Fonction de transfert

Définition : $\mathbf{H}(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$ **lorsque les conditions initiales sont nulles**

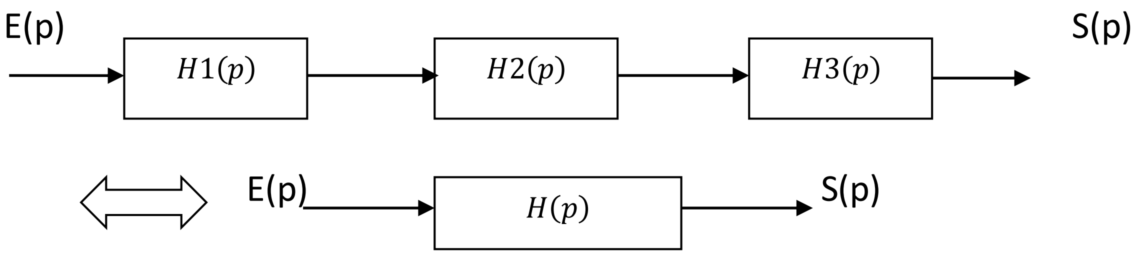
Ordre, Classe et gain statique :

Soit $\mathbf{H}(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{N(p)}{D(p)}$

- **Ordre n : Degré de D(p) (La plus grande puissance de p)**
- **Classe α : Nombre d'intégrations dans D(p) (La plus petite puissance de p)**
- **Gain statique :** $G_s = H(0) = \frac{s(\infty)}{e(\infty)} = \frac{b_0}{a_0}$

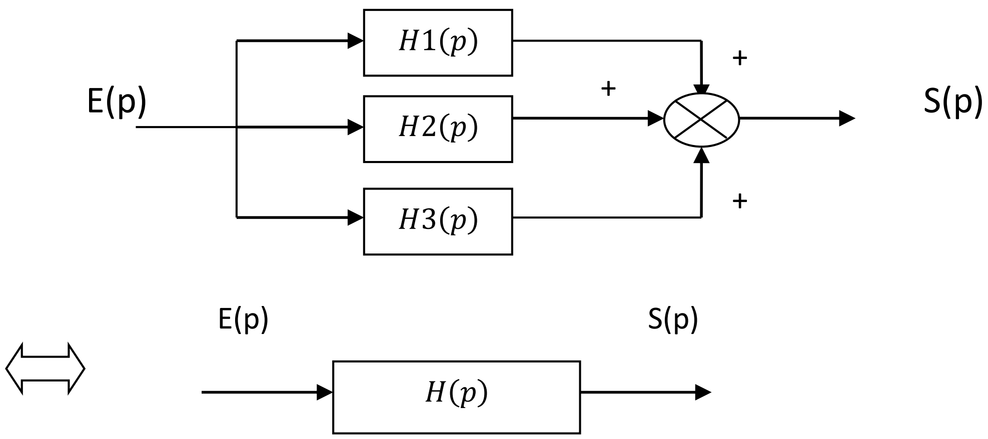
Schémas blocs

Association en série (en cascade)



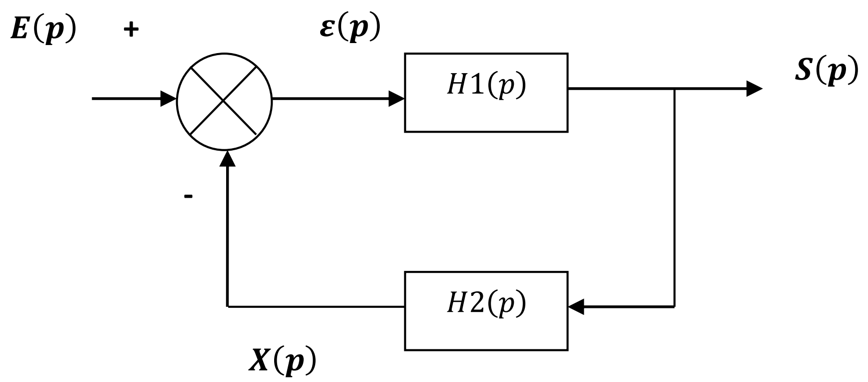
$$H(p) = H1(p) * H2(p) * H3(p)$$

Association en parallèle



$$H(p) = H1(p) + H2(p) + H3(p)$$

Système asservi : Système en boucle fermée



Fonction de transfert en boucle fermée :

$H_{BF}(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{H_1(p)}{1+H_1(p).H_2(p)}$: Formule de Black

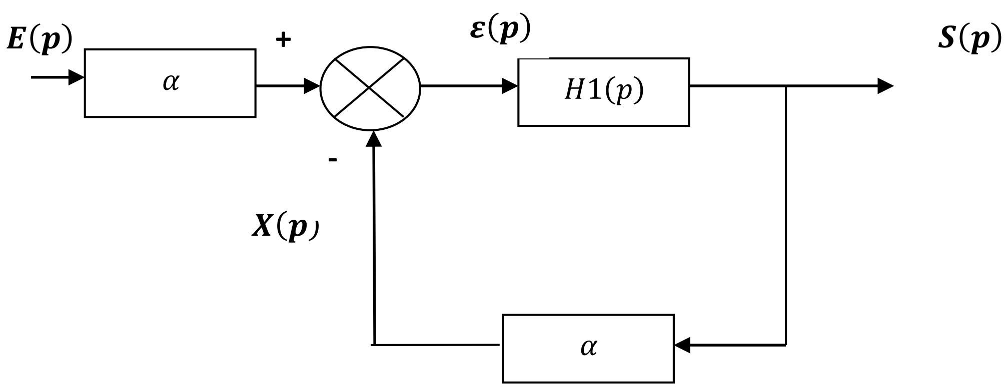
Fonction de transfert en boucle ouverte :

