הוכחות לחלק א' מבחן אינפי מתקדם 1, 2015־2016

איל כהן ועמית טרופ ־ מההרצאות של גנאדי לוין

25 בינואר 2016

1 קבוצה ב־$\mathbb{R}^d$ קומפקטית אמ"מ היא חסומה וסגורה

$K \subset (\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_p)$ קומפקטית $\iff$ K חסומה וסגורה

הוכחה ($\Longleftarrow$):
נוכיח כי אם $K \subset X$ קב' קומפקטית אזי K חסומה וסגורה ואז בפרט $K \subset (\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_p)$ תקיים זאת.
נניח בשלילה ש־K לא חסומה, אזי עבור $a \in X$ ועבור כל n מתקיים $K \not\subset B(a,n)$, כלומר, קיימת סדרה $(x_n) \subset K$ כך ש־ $\rho(a,x_n) > n$. הסדרה x_n לא מכילה תת סדרה מתכנסת כי היא לא חסומה. אם $x_{n_k} \to x$ אזי

$$\rho(a,x_{n_k}) \leq \rho(a,x) + \rho(x,x_{n_k}) \to \rho(a,x)$$

וזו סתירה לכך ש־ $\rho(a,x_n) > n$. קיבלנו כי קיימת סדרה ב־K אשר אין לה תת סדרה מתכנסת, בסתירה לקומפקטיות K.
נניח בשלילה ש־K לא סגורה. מהטענה "$A \subset X$ סגורה $\iff$ $A = \{y \in X \mid \exists\{x_n\} \subset A \quad \lim_{n\to\infty} x_n = y\}$" קיימת סדרה $(x_n) \subset K$ כך ש־ $x_n \to x$ אבל $x \notin K$, לכן אין תת סדרה של (x_n) המתכנסת לנק' ב־K בסתירה לקומפקטיות K.
($\Longrightarrow$):
תהי K חסומה וסגורה ו־$K \supset (x^n)_{n=1}^{\infty}$ $x^n = (x_1^n, ..., x_d^n)$. K חסומה, לכן קיים $r > 0$ כך ש־ $\forall x \in K \ \|x\|_p \leq r$, לכן עבור כל i, n מתקיים $|x_i^n| \leq \|x^n\|_p \leq r$, כלומר, עבור כל $1 \leq i \leq d$ סדרה $(x_i^n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ חסומה. לפי משפט בולצ'אנו ויירשטראס, הסדרה $(x_1^n)_{n=1}^{\infty}$ מכילה תת מסדרה מתכנסת $x_1^{n_{j,1}} \xrightarrow[j\to\infty]{} x_1$, $\{n_{j,1}\} \subset \mathbb{N}$. נתבונן ב־$(x_2^{n_{j,1}})_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$. סדרה זו חסומה לכן קיימת $(n_{j,2}) \subset (n_{j,1})$ כך ש־$x_2^{n_{j,2}} \xrightarrow[j\to\infty]{} x_2$... נתבונן ב־$(x_d^{n_{j,d-1}})_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$. סדרה זו חסומה לכן קיימת $(n_{j,d}) \subset (n_{j,d-1})$ כך ש־$x_d^{n_{j,d}} \xrightarrow[j\to\infty]{} x_d$.
תת סדרה $(x^{n_{j,d}})_{j=1}^{\infty} = (x_1^{n_{j,d}}, ..., x_d^{n_{j,d}})_{j=1}^{\infty}$ של x^n מתכנסת כי $(x_i^{n_{j,d}})_{j=1}^{\infty} \xrightarrow[i\to\infty]{} x_i$ לכל i (הסדרה של כל קואורדינטה מתכנסת), אזי $x^{n_{j,d}} \xrightarrow[j\to\infty]{} a = (x_1, ..., x_d) \in \mathbb{R}^d$. $a \in K$ כי K קבוצה סגורה ו־$K \supset (x^{n_{j,d}})_{j=1}^{\infty}$ ומכאן ש־K קבוצה קומפקטית.

2 היינה בורל

התנאים הבאים שקולים:

1. X מ"מ קומפקטי
2. כל כיסוי פתוח של X מכיל תת כיסוי סופי
3. עבור כל אוסף $(F_\alpha)_{\alpha \in I}$ של קבוצות סגורות, מתקיים ־ אם חיתוך של כל מס' סופי של קבוצות מ־(F_α) לא ריק, אזי גם $\emptyset \neq \bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha$.

הוכחה ($2 \Longleftarrow 3$):
מחוקי דה־מורגן נקבל כי

$$X \backslash \bigcup_{\alpha} F_\alpha = \bigcap_{\alpha} (X \backslash F_\alpha), \ \ X \backslash \bigcap_{\alpha} F_\alpha = \bigcup_{\alpha} (X \backslash F_\alpha)$$

תהי $(F_\alpha)_{\alpha\in I}$ אוסף קבוצות סגורות כך שחיתוך של כל מספר סופי של קבוצות מ־$(F_\alpha)_{\alpha\in I}$ לא ריק. צ"ל $\emptyset \neq \cap_{\alpha\in I} F_\alpha$. נניח בשלילה כי $\cap_{\alpha\in I} F_\alpha = \emptyset$, אזי

$$\bigcup_{\alpha\in I}(X\backslash F_\alpha) = X\backslash \bigcap_{\alpha\in I} F_\alpha = X\backslash\emptyset = X$$

כלומר $(X\backslash F_\alpha)_{\alpha\in I}$ כיסוי פתוח (כי כל F_α קבוצה סגורה), לכן מ־2 הוא מכיל תת כיסוי סופי, כלומר קיימים $\alpha_1, ..., \alpha_m$ כך ש־$\bigcup_{i=1}^m (X\backslash F_{\alpha_i}) = X$ לכן

$$X\backslash \bigcap_{i=1}^m F_{\alpha_i} = \bigcup_{i=1}^m (X\backslash F_{\alpha_i}) = X$$

כלומר, $\bigcap_{i=1}^m F_{\alpha_i} = \emptyset$, סתירה.

$2 \Longleftarrow 3$): זהה לכיוון הראשון.

$1 \Longleftarrow 3$):

תהי $(x_n) \subset X$. צריך למצוא לה תת סדרה מתכנסת. עבור כל $n \geq 1$, נגדיר קבוצה

$$L_n = \{x_m \mid m \geq n\} \subset X$$

מכיוון ש־ $L_{n+1} \subset L_n$ מתקיים $\overline{L_{n+1}} \subset \overline{L_n}$.

