# הוכחות לחלק א' מבחן אינפי מתקדם 1, 2015־2016

איל כהן ועמית טרופ ־ מההרצאות של גנאדי לוין

7 בפברואר 2016

## 1 קבוצה ב־$\mathbb{R}^d$ קומפקטית אמ"מ היא חסומה וסגורה

$K \subset (\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_p)$ קומפקטית $\iff$ $K$ חסומה וסגורה

**הוכחה** ($\Longleftarrow$):
נוכיח כי אם $K \subset X$ קב' קומפקטית אזי $K$ חסומה וסגורה ואז בפרט $K \subset (\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_p)$ תקיים זאת.
נניח בשלילה ש־$K$ לא חסומה, אזי עבור $a \in X$ ועבור כל $n$ מתקיים $K \not\subset B(a,n)$, כלומר, קיימת סדרה $(x_n) \subset K$ כך ש־$\rho(a,x_n) > n$. הסדרה $x_n$ לא מכילה תת סדרה מתכנסת. אם $x_{n_k} \to x$ אזי

$$\rho(a,x_{n_k}) \le \rho(a,x) + \rho(x,x_{n_k}) \to \rho(a,x)$$

וזו סתירה לכך ש־ $\rho(a,x_n) > n$. קיבלנו כי קיימת סדרה ב־$K$ אשר אין לה תת סדרה מתכנסת, בסתירה לקומפקטיות $K$.
נניח בשלילה ש־$K$ לא סגורה. מהטענה "$A \subset X$ סגורה $\iff$ $A = \{y \in X \mid \exists \{x_n\} \subset A \ \ \lim_{n\to\infty} x_n = y\}$" קיימת סדרה $(x_n) \subset K$ כך ש־ $x_n \to x$ אבל $x \notin K$, לכן אין תת סדרה של $(x_n)$ המתכנסת לנק' ב־$K$ בסתירה לקומפקטיות $K$.
($\Longrightarrow$):
תהי $K$ חסומה וסגורה ו־$K \supset (x^n)_{n=1}^\infty$ $x^n = (x_1^n, ..., x_d^n)$. $K$ חסומה, לכן קיים $r > 0$ כך ש־ $\forall x \in K \ \|x\|_p \le r$, לכן עבור כל $n$, $i$ מתקיים $|x_i^n| \le \|x^n\|_p \le r$, כלומר, עבור כל $1 \le i \le d$ סדרה $(x_i^n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ חסומה. לפי משפט בולצ'אנו ויירשטראס, הסדרה $(x_1^n)_{n=1}^\infty$ מכילה תת מסדרה מתכנסת $x_1^{n_{j,1}} \xrightarrow[j\to\infty]{} x_1$ ,$\{n_{j,1}\} \subset \mathbb{N}$. נתבונן ב־$(x_2^{n_{j,1}})_{j=1}^\infty \subset \mathbb{R}$. סדרה זו חסומה לכן קיימת $(n_{j,2}) \subset (n_{j,1})$ כך ש־$x_2^{n_{j,2}} \xrightarrow[j\to\infty]{} x_2$... נתבונן ב־$(x_d^{n_{j,d-1}})_{j=1}^\infty \subset \mathbb{R}$. סדרה זו חסומה לכן קיימת $(n_{j,d}) \subset (n_{j,d-1})$ כך ש־$x_d^{n_{j,d}} \xrightarrow[j\to\infty]{} x_d$.
תת סדרה $(x_1^{n_{j,d}}, ..., x_d^{n_{j,d}})_{j=1}^\infty = (x^{n_{j,d}})_{j=1}^\infty$ של $x^n$ מתכנסת כי $(x_i^{n_{j,d}})_{j=1}^\infty \xrightarrow[i\to\infty]{} x_i$ לכל $i$ (הסדרה של כל קואורדינטה מתכנסת), אזי $x^{n_{j,d}} \xrightarrow[j\to\infty]{} a = (x_1, ..., x_d) \in \mathbb{R}^d$. $a \in K$ כי $K$ קבוצה סגורה ו־$K \supset (x^{n_{j,d}})_{j=1}^\infty$ ומכאן ש־$K$ קבוצה קומפקטית.

## 2 היינה בורל

התנאים הבאים שקולים:

1. $X$ מ"מ קומפקטי
2. כל כיסוי פתוח של $X$ מכיל תת כיסוי סופי
3. עבור כל אוסף $(F_\alpha)_{\alpha\in I}$ של קבוצות סגורות, מתקיים ־ אם חיתוך של כל מס' סופי של קבוצות מ־$(F_\alpha)$ לא ריק, אזי גם $\bigcap_{\alpha\in I} F_\alpha \ne \emptyset$.

**הוכחה** (2 $\Longleftarrow$ 3):
מחוקי דה־מורגן נקבל כי

$$X \backslash \bigcup_\alpha F_\alpha = \bigcap_\alpha (X \backslash F_\alpha), \ \ X \backslash \bigcap_\alpha F_\alpha = \bigcup_\alpha (X \backslash F_\alpha)$$

תהי $(F_\alpha)_{\alpha\in I}$ אוסף קבוצות סגורות כך שחיתוך של כל מספר סופי של קבוצות מ־$(F_\alpha)_{\alpha\in I}$ לא ריק. צ"ל $\cap_{\alpha\in I}F_\alpha\neq\emptyset$. נניח בשלילה כי $\cap_{\alpha\in I}F_\alpha=\emptyset$, אזי

$$\bigcup_{\alpha\in I}(X\backslash F_\alpha)=X\backslash\bigcap_{\alpha\in I}F_\alpha=X\backslash\emptyset=X$$

כלומר $(X\backslash F_\alpha)_{\alpha\in I}$ כיסוי פתוח (כי כל $F_\alpha$ קבוצה סגורה), לכן מ־2 הוא מכיל תת כיסוי סופי, כלומר קיימים $\alpha_1,...,\alpha_m$ כך ש־$\bigcup_{i=1}^m(X\backslash F_{\alpha_i})=X$ לכן

$$X\backslash\bigcap_{i=1}^m F_{\alpha_i}=\bigcup_{i=1}^m(X\backslash F_{\alpha_i})=X$$

כלומר, $\bigcap_{i=1}^m F_{\alpha_i}=\emptyset$, סתירה.

**$3\Longleftarrow 1$):**

תהי $(x_n)\subset X$. צריך למצוא לה תת סדרה מתכנסת. עבור כל $n\geq 1$, נגדיר קבוצה

$$L_n=\{x_m\mid m\geq n\}\subset X$$

מכיוון ש־ $L_{n+1}\subset L_n$ מתקיים $\overline{L_{n+1}}\subset\overline{L_n}$.

