

הוכחות לחלק א' מבחן אינפי מתקדם 1, 2015-2016

איל כהן ועמית טרופ - מההרצאות של גנאדי לוין

3 בפברואר 2016

1 קבוצה ב- \mathbb{R}^d קומפקטית אמ"מ היא חסומה וסגורה

$$K \subset (\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_p) \text{ קומפקטית} \iff K \text{ חסומה וסגורה}$$

הוכחה (\Leftarrow):

נוכיח כי אם $K \subset X$ קב' קומפקטית אזי K חסומה וסגורה ואז בפרט $K \subset (\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_p)$ תקיים זאת. נניח בשלילה ש- K לא חסומה, אזי עבור $a \in X$ ועבור כל n מתקיים $a \notin B(a, n)$, כלומר, קיימת סדרה $(x_n) \subset K$ כך ש- $\rho(a, x_n) > n$. הסדרה x_n לא מכילה תת סדרה מתכנסת. אם $x_{n_k} \rightarrow x$ אזי

$$\rho(a, x_{n_k}) \leq \rho(a, x) + \rho(x, x_{n_k}) \rightarrow \rho(a, x)$$

וזו סתירה לכך ש- $\rho(a, x_n) > n$. קיבלנו כי קיימת סדרה ב- K אשר אין לה תת סדרה מתכנסת, בסתירה לקומפקטיות K . נניח בשלילה ש- K לא סגורה. מהטענה " $A \subset X$ סגורה $\iff A = \{y \in X \mid \exists \{x_n\} \subset A \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = y\}$ " קיימת סדרה $(x_n) \subset K$ כך ש- $x_n \rightarrow x$ אבל $x \notin K$, לכן אין תת סדרה של (x_n) המתכנסת לנק' ב- K בסתירה לקומפקטיות K . (\implies)

תהי K חסומה וסגורה ו- $(x^n)_{n=1}^\infty \subset K$. $x^n = (x_1^n, \dots, x_d^n)$ חסומה, לכן קיים $r > 0$ כך ש- $\forall x \in K \|x\|_p \leq r$, לכן עבור כל n, i מתקיים $|x_i^n| \leq \|x^n\|_p \leq r$, כלומר, עבור כל $1 \leq i \leq d$ סדרה $(x_i^n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ חסומה. לפי משפט בולצ'אנו וירשטראס, הסדרה $(x_1^n)_{n=1}^\infty$ מכילה תת מסדרה מתכנסת $x_1^{n_{j,1}} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} x_1$. נתבונן ב- $\{n_{j,1}\} \subset \mathbb{N}$. סדרה זו חסומה לכן קיימת $(n_{j,1}) \subset (n_{j,2})$ כך ש- $x_2^{n_{j,2}} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} x_2$. נתבונן ב- $(x_d^{n_{j,d-1}})_{j=1}^\infty \subset \mathbb{R}$. סדרה זו חסומה לכן קיימת $(n_{j,d}) \subset (n_{j,d-1})$ כך ש- $x_d^{n_{j,d}} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} x_d$.

תת סדרה $(x_1^{n_{j,d}}, \dots, x_d^{n_{j,d}})_{j=1}^\infty = (x^{n_{j,d}})_{j=1}^\infty$ של x^n מתכנסת כי $x_i^{n_{j,d}} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} x_i$ לכל i (הסדרה של כל קואורדינטה מתכנסת), אזי $a = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$. $x^{n_{j,d}} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} a$ כי $a \in K$ קבוצה סגורה ו- $(x^{n_{j,d}})_{j=1}^\infty \subset K$ ומכאן ש- K קבוצה קומפקטית.

2 היינה בורל

התנאים הבאים שקולים:

1. X מ"מ קומפקטי

2. כל כיסוי פתוח של X מכיל תת כיסוי סופי

3. עבור כל אוסף $(F_\alpha)_{\alpha \in I}$ של קבוצות סגורות, מתקיים - אם חיתוך של כל מס' סופי של קבוצות מ- (F_α) לא ריק, אזי גם $\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha \neq \emptyset$.