נתבונן באוסף $(\overline{L_n})_{n=1}^\infty$ של קבוצות סגורות. עבור כל מס' סופי $\overline{L_{n_1}}, ..., \overline{L_{n_m}} \subset \overline{L_n}$ אם $n_1 < ... < n_m$ אזי $\bigcap_{j=1}^m \overline{L_{n_j}} = \overline{L_{n_m}} \neq \emptyset$. מ־3 מתקיים $\bigcap_{n=1}^\infty \overline{L_n} \neq \emptyset$. ניקח $a \in \bigcap_{n=1}^\infty \overline{L_n}$. עבור כל n מתקיים $a \in \overline{L_n}$, לכן עבור כל $k \geq 1$ הכדור $B(a, \frac{1}{k})$ נחתך עם L_n לכל n. ולכן קיים $x_{n_1} \in L_1$ כך ש־ $\rho(a, x_{n_1}) < \frac{1}{1}$, קיים $x_{n_2} \in L_2,\ n_2 > n_1$ כך ש־$\rho(a, x_{n_2}) < \frac{1}{2}$ ....קיים $x_{n_k},\ n_k > n_{k-1}$ כך ש־$\rho(a, x_{n_k}) < \frac{1}{k}$.

נתבונן בתת סדרה $(x_{n_k}) \subset x_n$, מתקיים $\rho(a, x_{n_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, לכן $x_{n_k} \to a$.

$2 \Longleftarrow 1$):

נתון X מ"מ קומפקטי. צ"ל אם $(E_\alpha)_{\alpha\in I}$ כיסוי פתוח של X, אזי הוא מכיל תת כיסוי סופי.

למה 1:

קיים $\epsilon > 0$ כך שלכל $x \in X$ הכדור $B(x, \epsilon)$ מוכל כולו באחת מקבוצות E_α.

הוכחה:

נניח בשלילה שלא קיים $\epsilon > 0$ כמתואר, אז לכל n קיימת נק' x_n כך ש־ $B(x_n, \frac{1}{n})$ אינו מוכל באף E_α. X מ"מ קומפקטי, לכן $(x_n)_{n=1}^\infty$ מכילה תת סדרה מתכנסת $x_{n_k} \to a$. $(E_\alpha)_{\alpha\in I}$ כיסוי, לכן קיים α_0 כך ש־ $a \in E_{\alpha_0}$. E_{α_0} קבוצה פתוחה (כי זהו כיסוי פתוח), לכן קיים $r > 0$ כך ש־ $B(a, r) \subset E_{\alpha_0}$. מכיוון ש־ $x_{n_k} \to a$ ו־ $\frac{1}{n_k} \to 0$, קיים k_0 כך ש־ $B(x_{n_{k_0}}, \frac{1}{n_{k_0}}) \subset B(a, r)$. אבל $B(a, r) \subset E_{\alpha_0}$, ולכן $B(x_{n_{k_0}}, \frac{1}{n_{k_0}}) \subset E_{\alpha_0}$ בסתירה לבחירה של x_n.

למה 2:

לכל $\epsilon > 0$ קיים מס' סופי של נק' $x_1, ..., x_p$ כך ש־ $\bigcup_{i=1}^p B(x_i, \epsilon) = X$.

הוכחה:

ניקח x_1 אם $B(x_1, \epsilon) = X$ סיימנו, אחרת, קיימת נק' $x_2 \in X$ כך ש־ $\rho(x_1, x_2) \geq \epsilon$ (כלומר, $x_2 \notin B(x_1, \epsilon)$). אם

$$B(x_1, \epsilon) \cup B(x_2, \epsilon) = X$$

סיימנו, אחרת, קיימת $x_3 \in X$ כך ש־ $\rho(x_2, x_3) \geq \epsilon\ \wedge\ \rho(x_1, x_3) \geq \epsilon$...

אזי או שמצאנו כיסוי סופי של הכדורים עם ה־ϵ הנתון, או שמצאנו סדרה $(x_n)_{n=1}^\infty$ כך ש־ $\rho(x_i, x_j) \geq \epsilon$ לכל $i < j$. הסדרה $(x_n)_{n=1}^\infty$ לא מכילה תת סדרה מתכנסת, סתירה לקומפקטיות X. מכאן שמצאנו כיסוי סופי של כדורים עם ה־ϵ הנתון.

חזרה להוכחת המשפט:

ניקח $\epsilon > 0$ כמו בלמה 1. עבור ϵ זה, לפי למה 2 קיימות נק' $x_1, ..., x_p$ כך ש־ $\cup_{i=1}^p B(x_i, \epsilon) = X$. לפי למה 1 ובחירתו של ϵ, לכל כדור $B(x_i, \epsilon)$ קיימת E_{α_i} כך ש־ $B(x_i, \epsilon) \subset E_{\alpha_i}$, מתקיים

$$X = \bigcup_{i=1}^p B(x_i, \epsilon) \subset \bigcup_{i=1}^p E_{\alpha_i}$$

ולכן $(E_{\alpha_i})_{i=1}^p$ תת כיסוי סופי של X.

3 על סדרה יורדת של כדורים

מרחב מטרי (X,ρ) שלם $\iff$ כל סדרה $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ של כדורים סגורים, כך ש־ $B_{n+1}\subset B_n$ לכל n ורדיוס r_n של B_n מקיים $r_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, מקיימת $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \neq \emptyset$.

הוכחה $(\Longleftarrow)$:
יהי X מ"מ שלם ו־$(B_n)_{n=1}^{\infty}$ כאשר $B_n=\overline{B}(x_n,r_n)$ סדרה כנ"ל. צ"ל $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \neq \emptyset$.
עבור כל $m>n$ מתקיים $x_m\in B_n$ (כי $B_m\subset B_n$), לכן $\rho(x_m,x_n)<r_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, כלומר $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ היא סדרת קושי. X מ"מ שלם, לכן קיים גבול $\lim_{n\to\infty} x_n=a$. נוכיח כי $a\in B_n$ לכל n ־ עבור כל n, הסדרה $(x_n,x_{n+1},...,)\subset B_n$ ו־B_n קבוצה סגורה, לכן $a=\lim_{m\to\infty,m>n} x_m\in B_n$.
$(\Longrightarrow)$:
נניח שכל סדרה של כדורים כנ"ל בעלת חיתוך לא ריק, ונוכיח כי X שלם.
תהי $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי ב־X, אזי קיים n_1 כך שלכל $n>n_1$ יתקיים $\rho(x_n,x_{n_1})<\frac{1}{2}$. קיים $n_2>n_1$ כך שלכל $n>n_2$ יתקיים $\rho(x_n,x_{n_2})<\frac{1}{2^2}$... קיים $n_k>n_{k-1}$ כך שלכל $n>n_k$ יתקיים $\rho(x_n,x_{n_k})<\frac{1}{2^k}$.
נגדיר $B_k=\overline{B}(x_{n_k},\frac{1}{2^{k-1}})$ ונוכיח כי $B_{k+1}\subset B_k$ (כלומר, זוהי סדרה יורדת). לכל $y\in B_{k+1}$ מתקיים

$$\rho(y,x_{n_k})\le\rho(y,x_{n_{k+1}})+\rho(x_{n_{k+1}},x_{n_k})\le\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2^{k-1}}$$