$H_{BO}(p) = \frac{X(p)}{\varepsilon(p)} = H_1(p).H_2(p)$

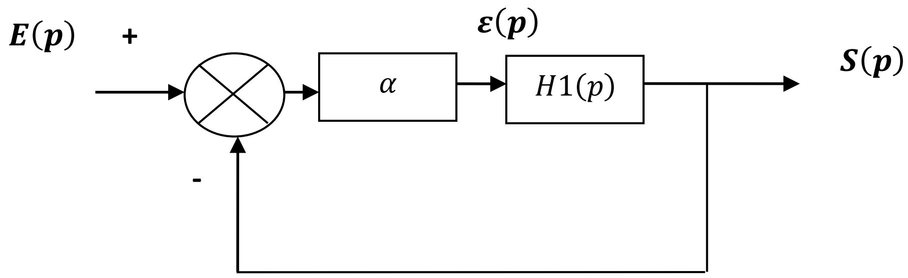
Fonction de transfert de l'erreur :

$$F_{err} = \frac{\varepsilon(p)}{E(p)} = \frac{1}{1+H_{BO}(p)} = \frac{1}{1+H_1(p).H_2(p)} \Rightarrow \varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1+H_{BO}(p)}$$

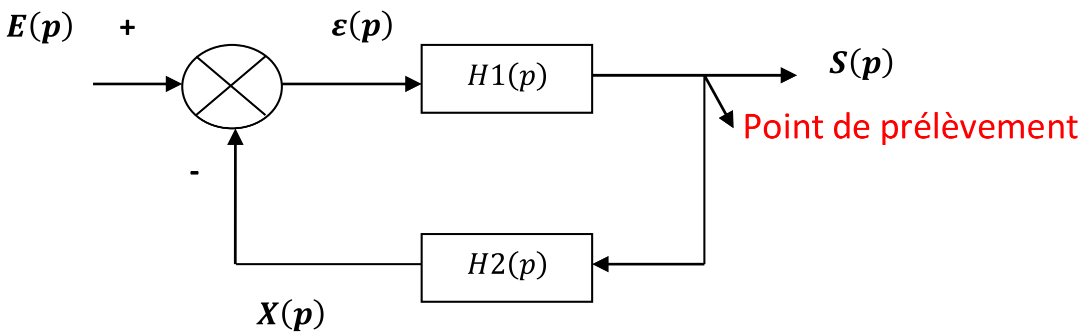
Transformation en un schéma à retour unitaire :



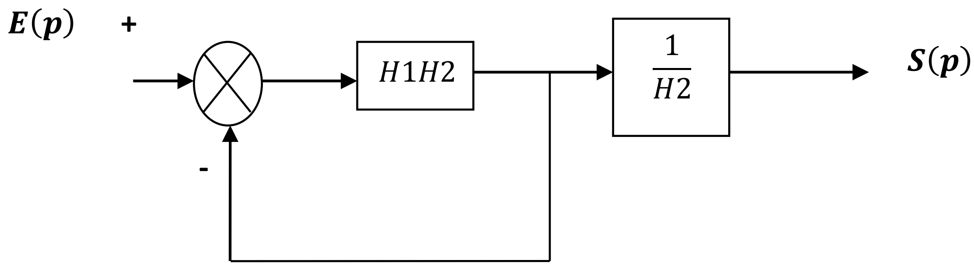
$\Leftrightarrow$



$$Dans\ ce\ cas:\ \varepsilon(p) = \frac{\alpha . E(p)}{1 + H_{BO}(p)}$$



$\Leftrightarrow$



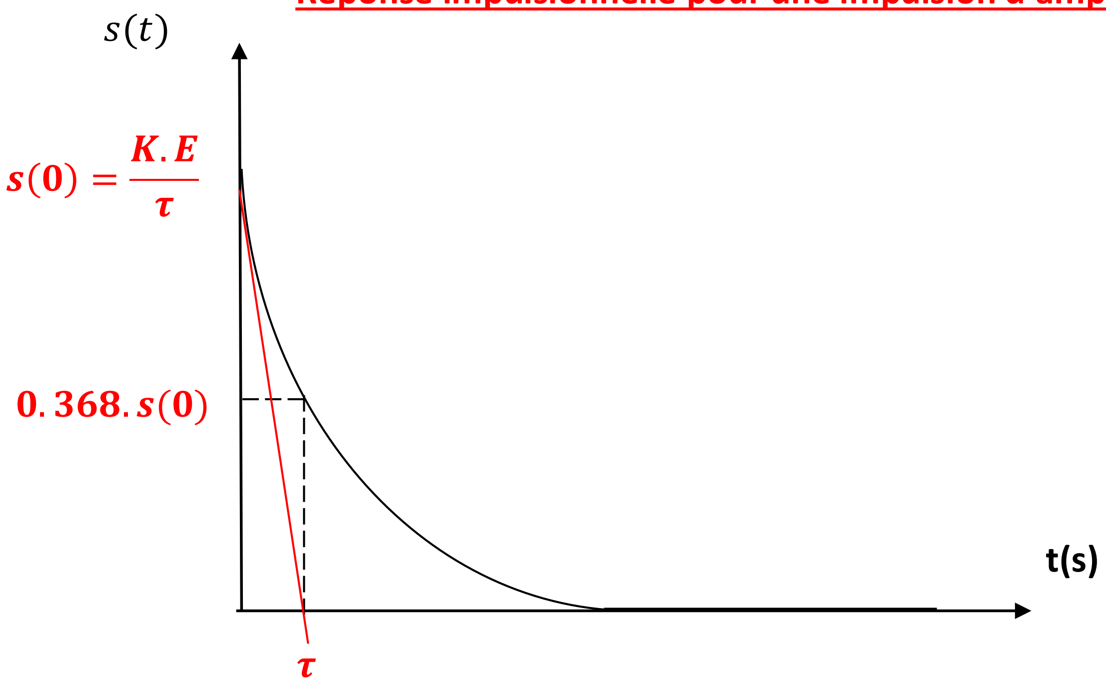
Présence d'une perturbation :