הוכחה (2 \Leftarrow 3):

מחוקי דה־מורגן נקבל כי

$$X \setminus \bigcup_{\alpha} F_\alpha = \bigcap_{\alpha} (X \setminus F_\alpha), \quad X \setminus \bigcap_{\alpha} F_\alpha = \bigcup_{\alpha} (X \setminus F_\alpha)$$

תהי $(F_\alpha)_{\alpha \in I}$ אוסף קבוצות סגורות כך שחיתוך של כל מספר סופי של קבוצות מ- $(F_\alpha)_{\alpha \in I}$ לא ריק. צ"ל $\emptyset \neq \bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha$. נניח בשלילה כי $\emptyset = \bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha$, אזי

$$\bigcup_{\alpha \in I} (X \setminus F_\alpha) = X \setminus \bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha = X \setminus \emptyset = X$$

כלומר $(X \setminus F_\alpha)_{\alpha \in I}$ כיסוי פתוח (כי כל F_α קבוצה סגורה), לכן מ-2 הוא מכיל תת כיסוי סופי, כלומר קיימים $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ כך ש- $\bigcup_{i=1}^m (X \setminus F_{\alpha_i}) = X$

$$X \setminus \bigcap_{i=1}^m F_{\alpha_i} = \bigcup_{i=1}^m (X \setminus F_{\alpha_i}) = X$$

כלומר, $\emptyset = \bigcap_{i=1}^m F_{\alpha_i}$ סתירה.

(3 \Leftarrow 2): זהה לכיוון הראשון.

(3 \Leftarrow 1):

תהי $(x_n) \subset X$. צריך למצוא לה תת סדרה מתכנסת. עבור כל $n \geq 1$, נגדיר קבוצה

$$L_n = \{x_m \mid m \geq n\} \subset X$$

מכיוון ש- $L_{n+1} \subset L_n$ מתקיים $\overline{L_{n+1}} \subset \overline{L_n}$. נתבונן באוסף $(\overline{L_n})_{n=1}^\infty$ של קבוצות סגורות. עבור כל מס' סופי $\overline{L_{n_1}}, \dots, \overline{L_{n_m}} \subset \overline{L_n}$ אם $n_1 < \dots < n_m$ אזי $\bigcap_{j=1}^m \overline{L_{n_j}} = \overline{L_{n_m}} \neq \emptyset$. מ-3 מתקיים $\bigcap_{n=1}^\infty \overline{L_n} \neq \emptyset$. ניקח $a \in \bigcap_{n=1}^\infty \overline{L_n}$. עבור כל n מתקיים $a \in \overline{L_n}$, לכן עבור כל $k \geq 1$ הכדור $B(a, \frac{1}{k})$ נחתך עם L_n לכל n . ולכן קיים $x_{n_1} \in L_1$ כך ש- $\rho(a, x_{n_1}) < \frac{1}{1}$, קיים $x_{n_2} \in L_2$ כך ש- $\rho(a, x_{n_2}) < \frac{1}{2}$, קיים $x_{n_k} \in L_k$ כך ש- $\rho(a, x_{n_k}) < \frac{1}{k}$. נתבון בתת סדרה $(x_{n_k}) \subset x_n$, מתקיים $\rho(a, x_{n_k}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, לכן $x_{n_k} \rightarrow a$.

(2 \Leftarrow 1):

נתון X מ"מ קומפקטי. צ"ל אם $(E_\alpha)_{\alpha \in I}$ כיסוי פתוח של X , אזי הוא מכיל תת כיסוי סופי.

למה 1:

קיים $\epsilon > 0$ כך שלכל $x \in X$ הכדור $B(x, \epsilon)$ מוכל כולו באחת מקבוצות E_α .

הוכחה:

נניח בשלילה שלא קיים $\epsilon > 0$ כמתואר, אז לכל n קיימת נק' x_n כך ש- $B(x_n, \frac{1}{n})$ אינו מוכל באף E_α . X מ"מ קומפקטי, לכן $(x_n)_{n=1}^\infty$ מכילה תת סדרה מתכנסת $x_{n_k} \rightarrow a$. $a \in E_{\alpha_0}$. קבוצה פתוחה (כי זהו כיסוי פתוח), לכן קיים $r > 0$ כך ש- $B(a, r) \subset E_{\alpha_0}$. מכיוון ש- $x_{n_k} \rightarrow a$ ו- $\frac{1}{n_k} \rightarrow 0$ קיים k_0 כך ש- $B(x_{n_{k_0}}, \frac{1}{n_{k_0}}) \subset B(a, r) \subset E_{\alpha_0}$. ולכן $B(x_{n_{k_0}}, \frac{1}{n_{k_0}}) \subset E_{\alpha_0}$ בסתירה לבחירה של x_n .