והרדיוס של B_k הוא $\frac{1}{2^{k-1}}$, לכן $y\in B_k$.
$\frac{1}{2^{k-1}} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ לכן מתקיימים תנאי ההנחה ומכאן קיימת נק' $a\in\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$, אזי לכל k מתקיים $\rho(a,x_{n_k})\le\frac{1}{2^{k-1}}\to 0$, כלומר, a היא הגבול של תת הסדרה $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, לכן גם $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל־a. קיבלנו כי כל סדרת קושי ב־X מתכנסת, ולכן X שלם.

4 עיקרון של ההעתקה המכווצת

יהי (X,ρ) מ"מ שלם ו־$A:X\to X$ כיווץ. אזי A בעלת נק' שבת, x_0, יחידה ולכל $y\in X$ קיים גבול $\lim_{n\to\infty} A^n y=x_0$.

הוכחה עבור $y\in X$ נגדיר

$$y_n=\begin{cases}A^n y & n\in\mathbb{N}\\ y & n=0\end{cases}$$

נוכיח שהסדרה $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי. לפי ההגדרה קיים $0<\alpha<1$ כך ש־

$$\forall x_1,x_2\in X\quad \rho(Ax_1,Ax_2)\le\alpha\rho(x_1,x_2)$$

אזי לכל $m>n$ מתקיים־

$$\begin{aligned}\rho(y_m,y_n) &= \rho(Ay_{m-1},Ay_{n-1})\le\alpha\rho(y_{m-1},y_{n-1})\le...\le\alpha^n\rho(y_{m-n},y_0)\le\\ &\le \alpha^n\sum_{i=0}^{m-n-1}\rho(y_i,y_{i+1})\le\alpha^n\sum_{i=0}^{m-n-1}\alpha^i\rho(y_0,y_1)\le\alpha^n\rho(y_0,y_1)\sum_{i=0}^{\infty}\alpha^i=\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(y_0,y_1)\xrightarrow[n\to\infty]{} 0\end{aligned}$$

לכן זוהי סדרת קושי ו־X שלם ולכן קיים הגבול $x_0=\lim_{n\to\infty} y_n=\lim_{n\to\infty} A^n y$ ולכן־

$$A(x_0)=A(\lim_{n\to\infty} A^n y)\overset{(*)}{=}\lim_{n\to\infty} A(A^n y)=\lim_{n\to\infty} A^{n+1}y=x_0$$

$(*)$ ־ מרציפות A

ולכן x_o נקודת שבת.
יחידות ־ תהי $y_0 \neq x_0$ נקודת שבת, אזי

$$0 \neq \rho(x_0, y_0) = \rho(Ax_0, Ay_0) \leq \alpha\rho(x_0, y_0)$$

סתירה לכך ש־ $\alpha < 1$.

5 אי שוויון בסל

תהי A מערכת אורתוגונלית סופית או בת מניה במרחב אוקלידי $\mathcal{Y}$, אזי לכל $x \in \mathcal{Y}$ מתקיים $\sum_{u\in A}\langle x, u\rangle^2 \leq \|x\|^2$

טענה תהי $U = (u_i)_{i=1}^n$ מערכת אורתונורמלית סופית במרחב אוקלידי $\mathcal{Y}$ ויהי M תת מרחב הנפרש ע"י U. ההטלה y של וקטור $x \in \mathcal{Y}$ ל־M היא $y = \sum_{i=1}^n\langle x, u_i\rangle u_i$. אזי $x - y$ ניצב לכל $z \in M$ ומתקיים

$$\forall y \neq z \in M \quad \|x - y\| < \|x - z\|$$

הוכחת הטענה לכל $M \ni z = \sum_{j=1}^n \lambda_j u_j$ מתקיים

$$\begin{aligned}
\langle x - y, z\rangle &= \langle x - \sum_{i=1}^n\langle x, u_i\rangle u_i, \sum_{j=1}^n \lambda_j u_j\rangle = \langle x, \sum_{j=1}^n \lambda_j u_j\rangle - \langle\sum_{i=1}^n\langle x, u_i\rangle u_i, \sum_{j=1}^n \lambda_j u_j\rangle = \\
&= \sum_{j=1}^n \lambda_j\langle x, u_j\rangle - \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\langle x, u_i\rangle\lambda_j\langle u_i, u_j\rangle = \sum_{j=1}^n \lambda_j\langle x, u_j\rangle - \sum_{j=1}^n\langle x, u_j\rangle\lambda_j = 0
\end{aligned}$$

כלומר $(x - y) \perp z$ עבור כל $z \in M$.
לכל $y \neq z \in M$ מתקיים

$$\|x - z\|^2 = \|(x - y) + (y - z)\|^2 \overset{(*)}{=} \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2 \geq \|x - y\|^2$$

$(*)$ ־ $x - y \perp y - z$ (פיתגורס)

מסקנה

$$\begin{aligned}
0 \leq \|x - \sum_{i=1}^n\langle x, u_i\rangle u_i\|^2 &= \langle x - \sum_{i=1}^n\langle x, u_i\rangle u_i, x - \sum_{i=1}^n\langle x, u_i\rangle u_i\rangle = \\
&= \langle x - \sum_{i=1}^n\langle x, u_i\rangle u_i, x\rangle - \langle x - \sum_{i=1}^n\langle x, u_i\rangle u_i, \sum_{i=1}^n\langle x, u_i\rangle u_i\rangle \overset{(*)}{=} \langle x - \sum_{i=1}^n\langle x, u_i\rangle u_i, x\rangle = \\
&= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^n\langle x, u_i\rangle\langle u_i, x\rangle = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^n\langle x, u_i\rangle^2
\end{aligned}$$

$(*)$ ־ $\langle x - \sum_{i=1}^n\langle x, u_i\rangle u_i, \sum_{i=1}^n\langle x, u_i\rangle u_i\rangle = 0$ כי $x - \sum_{i=1}^n\langle x, u_i\rangle u_i = x - y$ ו־$\sum_{i=1}^n\langle x, u_i\rangle u_i = y \in M$, ומהטענה הם ניצבים.