נתבונן באוסף $(\overline{L_n})_{n=1}^\infty$ של קבוצות סגורות. עבור כל מס' סופי $\overline{L_{n_1}},...,\overline{L_{n_m}}\subset\overline{L_n}$ אם $n_1<...<n_m$ אזי $\bigcap_{j=1}^m\overline{L_{n_j}}=\overline{L_{n_m}}\neq\emptyset$. מ־3 מתקיים $\bigcap_{n=1}^\infty\overline{L_n}\neq\emptyset$. ניקח $a\in\bigcap_{n=1}^\infty\overline{L_n}$. עבור כל $n$ מתקיים $a\in\overline{L_n}$, לכן עבור כל $k\geq 1$ הכדור $B(a,\frac{1}{k})$ נחתך עם $L_n$ לכל $n$. ולכן קיים $x_{n_1}\in L_1$ כך ש־ $\rho(a,x_{n_1})<\frac{1}{1}$, קיים $x_{n_2}\in L_2,\ n_2>n_1$ כך ש־$\rho(a,x_{n_2})<\frac{1}{2}$ ....קיים $x_{n_k},\ n_k>n_{k-1}$ כך ש־$\rho(a,x_{n_k})<\frac{1}{k}$.

נתבונן בתת סדרה $x_n\subset(x_{n_k})$, מתקיים $\rho(a,x_{n_k})\xrightarrow[k\to\infty]{}0$, לכן $x_{n_k}\to a$.

**$1\Longleftarrow 2$):**

נתון $X$ מ"מ קומפקטי. צ"ל אם $(E_\alpha)_{\alpha\in I}$ כיסוי פתוח של $X$, אזי הוא מכיל תת כיסוי סופי.

**למה 1:**

קיים $\epsilon>0$ כך שלכל $x\in X$ הכדור $B(x,\epsilon)$ מוכל כולו באחת מקבוצות $E_\alpha$.

**הוכחה:**

נניח בשלילה שלא קיים $\epsilon>0$ כמתואר, אז לכל $n$ קיימת נק' $x_n$ כך ש־ $B(x_n,\frac{1}{n})$ אינו מוכל באף $E_\alpha$. $X$ מ"מ קומפקטי, לכן $(x_n)_{n=1}^\infty$ מכילה תת סדרה מתכנסת $x_{n_k}\to a$. $(E_\alpha)_{\alpha\in I}$ כיסוי, לכן קיים $\alpha_0$ כך ש־ $a\in E_{\alpha_0}$. $E_{\alpha_0}$ קבוצה פתוחה (כי זהו כיסוי פתוח), לכן קיים $r>0$ כך ש־ $B(a,r)\subset E_{\alpha_0}$. מכיוון ש־ $x_{n_k}\to a$ ו־ $\frac{1}{n_k}\to 0$, קיים $k_0$ כך ש־ $B(x_{n_{k_0}},\frac{1}{n_{k_0}})\subset B(a,r)$. אבל $B(a,r)\subset E_{\alpha_0}$, ולכן $B(x_{n_{k_0}},\frac{1}{n_{k_0}})\subset E_{\alpha_0}$ בסתירה לבחירה של $x_n$.

**למה 2:**

לכל $\epsilon>0$ קיים מס' סופי של נק' $x_1,...,x_p$ כך ש־ $\bigcup_{i=1}^p B(x_i,\epsilon)=X$.

**הוכחה:**

ניקח $x_1$ אם $B(x_1,\epsilon)=X$ סיימנו, אחרת, קיימת נק' $x_2\in X$ כך ש־ $\rho(x_1,x_2)\geq\epsilon$ (כלומר, $x_2\notin B(x_1,\epsilon)$). אם

$$B(x_1,\epsilon)\cup B(x_2,\epsilon)=X$$

סיימנו, אחרת, קיימת $x_3\in X$ כך ש־ $\rho(x_1,x_3)\geq\epsilon\ \wedge\ \rho(x_2,x_3)\geq\epsilon$...

אזי או שמצאנו כיסוי סופי של הכדורים עם ה־$\epsilon$ הנתון, או שמצאנו סדרה $(x_n)_{n=1}^\infty$ כך ש־ $\rho(x_i,x_j)\geq\epsilon$ לכל $i\neq j$. בפרט, $(x_n)_{n=1}^\infty$ וגם אף תת־סדרה שלה לא יכולה להיות סדרת קושי ולכן לא יכולה להתכנס. זאת סתירה לקומפקטיות $X$. מכאן שמצאנו כיסוי סופי של כדורים עם ה־$\epsilon$ הנתון.

**חזרה להוכחת המשפט:**

ניקח $\epsilon>0$ כמו בלמה 1. עבור $\epsilon$ זה, לפי למה 2 קיימות נק' $x_1,...,x_p$ כך ש־ $\cup_{i=1}^p B(x_i,\epsilon)=X$. לפי למה 1 ובחירתו של $\epsilon$, לכל כדור $B(x_i,\epsilon)$ קיימת $E_{\alpha_i}$ כך ש־ $B(x_i,\epsilon)\subset E_{\alpha_i}$, מתקיים

$$X=\bigcup_{i=1}^p B(x_i,\epsilon)\subset\bigcup_{i=1}^p E_{\alpha_i}$$

ולכן $(E_{\alpha_i})_{i=1}^p$ תת כיסוי סופי של $X$.

## 3 על סדרה יורדת של כדורים

מרחב מטרי $(X,\rho)$ שלם $\iff$ כל סדרה $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ של כדורים סגורים, כך ש־ $B_{n+1}\subset B_n$ לכל $n$ ורדיוס $r_n$ של $B_n$ מקיים $r_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, מקיימת $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \neq \emptyset$.

**הוכחה** $(\Longleftarrow)$:
יהי $X$ מ"מ שלם ו־$(B_n)_{n=1}^{\infty}$ כאשר $B_n=\overline{B}(x_n,r_n)$ סדרה כנ"ל. צ"ל $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \neq \emptyset$.
עבור כל $m>n$ מתקיים $x_m\in B_n$ (כי $B_m\subset B_n$), לכן $\rho(x_m,x_n)<r_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, כלומר $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ היא סדרת קושי. $X$ מ"מ שלם, לכן קיים גבול $\lim_{n\to\infty} x_n=a$. נוכיח כי $a\in B_n$ לכל $n$ ־ עבור כל $n$, הסדרה $(x_n,x_{n+1},...,)\subset B_n$ ו־$B_n$ קבוצה סגורה, לכן $a=\lim_{m\to\infty, m>n} x_m\in B_n$.
$(\Longrightarrow)$:
נניח שכל סדרה של כדורים כנ"ל בעלת חיתוך לא ריק, ונוכיח כי $X$ שלם.
תהי $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי ב־$X$, אזי קיים $n_1$ כך שלכל $n>n_1$ יתקיים $\rho(x_n,x_{n_1})<\frac{1}{2}$. קיים $n_2>n_1$ כך שלכל $n>n_2$ יתקיים $\rho(x_n,x_{n_2})<\frac{1}{2^2}$... קיים $n_k>n_{k-1}$ כך שלכל $n>n_k$ יתקיים $\rho(x_n,x_{n_k})<\frac{1}{2^k}$.
נגדיר $B_k=\overline{B}(x_{n_k},\frac{1}{2^{k-1}})$ ונוכיח כי $B_{k+1}\subset B_k$ (כלומר, זוהי סדרה יורדת). לכל $y\in B_{k+1}$ מתקיים

$$\rho(y,x_{n_k})\le\rho(y,x_{n_{k+1}})+\rho(x_{n_{k+1}},x_{n_k})\le\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2^{k-1}}$$

