

Alors $(X+Y) \backsim \mathcal{B}\big((n+m),p\big)$

☑ **Remarques :**

☞ *La loi* $\mathcal{B}(n,p)$ *apparaît, entre autre, lors des tirages avec remise dans une urne contenant des boules bleues en proportion p et des boules rouges en proportion* $1-p$. *Sur n tirages, si X est le nombre de boules bleues obtenues, la loi de X est une binomiale* $\mathcal{B}(n,p)$

☞ *Soit* $X \backsim \mathcal{B}(n,p)$, *X désigne le nombre de succès et* $Y = n - X$ *le nombre d'échecs. Par conséquent* $P(X=x) = P(Y=n-x) = C_n^x p^x (1-p)^{n-x}$

☑ **Loi binomiale et variable fréquences :** *Soit* $X \backsim \mathcal{B}(n,p)$, *on définit la variable* $F_n = \frac{X}{n}$ *où X désigne le nombre de succès obtenus au cours des n épreuves,* F_n *le nombre de succès divisé par le nombre d'épreuves soit la fréquence de succès.*

F_n *est la variable fréquence associée à X :* $F_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

L'univers image de F_n *est* $F_n(\Omega) = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{k}{n}, \ldots, 1\right\}$. *On a* $P\left(\left\{F_n = \frac{x}{n}\right\}\right) = C_n^x p^x (1-p)^{n-x}$,

$E(F_n) = p$ *et* $Var(F_n) = \frac{p(1-p)}{n}$

$\mathcal{B}$– 5 • Loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N,n,p)$:

Soient $n, N \in \mathbb{N}^*$ *et* $p \in [0,1]$ *tels que* $Np \in \mathbb{N}$ *et* $n \leq N$.

On appelle loi hypergéométrique de paramètres N, n, p la loi de probabilité discrète :

☑ **Loi de probabilité :**

$$P(X=x) = \begin{cases} \frac{C_{Np}^{x} C_{N(1-p)}^{n-x}}{C_N^n}, \forall x \in X(\Omega) = \mathbb{N} \cap \big[\max\big(0, n - N(1-p)\big), \min(n, Np)\ \big] \\ 0 \text{, si non} \end{cases}$$

Considérons une urne contenant Np boules blanches et N (1 − p) boules noires, soit au total N boules.

On tire au hasard n boules dans l'urne sans remise (c'est-à-dire qu'une réalisation est une partie à n éléments de cette urne et qu'on suppose toutes les réalisations équiprobables) *et on note X le nombre de boules blanches correspondant.*

La variable X a pour loi $\mathcal{H}(N,n,p)$.

☑ **Espérance mathématique :** $E(X) = np$ ☑ **Variance :** $Var(X) = \left(\frac{N-n}{N-1}\right) np(1-p)$

Avec $\rho = \frac{N-n}{N-1}$ *définissant le coefficient d'exhaustivité,* $\frac{N-n}{N-1} \leq 1$

☑ **Limite d'une variable hypergéométrique :** *Soit X une variable hypergéométrique,* $X \rightsquigarrow \mathcal{H}(N,n,p)$. *Lorsque N tend vers $+\infty$,* $\mathcal{H}(N,n,p) \longrightarrow \mathcal{B}(n,p)$

En effet, le nombre N de boules étant infiniment grand, la non-remise de la boule tirée ne modifie presque pas la proportion de boules blanches.

En pratique : $\mathcal{H}(N,n,p) \xrightarrow{Si\ N>10n} \mathcal{B}(n,p)$

☑ **Remarques :**

☞ : *Généralement* $n > 1$, *donc* $\rho < 1$. *La variance d'une variable hypergéométrique (tirages sans remise) est inférieure à la variance de la variable binomiale (tirages avec remise).*

☞ : *Si* $n \ll N$, *alors* $\underbrace{\left(\frac{N-n}{N-1}\right) np(1-p)}_{\text{variance de la variable hypergéométrique}} \longrightarrow \underbrace{np(1-p)}_{\text{variance de la variable binomiale}}$

$\mathcal{B}$– 6 • Loi géométrique $\mathcal{G}(p)$:

On répète continuellement et de façon indépendante une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès est $p \in \,]0,1[$: *autrement dit* $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ *un néchantillon i.i.d de loi de Bernoulli* $\mathcal{B}(1,p)$ *où* $X_i = \begin{cases} 1 \text{ si l'individu choisi possède le caractère } \mathcal{C} \\ 0, \text{ si non} \end{cases}$

avec $P(X_i = x_i) = p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}$, $x_i \in X_i(\Omega) = \{0,1\} \Rightarrow E(X_i) = p$ *et* $Var(X_i) = p(1-p)$

Soit Y la variable aléatoire prenant pour valeur le rang du premier individu possédant le caractère $\mathcal{C}$ (Y est le nombre d'épreuves nécessaires pour obtenir un premier succès).

$\{Y = k\}$: *obtenir le caractère $\mathcal{C}$, la $1^{ère}$ fois à la $k^{ième}$ épreuve*

L'événement $\{Y = y\}$ est obtenu par la réalisation de $y-1$ échecs puis d'un succès. Donc Y est une variable aléatoire géométrique $Y \rightsquigarrow \mathcal{G}(p)$ *à valeurs dans* $Y(\Omega) = \{1,2,\dots,n,\dots\} = \mathbb{N}^*$

☑ **Loi de probabilité :** $P(Y = y) = \begin{cases} (1-p)^{y-1}p, \text{ si } y \in Y(\Omega) = \mathbb{N}^* \\ 0, \text{ si non} \end{cases}$

☑ **Fonction de répartition :** $F_Y(y) = \begin{cases} 0, \text{ si } y < 1 \\ 1-(1-p)^a, \text{ si } a \leq y < a+1, a \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

☞ : *Il est plus commode d'utiliser la fonction de survie* :

$$G_Y(y) = P(Y > y) = 1 - F_Y(y) = \begin{cases} 1\,, si\ y < 1 \\ (1-p)^a\,, si\ a \le y < a+1\,, a \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

☑ *Espérance mathématique* : $E(Y) = \frac{1}{p}$ ☑ *Variance* : $Var(Y) = \frac{1-p}{p^2}$

☑ *Coefficient d'asymétrie* : $\gamma_1 = \frac{2-p}{\sqrt{1-p}}$

☑ *Coefficient d'aplatissement (kurtosis)* : $\gamma_2 = 9 + \frac{p^2}{1-p}$

☑ *Fonction génératrice des moments* : $M_Y(t) = \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$

☑ *Propriété d'absence de mémoire* : *Si* $Y \leadsto \mathcal{G}(p)$, *alors pour tout* $t, s > 0$:

$$P(Y > s+t | Y > t) = P(Y > s) = \frac{G_Y(s+t)}{G_Y(t)} = G_Y(s)\,.$$

On dit que la loi géométrique est une loi sans mémoire

☑ *Durée de vie (ou loi géométrique à valeurs dans* $\mathbb{N}$*)*:

La durée de vie de la particule radioactive $V = Y - 1$ *où* $Y \leadsto \mathcal{G}(p)$, *suit la loi de probabilité suivante* : $P(V = v) = \begin{cases} (1-p)^v p\,, si\ v \in V(\Omega) = \mathbb{N} \\ 0\,, si\ non \end{cases}$

Il s'agit d'un décalage de la précédente loi géométrique : *si* $Y \leadsto \mathcal{G}(p)$ *alors*

$V = Y - 1 \leadsto \mathcal{G}'(p)$. *Ainsi* $E(V) = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1-p}{p}$ *et* $Var(V) = Var(Y) = \frac{1-p}{p^2}$

$\mathcal{B}-7$ • Loi de Pascal $\mathcal{P}(r,p)$:

On répète continuellement et de façon indépendante une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès est $p \in]0,1[$: *autrement dit* $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ *est un n-échantillon i.i.d de v.a. de la loi* $\mathcal{B}(1,p)$ *où* $X_i = \begin{cases} 1\ si\ l'individu\ choisi\ possède\ le\ caractère\ C \\ 0\,, si\ non \end{cases}$

avec $P(X_i = x_i) = p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}\,, x_i \in X_i(\Omega) = \{0,1\} \Rightarrow E(X_i) = p$ *et* $Var(X_i) = p(1-p)$

La loi de Pascal décrit le nombre d'épreuves indépendantes nécessaires pour obtenir r fois l'évènementétudié. La probabilité d'apparition de l'évènement à une épreuve est p, elle est constante tout le long de l'expérience.

Soit Z la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre d'épreuves indépendants qu'il faut réaliser pour obtenir pour la $r^{ième}$ *fois le caractère C auquel on s'intéresse.*

Donc Z est une variable aléatoire de Pascal : $Z \leadsto \mathcal{P}(r,p)$ *à valeurs dans*

$Z(\Omega)=\{r, r+1, \dots\} \subset \mathbb{N}^*, r \in \mathbb{N}^*$

$\{Z=k\}$: *obtenir le caractère* $\mathcal{C}$ *, la* $r^{ième}$ *fois à la* $k^{ième}$ *épreuve*

☑ **Loi de probabilité** : $P(Z=z)=\begin{cases} C_{z-1}^{r-1} p^r (1-p)^{z-r}, si\ z \in Z(\Omega)=\{r, r+1, \dots\} \\ 0, si\ non \end{cases}$

☑ **Espérance mathématique** : $E(Z)=\dfrac{r}{p}$ ☑ **Variance** : $Var(Z)=\dfrac{r(1-p)}{p^2}$

☑ **Coefficient d'asymétrie** : $\gamma_1=\dfrac{2-p}{\sqrt{r(1-p)}}$

☑ **Coefficient d'aplatissement (kurtosis)** : $\gamma_2=\dfrac{1+4(1-p)+(1-p)^2}{r(1-p)}$

☑ **Fonction génératrice des moments** : $M_Z(t)=\left[\dfrac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\right]^r$

☑ **Propriétés** :

☞ : $Si\ \ Z \rightsquigarrow \mathcal{P}(1,p), alors\ Z \rightsquigarrow \mathcal{G}(p) : \ (\mathcal{P}(1,p) \equiv \mathcal{G}(p))$

$\mathcal{B}-8$ • Loi Binomiale négative $\overline{\mathcal{B}}(r,p)$:

$(X_1, X_2, \dots, X_n)$ *est un n-échantillon i.i.d de v.a. de la loi de Bernoulli* $\mathcal{B}(1,p)$,

où $X_i=\begin{cases} 1\ si\ l'individu\ choisi\ possède\ le\ caractère\ \mathcal{C} \\ 0, si\ non \end{cases}$

La loi de Binomiale négative décrit le nombre de la non-réalisation du caractère $\mathcal{C}$ *avant la* $r^{ième}$ *réalisation du caractère* $\mathcal{C}$ *au cours de* $r+k$ *épreuves indépendants.*

C'est le nombre d'échecs précédent le $r^{ième}$ *succès.*

Soit K la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre d'échecs précédent le $r^{ième}$ *succès. Donc K est une variable binomiale négative* $(K \rightsquigarrow \overline{\mathcal{B}}(r,p), p \in]0,1[\ et\ r \in \mathbb{N})$

à *valeurs dans* $K(\Omega)=\{r, r+1, \dots\} \subset \mathbb{N}$

$\{K=k\}$: *le nombre d'échec k nécessaires précédent le* $r^{ième}$ *succès*

☑ **Loi de probabilité** : $P(K=k)=\begin{cases} C_{r+k-1}^{r-1} p^r (1-p)^k, si\ k \in K(\Omega)=\{r, r+1, \dots\} \subset \mathbb{N} \\ 0, si\ non \end{cases}$

☑ **Espérance mathématique** : $E(K)=\dfrac{r(1-p)}{p}$ ☑ **Variance** : $Var(K)=\dfrac{r(1-p)}{p^2}$

☑ **Coefficient d'asymétrie** : $\gamma_1=\dfrac{2-p}{\sqrt{r(1-p)}}$

☑ **Coefficient d'aplatissement (kurtosis)** : $\gamma_2=\dfrac{p^2+(1-p)(3r+6)}{r(1-p)}$

☑ **Fonction génératrice des moments** : $M_K(t) = \left[\dfrac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\right]^r$

☑ **Propriétés** :

☞ : Si $Z \leadsto \mathcal{P}(r,p)$, alors $K = Z - r \leadsto \overline{\mathcal{B}}(r,p)$

$\mathcal{B}$– 9 • Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$:

La loi de Poisson intervient dans l'observation d'un processus ponctuel, processus de comptage par exemple se déroulant sur la droite réelle souvent l'axe temporel : instants d'arrivées dans une file d'attente, …

Elle pourra compter le nombre de réalisations d'un événement d'intérêt sur un segment de temps : nombre de voitures passant par un point donné de la route, nombre de clients entrant dans un magasin, nombre d'accidents, nombre d'appels téléphoniques, …).

☑ **Loi de probabilité** : *On dit qu'une variable aléatoire discrète X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, si l'ensembledes valeurs possibles est $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et*

$$P(X = x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, & si\ x \in X(\Omega) = \mathbb{N} \\ 0, & si\ non \end{cases}$$

☑ **Espérance mathématique** : $E(X) = \lambda$ ☑ **Variance** : $Var(X) = \lambda$

☑ **Coefficient d'asymétrie** : $\gamma_1 = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}$

☑ **Coefficient d'aplatissement (kurtosis)** : $\gamma_2 = 3 + \dfrac{1}{\lambda}$

☑ **Fonction génératrice des moments** : $M_X(t) = \exp[\lambda(e^t - 1)]$

☑ **Approximation d'une loi binomiale par une Poisson** :

$$Si \begin{cases} X \leadsto \mathcal{B}(n,p) \\ np \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda \end{cases}, alors\ X \leadsto \mathcal{P}(np)$$

$$ou\ encore, si \left(np \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda > 0\right), alors \left(C_n^x p^x (1-p)^{n-x} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}\right)$$

Dans la pratique on approxime la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ par une loi de Poisson $\mathcal{P}(np)$ si $n \geq 30$, $p < 0,1$ et $np \leq 10$

☑ **Stabilité de la loi de Poisson par la somme** :

$$Si \begin{cases} X_1 \leadsto \mathcal{P}(\lambda_1) \\ X_2 \leadsto \mathcal{P}(\lambda_2) \\ X_1\ et\ X_2\ deux\ v.a.\ indépendantes \end{cases}, alors X_1 + X_2 \leadsto \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$$

BEN AHMED MOHSEN Téléphone: (+216) 97 619191 / 54 619191
omega.center.cp@gmail.com https://web.facebook.com/OMEGACENTER2014

Couples et Vecteurs aléatoires discrets

$\mathcal{C}-1$ • Vecteurs aléatoires :

a • Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{P})$. L'application : $\begin{array}{l}\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \omega \longmapsto \big(X(\omega),Y(\omega)\big)\end{array}$ est appelée couple aléatoire discret de marginales X et Y et noté (X,Y)

b • De même si $X_1,X_2,\dots,X_m$ sont des v.a. discrètes sur le même $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{P})$, on définit le vecteur aléatoire $(X_1,X_2,\dots,X_m)$ comme l'application : $\begin{array}{l}\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m \\ \omega \longmapsto \big(X_1(\omega),X_2(\omega),\dots X_m(\omega)\big)\end{array}$

La v.a. X_i est la i-ème marginale du vecteur

$\mathcal{C}-2$ • Lois conjointe :

La loi $P_{X,Y}$ du couple (X,Y) est la la probabilité définie sur l'ensemble des partie de $\mathbb{R}^2$ par : $\forall B \subset \mathbb{R}^2$, $P_{X,Y}(B) = P\{\omega \in \Omega \,,\big(X(\omega),Y(\omega)\big) \in B\}$

On note aussi pour tout $x_i \in X(\omega)$, $y_j \in Y(\omega)$ et pour $\big(X(\omega),Y(\omega)\big) \in B$, la loi conjointe du couple (X,Y) par : $P_{X,Y}(\{x_i,y_j\}) = P_{X,Y}(X = x_i, Y = y_j) = P_{X,Y}(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\})$ vérifiant

$$\sum_{x_i\in X(\omega)}\ \sum_{y_j\in Y(\omega)} P_{X,Y}(X = x_i, Y = y_j) = 1$$

$\mathcal{C}-3$ • Lois marginales :

Si (X,Y) est un couple aléatoire discret, ses lois marginales P_X et P_Y peuvent se calculer par:

☞ : $\forall x_i \in X(\omega)$, $P_X(X = x_i) = \displaystyle\sum_{y_j\in Y(\omega)} P_{X,Y}(X = x_i, Y = y_j)$

☞ : $\forall y_j \in Y(\omega)$, $P_Y(Y = y_j) = \displaystyle\sum_{x_i\in X(\omega)} P_{X,Y}(X = x_i, Y = y_j)$

☑ **Remarques :** La connaissance de la loi conjointe de (X,Y) permet de calculer les lois marginales. Il importe de bien comprendre que la réciproque est fausse.

Il n'est généralement pas possible de calculer la loi $P_{X,Y}$ du couple aléatoire (X,Y) à partir de la seule connaissance de ses lois marginales P_X et P_Y

$\mathcal{C}-4$ • Indépendance de deux v.a. discrètes :

Deux variables aléatoires discrètes sont dites indépendantes si pour tous sous-ensemble A et B de $\mathbb{R}$, les événements $\{X \in A\}$ et $\{Y \in B\}$ sont indépendantes : $\forall A \subset \mathbb{R}$, $\forall B \subset \mathbb{R}$:

Adresse : 2, Rue Ibn Arafa, av de l'environnement Manouba Centre, Manouba

$P(X \in A , Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$ *ce qui s'écrit aussi* : $P_{X,Y}(A \times B) = P_X(A)P_Y(B)$

$\mathcal{C}-5$ • *Indépendance d'une famille finie de v.a.* :

Les m-v.a. discrètes $X_1, X_2, \dots X_m$ *sont dites indépendantes, si pour toutes parties* $A_1, A_2, \dots A_m$ *de* $\mathbb{R}$, *les événements* $\{X_1 \in A_1\}, \{X_2 \in A_2\}, \dots \{X_m \in A_m\}$ *sont mutuellements indépendants* :

$$P_{X_1,X_2,\dots X_m}(X_1 = x_{1i}, X_2 = x_{2i}, \dots, X_m = x_{mi}) = \prod_{k=1}^{m} P_{X_k}(X_k = x_{ki})$$

$\mathcal{C}-6$ • *Indépendance d'une suite de v.a.* :

Une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de variables aléatoires discrètes est dite indépendante, si toute sous-suite finie est indépendante au sens de* $\mathcal{C}-5$

$\mathcal{C}-7$ • *Indépendance de deux variables aléatoires discrètes* :

Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes si et seulement si :

$\forall x_i \in X(\omega), \forall y_j \in Y(\omega), P_{X,Y}(X = x_i, Y = y_j) = P_X(X = x_i)P_Y(Y = y_j)$

$\mathcal{C}-8$ • *Indépendance de fonctions des variables aléatoires discrètes* :

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, f et g deux fonctions dont les domaines de définitions contiennent respectivement $X(\omega)$ *et* $Y(\omega)$. *Alors les variables aléatoires* $f(X)$ *et* $g(Y)$ *sont indépendantes*

$\mathcal{C}-9$ • *Somme de deux v.a. indépendantes* :

Si X et Y sont deux v.a. indépendantes avec $X(\omega) \subset \mathbb{N}$ *et* $Y(\omega) \subset \mathbb{N}$, *la loi de la variable aléatoire* $X+Y$ *est donnée par* :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(X+Y=n) = \sum_{i+j=n} P_X(X=i)P_Y(Y=j) = \sum_{i=0}^{n} P_X(X=i)P_Y(Y=n-i)$$

$\mathcal{C}-10$ • *Fonction de répartition d'un couple de v.a. discrètes* :

$$P_{X,Y}(x,y) = P(X \le x, Y \le y) = \sum_{u\le x}\sum_{v \le y} P_{X,Y}(X=u, Y=v)$$

- ☞ : $\forall (x,y), 0 \le F_{X,Y}(x,y) \le 1$ ☞ : $F_{X,Y}$ *est une fonction croissante*
- ☞ : $\lim\limits_{x\to-\infty} F_{X,Y}(x,y) = \lim\limits_{y\to-\infty} F_{X,Y}(x,y) = 0$, *ou encore* $F_{X,Y}(-\infty, y) = F_{X,Y}(x,-\infty) = 0$
- ☞ : $\lim\limits_{x\to+\infty} \lim\limits_{y\to+\infty} F_{X,Y}(x,y) = 1$ *ou encore* $F_{X,Y}(+\infty,+\infty) = 1$
- ☞ : $P(a < X \le b, c < Y \le d) = F_{X,Y}(b,d) + F_{X,Y}(a,c) - F_{X,Y}(a,d) - F_{X,Y}(b,c)$
- ☞ : $F_X = F_Y$ *si et seulement si les v.a. X et Y ont même loi*

$\mathcal{C}-11$ • *Fonctions de répartitions marginales* :

☞ $F_X(x) = \lim_{y \to +\infty} F_{X,Y}(x,y) = F_{X,Y}(x,+\infty) = P_X\ (X \le x)$

☞ $F_Y(y) = \lim_{x \to +\infty} F_{X,Y}(x,y) = F_{X,Y}(+\infty,y) = P_X\ (Y \le y)$

☞ *Si X et Y sont deux v.a. indépendantes, alors* $F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$

C– 12 • Conditionnement ou distributions conditionnelles :

☞ $P(Y = l|X = k) = \dfrac{P_{X,Y}(X = k, Y = l)}{P_X(X = k)}$, *avec* $P_X(X = k) \neq 0$

☞ $P(X = k|Y = l) = \dfrac{P_{X,Y}(X = k, Y = l)}{P_Y(Y = l)}$, *avec* $P_Y(Y = l) \neq 0$

☞ $\sum_{x_i \in X(\omega)} P(X = x_i | Y = y_j) = 1$ ☞ $\sum_{y_j \in Y(\omega)} P(Y = y_j | X = x_i) = 1$

☞ *Si la représentation graphique de* $X(\omega) \times Y(\omega)$ *n'est pas un rectangle alors X et Y ne sont pas indépendantes*

C– 13 • Loi du minimum et du maximum :

Soient X et Y deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$.

En posant $Z = \max(X,Y)$ *et* $T = \min(X,Y)$, *on a* $Z(\omega), T(\omega) \subset X(\omega) \cup Y(\omega)$

$\forall x \in Z(\omega)$, $P(\max(X,Y) = x) = P([X = x] \cap [Y < x]) + P([Y = x] \cap [X \le x])$

$\forall x \in T(\omega)$, $P(\min(X,Y) = x) = P([X = x] \cap [Y > x]) + P([Y = x] \cap [X \ge x])$

Il est en fait souvent plus judicieux de passer par la fonction de répartition :

$P(\max(X,Y) \le u) = P([X \le u] \cap [Y \le u])$

C– 14 • L'espérance mathématique d'une fonction φ de (X, Y) :

☞ *L'espérance du couple* (X,Y) *est définie si* $E(X)$ *et* $E(Y)$ *existent. On a alors :*

$E(X,Y) = \big(E(X), E(Y)\big)$

☞ *Si* (X,Y) *est un couple de variable aléatoire discrètes, pour toute fonction* $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, *telle que* $\sum_{x \in X(\omega)} \sum_{y \in Y(\omega)} |\varphi(x,y)| P_{X,Y}(X = x, Y = y) < +\infty$, *alors :*

$$E[\varphi(X,Y)] = \sum_{x \in X(\omega), y \in Y(\omega)} \varphi(x,y) P_{X,Y}(X = x, Y = y) = \sum_{x \in X(\omega)} \sum_{y \in Y(\omega)} \varphi(x,y) P_{X,Y}(X = x, Y = y)$$

Ce qui nous permet d'écrire :

a • $E(X) = \sum_{x \in X(\omega), y \in Y(\omega)} x P_{X,Y}(X = x, Y = y)$ *b* • $E(Y) = \sum_{x \in X(\omega), y \in Y(\omega)} y P_{X,Y}(X = x, Y = y)$

$c \bullet E(XY) = \sum_{x\in X(\omega),y\in Y(\omega)} xyP_{X,Y}(X=x,Y=y)$

$d \bullet$ (*Inégalité de Cauchy Schwarz*) : $|E(XY)| \leq E(|XY|) \leq \sqrt{E(X^2)E(Y^2)}$

$\mathcal{C}$– 15 • *Espérance conditionnelle* :

$a \bullet$ ***L'espérance conditionnelle $E(Y|X)$ de Y sachant X où X et Y sont des variables aléatoires discrète :***

☞ $E\left(Y=y_j \middle| X=x\right) = \sum_{y_j\in Y(\omega)} y_j P\left(Y=y_j \middle| X=x_i\right)$

L'espérance conditionnelle $E(X|Y)$ de X sachant Y où X et Y sont des variablealéatoires discrètes :

☞ $E(X=x_i|Y=y) = \sum_{x_i\in X(\omega)} x_i P\left(X=x_i \middle| Y=y_j\right)$

$b \bullet$ ***Théorème de l'espérance double:***

L'espérance marginale est l'espérance des espérances conditionnelles

☞ $E(X) = E\big(E(X=x_i|Y=y)\big) = \sum_{y_j\in Y(\omega)} E(X=x_i|Y=y)P_Y\left(Y=y_j\right)$

☞ $E(Y) = E\left(E\left(Y=y_j \middle| X=x\right)\right) = \sum_{x_i\in X(\omega)} E\left(Y=y_j \middle| X=x\right)P_X(X=x_i)$

$c \bullet$ ***Pour tout*** $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, E(aY_1+bY_2|X) = aE(Y_1|X)+bE(Y_2|X)$

$d \bullet$ ***Si X et Y sont indépendantes et*** $E(|Y|) < +\infty$, ***alors*** $E(Y|X) = E(Y)$

$e \bullet$ ***Si X et Y sont indépendantes et*** $E(|X|) < +\infty$, ***alors*** $E(X|Y) = E(X)$

$\mathcal{C}$– 16 • *Variance-Covariance* :

Soient X et Y deux variables aléatoires sur $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{P})$. ***On appelle covariance de X et Y, et l'on note $Cov(X,Y)$, le réel :***

$$Cov(X,Y) = E\big[(X-E(X))(Y-E(Y))\big] = \sum_{x\in X(\omega)}\sum_{y\in Y(\omega)} \big(x-E(X)\big)\big(y-E(Y)\big)P_{X,Y}(X=x,Y=y)$$

☑ ***Propriétés*** : ***Soient X, Y et Z des variables aléatoires sur*** $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{P})$ ***et*** $a,b,c,d \in \mathbb{R}$

$a \bullet Cov(X,X) = Var(X) \geq 0$ $\quad b \bullet Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$ $\quad c \bullet Cov(aX,Y) = Cov(X,aY) = aCov(X,Y)$

$d \bullet Cov(aX+bY,Z) = aCov(X,Z)+bCov(X,Z)$ $\quad e \bullet Cov(X,aY+bZ) = aCov(X,Y)+bCov(X,Z)$

$f \bullet Cov(aX+b,cY+d) = acCov(X,Y)$ $\quad g \bullet Cov(X,b) = Cov(a,Y) = 0$

$\mathcal{h} \bullet Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$ $\quad \mathcal{i} \bullet Cov\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{m} Y_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} Cov(X_i, Y_j)$

$$\mathcal{j} \bullet Var\,(X) = E\left[\left(X - E(X)\right)^2\right] = \sum_{x\in X(\omega)} \sum_{y\in Y(\omega)} \left(x - E(X)\right)^2 P_{X,Y}(X = x, Y = y)$$

$$\mathcal{k} \bullet Var\,(Y) = E\left[\left(Y - E(Y)\right)^2\right] = \sum_{y\in Y(\omega)} \sum_{x\in X(\omega)} \left(y - E(Y)\right)^2 P_{X,Y}(X = x, Y = y)$$

$$\ell \bullet V(aX + bY) = a^2V(X) + b^2V(Y) + 2abCov(X,Y)$$

$$\mathcal{m} \bullet Cov(X,Y) = \frac{1}{2}[Var(X+Y) - Var(X) - Var(Y)]$$

$\mathcal{n} \bullet$ (*Inégalité de Cauchy Schwarz*) : $|Cov(X,Y)| \le \sqrt{Var(X)Var(Y)}$

$\mathcal{o} \bullet$ ***Variances Conditionnelles*** :

La variance marginale est l'espérance des variances conditionnelles + la variance des espérances conditionnelles

☞ $V(X) = E\left(V\left(X = x_i \middle| Y = y_j\right)\right) + V\left(E\left(X = x_i \middle| Y = y_j\right)\right)$

☞ $V(Y) = E\left(V\left(Y = y_j \middle| X = x_i\right)\right) + V\left(E\left(Y = y_j \middle| X = x_i\right)\right)$

$\mathcal{p} \bullet$ ***Matrice de Covariance*** : ***Soient X et Y deux variables aléatoires sur*** $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$

Lorsque $Var(X), Var(Y)$ ***et*** $Cov(X,Y)$ ***existent , la matrice de covariance du couple*** (X,Y)

est la matrice : $C = \begin{pmatrix} Var(X) & Cov(X,Y) \\ Cov(X,Y) & Var(Y) \end{pmatrix}$

Une matrice de covariance C est toujours une matrice symétrique et positive

$$\mathcal{q} \bullet Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + 2 \sum_{1\le i<j\le n} Cov(X_i, X_j)$$

☑ ***Cas des variables indépendantes*** :

Soient X et Y deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ ***indépendantes . On a alors*** :

$\xRightarrow[\text{La réciproque de ce résultat est fausse}]{} E(XY) = E(X)E(Y)$

$\xRightarrow[\text{La réciproque de ce résultat est fausse}]{} Cov(X,Y) = 0$

$\xRightarrow[\text{La réciproque de ce résultat est fausse}]{} Var(X \pm Y) = Var(X) + Var(Y)$

$\xRightarrow[\text{La réciproque de ce résultat est fausse}]{} Var(XY) = Var(X)Var(Y) + \left(E(X)\right)^2 Var(Y) + \left(E(Y)\right)^2 Var(X)$

En particulier , si $E(X) = E(Y) = 0$ ***, alors*** $Var(XY) = Var(X)Var(Y)$

☑ ***Remarques*** : ***Attention, il ne s'agit pas d'une équivalence : il existe des couples*** (X,Y) ***de variables aléatoires dont la covariance est nulle mais qui ne sont*** *pas indépendantes.*

☑ **Remarques :** *Soit* $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *suite de v.a indépendantes . On a alors :*

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) \text{ et } E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i)$$

C– 17 • Coefficient de corrélation linéaire :

Soient X et Y deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ *telles que* $\sigma(X) \neq 0$ *et* $\sigma(Y) \neq 0$.