הוכחת אי שוויון בסל אם A קבוצה סופית, אזי מתקיימת המסקנה.
אם $A = (u_i)_{i=1}^\infty$ אזי לפי המסקנה, עבור כל n מתקיים $\sum_{i=1}^n\langle x, u_i\rangle^2 \leq \|x\|^2$ לכן (במעבר לגבול) מתקיים $\sum_{i=1}^\infty\langle x, u_i\rangle^2 \leq \|x\|^2$ (הטור מונוטוני עולה וחסום).

6 על מערכת אורתונורמלית שלמה ושוויון פרסבל

תהי $\phi = (\varphi_i)_{i=1}^{\infty}$ מערכת אורתונורמלית במרחב אוקלידי $\mathcal{Y}$, התנאים הבאים שקולים:

1. ϕ שלמה
2. ϕ בסיס. יתר על כן, עבור כל $x \in \mathcal{Y}$ מתקיים $x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, \varphi_i \rangle \varphi_i$
3. עבור כל $x \in \mathcal{Y}$ מתקיים שוויון פרסבל:

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, \varphi_i \rangle^2$$

הוכחה $(1 \Longleftarrow 2)$:
נתון ϕ מערכת אורתונורמלית שלמה. צ"ל עבור כל $x \in \mathcal{Y}$ קיימת הצגה יחידה $x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, \varphi_i \rangle \varphi_i$, כלומר, לכל $\epsilon > 0$ קיים $n_0 = n_{0(\epsilon)}$ (תלוי ב־ϵ) כך שלכל $n > n_0$ מתקיים $\|x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, \varphi_i \rangle \varphi_i\| < \epsilon$.
נשים לב כי הפיתוח $x = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \varphi_i$ הוא יחיד ולכן

$$0 = x - x = \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_i - \langle x, \varphi_i \rangle) \varphi_i$$

$$0 = \langle 0, \varphi_j \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_i - \langle x, \varphi_i \rangle) \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \lambda_j - \langle x, \varphi_j \rangle$$

יהא $\epsilon > 0$, ϕ שלמה לכם קיים $n_{0(\epsilon)}$ ו־$\lambda_1, ..., \lambda_{n_0} \in \mathbb{R}$ כך ש־ $\|x - \sum_{i=1}^{n_0} \lambda_i \varphi_i\| < \epsilon$. לפי טענה המופיעה באי שוויון בסל מתקיים

$$\|x - \sum_{i=1}^{n_0} \langle x, \varphi_i \rangle \varphi_i\| \leq \|x - \sum_{i=1}^{n_0} \lambda_i \varphi_i\| < \epsilon$$

(אי השוויון הראשון חלש מכיוון ש־$\sum_{i=1}^{n_0} \lambda_i \varphi_i$ יכול להיות שווה ל־ $\sum_{i=1}^{n_0} \langle x, \varphi_i \rangle \varphi_i$ בגלל שהם באותו מרחב)
לכן עבור כל $n > n_0$ מתקיים

$$\|x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, \varphi_i \rangle \varphi_i\| \leq \|x - \sum_{i=1}^{n_0} \langle x, \varphi_i \rangle \varphi_i\| < \epsilon$$

$(2 \Longleftarrow 3)$:
לפי המסקנה בהוכחה של בסל נקבל

$$\|x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, \varphi_i \rangle \varphi_i\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \langle x, \varphi_i \rangle^2$$

מ־2 נקבל $\lim_{n\to\infty} \|x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, \varphi_i \rangle \varphi_i\| = 0$, לכן $\lim_{n\to\infty} \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \langle x, \varphi_i \rangle^2 = 0$ ומכאן ש־ $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, \varphi_i \rangle^2$
$(3 \Longleftarrow 1)$:
נניח כי עבור כל $x \in \mathcal{Y}$ מתקיים $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, \varphi_i \rangle^2$, אזי לפי המסקנה בהוכחה של בסל לכל n מתקיים

$$\|x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, \varphi_i \rangle \varphi_i\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \langle x, \varphi_i \rangle^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

כלומר, $x \in span(\phi)$.

7 משפט על טור פורייה של פונקציה הגזירה ברציפות למקוטעין

תהי f רציפה בקטע $[0,2\pi]$ וגזירה ברציפות למקוטעין ב־ $[0,2\pi]$ ו־ $f(2\pi)=f(0)$ אזי בכל $x\in[0,2\pi]$ טור פורייה של f מתכנס במידה שווה ל־ f

$$f(x)=a_0(f)+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(f)\cos(nx)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n(f)\sin(nx)$$

הוכחה הפונקציה f' אינטגרבילית רימן ב־ $[0,2\pi]$ לכן קיימות $a_n(f')$ ו־ $b_n(f')$ עבור $n\geq 1$:

$$\begin{aligned}a_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos(nx)dx\overset{\star}{=}\frac{1}{\pi}[f(x)\frac{\sin(nx)}{n}|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\frac{\sin(nx)}{n}f'(x)dx]=\\ &= -\frac{1}{n}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f'(x)\sin(nx)dx=-\frac{1}{n}b_n(f')\end{aligned}$$

$\star$ ־ אינטגרציה בחלקים

$$\begin{aligned}b_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin(nx)dx\overset{\star}{=}\frac{1}{\pi}[-f(x)\frac{\cos(nx)}{n}|_0^{2\pi}+\int_0^{2\pi}\frac{\cos(nx)}{n}f'(x)dx]=\\ &= \frac{1}{\pi}[-\frac{1}{n}(f(2\pi)-f(0))+\frac{1}{n}\int_0^{2\pi}f'(x)\cos(nx)dx]=\frac{1}{n}a_n(f')\end{aligned}$$

$\star$ ־ אינטגרציה בחלקים

מצד שני, לפי אי שיוויון בסל לפונקציה $f'\in H[0,2\pi]$ מתקיים

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(f')^2<\infty,\ \sum_{n=1}^{\infty}b_n(f')^2<\infty$$

מכיוון ש־

$$|a_n(f)|=\frac{1}{n}|b_n(f')|\leq\frac{1}{2}(b_n(f')^2+\frac{1}{n^2})$$

ו־

$$|b_n(f)|=\frac{1}{n}|a_n(f')|\leq\frac{1}{2}(a_n(f')^2+\frac{1}{n^2})$$

אז

$$|a_0(f)|+\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n(f)|+|b_n(f)|)\leq|a_0(f)|+\frac{1}{2}[\sum_{n=1}^{\infty}(a_n(f')^2+b_n(f')^2)+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}]<\infty$$