והרדיוס של $B_k$ הוא $\frac{1}{2^{k-1}}$, לכן $y\in B_k$.
$\frac{1}{2^{k-1}} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ לכן מתקיימים תנאי ההנחה ומכאן קיימת נק' $a\in\bigcap_{k=1}^{\infty}B_k$, אזי לכל $k$ מתקיים $\rho(a,x_{n_k})\le\frac{1}{2^{k-1}}\to 0$, כלומר, $a$ היא הגבול של תת הסדרה $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, לכן גם $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל־$a$. קיבלנו כי כל סדרת קושי ב־$X$ מתכנסת, ולכן $X$ שלם.

## 4 עיקרון של ההעתקה המכווצת

יהי $(X,\rho)$ מ"מ שלם ו־$A:X\to X$ כיווץ. אזי $A$ בעלת נק' שבת, $x_0$, יחידה ולכל $y\in X$ קיים גבול $\lim_{n\to\infty}A^n y=x_0$.

**הוכחה** עבור $y\in X$ נגדיר

$$y_n=\begin{cases}A^n y & n\in\mathbb{N}\\ y & n=0\end{cases}$$

נוכיח שהסדרה $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי. לפי ההגדרה קיים $0<\alpha<1$ כך ש־

$$\forall x_1,x_2\in X\quad \rho(Ax_1,Ax_2)\le\alpha\rho(x_1,x_2)$$

אזי לכל $m>n$ מתקיים־

$$\begin{aligned}\rho(y_m,y_n)&=\rho(Ay_{m-1},Ay_{n-1})\le\alpha\rho(y_{m-1},y_{n-1})\le...\le\alpha^n\rho(y_{m-n},y_0)\le\\ &\le\alpha^n\sum_{i=0}^{m-n-1}\rho(y_i,y_{i+1})\le\alpha^n\sum_{i=0}^{m-n-1}\alpha^i\rho(y_0,y_1)\le\alpha^n\rho(y_0,y_1)\sum_{i=0}^{\infty}\alpha^i=\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(y_0,y_1)\xrightarrow[n\to\infty]{}0\end{aligned}$$

לכן זוהי סדרת קושי ו־$X$ שלם ולכן קיים הגבול $x_0=\lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}A^n y$ ולכן־

$$A(x_0)=A(\lim_{n\to\infty}A^n y)\overset{(*)}{=}\lim_{n\to\infty}A(A^n y)=\lim_{n\to\infty}A^{n+1}y=x_0$$

$(*)$ ־ מרציפות $A$

ולכן $x_o$ נקודת שבת.
יחידות ־ תהי $y_0 \neq x_0$ נקודת שבת, אזי

$$0 \neq \rho(x_0, y_0) = \rho(Ax_0, Ay_0) \leq \alpha\rho(x_0, y_0)$$

סתירה לכך ש־ $\alpha < 1$.

## 5 אי שוויון בסל

תהי $A$ מערכת אורתונורמלית סופית או בת מניה במרחב אוקלידי $\mathcal{Y}$, אזי לכל $x \in \mathcal{Y}$ מתקיים $\sum_{u\in A}\langle x, u\rangle^2 \leq \|x\|^2$

**טענה** תהי $U = (u_i)_{i=1}^n$ מערכת אורתונורמלית סופית במרחב אוקלידי $\mathcal{Y}$ ויהי $M$ תת מרחב הנפרש ע"י $U$. ההטלה $y$ של וקטור $x \in \mathcal{Y}$ ל־$M$ היא $y = \sum_{i=1}^n \langle x, u_i\rangle u_i$. אזי $x - y$ ניצב לכל $z \in M$ ומתקיים

$$\forall y \neq z \in M \quad \|x - y\| < \|x - z\|$$

**הוכחת הטענה** לכל $M \ni z = \sum_{j=1}^n \lambda_j u_j$ מתקיים

$$\begin{aligned}\langle x - y, z\rangle &= \langle x - \sum_{i=1}^n \langle x, u_i\rangle u_i, \sum_{j=1}^n \lambda_j u_j\rangle = \langle x, \sum_{j=1}^n \lambda_j u_j\rangle - \langle \sum_{i=1}^n \langle x, u_i\rangle u_i, \sum_{j=1}^n \lambda_j u_j\rangle = \\ &= \sum_{j=1}^n \lambda_j\langle x, u_j\rangle - \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \langle x, u_i\rangle\lambda_j\langle u_i, u_j\rangle = \sum_{j=1}^n \lambda_j\langle x, u_j\rangle - \sum_{j=1}^n \langle x, u_j\rangle\lambda_j = 0\end{aligned}$$

כלומר $(x - y) \perp z$ עבור כל $z \in M$.
לכל $y \neq z \in M$ מתקיים

$$\|x - z\|^2 = \|(x - y) + (y - z)\|^2 \overset{(*)}{=} \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2 \geq \|x - y\|^2$$

$(*)$ ־ $x - y \perp y - z$ (פיתגורס)

**מסקנה**

$$\begin{aligned}0 \leq \|x - \sum_{i=1}^n \langle x, u_i\rangle u_i\|^2 &= \langle x - \sum_{i=1}^n \langle x, u_i\rangle u_i, x - \sum_{i=1}^n \langle x, u_i\rangle u_i\rangle = \\ &= \langle x - \sum_{i=1}^n \langle x, u_i\rangle u_i, x\rangle - \langle x - \sum_{i=1}^n \langle x, u_i\rangle u_i, \sum_{i=1}^n \langle x, u_i\rangle u_i\rangle \overset{(*)}{=} \langle x - \sum_{i=1}^n \langle x, u_i\rangle u_i, x\rangle = \\ &= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^n \langle x, u_i\rangle\langle u_i, x\rangle = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^n \langle x, u_i\rangle^2\end{aligned}$$

$(*)$ ־ $\langle x - \sum_{i=1}^n \langle x, u_i\rangle u_i, \sum_{i=1}^n \langle x, u_i\rangle u_i\rangle = 0$ כי $x - \sum_{i=1}^n \langle x, u_i\rangle u_i = x - y$ ו־$\sum_{i=1}^n \langle x, u_i\rangle u_i = y \in M$, ומהטענה הם ניצבים.

**הוכחת אי שוויון בסל** אם $A$ קבוצה סופית, אזי מתקיימת המסקנה.
אם $A = (u_i)_{i=1}^\infty$ אזי לפי המסקנה, עבור כל $n$ מתקיים $\sum_{i=1}^n \langle x, u_i\rangle^2 \leq \|x\|^2$ לכן (במעבר לגבול) מתקיים $\sum_{i=1}^\infty \langle x, u_i\rangle^2 \leq \|x\|^2$
(הטור מונוטוני עולה וחסום).