- **Méthode directe (A partir du schéma bloc)**
- **Méthode de superposition : $S(p) = S_1(p) + S_2(p)$**

Système fondamental de 1er ordre

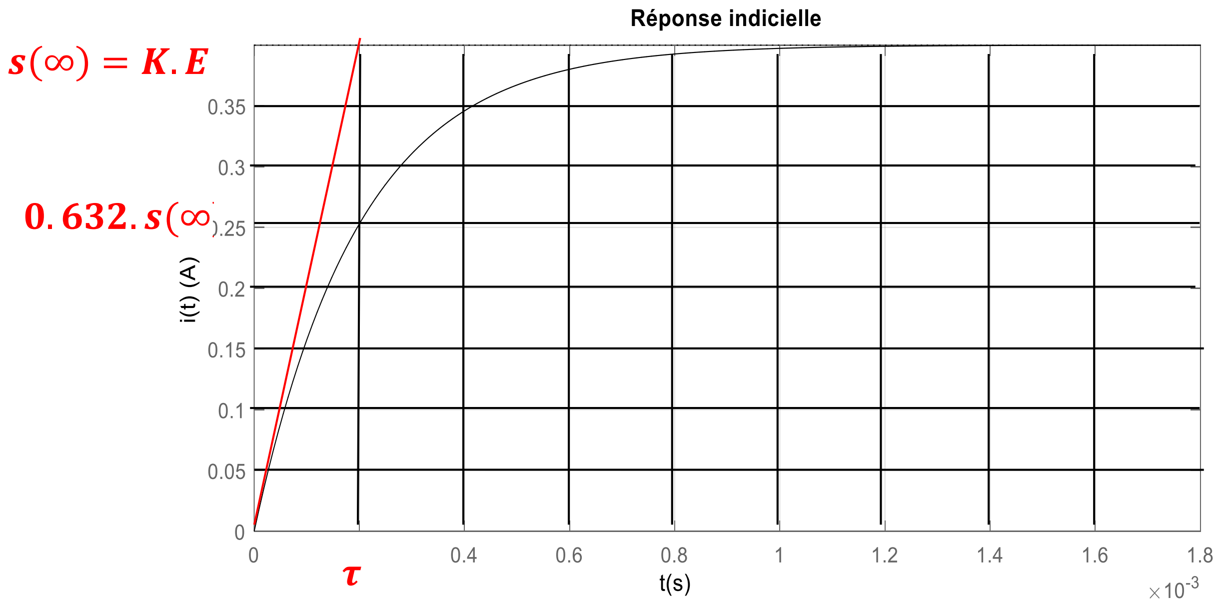
Forme canonique : $H(p) = \frac{K}{1+\tau.p}$ avec : $\begin{cases} K : Gain\ statique \\ \tau : Constante\ du\ temps\ (en\ s) \end{cases}$