אבל לכל $x\in[0,2\pi]$

$$\begin{aligned}|a_n(f)\cos(nx)| &\leq |a_n(f)|\\ |b_n(f)\sin(nx)| &\leq |b_n(f)|\end{aligned}$$

לפי קריטריון ויירשטראס, טור פורייה:

$$\mathscr{S}_n^f(x)=a_0(f)+\sum_{k=1}^{n}a_k(f)\cos(nx)+\sum_{k=1}^{n}b_k(f)\sin(nx)$$

מתכנס בהחלט ובמידה שווה ל־ $\mathscr{S}^f(x)$ אשר היא פונקציה רציפה ב־ $[0,2\pi]$ (כי אברי הטור הם פונקציות רציפות ב־ $[0,2\pi]$ וההתכנסות היא במידה שווה). אבל $\mathscr{S}_n^f \to f$ בממוצע, כלומר

$$(1)\ \int_0^{2\pi}(\mathscr{S}_n^f(x)-\mathscr{S}^f(x))^2dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

מצד שני $f \in H[0,2\pi]$ ולכן

$$(2)\ \int_0^{2\pi}(\mathscr{S}_n^f(x)-f(x))^2dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$(1) \iff \|\mathscr{S}_n^f - \mathscr{S}^f\|_2 \to 0$ ו־ $(2) \iff \|\mathscr{S}_n^f - f\|_2 \to 0$
אזי $[\mathscr{S}^f]=[f]$ ב־ $H[0,2\pi]$, כלומר $f=\mathscr{S}^f$ כמעט תמיד, אבל f ו־ $\mathscr{S}^f$ רציפות ולכן שוות.

8 תנאי דיני

יהיו $f \in H[0,2\pi]$, $x_0 \in (0,2\pi)$ ו־ $\delta > 0$ כך ש־

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}|dx < \infty$$

אזי טור פורייה של f מתכנס ב־ x_0 ל־ $f(x_0)$.

טענה תהי ψ מוגדרת ב־ $\mathbb{R}$, אינטגרבילית ב־ $[0,T]$ עבור $T>0$ המקיימת $\psi(x+T)=\psi(x)\ \ \forall x\in\mathbb{R}\ (*)$, אזי עבור כל $a \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$\int_a^{a+T}\psi(x)dx = \int_0^T \psi(x)dx$$

הוכחת הטענה

$$\int_a^{a+T}\psi(x)dx - \int_0^T\psi(x)dx = \int_a^T\psi(x)dx + \int_T^{a+T}\psi(x)dx - (\int_a^T\psi(x)dx + \int_0^a\psi(x)dx) =$$

$$= \int_T^{a+T}\psi(x)dx - \int_0^a\psi(x)dx \overset{x=y+T}{=} \int_0^a\psi(y+T)dy - \int_0^a\psi(x)dx \overset{(*)}{=} 0$$

הוכחת המשפט מהטענה נקבל

$$\int_0^{2\pi}D_n(x_0-t)dt = \int_{x_0}^{x_0-2\pi}D_n(\tau)d\tau = \int_{x_0-2\pi}^{x_0}D_n(\tau)d\tau = \int_0^{2\pi}D_n(\tau)d\tau \overset{\star}{=} 2\pi$$

$\star$ ־ מתכונה 2 של גרעין דריכלה ($\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}D_n(x)dx=1$)
לכן

$$f(x_0)-\mathscr{S}_n^f(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x_0)D_n(x_0-t)dt - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)D_n(x_0-t)dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[\frac{f(x_0)-f(t)}{x_0-t}][\frac{x_0-t}{\sin(\frac{x_0-t}{2})}]\sin(\frac{2n+1}{2}(x_0-t))dt \overset{\star}{=} ...$$

- הפונקציה $g(t)=\frac{f(x_0)-f(t)}{x_0-t}$ אינטגרבילית ב־ $[0,2\pi]$ כי g אינטגרבילית ב־ $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ לפי תנאי המשפט. עבור $t\in(0,2\pi)\backslash(x_0-\delta,x_0+\delta)$ מתקיים $|g(t)|\leq\frac{1}{\delta}|f(t)-f(x_0)|$, $|f(t)-f(x_0)|$ אינטגרבילית ב־$[0,2\pi]$ ולכן גם g אינטגרבילית.

- הפונקציה $\frac{x_0-t}{\sin(\frac{x_0-t}{2})}$ אינטגרבילית ב־ $[0,2\pi]$ כי:

כאשר $\sin(\frac{x_0-t}{2})=0$ ו־ $t\in[0,2\pi]$ אז $\frac{x_0-t}{2}=\pi k$ עבור $k\in\mathbb{Z}$. $x_0\in(0,2\pi)$ לכן $t=x_0$, אבל עבור $t=x_0$ הפונקציה $\frac{x_0-t}{\sin(\frac{x_0-t}{2})}$ רציפה ולכן

$$H[0,2\pi]\ni\frac{f(x_0)-f(t)}{x_0-t}\cdot\frac{x_0-t}{\sin(\frac{x_0-t}{2})}=\varphi(t)$$

ולכן

$$...\overset{\star}{=}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(t)\sin(\frac{2n+1}{2}(x_0-t))dt\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

לפי למת רימן לבג.

9 משפט בייר

לא ניתן להציג מרחב מטרי שלם כאיחוד בן מניה של קבוצות דלילות: אם X שלם ולכל $n\in\mathbb{N}$ הקבוצה $A_n\subset X$ דלילה, אזי $X\neq\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n$.

הוכחה נניח בשלילה $X=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n$ כאשר כל A_n קבוצה דלילה ו־ X מרחב מטרי שלם.
נקח כדור סגור $\overline{B_0}$ עם רדיוס 1. A_1 קבוצה דלילה לכן קיים כדור סגור $\overline{B_1}$ עם רדיוס $<\frac{1}{2}$ כך ש־ $\overline{B_1}\subset\overline{B_0}$ ו־ $\overline{B_1}\cap A_1=\emptyset$.
גם A_2 קבוצה דלילה, לכן קיים כדור סגור $\overline{B_2}$ עם רדיוס $<\frac{1}{3}$ כך ש־ $\overline{B_2}\subset\overline{B_1}$ ו־ $\overline{B_2}\cap A_2=\emptyset$, ולכן גם $\overline{B_2}\cap A_1=\emptyset$. (...) גם A_n קבוצה דלילה, לכן קיים כדור סגור $\overline{B_n}$ עם רדיוס $<\frac{1}{n+1}$ כך ש־ $\overline{B_n}\subset\overline{B_{n-1}}$ ו־ $\overline{B_n}\cap A_n=\emptyset$ ובהכרח $\overline{B_n}\cap A_k=\emptyset$ לכל $1\leq k\leq n-1$.
X מרחב מטרי שלם $(\overline{B_n})_{n=1}^{\infty}$ סדרה יורדת של כדורים סגורים עם רדיוס שואף ל־ 0. לכן, לפי משפט על סדרה יורדת של כדורים סגורים, קיימת z כך ש־ $z\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{B_n}$. אזי $z\notin A_n$ לכל n, סתירה.