Le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y est le nombre réel $\rho(X,Y)$,

défini par : $\rho(X,Y) = \dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = \dfrac{Cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$

☑ **Propriétés :** *Soient X et Y deux variables aléatoires sur* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ *telles que* $\sigma(X) \neq 0$ *et* $\sigma(Y) \neq 0$.

a • $-1 \leq \rho(X,Y) \leq 1$ **b** • $\rho(X,Y) = 1$ *si et seulement si* $Y = a + bX$, $a \in \mathbb{R}$ *et* $b > 0$

c • $\rho(X,Y) = -1$ *si et seulement si* $Y = a + bX$, $a \in \mathbb{R}$ *et* $b < 0$

d • *Si X et Y sont indépendantes , alors* $\rho(X,Y) = 0$

e • *Si* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+^*$ *, alors* $\rho(\lambda X, \mu Y) = \rho(X,Y)$

☑ **Remarques :**

☞ *Un coefficient de corrélation linéaire est une grandeur sans dimension et sans unité (dite aussi grandeur scalaire). Le dernier point signifie qu'il est indépendant des unités choisies pour X et Y*

☞ *Si* $\rho(X,Y) > 0$ *, on dit que X et Y sont corrélées positivement*

☞ *Si* $\rho(X,Y) < 0$ *, on dit que X et Y sont corrélées négativement*

☞ *Si* $\rho(X,Y) = 0$ *, on dit que X et Y ne sont pas corrélées*

☞ *Une corrélation positive signifie que Y a «tendance à augmenter» quand X augmente (et, ce qui revient au même, que Y a «tendance à augmenter» quand X augmente)*

☞ *Une corrélation négative signifie que Y a tendance à diminuer quand X augmente*

☞ *Une absence de corrélation qu'une augmentation de X n'a pas d'influence sur la «valeur moyenne» de Y.*

☞ *Un coefficient de corrélation linéaire «proche de 1» en valeur absolue signifie que Y peut être «bien approchée» par une fonction affine de X, croissante si le coefficient est positif, décroissante sinon. C'est une question centrale en statistiques (moins en probabilités)*

☞ ***Deux variables sont non corrélées (linéairement) si et seulement si leur covariance est nulle. Cela ne signifie pas nécessairement qu'elles sont indépendantes (sauf dans le cas très particulier de la propriété qui suit) :***

☑ ***Soient X et Y deux variables de Bernoulli sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$. On a :***

$$Cov(X, Y) = 0 \Leftrightarrow \rho(X, Y) = 0 \Leftrightarrow X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes}$$

$\mathcal{C}$– 18 • Fonction génératrice des moments :

On appelle transformée de Laplace (ou fonction génératrice des moments) du vecteur aléatoire (X, Y) (si elle existe), la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie pour (t_1, t_2) par :

$$M_{(X,Y)}(t_1, t_2) = E\left(e^{(t_1X+t_2Y)}\right) = \sum_{x\in X(\omega)} \sum_{y\in Y(\omega)} e^{(t_1x+t_2y)} P_{X,Y}(X = x, Y = y)$$

☑ ***Propriétés :***

a • $M_{(X,Y)}(0,0) = 1$ b • $M_{(X,Y)}(t_1, t_2) \geq 0$ c • $M_{(X,Y)}(t_1, 0) = M_X(t_1)$

d • $M_{(X,Y)}(0, t_2) = M_Y(t_2)$ e • $E(X^r.Y^s) = \left[\dfrac{\partial^{r+s} M_{(X,Y)}(t_1, t_2)}{\partial t_1^r \partial t_2^s}\right] |(0,0)$

f • $E(XY) = \left[\dfrac{\partial^2 M_{(X,Y)}(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}\right] |(0,0)$ g • $E(X) = \left[\dfrac{\partial M_{(X,Y)}(t_1, t_2)}{\partial t_1}\right] |(0,0)$

h • $E(Y) = \left[\dfrac{\partial M_{(X,Y)}(t_1, t_2)}{\partial t_2}\right] |(0,0)$

i • ***X et Y deux v.a. indépendantes, alors :*** $M_{(X,Y)}(t_1, t_2) = M_X(t_1) M_Y(t_2)$

j • ***Si $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ suite de v.a indépendantes, alors :*** $M_{(X_1,X_2,\dots,X_n)}(t_1, t_2, \dots, t_n) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t_i)$

k • ***Si $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ suite de v.a indépendantes et $a_i \in \mathbb{R}$, alors :*** $M_{\sum_{i=1}^{n} a_i X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(a_i t)$

Institut de Financement du Développement du Maghreb Arabe
CONCOURS DE RECRUTEMENT DE LA XXXIIIème PROMOTION
Septembre 2013

Exercice 1 : (8 points : 1+1+1+1+1+1.5+1.5)

ÉNONCÉ

On note X et Y les gains prévus de deux projets différents, où X peut prendre la valeur $X = 0$ ou la valeur $X = 4$ avec la probabilité $1/2$:

$P(X = 0) = P(X = 4) = 1/2$

Alors que Y peut prendre la valeur $Y = 0$ ou la valeu $Y = a$; avec respectivement des probabilités égales à $\frac{3}{4}$ et $\frac{1}{4}$: $P(Y = 0) = \frac{3}{4}$ et $P(Y = a) = \frac{1}{4}$ avec a paramètre inconnu.

1) *Calculer l'espérance mathématique de X ainsi que sa variance*
2) *Déterminer la valeur du paramètre a pour que $E(X) = E(Y)$*
3) *On pose $Z = X + Y$ le gain global des deux projets. En admettant que les projets sont indépendants, déterminer les valeurs possibles de Z ainsi que les probabilités associés à ces valeurs*
4) *En fait, on dispose de la distribution de la probabilité conjointe du couple (X, Y) selon le tableau suivant :*

X \ Y	$Y = 0$	$Y = a$
$X = 0$	$1/2$	0
$X = 4$	$1/4$	$1/4$

Avec a la valeur trouvée dans la question 2)

i. *Prouver que les gains X et Y ne sont pas indépendants*
ii. *Calculer la covariance entre X et Y*
iii. *En déduire la valeur du coefficient de corrélation linéaire entre X et Y*
iv. *Comparer la variance de Z à celle trouvée dans la question 3). Commenter.*

Corrigé

1) $E(X) = \sum_{x\in\{0,4\}} xP(X = x) = \underbrace{0 \times P(X = 0)}_{0} + \underbrace{4 \times P(X = 4)}_{4\times 1/2} \Rightarrow \boxed{E(X) = 2}$

$$E(X^2) = \sum_{x\in\{0,4\}} x^2 P(X = x) = \underbrace{0^2 \times P(X = 0)}_{0} + \underbrace{4^2 \times P(X = 4)}_{16\times\frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{E(X^2) = 8}$$

$$V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 = 8 - 2^2 \Rightarrow \boxed{V(X) = 4}$$

2) *On a* $E(Y) = \sum_{y\in\{0,a\}} yP(Y = y) = \underbrace{0 \times P(Y = 0)}_{0} + \underbrace{a \times P(Y = a)}_{\frac{1}{4}a} \Rightarrow \boxed{E(Y) = a/4}$

$Par\ la\ suite\ \ E(X)=E(Y) \Leftrightarrow \frac{1}{4}a=2 \Leftrightarrow \boxed{a=8}$

3) $Pour\ la\ suite, on\ prendra:\ a=8. Or\ Z=X+Y \Rightarrow \Omega_Z=\{0,4,8,12\}$

• $P(Z=0)=P(X+Y=0)=P(X=0,Y=0)$

$Or\ X\ et\ Y\ sont\ indépendants\ donc\ P(X=0,Y=0)=P(X=0)P(Y=0)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{8}$

$$\boxed{P(Z=0)=3/8}$$

• $P(Z=4)=P(X+Y=4)=P(X=4,Y=0)$

$Or\ X\ et\ Y\ sont\ indépendants\ donc\ P(X=4,Y=0)=P(X=4)P(Y=0)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{8}$

$$\boxed{P(Z=4)=3/8}$$

• $P(Z=8)=P(X+Y=8)=P(X=0,Y=8)$

$Or\ X\ et\ Y\ sont\ indépendants\ donc\ P(X=0,Y=8)=P(X=0)P(Y=8)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$

$$\boxed{P(Z=8)=1/8}$$

• $P(Z=12)=P(X+Y=12)=P(X=4,Y=8)$

$Or\ X\ et\ Y\ sont\ indépendants\ donc\ P(X=4,Y=8)=P(X=4)P(Y=8)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$

$$\boxed{P(Z=12)=1/8}$$

4)

X \ Y	$Y=0$	$Y=8$
$X=0$	$1/2$	0
$X=4$	$1/4$	$1/4$

i. $\begin{cases} P(X=0,Y=0)=\frac{1}{2} \\ P(X=0)P(Y=0)=\frac{3}{8} \end{cases} \Rightarrow P(X=0,Y=0)\neq P(X=0)P(Y=0)$

$Un\ résultat\ suffisant\ pour\ dire\ que\ \boxed{X\ et\ Y\ ne\ sont\ pas\ indépendantes}$

ii. $Cov(X,Y)=E\big[(X-E(X))(Y-E(Y))\big]=E(XY)-E(X)E(Y)$

$$Or\ E(XY)=\sum_{x\in\{0,4\}}\sum_{y\in\{0,8\}} xyP(X=x,Y=y)$$

$$=\underbrace{[0\times 0P(X=0,Y=0)]}_{0}+\underbrace{[0\times 8P(X=0,Y=8)]}_{0}+\underbrace{[4\times 0P(X=4,Y=0)]}_{0}+\underbrace{[4\times 8P(X=4,Y=8)]}_{32\times\frac{1}{4}=8}=8$$

$Et\ comme\ on\ a\ E(X)=E(Y)=2\ pour\ a=8\ , donc\ Cov(X,Y)=\underbrace{E(XY)}_{8}-\underbrace{E(X)E(Y)}_{2\times 2=4}$

$D'où\ \boxed{Cov(X,Y)=4}$

iii. $E(Y^2) = \sum_{y\in\{0,8\}} y^2 P(Y=y) = \underbrace{0^2 \times P(Y=0)}_{0} + \underbrace{8^2 \times P(Y=8)}_{64\times\frac{1}{4}=16} \Rightarrow \boxed{E(Y^2) = 16}$

$V(Y) = E(Y^2) - \left(E(Y)\right)^2 = 16 - 2^2 \Rightarrow \boxed{V(Y) = 12}$

$$\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} = \frac{4}{\sqrt{4\times 12}} \Rightarrow \boxed{\rho_{X,Y} = \sqrt{3}/3}$$

iv.

- *X et Y sont indépendants* $\Rightarrow Cov(X,Y) = 0 \Rightarrow V(Z) = V(X+Y) = V(X) + V(Y) = 4 + 12$

$\boxed{X \text{ et } Y \text{ sont indépendants} \Rightarrow V(Z) = 16}$

Si X et Y ne sont pas indépendants $\Rightarrow V(Z) = V(X+Y) = \underbrace{V(X)}_{4} + \underbrace{V(Y)}_{12} + \underbrace{2Cov(X,Y)}_{2\times 4} = 24$

$\boxed{Si\ X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendants} \Rightarrow V(Z) = 24}$

Sous l'hypothèse de l'indépendance des variables aléatoires X et Y le gain global des deux projets représenté par Z devient moins risqué et caractérisé par une diminution de la variance de Z

Institut de Financement du Développement du Maghreb Arabe
CONCOURS DE RECRUTEMENT D'UNE PROMOTION SPÉCIALE
POUR LE COMPTE DU Ministère des Finances Tunisien
Mai 2015

Exercice 2 : *(8 points : 2 points par question)*

ÉNONCÉ

La distribution de probabilité conjointe de deux variables binaires X et Y est définie par le tableau suivant :

X \ Y	0	1
0	$1/4$	a
1	$1/6$	$1/5$

Avec a paramètre inconnu.

1) ***Calculer la valeur du paramètre a. En déduire les distributions de probabilité de X et de Y***
2) ***Calculer les espérances mathématiques de X et de Y ainsi que leur covariance***
3) ***On note*** $Z = X + Y$. ***Déterminer l'ensemble des valeurs de Z ainsi que les probabilités associées***

4) $\textit{Déterminer la variance de } Z$

Corrigé

1) $\sum_{x\in\{0,1\}}\sum_{y\in\{0,1\}} P(X=x,Y=y)=1 \Leftrightarrow \frac{1}{4}+a+\frac{1}{6}+\frac{1}{5}=1 \Leftrightarrow a=1-\frac{37}{60}$ d'où $\boxed{a=\frac{23}{60}}$

•Distribution marginale de X :

$$P(X=0)=\sum_{y\in\{0,1\}} P(X=0,Y=y)=P(X=0,Y=0)+P(X=0,Y=1)=\frac{1}{4}+\frac{23}{60}=\frac{19}{30}$$

$$P(X=1)=\sum_{y\in\{0,1\}} P(X=1,Y=y)=P(X=1,Y=0)+P(X=1,Y=1)=\frac{1}{6}+\frac{1}{5}=\frac{11}{30}$$

$$\boxed{\begin{cases}P(X=0)=19/30\\P(X=1)=11/30\end{cases}}$$

•Distribution marginale de Y :

$$P(Y=0)=\sum_{x\in\{0,1\}} P(X=x,Y=0)=P(X=0,Y=0)+P(X=1,Y=0)=1/4+1/6=5/12$$

$$P(Y=1)=\sum_{x\in\{0,1\}} P(X=x,Y=1)=P(X=0,Y=1)+P(X=1,Y=1)=23/60+1/5=7/12$$

$$\boxed{\begin{cases}P(Y=0)=5/12\\P(Y=1)=7/12\end{cases}}$$

2) $E(X)=\sum_{x\in\{0,1\}} xP(X=x)=[0\times P(X=0)]+[1\times P(X=1)]=11/30$

$$E(Y)=\sum_{y\in\{0,1\}} yP(Y=y)=[0\times P(Y=0)]+[1\times P(Y=1)]=7/12$$

On pourra retrouver $E(X)$ et $E(Y)$ autrement :

$X \backsim \mathcal{B}(1,p_X) \Rightarrow E(X)=p_X$ où $p_X=P(X=1)=11/30$ ainsi on retrouve $\boxed{E(X)=11/30}$

$Y \backsim \mathcal{B}(1,p_Y) \Rightarrow E(Y)=p_Y$ où $p_Y=P(Y=1)=7/12$ ainsi on retrouve $\boxed{E(Y)=7/12}$

$$Cov(X,Y)=E\big[\big(X-E(X)\big)\big(Y-E(Y)\big)\big]=E(XY)-E(X)E(Y)$$

$$\text{Or } E(XY)=\sum_{x\in\{0,1\}}\sum_{y\in\{0,1\}} xyP(X=x,Y=y)=0+\underbrace{[1\times 1P(X=1,Y=1)]}_{1/5}=1/5$$

$$\boxed{E(XY)=1/5} \Rightarrow Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{1}{5}-\left(\frac{11}{30}\times\frac{7}{12}\right).\ D'\text{où } \boxed{Cov(X,Y)=-\frac{1}{72}}$$

3) $Z=X+Y \Rightarrow \Omega_Z=\{0,1,2\}$

•$P(Z=0)=P(X=0,Y=0)=1/4$

•$P(Z=1)=P(X=1,Y=0)+P(X=0,Y=1)=1/6+23/60=11/20$

•$P(Z=2)=P(X=1,Y=1)=1/5$

4)

☑ $1^{ère}$ *Méthode*

$Z = z_i$	$P(Z = z_i)$	$z_i P(Z = z_i)$	$z_i^2 P(Z = z_i)$
$Z = 0$	$5/20$	0	0
$Z = 1$	$11/20$	$11/20$	$11/20$
$Z = 2$	$4/20$	$8/20$	$16/20$
$\sum$	1	$E(Z) = 19/20$	$E(Z^2) = 27/20$

$$E(Z) = \sum_{z \in \{0,1,2\}} z_i P(Z = z_i) = 19/20 \quad et \quad E(Z^2) = \sum_{z \in \{0,1,2\}} z_i^2 P(Z = z_i) = 27/20$$

$$Or\ V(Z) = E\left[\left(Z - E(Z)\right)^2\right] = E(Z^2) - \left(E(Z)\right)^2 = 27/20 - (19/20)^2 \Rightarrow \boxed{V(Z) = 179/400}$$

☑ $2^{ème}$ *Méthode*

$$V(Z) = V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X, Y)$$

$$X \rightsquigarrow \mathcal{B}\,(1, p_X) \Rightarrow V(X) = p_X(1 - p_X) = 11/30 \times 19/30 = 209/900$$

$$Y \rightsquigarrow \mathcal{B}\,(1, p_Y) \Rightarrow V(Y) = p_Y(1 - p_Y) = 7/12 \times 5/12 = 35/144$$

$$Ainsi\ V(Z) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X, Y) = 209/900 + 35/144 + \left(2 \times (-1/72)\right) = 179/400$$

Institut de Financement du Développement du Maghreb Arabe
CONCOURS DE RECRUTEMENT DE LA XL^{ème} PROMOTION (BANQUE)
Octobre 2020

Exercice 3 : *(5 points : 1 point par question)*

Énoncé

Deux projets d'investissement indépendants, notés A et B, peuvent générer des gains aléatoires notés respectivement X et Z. La variable X peut prendre deux valeurs $X = 0$ *et* $X = 1$ *avec la même probabilité* $\frac{1}{2}$ *alors que la distribution de la variable Z est définie par :* $P(Z = 0) = P\left(Z = \frac{1}{2}\right) = P(Z = 1) = \frac{1}{3}$

1. *Calculer la probabilité de l'événement* $(X \geq Z)$
2.
   i. *Comparer les espérances mathématiques de X et de Z*
   ii. *Calculer les variances des deux variables X et Z. En déduire le projet le moins risqué entre A et B*
3. *On veut constituer un projet composé C d'une part* α *(avec* $0 \leq \alpha \leq 1$*) du projet A et une part* $(1 - \alpha)$ *du projet B*

i. $\textit{Déterminer l'espérance mathématique et la variance du gain } Y \textit{ du projet } C$

ii. $\textit{Déterminer la valeur de } \alpha \textit{ pour que le projet } C \textit{ soit le moins risqué possible.}$

Corrigé

1.

$\cdot\ X(\Omega) = \{0,1\}\ et\ \ P(X=x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\ , si\ x \in \{0,1\} \\ 0\ , si\ non \end{cases}$

$\cdot\ Z(\Omega) = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}\ et\ \ P(Z=z) = \begin{cases} \frac{1}{3}\ , si\ z \in \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\} \\ 0\ , si\ non \end{cases}$

On se propose de calculer la probabilité de l'événement $(X \geq Z)$ *Pour se faire posons la variable aléatoire* T *définie par :* $T = X - Z$

☑ *Valeurs prises par la variable aléatoire* $T = X - Z$:

$X \backslash Z$	$Z=0$	$Z=1/2$	$Z=1$
$X=0$	$T=X-Z=0$	$T=X-Z=-1/2$	$T=X-Z=-1$
$X=1$	$T=X-Z=1$	$T=X-Z=1/2$	$T=X-Z=0$

$\Rightarrow T(\Omega) = \left\{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\right\}$

☑ *Loi du couple* (X,Z) :

X *et* Z *sont deux v.a indépendantes donc :*

$$\forall (x,z) \in \{0,1\} \times \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}\ ;\ P[X=x, Z=z] = P(X=x)P\,(Z=z) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

☑ *Loi de la variable aléatoire* $T = X - Z$:

$\cdot\ T(\Omega) = \left\{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\right\}$

$\cdot\ P(T=-1) = P[X=0, Z=1] = \frac{1}{6}$

$\cdot\ P\left(T=-\frac{1}{2}\right) = P\left[X=0, Z=\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{6}$

$\cdot\ P(T=0) = P[X=0, Z=0] + P[X=1, Z=1] = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

$\cdot\ P\left(T=\frac{1}{2}\right) = P\left[X=1, Z=\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{6}$

$\cdot\ P(T=1) = P[X=1, Z=0] = \frac{1}{6}$

On pourra maintenant calculer facilement la probabilité de l'événement $(X \geq Z)$:

$\cdot\ P(X \geq Z) = P(X - Z \geq 0) = P(T \geq 0) = P(T=0) + P\left(T=\frac{1}{2}\right) + P(T=1)$

$$D'où\ \boxed{P(X \geq Z) = 2/3}$$

2.

i.

· $X(\Omega) = \{0,1\}$ *et* $P(X=x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, si\ x \in \{0,1\} \\ 0, si\ non \end{cases} \Rightarrow X \rightsquigarrow \mathcal{B}\left(1,\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \boxed{E(X) = \frac{1}{2}}$

· $E(Z) = \sum_{z\in\{0,\frac{1}{2},1\}} zP(Z=z) = [0 \times P(Z=0)] + \underbrace{\left[\frac{1}{2} \times P\left(Z=\frac{1}{2}\right)\right]}_{1/6} + \underbrace{[1 \times P(Z=1)]}_{1/3} \Rightarrow \boxed{E(Z) = \frac{1}{2}}$

$E(X) = E(Z)$: *En termes de gain moyen, les deux projets A et B seront identiques*

ii.

· $X \rightsquigarrow \mathcal{B}\left(1,\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \boxed{V(X) = \frac{1}{4}}$

· $E(Z^2) = \sum_{z\in\{0,\frac{1}{2},1\}} z^2P(Z=z) = [0^2 \times P(Z=0)] + \underbrace{\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 \times P\left(Z=\frac{1}{2}\right)\right]}_{1/6} + \underbrace{[1^2 \times P(Z=1)]}_{1/3}$

$\Rightarrow E(Z^2) = \frac{5}{12}$

· $V(Z) = E\left[\left(Z - E(Z)\right)^2\right] = E(Z^2) - \left(E(Z)\right)^2 = \frac{5}{12} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow \boxed{V(Z) = \frac{1}{6}}$

· $V(Z) < V(X)$. $\boxed{\textit{Le projet B sera donc le moins risqué}}$

3.

i.

· $Y = \alpha X + (1-\alpha)Z, \alpha \in [0,1]$

· $E(Y) = E[\alpha X + (1-\alpha)Z] = \alpha E(X) + (1-\alpha)E(Z) = \frac{\alpha}{2} + \frac{1-\alpha}{2} \Rightarrow \boxed{E(Y) = \frac{1}{2}}$

· $V(Y) = V[\alpha X + (1-\alpha)Z] = \alpha^2 V(X) + (1-\alpha)^2 V(Z) + 2\alpha(1-\alpha)\underbrace{Cov(X,Z)}_{0}$

$V(Y) = \frac{\alpha^2}{4} + \frac{(1-\alpha)^2}{6} = \frac{3\alpha^2}{12} + \frac{2(1-\alpha)^2}{12} \Rightarrow \boxed{V(Y) = \frac{5\alpha^2 - 4\alpha + 2}{12}}$

ii. *On se propose de minimiser le risque du projet C, en fonction de* α :

Pour se faire on doit minimiser $f(\alpha) = 5\alpha^2 - 4\alpha + 2$ *sur* $[0,1]$

· $f'(\alpha) = 10\alpha - 4$, $\quad f''(\alpha) = 10 > 0$

· α_0 *minimise* $f(\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} f'(\alpha_0) = 0 \\ f''(\alpha_0) > 0, (\text{évidente}) \end{cases}$

$$f'(\alpha_0) = 0 \Leftrightarrow \alpha_0 = \frac{2}{5} \Rightarrow V_{min}(Y) = \frac{5 \times \left(\frac{2}{5}\right)^2 - 4 \times \left(\frac{2}{5}\right) + 2}{12} = \frac{1}{10}$$

$$\boxed{Pour\ \alpha_0 = \frac{2}{5}, le\ risque\ du\ projet\ composé\ C\ est\ minimal\ et\ il\ est\ égal :\ V_{min}(Y) = \frac{1}{10}}$$

Institut de Financement du Développement du Maghreb Arabe
CONCOURS DE RECRUTEMENT DE LA XXXIème PROMOTION
Juillet 2011

Exercice 4 : *(8 points : 1 point par question)*

Énoncé

On considère deux variables discrètes X et Y dont la distribution de probabilité jointe est définie par :

$X \backslash Y$	$Y = -1$	$Y = 0$	$Y = 1$
$X = -1$	0	$1/4$	0
$X = 0$	$1/4$	0	b
$X = 1$	0	a	0

Où a et b sont deux paramètres inconnus

1) *Déterminer les contraintes sur les paramètres a et b*
2) *Déterminer les valeurs de ces deux paramètres sachant que l'espérance mathématique, $E(X) = 0$*
3) *En déduire la loi marginale de Y*
4) *Calculer les variances $V(X)$ et $V(Y)$*
5) *Calculer la covariance entre X et Y*
6) *Etudier l'indépendance de ces deux variables*
7) *On pose $U = X^2$ et $V = Y^2$. Déterminer la loi du couple (U, V)*
8) *Prouver que $U + V = 1$. Commenter*

Corrigé

1) $P(X = x_i, Y = y_j)$ *est une loi de probabilité jointe*

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{x_i \in \{-1,0,1\}} \sum_{y_j \in \{-1,0,1\}} P(X = x_i, Y = y_j) = 1 \quad (1) \\ \forall (x_i, y_j) \in \{-1, 0, 1\}^2, 0 \leq P(X = x_i, Y = y_j) \leq 1 \quad (2) \end{cases}$$

$$(1) : P(X = -1, Y = -1) + P(X = -1, Y = 0) + P(X = -1, Y = 1) + P(X = 0, Y = -1) + P(X = 0, Y = 0) + P(X = 0, Y = 1) + P(X = 1, Y = -1) + P(X = 1, Y = 0) + P(X = 1, Y = 1) = 1$$

$$\Leftrightarrow\ 0+\frac{1}{4}+0+\frac{1}{4}+0+b+0+a+0=1 \Leftrightarrow b+a=\frac{1}{2} \Leftrightarrow b=\frac{1}{2}-a \text{ et } a=\frac{1}{2}-b$$

$$(2) : \begin{cases} 0 \le a \le 1 \\ 0 \le b \le 1 \end{cases}$$

$P\left(X=x_i, Y=y_j\right)$ *est une loi de probabilité jointe*

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=\frac{1}{2}-a \text{ et } a=\frac{1}{2}-b \\ 0 \le a \le 1 \text{ et } 0 \le b \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\frac{1}{2}-a \text{ et } a=\frac{1}{2}-b \\ 0 \le \frac{1}{2}-b \le 1 \\ 0 \le \frac{1}{2}-a \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\frac{1}{2}-a \text{ et } a=\frac{1}{2}-b \\ -\frac{1}{2} \le -b \le \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \le -a \le \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\frac{1}{2}-a \\ 0 \le b \le \frac{1}{2} \\ 0 \le a \le \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\boxed{P\left(X=x_i, Y=y_j\right) \text{ est une loi de probabilité jointe} \Leftrightarrow b=\frac{1}{2}-a \text{ et } (a,b) \in \left[0,\frac{1}{2}\right]^2}$$

Dans la suite on va prendre : $b=\frac{1}{2}-a$ et $(a,b) \in \left[0,\frac{1}{2}\right]^2$

2)

Déterminons d'abord la loi marginale de la v.a. X :

$$\forall x_i \in \{-1,0,1\},\ P(X=x_i)=\sum_{y_j \in \{-1,0,1\}} P\left(X=x_i, Y=y_j\right)$$

ainsi :

- $P(X=-1)=\sum_{y_j \in \{-1,0,1\}} P\left(X=-1, Y=y_j\right)$

$$=\underbrace{P(X=-1,Y=-1)}_{0}+P(X=-1,Y=0)+\underbrace{P(X=-1,Y=1)}_{0}=\frac{1}{4}$$

$$\boxed{P(X=-1)=\frac{1}{4}}$$

- $P(X=0)=\sum_{y_j \in \{-1,0,1\}} P\left(X=0, Y=y_j\right)$

$$=P(X=0,Y=-1)+\underbrace{P(X=0,Y=0)}_{0}+P(X=0,Y=1)=\frac{1}{4}+b=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-a$$

$$\boxed{P(X=0)=\frac{3}{4}-a \text{ et } (a,b) \in \left[0,\frac{1}{2}\right]^2}$$

- $P(X=1)=\sum_{y_j \in \{-1,0,1\}} P\left(X=1, Y=y_j\right)=\underbrace{P(X=1,Y=-1)}_{0}+P(X=1,Y=0)+\underbrace{P(X=1,Y=1)}_{0}=a$

$$\boxed{P(X=1)=a \text{ et } (a,b) \in \left[0,\frac{1}{2}\right]^2}$$

$$On\ a\ E(X)=\sum_{x_i\in\{-1,0,1\}} x_iP(X=x_i)=[-1\times P(X=-1)]+[0\times P(X=0)]+[1\times P(X=1)]$$

$$E(X)=a-\frac{1}{4}\ .\ Ainsi, E(X)=0\Leftrightarrow\begin{cases}a-\frac{1}{4}=0\\ b=\frac{1}{2}-a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{4}\\ b=\frac{1}{4}\end{cases}.\ D'où\ \boxed{E(X)=0\Leftrightarrow a=b=\frac{1}{4}}$$

3) $Dans\ la\ suite\ on\ prendera:\ a=b=1/4$

$Déterminons\ la\ loi\ marginale\ de\ la\ v.a.\ Y:$

$$\forall y_j\in\{-1,0,1\}, P(Y=y_j)=\sum_{x_i\in\{-1,0,1\}} P(X=x_i,Y=y_j)\ ,ainsi:$$

- $$P(Y=-1)=\sum_{x_i\in\{-1,0,1\}} P(X=x_i,Y=-1)$$

$$=\underbrace{P(X=-1,Y=-1)}_{0}+\underbrace{P(X=0,Y=-1)}_{1/4}+\underbrace{P(X=1,Y=-1)}_{0}=1/4$$

$$\boxed{P(Y=-1)=1/4}$$

- $$P(Y=0)=\sum_{x_i\in\{-1,0,1\}} P(X=x_i,Y=0)=\underbrace{P(X=-1,Y=0)}_{1/4}+\underbrace{P(X=0,Y=0)}_{0}+\underbrace{P(X=1,Y=0)}_{1/4}=\frac{1}{4}$$

$$\boxed{P(Y=0)=1/2}$$

- $$P(Y=1)=\sum_{x_i\in\{-1,0,1\}} P(X=x_i,Y=1)=\underbrace{P(X=-1,Y=1)}_{0}+\underbrace{P(X=0,Y=1)}_{1/4}+\underbrace{P(X=1,Y=1)}_{0}=1/4$$

$$\boxed{P(Y=1)=1/4}$$

4)

☑ $V(X):$

$$On\ a:\ E(X^2)=\sum_{x_i\in\{-1,0,1\}} x_i^2P(X=x_i)=\underbrace{[(-1)^2\times P(X=-1)]}_{1/4}+\underbrace{[0^2\times P(X=0)]}_{0}+\underbrace{[1^2\times P(X=1)]}_{1/4}=\frac{1}{2}$$

$$V(X)=E\left[\left(X-\underbrace{E(X)}_{0}\right)^2\right]=E(X^2)\ .\ D'où\ \boxed{V(X)=1/2}$$

☑ $V(Y):$

$$On\ a:\ E(Y^2)=\sum_{y_j\in\{-1,0,1\}} y_j^2P(Y=y_j)=[(-1)^2\times P(Y=-1)]+[0^2\times P(Y=0)]+[1^2\times P(Y=1)]$$

$$E(Y^2)=1/4+1/4=1/2$$

$$V(Y)=E\left[\left(Y-\underbrace{E(Y)}_{0}\right)^2\right]=E(Y^2)\ .\ D'où\ \boxed{V(Y)=1/2}$$

BEN AHMED MOHSEN Téléphone: (+216) 97 619191 / 54 619191
omega.center.cp@gmail.com https://web.facebook.com/OMEGACENTER2014

5) $Cov(X,Y) = E(XY) - \underbrace{E(X)E(Y)}_{0} = E(XY)$

$$Or\ E(XY) = \sum_{x_i \in \{-1,0,1\}} \sum_{y_j \in \{-1,0,1\}} x_i y_j P(X = x_i, Y = y_j)$$

$$= \left[(-1)\times(-1)\times \underbrace{P(X=-1,Y=-1)}_{0}\right] + \left[(-1)\times 0 \times \underbrace{P(X=-1,Y=0)}_{0}\right] + \left[(-1)\times 1 \times \underbrace{P(X=-1,Y=1)}_{0}\right]$$
$$+ \underbrace{[0\times(-1)\times P(X=0,Y=-1)]}_{0} + \underbrace{[0\times 0\times P(X=0,Y=0)]}_{0} + \underbrace{[0\times 1\times P(X=0,Y=1)]}_{0}$$
$$+ \left[1\times(-1)\times \underbrace{P(X=1,Y=-1)}_{0}\right] + \underbrace{[1\times 0\times P(X=1,Y=0)]}_{0} + \left[1\times 1\times \underbrace{P(X=1,Y=1)}_{0}\right]$$

$E(XY) = 0$

$$d'où\ \boxed{Cov(X,Y) = 0\ ;\ X\ et\ Y\ ne\ sont\ pas\ corrélées}$$

6) $\begin{cases} P(X=-1,Y=-1) = 0 \\ P(X=-1)P(Y=-1) = \frac{1}{4}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{16} \end{cases} \Rightarrow P(X=-1,Y=-1) \neq P(X=-1)P(Y=-1)$

$$D'où\ \boxed{X\ et\ Y\ sont\ deux\ v.a.\ dépendantes}$$

7) $\begin{cases} U = X^2 \\ X(\Omega) = \{-1,0,1\} \end{cases} \Rightarrow U(\Omega) = \{0,1\}\ ;\ de\ même\ \begin{cases} V = Y^2 \\ Y(\Omega) = \{-1,0,1\} \end{cases} \Rightarrow V(\Omega) = \{0,1\}$

$\forall u_i \in U(\Omega) = \{0,1\}, \forall v_j \in V(\Omega) = \{0,1\}, on\ a:\ \big(U(\Omega),V(\Omega)\big) = \{0,1\}^2$

On obtient ainsi l'ensemble des valeurs prises par le couple (U,V):

$$\boxed{\big(U(\Omega),V(\Omega)\big) = \{(0,0);\ (0,1);\ (1,0);\ (1,1)\}}$$

☑ *Loi du couple* (U,V) :

- $P(U=0,V=0) = P(\{X^2=0\}\cap\{Y^2=0\}) = P(X=0,Y=0) = 0$

$$\boxed{P(U=0,V=0) = 0}$$

- $P(U=0,V=1) = P(\{X^2=0\}\cap\{Y^2=1\}) = P(\{X=0\}\cap[\{Y=-1\}\cup\{Y=1\}])$

$$= P(X=0,Y=-1) + P(X=0,Y=1) = 1/4 + 1/4$$

$$\boxed{P(U=0,V=1) = 1/2}$$

- $P(U=1,V=0) = P(\{X^2=1\}\cap\{Y^2=0\}) = P([\{X=-1\}\cup\{X=1\}]\cap\{Y=0\})$

$$= P(X=-1,Y=0) + P(X=1,Y=0) = 1/4 + 1/4$$

$$\boxed{P(U=1,V=0) = 1/2}$$

- $P(U=1,V=1) = P(\{X^2=1\}\cap\{Y^2=1\}) = P([\{X=-1\}\cup\{X=1\}]\cap[\{Y=-1\}\cup\{Y=1\}])$

$$= P(X=-1,Y=-1) + P(X=-1,Y=1) + P(X=1,Y=-1) + P(X=1,Y=1) = 0$$

$$\boxed{P(U=1,V=1) = 0}$$

8)

