Institut de Financement du Développement du Maghreb Arabe
Concours de Recrutement de la XXXIV$^{\text{ème}}$ promotion
23 Août 2014
Epreuve de Méthodes Quantitatives
Durée : 1h30 — Nombre de pages :02

Exercice 1 : (8 points : 1+1+1.5+1.5+1+2)

Le nombre d'accidents de route commis par un individu durant une année est une variable aléatoire notée X. Celle-ci peut prendre des valeurs entières positives ou nulle $X = 0$, $X = 1$, $X = 2$, .etc, .avec des probabilités définies par : $P[X = x] = k\,\dfrac{1}{2^x}$ où k est une constante à déterminer.

1. Calculer la valeur de la constante k
2. Déterminer en fonction de x la probabilité que X soit supérieure strictement à x pour x entier positif
3. En déduire l'expression de la fonction de répartition de X , notée $F(x)$ et définie par $F(x) = P[X \leq x]$, ainsi que la médiane de X
4. Sachant que l'individu a eu au moins x accidents, quelle est la probabilité pour que le nombre d'accidents dépasse le nombre $x + \theta$ pour θ entier. Envisager les deux cas θ positif et θ négatif
5. On pose $Y = 1$ si $X \leq 1$ et $Y = 0$ si $X \geq 2$.

   Déterminer l'espérance mathématique de Y
6. Déterminer la covariance entre X et Y

Exercice 2: (12 points: 1 point par question et 2 points pour la dernière question)

On considère un échantillon de $n = 100$ logements pour lesquels on observe le logarithme du prix (Y), le logarithme de la superficie en m2 (X), et le nombre de pièces (Z). On fournit les données suivantes:

$$\sum_{i=1}^{100} Y_i = 1179, \quad \sum_{i=1}^{100} X_i = 733, \quad \sum_{i=1}^{100} Z_i = 300, \quad \sum_{i=1}^{100} \left(Y_i - \overline{Y}\right)^2 = 24$$

$$\sum_{i=1}^{100} \left(X_i - \overline{X}\right)^2 = 13 \quad \sum_{i=1}^{100} \left(Z_i - \overline{Z}\right)^2 = 42 \quad \sum_{t=1}^{100} \left(Yi - \overline{Y}\right)\left(X_i - \overline{X}\right) = 16,$$

$$\sum_{t=1}^{100} \left(Yi - \overline{Y}\right)\left(Z_i - \overline{Z}\right) = 14, \quad \sum_{t=1}^{100} \left(Zi - \overline{Z}\right)\left(X_i - \overline{X}\right) = 14$$

On adopte le modèle défini par l'équation::

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \epsilon_i, \ i = 1, 2, \cdots, 100 \tag{1}$$

avec ε_i: un terme d'erreur vérifiant les hypothèse suivantes : $E(\varepsilon_i) = 0 \ \forall i$, $V(\varepsilon_i) = \sigma^2 \quad \forall i, \quad Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0 \quad \forall i \neq j$ et $Cov(\varepsilon_i, Xi) = 0 \quad \forall i$

1. Calculer les coefficients de corrélation linéaire entre Y et X d'une part et entre Y et Z d'autre part
2. Donner une interprétation économique de ce modèle ainsi que du paramètre β
3. Commenter économiquement les hypothèses $Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$, pour $i \neq j$ et $Cov(\varepsilon_i, Xi) = 0$
4. Estimer par la méthode des moindres carrés ordinaires (mco) les paramètres α et β, notés respectivement $\widehat{\alpha}$ et $\widehat{\beta}$. Commenter.
5. Calculer la somme des carrés des résidus, en déduire la variance estimée de $\widehat{\beta}$
6. Sous l'hypothèse de la normalité des résidus, tester la signifcativité de β au seuil de 5%.

On rajoute à présent la variable nombre de pièces comme variable explicative. Le modèle devient:

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \theta Z_i + \epsilon_i, \qquad i = 1, 2, \cdots, 100 \tag{2}$$

7. Reprendre l'estimation du modèle par la méthode des moindres carrés ordinaires. Commenter
8. Ecrire l'équation d'analyse de la variance et calculer ses composantes.
9. En déduire le coefficient de détermination linéaire (R^2). Commenter.
10. Sous l'hypothèse de la normalité des résidus, tester au seuil de 5% la significativité globale du modèle.

11 On rajoute à présent une variable indicatrice pour le nouveau logement ($N = 1$) s'il s'agit d'un nouveau logement et $N = 0$ pour un ancien logement. L'estimation du modèle fournit les résultats suivants:

$$\widehat{Y}_i = \underset{(0.5)}{1.7} + \underset{(0.06)}{1.16}\, X_i - \underset{(0.025)}{0.08}\, Z_i + \underset{(0.07)}{0.21}\, N_i$$

Commenter.ces résultats en termes d'ordre de grandeur et de signe des coefficients sachant que les nombres entre parenthèses sont les écarts types estimés

Indication: Pour une loi de Fischer F(2, 97) et une loi de Student ST(98), nous avons : $P(F(2,97) > 3.09)) = 0.05$ **et** $P(|ST(98)| < 2.276) = 0.95$