למה 2:

לכל $\epsilon > 0$ קיים מס' סופי של נק' x_1, \dots, x_p כך ש- $\bigcup_{i=1}^p B(x_i, \epsilon) = X$.

הוכחה:

ניקח $x_1 \in X$ אם $B(x_1, \epsilon) = X$ סיימנו, אחרת, קיימת נק' $x_2 \in X$ כך ש- $\rho(x_1, x_2) \geq \epsilon$ (כלומר, $x_2 \notin B(x_1, \epsilon)$). אם

$$B(x_1, \epsilon) \cup B(x_2, \epsilon) = X$$

סיימנו, אחרת, קיימת $x_3 \in X$ כך ש- $\rho(x_2, x_3) \geq \epsilon \wedge \rho(x_1, x_3) \geq \epsilon$
אזי או שמצאנו כיסוי סופי של הכדורים עם ה- ϵ הנתון, או שמצאנו סדרה $(x_n)_{n=1}^\infty$ כך ש- $\rho(x_i, x_j) \geq \epsilon$ לכל $i \neq j$. בפרט, וגם אף תת-סדרה שלה לא יכולה להיות סדרת קושי ולכן לא יכולה להתכנס. זאת סתירה לקומפקטיות של X . מכאן שמצאנו כיסוי סופי של כדורים עם ה- ϵ הנתון.

חזרה להוכחת המשפט:

ניקח $\epsilon > 0$ כמו בלמה 1. עבור ϵ זה, לפי למה 2 קיימות נק' x_1, \dots, x_p כך ש- $\bigcup_{i=1}^p B(x_i, \epsilon) = X$. לפי למה 1 ובחירתו של ϵ , לכל כדור $B(x_i, \epsilon)$ קיימת $E_{\alpha_i} \subset B(x_i, \epsilon)$ כך ש- $E_{\alpha_i} \subset B(x_i, \epsilon)$ מתקיים

$$X = \bigcup_{i=1}^p B(x_i, \epsilon) \subset \bigcup_{i=1}^p E_{\alpha_i}$$

ולכן $(E_{\alpha_i})_{i=1}^p$ תת כיסוי סופי של X .

3 על סדרה יורדת של כדורים

מרחב מטרי (X, ρ) שלם \iff כל סדרה $(B_n)_{n=1}^\infty$ של כדורים סגורים, כך ש- $B_{n+1} \subset B_n$ לכל n ורדיוס r_n של B_n מקיים $r_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, $\bigcap_{n=1}^\infty B_n \neq \emptyset$.

הוכחה (\Leftarrow):

יהי X מ"מ שלם ו- $(B_n)_{n=1}^\infty$ כאשר $B_n = \overline{B}(x_n, r_n)$ סדרה כנ"ל. צ"ל $\bigcap_{n=1}^\infty B_n \neq \emptyset$. עבור כל $m > n$ מתקיים $x_m \in B_n$ (כי $B_m \subset B_n$), לכן $\rho(x_m, x_n) < r_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, כלומר $(x_m)_{m=1}^\infty$ היא סדרת קושי. X מ"מ שלם, לכן קיים גבול $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. נוכיח כי $a \in B_n$ לכל n - עבור כל n , הסדרה $(x_n, x_{n+1}, \dots) \subset B_n$ קבוצה סגורה, לכן $a = \lim_{m \rightarrow \infty, m > n} x_m \in B_n$. \implies

נניח שכל סדרה של כדורים כנ"ל בעלת חיתוך לא ריק, ונוכיח כי X שלם. תהי $(x_n)_{n=1}^\infty$ סדרת קושי ב- X , אזי קיים n_1 כך שלכל $n > n_1$ מתקיים $\rho(x_n, x_{n_1}) < \frac{1}{2}$. קיים $n_2 > n_1$ כך שלכל $n > n_2$ מתקיים $\rho(x_n, x_{n_2}) < \frac{1}{2^2}$. קיים $n_k > n_{k-1}$ כך שלכל $n > n_k$ מתקיים $\rho(x_n, x_{n_k}) < \frac{1}{2^k}$. נגדיר $B_k = \overline{B}(x_{n_k}, \frac{1}{2^{k-1}})$ ונוכיח כי $B_{k+1} \subset B_k$ (כלומר, זוהי סדרה יורדת). לכל $y \in B_{k+1}$ מתקיים

$$\rho(y, x_{n_k}) \leq \rho(y, x_{n_{k+1}}) + \rho(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) \leq \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}}$$