Réponse impulsionnelle pour une impulsion d'amplitude E



$$s(t) = \frac{K.E}{\tau}.e^{-\frac{t}{\tau}}.u(t)$$

Réponse indicielle pour un échelon d'amplitude E

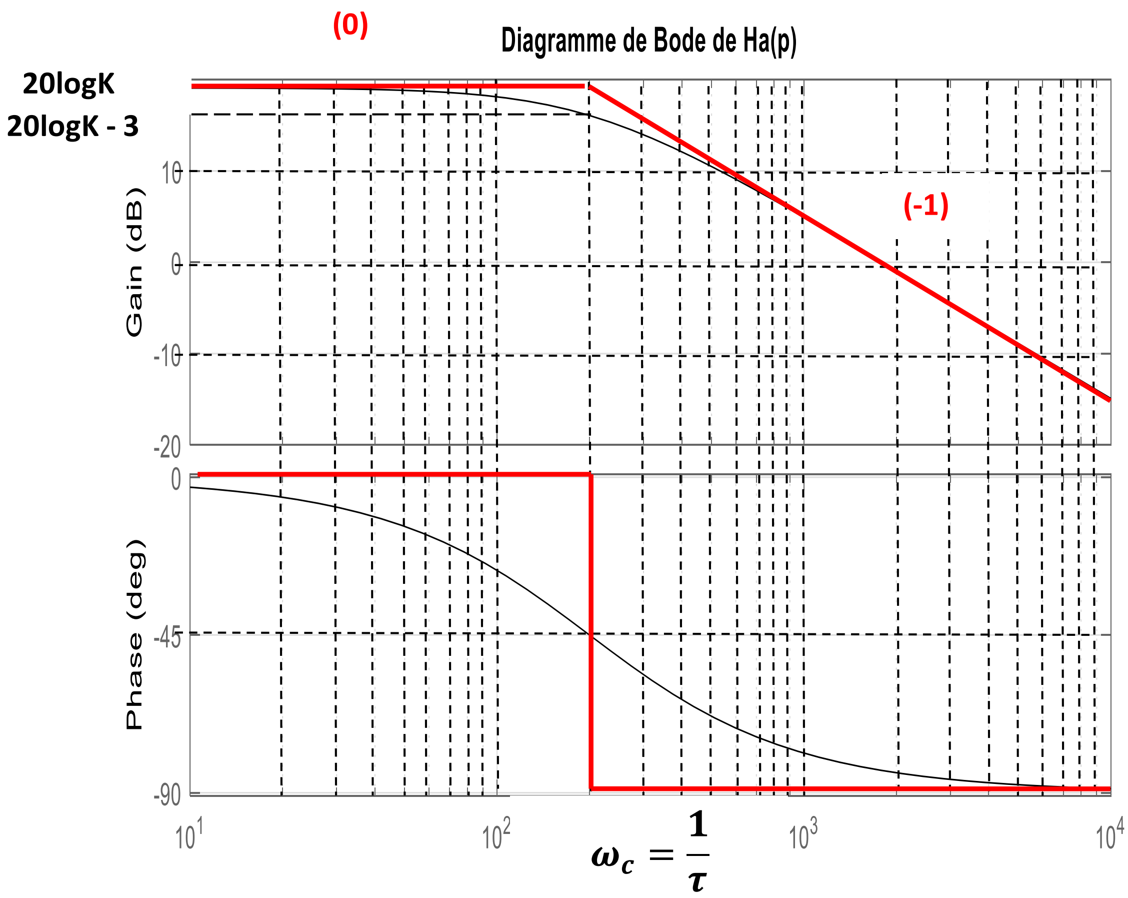


$$s(t) = K.E.(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}).u(t)$$

Temps de réponse à 95% de s(∞): Tr = 3.τ

Tracé asymptotique et réel de Bode

Pulsation de cassure : $\omega_c = \frac{1}{\tau}$



Bande Passante à -3 dB: W_{BP} = [0 , ω_c]

SYSTEME FONDAMENTAL DU SECOND ORDRE

2 formes canoniques :

$$H(p) = \frac{K{\omega_0}^2}{p^2 + 2m\omega_0 p + {\omega_0}^2} = \frac{K}{1 + \frac{2m}{\omega 0}.p + \frac{p^2}{\omega 0^2}}$$

Avec K : Gain statique

m : facteur d'amortissement (ξ ,z)

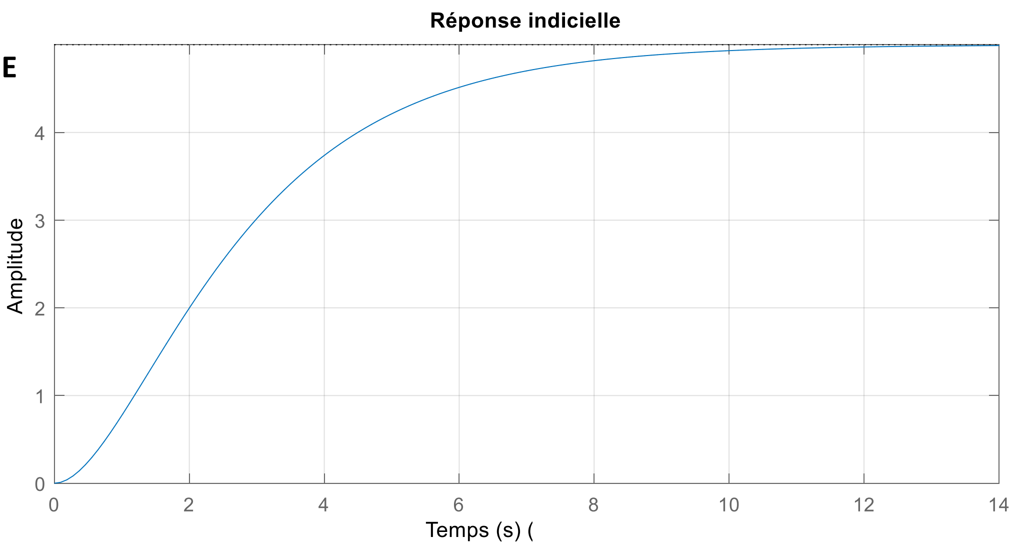
ω_0 : pulsation propre ou naturelle non amortie (ω_n)

3 régimes de fonctionnement :

***) m>1 : Régime apériodique** $\left(\boldsymbol{H(p)} = \frac{\boldsymbol{K}}{(\boldsymbol{1+\tau_1.p}).(\boldsymbol{1+\tau_2.p})}\right)$

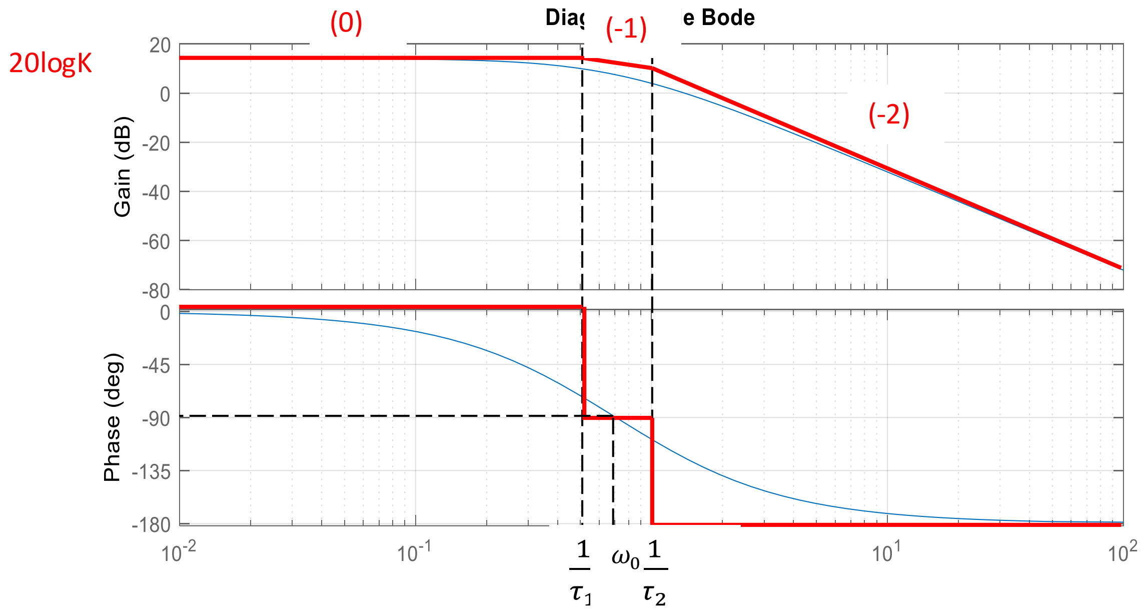
Réponse indicielle :