## 6 על מערכת אורתונורמלית שלמה ושוויון פרסבל

תהי $\phi = (\varphi_i)_{i=1}^{\infty}$ מערכת אורתונורמלית במרחב אוקלידי $\mathcal{Y}$, התנאים הבאים שקולים:

1. $\phi$ שלמה
2. $\phi$ בסיס, בפרט עבור כל $x \in \mathcal{Y}$ מתקיים $x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, \varphi_i \rangle \varphi_i$
3. עבור כל $x \in \mathcal{Y}$ מתקיים שוויון פרסבל:

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, \varphi_i \rangle^2$$

**הוכחה** $1 \Longrightarrow 2$):
נתון $\phi$ מערכת אורתונורמלית שלמה. צ"ל עבור כל $x \in \mathcal{Y}$ קיימת הצגה יחידה $x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, \varphi_i \rangle \varphi_i$, כלומר, לכל $\epsilon > 0$ קיים $n_0 = n_{0(\epsilon)}$ (תלוי ב־$\epsilon$) כך שלכל $n > n_0$ מתקיים $\|x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, \varphi_i \rangle \varphi_i\| < \epsilon$.
נשים לב כי הפיתוח $x = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \varphi_i$ הוא יחיד

$$0 = x - x = \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_i - \langle x, \varphi_i \rangle) \varphi_i$$

$$0 = \langle 0, \varphi_j \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_i - \langle x, \varphi_i \rangle) \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \lambda_j - \langle x, \varphi_j \rangle$$

יהא $\epsilon > 0$, $\phi$ שלמה לכם קיים $n_{0(\epsilon)}$ ו־$\lambda_1, ..., \lambda_{n_0} \in \mathbb{R}$ כך ש־ $\|x - \sum_{i=1}^{n_0} \lambda_i \varphi_i\| < \epsilon$. לפי טענה המופיעה באי שוויון בסל מתקיים

$$\|x - \sum_{i=1}^{n_0} \langle x, \varphi_i \rangle \varphi_i\| \leq \|x - \sum_{i=1}^{n_0} \lambda_i \varphi_i\| < \epsilon$$

(אי השוויון הראשון חלש מכיוון ש־$\sum_{i=1}^{n_0} \lambda_i \varphi_i$ יכול להיות שווה ל־ $\sum_{i=1}^{n_0} \langle x, \varphi_i \rangle \varphi_i$ בגלל שהם באותו מרחב)
לכן עבור כל $n > n_0$ מתקיים

$$\|x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, \varphi_i \rangle \varphi_i\| \leq \|x - \sum_{i=1}^{n_0} \langle x, \varphi_i \rangle \varphi_i\| < \epsilon$$

$2 \Longrightarrow 3$):
לפי המסקנה בהוכחה של בסל נקבל

$$\|x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, \varphi_i \rangle \varphi_i\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \langle x, \varphi_i \rangle^2$$

מ־2 נקבל $\lim_{n\to\infty} \|x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, \varphi_i \rangle \varphi_i\| = 0$, לכן $\lim_{n\to\infty} \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \langle x, \varphi_i \rangle^2 = 0$ ומכאן ש־ $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, \varphi_i \rangle^2$
$3 \Longrightarrow 1$):
נניח כי עבור כל $x \in \mathcal{Y}$ מתקיים $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, \varphi_i \rangle^2$, אזי לפי המסקנה בהוכחה של בסל לכל $n$ מתקיים

$$\|x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, \varphi_i \rangle \varphi_i\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \langle x, \varphi_i \rangle^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

כלומר, $x \in span(\phi)$.

## 7 משפט על טור פורייה של פונקציה הגזירה ברציפות למקוטעין

תהי $f$ רציפה בקטע $[0,2\pi]$ וגזירה ברציפות למקוטעין ב־ $[0,2\pi]$ ו־ $f(0)=f(2\pi)$ אזי טור פורייה של $f$ מתכנס אליה במידה שווה ב־ $[0,2\pi]$

$$f(x)=a_0(f)+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(f)\cos(nx)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n(f)\sin(nx)$$

**הוכחה** הפונקציה $f'$ רציפה למקוטעין ולכן אינטגרבילית רימן ב־ $[0,2\pi]$ לכן קיימות $a_n(f')$ ו־ $b_n(f')$ עבור $n\geq 1$:

$$\begin{aligned}a_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos(nx)dx \overset{\star}{=} \frac{1}{\pi}[f(x)\frac{\sin(nx)}{n}|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\frac{\sin(nx)}{n}f'(x)dx]=\\ &= -\frac{1}{n}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f'(x)\sin(nx)dx=-\frac{1}{n}b_n(f')\end{aligned}$$

$\star$ ־ אינטגרציה בחלקים

$$\begin{aligned}b_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin(nx)dx \overset{\star}{=} \frac{1}{\pi}[-f(x)\frac{\cos(nx)}{n}|_0^{2\pi}+\int_0^{2\pi}\frac{\cos(nx)}{n}f'(x)dx]=\\ &= \frac{1}{\pi}[-\frac{1}{n}(f(2\pi)-f(0))+\frac{1}{n}\int_0^{2\pi}f'(x)\cos(nx)dx]=\frac{1}{n}a_n(f')\end{aligned}$$

$\star$ ־ אינטגרציה בחלקים

מצד שני, לפי אי שיוויון בסל לפונקציה $f'\in H[0,2\pi]$ מתקיים

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(f')^2<\infty,\ \sum_{n=1}^{\infty}b_n(f')^2<\infty$$

מכיוון שלכל $x,y\in\mathbb{R}$ מתקיים $(x-y)^2=x^2-2xy+y^2\geq 0$ ולכן $xy\leq\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ ומכאן־

$$|a_n(f)|=\frac{1}{n}|b_n(f')|\leq\frac{1}{2}(b_n(f')^2+\frac{1}{n^2})$$

ו־

$$|b_n(f)|=\frac{1}{n}|a_n(f')|\leq\frac{1}{2}(a_n(f')^2+\frac{1}{n^2})$$

אז

$$|a_0(f)|+\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n(f)|+|b_n(f)|)\leq|a_0(f)|+\frac{1}{2}[\sum_{n=1}^{\infty}(a_n(f')^2+b_n(f')^2)+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}]<\infty$$

אבל לכל $x\in[0,2\pi]$

$$\begin{aligned}|a_n(f)\cos(nx)| &\leq |a_n(f)|\\ |b_n(f)\sin(nx)| &\leq |b_n(f)|\end{aligned}$$

לפי קריטריון ויירשטראס, טור פורייה:

$$\mathscr{S}_n^f(x)=a_0(f)+\sum_{k=1}^{n}a_k(f)\cos(kx)+\sum_{k=1}^{n}b_k(f)\sin(kx)$$

מתכנס בהחלט ובמידה שווה ל־ $\mathscr{S}^f(x)$ אשר היא פונקציה רציפה ב־ $[0,2\pi]$ (כי אברי הטור הם פונקציות רציפות ב־ $[0,2\pi]$ וההתכנסות היא במידה שווה). התכנסות במ"ש גוררת התכנסות בממוצע ולכן $\mathscr{S}_n^f\to\mathscr{S}^f$ בממוצע, מצד שני $f\in H[0,2\pi]$ ולכן $\mathscr{S}_n^f\to f$ בממוצע, ומיחידות הגבול $[f]=[\mathscr{S}^f]$ ב־ $H[0,2\pi]$, כלומר $f=\mathscr{S}^f$ כמעט תמיד, אבל $f$ ו־ $\mathscr{S}^f$ רציפות ולכן שוות.