☑ *Valeurs prises par la variable aléatoire* $S = U + V$:

Adresse : 2, Rue Ibn Arafa, av de l'environnement Manouba Centre, Manouba

U \ V	$V=0$	$V=1$
$U=0$	$S=U+V=0$	$S=U+V=1$
$U=1$	$S=U+V=1$	$S=U+V=2$

$\Rightarrow S(\Omega)=\{0,1,2\}$

- $P(S=1)=P(U+V=1)=P(U=1,V=0)+P(U=0,V=1)=1/2+1/2=1$

$$\boxed{P(U+V=1)=1}$$

On vérifie facilement que :

- $P(S=0)=P(U+V=0)=P(U=0,V=0)=0$; *et*
- $P(S=2)=P(U+V=2)=P(U=1,V=1)=0$

Ainsi, on a : $\begin{cases} P(S=1)=1 \\ P(S=s_k)=0\text{ , pour tout } s\neq 1 \end{cases}$; où $S=U+V$. *On dit, alors que la variable somme* $S=U+V$ *est presque sûrement* $(p.s.)$ *égale à* 1 *ou* $S\rightsquigarrow\delta_1$, *la loi de Dirac en* 1

Institut de Financement du Développement du Maghreb Arabe
CONCOURS DE RECRUTEMENT DE LA XLII^ème PROMOTION (BANQUE)
Septembre 2022

Exercice 5 : (6 points : 1+1+1+1+2)

Énoncé

On considère deux variables aléatoires X et Y, suivant chacune le loi binaire de Bernoulli De paramètre $\theta=\dfrac{1}{3}$ *avec l'hypothèse que l'espérance mathématique du produit XY est nulle :* $E(XY)=0$

1) *Prouver que la probabilité* $P(X=1,Y=1)$ *est nulle*
2) *En déduire que ces deux variables sont non indépendantes*
3) *Déterminer les espérances mathématiques et les variances des deux lois marginales X et Y*
4) *Déterminer la distribution conjointe du couple* (X,Y)
5) *Identifier la loi de probabilité de* $Z=X+Y$. *Commenter*

Corrigé

1)

$$E(XY)=\sum_{x\in\{0,1\}}\sum_{y\in\{0,1\}}xyP(X=x,Y=y)$$

$$\Leftrightarrow \overbrace{[0\times 0\times P(X=0,Y=0)]}^{0}+\overbrace{[0\times 1\times P(X=0,Y=1)]}^{0}+\overbrace{[1\times 0\times P(X=1,Y=0)]}^{0} + [1\times 1\times P(X=1,Y=1)]=0$$

D'où: $\boxed{P(X=1,Y=1)=0}$

2)

$$X \text{ et } Y \text{ deux v.a.d. de } \mathcal{B}\left(1,\frac{1}{3}\right) \Rightarrow P(X=1)=P(Y=1)=\frac{1}{3}$$

$$On\ a: \begin{cases} P(X=1,Y=1)=0 \\ P(X=1)P(Y=1)=\frac{1}{9} \end{cases} \Rightarrow P(X=1,Y=1)\neq P(X=1)P(Y=1)$$

D'où : $\boxed{X \text{ et } Y \text{ deux v.a.d. non indépendantes}}$

3)

$$X \text{ et } Y \text{ deux v.a.d. de } \mathcal{B}\left(1,\frac{1}{3}\right) \Rightarrow \begin{cases} \boxed{E(X)=E(Y)=\frac{1}{3}} \\ \boxed{V(X)=V(Y)=\frac{2}{9}} \end{cases}$$

4)

$$\cdot\ X \text{ et } Y \text{ deux v.a.d. de } \mathcal{B}\left(1,\frac{1}{3}\right) \Rightarrow \begin{cases} P(X=0)=P(Y=0)=\frac{2}{3} \\ P(X=1)=P(Y=1)=\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\cdot\ P(Y=1)=\sum_{x\in\{0,1\}} P(X=x,Y=1)=P(X=0,Y=1)+\underbrace{P(X=1,Y=1)}_{0}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow \boxed{P(X=0,Y=1)=\frac{1}{3}}$$

$$\cdot\ P(X=1)=\sum_{y\in\{0,1\}} P(X=1,Y=y)=P(X=1,Y=0)+\underbrace{P(X=1,Y=1)}_{0}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow \boxed{P(X=1,Y=0)=\frac{1}{3}}$$

$$\cdot\ P(X=0)=\sum_{y\in\{0,1\}} P(X=0,Y=y)=P(X=0,Y=0)+\underbrace{P(X=0,Y=1)}_{\frac{1}{3}}=\frac{2}{3} \Leftrightarrow \boxed{P(X=0,Y=0)=\frac{1}{3}}$$

X \ Y	$Y=0$	$Y=1$	Loi marginale de X
$X=0$	$P(X=0,Y=0)=\frac{1}{3}$	$P(X=0,Y=1)=\frac{1}{3}$	$P(X=0)=\frac{2}{3}$
$X=1$	$P(X=1,Y=0)=\frac{1}{3}$	$P(X=1,Y=1)=0$	$P(X=1)=\frac{1}{3}$
Loi marginale de Y	$P(Y=0)=\frac{2}{3}$	$P(Y=1)=\frac{1}{3}$	$\sum_{x\in\{0,1\}}\sum_{y\in\{0,1\}} P(X=x,Y=y)=1$

5)

$X \backslash Y$	$Y=0$	$Y=1$
$X=0$	$Z=X+Y=0$	$Z=X+Y=1$
$X=1$	$Z=X+Y=1$	$Z=X+Y=2$

$\Rightarrow Z(\Omega)=\{0,1,2\}$

· $P(Z=0)=P(X+Y=0)=P(X=0,Y=0)=\frac{1}{3}$

· $P(Z=1)=P(X+Y=1)=P(X=0,Y=1)+P(X=1,Y=0)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

· $P(Z=2)=P(X+Y=2)=P(X=1,Y=1)=0$

La somme des variables aléatoires i.i.d. de Bernoulli est une variable binomiale.

En effet sous l'hypothèse de l'indépendance de X et Y, la v.a.d. Z = X + Y aurait

été une variable bionomiale, $\mathcal{B}\left(2,\frac{1}{3}\right)$: $P(Z=z)=\begin{cases} C_2^z\left(\frac{1}{3}\right)^z\left(\frac{2}{3}\right)^{2-z}, si\ z\in\{0,1,2\} \\ 0\ , si\ non \end{cases}$

· $P(Z=0)=C_2^0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^{2-0}=\frac{4}{9}$

· $P(Z=1)=C_2^1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^{2-1}=2\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$

· $P(Z=2)=C_2^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^{2-2}=\frac{1}{9}$

La notion d'indépendance est fondamentale dans le calcul des probabilités. Il serait plus simple de calculer les probabilités conjointes, puisqu'on général on ne peut pas connaître la loi conjointe à partir des lois marginales, de même pour les fonctions de répartitions et les fonctions génératrices des moments. On pourra aussi identifier facilement la loi de la somme.

Institut de Financement du Développement du Maghreb Arabe
CONCOURS DE RECRUTEMENT DE LA XXXIIème PROMOTION
Juillet 2012

Exercice 6 : *(5 points : 1 point par question)*

ÉNONCÉ

On considère deux variables X et Y indépendantes pouvant prendre chacune les valeurs $1, 2$ *et* 3 *avec la même probabilité* $P[X = x] = P[Y = y] = 1/3$ *pour tout* $x = 1, 2$ *et* 3 *et* $y = 1, 2$ *et* 3

1) *Calculer les trois probabilités* $P[X > Y]$; $P[X < Y]$; $P[X = Y]$.
2) *On pose* $U = Max(X, Y)$ *qui désigne la valeur maximale de X et de Y*
   i. *Déterminer les valeurs de la variable U*
   ii. *Déterminer la loi de probabilité de U*
   iii. *Calculer* $E(U)$ *l'espérance mathématique de U*
   iv. *Déterminer la loi conditionnelle de U sachant* $X = x$

Corrigé

1) *On a :* $\Omega_X = \Omega_Y = \{1, 2, 3\}$.

X et Y sont deux v.a indépendantes donc :

$$\forall (x, y) \in \{1, 2, 3\}^2 \; ; \; P[X = x, Y = y] = \underbrace{P(X = x)}_{1/3} \underbrace{P(Y = y)}_{1/3} = 1/9$$

Soit la variable : $Z = X - Y$ *, les valeurs prises par la variable aléatoire Z :*

X \ Y	$Y = 1$	$Y = 2$	$Y = 3$
$X = 1$	$Z = X - Y = 0$	$Z = X - Y = -1$	$Z = X - Y = -2$
$X = 2$	$Z = X - Y = 1$	$Z = X - Y = 0$	$Z = X - Y = -1$
$X = 3$	$Z = X - Y = 2$	$Z = X - Y = 1$	$Z = X - Y = 0$

$\Rightarrow Z(\Omega) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

Déterminons la loi de probabilité de la variable Z :

· $P[Z = -2] = P[X = 1, Y = 3] = 1/9$

· $P[Z = -1] = \underbrace{P[X = 1, Y = 2]}_{1/9} + \underbrace{P[X = 2, Y = 3]}_{1/9} = 2/9$

· $P[Z = 0] = \underbrace{P[X = 1, Y = 1]}_{1/9} + \underbrace{P[X = 2, Y = 2]}_{1/9} + \underbrace{P[X = 3, Y = 3]}_{1/9} = 1/3$

· $P[Z = 1] = \underbrace{P[X = 2, Y = 1]}_{1/9} + \underbrace{P[X = 3, Y = 2]}_{1/9} = 2/9$

· $P[Z = 2] = P[X = 3, Y = 1] = 1/9$

On obtient par la suite :

· $P[X>Y]=P[X-Y>0]=P[Z>0]=\underbrace{P[Z=1]}_{2/9}+\underbrace{P[Z=2]}_{1/9}=1/3$

$$\boxed{P[X>Y]=1/3}$$

· $P[X<Y]=P[X-Y<0]=P[Z<0]=\underbrace{P[Z=-2]}_{1/9}+\underbrace{P[Z=-1]}_{2/9}=1/3$

$$\boxed{P[X<Y]=1/3}$$

· $P[X=Y]=P[X-Y=0]=P[Z=0]=1/3$

$$\boxed{P[X=Y]=1/3}$$

2)

i.

☑ ***Valeurs prises par la variable aléatoire U :***

Y \ X	$Y=1$	$Y=2$	$Y=3$
$X=1$	$U=Max(X,Y)=1$	$U=Max(X,Y)=2$	$U=Max(X,Y)=3$
$X=2$	$U=Max(X,Y)=2$	$U=Max(X,Y)=2$	$U=Max(X,Y)=3$
$X=3$	$U=Max(X,Y)=3$	$U=Max(X,Y)=3$	$U=Max(X,Y)=3$

$\Rightarrow \boxed{U(\Omega)=\{1,2,3\}}$

ii.

· $P[U=1]=P[X=1,Y=1]=1/9$

$$\boxed{P[U=1]=1/9}$$

· $P[U=2]=\underbrace{P[X=2,Y=1]}_{1/9}+\underbrace{P[X=2,Y=2]}_{1/9}+\underbrace{P[X=1,Y=2]}_{1/9}=1/3$

$$\boxed{P[U=2]=1/3}$$

· $P[U=3]=\underbrace{P[X=3,Y=1]}_{1/9}+\underbrace{P[X=3,Y=2]}_{1/9}+\underbrace{P[X=3,Y=3]}_{1/9}+\underbrace{P[X=1,Y=3]}_{1/9}+\underbrace{P[X=2,Y=3]}_{1/9}=\frac{5}{9}$

$$\boxed{P[U=3]=5/9}$$

iii. $E(U)=\sum_{u\in\{1,2,3\}}uP(U=u)=\underbrace{1P(U=1)}_{1\times\frac{1}{9}}+\underbrace{2P(U=2)}_{2\times\frac{1}{3}}+\underbrace{3P(U=3)}_{3\times\frac{5}{9}}$

$$\boxed{E(U)=22/9}$$

iv. ***On définit la loi conditionnelle de U sachant $X=x$ par :***

$$P\big[((U=u)|(X=x))\big]=\frac{P[(U=u),(X=x)]}{P(X=x)}=\frac{P[(Max(X,Y)=u),(X=x)]}{P(X=x)}$$

☑ ***Distribution de probabilité conjointe de deux variables aléatoires X et U :***

· $P[(X=1),(U=1)]=P[(X=1)\cap(U=1)]=P[(X=1)\cap[(X=1)\cap(Y=1)]]$

$=P[(X=1)\cap(Y=1)]=P(U=1)=1/9$

· $P[(X=1),(U=2)]=P[(X=1)\cap(U=2)]$

$=P\big[(X=1)\cap[[(X=2)\cap(Y=1)]\cup[(X=2)\cap(Y=2)]\cup[(X=1)\cap(Y=2)]]\big]$

$P[(X=1),(U=2)] = P[(X=1)\cap(Y=2)] = 1/9$

· $P[(X=1),(U=3)] = P[(X=1)\cap(U=3)]$

$$= P\big[(X=1) \cap [[(X=3)\cap(Y=1)]\cup[(X=3)\cap(Y=2)]\cup[(X=3)\cap(Y=3)] \cup [(X=1)\cap(Y=3)]\cup[(X=2)\cap(Y=3)]]\big]$$

$P[(X=1),(U=3)] = P[(X=1)\cap(Y=3)] = 1/9$

· $P[(X=2),(U=1)] = P[(X=2)\cap(U=1)] = P\left[\underbrace{(X=2)\cap[(X=1)\cap(Y=1)]}_{\emptyset}\right] = 0$

· $P[(X=2),(U=2)] = P[(X=2)\cap(U=2)]$

$$= P\big[(X=2)\cap[[(X=2)\cap(Y=1)]\cup[(X=2)\cap(Y=2)]\cup[(X=1)\cap(Y=2)]]\big]$$

$P[(X=2),(U=2)] = P[(X=2),(Y=1)] + P[(X=2),(Y=2)] = 2/9$

· $P[(X=2),(U=3)] = P[(X=2)\cap(U=3)]$

$$= P\big[(X=2) \cap [[(X=3)\cap(Y=1)]\cup[(X=3)\cap(Y=2)]\cup[(X=3)\cap(Y=3)] \cup [(X=1)\cap(Y=3)]\cup[(X=2)\cap(Y=3)]]\big]$$

$P[(X=2),(U=3)] = P[(X=2),(Y=3)] = 1/9$

· $P[(X=3),(U=1)] = P\left[\underbrace{(X=3)\cap(U=1)}_{\emptyset}\right] = 0$

· $P[(X=3),(U=2)] = P\left[\underbrace{(X=3)\cap(U=2)}_{\emptyset}\right] = 0$

· $P[(X=3),(U=3)] = P[(X=3)\cap(U=3)]$

$$= P\big[(X=3) \cap [[(X=3)\cap(Y=1)]\cup[(X=3)\cap(Y=2)]\cup[(X=3)\cap(Y=3)] \cup [(X=1)\cap(Y=3)]\cup[(X=2)\cap(Y=3)]]\big]$$

$P[(X=3),(U=3)] = P[(X=3),(Y=1)] + P[(X=3),(Y=2)] + P[(X=3),(Y=3)] = 1/3$

$X \backslash U$	$U=1$	$U=2$	$U=3$
$X=1$	$P[(X=1),(U=1)]=1/9$	$P[(X=1),(U=2)]=1/9$	$P[(X=1),(U=3)]=1/9$
$X=2$	$P[(X=2),(U=1)]=0$	$P[(X=2),(U=2)]=2/9$	$P[(X=2),(U=3)]=1/9$
$X=3$	$P[(X=3),(U=1)]=0$	$P[(X=3),(U=2)]=0$	$P[(X=3),(U=3)]=1/3$

☑ ***Distribution conditionnelle de U sachant $X=1$:***

$$P[((U=u)|(X=1))] = \frac{P[(U=u),(X=1)]}{P(X=1)} = \frac{1/9}{1/3} = 1/3\ ;\ \text{pour } u = 1,2 \text{ et } 3$$

$((U=u)\|(X=1))$	$P[((U=u)\|(X=1))]$
$(U=1)/(X=1)$	$1/3$
$(U=2)/(X=1)$	$1/3$
$(U=3)/(X=1)$	$1/3$

☑ ***Distribution conditionnelle de U sachant $X = 2$:***

$$\bullet P[((U=1)|(X=2))] = \frac{P[(U=1),(X=2)]}{P(X=2)} = \frac{0}{1/3} = 0$$

$$\bullet P[((U=2)|(X=2))] = \frac{P[(U=2),(X=2)]}{P(X=2)} = \frac{2/9}{1/3} = 2/3$$

$$\bullet P[((U=3)|(X=2))] = \frac{P[(U=3),(X=2)]}{P(X=2)} = \frac{1/9}{1/3} = 1/3$$

$((U=u)\|(X=2))$	$P[((U=u)\|(X=2))]$
$((U=1)\|(X=2))$	0
$((U=2)\|(X=2))$	$2/3$
$((U=3)\|(X=2))$	$1/3$

☑ ***Distribution conditionnelle de U sachant $X = 3$:***

$P[(U=u)/(X=3)] = P[(U=u),(X=3)]/P(X=3) = 0$; *pour* $u = 1, 2$

$P[(U=3)/(X=3)] = P[(U=3),(X=3)]/P(X=3) = 1$

$((U=u)\|(X=3))$	$P[((U=u)\|(X=3))]$
$((U=1)\|(X=3))$	0
$((U=2)\|(X=3))$	0
$((U=3)\|(X=3))$	1

Institut de Financement du Développement du Maghreb Arabe
CONCOURS DE RECRUTEMENT DE LA XXXIXème PROMOTION(BANQUE)
JUILLET 2019

Exercice 7 *(5 points :1+1+1+2) :*

ÉNONCÉ

On considère deux variables aléatoires X_1 et X_2 centrées $(E(X_1) = E(X_2) = 0)$, ayant des écart-types σ_1 et σ_2 . On suppose que ces deux variables sont indépendantes entre elles tout en ayant chacune un coefficient de corrélation linéaire notées respectivement ρ_1 et ρ_2 avec une troisième variable Y.

1) ***Exprimer la variance de la somme $(X_1 + X_2)$ en fonction de σ_1 et de σ_2***
2) ***Comparer l'écart-type de la somme $(X_1 + X_2)$ à la somme de σ_1 et de σ_2***
3) ***Exprimer la covariance entre $(X_1 + X_2)$ et Y en fonction des covariances de chacune des X_i avec Y, pour $i = 1$ et 2***
4) ***En déduire l'expression de ρ , le coefficient de corrélation linéaire de la somme $(X_1 + X_2)$ avec la variable Y en fonction de σ_1 , de σ_2, de ρ_1 et de ρ_2***

Corrigé

1) $On\ a\ X_1\ et\ X_2\ eux\ variables\ sont\ indépendantes\ entre\ elles, par\ conséquent :$
$Cov(X_1, X_2) = 0$

$$V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2) + 2\underbrace{Cov(X_1, X_2)}_{0} = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 : \boxed{V(X_1 + X_2) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

2) $\sigma_{(X_1+X_2)} = \sqrt{V(X_1 + X_2)} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \sqrt{(\sigma_1 + \sigma_2)^2 - 2\sigma_1\sigma_2}$

$Il\ est\ évident\ que : (\sigma_1 + \sigma_2)^2 > \underbrace{(\sigma_1 + \sigma_2)^2 - 2\sigma_1\sigma_2}_{\sigma_1^2+\sigma_2^2} > 0, puisque\ \sigma_1 > 0\ et\ \sigma_1 > 0$

$ainsi, \sqrt{(\sigma_1 + \sigma_2)^2} > \sqrt{(\sigma_1 + \sigma_2)^2 - 2\sigma_1\sigma_2}\ , ou\ encore\ \sigma_1 + \sigma_2 > \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$

$D'où, \boxed{\sigma_1 + \sigma_2 > \sigma_{(X_1+X_2)}}$

3)
$$\begin{aligned} Cov[(X_1 + X_2), Y] &= E[Y(X_1 + X_2)] - E(Y)E(X_1 + X_2) \\ &= E(YX_1 + YX_2) - E(Y)[E(X_1) + E(X_2)] \\ &= E(YX_1) + E(YX_2) - E(Y)E(X_1) - E(Y)E(X_2) \\ &= \underbrace{[E(YX_1) - E(Y)E(X_1)]}_{Cov(X_1,Y)} + \underbrace{[E(YX_2) - E(Y)E(X_2)]}_{Cov(X_2,Y)} \end{aligned}$$

$D'où, \boxed{Cov[(X_1 + X_2), Y] = Cov(X_1, Y) + Cov(X_2, Y)}$

4)

$$\rho = \rho_{(X_1+X_2),Y} = \frac{Cov[(X_1 + X_2), Y]}{\sqrt{Var(X_1 + X_2)Var(Y)}} = \frac{Cov(X_1, Y) + Cov(X_2, Y)}{\sqrt{Var(X_1 + X_2)Var(Y)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{Var(X_1 + X_2)}}\left[\frac{Cov(X_1, Y) + Cov(X_2, Y)}{\sqrt{Var(Y)}}\right] = \frac{1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}\left[\frac{Cov(X_1, Y)}{\sqrt{Var(Y)}} + \frac{Cov(X_2, Y)}{\sqrt{Var(Y)}}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}\left[\frac{\overbrace{\sqrt{Var(X_1)}}^{\sigma_1}Cov(X_1, Y)}{\sqrt{Var(X_1)}\sqrt{Var(Y)}} + \frac{\overbrace{\sqrt{Var(X_2)}}^{\sigma_2}Cov(X_2, Y)}{\sqrt{Var(X_2)}\sqrt{Var(Y)}}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}\left[\sigma_1\underbrace{\left[\frac{Cov(X_1, Y)}{\sqrt{Var(X_1)Var(Y)}}\right]}_{\rho_1=\rho_{X_1,Y}} + \sigma_2\underbrace{\left[\frac{Cov(X_2, Y)}{\sqrt{Var(X_2)Var(Y)}}\right]}_{\rho_2=\rho_{X_2,Y}}\right]$$

$$D'où, \boxed{\rho = \left(\frac{\sigma_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}\right)\rho_1 + \left(\frac{\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}\right)\rho_2}$$

Institut de Financement du Développement du Maghreb Arabe
CONCOURS DE RECRUTEMENT DE LA XXXème PROMOTION
JUILLET 2010

Exercice 8 : (8 points : 1+1+2+2+2)

ÉNONCÉ

On note $X_1, X_2, \dots, X_n$ les gains d'une entreprise sur n périodes successives. On admet que ces variables sont indépendantes, ayant la même espérance mathématique m et la même variance σ^2.

On pose :

$$Y_1 = X_1\,,$$

$$Y_2 = \frac{X_1 + X_2}{2},$$

$$Y_3 = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}$$

$$\text{et } \; Y_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \; \text{ pour } n \text{ entier positif}$$

1) *Que représentent les variables $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ pour l'entreprise* ?
2) *Déterminer les espérances mathématiques des variables $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$*
3) *Calculer les variances et les écarts types des variables $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$*
4) *Calculer $E(Y_i^2)$ pour $i = 1, 2, \dots, n$*
5)
   i. *Calculer pour les trois premiers variables Y_1, Y_2, Y_3 les covariances entre Y_i et Y_j pour $i = 1, 2$ et 3 et pour $j = 1, 2$ et 3*
   ii. *En déduire tout les coefficients de corrélation linéaire ρ_{ij} entre Y_i et Y_j pour $i = 1, 2$ et 3 et pour $j = 1, 2$ et 3*
   iii. *Exprimer Y_n en fonction de Y_{n-1} et de X_n pour $i = 1, 2$ et 3 et pour $j = 1, 2$ et 3*

Corrigé

1)

$$\forall\, k = 1, 2, \dots, n\,; \quad Y_k = \frac{1}{k}\sum_{l=1}^{n} X_l = \overline{X} \text{ étant la moyenne de l'}n\text{-échantillon i.i.d } (X_1, X_2, \dots, X_n)\,,$$

Elle représente la moyenne des gains de l'entreprise sur les k périodes.

2) · $\boxed{E(Y_1) = E(X_1) = m}$

· $E(Y_2) = E\left(\frac{X_1 + X_2}{2}\right) = \frac{1}{2}[E(X_1) + E(X_2)] = \frac{1}{2}(m + m) = m$

$$\boxed{E(Y_2) = m}$$

$$\cdot\ E(Y_n) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m = \frac{1}{n}(nm) = m$$

puisque les v.a $(X_i)_{i=1,2,\dots,n}$ *sont identiques donc* $\forall\ i = 1, 2, \dots, n\ ;\ E(X_i) = m$

$$\boxed{E(Y_n) = m}$$

3)

$$\cdot\ \boxed{V(Y_1) = V(X_1) = \sigma^2 \Rightarrow \sigma_{Y_1} = \sigma}$$

$$\cdot\ V(Y_2) = V\left(\frac{X_1 + X_2}{2}\right) = V\left(\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2\right) = \frac{1}{4}V(X_1) + \frac{1}{4}V(X_2) + 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\underbrace{Cov(X_1, X_2)}_{0}$$

$$\Rightarrow V(Y_2) = \frac{1}{4}\big(V(X_1) + V(X_2)\big) = \frac{2\,\sigma^2}{4}$$

$$\boxed{V(Y_2) = \frac{\sigma^2}{2} \Rightarrow \sigma_{Y_2} = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}}$$

$$\cdot\ V(Y_n) = V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

Or les v.a $(X_i)_{i=1,2,\dots,n}$ *sont indépendantes donc* $\forall\ i \neq j\ Cov(X_i, X_j) = 0,$

par la suite $V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \sigma^2 = n\,\sigma^2$, *ainsi* $V(Y_n) = \frac{1}{n^2}(n\,\sigma^2)$

$$\boxed{V(Y_n) = \frac{\sigma^2}{n} \Rightarrow \sigma_{Y_n} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

4)

$$\cdot\ E(Y_1^2) = E(X_1^2)\ \ or\ V(X_1) = E(X_1^2) - \big(E(X_1)\big)^2 \Rightarrow E(X_1^2) = V(X_1) + \big(E(X_1)\big)^2 = \sigma^2 + m^2$$

$$D'où\ \boxed{E(Y_1^2) = \sigma^2 + m^2}$$

$$\cdot\ E(Y_2^2) = V(Y_2) + \big(E(Y_2)\big)^2,\ or\ V(Y_2) = \frac{\sigma^2}{2}\ \ et\ E(Y_2) = m$$

$$Donc\ \boxed{E(Y_2^2) = \frac{\sigma^2}{2} + m^2}$$

$$\cdot\ E(Y_n^2) = V(Y_n) + \big(E(Y_n)\big)^2,\ or\ V(Y_n) = \frac{\sigma^2}{n}\ \ et\ E(Y_n) = m$$

$$Donc\ \boxed{E(Y_n^2) = \frac{\sigma^2}{n} + m^2}$$

BEN AHMED MOHSEN Téléphone: (+216) 97 619191 / 54 619191
omega.center.cp@gmail.com https://web.facebook.com/OMEGACENTER2014

5)

i.

- $$\boxed{Cov(Y_1,Y_1) = V(Y_1) = \sigma^2}$$
- $$\boxed{Cov(Y_2,Y_2) = V(Y_2) = \frac{\sigma^2}{2}}$$
- $$\boxed{Cov(Y_3,Y_3) = V(Y_3) = \frac{\sigma^2}{3}}$$

- $$Cov(Y_1,Y_2) = Cov(Y_2,Y_1) = Cov\left(\frac{X_1+X_2}{2}, X_1\right) = Cov\left(\frac{1}{2}(X_1+X_2), X_1\right) = \frac{1}{2}Cov\big((X_1+X_2), X_1\big)$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\underbrace{Cov(X_1,X_1)}_{\sigma^2} + \underbrace{Cov(X_2,X_1)}_{0}\Big] = \frac{\sigma^2}{2} \quad ; \quad car\ Cov(X_i,X_j) = \begin{cases} 0\ , si\ i \neq j \\ V(X_i) = \sigma^2\ , si\ i = j \end{cases}$$

$$\boxed{Cov(Y_1,Y_2) = Cov(Y_2,Y_1) = \frac{\sigma^2}{2}}$$

- $$Cov(Y_1,Y_3) = Cov(Y_3,Y_1) = Cov\left(\frac{X_1+X_2+X_3}{3}, X_1\right) = Cov\left(\frac{1}{3}(X_1+X_2+X_3), X_1\right)$$

$$= \frac{1}{3}\Big[\underbrace{Cov(X_1,X_1)}_{\sigma^2} + \underbrace{Cov(X_2,X_1)}_{0} + \underbrace{Cov(X_3,X_1)}_{0}\Big]$$

$$\boxed{Cov(Y_1,Y_3) = Cov(Y_3,Y_1) = \frac{\sigma^2}{3}}$$

- $$Cov(Y_2,Y_3) = Cov(Y_3,Y_2) = Cov\left(\frac{X_1+X_2+X_3}{3}, \frac{X_1+X_2}{2}\right) = Cov\left(\frac{1}{3}(X_1+X_2+X_3), \frac{1}{2}(X_1+X_2)\right)$$

$$= \frac{1}{6}Cov\big((X_1+X_2+X_3),(X_1+X_2)\big)$$

$$= \frac{1}{6}\Big[\underbrace{Cov(X_1,X_1)}_{\sigma^2} + \underbrace{Cov(X_1,X_2)}_{0} + \underbrace{Cov(X_2,X_1)}_{0} + \underbrace{Cov(X_2,X_2)}_{\sigma^2} + \underbrace{Cov(X_3,X_1)}_{0} + \underbrace{Cov(X_3,X_2)}_{0}\Big]$$

$$\boxed{Cov(Y_2,Y_3) = Cov(Y_3,Y_2) = \frac{\sigma^2}{3}}$$

ii.

- $$\rho_{ii} = \frac{Cov(Y_i,Y_i)}{\sqrt{V(Y_i)V(Y_i)}} = \frac{V(Y_i)}{\sqrt{V(Y_i)V(Y_i)}} \Longrightarrow \boxed{\rho_{ii} = 1\ \ \forall\, i = 1,2,3}$$

- $$\rho_{12} = \frac{Cov(Y_1,Y_2)}{\sqrt{V(Y_1)V(Y_2)}} = \frac{\sigma^2/2}{\sqrt{\sigma^2(\sigma^2/2)}} \Longrightarrow \boxed{\rho_{12} = \sqrt{2}/2}$$

- $$\rho_{13} = \frac{Cov(Y_1,Y_3)}{\sqrt{V(Y_1)V(Y_3)}} = \frac{\sigma^2/3}{\sqrt{\sigma^2(\sigma^2/3)}} \Longrightarrow \boxed{\rho_{13} = \sqrt{3}/3}$$

Adresse : 2, Rue Ibn Arafa, av de l'environnement Manouba Centre, Manouba

$$\rho_{23} = \frac{Cov(Y_2, Y_3)}{\sqrt{V(Y_2)V(Y_3)}} = \frac{\sigma^2/3}{\sqrt{(\sigma^2/2)(\sigma^2/3)}} \Rightarrow \boxed{\rho_{23} = \sqrt{6}/3}$$

iii.