$s(\infty)$ =**K.E**



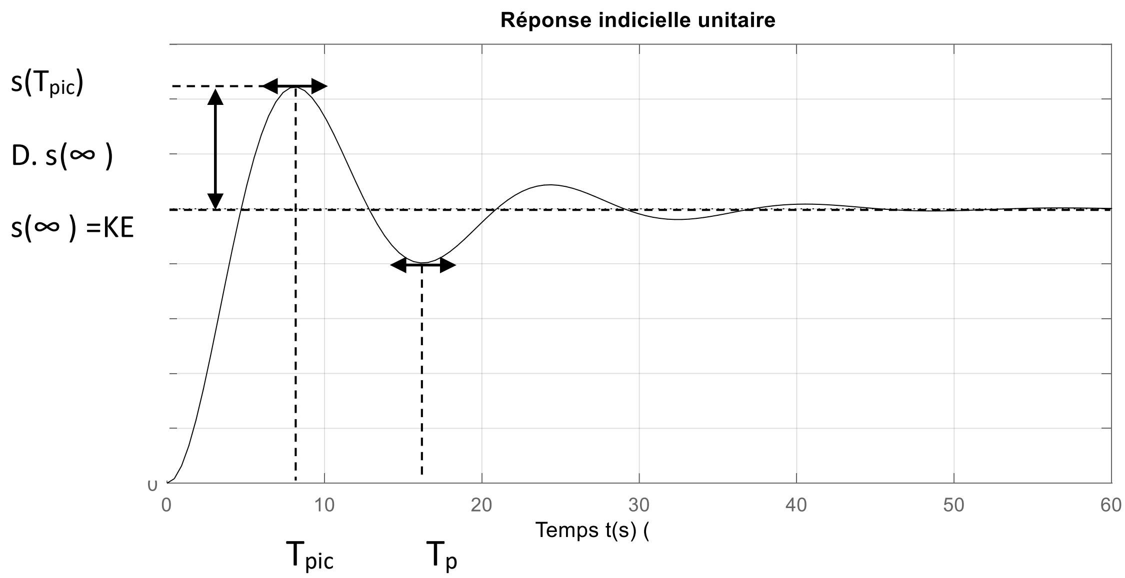
Tracé asymptotique et réel de Bode

Pulsations de cassure : $\begin{cases} \omega_{c1} = \frac{1}{\tau_1} \\ \omega_{c2} = \frac{1}{\tau_2} \end{cases}$ $\quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\tau_1.\tau_2}}$



***) <u>0<m<1</u> : Régime pseudo-périodique**

Réponse indicielle

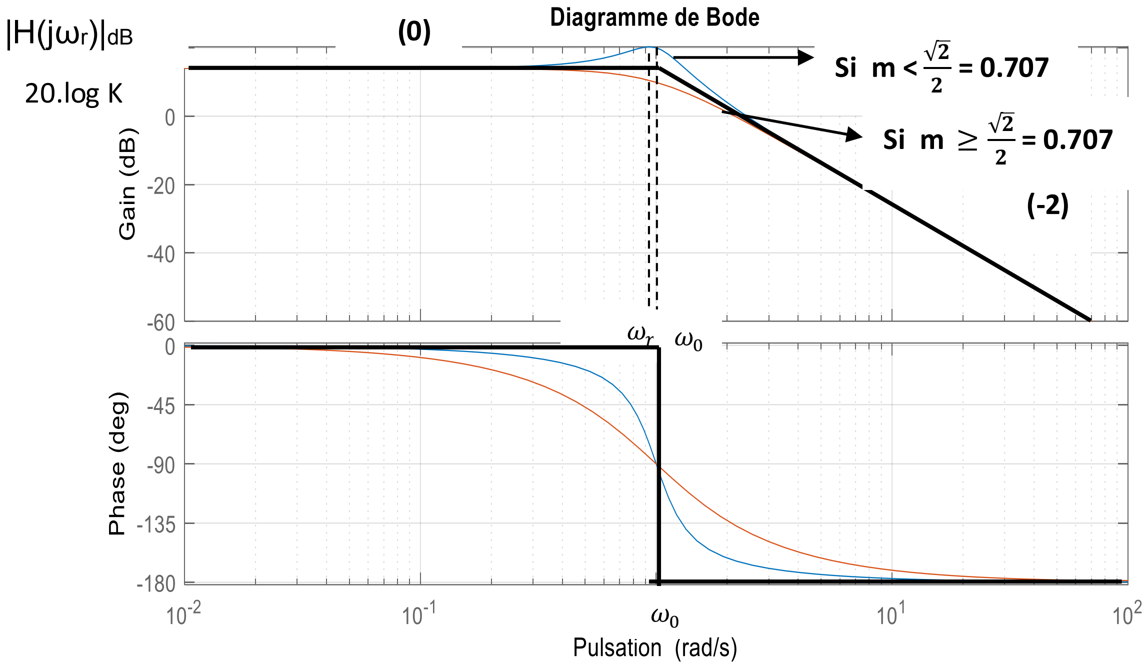


- Dépassement : $D\% = 100.e^{-\frac{\pi.m}{\sqrt{1-m^2}}} = 100.\frac{s(T_{pic})-s(\infty)}{s(\infty)}$
- m$= \frac{|\ln D|}{\sqrt{(\ln D)^2+\pi^2}}$
- Temps de pic : $T_{pic} = \frac{\pi}{\omega_0.\sqrt{1-m^2}}$