והרדיוס של B_k הוא $\frac{1}{2^{k-1}}$, לכן $y \in B_k$. לכן מתקיימים תנאי ההנחה ומכאן קיימת נק' $a \in \bigcap_{k=1}^\infty B_k$, אזי לכל k מתקיים $\rho(a, x_{n_k}) \leq \frac{1}{2^{k-1}} \rightarrow 0$ כלומר, a היא הגבול של תת הסדרה $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$, לכן גם $(x_n)_{n=1}^\infty$ מתכנסת ל- a . קיבלנו כי כל סדרת קושי ב- X מתכנסת, ולכן X שלם.

4 עיקרון של ההעתקה המכווצת

יהי (X, ρ) מ"מ שלם ו- $A : X \rightarrow X$ כיווץ. אזי A בעלת נק' שבת, x_0 , יחידה ולכל $y \in X$ קיים גבול $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n y = x_0$.

הוכחה עבור $y \in X$ נגדיר

$$y_n = \begin{cases} A^n y & n \in \mathbb{N} \\ y & n = 0 \end{cases}$$

נוכיח שהסדרה $(y_n)_{n=1}^\infty$ סדרת קושי. לפי ההגדרה קיים $0 < \alpha < 1$ כך ש-

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad \rho(Ax_1, Ax_2) \leq \alpha \rho(x_1, x_2)$$

אזי לכל $m > n$ מתקיים-

$$\begin{aligned} \rho(y_m, y_n) &= \rho(Ay_{m-1}, Ay_{n-1}) \leq \alpha \rho(y_{m-1}, y_{n-1}) \leq \dots \leq \alpha^n \rho(y_{m-n}, y_0) \leq \\ &\leq \alpha^n \sum_{i=0}^{m-n-1} \rho(y_i, y_{i+1}) \leq \alpha^n \sum_{i=0}^{m-n-1} \alpha^i \rho(y_0, y_1) \leq \alpha^n \rho(y_0, y_1) \sum_{i=0}^\infty \alpha^i = \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \rho(y_0, y_1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

לכן זוהי סדרת קושי ו- X שלם ולכן קיים הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x_0$ ולכן-

$$A(x_0) = A(\lim_{n \rightarrow \infty} A^n y) \stackrel{(*)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} A(A^n y) = \lim_{n \rightarrow \infty} A^{n+1} y = x_0$$

(*) - מרציפות A

ולכן x_0 נקודת שבת.
יחידות - תהי $y_0 \neq x_0$ נקודת שבת, אזי

$$0 \neq \rho(x_0, y_0) = \rho(Ax_0, Ay_0) \leq \alpha \rho(x_0, y_0)$$

סתירה לכך ש- $\alpha < 1$.

5 אי שוויון בסל

תהי A מערכת אורתונורמלית סופית או בת מניה במרחב אוקלידי \mathcal{U} , אזי לכל $x \in \mathcal{U}$ מתקיים $\sum_{u \in A} \langle x, u \rangle^2 \leq \|x\|^2$

טענה תהי $U = (u_i)_{i=1}^n$ מערכת אורתונורמלית סופית במרחב אוקלידי \mathcal{U} ויהי M תת מרחב הנפרש ע"י U . ההטלה y של וקטור $x \in \mathcal{U}$ ל- M היא $y = \sum_{i=1}^n \langle x, u_i \rangle u_i$ אזי $x - y$ ניצב לכל $z \in M$ ומתקיים

$$\forall y \neq z \in M \quad \|x - y\| < \|x - z\|$$

הוכחת הטענה לכל $M \ni z = \sum_{j=1}^n \lambda_j u_j$ מתקיים

$$\begin{aligned} \langle x - y, z \rangle &= \langle x - \sum_{i=1}^n \langle x, u_i \rangle u_i, \sum_{j=1}^n \lambda_j u_j \rangle = \langle x, \sum_{j=1}^n \lambda_j u_j \rangle - \langle \sum_{i=1}^n \langle x, u_i \rangle u_i, \sum_{j=1}^n \lambda_j u_j \rangle = \\ &= \sum_{j=1}^n \lambda_j \langle x, u_j \rangle - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle x, u_i \rangle \lambda_j \langle u_i, u_j \rangle = \sum_{j=1}^n \lambda_j \langle x, u_j \rangle - \sum_{j=1}^n \langle x, u_j \rangle \lambda_j = 0 \end{aligned}$$