## 8 תנאי דיני

יהיו $f \in H[0,2\pi]$, $x_0 \in (0,2\pi)$ ו־ $\delta > 0$ כך ש־

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} |\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}|dx < \infty$$

אזי טור פורייה של $f$ מתכנס ב־ $x_0$ ל־ $f(x_0)$.

**טענה** תהי $\psi$ מוגדרת ב־ $\mathbb{R}$, אינטגרבילית ב־ $[0,T]$ עבור $T > 0$ המקיימת $\psi(x+T) = \psi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \ (*)$, אזי עבור כל $a \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$\int_a^{a+T} \psi(x)dx = \int_0^T \psi(x)dx$$

**הוכחת הטענה**

$$\int_a^{a+T} \psi(x)dx - \int_0^T \psi(x)dx = \int_a^T \psi(x)dx + \int_T^{a+T} \psi(x)dx - (\int_a^T \psi(x)dx + \int_0^a \psi(x)dx) =$$

$$= \int_T^{a+T} \psi(x)dx - \int_0^a \psi(x)dx \overset{x=y+T}{=} \int_0^a \psi(y+T)dy - \int_0^a \psi(x)dx \overset{(*)}{=} 0$$

**הוכחת המשפט** מהטענה נקבל

$$\int_0^{2\pi} D_n(x_0-t)dt = \int_{x_0}^{x_0-2\pi} D_n(\tau)d\tau = \int_{x_0-2\pi}^{x_0} D_n(\tau)d\tau = \int_0^{2\pi} D_n(\tau)d\tau \overset{\star}{=} 2\pi$$

$\star$ ־ מתכונה 2 של גרעין דריכלה ($\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_n(x)dx = 1$)
לכן

$$f(x_0) - \mathscr{S}_n^f(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x_0)D_n(x_0-t)dt - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)D_n(x_0-t)dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [\frac{f(x_0)-f(t)}{x_0-t}][\frac{x_0-t}{\sin(\frac{x_0-t}{2})}]\sin(\frac{2n+1}{2}(x_0-t))dt \overset{\star}{=} ...$$

- הפונקציה $g(t) = \frac{f(x_0)-f(t)}{x_0-t}$ אינטגרבילית ב־ $[0,2\pi]$ כי $g$ אינטגרבילית ב־ $[x_0-\delta, x_0+\delta]$ לפי תנאי המשפט. עבור $t \in [0,2\pi]\backslash(x_0-\delta, x_0+\delta)$ מתקיים $|g(t)| \leq \frac{1}{\delta}|f(t)-f(x_0)|$, $|f(t)-f(x_0)|$ אינטגרבילית ב־$[0,2\pi]$ ולכן גם $g$ אינטגרבילית.
- הפונקציה $\frac{x_0-t}{\sin(\frac{x_0-t}{2})}$ אינטגרבילית ב־ $[0,2\pi]$ כי:

כאשר $\sin(\frac{x_0-t}{2}) = 0$ ו־ $t \in [0,2\pi]$ אז $\frac{x_0-t}{2} = \pi k$ עבור $k \in \mathbb{Z}$. לכן $t = x_0$ אבל ב־ $t = x_0$ הפונקציה $\frac{x_0-t}{\sin(\frac{x_0-t}{2})}$ רציפה
ולכן המכפלה אינטגרבילית

$$H[0,2\pi] \ni \frac{f(x_0)-f(t)}{x_0-t} \cdot \frac{x_0-t}{\sin(\frac{x_0-t}{2})} = \varphi(t)$$

ולכן

$$... \overset{\star}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(t)\sin(\frac{2n+1}{2}(x_0-t))dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

לפי למת רימן לבג.

## 9 משפט בייר

לא ניתן להציג מרחב מטרי שלם כאיחוד בן מניה של קבוצות דלילות: אם $X$ שלם ולכל $n \in \mathbb{N}$ הקבוצה $A_n \subset X$ דלילה, אזי $X \neq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

**הוכחה** נניח בשלילה $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ כאשר כל $A_n$ קבוצה דלילה ו- $X$ מרחב מטרי שלם.
נקח כדור סגור $\overline{B_0}$ עם רדיוס 1. $A_1$ קבוצה דלילה לכן קיים כדור סגור $\overline{B_1}$ עם רדיוס $< \frac{1}{2}$ כך ש- $\overline{B_1} \subset \overline{B_0}$ ו- $\overline{B_1} \cap A_1 = \emptyset$.
גם $A_2$ קבוצה דלילה, לכן קיים כדור סגור $\overline{B_2}$ עם רדיוס $< \frac{1}{3}$ כך ש- $\overline{B_2} \subset \overline{B_1}$ ו- $\overline{B_2} \cap A_2 = \emptyset$, ולכן גם $\overline{B_2} \cap A_1 = \emptyset$. (...) גם $A_n$ קבוצה דלילה, לכן קיים כדור סגור $\overline{B_n}$ עם רדיוס $< \frac{1}{n+1}$ כך ש- $\overline{B_n} \subset \overline{B_{n-1}}$ ו- $\overline{B_n} \cap A_n = \emptyset$ ובהכרח $\overline{B_n} \cap A_k = \emptyset$ לכל $1 \leq k \leq n$.
$X$ מרחב מטרי שלם $(\overline{B_n})_{n=1}^{\infty}$ סדרה יורדת של כדורים סגורים עם רדיוס שואף ל- 0. לכן, לפי משפט על סדרה יורדת של כדורים סגורים, קיימת $z$ כך ש- $z \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{B_n}$. אזי $z \notin A_n$ לכל $n$, סתירה.

**ניסוח שקול** במילים אחרות, אם כל קבוצה $E_n$ היא פתוחה וצפופה ב- $X$ אזי $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n$ היא גם קבוצה צפופה.

**מסקנה** מרחב מטרי שלם ללא נקודות מבודדות לא ניתן למניה.

## 10 משפט פייר

תהי $f$ רציפה ב- $[0, 2\pi]$ ו- $f(0) = f(2\pi)$, אזי סכומי $Fejer$ $\{\sigma_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathscr{S}_k^f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)K_n(x-t)dt$$

מתכנסים ל- $f$ במידה שווה על $[0, 2\pi]$.

