Institut de Financement du Développement du Maghreb Arabe
Concours de Recrutement de la 39ème Promotion - Banque
Techniques Quantitatives

Juillet 2019

Corrigé Exercice 1 (5 points: 1+1+1+1+1)

1- $V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$

2- L'écart type de la somme est $\sigma_{X_1+X_2}$ qui est inférieur à $\sigma_1 + \sigma_2$ puisque en prenant les carrés on trouve :

$$\sigma_{X_1+X_2}^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \leq (\sigma_1 + \sigma_2)^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2$$

ce qui permet d'écrire : $\sigma_{X_1+X_2} \leq \sigma_1 + \sigma_2$

3- Nous avons $Cov(Y, X_1 + X_2) = EY(X_1 + X_2) = E(YX_1) + E(Y X_2)$ du fait que $E(X_1 + X_2) = E(X_1) = E(X_2) = 0$

On obtient $Cov(Y,X_1 + X_2) = Cov(Y, X_1) + Cov(Y, X_2)$

4- L'égalité précédente s'écrit en notant σ_Y l'écart type de Y

$$\rho\, \sigma_Y\, \sigma_{X_1+X_2} = \rho_1\sigma_Y\, \sigma_1 + \rho_2\sigma_Y\, \sigma_2$$

ce qui donne aprés simplification :

$$\rho = \frac{\sigma_1}{\sigma_{X_1+X_2}}\rho_1 + \frac{\sigma_2}{\sigma_{X_1+X_2}}\rho_2$$

Corrigé Exercice 2:

1- Nous avons

$$A^2 = A.A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9}+\frac{1}{4} & \frac{1}{6}+\frac{1}{8} \\ \frac{1}{6}+\frac{1}{8} & \frac{1}{4}+\frac{1}{16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{13}{36} & \frac{7}{24} \\ \frac{7}{24} & \frac{5}{16} \end{bmatrix}$$

D'autre part $\frac{7}{12}A + \frac{1}{6}I$

$$=\frac{7}{12}\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} + \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{36} & \frac{7}{24} \\ \frac{7}{24} & \frac{7}{48} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{13}{36} & \frac{7}{24} \\ \frac{7}{24} & \frac{5}{16} \end{bmatrix}$$

2 On a -$A^2 - \frac{7}{12}A = \frac{1}{6}I$ ou encre $A(6A - \frac{7}{2}) = I$ ce qui entraine que $A^{-1} = 6\,A - \frac{7}{2}I$

3-$V(U) = V(AX) = AV(X)A'$

avec $V(X) = I$ et $A' = A$

Ce qui donne $V(U) = A^2$

4-Densité d'une loi normale centrée et de variance $\frac{13}{36}$:ce qui s'écrit :

$$f(u_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{13}{36}}} \exp - \frac{1}{2(\frac{13}{36})}u_1^2$$

De même pour u2

5-$Cov(u_1, u_2) = \frac{7}{24}$ différente de zéro ce qui entraine que u1 et u2 sont dépendants

Corrigé Exercice 3

Question1

1-i Nous savons que $\widehat{b} = \dfrac{\sum (x_t - \bar{x})(y_t - \bar{y})}{\sum (x_t - \bar{x})^2} = \dfrac{\sum (x_t - \bar{x})(y_t - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_t - \bar{x})^2}\sqrt{\sum (y_t - \bar{y})^2}}$

du fait de l'égalité des variances empiriques de x_t et y_t

De ce fait, $\widehat{b} = \widehat{\rho}$ qui est le coefficient de corrélation linéaire entre x_t et y_t

1-ii- L'équation de la variance s'écrit : $\sum_{t=1}^{T}(y_t - \bar{y})^2 = \sum_{t=1}^{T}($

$y_t - \widehat{y_t})^2 + \sum_{t=1}^{T}(\widehat{y_t} - \bar{\bar{y}})^2 = \sum_{t=1}^{T} \widehat{\varepsilon_t}^2 + \sum_{t=1}^{T}(\widehat{y_t} - \bar{\bar{y}})^2$

avec $\bar{\bar{y}} = \bar{y}$ d'une part et $\widehat{y_t} = \widehat{\rho}\, x_t + \widehat{c}$, d'autre part, ce qui donne $\widehat{y_t} - \bar{\bar{y}} = \widehat{\rho}\ (x_t - \bar{x})$ et donc : $\sum_{t=1}^{T}(\widehat{y_t} - \bar{\bar{y}})^2 = \rho^2 \sum_{t=1}^{T}(x_t - \bar{x})^2$

La somme des carrés des résidus est alors : : $\sum_{t=1}^{T} \widehat{\varepsilon_t}^2 = (1 - \rho^2)$

$\sum_{t=1}^{T}(x_t - \bar{x})^2 = (1 - \rho^2)T$

1-iii Le coefficient de détermination de la régression R^2 est défini par

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{t=1}^{T} \widehat{\varepsilon_t}^2}{\sum_{t=1}^{T}(y_t - \bar{y})^2} = 1 - \frac{(1-\rho^2)T}{T} = \rho^2$$

1- iv $V(\widehat{b}) = \dfrac{\sigma^2}{\sum_{t=1}^{T}(x_t - \bar{x})^2}$ qui est estimée par $\dfrac{\dfrac{\sum_{t=1}^{T} \widehat{\varepsilon_t}^2}{T-2}}{\sum_{t=1}^{T}(x_t - \bar{x})^2} = \dfrac{1-\rho^2}{T-2}$

La statistique de Student de b est $\dfrac{\rho}{\sqrt{\dfrac{1-\rho^2}{T-2}}}$

Question2

2-i Le modèle est dynamique avec la présence d'une variable décalée et une variable exogène**.** De ce fait, y dépend de x, de x(-1) de x(-2)... La consommation dépend du revenu actuel ainsi que de ses valeurs passées

2-ii On calcule les T de Student des trois paramètres en prenant le rapport des estimations avec leurs écarts types, on trouve :

Pour a : $\dfrac{0.4}{\sqrt{0.01}} = \dfrac{0.4}{0.1} = 4$

Pour b $\dfrac{0.9}{\sqrt{0.04}} = \dfrac{0.9}{0.2} = 4.5$

Pour c $\dfrac{1.3}{\sqrt{0.09}} = \dfrac{1.3}{0.3} = 4.33$

Les trois valeurs sont nettement supérieurs à deux, les trois coefficients sont significatifs à 95 %

2-iii b=0.9 est l'impact de court terme du revenu sur la consommation alors l'impact de long terme est égal à $\frac{b}{1-a} = \frac{0.9}{1-0.4} = 1.8$

2-iv Pour calculer le retard moyen entre le revenu et la consommation, on écrit y sous forme de fonction à retard échelonnées, de x, x(-1), x(-2) avec des coefficients $a0, a1, a2, ...$le retard moyen est alors défini par $\frac{\sum iai}{\sum ai}$