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{n}\left[\left(\sum_{i=1}^{n-1} X_i\right) + X_n\right]$$

$$\boxed{Y_n = \frac{1}{n}[(n-1)Y_{n-1} + X_n]}$$

Institut de Financement du Développement du Maghreb Arabe
CONCOURS DE RECRUTEMENT DE LA XXXIIème PROMOTION
Juillet 2012

Exercice 9 : (5 points : 1 point par question)

ÉNONCÉ

On considère $X_1, X_2, \dots, X_n$ *les prix de n biens ayant la même espérance mathématique :*

$E(X_1) = E(X_2) = \cdots = E(X_n) = m \text{ avec } m > 0$

Et la même variance : $V(X_1) = V(X_2) = \cdots = V(X_n) = 1$

Et ayant une covariance constante : $Cov(X_i, X_j) = c$ *pour tout i et j tels que* $i \neq j$

On pose $\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$

1) *Calculer l'espérance mathématique de* $\overline{X}$
2)
   i. *Pour* $n = 3$, *déterminer la variance de* $\overline{X}$ *en fonction de c*
   ii. *Pour n quelconque, déterminer la variance de* $\overline{X}$ *en fonction de n et de c*
3) *Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre* X_i *et* X_j *pour* $i \neq j$
4) *En déduire l'ensemble des valeurs possibles de la variance de* $\overline{X}$

Corrigé

1)

$$E(\overline{X}) = E\left(\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)\right) = \frac{1}{n}E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \frac{1}{n}[E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)]$$

$$= \frac{1}{n}(m + m + \cdots + m) = \frac{1}{n}(nm)$$

$$\boxed{E(\overline{X}) = m}$$

2)

i. $Pour\ n = 3 :\ V(\overline{X}) = V\left(\frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3)\right) = \frac{1}{3^2}V(X_1 + X_2 + X_3)$

$$V(\overline{X}) = \frac{1}{9}[V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) + 2Cov(X_1, X_2) + 2Cov(X_1, X_3) + 2Cov(X_2, X_3)]$$

$$= \frac{1}{9}[1 + 1 + 1 + 2c + 2c + 2c]$$

$$\boxed{V(\overline{X}) = \frac{1}{3}(1 + 2c)}$$

ii.

$$V(\overline{X}) = V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\left[\sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2\sum_{1\le i<j\le n} Cov(X_i, X_j)\right] = \frac{1}{n^2}\left[\sum_{i=1}^{n} 1 + 2c(C_n^2)\right]$$

$$= \frac{1}{n^2}\left[n + 2c\frac{n!}{2!\,(n-2)!}\right] = \frac{1}{n^2}[n + cn(n-1)]$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* ;\ \boxed{V(\overline{X}) = \frac{1}{n}[1 + c(n-1)]}$$

3) $pour\ tout\ i \neq j\ \rho_{ij} = \frac{Cov(X_i, X_j)}{\sqrt{V(X_i)V(X_j)}} = \frac{c}{\sqrt{1\times 1}}$

$$\boxed{pour\ tout\ i \neq j\ \rho_{ij} = Cov(X_i, X_j) = c}$$

4) $Comme\ on\ a$:

$$\begin{cases} |\rho_{ij}| \le 1 \\ \rho_{ij} = c \end{cases} \Rightarrow |c| \le 1 \Rightarrow |c(n-1)| \le n-1 \Rightarrow -(n-1) \le c(n-1) \le (n-1)$$

$$\Rightarrow -(n-1) + 1 \le c(n-1) + 1 \le (n-1) + 1$$

$$\Rightarrow 2 - n \le c(n-1) + 1 \le n\ ;\ pour\ n \ge 2 \Rightarrow \frac{2-n}{n} \le \underbrace{\frac{1}{n}[1 + c(n-1)]}_{V(\overline{X})} \le 1$$

$Or, V(\overline{X}) \ge 0$

$D'où\ l'ensemble\ des\ valeurs\ possibles\ de\ la\ variance\ de\ \overline{X}$: $\boxed{0 \le V(\overline{X}) \le 1}$

Institut de Financement du Développement du Maghreb Arabe
CONCOURS DE RECRUTEMENT DE LA XXXIVème PROMOTION
Août 2014

Exercice 10 : *(8 points :1+1+1+1+1+1+1+1)*

ÉNONCÉ

Le nombre d'accidents de route commis par un individu durant une année est une variable aléatoire notée X. Celle-ci peut prendre des valeurs entières positives ou nulles $X = 0$, $X = 1$, $X = 2$, … *etc. avec des probabilités définies par :*

$P(X = x) = k\dfrac{1}{2^x}$ où k *est une constante à déterminer.*

1) *Calculer la valeur de la constante* k
2) *Déterminer en fonction de* x *la probabilité que* X *soit supérieure strictement à* x, *pour* x *entier positif.*
3) *En déduire l'expression de la fonction de répartition de* X, *noté* $F(x)$ *et définie par :* $F(x) = P(X \leq x)$, *ainsi que la médiane de* X
4) *Sachant que l'individu a eu au moins* x *accidents, quelle est la probabilité pour que le nombre d'accidents dépasse le nombre* $x + \theta$ *pour* θ *entier.*
   Envisager les deux cas θ *positif et* θ *négatif*
5) *On pose* $\begin{cases} Y = 1 \ \ si \ \ X \leq 1 \\ Y = 0 \ \ si \ \ X \geq 2 \end{cases}$
   Déterminer l'espérance mathématique de Y
6) *Déterminer la covariance entre* X *et* Y

Corrigé

1) $P(X = x)$ *est une loi de probabilité* $\Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{x=0}^{+\infty} P(X = x) = 1 & (1) \\ 0 \leq P(X = x) \leq 1 \quad \forall\, x \in \mathbb{N} & (2) \end{cases}$

$$(1) \Leftrightarrow \sum_{x=0}^{+\infty} k\frac{1}{2^x} = 1 \Leftrightarrow k\underbrace{\sum_{x=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x}_{2} = 1 \Leftrightarrow 2k = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$$

$$(2): \forall\, x \in \mathbb{N}, P(X = x) = \frac{1}{2^{x+1}} \in [0, 1]$$

D'où $P(X = x)$ *est une loi de probabilité si et seulement si* $k = \dfrac{1}{2}$

et la loi de probabilité de X *sera :* $\boxed{P(X = x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{x+1}} & , \forall\, x \in \mathbb{N} \\ 0 \, , si\ non \end{cases}}$

2) $P(X > x) = \sum_{t=x+1}^{+\infty} P(X = t) = \frac{1}{2}\sum_{t=x+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^t = \frac{1}{2}\left[\frac{(1/2)^{x+1}}{1-\frac{1}{2}}\right] = \frac{1}{2^{x+1}}$

D'où: $\boxed{P(X > x) = \dfrac{1}{2^{x+1}} \, , \forall\, x \in \mathbb{N}}$

3)

· *La fonction de répartition de X :*

$$F(x) = P(X \leq x) = 1 - P(X > x). D'où \quad \boxed{F(x) = \begin{cases} 0\,, si\ x < 0 \\ 1 - \dfrac{1}{2^{x+1}}\,, si\ x \geq 0 \end{cases}}$$

· *Calcul de la médiane de X :*

$$M_e \text{ étant la valeur médiane de } X \Leftrightarrow F(M_e) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2^{M_e+1}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2^{M_e+1}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2^{M_e+1} = 2$$

D'où $\boxed{M_e = 0}$

4)

· *Pour* $\theta \in \mathbb{Z}_-^*$, (*on a :* $x + \theta < x$)

$$P[((X > x+\theta)|(X \geq x))] = \frac{P[(X > x+\theta) \cap (X \geq x)]}{P(X \geq x)} = \frac{P\big(X \in (]\,(x+\theta), +\infty[\, \cap [x, +\infty[)\big)}{P(X \geq x)}$$

$$= \frac{P(X \in [x, +\infty[)}{P(X \geq x)} = \frac{P(X \geq x)}{P(X \geq x)}$$

D'où $\boxed{\forall \theta \in \mathbb{Z}_-^* \ P[((X > x+\theta)|(X \geq x))] = 1}$

· *Pour* $\theta \in \mathbb{N}$, (*on a :* $x + \theta \geq x$)

$$P[((X > x+\theta)|(X \geq x))] = \frac{P[(X > x+\theta) \cap (X \geq x)]}{P(X \geq x)} = \frac{P\big(X \in (]\,(x+\theta), +\infty[\, \cap [x, +\infty[)\big)}{P(X \geq x)}$$

$$= \frac{P(X \in\,](x+\theta), +\infty[)}{P(X \geq x)} = \frac{P(X > x+\theta)}{P(X \geq x)} = \frac{P(X > x+\theta)}{P(X > x) + P(X = x)}$$

$$P[((X > x+\theta)|(X \geq x))] = \frac{1/2^{(x+\theta)+1}}{1/2^{x+1} + 1/2^{x+1}} = \frac{1/2^{(x+\theta)+1}}{1/2^x} = \frac{2^x}{2^{(x+\theta)+1}} = \frac{1}{2^{\theta+1}}$$

$$D'où \quad \boxed{\forall \theta \in \mathbb{N}, P[((X > x+\theta)|(X \geq x))] = \frac{1}{2^{\theta+1}} = P(X > \theta)}$$

☑ ***Propriété d'absence de mémoire*** : *Si* $Y \rightsquigarrow \mathcal{G}(p)$, *alors pour tout* $t, s > 0$:

$$P(Y > s+t | Y > t) = P(Y > s) = \frac{G_Y(s+t)}{G_Y(t)} = G_Y(s)\,.$$

On dit que la loi géométrique est une loi sans mémoire

La probabilité de commettre davantage d'accidents sachant que cet individu a eu au moins x accidents dans son actif, reste indépendante de x. De ce fait, cet individu n'a cultivé aucune manière de prévention pour éviter ou réduire les chances de commettre de nouveaux accidents.

$l'absence\ de\ mémoire: \forall \theta \in \mathbb{N}, P[((X > x+\theta)|(X \geq x))] = \frac{1}{2^{\theta+1}} = P(X > \theta)$:

$Une\ propriété\ qui\ caractérise\ en\ particulier\ toute\ loi\ géométrique$

5) $\begin{cases} Y = 1 \ si \ X \leq 1 \\ Y = 0 \ si \ X \geq 2 \end{cases}$

$$P(Y = 1) = P(X \leq 1) = F(1) = 1 - \frac{1}{2^{1+1}} = \frac{3}{4}$$

$$P(Y = 0) = P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$Donc\ Y \rightsquigarrow \mathcal{B}(1, 3/4)$, $la\ loi\ de\ Bernoulli\ de\ paramètres\ 1\ et\ p = 3/4 \Rightarrow \boxed{E(Y) = p = 3/4}$

6) $La\ distribution\ de\ probabilité\ conjointe\ de\ deux\ variables\ binaires\ X\ et\ Y\ est\ définie\ par\ le\ tableau\ suivant$:

X \ Y	$Y = 0$	$Y = 1$
$X = 0$	0	$1/2$
$X = 1$	0	$1/4$
$X \geq 2$	$1/4$	0

- $P(X = 0, Y = 0) = 0 \ car \ (X = 0) \cap (Y = 0) = (X = 0) \cap (X \geq 2) = \emptyset$
- $P(X = 0, Y = 1) = P(X = 0, X \leq 1) = P(X = 0) = \frac{1}{2^{0+1}} = \frac{1}{2}$

$car\ \{(X = 0)\} \cap \{(X \leq 1)\} = \{(X = 0)\}$

- $P(X = 1, Y = 0) = 0 \ car \ (X = 1) \cap (Y = 0) = (X = 1) \cap (X \geq 2) = \emptyset$
- $P(X = 1, Y = 1) = P(X = 1, X \leq 1) = P(X = 1) = \frac{1}{2^{1+1}} = \frac{1}{4}$

$car\ (X = 1) \subset (X \leq 1) \Rightarrow (X = 1) \cap (X \leq 1) = (X = 1)$

- $P(X \geq 2, Y = 0) = P(X \geq 2, X \geq 2) = P(X \geq 2) = \frac{1}{4}$
- $P(X \geq 2, Y = 1) = 0 \ car \ (X \geq 2) \cap (Y = 1) = (X \geq 2) \cap (X \leq 1) = \emptyset$

$Or\ Cov(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y)$

$$E(XY) = \sum_{x=0}^{+\infty} \sum_{y \in \{0,1\}} xyP(X = x, Y = y)$$

$$= \underbrace{[0 \times 0 \times P(X = 0, Y = 0)]}_{0} + \underbrace{[0 \times 1 \times P(X = 0, Y = 1)]}_{0} + \underbrace{[1 \times 0 \times P(X = 1, Y = 0)]}_{0}$$
$$+ \underbrace{[1 \times 1 \times P(X = 1, Y = 1)]}_{1/4} + \underbrace{[x \times 0 \times P(X \geq 2, Y = 0)]}_{0} + \underbrace{[x \times 1 \times P(X \geq 2, Y = 1)]}_{0}$$

$\boxed{E(XY) = 1/4}$

$On\ se\ prose\ de\ calculer\ E(X)$:

☞ $1^{ère}$ $Méthode$

$$E(X)=\sum_{x=0}^{+\infty}xP(X=x)=\sum_{x=0}^{+\infty}x\frac{1}{2^{x+1}}=\frac{1}{2}\sum_{x=0}^{+\infty}x\frac{1}{2^{x}}$$

$$Par\ la\ suite,E(X)=\frac{1}{2}\sum_{x=0}^{+\infty}x\left(\frac{1}{2}\right)^{x}=\frac{1}{2}\times\frac{\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^{2}}=1\ .\ D'où\ \boxed{E(X)=1}$$

☞ $2^{ème}$ *Méthode*

• $P_X(X=t)=F_X(t)-F_X(t-1)=P_X(X\le t)-P_X(X\le t-1)$

On peut retrouver $E(X)$, *en utilisant la relation liant fonction de répartition et loi de probabilité d'une v.a. discrète :*

la loi de probabilité de X étant : $P(X=x)=\begin{cases}\frac{1}{2^{x+1}}\ ,\forall\,x\in\mathbb{N}\\ 0\ ,si\ non\end{cases}$ *, soit la v.a. discrète* $Z=X-1$

On se propose de determiner la loi de probabilité de la v.a. Z :

D'abord, on a : $Z(\Omega)=\mathbb{N}^*$ *, l'ensemble des valeurs prises par la v.a. Z. Puisque :* $\begin{cases}X(\Omega)=\mathbb{N}\\ \quad et\\ Z=X+1\end{cases}$

Ainsi, $\forall z\in\mathbb{N}^*:\ P(Z=z)=F_Z(z)-F_Z(z-1)$

Exprimons maintenant la fonction de répartition de la v.a. Z en fonction de celle de X :

$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+1\le z)=P(X\le z-1)=F_X(z-1)$

or $\forall x\in\mathbb{N},F(x)=1-\frac{1}{2^{x+1}}$, *ce qui donne* $\forall z\in\mathbb{N}^*,F_X(z-1)=1-\frac{1}{2^{(z-1)+1}}=1-\frac{1}{2^z}$

On obtient par la suite : $F_Z(z)=1-\frac{1}{2^z}\ \Rightarrow\ F_Z(z-1)=1-\frac{1}{2^{z-1}}$

en effet $P(Z=z)=F_Z(z)-F_Z(z-1)=\left[1-\frac{1}{2^z}\right]-\left[1-\frac{1}{2^{z-1}}\right]=\frac{1}{2^{z-1}}-\frac{1}{2^z}=\frac{1}{2^{z-1}}\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2^z}$

D'où la loi de probabilité de Z : $P(Z=z)=\begin{cases}\frac{1}{2^z}=\left(1-\frac{1}{2}\right)^{z-1}\times\frac{1}{2}\ ,\forall z\in\mathbb{N}^*\\ 0\ ,si\ non\end{cases}$

D'où $Z\leadsto\mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$ *et* $E(Z)=\frac{1}{1/2}=2$, *or* $Z=X+1,E(X+1)=2\ \Leftrightarrow\ E(X)+1=2$

On retrouve $\boxed{E(X)=1}$

☞ $3^{ème}$ *Méthode*

· *Fonction génératrice des moments (ou transformée de Laplace) :*

$$M_X(t)=\sum_{x\in X(\Omega)}e^{tx}P(X=x)=\sum_{x=0}^{+\infty}\left(e^{tx}\frac{1}{2^{x+1}}\right)=\frac{1}{2}\sum_{x=0}^{+\infty}\left((e^t)^x\left(\frac{1}{2}\right)^x\right)=\frac{1}{2}\sum_{x=0}^{+\infty}\left(\left(\frac{e^t}{2}\right)^x\right)$$

La série de terme général $\left(\frac{e^t}{2}\right)^n$ *converge si et seulement si* $\left|\frac{e^t}{2}\right| < 1 \Leftrightarrow e^t < 2 \Leftrightarrow t < \ln 2$

par la suite, $\forall t \in]-\infty, \ln 2[$, $\sum_{x=0}^{+\infty}\left(\left(\frac{e^t}{2}\right)^x\right) = \frac{1}{1-\frac{e^t}{2}}$ *et* $M_X(t) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-\frac{e^t}{2}} = \frac{1}{2-e^t}$

$$\Rightarrow \frac{dM_X(t)}{dt} = M'_X(t) = \frac{e^t}{(2-e^t)^2}$$

on a $E(X) = M'_X(0)$ *d'où on retrouve ainsi* $\boxed{E(X) = 1}$

Par la suite $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{1}{4} - \left(1 \times \frac{3}{4}\right) \Rightarrow \boxed{Cov(X,Y) = -\frac{1}{2}}$

Institut de Financement du Développement du Maghreb Arabe
CONCOURS DE RECRUTEMENT DE LA XXXVIème PROMOTION (ASSURANCE)
Mai 2016

Exercice 11 : (8 points : 1+1+1+1,5+1,5+2)

ÉNONCÉ

On considère une variable aléatoire X pouvant prendre les trois valeurs suivantes :

$X = -1$, $X = 0$ *et* $X = 1$ *avec des probabilités* : $P[X=-1] = \frac{1}{3}$; $P[X=0] = a$ *où a est un réel positif plus petit que* 1.

1) *Calculer* $P[X=1]$ *en fonction de a*
2) *Déterminer la valeur de a pour que l'espérance mathématique de X soit nulle*
3) *Calculer la variance de X ainsi que la variance de* $Y = X^2$
4) *Calculer la covariance entre X et Y . En déduire le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y . Commenter ce résultat.*
5) *On pose* $\varphi(X) = e^{-X}$ *. Calculer l'espérance mathématique* $E(\varphi(X))$ *et comparer cette valeur à* $\varphi(E(X))$ *. Commenter.*
6) *On dispose de n réalisations indépendantes de la variable Y définie dans la question 3, notées* $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ *. Déterminer la densité de probabilité de cet ensemble d'observaions ainsi que la loi de probabilité de la somme :* $Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$

Corrigé

1) *Soit* $\Omega_X = \{-1, 0, 1\}$, *l'ensemble des valeurs prises par la v.a. X*

$$P(X=x) \text{ est une loi de probabilité } \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{x\in\Omega_X} P(X=x)=1 & (1) \\ 0 \le P(X=x) \le 1 \quad \forall\, x\in\Omega_X & (2) \end{cases}$$

$$(1): \sum_{x\in\Omega_X} P(X=x)=1 \Leftrightarrow P(X=-1)+P(X=0)+P(X=1)=1 \Leftrightarrow \frac{1}{3}+a+P(X=1)=1$$

$$\Leftrightarrow P(X=1)=\frac{2}{3}-a$$

$$(2): 0\le P(X=x)\le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le P(X=-1)\le 1 \ ; \text{vérifié} \\ 0\le P(X=0)\le 1 \\ 0\le P(X=1)\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le a\le 1 \\ 0\le \frac{2}{3}-a\le 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0\le a\le 1 \\ -\frac{2}{3}\le -a\le \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le a\le 1 \\ -\frac{1}{3}\le a\le \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow 0\le a\le \frac{2}{3}$$

$$D'\text{où } \boxed{P(X=1)=\frac{2}{3}-a \text{ , où } a\in\left[0,\frac{2}{3}\right]}$$

2) $On\ a:\ E(X)=\sum_{x\in\Omega_X} xP(X=x)$

$$E(X)=0 \Leftrightarrow \sum_{x\in\Omega_X} xP(X=x)=0 \Leftrightarrow [-1\times P(X=-1)]+[0\times P(X=0)]+[1\times P(X=1)]=0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{3}+\frac{2}{3}-a=0$$

$$D'\text{où } \boxed{E(X)=0 \ \Leftrightarrow a=\frac{1}{3}}$$

3) $Pour\ la\ suite, on\ prendra:\ a=1/3$

- $V(X)=E\left[(X-E(X))^2\right]=E(X^2)-\underbrace{(E(X))^2}_{0}=\sum_{x\in\Omega_X} x^2P(X=x)$

$$V(X)=E(X^2)=[(-1)^2\times P(X=-1)]+[0^2\times P(X=0)]+[1^2\times P(X=1)]=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

$$\boxed{V(X)=E(X^2)=\frac{2}{3}}$$

☑ $1^{\text{ère}}$ *méthode*

- $V(Y)=V(X^2)=E\left[\left(X^2-E(X^2)\right)^2\right]=E(X^4)-\left(E(X^2)\right)^2$

$$or\ E(X^4)=\sum_{x\in\Omega_X} x^4P(X=x)=[(-1)^4\times P(X=-1)]+[0^4\times P(X=0)]+[1^4\times P(X=1)]=1-\frac{1}{3}$$

$$\boxed{E(X^4)=\frac{2}{3}}$$

$$par\ la\ suite\ V(Y) = E(X^4) - \left(E(X^2)\right)^2 = \frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$$

$$D'où\ \boxed{V(Y) = \frac{2}{9}}$$

☑ $2^{ème}$ *méthode*

☞ ***Valeurs prises par la variable aléatoire Y*** :

$X = x_i$	$X = -1$	$X = 0$	$X = 1$
$Y = X^2 = y_j$	$Y = 1$	$Y = 0$	$Y = 1$

☞ ***Loi de probabilité de Y*** :

$Y = X^2 = y_j$	$P[Y = y_j]$
$Y = 0$	$1/3$
$Y = 1$	$2/3$

· $P[Y = 0] = P[X = 0] = 1/3$

· $P[Y = 1] = P[X = -1] + P[X = 1] = 2/3$

$$Ainsi\ Y \rightsquigarrow \mathcal{B}\,(1, 2/3)\ et\ \ P[Y = y] = \begin{cases} (2/3)^y (1/3)^{1-y}\,, \forall y \in \{0, 1\} \\ 0\,, si\ non \end{cases}$$

$$D'où\ \boxed{E(Y) = \frac{2}{3}\ et\ V(Y) = \frac{2}{9}}$$

4)

· $Cov(X,Y) = E\left[\left(X - E(X)\right)\left(Y - E(Y)\right)\right] = E\left(X(X^2)\right) - \underbrace{E(X)E(X^2)}_{0} = E(X^3)$

$$Cov(X,Y) = E(X^3) = \sum_{x \in \Omega_X} x^3 P(X = x) = [(-1)^3 \times P(X = -1)] + [0^3 \times P(X = 0)] + [1^3 \times P(X = 1)]$$

$$= -\frac{1}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = 0$$

$$\boxed{Cov(X,Y) = 0}$$

· $\boxed{\rho(X,Y) = \dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = 0}$

Interprétation : *on a $\rho(X,Y) = 0$, on dit que X et X^2 ne sont pas corrélées.*

5)

$$\cdot\ E\left(\varphi(X)\right) = E(e^{-X}) = \sum_{x \in \Omega_X} e^{-x} P(X = x)$$

$$= \left[e^{-(-1)} \times P(X = -1)\right] + [e^0 \times P(X = 0)] + [e^{-1} \times P(X = 1)]$$

$$= \left[e^1 \times \frac{1}{3}\right] + \frac{1}{3} + \left[\frac{1}{e} \times \frac{1}{3}\right] = \frac{e}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3e} = \frac{e^2 + e + 1}{3e}$$

$$\boxed{E(\varphi(X)) = \frac{e^2+e+1}{3e}}$$

· $\varphi(E(X)) = e^{-E(X)} = e^0 = 1$

$$\boxed{\varphi(E(X)) = 1}$$

$E(\varphi(X)) = \dfrac{e^2+e+1}{3e}$ *et* $\varphi(E(X)) = 1$

Comparons $E(\varphi(X))$ ***et*** $\varphi(E(X))$:

$$E(\varphi(X)) - \varphi(E(X)) = \frac{e^2+e+1}{3e} - 1 = \frac{e^2+e+1-3e}{3e} = \frac{e^2-2e+1}{3e} > 0$$

D'où $\boxed{\varphi(E(X)) < E(\varphi(X))}$

Il suffit de remarquer que $\varphi(X) = e^{-X}$ ***est une fonction convexe de*** $\mathbb{R}$ ***vers lui même ,***

puisque φ ***deux fois dérivable sur*** $\mathbb{R}$ ***et*** $\varphi''(X) = \left(\varphi'(X)\right)' = (-e^{-X})' = e^{-X} \geq 0$

D'où d'après l'inégalité de Jensen, on a : $\boxed{\forall a \in [0,1], \varphi[E(X)] \leq E[\varphi(X)]}$

Cette inégalité va nous fournir une minoration de la moyenne d'une fonction convexe de la variable aléatoire X : $(Z = \varphi(X))$, ***autremant dit*** $1 \leq E(Z)$.

6)

· ***On a*** $Y_j \rightsquigarrow \mathcal{B}(1, 2/3)$ ***et*** $P[Y = y_j] = \begin{cases} (2/3)^{y_j}(1/3)^{1-y_j}, \forall y_j \in \{0,1\} \\ 0, si\ non \end{cases}$

$$P[Y = y_j] = \begin{cases} (2^{y_j}/3^{y_j}) \times (1/3^{1-y_j}), \forall y_j \in \{0,1\} \\ 0, si\ non \end{cases}$$

$$P[Y = y_j] = \begin{cases} 2^{y_j}/3, \forall y_j \in \{0,1\} \\ 0, si\ non \end{cases}$$

$(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ ***suite de v.a indépendantes de*** $\mathcal{B}(1, 2/3)$, ***il en résulte que :***

$$P_{Y_1,Y_2,\dots,Y_n}(Y_1 = y_{1j}, Y_2 = y_{2j}, \dots, Y_n = y_{nj}) = \prod_{k=1}^{n} P_{Y_k}(Y_k = y_{kj}) = \prod_{k=1}^{n} (2^{y_{kj}}/3) = \frac{1}{3^n}\prod_{k=1}^{n} 2^{y_{kj}}$$

$$= \frac{2^{\sum_{k=1}^{n} y_{kj}}}{3^n} = \frac{2^{n\bar{y}_j}}{3^n}$$

$$D'où \quad \boxed{P_{Y_1,Y_2,\dots,Y_n}(Y_1 = y_{1j}, Y_2 = y_{2j}, \dots, Y_n = y_{nj}) = \begin{cases} \dfrac{2^{n\bar{y}_j}}{3^n}, \forall y_j \in \{0,1\} \\ 0, si\ non \end{cases}}$$

• $\boxed{T = \sum_{i=1}^{n} Y_i \rightsquigarrow \mathcal{B}(n, 2/3)}$, ***du fait que*** $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ ***suite de v.a i.i.d. de*** $\mathcal{B}(1, 2/3)$

D'où la loi de probabilité de T : $\boxed{P(T=t)=\begin{cases}C_n^t\left(\frac{2}{3}\right)^t\left(\frac{1}{3}\right)^{n-t} & ,\forall t\in\{0,1,2,\dots,n\}\\ 0\text{ , si non}\end{cases}\text{ , où } T=\sum_{i=1}^{n}Y_i}$

Institut de Financement du Développement du Maghreb Arabe
CONCOURS DE RECRUTEMENT DE LA XXXVIIème PROMOTION (ASSURANCE)
Avril 2018

Exercice 12 : (4 points : 1,5+1,5+1)

ÉNONCÉ

Considérons deux variables X et Y indépendantes ayant des espérances mathématiques notées m_X et m_Y et des variances σ_X^2 et σ_X^2 .

1) *Exprimer en fonction de ces paramètres la variance de la variable produit $Z=XY$*
2) *Dans quel cas, cette variance est égale au produit des variances : $\sigma_X^2\sigma_X^2$?*
3) *Utiliser les résultats précédents pour prouver que le produit de deux loi de Poisson indépendantes n'est pas une loi de Poisson*

Corrigé

1) $V(Z)=E\left[(Z-E(Z))^2\right]=E(Z^2)-(E(Z))^2=E((XY)^2)-(E(XY))^2$

or X et Y sont deux v.a. indépendantes $\Rightarrow Cov(X,Y)=0\Rightarrow E(XY)=E(X)E(Y)$

Ce qui donne : $V(Z)=E((XY)^2)-(E(X)E(Y))^2=E(X^2Y^2)-(E(X)E(Y))^2$

D'autre part : · X et Y sont deux v.a. indépendantes (1)

· Soit $f(t)=g(t)=t^2$, définies sur $\mathbb{R}$, $X(\Omega)\subset\mathbb{R}$ et $Y(\Omega)\subset\mathbb{R}$ (2)

· $X^2=f(X)$ et $Y^2=g(Y)$ (3)

· $E(f(X))=E(X^2)=V(X)+(E(X))^2=\sigma_X^2+m_X^2$, existe et finie (4)

· $E(g(Y))=E(Y^2)=V(Y)+(E(Y))^2=\sigma_Y^2+m_Y^2$, existe et finie (5)

(1) + (2) + (3) + (4) + (5) $\Rightarrow f(X)$ et $g(Y)$ sont deux v.a. indépendantes

$\Rightarrow X^2$ et Y^2 sont deux v.a. indépendantes $\Rightarrow Cov(X^2,Y^2)=0\Rightarrow E(X^2Y^2)=E(X^2)E(Y^2)$

On obtient, par la suite : $V(Z)=E(X^2Y^2)-(E(X)E(Y))^2=E(X^2)E(Y^2)-(E(X))^2(E(Y))^2$

$V(Z)=(\sigma_X^2+m_X^2)(\sigma_Y^2+m_Y^2)-m_X^2m_Y^2=\sigma_X^2\sigma_Y^2+m_Y^2\sigma_X^2+m_X^2\sigma_Y^2+m_X^2m_Y^2-m_X^2m_Y^2$

$$D'\text{où } \boxed{V(Z)=V(XY)=\sigma_X^2\sigma_Y^2+m_Y^2\sigma_X^2+m_X^2\sigma_Y^2}$$

2)

$$V(Z)=\sigma_X^2\sigma_Y^2 \Leftrightarrow \sigma_X^2\sigma_Y^2+m_Y^2\sigma_X^2+m_X^2\sigma_Y^2=\sigma_X^2\sigma_Y^2 \Leftrightarrow m_Y^2\sigma_X^2+m_X^2\sigma_Y^2=0 \Leftrightarrow (m_Y\sigma_X)^2+(m_X\sigma_Y)^2=0$$

$$V(Z)=\sigma_X^2\sigma_Y^2 \Leftrightarrow \begin{cases} m_Y\sigma_X=0 \\ m_X\sigma_Y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_Y=0 \text{ ou } \sigma_X=0 \\ m_X=0 \text{ ou } \sigma_Y=0 \end{cases}$$

· 1^{er} **cas :** $m_Y=0$ et $\sigma_Y=0 \Rightarrow Y$ est une variable certaine et $P(Y=y_j)=\begin{cases} 1, \text{si } y_j=0 \\ 0, \text{si } y_j\in\mathbb{R}^* \end{cases}$

· $2^{ème}$ **cas :** $\sigma_X=0$ et $m_X=0 \Rightarrow X$ est une variable certaine et $P(X=x_i)=\begin{cases} 1, \text{si } x_i=0 \\ 0, \text{si } x_i\in\mathbb{R}^* \end{cases}$

· $3^{ème}$ **cas :** $\sigma_X=0$ et $\sigma_Y=0 \Rightarrow \begin{cases} X \text{ est une variable certaine et } P(X=x_i)=\begin{cases} 1, \text{si } x_i=m_X \\ 0, \text{si } x_i\in\mathbb{R}\setminus\{m_X\} \end{cases} \\ \text{et} \\ Y \text{ est une variable certaine et } P(Y=y_j)=\begin{cases} 1, \text{si } y_j=m_Y \\ 0, \text{si } y_j\in\mathbb{R}\setminus\{m_Y\} \end{cases} \end{cases}$

· $4^{ème}$ **cas :** $m_X=0$ et $m_Y=0 \Rightarrow X$ et Y deux variables aléatoires centrées

$$\boxed{V(Z)=\sigma_X^2\sigma_Y^2 \Leftrightarrow \begin{cases} Y \text{ est une variable certaine, et } Y=0 \\ \text{ou} \\ X \text{ est une variable certaine, et } X=0 \\ \text{ou} \\ X \text{ et } Y \text{ sont deux variables certaines, avec } X=m_X \ (\text{resp. } Y=m_Y) \\ \text{ou} \\ X \text{ et } Y \text{ deux variables aléatoires centrées } (m_X=0 \text{ et } m_Y=0) \end{cases}}$$

3) *Reformulons la question : Utiliser les résultats précédents pour prouver que le produit de deux v.a. indépendantes de loi de Poisson de paramètres respectifs σ_X^2 et σ_Y^2 n'est pas une variable de la loi de Poisson de paramètre $\sigma_X^2\sigma_Y^2$*

Soient : $X \leadsto \mathcal{P}(\lambda_X) \Rightarrow E(X)=V(X)=\lambda_X$; $\lambda_X>0$ et $Y \leadsto \mathcal{P}(\lambda_Y) \Rightarrow E(Y)=V(Y)=\lambda_Y$; $\lambda_Y>0$

Or $E(X)=m_X$ et $V(X)=\sigma_X^2 \Rightarrow m_X=\sigma_X^2$ où $m_X>0$

et $E(Y)=m_Y$ et $V(Y)=\sigma_Y^2 \Rightarrow m_Y=\sigma_Y^2$ où $m_Y>0$

X et Y étant deux v.a. indépendantes. Supposons par l'absurde que : $Z=XY \leadsto \mathcal{P}(\mu)$

où $\mu=\sigma_X^2\sigma_Y^2$

or $V(Z)=V(XY)=\sigma_X^2\sigma_Y^2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Y \text{ est une variable certaine, et } Y=0 \quad (1) \\ \text{ou} \\ X \text{ est une variable certaine, et } X=0 \quad (2) \\ \text{ou} \\ X \text{ et } Y \text{ sont deux variables certaines, avec } X=m_X \ (\text{resp. } Y=m_Y) \quad (3) \\ \text{ou} \\ X \text{ et } Y \text{ deux variables aléatoires centrées } (m_X=0 \text{ et } m_Y=0) \quad (4) \end{cases}$$

· $(1) \Rightarrow m_Y=0 \Rightarrow \lambda_Y=0$. Absurde car $\lambda_Y>0$

· $(2) \Rightarrow m_X=0 \Rightarrow \lambda_X=0$. Absurde car $\lambda_X>0$

· $(3) \Rightarrow \begin{cases} X = m_X \Rightarrow \lambda_X = m_X \text{ et } P(X = \lambda_X) = 1 \text{ absurde puisque } \sum_{x=0}^{+\infty} P(X = x) = 1 \\ Y = m_Y \Rightarrow \lambda_Y = m_Y \text{ et } P(Y = \lambda_Y) = 1 \text{ absurde puisque } \sum_{y=0}^{+\infty} P(Y = y) = 1 \end{cases}$

· $(4) \Rightarrow \begin{cases} m_X = 0 \Rightarrow \lambda_X = 0. \text{ absurde car le paramètre d'une loi de Poisson est strictement positif} \\ m_Y = 0 \Rightarrow \lambda_Y = 0. \text{ absurde car le paramètre d'une loi de Poisson est strictement positif} \end{cases}$

$$D'\text{où}, \boxed{si \begin{cases} X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda_X) \\ Y \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda_Y) \\ X \text{ et } Y \text{ deux v.a. indépendantes} \end{cases}, \text{alors } Z = XY \text{ ne suit pas la loi } \mathcal{P}(\lambda_X \lambda_Y)}$$

Institut de Financement du Développement du Maghreb Arabe
CONCOURS DE RECRUTEMENT DE LA XXXVIIème PROMOTION (ASSURANCE)
Avril 2018

Exercice 13 : *(6 points : 1+1+1+2+1)*

ÉNONCÉ

On considère une suite $X_1, X_2, \dots, X_n \dots$ de n variables de Bernoulli indépendantes, telles que $P[X_i = 1] = \theta$ et $P[X_i = 0] = 1 - \theta$ où θ est un scalaire compris entre 0 et 1.