**הוכחה** נמשיך את $f$ עד פונקציה רציפה $2\pi$ מחזורית ב- $\mathbb{R}$. נקח $x \in [0, 2\pi]$:

$$\begin{aligned}
\sigma_n(x) - f(x) &\overset{(1)}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)K_n(x-t)dt - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)K_n(x-t)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (f(t)-f(x))K_n(x-t)dt \\
&\overset{(2)}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-x}^{2\pi-x} (f(x+\tau)-f(x))K_n(\tau)d\tau \\
&\overset{(3)}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(x+\tau)-f(x))K_n(\tau)d\tau
\end{aligned}$$

כאשר (1) מתקיים מתכונה 2 של גרעין $Fejer$. נסמן $\tau = t - x$ ואז (2) מתקיים כי $K_n$ זוגית ולכן $K_n(t-x) = K_n(x-t) = K_n(\tau)$. (3) נובע ממחזוריות $f$.
$f$ רציפה ו- $2\pi$ מחזורית ב- $\mathbb{R}$ ולכן חסומה ורציפה במידה שווה ב- $\mathbb{R}$. יהא $0 < M \in \mathbb{R}$ כך ש- $|f(x)| \leq M$ $\forall x \in \mathbb{R}$.
יהי $\epsilon > 0$. מרציפות במ"ש קיים $\delta > 0$ כך ש- $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon \implies |x_1 - x_2| < \delta$ $(*)$. מתקיים-

$$|\sigma_n(x) - f(x)| = |\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta}(f(x+\tau)-f(x))K_n(\tau)d\tau + \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}(f(x+\tau)-f(x))K_n(\tau)d\tau + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi}(f(x+\tau)-f(x))K_n(\tau)d\tau|$$

נמצא חסמים לשלושת האינטגרלים הללו:

$$|\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}(f(x+\tau)-f(x))K_n(\tau)d\tau| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}|f(x+\tau)-f(x)|K_n(\tau)d\tau \leq$$

$$\overset{(1)}{\leq} \epsilon\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_n(\tau)d\tau \overset{(2)}{=} \epsilon$$

כאשר (1) מתקיים מ־ $(*)$ וכי הגדלנו את טווח האינטגרל. (2) מתקיים מתכונה 2 של גרעין $Fejer$.

$$|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta}(f(x+\tau)-f(x))K_n(\tau)d\tau + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi}(f(x+\tau)-f(x))K_n(\tau)d\tau| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta}|f(x+\tau)-f(x)|K_n(\tau)d\tau + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi}|f(x+\tau)-f(x)|K_n(\tau)d\tau \leq$$

$$\leq 2M\frac{1}{2\pi}[\int_{-\pi}^{-\delta}K_n(\tau)d\tau + \int_{\delta}^{\pi}K_n(\tau)d\tau] \overset{(1)}{=} \frac{2M}{2\pi}[\int_{\delta}^{\pi}K_n(\tau)d\tau + \int_{\pi}^{2\pi-\delta}K_n(t')dt'] =$$

$$= \frac{2M}{2\pi}\int_{\delta}^{2\pi-\delta}K_n(\tau)d\tau \overset{(2)}{<} \epsilon$$

(1) נסמן $\tau = t' - 2\pi$ עבור $\pi \leq t' \leq 2\pi - \delta$

(2) מתכונה 3 של גרעין $Fejer$ קיים $n_0$ כך שלכל $n \geq n_0$ מתקיים

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{2\pi-\delta}K_n(\tau)d\tau < \frac{\epsilon}{2M}$$

עבור $\epsilon$ נתון מצאנו $n_0$ כך שלכל $n \geq n_0$ ולכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$|\sigma_n(x) - f(x)| < 2\epsilon$$

## 11 משפט על תנאים המבטיחים $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$

תהי $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ קבוצה פתוחה ו־ $f : \Omega \to \mathbb{R}$ בעלת נגזרות חלקיות בכל נקודה $(x,y) \in \Omega$. נניח שבכל $(x,y) \in \Omega$ קיימות נגזרות משולבות $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ ו־ $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ והן רציפות בנקודה $(x_0,y_0) \in \Omega$ אזי

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0)$$

**הוכחה** תהי $(x_0,y_0) \in \Omega$. עבור כל $h,k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ מספיק קטנים, נגדיר את הפוקנציה:

$$W(h,k) = \frac{f(x_0+h,y_0+k) - f(x_0,y_0+k) - f(x_0+h,y_0) + f(x_0,y_0)}{hk}$$

ונגדיר פונקציה

$$\varphi(x) = \frac{f(x,y_0+k) - f(x,y_0)}{k}$$

עבור כל $0 \neq |k|$ מספיק קטן. כעת

$$W(h,k) = \frac{\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0)}{h}$$

$\varphi$ גזירה (לפי $x$) בכל $x$ מספיק קרוב ל־ $x_0$ מכיוון ש־

$$\varphi'(x)=\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y_0+k)-\frac{\partial f}{\partial x}(x,y_0)}{k}$$

אזי לפי משפט הערך הממוצע, קיים $\theta_1\in(0,1)$ כך ש־

$$W(h,k)=\frac{\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)}{h}=\varphi'(x_0+\theta_1 h)=\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_1 h,y_0+k)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_1 h,y_0)}{k}$$

נשתמש במשפט הערך הממוצע לפונקציה $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_1 h,y)$ עבור $y\in[y_0,y_0+k]$. פונקציה זו גזירה לפי $y\in(y_0,y_0+k)$ כי קיימת

$$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_1 h,y))=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0+\theta_1 h,y)$$

לכן קיימת $\theta_2\in(0,1)$ כך ש־

$$W(h,k)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0+\theta_1 h,y_0+\theta_2 k)$$

באופן דומה אם נגדיר

$$\psi(y)=\frac{f(x_0+h,y)-f(x_0,y)}{h}$$

אזי

$$W(h,k)=\frac{\psi(y_0+k)-\psi(y_0)}{k}$$

ולכן קיימות $\theta_3,\theta_4\in(0,1)$ כך ש־

$$W(h,k)=\psi'(y_0+\theta_3 k)=\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h,y_0+\theta_3 k)-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0+\theta_3 k)}{h}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0+\theta_4 h,y_0+\theta_3 k)$$

הוכחנו כי לכל $h,k\neq 0$ קטנים, קיימות $\theta_i\in(0,1)$ עבור $1\le i\le 4$ כך ש־

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0+\theta_4 h,y_0+\theta_3 k)=W(h,k)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0+\theta_1 h,y_0+\theta_2 k)$$

מרציפות $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ ו־ $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ ב־ $(x_0,y_0)$ קיימים

$$\lim_{h,k\to 0}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0+\theta_1 h,y_0+\theta_2 k)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)=\lim_{h,k\to 0}W(h,k)=$$

$$=\lim_{h,k\to 0}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0+\theta_4 h,y_0+\theta_3 k)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0)$$