ניסוח שקול במילים אחרות, אם כל קבוצה E_n היא פתוחה וצפופה ב־ X אזי $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}E_n$ היא גם קבוצה צפופה.

מסקנה מרחב מטרי שלם ללא נקודות מבודדות לא ניתן למניה.

10 משפט פייר

תהי f רציפה ב־ $[0,2\pi]$ ו־ $f(0)=f(2\pi)$, אזי סכומי $Fejer$ $\{\sigma_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mathscr{S}_k^f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)K_n(x-t)dt$$

מתכנסים ל־ f במידה שווה על $[0,2\pi]$.

הוכחה נמשיך את f עד פונקציה רציפה 2π מחזורית ב־ $\mathbb{R}$. נקח $x \in [0,2\pi]$:

$$\begin{aligned}
\sigma_n(x)-f(x) &\overset{(1)}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)K_n(x-t)dt-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)K_n(x-t)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(f(t)-f(x))K_n(x-t)dt \\
&\overset{(2)}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-x}^{2\pi-x}(f(x+\tau)-f(x))K_n(\tau)d\tau \\
&\overset{(3)}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x+\tau)-f(x))K_n(\tau)d\tau
\end{aligned}$$

כאשר (1) מתקיים מתכונה 2 של גרעין $Fejer$. נסמן $\tau = x-t$ ואז (2) מתקיים כי K_n זוגית ולכן $K_n(t-x)=K_n(x-t)=K_n(\tau)$. (3) נובע ממחזוריות f.

f רציפה ו־ 2π מחזורית ב־ $\mathbb{R}$ ולכן חסומה ורציפה במידה שווה ב־ $\mathbb{R}$. יהא $0<M\in\mathbb{R}$ כך ש־ $\forall x\in\mathbb{R}\ |f(x)|\le M$.

יהי $\epsilon>0$. מרציפות במ"ש קיים $\delta>0$ כך ש־ $|x_1-x_2|<\delta \implies |f(x_1)-f(x_2)|<\epsilon$ $(*)$. מתקיים־

$$|\sigma_n(x)-f(x)| = |\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta}(f(x+\tau)-f(x))K_n(\tau)d\tau+\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}(f(x+\tau)-f(x))K_n(\tau)d\tau+\frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi}(f(x+\tau)-f(x))K_n(\tau)d\tau|$$

נמצא חסמים לשלושת האינטגרלים הללו:

$$|\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}(f(x+\tau)-f(x))K_n(\tau)d\tau| \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}|f(x-\tau)-f(x)|K_n(\tau)d\tau \le$$

$$\overset{(1)}{\le} \epsilon\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_n(\tau)d\tau \overset{(2)}{=} \epsilon$$

כאשר (1) מתקיים מ־ $(*)$ וכי הגדלנו את טווח האינטגרל. (2) מתקיים מתכונה 2 של גרעין $Fejer$.

$$|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta}(f(x+\tau)-f(x))K_n(\tau)d\tau+\frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi}(f(x+\tau)-f(x))K_n(\tau)d\tau| \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta}|f(x+\tau)-f(x)|K_n(\tau)d\tau+\frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi}|f(x+\tau)-f(x)|K_n(\tau)d\tau \le$$

$$\le 2M\frac{1}{2\pi}[\int_{-\pi}^{-\delta}K_n(\tau)d\tau+\int_{\delta}^{\pi}K_n(\tau)d\tau] \overset{(1)}{=} \frac{2M}{2\pi}[\int_{\delta}^{\pi}K_n(\tau)d\tau+\int_{\pi}^{2\pi-\delta}K_n(t')dt'] =$$

$$= \frac{2M}{2\pi}\int_{\delta}^{2\pi-\delta}K_n(\tau)d\tau \overset{(2)}{<} \epsilon$$

(1) נסמן $\tau = t'-2\pi$ עבור $\pi\le t'\le 2\pi-\delta$

(2) מתכונה 3 של גרעין $Fejer$ קיים n_0 כך שלכל $n\ge n_0$ מתקיים

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{2\pi-\delta}K_n(\tau)d\tau < \frac{\epsilon}{2M}$$

עבור ϵ נתון מצאנו n_0 כך שלכל $n\ge n_0$ ולכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים

$$|\sigma_n(x)-f(x)|<2\epsilon$$

11 משפט על תנאים המבטיחים $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

תהי $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ קבוצה פתוחה ו־ $f : \Omega \to \mathbb{R}$ בעלת נגזרות חלקיות בכל נקודה $(x,y) \in \Omega$. נניח שבכל $(x,y) \in \Omega$ קיימות נגזרות משולבות $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ ו־ $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ והן רציפות בנקודה $(x_0,y_0) \in \Omega$ אזי

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0)$$

הוכחה תהי $(x_0,y_0) \in \Omega$. עבור כל $h,k \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ מספיק קטנים, נגדיר את הפוקנציה:

$$W(h,k) = \frac{f(x_0+h,y_0+k) - f(x_0,y_0+k) - f(x_0+h,y_0) + f(x_0,y_0)}{hk}$$

ונגדיר פונקציה

$$\varphi(x) = \frac{f(x,y_0+k) - f(x,y_0)}{k}$$

עבור כל $|k| \neq 0$ מספיק קטן. כעת

$$W(h,k) = \frac{\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0)}{h}$$

φ גזירה (לפי x) בכל x מספיק קרוב ל־ x_0 מכיוון ש־

$$\varphi'(x) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y_0+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y_0)}{k}$$

אזי לפי משפט ערך הביניים, קיים $\theta_1 \in (0,1)$ כך ש־

$$W(h,k) = \frac{\varphi'(x_0+\theta_1 h)h}{h} = \varphi'(x_0+\theta_1 h) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_1 h,y_0+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_1 h,y_0)}{k}$$

נשתמש במשפט ערך הביינים לפונקציה $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_1 h,y)$ עבור $y \in [y_0,y_0+k]$. פונקציה זו גזירה לפי $y \in (y_0,y_0+k)$ כי קיימת

$$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_1 h,y)) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0+\theta_1 h,y)$$