- Pseudo_ période : $T_p = \frac{2.\pi}{\omega_0.\sqrt{1-m^2}} = 2.T_{pic}$
- Temps de réponse à ± 5% : $T_r \approx \frac{3}{m.\omega_0}$

Tracé asymptotique et réel de Bode:

Pulsation de cassure : $\omega_{ca} = \omega_0$



Si m < $\frac{\sqrt{2}}{2}$ = 0.707 alors Il y'a résonance dans la courbe du gain

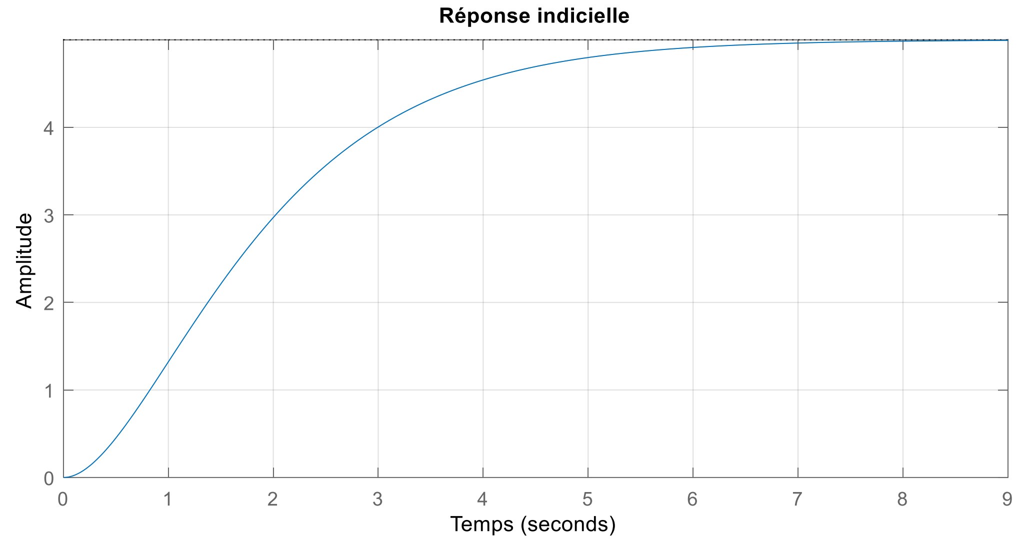
Pulsation de résonance : $\omega_r = \omega_0.\sqrt{1-2.m^2}$

Pic de résonance en dB: $|H(j\omega_r)|_{dB} = 20.log \frac{K}{2.m\sqrt{1-m^2}}$

*) m=1 : Régime Critique

Réponse indicielle :

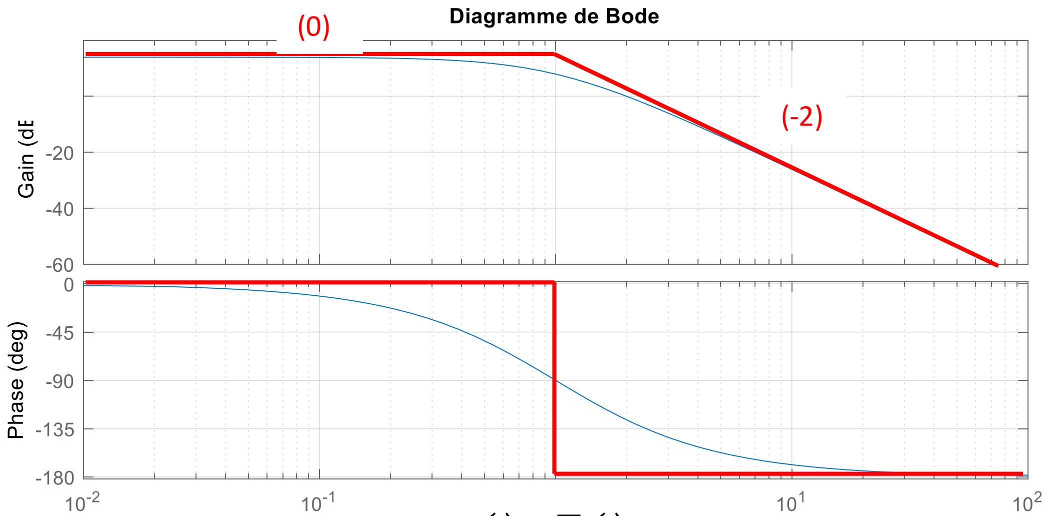
$s(\infty) = KE$



Tracé asymptotique et réel de Bode :

Pulsation de cassure : $\omega_{ca} = \omega_0$

$20logK$



$\omega_{ca} = \omega_0$

Remarque :

$$|H(j\omega_0|_{dB} = 20.\log \frac{K}{2m} \; \forall m$$

Stabilité

Critère de Routh : $H_{BF}(p) = \frac{H_1(p)}{1+H_1(p).H_2(p)} = \frac{F.T.C.D(p)}{1+H_{BO}(p)} = \frac{b_m.p^m+\cdots+b_1.p+b_0}{a_n.p^n+\cdots+a_1.p+a_0}$

D(p)= $a_n.p^n + \cdots + a_1.p + a_0$

1ère condition (Condition nécessaire): Tous les a_i sont strictement de même signe. Cette condition est suffisante dans le cas des systèmes de 1er et de second ordre.