On pose $Y_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$

1) *Dans cette question, on suppose que n est connu*
   i. *Déterminer la loi de probabilité de Y_n et celle de $n - Y_n$*
   ii. *En déduire leurs espérances mathématiques et leurs variances*
2) *On admet dans cette question que n est une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ*
   i. *Reprendre le calcul de l'espérance mathématique de Y_n*
   ii. *Calculer la variance de Y_n*
   iii. *La loi de Y_n est-elle la même que celle déterminée dans la question 1) ? Justifier votre réponce*

Corrigé

1)
   i.

☑ $1^{\text{ère}}$ *méthode*

· $E(e^{tY_n}) = M_{Y_n}(t) = M_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(t)$

$$or\ (X_1, X_2, \dots, X_n)\ suite\ de\ v.a\ indépendantes\ \Rightarrow M_{\sum_{i=1}^n X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t)$$

$$Et\ comme\ on\ a\ (X_1, X_2, \dots, X_n)\ suite\ de\ v.a\ i.i.d\ de\ la\ loi\ \mathcal{B}\,(1, \theta\,) \Rightarrow M_{X_i}(t) = (1-\theta) + \theta e^t$$

$$Par\ la\ suite, M_{Y_n}(t) = M_{\sum_{i=1}^n X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} [(1-\theta)+\theta e^t] = [(1-\theta)+\theta e^t]^n$$

$$M_{Y_n}(t) = [(1-\theta)+\theta e^t]^n\ d'où \boxed{Y_n \leadsto \mathcal{B}(n,\theta)}$$

$$\cdot\ M_{n-Y_n}(t) = e^{nt} M_{Y_n}(-t) = e^{nt}[(1-\theta)+\theta e^{-t}]^n = \left[e^t\left((1-\theta)+\theta e^{-t}\right)\right]^n = [(1-\theta)e^t + \theta e^{-t}e^t]^n$$

$$M_{n-Y_n}(t) = [\theta + (1-\theta)e^t]^n\ , notons\ \beta = 1-\theta\ , donc\ M_{n-Y_n}(t) = [(1-\beta)+\beta e^t]^n$$

$$\Leftrightarrow (n-Y_n) \leadsto \mathcal{B}(n,\beta), d'où \boxed{(n-Y_n) \leadsto \mathcal{B}\big(n,(1-\theta)\big)}$$

☑ $2^{ème}$ *méthode*

$$\cdot\ (X_1, X_2, \dots, X_n)\ suite\ de\ v.a\ i.i.d\ de\ la\ loi\ \mathcal{B}\,(1, \theta\,) \Rightarrow \boxed{Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \leadsto \mathcal{B}(n,\theta)}$$

$$\cdot\ Notons\ la\ v.a.:\ Z_n = n - Y_n\ , or\ Y_n(\Omega) = \{0,1,2,\dots,n\} \Rightarrow Z_n(\Omega) = \{0,1,2,\dots,n\}$$

$$On a : F_{Z_n}(z) = P(Z_n \le z) = P(n - Y_n \le z) = P(-Y_n \le z-n) = P(Y_n \ge n-z) = \sum_{y=n-z}^{n} P(Y_n = y)$$

$$et\ F_{Z_n}(z-1) = P(Z_n \le z-1) = P(n-Y_n \le z-1) = P\big(Y_n \ge n-(z-1)\big) = \sum_{y=n-(z-1)}^{n} P(Y_n = y)$$

$$or\ \forall z \in Z_n(\Omega)\ , P(Z_n = z) = F_{Z_n}(z) - F_{Z_n}(z-1)$$

$$donc\ P(Z_n = z) = \sum_{y=n-z}^{n} P(Y_n = y) - \sum_{y=n-(z-1)}^{n} P(Y_n = y)$$

$$= \left[P(Y_n = n-z) + \sum_{y=n-(z-1)}^{n} P(Y_n = y)\right] - \sum_{y=n-(z-1)}^{n} P(Y_n = y)$$

$$= P(Y_n = n-z) = C_n^{(n-z)}\theta^{(n-z)}(1-\theta)^{n-(n-z)}$$

$$Rappelons\ que : C_n^{(n-z)} = C_n^z\ , par\ la\ suite :$$

$$P(Y_n = n-z) = C_n^z \theta^{(n-z)}(1-\theta)^z = C_n^z \beta^z (1-\beta)^{n-z}\ , où\ \beta = 1-\theta$$

$$d'où \boxed{Z_n = n - Y_n \leadsto \mathcal{B}\big(n,(1-\theta)\big)}$$

ii. $Y_n \leadsto \mathcal{B}(n,\theta) \Rightarrow \begin{cases} \boxed{E(Y_n) = n\theta} \\ \boxed{V(Y_n) = n\theta(1-\theta)} \end{cases}$

$$(n-Y_n) \sim \mathcal{B}\big(n,(1-\theta)\big) \Rightarrow \boxed{\begin{cases} E(n-Y_n)=n(1-\theta) \\ V(n-Y_n)=n\theta(1-\theta) \end{cases}}$$

2)

i. ***Reformulons la question :***

On admet dans cette question que :

· ***N est une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre*** λ

· $Y=\sum_{i=1}^{N} X_i$ ***où les*** X_i ***sont i.i.d de la loi*** $\mathcal{B}(1,\theta)$ ***et indépendantes de la v.a. N***

Reprendre le calcul de l'espérance mathématique de Y_n

$$N \sim \mathcal{P}(\lambda) \Rightarrow N(\Omega) \text{ et } P(N=n)=\begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} \; ; \forall n \in \mathbb{N} \\ 0 \; ; si\ non \end{cases}$$

· $\{(N=n)_{n\in\mathbb{N}}\}$ ***est un un système complet d'évènements, d'après la formule de probabilité totale, on a :*** $P(Y=y)=\sum_{n=0}^{+\infty} P[(Y=y)\cap(N=n)] = \sum_{n=0}^{+\infty} P(N=n)P\big[\big((Y=y)\big|(N=n)\big)\big]$

on a : $P\big[\big((Y=y)\big|(N=n)\big)\big]=C_n^y\theta^y(1-\theta)^{n-y}$, ***pour*** $0\le y\le n$

$$Ainsi\ , P(Y=y)=\sum_{n=y}^{+\infty}\left[\left(\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}\right)\left(C_n^y\theta^y(1-\theta)^{n-y}\right)\right]$$

$$D'autre\ part\ , E(Y)=E\Big(E\big((Y=y)\big|(N=n)\big)\Big)=\sum_{n\in N(\Omega)} P(N=n)E\big((Y=y)\big|(N=n)\big)$$

$$E(Y)=E\Big(E\big((Y=y)\big|(N=n)\big)\Big)=\sum_{n=0}^{+\infty} P(N=n)E\big((Y=y)\big|(N=n)\big)$$

$$E\big((Y=y)\big|(N=n)\big)=\sum_{y\in Y(\Omega)} yP\big((Y=y)\big|(N=n)\big)=\sum_{y=0}^{n} yC_n^y\theta^y(1-\theta)^{n-y}$$

$$or, pour\ T \sim \mathcal{B}(n,\theta), on\ a \begin{cases} E(T)=\sum_{t=0}^{n} tP(T=t)=\sum_{t=0}^{n} tC_n^t\theta^t(1-\theta)^{n-t} \\ \qquad\qquad et \\ E(T)=n\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{n} tC_n^t\theta^t(1-\theta)^{n-t}=n\theta\ ;\ ou\ encore \sum_{y=0}^{n} yC_n^y\theta^y(1-\theta)^{n-y}=n\theta$$

Ce qui nous ramène à déduire que : $\boxed{E\big((Y=y)\big|(N=n)\big)=n\theta}$

Par la suite ,

$$E(Y)=\sum_{n=0}^{+\infty}P(N=n)E\big((Y=y)\big|(N=n)\big)=\sum_{n=0}^{+\infty}n\theta P(N=n)=\theta\sum_{n=0}^{+\infty}nP(N=n)=\theta\sum_{n=0}^{+\infty}n\left(\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}\right)$$

$$or, pour\ T\sim\mathcal{P}(\lambda), on\ a\ \begin{cases}E(T)=\sum_{t=0}^{+\infty}tP(T=t)=\sum_{t=0}^{+\infty}t\left(\frac{e^{-\lambda}\lambda^t}{t!}\right)\\ \qquad\qquad et\\ E(T)=\lambda\end{cases}$$

$$On\ obtient\ ainsi, \sum_{n=0}^{+\infty}tP(T=t)=\sum_{t=0}^{+\infty}t\left(\frac{e^{-\lambda}\lambda^t}{t!}\right)=\lambda\,;$$

$$ou\ encore\ \boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}nP(N=n)=\sum_{n=0}^{+\infty}n\left(\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}\right)=\lambda}$$

$$d'où\ \boxed{E(Y)=\lambda\theta}$$

ii. $V(Y)=E\Big(V\big((Y=y)\big|(N=n)\big)\Big)+V\Big(E\big((Y=y)\big|(N=n)\big)\Big)$

$$ou\ encore\ V(Y)=E(Y^2)-\Big[\underbrace{E(Y)}_{\lambda\theta}\Big]^2=E(Y^2)-(\lambda\theta)^2$$

$$\cdot\ E(Y^2)=E\Big(E\big(Y^2\big|(N=n)\big)\Big)=\sum_{n\in N(\Omega)}P(N=n)\,E\big(Y^2\big|(N=n)\big)=\sum_{n=0}^{+\infty}P(N=n)\,E\big(Y^2\big|(N=n)\big)$$

$$avec\ , E\big(Y^2\big|(N=n)\big)=\sum_{y\in Y(\Omega)}y^2P\big((Y=y)\big|(N=n)\big)=\sum_{y=0}^{n}y^2C_n^y\theta^y(1-\theta)^{n-y}$$

$$or, pour\ T\sim\mathcal{B}(n,\theta), on\ a\ \begin{cases}E(T^2)=\sum_{t=0}^{n}t^2P(T=t)=\sum_{t=0}^{n}t^2C_n^t\theta^t(1-\theta)^{n-t}\\ \qquad\qquad et\\ E(T^2)=V(T)+[E(T)]^2=n\theta(1-\theta)+(n\theta)^2\end{cases}$$

$$On\ obtient\ ainsi, \sum_{t=0}^{n}t^2C_n^t\theta^t(1-\theta)^{n-t}=n\theta(1-\theta)+(n\theta)^2\,;$$

$$ou\ encore\ \sum_{y=0}^{n}y^2C_n^y\theta^y(1-\theta)^{n-y}=n\theta(1-\theta)+n^2\theta^2$$

$$\boxed{E\big(Y^2\big|(N=n)\big)=n\theta(1-\theta)+n^2\theta^2}$$

$$E(Y^2)=E\Big(E\big(Y^2\big|(N=n)\big)\Big)=\sum_{n=0}^{+\infty}P(N=n)\,[n\theta(1-\theta)+n^2\theta^2]$$

$$E(Y^2) = \theta(1-\theta)\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} nP(N=n)}_{\lambda} + \theta^2 \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 P(N=n) = \theta(1-\theta)\lambda + \theta^2 \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 P(N=n)$$

$$or, pour\ T \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda), on\ a \begin{cases} E(T^2) = \sum_{t=0}^{+\infty} t^2 P(T=t) = \sum_{t=0}^{+\infty} t^2 \left(\frac{e^{-\lambda}\lambda^t}{t!}\right) \\ et \\ E(T^2) = V(T) + [E(T)]^2 = \lambda + \lambda^2 \end{cases}$$

$$On\ obtient\ ainsi, \sum_{t=0}^{+\infty} t^2 P(T=t) = \sum_{t=0}^{+\infty} t^2 \left(\frac{e^{-\lambda}\lambda^t}{t!}\right) = \lambda + \lambda^2\ ;$$

$$ou\ encore \boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 P(N=n) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 \left(\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}\right) = \lambda + \lambda^2}$$

$$En\ effet, E(Y^2) = \theta(1-\theta)\lambda + \theta^2(\lambda+\lambda^2) = \theta\lambda - \theta^2\lambda + \theta^2\lambda + (\lambda\theta)^2$$

$$\boxed{E(Y^2) = \theta\lambda + (\lambda\theta)^2}$$

$$finalement, on\ trouve : V(Y) = E(Y^2) - (\lambda\theta)^2 = \theta\lambda + (\lambda\theta)^2 - (\lambda\theta)^2$$

$$d'où \boxed{V(Y) = \lambda\theta}$$

iii. $Y = \sum_{i=1}^{N} X_i$ et $X_i(\Omega) = \{0, 1\} \Rightarrow Y(\Omega) \subset \{0, 1, \dots, N\}$

$$on\ a : P[((Y=y)|(N=n))] = C_n^y \theta^y (1-\theta)^{n-y}, pour\ 0 \le y \le n$$

$$et\ \forall n \in \mathbb{N}, P(N=n) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}\ puisque\ N \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)\ par\ la\ suite, on\ obtient :$$

$$0 \le y \le n \Rightarrow P(Y=y) = \sum_{n=y}^{+\infty} P(N=n)P[((Y=y)|(N=n))] = \sum_{n=y}^{+\infty}\left[\left(\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}\right)\left(C_n^y \theta^y (1-\theta)^{n-y}\right)\right]$$

$$P(Y=y) = \sum_{n=y}^{+\infty}\left[\left(\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}\right)\left(\frac{n!}{y!\,(n-y)!}\right)\left(\theta^y(1-\theta)^{n-y}\right)\right] = \frac{e^{-\lambda}\theta^y}{y!}\sum_{n=y}^{+\infty}\left[\frac{(1-\theta)^{n-y}\lambda^n}{(n-y)!}\right]$$

$$P(Y=y) = \frac{e^{-\lambda}\theta^y}{y!}\sum_{n=y}^{+\infty}\left[\frac{(1-\theta)^{n-y}\lambda^{n-y}\lambda^y}{(n-y)!}\right] = \frac{e^{-\lambda}\theta^y\lambda^y}{y!}\sum_{n=y}^{+\infty}\left[\frac{(1-\theta)^{n-y}\lambda^{n-y}}{(n-y)!}\right]$$

$$P(Y=y) = \frac{e^{-\lambda}\theta^y\lambda^y}{y!}\sum_{n=y}^{+\infty}\left[\frac{(\lambda(1-\theta))^{n-y}}{(n-y)!}\right] = \frac{e^{-\lambda}(\lambda\theta)^y}{y!}\sum_{n=y}^{+\infty}\left[\frac{(\lambda(1-\theta))^{n-y}}{(n-y)!}\right]$$

$$soit\ k = n-y\ et\ \beta = \lambda(1-\theta)\ donc \sum_{n=y}^{+\infty}\left[\frac{(\lambda(1-\theta))^{n-y}}{(n-y)!}\right] = \sum_{k=0}^{+\infty}\left[\frac{\beta^k}{k!}\right] = e^{\beta}\sum_{k=0}^{+\infty}\left[\frac{e^{-\beta}\beta^k}{k!}\right]$$

$$or, pour\ une\ v.a. K \rightsquigarrow \mathcal{P}(\beta)\ , on\ obtient\ la\ loi\ de\ probabilité\ suivante :$$

$$P(K=k)=\begin{cases}\dfrac{e^{-\beta}\beta^k}{k!}, si\ k\in K(\Omega)=\mathbb{N}\\ 0, si\ non\end{cases} ; avec\ toujours \sum_{k=0}^{+\infty} P(K=k)=1$$

$$Il\ en\ résulte\ que : \sum_{k=0}^{+\infty}\left[\frac{e^{-\beta}\beta^k}{k!}\right]=1\ et \sum_{n=y}^{+\infty}\left[\frac{\left(\lambda(1-\theta)\right)^{n-y}}{(n-y)!}\right]=e^{\lambda(1-\theta)}$$

$$Par\ la\ suite, P(Y=y)=\frac{e^{\lambda(1-\theta)}e^{-\lambda}(\lambda\theta)^y}{y!}=\frac{e^{-\lambda\theta}e^{\lambda}e^{-\lambda}(\lambda\theta)^y}{y!}=\frac{e^{-\lambda\theta}(\lambda\theta)^y}{y!}$$

$$D'où \boxed{P(Y=y)=\begin{cases}\dfrac{e^{-\lambda\theta}(\lambda\theta)^y}{y!}, si\ y\in Y(\Omega)=\mathbb{N}\\ 0, si\ non\end{cases}\ et\ Y \leadsto \mathcal{P}(\lambda\theta)} On\ retrouve: E(Y)=V(Y)=\lambda\theta$$

Conclusion :

· *Pour une taille connue d'une suite* $(X_{1\leq i\leq n})$ *de v.a. iid dela loi* $\mathcal{B}(1,\theta)$, *on obtient :*

$$\boxed{Y_n=\sum_{i=1}^{n} X_i \leadsto \mathcal{B}(n,\theta)}$$

· *Pour une taille aléatoire de la loi de Poisson,* $\mathcal{P}(\lambda)$, *d'une suite* $(X_{1\leq i\leq n})$ *de v.a. iid*

dela loi $\mathcal{B}(1,\theta)$, *on obtient :* $\boxed{Y_n=\sum_{i=1}^{n} X_i \leadsto \mathcal{P}(\lambda\theta)}$

Institut de Financement du Développement du Maghreb Arabe

CONCOURS DE RECRUTEMENT DE LA XXXVIIIème PROMOTION (ASSURANCE)

Septembre 2020

Exercice 14 : *(8 points : 1,5+1,5+1,5+1,5+1+1)*

ÉNONCÉ

On considère deux variables aléatoires indépendantes notées X et Y suivant respectivement une loi binaire de Bernoulli de paramètre θ *et une loi de Poisson de paramètre* λ. *On note* $S=X+Y$ *et* $Q=XY$

1) *Calculer l'espérance mathématique et la variance de* S
2) *Calculer l'espérance mathématique et la variance de* Q
3) *En déduire que* S *n'est pas une loi de Poisson*

4) $\textit{Calculer la probabilité } P[S=0]$
5) $\textit{Calculer la probabilité } P[S=s] \textit{ pour } s \textit{ entier strictement positif}$
6) $\textit{Déterminer la probabilité que } Q \textit{ soit strictement positive}$

Corrigé

1)

$\cdot\ X \leadsto \mathcal{B}(1,\theta) \Longrightarrow E(X)=\theta \text{ et } V(X)=\theta(1-\theta)$

$\cdot\ Y \leadsto \mathcal{P}(\lambda) \Longrightarrow E(Y)=V(Y)=\lambda$

$\cdot\ E(S)=E(X+Y)=E(X)+E(Y) \Longrightarrow \boxed{E(S)=\theta+\lambda}$

$\cdot\ X \text{ et } Y \text{ indépendantes} \Longrightarrow Cov(X,Y)=0, \text{par la suite}, V(S)=V(X+Y)=V(X)+V(Y)$

$\Longrightarrow \boxed{V(S)=\theta(1-\theta)+\lambda}$

2)

$\cdot\ Cov(X,Y)=0 \Leftrightarrow E(XY)=E(X)E(Y)=\theta\lambda, \text{or } E(Q)=E(XY), \text{on obtient : } \boxed{E(Q)=\theta\lambda}$

$\cdot\ V(Q)=E(Q^2)-\left(E(Q)\right)^2=E((XY)^2)-\left(E(XY)\right)^2=E(X^2Y^2)-\left(E(X)E(Y)\right)^2$

$\textit{Or on a : } X \text{ et } Y \text{ sont deux v.a. indépendantes } (1)$

- $\textit{Soit } f(t)=g(t)=t^2, \text{définies sur } \mathbb{R}, X(\Omega)\subset\mathbb{R} \text{ et } Y(\Omega)\subset\mathbb{R}\ (2)$
- $X^2=f(X) \text{ et } Y^2=g(Y)\ (3)$
- $E\big(f(X)\big)=E(X^2)=\theta, \text{existe et finie } (4)$
- $E\big(g(Y)\big)=E(Y^2)=V(Y)+\left(E(Y)\right)^2=\lambda+\lambda^2, \text{existe et finie } (5)$

$(1)+(2)+(3)+(4)+(5) \Rightarrow f(X) \text{ et } g(Y) \text{ sont deux v.a. indépendantes}$

$\Rightarrow X^2 \text{ et } Y^2 \text{ sont deux v.a. indépendantes} \Rightarrow Cov(X^2,Y^2)=0 \Rightarrow E(X^2Y^2)=E(X^2)E(Y^2)$

$\textit{On obtient, par la suite : } V(Q)=E(X^2Y^2)-\left(E(X)E(Y)\right)^2=E(X^2)E(Y^2)-\left(E(X)\right)^2\left(E(Y)\right)^2$

$$V(Q)=\left(V(X)+\left(E(X)\right)^2\right)\left(V(Y)+\left(E(Y)\right)^2\right)-\left(E(X)\right)^2\left(E(Y)\right)^2$$

$$=V(X)V(Y)+\left(E(Y)\right)^2V(X)+\left(E(X)\right)^2V(Y)+\left(E(X)\right)^2\left(E(Y)\right)^2-\left(E(X)\right)^2\left(E(Y)\right)^2$$

$$=V(X)V(Y)+\left(E(Y)\right)^2V(X)+\left(E(X)\right)^2V(Y)$$

$$=\theta(1-\theta)\lambda+\theta(1-\theta)\lambda^2+\theta^2\lambda=\theta\lambda-\theta^2\lambda+\theta\lambda^2-\theta^2\lambda^2+\theta^2\lambda$$

$$=\theta\lambda(1+\lambda-\theta\lambda)$$

$D'\text{où } \boxed{V(Q)=\theta\lambda(1+(1-\theta)\lambda)}$

3)

$E(S)-V(S)=(\theta+\lambda)-(\theta(1-\theta)+\lambda)=\theta+\lambda-\theta(1-\theta)-\lambda=\theta-\theta+\theta^2=\theta^2$

$Or\ \theta^2 \neq 0, par\ la\ suite\ E(S) \neq V(S). Doù\ \boxed{S\ n'est\ pas\ une\ variable\ de\ la\ loi\ de\ Poisson}$

4)

· $X \backsim \mathcal{B}(1,\theta) \Leftrightarrow X(\Omega)=\{0,1\}\ et\ P[X=x]=\begin{cases}\theta^x(1-\theta)^{1-x}\ ;\ \forall x\in\{0,1\}\\ 0\ ;si\ non\end{cases}$

· $Y \backsim \mathcal{P}(\lambda) \Leftrightarrow Y(\Omega)=\mathbb{N}\ et\ P[Y=y]=\begin{cases}\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^y}{y!}\ ;\ \forall y\in\mathbb{N}\\ 0\ ;si\ non\end{cases}$

· $S=X+Y \Rightarrow S(\Omega)=\mathbb{N}$

$Ainsi\ l'évènement\ \{S=0\}=\{(X=0)\cap(Y=0)\}$

· $P[S=0]=P[(X=0)\cap(Y=0)]$

$X\ et\ Y\ sont\ deux\ v.a.indépendantes \Leftrightarrow \forall(x,y)\in\{0,1\}\times\mathbb{N}, P[(X=x)\cap(Y=y)]=P[X=x]P[Y=y]$

$$Ainsi, P[S=0]=P[X=0]P[Y=0]=(1-\theta)\left(\frac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!}\right)$$

$D'où\ \boxed{P[S=0]=(1-\theta)e^{-\lambda}}$

5)

$$\forall s\in\mathbb{N}^*, P[S=s]=P(X+Y=s)=\sum_{i=0}^{s}P[(X=i)\cap(Y=s-i)]=\sum_{i=0}^{s}P(X=i)P(Y=s-i)$$

$$=\sum_{i=0}^{1}P(X=i)P(Y=s-i)+\underbrace{\sum_{i=2}^{s}P\left(\underbrace{\{X=i\}}_{\emptyset}\right)P(Y=s-i)}_{0}$$

$$=P(X=0)P(Y=s)+P(X=1)P(Y=s-1)=(1-\theta)\frac{e^{-\lambda}\lambda^s}{s!}+\theta\frac{e^{-\lambda}\lambda^{s-1}}{(s-1)!}$$

$$D'où, \boxed{\forall s\in\mathbb{N}^*, P[S=s]=\frac{e^{-\lambda}\lambda^s}{s!}\left((1-\theta)+\frac{\theta s}{\lambda}\right)}$$

· $Vérifie\ que\ P[S=s]\ est\ une\ loi\ de\ probabilité$:

$$\sum_{s=0}^{+\infty}P[S=s]=P[S=0]+\sum_{s=1}^{+\infty}P[S=s]=(1-\theta)e^{-\lambda}+\sum_{s=1}^{+\infty}\left[(1-\theta)\frac{e^{-\lambda}\lambda^s}{s!}+\theta\frac{e^{-\lambda}\lambda^{s-1}}{(s-1)!}\right]$$

$$=(1-\theta)\frac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!}+\sum_{s=1}^{+\infty}\left[(1-\theta)\frac{e^{-\lambda}\lambda^s}{s!}\right]+\sum_{s=1}^{+\infty}\left[\theta\frac{e^{-\lambda}\lambda^{s-1}}{(s-1)!}\right]$$

$$=\sum_{s=0}^{+\infty}\left[(1-\theta)\frac{e^{-\lambda}\lambda^s}{s!}\right]+\sum_{s=1}^{+\infty}\left[\theta\frac{e^{-\lambda}\lambda^{s-1}}{(s-1)!}\right]=\left[(1-\theta)e^{-\lambda}\underbrace{\sum_{s=0}^{+\infty}\frac{\lambda^s}{s!}}_{e^{\lambda}}\right]+\left[\theta e^{-\lambda}\sum_{s=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{s-1}}{(s-1)!}\right]$$

$$= \left[(1-\theta)\underbrace{e^{-\lambda}e^{\lambda}}_{1}\right] + \left[\theta e^{-\lambda}\underbrace{\sum_{t=0}^{+\infty}\frac{\lambda^t}{t!}}_{e^{\lambda}}\right], on\ vient\ d'effectuer\ la\ réindexation: t = s-1$$

$$= (1-\theta) + \left[\theta\,\underbrace{e^{-\lambda}e^{\lambda}}_{1}\right] = 1-\theta+\theta$$

$D'où,$ $\boxed{\sum_{s=0}^{+\infty} P[S=s] = 1}$

Par extension on pourra définir la loi de la v.a.d. S sur son support $S(\Omega) = \mathbb{N}$:

$$\boxed{P[S=s] = \begin{cases}\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^s}{s!}\left((1-\theta)+\dfrac{\theta s}{\lambda}\right) ; \forall s \in \mathbb{N} \\ 0\ ; si\ non\end{cases}}$$

6)

· $\begin{cases} Q = XY \\ X(\Omega) = \{0,1\} \Longrightarrow Q(\Omega) = \mathbb{N} \\ Y(\Omega) = \mathbb{N}\end{cases}$

· $P[Q>0] = P[XY>0] = P[(X>0)\cap(Y>0)] + \underbrace{P\left[\underbrace{(X<0)}_{\emptyset}\cap\underbrace{(Y<0)}_{\emptyset}\right]}_{0} = P[X>0]P[Y>0]$

$$= [1-P[X\le 0]][1-P[Y\le 0]] = [1-P[X=0]][1-P[Y=0]]$$

$$= [1-(1-\theta)]\left[1-\frac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!}\right] = \theta\left(1-e^{-\lambda}\right)$$

$D'où$ $\boxed{P[Q>0] = \theta\left(1-e^{-\lambda}\right)}$

Exercice 15 (Indépendance de deux v.a. de la loi de Bernoulli) :

Énoncé

On considère deux variables aléatoires X et Y de la loi de Bernoulli de paramètres $1/2$ *et* $2/3$ *respectivement. On suppose de plus que* $P(\{X=0\}\cap\{Y=0\}) = 1/6$

1) *Déterminer la loi du couple* (X,Y). *Les variables X et Y sont-elles indépendantes* ?
2) *On pose* $U = X+Y$ *et* $V = X.Y$. *Déterminer la loi du couple* (U,V), *ainsi que les lois des variables aléatoires U et V . Les variables U et V sont-elles indépendantes* ?