לכן קיימת $\theta_2 \in (0,1)$ כך ש־

$$W(h,k) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0+\theta_1 h,y_0+\theta_2 k)$$

באופן דומה אם נגדיר

$$\psi(y) = \frac{f(x_0+h,y) - f(x_0,y)}{h}$$

אזי

$$W(h,k) = \frac{\psi(y_0+k) - \psi(y_0)}{k}$$

ולכן קיימות $\theta_3,\theta_4 \in (0,1)$ כך ש־

$$w(h,k) = \psi'(y_0+\theta_3 k) = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h,y_0+\theta_3 k) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0+\theta_3 k)}{h} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0+\theta_4 h,y_0+\theta_3 k)$$

הוכחנו כי לכל $h,k \neq 0$ קטנים, קיימות $\theta_i \in (0,1)$ עבור $1 \le i \le k$ כך ש־

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0+\theta_4 h, y_0+\theta_3 k) = W(h,k) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0+\theta_1 h, y_0+\theta_2 k)$$

מרציפות $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ו־ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ ב־ (x_0,y_0) קיימים

$$\lim_{h,k\to 0}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0+\theta_1 h, y_0+\theta_2 k) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) = \lim_{h,k\to 0} W(h,k) =$$

$$= \lim_{h,k\to 0}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0+\theta_4 h, y_0+\theta_3 k) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0)$$

12 פיתוח לטור טיילור בכמה משתנים

תהי $f: B(\overline{x_0},\epsilon) \to \mathbb{R}$ עבור $\overline{x_0} \in \mathbb{R}^d$ בעלת כל הנגזרות החלקיות מסדר $1,2,...,m+1$ והן רציפות. תהי $\overline{\Delta x} = (\Delta x_1,...,\Delta x_d) \in \mathbb{R}^d$ כך ש־ $\|\overline{\Delta x}\| < \epsilon$, אזי קיים $\theta \in (0,1)$ כך ש־

$$f(\overline{x_0}+\overline{\Delta x}) = f(\overline{x_0}) + \sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n!}\sum_{\substack{k_1,...,k_d\ge 0\\ k_1+...+k_d=n}}\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_d!}\cdot\frac{\partial^n f}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_d^{k_d}}(\overline{x_0})\Delta x_1^{k_1}\cdots\Delta x_d^{k_d} + R$$

כאשר

$$R = \frac{1}{(m+1)!}\sum_{\substack{k_1,...,k_d\ge 0\\ k_1+...+k_d=m+1}}\frac{(m+1)!}{k_1!k_2!\cdots k_d!}\cdot\frac{\partial^{m+1} f}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_d^{k_d}}(\overline{x_0}+\theta\overline{\Delta x})\Delta x_1^{k_1}\cdots\Delta x_d^{k_d}$$

הוכחה נגדיר פונקציה $F(t) = f(\overline{x_0}+t\overline{\Delta x})$ כך ש־ $\|\overline{\Delta x}\| < \epsilon$ ולכן F מוגדרת ב־ $(-T,T)$ עבור $T = \frac{\epsilon}{\|\overline{\Delta x}\|} > 1$, ונוכיח:

1. F גזירה ברציפות $m+1$ פעמים ב־ $(-T,T)$ כאשר $\overline{x} = \overline{x_0}+t\overline{\Delta x}$, $F^{(n)}(t) = f_n(\overline{x})$ ו־

$$f_{n+1}(\overline{x}) = \sum_{i=1}^{d}\frac{\partial f_n}{\partial x_i}(\overline{x})\Delta x_i$$

2.

$$f_n(\overline{x}) = \sum_{\substack{k_1,...,k_d\ge 0\\ k_1+...+k_d=n}}\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_d!}\cdot\frac{\partial^n f}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_d^{k_d}}(\overline{x})\Delta x_1^{k_1}\cdots\Delta x_d^{k_d}$$

מתקיים

$$F'(t) = \frac{d}{dt}f(\overline{x_0}+t\overline{\Delta x}) \overset{(*)}{=} \frac{d}{dt}f(x_1^0+t\Delta x_1, x_2^0+t\Delta x_2,...,x_d^0+t\Delta x_d) = \sum_{i=1}^{d}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{x})\Delta x_i = f_1(\overline{x})$$

$(*)$ ־ כלל השרשרת

$$F''(t) = \frac{d}{dt}f_1(\overline{x_0}+t\overline{\Delta x}) = \sum_{i=1}^{d}\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(\overline{x})\Delta x_i = \sum_{i_1=1}^{d}\Delta x_{i_1}\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}(\sum_{i_2=1}^{d}\frac{\partial f}{\partial x_{i_2}}(\overline{x})\Delta x_{i_2}) =$$

$$= \sum_{i_1,i_2=1}^{d} \Delta x_{i_1} \Delta x_{i_2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_2} \partial x_{i_1}}(\overline{x})$$

1. עבור $n=0$ נכון. נניח נכונות עבור n ונראה עבור $n+1$

$$F^{(n+1)}(t) = \frac{d}{dt} f_n(\overline{x_0} + t\overline{\Delta x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_n}{\partial x_i}(\overline{x})\Delta x_i = f_{n+1}(\overline{x})$$

$$f_1(\overline{x}) = \sum_{i_1=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{x})\Delta x_i$$

$$f_2(\overline{x}) = \sum_{i_1=1}^{d} \Delta x_{i_1} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} (\sum_{i_2=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_{i_2}}(\overline{x})\Delta x_{i_2}) = \sum_{i_1,i_2=1}^{d} \Delta x_{i_1} \Delta x_{i_2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_2} \partial x_{i_1}}(\overline{x}) =$$

$$\stackrel{\star}{=} \sum_{k_1,\ldots,k_d \geq 0} \frac{2!}{k_1!\ldots k_d!} \Delta x_1^{k_1} \cdots \Delta x_d^{k_d} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_d^{k_d}}$$

כאשר $\star$ מתקיים כי

$$(a_1 + \cdots + a_d)^2 = \sum_{i_1,i_2=1}^{d} a_{i_1} a_{i_2} = \sum_{\substack{k_1,\cdots,k_d \geq 0 \\ \sum_{i=1}^{d} k_i = 2}} \frac{2!}{k_1! \cdots k_d!} a_1^{k_1} \cdots a_d^{k_d}$$