## 12 פיתוח לטור טיילור בכמה משתנים

תהי $f:B(\overline{x_0},\epsilon)\to\mathbb{R}$ עבור $\overline{x_0}\in\mathbb{R}^d$ בעלת כל הנגזרות החלקיות מסדר $1,2,...,m+1$ והן רציפות. תהי $\overline{\Delta x}=(\Delta x_1,...,\Delta x_d)\in\mathbb{R}^d$ כך ש־ $\|\overline{\Delta x}\|<\epsilon$, אזי קיים $\theta\in(0,1)$ כך ש־

$$f(\overline{x_0}+\overline{\Delta x})=f(\overline{x_0})+\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n!}\sum_{\substack{k_1,...,k_d\ge 0\\ k_1+...+k_d=n}}\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_d!}\cdot\frac{\partial^n f}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_d^{k_d}}(\overline{x_0})\Delta x_1^{k_1}\cdots\Delta x_d^{k_d}+R$$

כאשר

$$R=\frac{1}{(m+1)!}\sum_{\substack{k_1,\dots,k_d\geq 0\\ k_1+\dots+k_d=m+1}}\frac{(m+1)!}{k_1!k_2!\cdots k_d!}\cdot\frac{\partial^{m+1}f}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_d^{k_d}}(\overline{x_0}+\theta\overline{\Delta x})\Delta x_1^{k_1}\cdots\Delta x_d^{k_d}$$

**הוכחה** נגדיר פונקציה $F(t)=f(\overline{x_0}+t\overline{\Delta x})$ כך ש־ $\|\overline{\Delta x}\|<\epsilon$ ולכן $F$ מוגדרת ב־ $(-T,T)$ עבור $T=\frac{\epsilon}{\|\overline{\Delta x}\|}>1$, ונוכיח:

1. $F$ גזירה ברציפות $m+1$ פעמים ב־ $(-T,T)$ כאשר $\overline{x}=\overline{x_0}+t\overline{\Delta x}$, $F^{(n)}(t)=f_n(\overline{x})$ ו־

$$f_{n+1}(\overline{x})=\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial f_n}{\partial x_i}(\overline{x})\Delta x_i$$

2.

$$f_n(\overline{x})=\sum_{\substack{k_1,\dots,k_d\geq 0\\ k_1+\dots+k_d=n}}\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_d!}\cdot\frac{\partial^n f}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_d^{k_d}}(\overline{x})\Delta x_1^{k_1}\cdots\Delta x_d^{k_d}$$

נראה

1. עבור $n=0$ נכון. נניח נכונות עבור $n$ ומתקיים

$$F^{(n+1)}(t)=\frac{d}{dt}f_n(\overline{x_0}+t\overline{\Delta x})=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_n}{\partial x_i}(\overline{x})\Delta x_i=f_{n+1}(\overline{x})$$

$$f_1(\overline{x})=\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{x})\Delta x_i$$

$$f_2(\overline{x})=\sum_{i_1=1}^{d}\Delta x_{i_1}\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}(\sum_{i_2=1}^{d}\frac{\partial f}{\partial x_{i_2}}(\overline{x})\Delta x_{i_2})=\sum_{i_1,i_2=1}^{d}\Delta x_{i_1}\Delta x_{i_2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_2}\partial x_{i_1}}(\overline{x})=$$

$$\stackrel{\star}{=}\sum_{\substack{k_1,\dots,k_d\geq 0\\ k_1+\dots+k_d=2}}\frac{2!}{k_1!\dots k_d!}\Delta x_1^{k_1}\cdots\Delta x_d^{k_d}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_d^{k_d}}$$

כאשר $\star$ מתקיים כי

$$(a_1+\cdots+a_d)^2=\sum_{i_1,i_2=1}^{d}a_{i_1}a_{i_2}=\sum_{\substack{k_1,\cdots,k_d\geq 0\\ \sum_{i=1}^{d}k_i=2}}\frac{2!}{k_1!\cdots k_d!}a_1^{k_1}\cdots a_d^{k_d}$$

2. לפי (1) מתקיים

$$f_n(\overline{x})=\sum_{1\leq i_1,\dots,i_n\leq d}\Delta x_{i_1}\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}(\Delta x_{i_2}\frac{\partial}{\partial x_{i_2}}(\dots\Delta x_{i_{n-1}}\frac{\partial}{\partial x_{i_{n-1}}}(\Delta x_{i_n}\frac{\partial}{\partial x_{i_n}}f)\dots))=$$

$$=\sum_{1\leq i_1,\dots,i_n\leq d}\Delta x_{i_1}\cdots\Delta x_{i_d}\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_n}\cdots\partial x_{i_1}}(\overline{x})$$

נשווה עם

$$(a_1+...+a_d)^n=\sum_{1\le i_1,...,i_n\le d} a_{i_1}\cdots a_{i_n}$$

שני איברים $a_{i_1},...,a_{i_n}$, $a_{j_1},...,a_{j_n}$ שווים אם ורק אם

$$\Delta x_{i_1}\cdots\Delta x_{i_n}\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_n}\cdots\partial x_{i_1}}=\Delta x_{j_1}\cdots\Delta x_{j_n}\frac{\partial^n f}{\partial x_{j_n}\cdots\partial x_{j_1}}$$

ולכן

$$f_n(\overline{x})=\sum_{\substack{k_1,\cdots,k_d\ge 0\\ k_1+...+k_d=n}}\frac{n!}{k_1!\cdots k_d!}\Delta x_1^{k_1}\cdots\Delta x_d^{k_d}\frac{\partial^n f}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_d^{k_d}}(\overline{x})$$

מכיוון ש־ $F$ גזירה ברציפות $m+1$ פעמים ב־ $(-T,T)$ כאשר $T>0$, עבור $t=1$:

$$F(1)=F(0)+\sum_{n=1}^{m}\frac{F^{(n)}(0)}{n!}1^n+\frac{1}{(m+1)!}F^{(m+1)}(\theta)$$

עבור $\theta\in(0,1)$. בעזרת (2) מתקיים:

$$f(\overline{x_0}+\overline{\Delta x})=f(\overline{x_0})+\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n!}\sum_{\substack{(k_1,...,k_d)\\ k_1+...+k_d=n}}\Delta x_1^{k_1}\cdots\Delta x_d^{k_d}\frac{\partial^n f}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_d^{k_d}}(\overline{x_0})+$$

$$+\frac{1}{(m+1)!}\sum_{\substack{(k_1,...,k_d)\\ k_1+...+k_d=m+1}}\Delta x_1^{k_1}\cdots\Delta x_d^{k_d}\frac{\partial^{m+1} f}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_d^{k_d}}(\overline{x_0}+\theta\overline{\Delta x})$$

## 13 תנאים על נגזרות מסדר ראשון ושני עבור מינימום ומקסימום

**משפט (תנאי הכרחי לקיום נקודת אקסטרימום)** תהי $\overline{a}=(a_1,...,a_d)$ נקודת אקסטרימום של $f:\Omega\to\mathbb{R}$ ויהי $1\le i\le d$. אם קיימת $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{a})$ אזי היא 0.