Corrigé

1) $P(X=x_i,Y=y_j)$ *est une loi de probabilité conjointe, par la suite :*

$$\sum_{x_i\in\{0,1\}}\sum_{y_j\in\{0,1\}} P(X=x_i,Y=y_j)=1 \Rightarrow P(X=0,Y=0)+P(X=0,Y=1)+P(X=1,Y=0)+P(X=1,Y=1)=1$$

$$\Rightarrow 1/6+P(X=0,Y=1)+P(X=1,Y=0)+P(X=1,Y=1)=1$$

$$\Rightarrow \boxed{P(X=0,Y=1)+P(X=1,Y=0)+P(X=1,Y=1)=5/6} \quad (1)$$

$X \backslash Y$	$Y=0$	$Y=1$	*Loi de la v.a. X*
$X=0$	$P(X=0,Y=0)=1/6$	$P(X=0,Y=1)$	$P(X=0)=1/2$
$X=1$	$P(X=1,Y=0)$	$P(X=1,Y=1)$	$P(X=1)=1/2$
Loi de la v.a. Y	$P(Y=0)=1/3$	$P(Y=1)=2/3$	1

$X \rightsquigarrow \mathcal{B}(1,1/2)$

$Y \rightsquigarrow \mathcal{B}(1,2/3)$

☑ *Loi marginale de la v.a. X :*

$$\Rightarrow \begin{cases} 1/6+P(X=0,Y=1)=1/2 \\ P(X=1,Y=0)+P(X=1,Y=1)=1/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{P(X=0,Y=1)=1/3} \quad (2) \\ \boxed{P(X=1,Y=0)+P(X=1,Y=1)=1/2} \quad (3) \end{cases}$$

☑ *Loi marginale de la v.a. Y :*

$$\Rightarrow \begin{cases} 1/6+P(X=1,Y=0)=1/3 \\ P(X=0,Y=1)+P(X=1,Y=1)=2/3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{P(X=1,Y=0)=1/6} \quad (4) \\ \boxed{P(X=0,Y=1)+P(X=1,Y=1)=2/3} \quad (5) \end{cases}$$

En effet, on obtient les résultats suivants :

$$\begin{cases} P(X=0,Y=0)=1/6 \\ P(X=0,Y=1)+P(X=1,Y=0)+P(X=1,Y=1)=5/6 \\ P(X=0,Y=1)=1/3 \\ P(X=1,Y=0)+P(X=1,Y=1)=1/2 \\ P(X=1,Y=0)=1/6 \\ P(X=0,Y=1)+P(X=1,Y=1)=2/3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P(X=0,Y=0)=1/6 \\ 1/3+1/6+P(X=1,Y=1)=5/6 \\ P(X=0,Y=1)=1/3 \\ 1/6+P(X=1,Y=1)=1/2 \\ P(X=1,Y=0)=1/6 \\ 1/3+P(X=1,Y=1)=2/3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P(X=0,Y=0)=1/6 \\ P(X=1,Y=1)=1/3 \\ P(X=0,Y=1)=1/3 \\ P(X=1,Y=0)=1/6 \end{cases}$$ *. D'où la loi du couple (X,Y) :*

☑ *Loi du couple (X,Y) :*

$X \backslash Y$	$Y=0$	$Y=1$	*Loi de la v.a. X*
$X=0$	$1/6$	$1/3$	$P(X=0)=1/2$
$X=1$	$1/6$	$1/3$	$P(X=1)=1/2$
Loi de la v.a. Y	$P(Y=0)=1/3$	$P(Y=1)=2/3$	1

On a :

$$\begin{cases} P(X=0,Y=0)=1/6 \text{ et } P(X=0)P(Y=0)=1/6 \\ P(X=0,Y=1)=1/3 \text{ et } P(X=0)P(Y=1)=1/3 \\ P(X=1,Y=0)=1/6 \text{ et } P(X=1)P(Y=0)=1/6 \\ P(X=1,Y=1)=1/3 \text{ et } P(X=1)P(Y=1)=1/3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P(X=0,Y=0)=P(X=0)P(Y=0) \\ P(X=0,Y=1)=P(X=0)P(Y=1) \\ P(X=1,Y=0)=P(X=1)P(Y=0) \\ P(X=1,Y=1)=P(X=1)P(Y=1) \end{cases}$$

D'où $\forall (x_i,y_j)\in\{0,1\}\times\{0,1\},\ P(X=x_i,Y=y_j)=P(X=x_i)P(Y=y_j)$

$\boxed{X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes}}$

2)

✓ $\boldsymbol{Valeurs\ prises\ par\ la\ variable\ aléatoire\ U = X + Y :}$

Y \ X	$Y = 0$	$Y = 1$
$X = 0$	$U = X + Y = 0$	$U = X + Y = 1$
$X = 1$	$U = X + Y = 1$	$U = X + Y = 2$

$\Rightarrow U(\Omega) = \{0, 1, 2\}$

✓ $\boldsymbol{Valeurs\ prises\ par\ la\ variable\ aléatoire\ V = X.Y :}$

Y \ X	$Y = 0$	$Y = 1$
$X = 0$	$V = X.Y = 0$	$V = X.Y = 0$
$X = 1$	$V = X.Y = 0$	$V = X.Y = 1$

$\Rightarrow V(\Omega) = \{0, 1\}$

✓ $\boldsymbol{Valeurs\ prises\ par\ le\ couple\ (U, V) :}$

$\forall u_i \in U(\Omega) = \{0, 1, 2\}, \forall v_j \in V(\Omega) = \{0, 1\}, on\ a :\ \big(U(\Omega), V(\Omega)\big) = \{0, 1, 2\} \times \{0, 1\}$

$\boldsymbol{On\ obtient\ ainsi\ l'ensemble\ des\ valeurs\ prises\ par\ le\ couple\ (U, V):}$

$$\boxed{\big(U(\Omega), V(\Omega)\big) = \{(0,0);\ (0,1);\ (1,0);\ (1,1);\ (2,0);\ (2,1)\}}$$

☑ $\boldsymbol{Loi\ du\ couple\ (U, V) :}$

· $P(U = 0, V = 0) = P(\{X + Y = 0\} \cap \{X.Y = 0\})$

$$= P([\{X = 0\} \cap \{Y = 0\}] \cap [(\{X = 0\} \cap \{Y = 0\}) \cup (\{X = 0\} \cap \{Y = 1\}) \cup (\{X = 1\} \cap \{Y = 0\})])$$

$$= P(\{X = 0\} \cap \{Y = 0\}) = 1/6$$

· $P(U = 0, V = 1) = P(\{X + Y = 0\} \cap \{X.Y = 1\})$

$$= P\Big(\underbrace{[\{X = 0\} \cap \{Y = 0\}] \cap [(\{X = 1\} \cap \{Y = 1\})]}_{\emptyset}\Big) = 0$$

· $P(U = 1, V = 0) = P(\{X + Y = 1\} \cap \{X.Y = 0\})$

$$= P([(\{X = 0\} \cap \{Y = 1\}) \cup (\{X = 1\} \cap \{Y = 0\})] \cap [(\{X = 0\} \cap \{Y = 0\}) \cup (\{X = 0\} \cap \{Y = 1\}) \cup (\{X = 1\} \cap \{Y = 0\})])$$

$$= P([\{X = 0\} \cap \{Y = 1\}] \cap [(\{X = 0\} \cap \{Y = 0\}) \cup (\{X = 0\} \cap \{Y = 1\}) \cup (\{X = 1\} \cap \{Y = 0\})])$$
$$+ P([\{X = 1\} \cap \{Y = 0\}] \cap [(\{X = 0\} \cap \{Y = 0\}) \cup (\{X = 0\} \cap \{Y = 1\}) \cup (\{X = 1\} \cap \{Y = 0\})])$$

$$= P(\{X = 0\} \cap \{Y = 1\}) + P(\{X = 1\} \cap \{Y = 0\}) = 1/3 + 1/6 = 1/2$$

· $P(U = 1, V = 1) = P(\{X + Y = 1\} \cap \{X.Y = 1\})$

$$= P\Big(\underbrace{[(\{X = 0\} \cap \{Y = 1\}) \cup (\{X = 1\} \cap \{Y = 0\})] \cap [\{X = 1\} \cap \{Y = 1\}]}_{\emptyset}\Big) = 0$$

· $P(U = 2, V = 0) = P(\{X + Y = 2\} \cap \{X.Y = 0\})$

$$= P\Big(\underbrace{[\{X = 1\} \cap \{Y = 1\}] \cap [(\{X = 0\} \cap \{Y = 0\}) \cup (\{X = 0\} \cap \{Y = 1\}) \cup (\{X = 1\} \cap \{Y = 0\})]}_{\emptyset}\Big) = 0$$

· $P(U = 2, V = 1) = P(\{X + Y = 2\} \cap \{X.Y = 1\}) = P([\{X = 1\} \cap \{Y = 1\}] \cap [\{X = 1\} \cap \{Y = 1\}])$

$$= P(\{X = 1\} \cap \{Y = 1\}) = 1/3$$

$U \backslash V$	$V = 0$	$V = 1$	$Loi\ de\ la\ v.a.\ U$
$U = 0$	$1/6$	0	$P(U = 0) = 1/6$
$U = 1$	$1/2$	0	$P(U = 1) = 1/2$
$U = 2$	0	$1/3$	$P(U = 1) = 1/3$
$Loi\ de\ la\ v.a.\ V$	$P(V = 0) = 2/3$	$P(V = 1) = 1/3$	1

☑ ***Loi marginale de la v. a. U :***

$$\forall u_i \in \{0, 1, 2\}, P(U = u_i) = \sum_{v_j \in \{0,1\}} P(U = u_i, V = v_j)\ , ainsi :$$

$$\cdot\ P(U = 0) = \sum_{v_j \in \{0,1\}} P(U = 0, V = v_j) = P(U = 0, V = 0) + P(U = 0, V = 1) = 1/6$$

$$\cdot\ P(U = 1) = \sum_{v_j \in \{0,1\}} P(U = 1, V = v_j) = P(U = 1, V = 0) + P(U = 1, V = 1) = 1/2$$

$$\cdot\ P(U = 2) = \sum_{v_j \in \{0,1\}} P(U = 2, V = v_j) = P(U = 2, V = 0) + P(U = 2, V = 1) = 1/3$$

☑ ***Loi marginale de la v. a. V :***

$$\forall v_j \in \{0, 1\}, P(V = v_j) = \sum_{u_i \in \{0,1,2\}} P(U = u_i, V = v_j)\ , ainsi :$$

$$\cdot\ P(V = 0) = \sum_{u_i \in \{0,1,2\}} P(U = u_i, V = 0) = P(U = 0, V = 0) + P(U = 1, V = 0) + P(U = 2, V = 0) = 2/3$$

$$\cdot\ P(V = 1) = \sum_{u_i \in \{0,1,2\}} P(U = u_i, V = 1) = P(U = 0, V = 1) + P(U = 1, V = 1) + P(U = 2, V = 1) = 1/3$$

☑ ***Indépendance des variables U et V :***

$$\begin{cases} P(U = 0, V = 1) = 0 \\ P(U = 0)P(V = 1) = 1/6 \times 1/3 = 1/18 \end{cases} \Rightarrow P(U = 0, V = 1) \neq P(U = 0)P(V = 1)$$

$$D'où\ \boxed{U\ et\ V\ sont\ deux\ v.a.\ dépendantes}$$

Exercice 16 : (Couples et vecteurs aléatoires discrets-Distributions conditionnelles) :

Énoncé

Soit X et Y deux v. a. indépendantes de la loi de Bernoulli $\mathcal{B}\left(1, \frac{1}{2}\right)$. ***Soit*** $U = X + Y$ ***et*** $V = |X - Y|$.

1) ***Donner la loi jointe du couple de v. a.*** (U, V) ***et les lois marginales de U et V***
2) ***Donner la loi conditionnelle de U sachant que*** $[V = 0]$

3) *Donner la loi conditionnelle de U sachant que* $[V=1]$
4) *U et V sont-ils indépendants ?*

Corrigé

1)

✓ ***Valeurs prises par la variable aléatoire U :***

$X \backslash Y$	$Y=0$	$Y=1$
$X=0$	$U=X+Y=0$	$U=X+Y=1$
$X=1$	$U=X+Y=1$	$U=X+Y=2$

$\Rightarrow U(\Omega)=\{0,1,2\}$

✓ ***Valeurs prises par la variable aléatoire V :***

$X \backslash Y$	$Y=0$	$Y=1$
$X=0$	$V=\|X-Y\|=0$	$V=\|X-Y\|=1$
$X=1$	$V=\|X-Y\|=1$	$V=\|X-Y\|=0$

$\Rightarrow V(\Omega)=\{0,1\}$

✓ ***Valeurs prises par le couple (U,V) :***

$\forall u_i \in U(\Omega)=\{0,1,2\}, \forall v_j \in V(\Omega)=\{0,1\}$, *on a :* $\big(U(\Omega),V(\Omega)\big)=\{0,1,2\}\times\{0,1\}$

On obtient ainsi l'ensemble des valeurs prises par le couple (U,V):

$$\boxed{\big(U(\Omega),V(\Omega)\big)=\{(0,0);\ (0,1);\ (1,0);\ (1,1);\ (2,0);\ (2,1)\}}$$

☑ ***Loi du couple (U,V) :***

X et Y étant deux v.a. indépendantes de la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1,1/2)$

$\Rightarrow \forall(x,y)\in\{0,1\}^2, P(X=x)=P(Y=y)=1/2$ *et* $P(X=x,Y=y)=P(X=x)P(Y=y)=1/4$

- $P(U=0,V=0)=P(\{X+Y=0\}\cap\{|X-Y|=0\})$

$$=P([\{X=0\}\cap\{Y=0\}]\cap[(\{X=0\}\cap\{Y=0\})\cup(\{X=1\}\cap\{Y=1\})])$$

$$=P(\{X=0\}\cap\{Y=0\})=P(X=0)P(Y=0)=1/4$$

- $P(U=0,V=1)=P(\{X+Y=0\}\cap\{|X-Y|=1\})$

$$=P\left(\underbrace{[\{X=0\}\cap\{Y=0\}]\cap[(\{X=1\}\cap\{Y=0\})\cup(\{X=0\}\cap\{Y=1\})]}_{\emptyset}\right)=0$$

- $P(U=1,V=0)=P(\{X+Y=1\}\cap\{|X-Y|=0\})$

$$=P\left(\underbrace{[(\{X=0\}\cap\{Y=1\})\cup(\{X=1\}\cap\{Y=0\})]\cap[(\{X=0\}\cap\{Y=0\})\cup(\{X=1\}\cap\{Y=1\})]}_{\emptyset}\right)=0$$

- $P(U=1,V=1)=P(\{X+Y=1\}\cap\{|X-Y|=1\})$

$$=P([(\{X=0\}\cap\{Y=1\})\cup(\{X=1\}\cap\{Y=0\})]\cap[(\{X=1\}\cap\{Y=0\})\cup(\{X=0\}\cap\{Y=1\})])$$

$$=P([(\{X=0\}\cap\{Y=1\})\cup(\{X=1\}\cap\{Y=0\})])$$

$$=P(\{X=0\}\cap\{Y=1\})+P(\{X=1\}\cap\{Y=0\})$$

$$= \underbrace{[P(X=0)P(Y=1)]}_{1/4} + \underbrace{[P(X=1)P(Y=0)]}_{1/4} = 1/2$$

· $P(U=2, V=0) = P(\{X+Y=2\} \cap \{|X-Y|=0\})$

$$= P([(\{X=1\} \cap \{Y=1\})] \cap [(\{X=0\} \cap \{Y=0\}) \cup (\{X=1\} \cap \{Y=1\})])$$

$$= P(\{X=1\} \cap \{Y=1\}) = P(X=1)P(Y=1) = 1/4$$

· $P(U=2, V=1) = P(\{X+Y=2\} \cap \{|X-Y|=1\})$

$$= P\left(\underbrace{[\{X=1\} \cap \{Y=1\}] \cap [(\{X=1\} \cap \{Y=0\}) \cup (\{X=0\} \cap \{Y=1\})]}_{\emptyset}\right) = 0$$

$U \backslash V$	$V=0$	$V=1$	$P(U=u_i)$
$U=0$	$1/4$	0	$P(U=0)=1/4$
$U=1$	0	$1/2$	$P(U=1)=1/2$
$U=2$	$1/4$	0	$P(U=2)=1/4$
$P(V=v_j)$	$P(V=0)=1/2$	$P(V=1)=1/2$	1

☑ ***Loi marginale de la v.a. U :***

$$\forall u_i \in \{0,1,2\}, P(U=u_i) = \sum_{v_j \in \{0,1\}} P(U=u_i, V=v_j) \text{ , ainsi :}$$

· $P(U=0) = \sum_{v_j \in \{0,1\}} P(U=0, V=v_j) = \underbrace{P(U=0,V=0)}_{1/4} + \underbrace{P(U=0,V=1)}_{0} = 1/4$

· $P(U=1) = \sum_{v_j \in \{0,1\}} P(U=1, V=v_j) = \underbrace{P(U=1,V=0)}_{0} + \underbrace{P(U=1,V=1)}_{1/2} = 1/2$

· $P(U=2) = \sum_{v_j \in \{0,1\}} P(U=2, V=v_j) = \underbrace{P(U=2,V=0)}_{1/4} + \underbrace{P(U=2,V=1)}_{0} = 1/4$

☑ ***Loi marginale de la v.a. V :***

$$\forall v_j \in \{0,1\}, P(V=v_j) = \sum_{u_i \in \{0,1,2\}} P(U=u_i, V=v_j) \text{ , ainsi :}$$

· $P(V=0) = \sum_{u_i \in \{0,1,2\}} P(U=u_i, V=0) = \underbrace{P(U=0,V=0)}_{1/4} + \underbrace{P(U=1,V=0)}_{0} + \underbrace{P(U=2,V=0)}_{1/4} = 1/4$

· $P(V=1) = \sum_{u_i \in \{0,1,2\}} P(U=u_i, V=1) = \underbrace{P(U=0,V=1)}_{0} + \underbrace{P(U=1,V=1)}_{1/2} + \underbrace{P(U=2,V=1)}_{0} = 1/2$

2)

☑ ***Loi conditionnelle de U sachant que $[V=0]$:***

$$P\big((U=u_i)\big|(V=0)\big) = \frac{P[(U=u_i),(V=0)]}{P(V=0)} \;;\; \forall u_i \in \{0,1,2\}$$

· $P\big((U=0)\big|(V=0)\big) = \frac{P[(U=0),(V=0)]}{P(V=0)} = \frac{1/4}{1/2} = 1/2$

- $P\big((U=1)\big|(V=0)\big)=\dfrac{P[(U=1),(V=0)\,]}{P(V=0)}=\dfrac{0}{1/2}=0$

- $P\big((U=2)\big|(V=0)\big)=\dfrac{P[(U=2),(V=0)\,]}{P(V=0)}=\dfrac{1/4}{1/2}=1/2$

$\big((U=u_i)\big|(V=0)\big)$	$P\big((U=u_i)\big|(V=0)\big)$
$U=0$	$1/2$
$U=1$	0
$U=2$	$1/2$
$\sum$	1

3)

☑ ***Loi conditionnelle de U sachant que $[V=1]$:***

$$P\big((U=u_i)\big|(V=1)\big)=\frac{P[(U=u_i),(V=1)\,]}{P(V=0)}\ ;\ \ \forall u_i\in\{0,1,2\}$$

- $P\big((U=0)\big|(V=1)\big)=\dfrac{P[(U=0),(V=1)\,]}{P(V=1)}=\dfrac{0}{1/2}=0$

- $P\big((U=1)\big|(V=1)\big)=\dfrac{P[(U=1),(V=1)\,]}{P(V=1)}=\dfrac{1/2}{1/2}=1$

- $P\big((U=2)\big|(V=1)\big)=\dfrac{P[(U=2),(V=1)\,]}{P(V=1)}==0$

$\big((U=u_i)\big|(V=1)\big)$	$P\big((U=u_i)\big|(V=0)\big)$
$U=0$	0
$U=1$	1
$U=2$	0
$\sum$	1

4)

☑ $1^{\text{ère}}$ *méthode* :

$$\begin{cases}P\big((U=2)\big|(V=1)\big)=0\\ P(U=2)=\dfrac{1}{4}\end{cases}\Rightarrow P\big((U=2)\big|(V=1)\big)\neq P(U=2)$$

$$D'\text{où}\ \boxed{U\ et\ V\ sont\ deux\ v.a.\,dépendantes}$$

☑ $2^{\text{ème}}$ *méthode* :

$$\begin{cases}P(U=0,V=1)=0\\ P(U=0)P(V=1)=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{8}\end{cases}\Rightarrow P(U=0,V=1)\neq P(U=0)P(V=1)$$

$$D'\text{où}\ \boxed{U\ et\ V\ sont\ deux\ v.a.\,dépendantes}$$

BEN AHMED MOHSEN Téléphone: (+216) 97 619191 / 54 619191
omega.center.cp@gmail.com https://web.facebook.com/OMEGACENTER2014

Exercice 17 (Couples et Vecteurs aléatoires discrets-Coefficient de corrélation linéaire) :

Énoncé

On suppose que les deux variables discrètes X et Y satisfont :

$P(X=1)=P(Y=1)=p\,,P(X=0)=P(Y=0)=1-p$ *et* $P(X=1,Y=1)=q\,,$

avec $0<q\le p<\frac{1}{2}$.

1) *Calculer* $V(X+Y)$
2) *Déterminer le coéfficient de corrélation* $\rho_{X,Y}$ *en fonction de* p *et* q

Corrigé

1)

☑ ***Loi du couple*** (X,Y) :

$$\underbrace{P(X=1)}_{p}=\sum_{y_j\in\{0,1\}}P\left(X=1\,,Y=y_j\right)=P(X=1\,,Y=0)+\underbrace{P(X=1\,,Y=1)}_{q}$$

$$\Rightarrow \boxed{P(X=1\,,Y=0)=p-q}$$

$$\underbrace{P(Y=1)}_{p}=\sum_{x_i\in\{0,1\}}P(X=x_i\,,Y=1)=P(X=0\,,Y=1)+\underbrace{P(X=1\,,Y=1)}_{q}$$

$$\Rightarrow \boxed{P(X=0\,,Y=1)=p-q}$$

$$\underbrace{P(X=0)}_{1-p}=\sum_{y_j\in\{0,1\}}P\left(X=0\,,Y=y_j\right)=P(X=0\,,Y=0)+\underbrace{P(X=0\,,Y=1)}_{p-q}$$

$$\Rightarrow P(X=0\,,Y=0)=(1-p)-(p-q)=1-2p+q$$

$X \backslash Y$	$Y=0$	$Y=1$	$P(X=x_i)$
$X=0$	$1-2p+q$	$p-q$	$P(X=0)=1-p$
$X=1$	0	$1/2$	$P(X=1)=p$
$P(Y=y_j)$	$P(Y=0)=1-p$	$P(Y=1)=p$	1

☑ $V(X+Y)$:

☞ $1^{\text{ère}}$ ***méthode***

✓ ***Valeurs prises par la variable aléatoire*** $S=X+Y$:

$X \backslash Y$	$Y=0$	$Y=1$
$X=0$	$S=X+Y=0$	$S=X+Y=1$
$X=1$	$S=X+Y=1$	$S=X+Y=2$

$\Rightarrow S(\Omega)=\{0,1,2\}$

☑ ***Loi marginale de la*** $v.a.S$:

· $P(S=0)=P(X=0\,,Y=0)=1-2p+q$

· $P(S=1)=P(X=0\,,Y=1)+P(X=1\,,Y=0)=(p-q)+(p-q)=2(p-q)$

· $P(S=2)=P(X=1\,,Y=1)=q$

· $E(S)$:

$$E(S)=\sum_{s_k\in\{0,1,2\}} s_k P(S=s_k)=[0\times P(S=0)]+[1\times P(S=1)]+[2\times P(S=2)]$$

$$=2p-2q+2q=2p$$

· $E(S^2)$:

$$E(S^2)=\sum_{s_k\in\{0,1,2\}} s_k^2 P(S=s_k)=[0^2\times P(S=0)]+[1^2\times P(S=1)]+[2^2\times P(S=2)]$$

$$=2p-2q+4q=2(p+q)$$

· $V(S)=V(X+Y)$

$$V(S)=E(S^2)-\left(E(S)\right)^2=2p+2q-4p^2=2(p+q-2p^2)$$

☞ $2^{\text{ème}}$ méthode

$X\leadsto\mathcal{B}\,(1,p\,)\Rightarrow E(X)=p\ et\ V(X)=p(1-p)$

$Y\leadsto\mathcal{B}\,(1,p\,)\Rightarrow E(Y)=p\ et\ V(Y)=p(1-p)$

· $E(XY)$

$$E(XY)=\sum_{x_i\in\{0,1\}}\sum_{y_j\in\{0,1\}} xyP\left(X=x_i,Y=y_j\right)$$

$$=[0\times 0\times P(X=0,Y=0)]+[0\times 1\times P(X=0,Y=1)]++[1\times 0\times P(X=1,Y=0)]+[1\times 1\times P(X=1,Y=1)]$$

$E(XY)=q$

· $Cov(X,Y)$

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=q-p^2$$

· $V(X+Y)$

$$V(X+Y)=V(X)+V(Y)+2Cov(X,Y)=p-p^2+p-p^2+2(q-p^2)$$

$$=p-p^2+p-p^2+2q-2p^2=2(p+q-2p^2)$$

2) $\rho_{X,Y}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}=\frac{q-p^2}{\sqrt{p^2(1-p)^2}}$. D'où $\boxed{\rho_{X,Y}=\frac{q-p^2}{p(1-p)}}$

Exercice 18 (Indépendance de deux v.a. de la loi de Bernoulli) :

Énoncé

Soit X et Y deux variables de Bernoulli, $X\leadsto\mathcal{B}(1,p_X)$ *et* $Y\leadsto\mathcal{B}(1,p_Y)$

Montrer que $Cov(X,Y)=0$ *si, et seulement si, X et Y indépendantes.*

Corrigé

$$On\ a : (A\ et\ B\ indépendants) \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{A}\ et\ B\ indépendants \\ A\ et\ \bar{B}\ indépendants \\ \bar{A}\ et\ \bar{B}\ indépendants \end{cases}$$

$Tout\ d'abor, on\ sait\ que : (X\ et\ Y\ indépendantes) \Rightarrow Cov(X,Y) = 0$

$On\ se\ propose\ de\ démontrer\ que\ lorsque\ X\ et\ Y\ sont\ bernoulliennes, la\ réciproque\ est\ vraie$

$Or\ Cov(X,Y) = 0 \Rightarrow E(XY) = E(X)E(Y)$

$$E(XY) = \sum_{x=\{0,1\}} \sum_{y=\{0,1\}} xy\, P(X = x, Y = y) = P\big((X = 1) \cap (Y = 1)\big)$$

$E(X) = p_X = P(X = 1)\ et\ E(Y) = p_Y = P(Y = 1)$

$$par\ la\ suite, Cov(X,Y) = 0 \Rightarrow P\left(\underbrace{(X = 1)}_{A} \cap \underbrace{(Y = 1)}_{B}\right) = P\left(\underbrace{X = 1}_{A}\right) P\left(\underbrace{Y = 1}_{B}\right)$$

$$(A\ et\ B\ indépendants) \Rightarrow \begin{cases} \bar{A}\ et\ B\ indépendants \\ A\ et\ \bar{B}\ indépendants \\ \bar{A}\ et\ \bar{B}\ indépendants \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{(X = 1)} = (X = 0)\ et\ (Y = 1)\ indépendants \\ A = (X = 0)\ et\ \overline{(Y = 1)} = (Y = 0)\ indépendants \\ \overline{(X = 1)} = (X = 0) et\ \overline{(Y = 1)} = (Y = 0) indépendants \end{cases}$$

$$En\ effet, Cov(X,Y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} P\left(\underbrace{(X = 0)}_{\bar{A}} \cap \underbrace{(Y = 1)}_{B}\right) = P\left(\underbrace{X = 0}_{\bar{A}}\right) P\left(\underbrace{Y = 1}_{B}\right) \\ P\left(\underbrace{(X = 1)}_{A} \cap \underbrace{(Y = 0)}_{\bar{B}}\right) = P\left(\underbrace{X = 1}_{A}\right) P\left(\underbrace{Y = 0}_{\bar{B}}\right) \\ P\left(\underbrace{(X = 0)}_{\bar{A}} \cap \underbrace{(Y = 0)}_{\bar{B}}\right) = P\left(\underbrace{X = 0}_{\bar{A}}\right) P\left(\underbrace{Y = 0}_{\bar{B}}\right) \end{cases}$$

$et\ Cov(X,Y) = 0 \Rightarrow (X\ et\ Y\ indépendantes)$

$D'où, pour\ X \rightsquigarrow \mathcal{B}(1, p_X)\ et\ Y \rightsquigarrow \mathcal{B}(1, p_Y), on\ a :\ Cov(X,Y) = 0 \Leftrightarrow (X\ et\ Y\ indépendantes)$

Exercice 19 *(Indépendance de fonctions des variables aléatoires discrètes-Cas de variables binomiales) :*

Énoncé

$Soit\ (U,V)\ un\ couple\ de\ v.a.\ indépendantes\ suivant\ la\ loi\ Binomiale\ \mathcal{B}\left(2, \frac{1}{2}\right)$

1) $Montrer\ que\ la\ somme\ de\ n\ variables\ aléatoires\ réelles\ indépendantes\ qui\ suivent\ la\ loi\ de\ Bernoulli\ de\ paramètre\ p \in]0,1[suit\ une\ loi\ binomiale\ dont\ on\ précisera\ les\ paramètres.$
2) $On\ pose\ S = (U-1)^2 + (V-1)^2$. $Déterminer\ la\ loi\ de\ S.$
3) $On\ pose\ T = (U-1)(V-1) + 1$. $Calculer\ E\big(S(T-1)\big)$. $Déterminer\ la\ loi\ de\ T$. $Calculer\ Cov(S,T)$. $Les\ variables\ S\ et\ T\ sont\text{-}elles\ indépendantes$?

BEN AHMED MOHSEN Téléphone: (+216) 97 619191 / 54 619191
omega.center.cp@gmail.com https://web.facebook.com/OMEGACENTER2014

Corrigé

1) $On\ a\ (X_1, X_2, \dots, X_n)\ suite\ de\ v.a\ i.i.d\ de\ la\ loi\ \mathcal{B}\ (1, p\ ) \Rightarrow M_{X_i}(t) = (1-p) + pe^t$

$Soit\ la\ v.a.Y = \sum_{i=1}^{n} X_i\ ,or\ (X_1, X_2, \dots, X_n)\ suite\ de\ v.a\ indépendantes\ de\ \mathcal{B}\ (1, p\ )$

$\Rightarrow M_Y(t) = M_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} [(1-\theta) + \theta e^t] = [(1-\theta) + \theta e^t]^n\ .d'où\ \boxed{Y_n \leadsto \mathcal{B}(n, p)}$

2) $U, V \leadsto \mathcal{B}(2, 1/2) \Rightarrow U(\Omega) = V(\Omega) = \{\ 0, 1, 2\}$

$et\ P(V = t) = P(U = t) = \begin{cases} C_2^t (1/2)^t (1/2)^{2-t} = C_2^t/4\ , \forall t \in \{0, 1, 2\} \\ 0\ , si\ non \end{cases}$

$Autrement\ dit: \begin{cases} P(U = 0) = P(V = 0) = C_2^0/4 = 1/4 \\ P(U = 1) = P(V = 1) = C_2^1/4 = 2/4 = 1/2 \\ P(U = 2) = P(V = 2) = C_2^2/4 = 1/4 \end{cases}$

$E(U) = E(V) = 1\ et\ Var(U) = Var(V) = 1/2$

$U(\Omega) = V(\Omega) = \{\ 0, 1, 2\} \Rightarrow (U-1)(\Omega) = (V-1)(\Omega) = \{-1, 0, 1\} \Rightarrow (U-1)^2(\Omega) = (V-1)^2(\Omega) = \{\ 0, 1\}.$

- $\begin{cases} P[(U-1)^2 = 0] = P(U = 1) = 1/2 \\ P[(U-1)^2 = 1] = P(U = 0) + P(U = 2) = 1/2 \end{cases} \Rightarrow (U-1)^2 \leadsto \mathcal{B}(1, 1/2)$

- $\begin{cases} P[(V-1)^2 = 0] = P(V = 1) = 1/2 \\ P[(V-1)^2 = 1] = P(V = 0) + P(V = 2) = 1/2 \end{cases} \Rightarrow (V-1)^2 \leadsto \mathcal{B}(1, 1/2)$

- $U\ et\ V\ sont\ deux\ v.a.\ indépendantes$ (1)
- $Soit\ f(t) = g(t) = (t-1)^2, définies\ sur\ \mathbb{R}\ , U(\Omega) = V(\Omega) = \{\ 0, 1, 2\} \subset \mathbb{R}$ (2)
- $(U-1)^2 = f(U)\ et\ (V-1)^2 = g(V)$ (3)
- $E(f(U)) = E((U-1)^2) = 1/2\ , car\ (U-1)^2 \leadsto \mathcal{B}(1, 1/2)\ , existe\ et\ finie$ (4)
- $E(g(V)) = E((V-1)^2) = 1/2\ , car\ (V-1)^2 \leadsto \mathcal{B}(1, 1/2)\ , existe\ et\ finie$ (5)

(1) + (2) + (3) + (4) + (5) $\Rightarrow f(U)\ et\ g(V)\ sont\ deux\ v.a.\ indépendantes$

$\Rightarrow (U-1)^2\ et\ (V-1)^2\ sont\ deux\ v.a.\ indépendantes\ .$

$En\ effet: \begin{cases} (U-1)^2 \leadsto \mathcal{B}(1, 1/2)\ et\ (V-1)^2 \leadsto \mathcal{B}(1, 1/2) \\ (U-1)^2\ et\ (V-1)^2\ sont\ deux\ v.a.\ indépendantes \\ S = (U-1)^2 + (V-1)^2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{S \leadsto \mathcal{B}(2, 1/2)}$

3) $On\ a: S = (U-1)^2 + (V-1)^2\ et\ T - 1 = (U-1)(V-1)$

$E(S(T-1)) = E\left(((U-1)^2 + (V-1)^2)(U-1)(V-1)\right) = E\left((U-1)^3(V-1) + (V-1)^3(U-1)\right)$

$E(S(T-1)) = E\left((U-1)^3(V-1)\right) + E\left((V-1)^3(U-1)\right)$

- $U\ et\ V\ sont\ deux\ v.a.\ indépendantes$ (1)

Adresse : 2, Rue Ibn Arafa, av de l'environnement Manouba Centre, Manouba

- $Soit\ f(t) = (t-1)^3\ et\ g(t) = t-1\ , définies\ sur\ \mathbb{R}\ , U(\Omega) = V(\Omega) = \{0,1,2\} \subset \mathbb{R}$ (2)

- $(U-1)^3 = f(U)\ et\ (V-1) = g(V)$ (3)

- $Calculons\ E\big(f(U)\big) = E((U-1)^3)$

$U(\Omega) = \{0,1,2\} \Rightarrow (U-1)(\Omega) = \{-1,0,1\} \Rightarrow (U-1)^3(\Omega) = \{-1,0,1\}$

$$\begin{cases} P[(U-1)^3 = -1] = P(U=0) = 1/4 \\ P[(U-1)^3 = 0] = P(U=1) = 1/2 \\ P[(U-1)^3 = 1] = P(U=2) = 1/4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow E\big(f(U)\big) = \sum_{u=\{0,1,2\}} f(u)P(U=u) = \underbrace{f(0)P(U=0)}_{(-1)\times 1/4 = -1/4} + \underbrace{f(1)P(U=1)}_{0} + \underbrace{f(2)P(U=2)}_{1\times 1/4 = 1/4} = 0$$

$E\big(f(U)\big)\ existe\ et\ finie$ (4)

- $E\big(g(V)\big) = E(V-1) = \underbrace{E(V)}_{1} - 1 = 0, car\ V \rightsquigarrow \mathcal{B}(2,1/2)\ , existe\ et\ finie$ (5)

(1) + (2) + (3) + (4) + (5) $\Rightarrow f(U)\ et\ g(V)\ sont\ deux\ v.a.\ indépendantes$

$(U-1)^3\ et\ (V-1)\ sont\ deux\ v.a.\ indépendantes$

$$\Rightarrow E\left((U-1)^3(V-1)\right) = E((U-1)^3)E(V-1) = 0$$

$De\ la\ même\ manière, on\ démontre\ que\ (V-1)^3\ et\ (U-1)\ sont\ deux\ v.a.\ indépendantes$

$$\Rightarrow E\left((V-1)^3(U-1)\right) = E((V-1)^3)E(U-1) = 0$$

$Par\ la\ suite, E\big(S(T-1)\big) = E\left((U-1)^3(V-1)\right) + E\left((V-1)^3(U-1)\right) = 0$

$$\boxed{E\big(S(T-1)\big) = 0}$$

✓ $Valeurs\ prises\ par\ la\ variable\ aléatoire\ T = (U-1)(V-1)+1$

$(U-1)$ \ $(V-1)$	-1	0	1
-1	$T=2$	$T=1$	$T=0$
0	$T=1$	$T=1$	$T=1$
1	$T=0$	$T=1$	$T=2$

$\Rightarrow T(\Omega) = \{0,1,2\}$

☑ $Loi\ de\ probabilité\ de\ la\ v.a.T$:

$On\ a : U\ et\ V\ sont\ deux\ v.a.\ indépendantes \Leftrightarrow P\big(U=u_i\ , V=v_j\big) = P(U=u_i)P\big(V=v_j\big)$

- $P(T=0) = P(U-1=-1\ , V-1=1) + P(U-1=1\ , V-1=-1)$

$$= P(U=0\ , V=2) + P(U=2\ , V=0) = \underbrace{[P(U=0)P(V=2)]}_{1/4\times 1/4 = 1/16} + \underbrace{[P(U=2)P(V=0)]}_{1/4\times 1/4=1/16}$$

$$\boxed{P(T=0) = 1/8}$$

- $P(T=1) = P(U-1=-1\ , V-1=0) + P(U-1=0\ , V-1=-1) + P(U-1=0\ , V-1=0)$
$+ P(U-1=0\ , V-1=1) + P(U-1=1\ , V-1=0)$

$$P(T=1)=P(U=0\,,V=1)+P(U=1\,,V=0)+P(U=1\,,V=1)+P(U=1\,,V=2)+P(U=2\,,V=1)$$

$$P(T=1)=\underbrace{[P(U=0)P(V=1)]}_{1/4\times1/2=1/8}+\underbrace{[P(U=1)P(V=0)]}_{1/2\times1/4=1/8}+\underbrace{[P(U=1)P(V=1)]}_{1/2\times1/2=2/8}+\underbrace{[P(U=1)P(V=2)]}_{1/2\times1/4=1/8}+\underbrace{[P(U=2)P(V=1)]}_{1/4\times1/2=1/8}$$

$$\boxed{P(T=1)=3/4}$$

- $P(T=2)=P(U=0\,,V=0)+P(U=2\,,V=2)=\underbrace{[P(U=0)P(V=0)]}_{1/4\times1/4=1/16}+\underbrace{[P(U=2)P(V=2)]}_{1/4\times1/4=1/16}$

$$\boxed{P(T=2)=1/8}$$

- $E(T)=\sum_{t\in\{0,1,2\}}tP(T=t)=\underbrace{[0\times P(T=0)]}_{0}+\underbrace{[1\times P(T=1)]}_{3/4}+\underbrace{[2\times P(T=2)]}_{2\times1/8=1/4}=1$
- $S\backsim\mathcal{B}(2,1/2)\Rightarrow E(S)=1$
- $Cov(S,T)=E(ST)-\underbrace{E(S)E(T)}_{1}=E(ST-S+S)-1=E(S(T-1)+S)-1=\underbrace{E\big(S(T-1)\big)}_{0}+\underbrace{E(S)}_{1}-1$

$$\boxed{Cov(S,T)=0}$$

S et T ne sont pas corrélées, mais cela ne suffit pas pour se prononcer sur l'indépendance des v.a. S et T . Prenons par exemple : $P(S=0\,,T=0)=P[(S=0)\cap(T=0)]$

$$\begin{cases}P(S=0\,,T=0)=P\underbrace{\left[[\{U=1\}\cap\{V=1\}]\cap[(\{U=0\}\cap\{V=2\})\cup(\{U=2\}\cap\{V=0\})]\right]}_{\emptyset}=0\\ \underbrace{P(S=0)}_{1/4}\underbrace{P(T=0)}_{1/8}=1/32\end{cases}$$

$P(S=0\,,T=0)\neq P(S=0)P(T=0)$. D'où $\boxed{S\text{ et }T\text{ sont deux v.a. dépendantes}}$

Exercice 20 (Somme de deux v.a. indépendantes- Cas de la loi uniforme discrète) :

Énoncé

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $\{1,2,\dots,n\}$

1) *Déterminer* $P(X=Y)$.
2) *Déterminer* $P(X\geq Y)$.
3) *Déterminer la loi de* $X+Y$.