2. לפי (1) מתקיים

$$f_n(\overline{x}) = \sum_{1 \leq i_1,\ldots,i_n \leq d} \Delta x_{i_1} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} (\Delta x_{i_2} \frac{\partial}{\partial x_{i_2}} (\ldots \Delta x_{i_{n-1}} \frac{\partial}{\partial x_{i_{n-1}}} (\Delta x_{i_n} \frac{\partial}{\partial x_{i_n}} f)\ldots)) =$$

$$= \sum_{1 \leq i_1,\ldots,i_n \leq d} \Delta x_{i_1} \cdots \Delta x_{i_d} \frac{\partial^n f}{\partial x_{i_n} \cdots \partial x_{i_1}}(\overline{x})$$

נשווה עם

$$(a_1 + \ldots + a_d)^n = \sum_{1 \leq i_1,\ldots,i_n \leq d} a_{i_1} \cdots a_{i_n}$$

שני איברים $a_{i_1},\ldots,a_{i_n}$, $a_{j_1},\ldots,a_{j_n}$ שווים אם ורק אם

$$\Delta x_{i_1} \cdots \Delta x_{i_n} \frac{\partial^n f}{\partial x_{i_n} \cdots \partial x_{i_1}} = \Delta x_{j_1} \cdots \Delta x_{j_n} \frac{\partial^n f}{\partial x_{j_n} \cdots \partial x_{j_1}}$$

ולכן

$$f_n(\overline{x}) = \sum_{\substack{k_1,\cdots,k_d \geq 0 \\ k_1+\ldots+k_d=n}} \frac{n!}{k_1! \cdots k_d!} \Delta x_1^{k_1} \cdots \Delta x_d^{k_d} \frac{\partial^n f}{\partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_d^{k_d}}(\overline{x})$$

מכיוון ש־ F גזירה ברציפות $m+1$ פעמים ב־ $(-T,T)$ כאשר $T>0$, עבור $t=1$:

$$F(1)=F(0)+\sum_{n=1}^{m}\frac{F^{(n)}(0)}{n!}1^n+\frac{1}{(m+1)!}F^{(m+1)}(\theta)$$

עבור $\theta\in(0,1)$. בעזרת (2) מתקיים:

$$f(\overline{x_0}+\overline{\Delta x})=f(\overline{x_0})+\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n!}\sum_{\substack{(k_1,\dots,k_d)\\ k_1+\dots+k_d=n}}\Delta x_1^{k_1}\cdots\Delta x_d^{k_d}\frac{\partial^n f}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_d^{k_d}}(\overline{x_0})+$$

$$+\frac{1}{(m+1)!}\sum_{\substack{(k_1,\dots,k_d)\\ k_1+\dots+k_d=m+1}}\Delta x_1^{k_1}\cdots\Delta x_d^{k_d}\frac{\partial^{m+1} f}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_d^{k_d}}(\overline{x_0}+\theta\overline{\Delta x})$$

13 תנאים על נגזרות מסדר ראשון ושני עבור מינימום ומקסימום

משפט 1 תהי f בעלת נגזרות מסדר 1 ו־2 רציפות. בור נקודה סטציונארית $\overline{x_0}$, נסמן ב־ l_f את התבנית הריבועית

$$l_f(\overline{\Delta x})=\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d}\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_i}(\overline{x_0})\Delta x_i^2+2\sum_{1\le i<j\le d}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(\overline{x_0})\Delta x_i\Delta x_j$$

אם l_f חיובית לחלוטין אז $\overline{x_0}$ נקודת מינימום, ואם l_f שלילית לחלוטין אז $\overline{x_0}$ נקודת מקסימום.

הוכחה ראינו כי עבור $\overline{\Delta x}$ עם $\|\overline{\Delta x}\|$ קטן מתקיים:

$$f(\overline{x_0}+\overline{\Delta x})-f(\overline{x_0})=\frac{1}{2}l_f(\overline{\Delta x})+\frac{1}{2}R(\overline{\Delta x})$$

כאשר

$$R(\overline{\Delta x})=\sum_{i=1}^{d}\alpha_{ii}(\overline{\Delta x})\Delta x_i^2+2\sum_{1\le i<j\le\alpha}\alpha_{ij}(\overline{\Delta x})\Delta x_i\Delta x_j$$

כאשר $\forall i,j\ \alpha_{ij}(\overline{\Delta x})\xrightarrow[\overline{\Delta x}\to 0]{}0$

נניח ש־ l_f חיובית לחלוטין, $\overline{\Delta x}\neq 0$. נגדיר $\overline{t}=\frac{\overline{\Delta x}}{\|\overline{\Delta x}\|}\in S^{d-1}=\{\overline{y}\in\mathbb{R}^d\mid\|\overline{y}\|=1\}$.

$$l_f(\overline{\Delta x})=l_f(\|\overline{\Delta x}\|\overline{t})=\|\overline{\Delta x}\|^2 l_f(\overline{t})\ge M\|\overline{\Delta x}\|^2$$

עבור $M>0$ וכל $\overline{\Delta x}\neq 0$. מצד שני, מכיוון ש־ $\alpha_{ij}(\overline{\Delta x})\xrightarrow[\overline{\Delta x}\to 0]{}0$, לכל $\epsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל i,j מתקיים $\|\overline{\Delta x}\|<\delta\implies|\alpha_{ij}(\overline{\Delta x})|<\epsilon$ ולכן־

$$|R(\overline{\Delta x})|\le\sum_{i=1}^{d}|\alpha_{ii}(\overline{\Delta x})|\Delta x_i^2+2\sum_{1\le i<j\le d}|\alpha_{ij}(\overline{\Delta x})||\Delta x_i||\Delta x_j|<$$

$$<\epsilon(\sum_{i=1}^{d}\Delta x_i^2+2\sum_{1\le i<j\le d}|\Delta x_i||\Delta x_j|)=\epsilon(\sum_{i=1}^{d}|\Delta x_i|)^2\le\epsilon\sum_{i=1}^{d}1^2\sum_{i=1}^{d}|\Delta x_i|^2=\epsilon d\|\overline{\Delta x}\|^2$$

נבחר $\epsilon=\frac{M}{2d}$ ונקבל כי קיים $\delta_0>0$ כך שלכל $\|\overline{\Delta x}\|<\delta_0$ יתקיים

$$f(\overline{x_0}+\overline{\Delta x})-f(\overline{x_0})=\frac{1}{2}(l_f(\overline{\Delta x})+R(\overline{\Delta x}))\ge\frac{1}{2}(M\|\overline{\Delta x}\|^2-\frac{M}{2d}d\|\overline{\Delta x}\|^2)>0$$

לכל $0<\|\overline{\Delta x}\|<\delta$ אז x_0 נקודת מינימום.

עבור l_f שלילית לחלוטין מחליפים f ב־ $(-f)$.