2ème condition (Nécessaire et suffisante) : Table de Routh

p^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	
p^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	
…	b_1	b_2	b_3	
…	c_1	c_2	….	
p				
1				

Avec : $b_1 = \frac{a_{n-1}.a_{n-2}-a_n.a_{n-3}}{a_{n-1}}$, $b_2 = \frac{a_{n-1}.a_{n-4}-a_n.a_{n-5}}{a_{n-1}}$

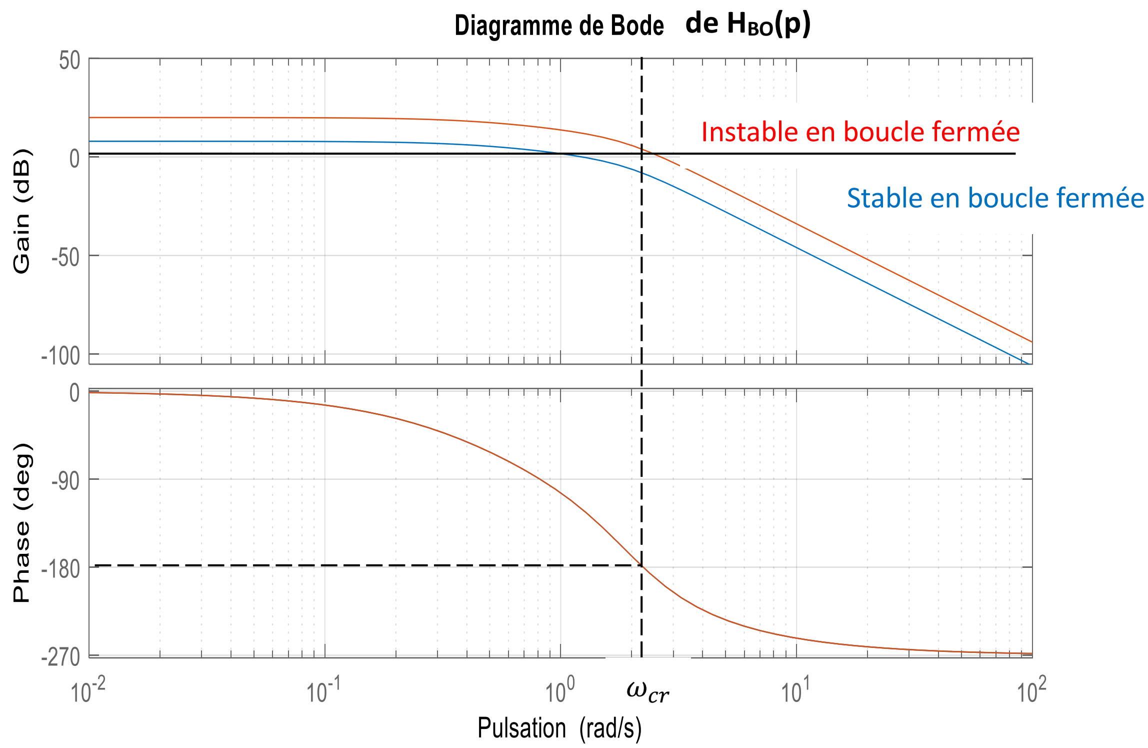
$$c_1 = \frac{b_1.a_{n-3} - a_{n-1}.b_2}{b_1}, \qquad c_2 = \frac{b_1.a_{n-5} - a_{n-1}.b_3}{b_1}$$

Les (n+1) éléments de la première colonne doivent être strictement de même signe.

Critère de Revers :

Il permet d'étudier la stabilité en boucle fermée à partir de la fonction de transfert en boucle ouverte.

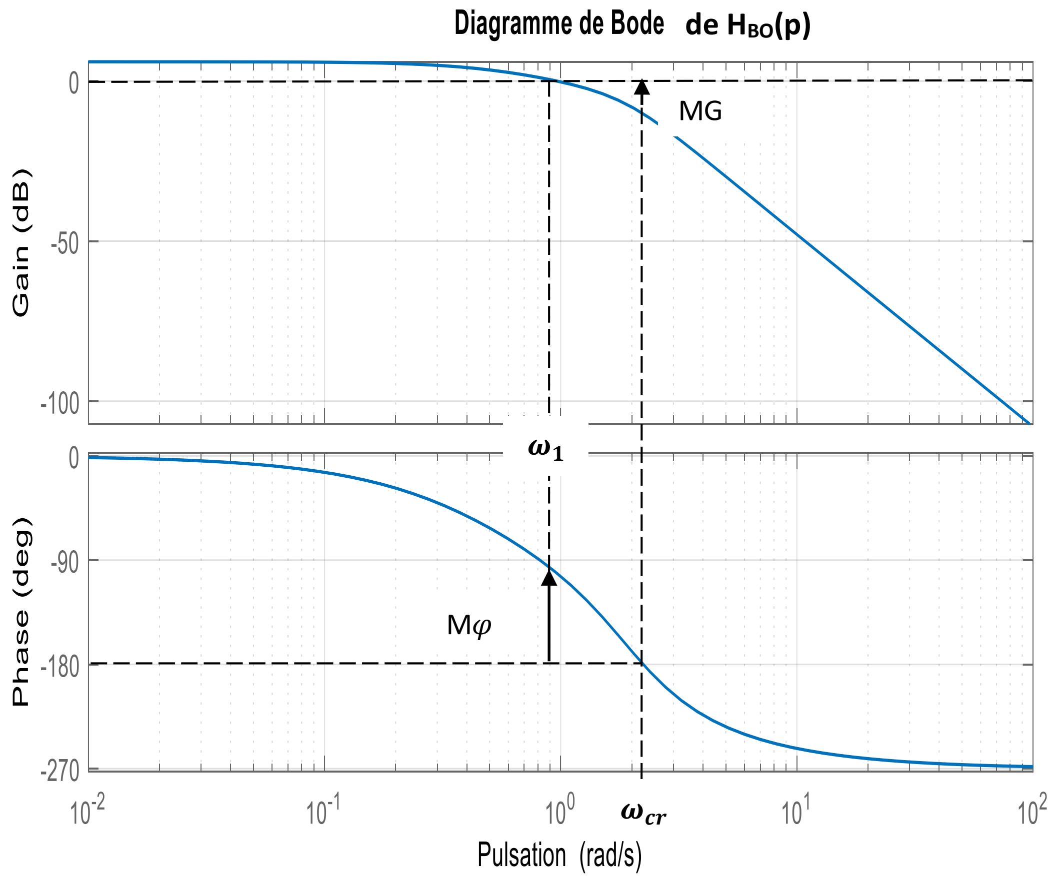
Le système est stable en boucle fermée si $|H_{BO}(j\omega)|_{dB} < 0$ quand la phase est égale à – π