Corrigé

1)

X et Y deux variables aléatoires indépendantes de la loi uniforme discrète $\mathcal{U}_{\{1,2,\dots,n\}}$, *donc*

$$P(X=t)=P(Y=t)=\begin{cases}\frac{1}{n}\,,si\ t\in\{1,2,\dots,n\}\\0\,,si\ non\end{cases}$$

$$et\ P(X=x\,,Y=y)=P(X=x)P(Y=y)=\begin{cases}\frac{1}{n^2}\,,si\ (x,y)\in\{1,2,\dots,n\}^2\\0\,,si\ non\end{cases}$$

$$P(X=Y)=P(X=1\,,Y=1)+P(X=2\,,Y=2)+\dots+P(X=n\,,Y=n)$$

$$On\ a\ donc,\forall k\in\ \{1,2,\dots,n\},P(X=Y)=\sum_{k=1}^{n}P(X=k\,,Y=k)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2}=\frac{n}{n^2}=\frac{1}{n}$$

$$D'où\,,\boxed{P(X=Y)=\frac{1}{n}}$$

2)

☑ $1^{ère}$ *méthode* :

$$\forall k\in\{1,2,\dots,n\},P(X\geq Y)=\sum_{k=1}^{n}P(X=k\,,Y\leq k)=\sum_{k=1}^{n}P(X=x)P(Y\leq k)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}P(Y\leq k)$$

$$\forall k\in\{1,2,\dots,n\},P(X\geq Y)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}P(Y\leq k)$$

$$Déterminons\ la\ fonction\ de\ répartition\ de\ la\ loi\ uniforme\ discrète\ \mathcal{U}_{(n)}:$$

$$U\sim\mathcal{U}_{\{1,2,\dots,n\}}\Rightarrow F_U(u)=P(U\leq u)=\sum_{u=-\infty}^{y}P(U=u)=\sum_{u=1}^{y}\frac{1}{n}=\frac{u}{n}$$

$$F_U(u)=P(U\leq u)=\begin{cases}0\,,si\ u<1\\\frac{u}{n},si\ u\in\ \{1,2,\dots,n\}\\1\,,si\ u\geq n\end{cases}$$

$$Par\ la\ suite,\forall k\in\{1,2,\dots,n\},P(X\geq Y)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}P(Y\leq k)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}F_Y(k)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}=\frac{1}{n^2}\underbrace{\sum_{k=1}^{n}k}_{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$\boxed{P(X\geq Y)=\frac{n+1}{2n}}$$

☑ $2^{ème}$ *méthode* :

$$Vérifions\ d'abord\ que\ ,P(X\geq Y)=P(Y\geq X):$$

$$\forall k\in\{1,2,\dots,n\},P(Y\geq X)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}P(X\leq k)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}F_X(k)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}=\frac{1}{n^2}\underbrace{\sum_{k=1}^{n}k}_{n(n+1)/2}=\frac{n+1}{2n}$$

BEN AHMED MOHSEN Téléphone: (+216) 97 619191 / 54 619191
omega.center.cp@gmail.com https://web.facebook.com/OMEGACENTER2014

$On\ obtient, donc, P(X \geq Y) = P(Y \geq X)$

$$Or\ \underbrace{P\big((X \geq Y) \cup (Y \geq X)\big)}_{1} = P(X \geq Y) + P(Y \geq X) - P\left(\underbrace{(X \geq Y) \cap (Y \geq X)}_{(X=Y)}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2P(X \geq Y) - P(X = Y) = 1 \Leftrightarrow P(X \geq Y) = \frac{1 + P(X = Y)}{2} = \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} = \frac{n+1}{2n}$$

$On\ retrouve, donc : \boxed{P(X \geq Y) = \frac{n+1}{2n}}$

3)

$$On\ a : \begin{cases} X(\Omega) = Y(\Omega) = \{1, 2, \dots, n\} \\ Soit, Z = X + Y \end{cases} \Rightarrow Z(\Omega) = \{2, 3, \dots, n, (n+1), \dots, 2n\}$$

$$\forall z \in Z(\Omega), P(Z = z) = P(X + Y = z) = \sum_{x=1}^{z-1} P(X = x, Y = z - x) = \sum_{x=1}^{z-1} P(X = x)P(Y = z - x)$$

$Or, P(X = x) \neq 0, si\ x \in \{1, 2, \dots, n\}\ et\ P(Y = z - x) \neq 0, si\ (z - x) \in \{1, 2, \dots, n\}$

$et\ (z - x) \in \{1, 2, \dots, n\} \Rightarrow (-x) \in \{(1 - z), (2 - z), \dots, (n - z)\}$

$\Rightarrow x \in \{(z - n), (z - (n - 1)), \dots, (z - 2), (z - 1)\}, et\ comme\ on\ a\ x \in \{1, 2, \dots, n\}, on\ distingue$

$alors\ deux\ cas :$

✓ $Premier\ cas :$

$z - n \leq 0 \Rightarrow z \leq n$

$$or \begin{cases} P(X = x) \neq 0, si\ x \in \{1, 2, \dots, n\} \\ P(Y = z - x) \neq 0, si\ x \in \{(z - n), (z - (n - 1)), \dots, (z - 2), (z - 1)\} \end{cases}$$

$\Rightarrow P(X = x)P(Y = z - x) \neq 0, si\ x \in \{1, 2, \dots, n\} \cap \{(z - n), (z - (n - 1)), \dots, (z - 2), (z - 1)\}$

$\Rightarrow P(X = x)P(Y = z - x) \neq 0, si\ x \in \{1, 2, \dots, (z - 1)\}$

$on\ effectuera\ alors\ une\ somme\ de\ 1$ à $(z - 1)$

$et\ z \in \{z \in Z(\Omega) | z \leq n\} = \{z \in \{2, 3, \dots, n, (n + 1), \dots, 2n\} | z \leq n\} = \{2, 3, \dots, n\}$

$$\forall z \in Z(\Omega), P(Z = z) = P(X + Y = z) = \sum_{x=1}^{z-1} \underbrace{P(X = x)P(Y = z - x)}_{\frac{1}{n^2}} = \frac{\big((z - 1) - 1\big) + 1}{n^2} = \frac{z - 1}{n^2}$$

✓ $Deuxième\ cas :$

$$z - n > 0 \Rightarrow z > n \Rightarrow \begin{cases} z - 1 \geq n \\ z - n \geq 1 \end{cases}$$

$$or \begin{cases} P(X = x) \neq 0, si\ x \in \{1, 2, \dots, n\} \\ P(Y = z - x) \neq 0, si\ x \in \{(z - n), (z - (n - 1)), \dots, (z - 2), (z - 1)\} \end{cases}$$

$\Rightarrow P(X = x)P(Y = z - x) \neq 0, si\ x \in \{1, 2, \dots, n\} \cap \{(z - n), (z - (n - 1)), \dots, (z - 2), (z - 1)\}$

Adresse : 2, Rue Ibn Arafa, av de l'environnement Manouba Centre, Manouba

$\Rightarrow P(X=x)P(Y=z-x) \neq 0 \, , si \; x \in \{(z-n), (z-(n-1)), \dots, n\}$

on effectuera alors une somme de $(z-n)$ à n

$et \; z \in \{z \in Z(\Omega) | z > n\} = \{z \in \{2,3,\dots,n,(n+1),\dots,2n\} | z > n\}$

$z \in \{z \in \{2,3,\dots,n,(n+1),\dots,2n\} | z \geq n+1\} = \{(n+1),(n+2)\dots,2n\}$

$$\forall z \in Z(\Omega), P(Z=z) = P(X+Y=z) = \sum_{x=z-n}^{n} \underbrace{P(X=x)P(Y=z-x)}_{\frac{1}{n^2}}$$

$$= \frac{(n-(z-n))+1}{n^2} = \frac{2n-z+1}{n^2}$$

$$D'où, \boxed{P(Z=z) = P(X+Y=z) = \begin{cases} \dfrac{z-1}{n^2}, si \; z \in \{2,3,\dots,n\} \\ \dfrac{2n-z+1}{n^2}, si \; z \in \{(n+1),(n+2)\dots,2n\} \\ 0, si \; non \end{cases}}$$

Exercice 21 (Somme de deux v.a. indépendantes- Cas de la loi géométrique) :

<u>Énoncé</u>

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes.

On suppose que celles-ci suivent une même loi géométrique de paramètre p.

1) *Déterminer la loi de* $Z = X+Y$.
2) *Calculer de deux manières* $E(Z)$

<u>Corrigé</u>

1)

$$X, Y \sim \mathcal{G}(p) \Rightarrow P(X=t) = P(Y=t) = \begin{cases} (1-p)^{t-1}p, si \; t \in \mathbb{N}^* \\ 0, si \; non \end{cases} ; X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^* \; et \; p \in \,]0,1[$$

Or X et Y deux v.a. indépendantes:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{N}^{*2}, P(X=x, Y=y) = P(X=x)P(Y=y) = [(1-p)^{x-1}p][(1-p)^{y-1}p]$$

$$\forall (x,y) \in \mathbb{N}^{*2} P(X=x, Y=y) = p^2(1-p)^{x+y-2}$$

On se propose de déterminer la loi de la v.a. $Z = X+Y$.

$$\begin{cases} X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^* \\ Z = X+Y \end{cases} \Rightarrow Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$$

$$\forall z \in \mathbb{N}^*, P(Z=z) = P(X+Y=z) = \sum_{x=1}^{z-1} P(X=x, Y=z-x)$$

$\forall(x,y)\in\mathbb{N}^{*2}P(X=x\,,Y=y)=p^2(1-p)^{x+y-2}\Rightarrow P(X=x\,,Y=z-x)=p^2(1-p)^{z-2}$

$$\forall z\in\mathbb{N}^*\,,P(Z=z)=\sum_{x=1}^{z-1}p^2(1-p)^{z-2}=(z-1)p^2(1-p)^{z-2}$$

$$\boxed{P(Z=z)=\begin{cases}(z-1)p^2(1-p)^{z-2}\,,si\ z\in\mathbb{N}^*\\ 0\,,si\ non\end{cases}}$$

2)

☞ $1^{\text{ère}}$ *Manière* :

$E(Z)=E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

$D'autre\ part, X,Y\sim\mathcal{G}\,(p)\Rightarrow E(X)=E(Y)=\dfrac{1}{p}$. D'où $\boxed{E(Z)=\dfrac{2}{p}}$

☞ $2^{\text{ème}}$ *Manière* :

$M_Z(t)=M_{X+Y}(t)=M_X(t)M_Y(t)$, *puisque* X *et* Y *deux v.a. indépendantes.*

$$D'autre\ part, X,Y\sim\mathcal{G}\,(p)\Rightarrow M_X(t)=M_Y(t)=\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\Rightarrow M_Z(t)=\left(\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\right)^2$$

$On\ a$: $E(Z)=M_Z'(0)$

$$Calculons\ d'abord\ M_Z'(t)=\frac{dM_Z(t)}{dt}=\left[\left(\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\right)^2\right]'=2\left(\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\right)'\left(\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\right)$$

$$M_Z'(t)=2p^2\left(\frac{e^t(1-(1-p)e^t)+e^t((1-p)e^t)}{(1-(1-p)e^t)^2}\right)\left(\frac{e^t}{1-(1-p)e^t}\right)$$

$$M_Z'(t)=\left(1-(1-p)e^t+e^t((1-p))\right)\left(\frac{2p^2e^{2t}}{(1-(1-p)e^t)^3}\right)=\frac{2p^2e^{2t}}{(1-(1-p)e^t)^3}$$

$$E(Z)=M_Z'(0)=\frac{2p^2e^0}{(1-(1-p)e^0)^3}=\frac{2p^2}{p^3}=\frac{2}{p}\ .On\ retrouve\ \boxed{E(Z)=\frac{2}{p}}$$

Exercice 22 (Fonction génératrice des probabilités-Cas de la loi géométrique) :

Énoncé

Pour une variable aléatoire discrète, X, *la fonction* $g_X(t)=E(t^X)=\sum_{x\in X(\Omega)}t^xP(X=x)$

est appelée la fonction génératrice des probabilités.

Supposer que x *soit le nombre de répétitions d'une expérience jusqu'à ce que le premier succès ait lieu avec une probabilité de succès égale à* π *. La loi de probabilité de* X *est la*

$distribution\ géométrique:\ P(X=x)=\begin{cases}(1-\pi)^{x-1}\pi\ ,si\ x\in\mathbb{N}^*\\0\ ,si\ non\end{cases}\ ;\ \pi\in\,]0,1[$

1) *Déterminer la fonction génératrice des probabilités de la variable aléatoire X.*
2) *Retrouver $E(X)$ et $V(X)$*

Corrigé

1)

$$g_X(t)=E(t^X)=\sum_{x\in X(\Omega)}t^xP(X=x)=\sum_{x=1}^{+\infty}t^x(1-\pi)^{x-1}\pi=\sum_{x=1}^{+\infty}t^x(1-\pi)^x\underbrace{(1-\pi)^{-1}\pi}_{\pi/1-\pi}$$

$$g_X(t)=\frac{\pi}{1-\pi}\sum_{x=1}^{+\infty}t^x(1-\pi)^x=\frac{\pi}{1-\pi}\sum_{x=1}^{+\infty}[t(1-\pi)]^x$$

$$Or\ \begin{cases}t\in\,]-1,1[\\ \quad et\\(1-\pi)\in\,]0,1[\end{cases}\Rightarrow-(1-\pi)\le t(1-\pi)\le(1-\pi)\ ,avec\ 1-\pi<1\ et\ -(1-\pi)>-1$$

$$\Rightarrow -1\le t(1-\pi)\le 1$$

$$On\ obtient\ ,donc:\ \sum_{x=1}^{+\infty}[t(1-\pi)]^x=\frac{[t(1-\pi)]^1}{1-t(1-\pi)}=\frac{t(1-\pi)}{1-t(1-\pi)}$$

$$Ainsi,g_X(t)=\frac{\pi}{1-\pi}\sum_{x=1}^{+\infty}[t(1-\pi)]^x=\left(\frac{\pi}{1-\pi}\right)\left(\frac{t(1-\pi)}{1-t(1-\pi)}\right)$$

$$D'où\ \boxed{X\rightsquigarrow\mathcal{G}(\pi)\Rightarrow g_X(t)=E(t^X)=\frac{t\pi}{1-t(1-\pi)}}$$

2)

$\cdot\ \mu_{[1]}(X)=E\left(\frac{X!}{(X-1)!}\right)=E(X)=g'_X(1).Or\ g'_X(t)=[t\pi/1-t(1-\pi)]'=\pi/\big(1-t(1-\pi)\big)^2$

$\Rightarrow g'_X(1)=\pi/\big(1-(1-\pi)\big)^2=1/\pi\ .\ D'où\ \boxed{E(X)=1/\pi}$

$\cdot\ \mu_{[2]}(X)=E\left(\frac{X!}{(X-2)!}\right)=E\big(X(X-1)\big)=g''_X(1)$

$$Or\ g''_X(t)=g_X^{(2)}(t)=\frac{d^2g_X(t)}{dt^2}=\left[\frac{\pi}{\big(1-t(1-\pi)\big)^2}\right]'=\frac{-2\pi\big(-(1-\pi)\big)}{\big(1-t(1-\pi)\big)^3}=\frac{2\pi(1-\pi)}{\big(1-t(1-\pi)\big)^3}$$

$$\Rightarrow g''_X(1)=\frac{2\pi(1-\pi)}{\big(1-(1-\pi)\big)^3}=\frac{2\pi(1-\pi)}{\pi^3}=\frac{2(1-\pi)}{\pi^2}$$

$$On\ a:\ E\big(X(X-1)\big)=\frac{2(1-\pi)}{\pi^2}\Leftrightarrow E(X^2-X)=\frac{2(1-\pi)}{\pi^2}\Leftrightarrow E(X^2)-E(X)=\frac{2(1-\pi)}{\pi^2}$$

$$\Leftrightarrow E(X^2)=\frac{2(1-\pi)}{\pi^2}+E(X)=\frac{2(1-\pi)}{\pi^2}+\frac{1}{\pi}=\frac{2-2\pi}{\pi^2}+\frac{\pi}{\pi^2}=\frac{2-\pi}{\pi^2}$$

Ce qui conduit à : $V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 = \frac{2-\pi}{\pi^2} - \frac{1}{\pi^2}$. D'où $\boxed{V(X) = \frac{1-\pi}{\pi^2}}$

Exercice 23 (Espérance d'une variable aléatoire discrète positive) :

Énoncé

Soit X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\{0, 1, 2, \dots, n\}, n \in \mathbb{N}^*$.

Établir que $E(X) = \sum_{x=0}^{n-1} P(X > x)$

Corrigé

Par définition, on a : $E(X) = \sum_{x=0}^{n} xP(X = x) = \underbrace{0 \times P(X = x)}_{0} + \sum_{x=1}^{n} xP(X = x) = \sum_{x=1}^{n} xP(X = x)$

Or $P(X = x) = F_X(x) - F_X(x-1) = P(X \leq x) - P(X \leq x-1)$

$P(X = x) = \left(1 - P(X > x)\right) - \left(1 - P(X > x-1)\right) = P(X > x-1) - P(X > x)$

Par la suite $E(X) = \sum_{x=1}^{n} x[P(X > x-1) - P(X > x)] = \sum_{x=1}^{n} xP(X > x-1) - \sum_{x=1}^{n} xP(X > x)$

Par ré-indexation, on obtient : $\sum_{x=1}^{n} xP(X > x-1) = \sum_{t=0}^{n-1} (t+1)P(X > t) = \sum_{x=0}^{n-1} (x+1)P(X > x)$

Ainsi, $E(X) = \sum_{x=0}^{n-1} (x+1)P(X > x) - \underbrace{\sum_{x=1}^{n} xP(X > x)}_{\sum_{x=0}^{n} xP(X>x)} = \sum_{x=0}^{n-1} (x+1)P(X > x) - \sum_{x=0}^{n} xP(X > x)$

Et comme on a : $X(\Omega) = \{0, 1, 2, \dots, n\} \Rightarrow P(X = x) = 0, \forall x \notin \{0, 1, 2, \dots, n\}$,

en particulier $P(X > n) = 0 \Rightarrow \sum_{x=0}^{n} xP(X > x) = \underbrace{nP(X > n)}_{0} + \sum_{x=0}^{n-1} xP(X > x) = \sum_{x=0}^{n-1} xP(X > x)$

en effet, $E(X) = \sum_{x=0}^{n-1} (x+1)P(X > x) - \sum_{x=0}^{n-1} xP(X > x) = \sum_{x=0}^{n-1} [(x+1)P(X > x) - xP(X > x)]$

D'où, $\boxed{E(X) = \sum_{x=0}^{n-1} P(X > x)}$

Exercice 24 *(Couple de v.a. de Poisson et de Bernoulli-Distributions conditionnelles-Fonction génératrice des moments) :*

Énoncé

Soient X et Y deux v.a. indépendantes : X suivant la loi de Bernoulli de paramètre p et Y suivant la loi de Poisson de paramètre λ.

Soit Z la variable telle que : $Z = \begin{cases} 0 \text{ , si } X = 0 \\ Y \text{ , si } X = 1 \end{cases}$

1) ***Donner la loi de probabilité de la v.a. Z***
2) ***Déterminer sa fonction génératrice***
3) ***Calculer : $E(Z)$ et $V(Z)$***
4) ***Calculer la probabilité conditionnelle , $P(X = 1|Z = 0)$***

Corrigé

1)

$\cdot\ X \leadsto \mathcal{B}(1,p) \Leftrightarrow P(X = x) = \begin{cases} p^x(1-p)^{1-x} \text{ , si } x \in X(\Omega) = \{0,1\} \\ 0 \text{ , si non} \end{cases} ; p \in [0,1]$

$\cdot\ Y \leadsto \mathcal{P}(\lambda) \Leftrightarrow P(Y = y) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^y}{y!} \text{ , si } y \in Y(\Omega) = \mathbb{N} \\ 0 \text{ , si non} \end{cases} ; \lambda > 0$

$\cdot$ ***X et Y deux v.a. indépendantes*** $\Leftrightarrow \forall (x,y) \in \{0,1\} \times \mathbb{N} , P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$

$\cdot\ Z = \begin{cases} 0 \text{ , si } X = 0 \\ Y \text{ , si } X = 1 \end{cases} \Rightarrow Z(\Omega) = \mathbb{N}$

On a : $(X = 0)$***et***$(X = 1)$ ***forment une partition de*** $X(\Omega)$. ***D'après la formule de la probabilité totale :*** $\forall z \in \mathbb{N} , P(Z = z) = P\big((Z = z) \cap (X = 0)\big) + P\big((Z = z) \cap (X = 1)\big)$

$\cdot$ ***Si*** $z = 0$:

$$P(Z = 0) = P\big((Z = 0) \cap (X = 0)\big) + P\big((Z = 0) \cap (X = 1)\big) = P(X = 0) + P(Y = 0, X = 1)$$

$$= P(X = 0) + P(X = 1)P(Y = 0) = (1-p) + p\left(\frac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!}\right) = (1-p) + pe^{-\lambda}$$

$\cdot$ ***Si*** $z \in \mathbb{N}^* : P(Z = z) = \underbrace{P\big((Z = z) \cap (X = 0)\big)}_{0} + P\big((Z = z) \cap (X = 1)\big)$, ***or*** $(Z \neq 0) \cap (X = 0) = \emptyset$

donc, $\forall z \in \mathbb{N}^* : P(Z = z) = P\big((Y = z) \cap (X = 1)\big) = P(X = 1)P(Y = z) = p\left(\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^z}{z!}\right)$

$\cdot$ ***Vérifie que*** $P(Z = z)$ ***est une loi de probabilité :***

$$\sum_{z=0}^{+\infty} P(Z = z) = P(Z = 0) + \sum_{z=1}^{+\infty} P(Z = z) = \left[(1-p) + pe^{-\lambda}\right] + \sum_{z=1}^{+\infty} p\left(\frac{e^{-\lambda}\lambda^z}{z!}\right)$$

$$= \left[(1-p)+pe^{-\lambda}\right] + pe^{-\lambda}\sum_{z=1}^{+\infty}\frac{\lambda^z}{z!} = \left[(1-p)+pe^{-\lambda}\right] + pe^{-\lambda}\left[\left(\sum_{z=0}^{+\infty}\frac{\lambda^z}{z!}\right) - \underbrace{\frac{\lambda^0}{0!}}_{1}\right]$$

$$= \left[(1-p)+pe^{-\lambda}\right] + pe^{-\lambda}\left[\left(\sum_{z=0}^{+\infty}\frac{\lambda^z}{z!}\right) - 1\right]$$

$$On\ a:\ \sum_{z=0}^{+\infty}\frac{\lambda^z}{z!} = e^{\lambda}\ , par\ la\ suite, \sum_{z=0}^{+\infty}P(Z=z) = \left[(1-p)+pe^{-\lambda}\right] + pe^{-\lambda}\left[e^{\lambda}-1\right]$$

$$\sum_{z=0}^{+\infty}P(Z=z) = (1-p)+pe^{-\lambda} + p\,\underbrace{e^{-\lambda}e^{\lambda}}_{1} - pe^{-\lambda} = 1-p+pe^{-\lambda}+p-pe^{-\lambda} = 1$$

$$\cdot\ D'autre\ part:\ P(Z=0)\in[0,1]\ , car, P(Z=0) = (1-p)+pe^{-\lambda}\ et\ \begin{cases}(1-p)\in[0,1]\\ p\in[0,1]\\ -\lambda<0 \Rightarrow e^{-\lambda}\in[0,1]\end{cases}$$

$$On\ a\ aussi:\ \forall z\in\mathbb{N}^*:\ P(Z=z) = p\left(\frac{e^{-\lambda}\lambda^z}{z!}\right)\in[0,1]\ , car\ p\in[0,1]\ et\ \forall U \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda),$$

$$P(U=u) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^u}{u!}\in[0,1] \Rightarrow \left(\frac{e^{-\lambda}\lambda^z}{z!}\right)\in[0,1]$$

$$D'où\ \boxed{P(Z=z) = \begin{cases}(1-p)+pe^{-\lambda}\ , si\ z=0\\ p\left(\frac{e^{-\lambda}\lambda^z}{z!}\right)\ , si\ z\in\mathbb{N}^* \\ 0\ , si\ non\end{cases} ;\lambda>0\ et\ p\in[0,1]}$$

2)

$$M_Z(t) = E(e^{tZ}) = \sum_{z=0}^{+\infty}e^{tz}P(Z=z) = \underbrace{e^{t\times 0}}_{1}P(Z=0) + \sum_{z=1}^{+\infty}e^{tz}P(Z=z)$$

$$= (1-p)+pe^{-\lambda} + \sum_{z=1}^{+\infty}e^{tz}\left(p\left(\frac{e^{-\lambda}\lambda^z}{z!}\right)\right) = (1-p)+pe^{-\lambda}+pe^{-\lambda}\sum_{z=1}^{+\infty}\frac{e^{tz}\lambda^z}{z!}$$

$$= (1-p)+pe^{-\lambda}+pe^{-\lambda}\sum_{z=1}^{+\infty}\frac{(\lambda e^t)^z}{z!} = (1-p)+pe^{-\lambda}+pe^{-\lambda}\sum_{z=1}^{+\infty}\frac{\gamma^z}{z!}\ ; où\ \gamma=\lambda e^t$$

$$Or, \sum_{z=1}^{+\infty}\frac{\gamma^z}{z!} = \left(\sum_{z=0}^{+\infty}\frac{\gamma^z}{z!}\right) - \frac{\gamma^0}{0!} = e^{\gamma}-1 = e^{\lambda e^t}-1$$

$$Par\ la\ suite, M_Z(t) = (1-p)+pe^{-\lambda}+pe^{-\lambda}\left(e^{\lambda e^t}-1\right) = (1-p)+pe^{-\lambda}+pe^{-\lambda}e^{\lambda e^t}-pe^{-\lambda}$$

$$= (1-p)+pe^{(\lambda e^t-\lambda)}$$

$$D'où\ \boxed{M_Z(t) = (1-p)+pe^{\lambda(e^t-1)}}$$

3)

· $\boldsymbol{Calculons\ M'_Z(t) = \dfrac{dM_Z(t)}{dt} = \left[(1-p)+pe^{\lambda(e^t-1)}\right]' = p\lambda(e^t-1)'e^{\lambda(e^t-1)} = p\lambda e^t e^{\lambda(e^t-1)}}$

$\boldsymbol{M'_Z(t) = p\lambda e^{(t+\lambda e^t-\lambda)} \Rightarrow M'_Z(0) = p\lambda e^{(0+\lambda e^0-\lambda)} = p\lambda e^0 = p\lambda \Rightarrow \boxed{E(Z)=p\lambda}}$

· $\boldsymbol{Calculons\ M''_Z(t) = M_Z^{(2)}(t) = \dfrac{d^2M_Z(t)}{dt^2} = \left[p\lambda e^{(t+\lambda e^t-\lambda)}\right]' = p\lambda(t+\lambda e^t-\lambda)'e^{(t+\lambda e^t-\lambda)}}$

$\boldsymbol{M''_Z(t) = p\lambda(1+\lambda e^t)e^{(t+\lambda e^t-\lambda)}}$

$\boldsymbol{M''_Z(0) = p\lambda(1+\lambda e^0)e^{(0+\lambda e^0-\lambda)} = p\lambda(1+\lambda)e^0 = p\lambda(1+\lambda) \Rightarrow \boxed{E(Z^2)=p\lambda(1+\lambda)}}$

· $\boldsymbol{En\ effet, V(Z) = E(Z^2)-\left(E(Z)\right)^2 = p\lambda(1+\lambda)-(p\lambda)^2 = p\lambda[1+\lambda-p\lambda] = p\lambda[1+(1-p)\lambda]}$

$$\boldsymbol{D'où\ \boxed{V(Z)=p\lambda[1+(1-p)\lambda]}}$$

Exercice 25 *(Couples et Vecteurs aléatoires discrets-Distributions conditionnelles-Lois binomiales) :*

<u>*Énoncé*</u>

$\boldsymbol{Soit\ (X,Y)\ un\ vecteur\ aléatoire\ discret\ dans\ \mathbb{N}^2\ dont\ la\ loi\ conjointe\ est :}$

$\boldsymbol{P(X=x, Y=y) = C_n^x C_{n-x}^y p^x q^y (1-p-q)^{n-x-y}\ ; pour\ x,y \in \{0,1,\dots,n\}\ et\ x+y \le n}$