**הוכחה** נגדיר פונקציה $\varphi(x_i)=f(a_1,...,a_{i-1},x_i,a_{i+1},...,a_d)$ ו־ $\varphi:(a_i-\epsilon,a_i+\epsilon)\to\mathbb{R}$. עבור כל $x_i$ קרוב ל־ $a_i$

$$f(a_1,...,a_{i-1},x_i,a_{i+1},...,a_d)\le f(\overline{a})$$

או

$$f(a_1,...,a_{i-1},x_i,a_{i+1},...,a_d)\ge f(\overline{a})$$

לכן $a_i$ נקודת אקסטרימום של $\varphi$. לפי התנאי קיימת $\varphi'(a_i)=\frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{a})$ לכן $\varphi'(a_i)=0$.

**משפט 1 (תנאי מספיק לקיום אקסטרימום)** תהי $f$ בעלת כל הנגזרות החלקיות מסדר 1 ו־2 והן רציפות. עבור נקודה סטציונארית $\overline{x_0}$ ו־$\Delta x\in\mathbb{R}^d$, נסמן ב־$l_f$ את התבנית הריבועית

$$l_f(\overline{\Delta x})=\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_i}(\overline{x_0})\Delta x_i^2+2\sum_{1\le i<j\le d}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(\overline{x_0})\Delta x_i\Delta x_j$$

אם $l_f$ חיובית לחלוטין אז $\overline{x_0}$ נקודת מינימום, ואם $l_f$ שלילית לחלוטין אז $\overline{x_0}$ נקודת מקסימום.

**הוכחה** ראינו כי עבור $\overline{\Delta x}$ עם $\|\overline{\Delta x}\|$ קטן מתקיים:

$$f(\overline{x_0}+\overline{\Delta x})-f(\overline{x_0})=\frac{1}{2}l_f(\overline{\Delta x})+\frac{1}{2}R(\overline{\Delta x})$$

כאשר

$$R(\overline{\Delta x})=\sum_{i=1}^{d}\alpha_{ii}(\overline{\Delta x})\Delta x_i^2+2\sum_{1\le i<j\le \alpha}\alpha_{ij}(\overline{\Delta x})\Delta x_i\Delta x_j$$

כאשר $\forall i,j\ \alpha_{ij}(\overline{\Delta x})\xrightarrow[\overline{\Delta x}\to 0]{}0$

נניח ש־ $l_f$ חיובית לחלוטין, יהי $\overline{\Delta x}\neq 0$. נגדיר $\bar{t}=\frac{\overline{\Delta x}}{\|\overline{\Delta x}\|}\in S^{d-1}=\{\overline{y}\in\mathbb{R}^d \mid \|\overline{y}\|=1\}$.

$$l_f(\overline{\Delta x})=l_f(\|\overline{\Delta x}\|\bar{t})=\|\overline{\Delta x}\|^2 l_f(\bar{t})\ge M\|\overline{\Delta x}\|^2$$

עבור $M>0$. בנוסף, מכיוון ש־ $\alpha_{ij}(\overline{\Delta x})\xrightarrow[\overline{\Delta x}\to 0]{}0$, לכל $\epsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $i,j$ מתקיים $\|\overline{\Delta x}\|<\delta\implies|\alpha_{ij}(\overline{\Delta x})|<\epsilon$ ולכן־

$$|R(\overline{\Delta x})|\le\sum_{i=1}^{d}|\alpha_{ii}(\overline{\Delta x})|\Delta x_i^2+2\sum_{1\le i<j\le d}|\alpha_{ij}(\overline{\Delta x})||\Delta x_i||\Delta x_j|<$$

$$<\epsilon(\sum_{i=1}^{d}\Delta x_i^2+2\sum_{1\le i<j\le d}|\Delta x_i||\Delta x_j|)=\epsilon(\sum_{i=1}^{d}|\Delta x_i|)^2\overset{\star}{\le}\epsilon\sum_{i=1}^{d}1^2\sum_{i=1}^{d}|\Delta x_i|^2=\epsilon d\|\overline{\Delta x}\|^2$$

$\star$ מקושי שוורץ

נבחר $\epsilon=\frac{M}{2d}$ ונקבל כי קיים $\delta_0>0$ כך שלכל $\|\overline{\Delta x}\|<\delta_0$ יתקיים

$$f(\overline{x_0}+\overline{\Delta x})-f(\overline{x_0})=\frac{1}{2}(l_f(\overline{\Delta x})+R(\overline{\Delta x}))\ge\frac{1}{2}(M\|\overline{\Delta x}\|^2-\frac{M}{2d}d\|\overline{\Delta x}\|^2)>0$$

קיבלנו כי לכל $\delta_0>\|\overline{\Delta x}\|>0$ מתקיים $x_0$ נקודת מינימום.

עבור $l_f$ שלילית לחלוטין מחליפים $f$ ב־ $(-f)$.

**משפט 2 (תנאי מספיק לאי קיום אקסטרימום)** אם $l_f$ (כפי שמוגדרת במשפט 1) אי מוחלטת אז $\overline{x_0}$ לא נקודת אקסטרימום.

**הוכחה** לפי התנאי קיימים $\overline{t_1},\overline{t_2}\in\mathbb{R}^d$ כך ש־

$$l_f(\overline{t_1})>0\wedge l_f(\overline{t_2})<0$$

עבור $\rho>0$ קטן, נגדיר $\overline{\Delta x_1}=\rho\overline{t_1}$. מתקיים

$$f(\overline{x_0}+\overline{\Delta x_1})-f(\overline{x_0})=\frac{1}{2}(l_f(\overline{\Delta x_1})+R(\overline{\Delta x_1}))=\frac{1}{2}(\rho^2 l_f(\overline{t_1})+R(\overline{\Delta x_1}))$$

$$|R(\overline{\Delta x_1})|<\epsilon d\|\overline{\Delta x_1}\|^2=\epsilon d\rho^2\|\overline{t_1}\|^2\quad\forall\|\overline{\Delta x_1}\|\le\delta_1\iff\rho<\frac{\delta_1}{\|\overline{t_1}\|}$$

עבור $\epsilon=\frac{l_f(\overline{t_1})}{2d}$ ועבור $\delta>0$ קטן מספיק מתקיים

$$f(\overline{x_0}+\overline{\Delta x_1})-f(\overline{x_0})\ge\frac{1}{2}\rho^2(l_f(\overline{t_1})-\frac{1}{2}l_f(\overline{t_1}))>0$$

באופן דומה עבור $\rho>0$ קטן ו־ $\overline{\Delta x_2}=\rho\overline{t_2}$ יתקיים:

$$f(\overline{x_0}+\overline{\Delta x_2})-f(\overline{x_0})=\frac{1}{2}\rho^2(|l_f(\overline{t_2})|-|\frac{1}{2}l_f(\overline{t_2})|)<0$$