Autrement dit : Le système est stable en boucle fermée si $|H_{BO}(j\omega_{cr})| < 1$ ou bien 20.log$|H_{BO}(j\omega_{cr})| < 0$

Marge de gain et marge de phase :

Ce sont les distances qui séparent les lieux de transfert de $H_{BO}(j\omega)$ du point critique (0dB, -π) qui constitue la limite de stabilité du système en boucle fermée



Analytiquement :

Marge de phase :

$$\begin{cases} M\varphi = \pi + \arg(H_{BO}(j\omega_1) \\ avec\ |H_{BO}(j\omega_1)| = 1\ ou\ |H_{BO}(j\omega_1)|_{dB} = 0 \end{cases}$$

Marge de gain :

$$\begin{cases} MG = -20.log|H_{BO}(j\omega_{cr})| \\ avec\ \arg\big(H_{BO}(j\omega_{cr})\big) = -\pi \end{cases}$$

Remarques :

1°) Si le système est stable $\Rightarrow \begin{cases} MG > 0 \\ M\varphi > 0 \end{cases}$ et

2°) Dans le cas où $H_{BO}(p)$ est de premier ou de second ordre, la marge de gain est infinie, $MG = \infty$ (Puisqu'il n'y a pas intersection de la courbe de phase avec l'axe $\varphi = -180°$)

Précision :

- Elle dépend de l'erreur en régime permanent : $\boldsymbol{\varepsilon}(\infty) = \lim_{p \to 0} p.\boldsymbol{\varepsilon}(p)$
- Plus $\boldsymbol{\varepsilon}(\infty)$ est faible, plus le système est précis
- Si $\boldsymbol{\varepsilon}(\infty) = \mathbf{0} \Rightarrow$ **Précision : 100%**
- **Si l'entrée est un échelon** $\Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}(\infty)$: $\boldsymbol{Erreur\ de\ position}$
- **Si l'entrée est une rampe** $\Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}(\infty)$: $\boldsymbol{Erreur\ de\ vitesse}$ **, erreur de traînage**
- **Si l'entrée est parabolique** $\Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}(\infty)$: $\boldsymbol{Erreur\ d'accélération}$

Théorème de la valeur finale :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\infty) = \lim_{p \to 0} p.\boldsymbol{\varepsilon}(p) = \lim_{p \to 0} \frac{\boldsymbol{p.E(p)}}{\boldsymbol{1 + H_{BO}(p)}}$$

Méthode de classe pour la détermination de l'erreur en régime permanent :

Forme canonique : $\boldsymbol{H_{BO}(p) = \frac{K.(1+\tau_1.p).(1+\tau_2.p).....}{p^{\alpha}.(1+\tau_3.p).(1+\tau_4.p)....}}$ **,** $\boldsymbol{\alpha}$ **: Classe de** $\mathbf{H_{BO}(p)}$

- **Si classe (E(p))** $\leq$ **classe** $(\boldsymbol{H_{BO}(p)}) \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}(\infty) = \mathbf{0}$
- **Si classe ((E(p)) = classe** $(\mathbf{H_{BO}(p)}) + \mathbf{1} \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}(\infty) = \boldsymbol{cte} =$

$$\begin{cases} \frac{\boldsymbol{E}}{\boldsymbol{K+1}}\ si\ Classe\big(H_{BO}(p)\big) = 0\ et\ classe\big(E(p)\big) = 1 \\ \qquad\qquad \frac{\boldsymbol{E}}{\boldsymbol{K}}\ \ \boldsymbol{sinon} \end{cases}$$

- **Si classe((E(p)) > classe** $(\mathbf{H_{BO}(p)}) + \mathbf{1} \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}(\infty) = \infty$

La rapidité :

- Elle dépend du temps de réponse T_r (Temps de stabilisation T_s). C'est le temps mis par le système pour que la sortie soit à $\pm 5\%$ de sa valeur finale.
- Plus T_r est faible, plus le système est rapide.

Les Correcteurs :

Afin d'améliorer les performances des systèmes asservis (Stabilité, Précision et rapidité), on utilise des correcteurs.

Exemples :

Correcteur Proportionnel : C(p) = k

Correcteur Intégral : $C(p) \ = \frac{K}{p}$

Correcteur Proportionnel intégral : C(p) =$K.\left(1+\frac{1}{\tau_i.p}\right) = K.\frac{1+\tau_i.p}{\tau_i.p}$

Correcteur Proportionnel dérivée : C(p) =$K.(1+\tau_d.p)$