INSTITUT de FINANCEMENT du DEVELOPPEMENT du MAGHREB ARABE

CONCOURS DE RECRUTEMENT de la XXXVI PROMOTION (Assurance)

Samedi 14 Mai 2016

Epreuve de Méthodes Quantitatives

Corrigé

*************** ******************

Exercice 1 : (8 points 1+1+1,5+1,5+2)

1- On a $P[X=1] = 1 - a - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} - a$

2- On doit avoir: $E(X) = -\frac{1}{3} + 0\,P[X=0] + (\frac{2}{3} - a) = 0$, cela entraine que : $\frac{1}{3} - a = 0$ et donc $a = \frac{1}{3}$ La loi est donc uniforme discrète

.

3- $V(X) = (-1)^2\frac{1}{3} + 0^2\frac{1}{3} + (1)^2\frac{1}{3} - 0^2 = \frac{2}{3}$

Y est une variable binaire : $P[Y=0] = P[X=0] = \frac{1}{3}$ et $P[Y=1] = \frac{2}{3}$, ce qui donne $V(Y) = \frac{1}{3}\,\frac{2}{3} = \frac{2}{9}$

4-

$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(X^3) = -\frac{1}{3} + 0\,P[X=0] + 1\frac{1}{3} = 0$

Le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y. est nul. Y n'est pas corrélée linéairement à X même si Y est une fonction quadratique de X

5- $E(\varphi(X)) = e^1\frac{1}{3} + e^0\frac{1}{3} + e^{-1}\frac{1}{3} = \frac{1}{3}[e^1 + e^{-1} + 1]$

$\varphi(E(X)) = e^{-0} = 1.$ Comme $e^1 > 2,$ la quantité $\frac{1}{3}[e^1 + e^{-1} + 1] > 1$, ce qui signifie que $E(\varphi(X)) > \varphi(E(X))$.

6-La densité de $(Y_1, Y_2, \ldots Y_n)$ est le produit de

$\frac{2}{3}^{y_i}\frac{1}{3}^{1-y_i} = \Pi_{i=1}^{n}\frac{2}{3}^{y_i}\frac{1}{3}^{1-y_i} = (\frac{2}{3})^{\Sigma y_i}(\frac{1}{3})^{n-\Sigma y_i}$

alors que ΣY_i est une loi binomiale de paramètre n et $\frac{2}{3}$

Exercice 2 :

1- Le modèle est log-linéaire, ce qui s'écrit : $Y_t = aX_t^{\beta}e^{\epsilon_t}$ (où $y_t = Log(Y_t)$, et $x_t = Log(X_t)$), ce qui veut dire que β est l'élasticité des exportations par rapport à l'investissement industriel $\beta = \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}}$. Le signe attendu de β est positif. α correspond à $E(y_t)$ pour $x = 0$

2- $\widehat{\beta} = \dfrac{\sum_{t=1}^{24}(x_t-\bar{x})(y_t-\bar{y})}{\sum_{t=1}^{24}(x_t-\bar{x})^2} = \dfrac{300}{860} = 0.35$

$\widehat{\alpha} = \bar{y} - \widehat{\beta}\bar{x} = \dfrac{81}{24} - 0.35 * \dfrac{185}{24} = 3.37 - 0.35 * 7.7 = 0.67$

3- La somme des carrés expliquée

$SCE = \sum_{t=1}^{24}(\widehat{y}_t - \bar{y})^2 = \widehat{\beta}^2 \sum_{t=1}^{24}(x_t - \bar{x})^2 = 0.35^2 * \sum_{t=1}^{24}(x_t - \bar{x})^2 = 0.35^2 * 860 = 105.35$

De son côté, la somme des carrés des résidus est égale à :

$SCR = SCT - SCE = 106 - 105.35 = 0.65$ (SCT: somme des carrés totale)

$\widehat{\sigma^2} = \dfrac{SCR}{T-2} = \dfrac{0.65}{24-2} = 0.03$

4- La variance estimée de $\widehat{\beta} = \dfrac{\widehat{\sigma^2}}{\sum_{t=1}^{24}(x_t - \bar{x})^2} = \dfrac{0.03}{860} = (0.005)^2$ Ce qui entraine que l'écart type estimé de β est $= 0.005$

Le T de Student du coefficient β est égal à $\dfrac{0.35}{0.005} = 70$, ce qui signifie que la variable est significative.

5-Si l'on oublie la constante α dans le modèle, l'estimation par MCO sera égale $\widetilde{\beta} = \dfrac{\sum_{t=1}^{24} x_i y_t}{\sum_{t=1}^{24} x_t^2}$. Son espérance mathématique est égale à $E\widetilde{\beta} = \alpha \dfrac{\sum_{t=1}^{24} x_i}{\sum_{t=1}^{24} x_t^2} + \beta$ Le biais de $\widetilde{\beta}$ est égal à : $\alpha \dfrac{\sum_{t=1}^{24} x_i}{\sum_{t=1}^{24} x_t^2} = \alpha \dfrac{185}{860 + 22 * (185)^2}$

6- Dans le cas où le modèle devient autorégressif : $\widehat{y_t} = 0.2\, y_{t-1} + 0.8\, x_t + 1.5,$ on peut écrire

$(1 - 0.2L)y_t = 0.8\, x_t + 1.5,$ où L est l'opérateur retard, ou encore

$y_t = \dfrac{0.8x_t + 1.5}{(1 - 0.2L)} = 0.8x_t + 0.8 * 0.2x_{t-1} + 0.8 * 0.2^2 x_{t-2} + \ldots + \dfrac{1.5}{(1-0.2)}$ Cette dernière écriture correspond à la version en retards échelonnés (Modèle de Koyck)

L'effet de court terme (l'élasticité de C T) de x_t sur y_t est évalué à 0.8 alors que l'effet de long terme correspondant à l'effet sur y_t d'un accroissement de 1% des investissements d'une manière permanente et durable est égal à la somme $\dfrac{0.8}{1-0.2)} = 1$