$\boldsymbol{avec\ (p,q) \in (]0,1[)^2}$

1) $\boldsymbol{Donner\ les\ lois\ de\ X\ et\ de\ Y.}$
2) $\boldsymbol{Déterminer\ les\ lois\ conditionnelles\ de\ Y\ sachant\ que\ [X=x]\ et\ de\ X\ sachant\ que\ [Y=y]}$
3) $\boldsymbol{Déduire\ E(X|Y=y)\ et\ E(Y|X=x).}$

<u>*Corrigé*</u>

1)

· $\boldsymbol{P(X=x) = \sum_{y\in Y(\Omega)} P(X=x,Y=y)}$

$\boldsymbol{or\ y\in\{0,1,\dots,n\}\ et\ x+y\le n \Rightarrow y\in\{0,1,\dots,n\}\ et\ y\le n-x}$

$\boldsymbol{\Rightarrow Y(\Omega)=\{0,1,\dots,n-x\}, avec\ x\in\{0,1,\dots,n\}}$

$\boldsymbol{Ainsi, P(X=x) = \sum_{y=0}^{n-x} C_n^x C_{n-x}^y p^x q^y (1-p-q)^{n-x-y} = C_n^x p^x \sum_{y=0}^{n-x} C_{n-x}^y q^y (1-p-q)^{n-x-y}}$

$\boldsymbol{Binôme\ de\ Newton : \forall n\in\mathbb{N}: (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k}b^k = \sum_{j=0}^{n} C_n^j a^j b^{n-j}}$

$$Il\ suffit\ de\ remarquer\ que : \sum_{y=0}^{n-x} C_{n-x}^{y} q^{y}(1-p-q)^{n-x-y} = \sum_{y=0}^{t} C_{t}^{y} a^{y} b^{t-y} = (a+b)^{t}$$

$avec : t = n - x, a = q\ et\ b = 1 - p - q$

$$donc, \sum_{y=0}^{n-x} C_{n-x}^{y} q^{y}(1-p-q)^{n-x-y} = (q+1-p-q)^{n-x} = (1-p)^{n-x}$$

$$D'où\ P(X=x) = C_{n}^{x} p^{x} \underbrace{\sum_{y=0}^{n-x} C_{n-x}^{y} q^{y}(1-p-q)^{n-x-y}}_{(1-p)^{n-x}} = C_{n}^{x} p^{x}(1-p)^{n-x}, pour\ x \in \{0,1,\dots,n\}$$

$\boxed{X \backsim \mathcal{B}(n,p)}$

$$\cdot\ P(Y=y) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X=x, Y=y)$$

$or\ x \in \{0,1,\dots,n\}\ et\ x+y \leq n \Rightarrow x \in \{0,1,\dots,n\}\ et\ x \leq n-y$

$\Rightarrow X(\Omega) = \{0,1,\dots,n-y\}, avec\ y \in \{0,1,\dots,n\}$

$$Ainsi, P(Y=y) = \sum_{x=0}^{n-y} C_{n}^{x} C_{n-x}^{y} p^{x} q^{y}(1-p-q)^{n-x-y}$$

$$Or, C_{n}^{x} C_{n-x}^{y} = \left[\frac{n!}{x!\,(n-x)!}\right]\left[\frac{(n-x)!}{y!\,(n-x-y)!}\right] = \left[\frac{n!}{x!}\right]\left[\frac{1}{y!\,(n-x-y)!}\right] = \left[\frac{n!}{x!\,(n-y)!}\right]\left[\frac{(n-y)!}{y!\,(n-x-y)!}\right]$$

$$C_{n}^{x} C_{n-x}^{y} = \left[\frac{n!}{y!\,(n-y)!}\right]\left[\frac{(n-y)!}{x!\,(n-x-y)!}\right] \Rightarrow \boxed{C_{n}^{x} C_{n-x}^{y} = C_{n}^{y} C_{n-y}^{x}}$$

$$et\ P(Y=y) = \sum_{x=0}^{n-y} C_{n}^{y} C_{n-y}^{x} p^{x} q^{y}(1-p-q)^{n-x-y} = C_{n}^{y} q^{y} \sum_{x=0}^{n-y} C_{n-y}^{x} p^{x}(1-p-q)^{n-y-x}$$

$$Il\ suffit\ de\ remarquer\ que : \sum_{x=0}^{n-y} C_{n-y}^{x} p^{x}(1-p-q)^{n-y-x} = \sum_{x=0}^{t} C_{t}^{x} a^{y} b^{t-x} = (a+b)^{t}$$

$avec : t = n - y, a = p\ et\ b = 1 - p - q$

$$donc, \sum_{x=0}^{n-y} C_{n-y}^{x} p^{x}(1-p-q)^{n-y-x} = (p+1-p-q)^{n-y} = (1-q)^{n-y}$$

$$D'où\ P(Y=y) = C_{n}^{y} q^{y} \underbrace{\sum_{x=0}^{n-y} C_{n-y}^{x} p^{x}(1-p-q)^{n-y-x}}_{(1-q)^{n-y}} = C_{n}^{y} q^{y}(1-q)^{n-y}, pour\ y \in \{0,1,\dots,n\}$$

$\boxed{Y \backsim \mathcal{B}(n,q)}$

2)

· $\boldsymbol{Loi\ conditionnelle(Y|X=x)\ ;\ Y(\Omega)=\{0,1,\dots,n-x\},avec\ x\in\{0,1,\dots,n\}}$:

$$P(Y=y|X=x)=\frac{P(X=x\,,Y=y)}{\underbrace{P(X=x)}_{\neq 0}}=\frac{C_n^xC_{n-x}^yp^xq^y(1-p-q)^{n-x-y}}{C_n^xp^x(1-p)^{n-x}}=\frac{C_{n-x}^yq^y(1-p-q)^{n-x-y}}{(1-p)^{n-x}}$$

$$P(Y=y|X=x)=\frac{C_{n-x}^yq^y(1-p-q)^{n-x-y}}{(1-p)^{n-x-y}(1-p)^y}=C_{n-x}^y\frac{q^y}{(1-p)^y}\frac{(1-p-q)^{n-x-y}}{(1-p)^{n-x-y}}$$

$$P(Y=y|X=x)=C_{n-x}^y\left(\frac{q}{1-p}\right)^y\left(\frac{1-p-q}{1-p}\right)^{n-x-y}=C_{n-x}^y\left(\frac{q}{1-p}\right)^y\left(1-\frac{q}{1-p}\right)^{n-x-y}$$

$$D'\text{où}\ \boxed{(Y|X=x)\backsim\mathcal{B}\left((n-x),\left(\frac{q}{1-p}\right)\right)}$$

· $\boldsymbol{Loi\ conditionnelle(X|Y=y)\ ;\ X(\Omega)=\{0,1,\dots,n-y\},avec\ y\in\{0,1,\dots,n\}}$:

$$P(X=x|Y=y)=\frac{P(X=x\,,Y=y)}{\underbrace{P(Y=y)}_{\neq 0}}=\frac{\overbrace{C_n^xC_{n-x}^y}^{C_n^yC_{n-y}^x}p^xq^y(1-p-q)^{n-x-y}}{C_n^yq^y(1-q)^{n-y}}=\frac{C_n^yC_{n-y}^xp^xq^y(1-p-q)^{n-x-y}}{C_n^yq^y(1-q)^{n-y}}$$

$$P(X=x|Y=y)=\frac{C_{n-y}^xp^x(1-p-q)^{n-x-y}}{(1-q)^{n-y}}=\frac{C_{n-y}^xp^x(1-p-q)^{n-x-y}}{(1-q)^{n-x-y}(1-q)^x}$$

$$P(X=x|Y=y)=C_{n-y}^x\left(\frac{p}{1-q}\right)^x\left(\frac{1-p-q}{1-q}\right)^{n-x-y}=C_{n-y}^x\left(\frac{p}{1-q}\right)^x\left(1-\frac{p}{1-q}\right)^{n-y-x}$$

$$D'\text{où}\ \boxed{(X|Y=y)\backsim\mathcal{B}\left((n-y),\frac{p}{1-q}\right)}$$

3)

$$\cdot\ (Y|X=x)\backsim\mathcal{B}\left((n-x),\left(\frac{q}{1-p}\right)\right)\Rightarrow\boxed{E(Y|X=x)=\frac{q(n-x)}{1-p}}$$

$$\cdot\ (X|Y=y)\backsim\mathcal{B}\left((n-y),\frac{p}{1-q}\right)\Rightarrow\boxed{E(X|Y=y)=\frac{p(n-y)}{1-q}}$$

Exercice 26 *(Couples et Vecteurs aléatoires de Poisson-Distributions conditionnelles-Lois binomiales) :*

Énoncé

Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes, où $X_1\backsim\mathcal{P}(\lambda_1)$ et $X_2\backsim\mathcal{P}(\lambda_2)$.

Posons $Z=X_1+X_2$.

1) *Trouver la loi du couple (X_2,Z).*

2) *Déterminer la loi conditionnelle de X_2 sachant que $[Z = z]$.*
En déduire $E(X_2|Z = z)$

Corrigé

1) $On\ a\ X_1(\Omega) = X_2(\Omega) = \mathbb{N}, or\ Z = X_1 + X_2\ , donc\ (X_2, Z)(\Omega) = \{(x_2, z) \in \mathbb{N}^2 | x_2 \leq z\}$

$$\forall (x_2, z) \in (X_2, Z)(\Omega):\ P(X_2 = x_2\ , Z = z) = P\big((X_2 = x_2) \cap (X_1 + X_2 = z)\big)$$
$$= P\big((X_2 = x_2) \cap (X_1 = z - x_2)\big)$$

$X_1\ et\ X_2\ deux v.a. indépendantes \Rightarrow P\big((X_2 = x_2) \cap (X_1 = z - x_2)\big) = P(X_2 = x_2)P(X_1 = z - x_2)$

$$P(X_2 = x_2\ , Z = z) = P(X_2 = x_2)P(X_1 = z - x_2) = \left(\frac{e^{-\lambda_2}\,{\lambda_2}^{x_2}}{x_2!}\right)\left(\frac{e^{-\lambda_1}\,{\lambda_1}^{(z-x_2)}}{(z - x_2)!}\right)$$

$$D'où \boxed{\forall (x_2, z) \in (X_2, Z)(\Omega):\ P(X_2 = x_2\ , Z = z) = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\,{\lambda_1}^{(z-x_2)}{\lambda_2}^{x_2}}{x_2!\,(z - x_2)!}}$$

2) $$\begin{cases} X_1 \backsim \mathcal{P}(\lambda_1)\ et\ X_2 \backsim \mathcal{P}(\lambda_2) \\ X_1\ et\ X_2\ deux v.a. indépendantes \end{cases} \Rightarrow Z = X_1 + X_2 \backsim \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$$

$$P(X_2 = x_2 | Z = z) = \frac{P(X_2 = x_2\ , Z = z)}{P(Z = z)} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\,{\lambda_1}^{(z-x_2)}{\lambda_2}^{x_2}/x_2!\,(z - x_2)!}{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\,(\lambda_1 + \lambda_2)^z/z!}$$

$$= \left(\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\,{\lambda_1}^{(z-x_2)}{\lambda_2}^{x_2}}{x_2!\,(z - x_2)!}\right)\left(\frac{z!}{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\,(\lambda_1 + \lambda_2)^z}\right)$$

$$= \underbrace{\left(\frac{z!}{x_2!\,(z - x_2)!}\right)}_{C_z^{x_2}}\left(\frac{{\lambda_1}^{(z-x_2)}{\lambda_2}^{x_2}}{(\lambda_1 + \lambda_2)^z}\right) = C_z^{x_2}\left(\frac{{\lambda_1}^{(z-x_2)}{\lambda_2}^{x_2}}{(\lambda_1 + \lambda_2)^{(z-x_2)}(\lambda_1 + \lambda_2)^{x_2}}\right)$$

$$= C_z^{x_2}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^{(z-x_2)}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^{x_2} = C_z^{x_2}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^{x_2}\left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^{(z-x_2)}$$

$$D'où\ la\ loi\ conditionnelle\ de\ X_2\ sachant\ que\ [Z = z]: \boxed{(X_2|Z = z) \backsim \mathcal{B}\left(z, \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)}$$

$$et\ \boxed{E(X_2|Z = z) = \frac{\lambda_2 z}{\lambda_1 + \lambda_2}}$$

Exercice 27 *(Cas particulier de la formule de Wald-Somme d'un nombre aléatoire de termes aléatoires) :*

Énoncé

Un restaurant universitaire compte deux caisses notées A et B. On suppose que le nombre N d'étudiants par heure suit une loi de Poisson de paramètre λ.

De plus, avec une probabilité p, les étudiants préfèrent passer par A.

Notons X le nombre d'étudiants par heure passant par à la caisse A.

1) *Que vaut $P(N=n)$?*
2) *Après avoir calculer $P(X=k|N=n)$, pour $k\leq n$, donner la loi de X.*
3) *En déduire l'espérance et la variance de X.*

Corrigé

1) $\forall n\in\mathbb{N}, P(N=n)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$ *puisque* $N\rightsquigarrow\mathcal{P}(\lambda)$
2) · *Notons X_i la v.a. prenant pour valeur le choix du ième client,*

$$X_i=\begin{cases}1 \text{, si l'étudiant choisit la caisse } A\\ 0 \text{, si non}\end{cases}\Rightarrow X_i\rightsquigarrow\mathcal{B}(1,p)$$

Les $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ *étant une suite de v.a indépendantes de* $\mathcal{B}(1,p)\Rightarrow X=\sum_{i=1}^{n}X_i\rightsquigarrow\mathcal{B}(n,p)$

On en déduit pour $k\leq n$, $P(X=k|N=n)=C_n^kp^k(1-p)^{n-k}$

· $\{(N=n)_{n\in\mathbb{N}}\}$ *est un un système complet d'évènements, d'après la formule de probabilité totale, on a :*

$$P(X=k)=\sum_{n=0}^{+\infty}P[(X=k)\cap(N=n)]=\sum_{n=0}^{+\infty}P(N=n)P\big[\big((X=k)\big|(N=n)\big)\big]$$

$$P(X=k)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}\right)C_n^kp^k(1-p)^{n-k}=e^{-\lambda}p^k\sum_{n\geq k}\left(\frac{\lambda^n}{n!}\right)\left(\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\right)(1-p)^{n-k}$$

$$P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}p^k}{k!}\sum_{n=k}^{+\infty}\left(\frac{\lambda^n(1-p)^{n-k}}{(n-k)!}\right)=\frac{e^{-\lambda}p^k}{k!}\sum_{n=k}^{+\infty}\left(\frac{\lambda^k\lambda^{n-k}(1-p)^{n-k}}{(n-k)!}\right)$$

$$P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}(\lambda p)^k}{k!}\sum_{n=k}^{+\infty}\left(\frac{\big(\lambda(1-p)\big)^{n-k}}{(n-k)!}\right)$$

Calculons, $\sum_{n=k}^{+\infty}\left(\frac{\big(\lambda(1-p)\big)^{n-k}}{(n-k)!}\right)$. *Soit* $\beta=\lambda(1-p)$ *et* $t=n-k$, *ce qui donne :*

$$\sum_{n=k}^{+\infty}\left(\frac{\big(\lambda(1-p)\big)^{n-k}}{(n-k)!}\right)=\sum_{t=0}^{+\infty}\left(\frac{\beta^t}{t!}\right)=e^{\beta}=e^{\lambda(1-p)}=e^{\lambda}e^{-\lambda p}\;;\left(\text{Série exponentielle : } e^x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}\right)$$

Par la suite $P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}(\lambda p)^ke^{\lambda}e^{-\lambda p}}{k!}=\frac{e^{-\lambda p}(\lambda p)^k}{k!}$

D'où $\boxed{X\rightsquigarrow\mathcal{P}(\lambda p)}$

3)

$X\rightsquigarrow\mathcal{P}(\lambda p)\Rightarrow\boxed{E(X)=V(X)=\lambda p}$

BEN AHMED MOHSEN Téléphone: (+216) 97 619191 / 54 619191
omega.center.cp@gmail.com https://web.facebook.com/OMEGACENTER2014

Exercice 28 (Somme de deux v.a. indépendantes-Cas de la loi de Poisson-Distributions conditionnelles-Espérance conditionnelle) :

Énoncé

Soient U, V et W trois variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, telles que U et W suivent une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, et V suit une loi de Poisson de paramètre $\mu > 0$. On pose $X = U + V$ et $Y = V + W$.

1) *Déterminer les lois de X et de Y.*
2)
   a) *Montrer que $Cov(X, Y)$ existe et la calculer.*
   b) *En déduire le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y.*
3) *Soit n un entier naturel.*
   a) *Déterminer la loi conditionnelle de V sachant $[X = n]$.*
   b) *En déduire que l'espérance conditionnelle de Y sachant $[X = n]$ est égale à $\lambda + \dfrac{n\mu}{\lambda + \mu}$.*
   c) *Montrer que cette espérance est supérieure ou égale à n si et seulement si on a : $E(X) \geq n$.*

Corrigé

1) *On a $U(\Omega) = V(\Omega) = \mathbb{N}$, or $X = U + V$, donc $X(\Omega) = \mathbb{N}$*

$$\forall x \in \mathbb{N}, P(X = x) = P(U + V = x) = \sum_{k=0}^{x} P(U = k, V = x - k) = \sum_{k=0}^{x} P(U = k)P(V = x - k)$$

$$= \sum_{k=0}^{x} \left(\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}\right)\left(\frac{e^{-\mu}\mu^{(x-k)}}{(x-k)!}\right) = \frac{e^{-\lambda}e^{-\mu}}{x!}\sum_{k=0}^{x} x!\left(\frac{\lambda^k}{k!}\right)\left(\frac{\mu^{(x-k)}}{(x-k)!}\right)$$

$$\forall x \in \mathbb{N}, P(X = x) = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{x!}\sum_{k=0}^{x}\left(\frac{x!}{k!\,(x-k)!}\right)\left(\lambda^k\mu^{(x-k)}\right) = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{x!}\sum_{k=0}^{x} C_x^k\lambda^k\mu^{(x-k)}$$

Or d'après le binôme de Newton : $\displaystyle\sum_{k=0}^{x} C_x^k\lambda^k\mu^{(x-k)} = (\lambda + \mu)^x$

$$P(X = x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-(\lambda+\mu)}\,(\lambda+\mu)^x}{x!}, & si\ x \in \mathbb{N} \\ 0, & si\ non \end{cases} \quad et \ \boxed{X \leadsto \mathcal{P}(\lambda + \mu)}$$

De la même manière on démontre : $\begin{cases} V \leadsto \mathcal{P}(\mu)\ et\ W \leadsto \mathcal{P}(\lambda) \\ Y = V + W \\ V\ et\ W\ deux\ v.a\ indépendantes \end{cases} \Longrightarrow \boxed{Y \leadsto \mathcal{P}(\lambda + \mu)}$

2)
   a) $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(XY) - (\lambda + \mu)^2$

Or $E(XY) = E\big((U + V)(V + W)\big) = E(UV + UW + V^2 + VW) = E(UV) + E(UW) + E(V^2) + E(VW)$

Adresse : 2, Rue Ibn Arafa, av de l'environnement Manouba Centre, Manouba

$$E(XY)=E(UV)+E(UW)+E(VW)+\underbrace{Var(V)}_{\mu}+\Big[\underbrace{E(V)}_{\mu}\Big]^2=E(UV)+E(UW)+E(VW)+\mu+\mu^2$$

$Etant\ donné\ U,V\ et\ W\ trois\ variables\ aléatoires\ indépendantes\ ,donc:$

$E(UV)=E(U)E(V)=\lambda\mu\ ;\ E(UW)=E(U)E(W)=\lambda^2\ et\ E(VW)=E(V)E(W)=\lambda\mu$

$D'où\ l'existence\ de\ Cov(X,Y):$

$$Cov(X,Y)=E(XY)-(\lambda+\mu)^2=\lambda\mu+\lambda^2+\lambda\mu+\mu+\mu^2-(\lambda+\mu)^2$$
$$=2\lambda\mu+\lambda^2+\mu+\mu^2-\lambda^2-2\lambda\mu-\mu^2$$

$Finalement,\ \boxed{Cov(X,Y)=\mu}$

b)

$$\rho_{X,Y}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}=\frac{\mu}{\sqrt{(\lambda+\mu)^2}}\Longrightarrow\boxed{\rho_{X,Y}=\frac{\mu}{\lambda+\mu}}$$

3)

a)

$[X=n\,],X=U+V\,,donc\ U(\Omega)=\mathbb{N}\,,donc\ les\ valeurs\ prises\ par\ la\ v.a.V\ seront:\ \{0,1,\dots,n\}.$

$$P(V=v|X=n)=\frac{P(V=v\,,X=n)}{P(X=n)}=\frac{P(U+V=n\,,V=v)}{P(X=n)}=\frac{P(U=n-v\,,V=v)}{P(X=n)}$$

$$=\frac{P(U=n-v)P(V=v)}{P(X=n)}=\frac{\left(\frac{e^{-\lambda}\,\lambda^{(n-v)}}{(n-v)!}\right)\left(\frac{e^{-\mu}\,\mu^{v}}{v!}\right)}{\frac{e^{-(\lambda+\mu)}\,(\lambda+\mu)^n}{n!}}$$

$$=\left(\frac{n!}{v!\,(n-v)!}\right)\left(\frac{e^{-\lambda}\,e^{-\mu}\,\lambda^{(n-v)}\mu^v}{e^{-(\lambda+\mu)}\,(\lambda+\mu)^n}\right)=C_n^v\left(\frac{e^{-(\lambda+\mu)}\,\lambda^{(n-v)}\mu^v}{e^{-(\lambda+\mu)}\,(\lambda+\mu)^n}\right)=C_n^v\left(\frac{\lambda^{(n-v)}\mu^v}{(\lambda+\mu)^n}\right)$$

$$=C_n^v\left(\frac{\lambda^{(n-v)}\mu^v}{(\lambda+\mu)^{(n-v)}(\lambda+\mu)^v}\right)=C_n^v\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^v\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{(n-v)}$$

$$P(V=v|X=n)=\begin{cases}C_n^v\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^v\left(1-\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{(n-v)} & ,si\ v\in\{0,1,\dots,n\}\\ 0\ ,si\ non\end{cases}\quad et\ \boxed{(V|X=n)\backsim\mathcal{B}\left(n,\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)}$$

b)

$$(V|X=n)\backsim\mathcal{B}\left(n,\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)\Longrightarrow E(V|X=n)=\frac{n\mu}{\lambda+\mu}$$

$On\ a:E(Y|X=n)=E(V+W|X=n)=E(V|X=n)+E(W|X=n)=\dfrac{n\mu}{\lambda+\mu}+E(W|X=n)$

$Or\ U,V\ et\ W\ trois\ v.a.indépendantes\Longrightarrow U+\ V\ et\ W\ sont\ indépendantes$

$\Longrightarrow X\ et\ W\ sont\ indépendantes\Longrightarrow E(W|X=n)=E(W)=\lambda$

$D'o$ù $\boxed{E(Y|X=n)=\lambda+\frac{n\mu}{\lambda+\mu}}$

c)

$$E(Y|X=n)\geq n \Leftrightarrow \lambda+\frac{n\mu}{\lambda+\mu}\geq n \Leftrightarrow \lambda^2+\lambda\mu+n\mu\geq n\lambda+n\mu \Leftrightarrow \lambda^2+\lambda\mu\geq n\lambda \Leftrightarrow \lambda+\mu\geq n$$

$\boxed{E(Y|X=n)\geq n \Leftrightarrow \lambda+\mu\geq n}$

Axe ④ : Table des matières

Variable aléatoire discrète 192

- *Définition :*
- *Loi d'une variable aléatoire discrète :*
- *Fonction de répartition :*
- *Propriétés de la fonction de répartition :*
- *Changement de variables :*
- *Les caractéristiques de tendance centrale :*
  - a. *La médiane :*
  - b. *Les quartiles :*
  - c. *Les déciles :*
  - d. *Les centiles :*
  - e. *Le mode :*
- *Espérance mathématique :*
- *Espérance d'une fonction d'une v.a. :*
- *Propriétés de l'espérance mathématique :*
  - h. *Positivité de l'espérance :*
  - j. *Inégalité de Jensen :*
- *Variance :*
- *Propriétés de la variance :*
- *Les moments non-centrés d'ordre r :*
- *Les moments centrés d'ordre r :*
- *Relations entre moments non-centrés et moments centrés :*
  - a. *Moments centrés en fonction des moments non-centrés :*
  - b. *Moments non–centrés en fonction des moments centrés :*
- *Les moments factoriels :*
- *Le coefficient d'asymétrie (skewness):*
- *Le coefficient d'aplatissement (kurtosis):*
- *Fonction génératrice des moments (ou transformée de Laplace) :*
- *Propriétés de la fonction génératrice des moments :*
- *Fonction génératrice des probabilités :*

Lois de probabilité discrètes usuelles 199

- *Loi uniforme sur un ensemble fini d'entiers ou Loi uniforme discrète* $U_{(n)}$:
  - ☑ *Loi de probabilité :*
  - ☑ *Espérance mathématique :*
  - ☑ *Variance :*
  - ☑ *Médiane :*
  - ☑ *Coefficient d'asymétrie :*
  - ☑ *Coefficient d'aplatissement (kurtosis normalisé) :*
  - ☑ *Fonction génératrice des moments :*
- *Loi de Dirac* δ_{x_0} :
- *Loi de Bernoulli* $B\,(1,p\,)$:
  - ☑ *Loi de probabilité :*
  - ☑ *Fonction de répartition :*
  - ☑ *Espérance mathématique :*
  - ☑ *Variance :*
  - ☑ *Coefficient d'asymétrie :*
  - ☑ *Coefficient d'aplatissement (kurtosis normalisé) :*
  - ☑ *Fonction génératrice des moments :*
  - ☑ *Remarques :*
  - ☑ *Utilisation :*
- *Loi binomiale* $B\,(n,p\,)$:
  - ☑ *Loi de probabilité :*
  - ☑ *Fonction de répartition :*
  - ☑ *Espérance mathématique :*
  - ☑ *Variance :*
  - ☑ *Coefficient d'asymétrie :*
  - ☑ *Coefficient d'aplatissement (kurtosis normalisé) :*
  - ☑ *Fonction génératrice des moments :*
  - ☑ *Stabilité :*
  - ☑ *Remarques :*

☑ *Loi binomiale et variable fréquences :*

- ***Loi hypergéométrique*** $\mathrm{H}(\mathrm{N}, \mathrm{n}, \mathrm{p})$:
  ☑ *Loi de probabilité :*
  ☑ *Espérance mathématique :*
  ☑ *Variance :*
  ☑ *Limite d'une variable hypergéométrique :*
  ☑ *Remarques :*
- ***Loi géométrique*** $\mathrm{G}(\mathrm{p})$:
  ☑ *Loi de probabilité :*
  ☑ *Fonction de répartition :*
  ☑ *Espérance mathématique :*
  ☑ *Variance :*
  ☑ *Coefficient d'asymétrie :*
  ☑ *Coefficient d'aplatissement (kurtosis normalisé) :*
  ☑ *Fonction génératrice des moments :*
  ☑ *Propriété d'absence de mémoire :*
  ☑ *Durée de vie (ou loi géométrique à valeurs dans* $\mathbb{N}$ *) :*
- ***Loi de Pascal*** $\mathrm{P}(\mathrm{r}, \mathrm{p})$:
  ☑ *Loi de probabilité :*
  ☑ *Espérance mathématique :*
  ☑ *Variance :*
  ☑ *Coefficient d'asymétrie :*
  ☑ *Coefficient d'aplatissement (kurtosis normalisé) :*
  ☑ *Fonction génératrice des moments :*
  ☑ *Propriétés :*
- ***Loi Binomiale négative*** $\overline{\mathrm{B}}(\mathrm{r}, \mathrm{p})$:
  ☑ *Loi de probabilité :*
  ☑ *Espérance mathématique :*
  ☑ *Variance :*
  ☑ *Coefficient d'asymétrie :*
  ☑ *Coefficient d'aplatissement (kurtosis normalisé) :*
  ☑ *Fonction génératrice des moments :*
  ☑ *Propriétés :*
- ***Loi de Poisson*** $\mathrm{P}(\lambda)$:
  ☑ *Loi de probabilité :*
  ☑ *Espérance mathématique :*
  ☑ *Variance :*
  ☑ *Coefficient d'asymétrie :*
  ☑ *Coefficient d'aplatissement (kurtosis normalisé) :*
  ☑ *Fonction génératrice des moments :*
  ☑ *Approximation d'une loi binomiale par une Poisson :*
  ☑ *Stabilité de la loi de Poisson par la somme :*

Couples et Vecteurs aléatoires discrets 207

- ***Vecteurs aléatoires :***
- ***Lois conjointe :***
- ***Lois marginales :***
- ***Indépendance de deux v.a.discrètes :***
- ***Indépendance d'une famille finie de v.a. :***
- ***Indépendance d'une suite de v.a. :***
- ***Indépendance de deux variables aléatoires discrètes :***
- ***Indépendance de fonctions des variables aléatoires discrètes :***
- ***Somme de deux v.a.indépendantes :***
- ***Fonction de répartition d'un couple de v.a.discrètes :***
- ***Fonctions de répartitions marginales :***
- ***Conditionnement ou distributions conditionnelles :***
- ***Loi du minimum et du maximum :***
- ***L'espérance mathématique d'une fonction φ de (X,Y) :***
  f. *Inégalité de Cauchy Schwarz :*
- ***Espérance conditionnelle :***
  b. *Théorème de l'espérance double:*
- ***Variance-Covariance :***
  ☑ *Propriétés :*
  n. *Inégalité de Cauchy Schwarz :*
  o. *Variances Conditionnelles :*
  p. *Matrice de Covariance :*
  ☑ *Cas des variables indépendantes :*
- ***Coefficient de corrélation linéaire :***
  ☑ *Propriétés :*
  ☑ *Remarques :*

- *Fonction génératrice des moments :*
  - ☑ *Propriétés :*

Exercice 1 : (I.FI.D XXXIII^{ème} PROMO Septembre 2013) 214
Exercice 2 : (I.FI.D PROMO SPÉC POUR LE COMPTE DU Ministère des Fin Tun Mai 2015) 216
Exercice 3 : (I.FI.D XL^{ème} PROMO BANQUE Octobre 2020) 218
Exercice 4 : (I.FI.D XXXI^{ème} PROMO Juillet 2011) 221
Exercice 5 : (I.FI.D XLIIème PROMO (BANQUE) Septembre 2022) 225
Exercice 6 : (I.FI.D XXXII^{ème} PROMO Juillet 2012) 228
Exercice 7 : (I.FI.D XXXIX^{ème} PROMO BANQUE Juillet 2019) 231
Exercice 8 : (I.FI.D XXX^{ème} PROMO Juillet 2010) 233
Exercice 9 : (I.FI.D XXXII^{ème} PROMO Juillet 2012) 236
Exercice 10 : (I.FI.D XXXIV^{ème} PROMO Août 2014) 238
Exercice 11 : (I.FI.D XXXVI^{ème} PROMO ASSURANCE Mai 2016) 242
Exercice 12 : (I.FI.D XXXVII^{ème} PROMO ASSURANCE Avril 2018) 246
Exercice 13 : (I.FI.D XXXVII^{ème} PROMO ASSURANCE Avril 2018) 248
Exercice 14 : (I.FI.D XXXVIII^{ème} PROMO ASSURANCE Septembre 2020)........253
Exercice 15 (Indépendance de deux v.a. de la loi de Bernoulli) : 256
Exercice 16 (Couples et Vecteurs aléatoires discrets-Distributions conditionnelles) : 259
Exercice 17 (Couples et Vecteurs aléatoires discrets-Coefficient de corrélation linéaire) : 263
Exercice 18 (Indépendance de deux v.a. de la loi de Bernoulli) : 264
Exercice 19 (Indépendance de fonctions des variables aléatoires discrètes-Cas de variables binomiales) : ... 265
Exercice 20 (Somme de deux v.a. indépendantes- Cas de la loi uniforme discrète) : 268
Exercice 21 (Somme de deux v.a. indépendantes- Cas de la loi géométrique) : 271
Exercice 22 (Fonction génératrice des probabilités-Cas de la loi géométrique) : 272
Exercice 23 (Espérance d'une variable aléatoire discrète positive) : 274
Exercice 24 (Couple de v.a. de Poisson et de Bernoulli-Distributions conditionnelles) : 275
Exercice 25 (Couple de v.a. de Poisson et de Bernoulli-Distributions conditionnelles-Fonction génératrice des moments) : 277
Exercice 26 (Couples et Vecteurs aléatoires de Poisson-Distributions conditionnelles-Lois binomiales) : 279
Exercice 27 (Cas particulier de la formule de Wald-Somme d'un nombre aléatoire de termes aléatoires) : .. 280
Exercice 28 (Somme de deux v.a. indépendantes-Cas de la loi de Poisson-Distributions conditionnelles-Espérance conditionnelle) : 282