כלומר $z \perp (x - y)$ עבור כל $z \in M$.
לכל $y \neq z \in M$ מתקיים

$$\|x - z\|^2 = \|(x - y) + (y - z)\|^2 \stackrel{(*)}{=} \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2 \geq \|x - y\|^2$$

(*) - $x - y \perp y - z$ (פיתגורס)

מסקנה

$$\begin{aligned} 0 \leq \|x - \sum_{i=1}^n \langle x, u_i \rangle u_i\|^2 &= \langle x - \sum_{i=1}^n \langle x, u_i \rangle u_i, x - \sum_{i=1}^n \langle x, u_i \rangle u_i \rangle = \\ &= \langle x - \sum_{i=1}^n \langle x, u_i \rangle u_i, x \rangle - \langle x - \sum_{i=1}^n \langle x, u_i \rangle u_i, \sum_{i=1}^n \langle x, u_i \rangle u_i \rangle \stackrel{(*)}{=} \langle x - \sum_{i=1}^n \langle x, u_i \rangle u_i, x \rangle = \\ &= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^n \langle x, u_i \rangle \langle u_i, x \rangle = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^n \langle x, u_i \rangle^2 \end{aligned}$$

(*) - $\langle x - \sum_{i=1}^n \langle x, u_i \rangle u_i, \sum_{i=1}^n \langle x, u_i \rangle u_i \rangle = 0$ כי $x - \sum_{i=1}^n \langle x, u_i \rangle u_i = x - y \in M$ ו- $\sum_{i=1}^n \langle x, u_i \rangle u_i = y \in M$ ומהטענה הם ניצבים.

הוכחת אי שוויון בסל אם A קבוצה סופית, אזי מתקיימת המסקנה.

אם $A = (u_i)_{i=1}^\infty$ אזי לפי המסקנה, עבור כל n מתקיים $\sum_{i=1}^n \langle x, u_i \rangle^2 \leq \|x\|^2$ (במעבר לגבול) מתקיים $\sum_{i=1}^\infty \langle x, u_i \rangle^2 \leq \|x\|^2$ (הטור מונוטוני עולה וחסום).

6 על מערכת אורתונורמלית שלמה ושוויון פרסבל

תהי $\phi = (\varphi_i)_{i=1}^{\infty}$ מערכת אורתונורמלית במרחב אוקלידי \mathcal{V} , התנאים הבאים שקולים:

1. ϕ שלמה

2. ϕ בסיס, בפרט עבור כל $x \in \mathcal{V}$ מתקיים $x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, \varphi_i \rangle \varphi_i$

3. עבור כל $x \in \mathcal{V}$ מתקיים שוויון פרסבל:

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, \varphi_i \rangle^2$$

הוכחה (1 \Leftarrow 2):

נתון ϕ מערכת אורתונורמלית שלמה. צ"ל עבור כל $x \in \mathcal{V}$ קיימת הצגה יחידה $x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, \varphi_i \rangle \varphi_i$, כלומר, לכל $\epsilon > 0$ קיים $n_0 = n_0(\epsilon)$ (תלוי ב- ϵ) כך שלכל $n > n_0$ מתקיים $\|x - \sum_{i=1}^n \langle x, \varphi_i \rangle \varphi_i\| < \epsilon$. נשים לב כי הפיתוח $x = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \varphi_i$ הוא יחיד

$$0 = x - x = \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_i - \langle x, \varphi_i \rangle) \varphi_i$$

$$0 = \langle 0, \varphi_j \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_i - \langle x, \varphi_i \rangle) \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \lambda_j - \langle x, \varphi_j \rangle$$

יהא $\epsilon > 0$, שלמה לכם קיים $n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ ו- $\lambda_1, \dots, \lambda_{n_0} \in \mathbb{R}$ כך ש- $\|x - \sum_{i=1}^{n_0} \lambda_i \varphi_i\| < \epsilon$. לפי טענה המופיעה באי שוויון בסל מתקיים

$$\|x - \sum_{i=1}^{n_0} \langle x, \varphi_i \rangle \varphi_i\| \leq \|x - \sum_{i=1}^{n_0} \lambda_i \varphi_i\| < \epsilon$$

(אי השוויון הראשון חלש מכיוון ש- $\sum_{i=1}^{n_0} \lambda_i \varphi_i$ יכול להיות שווה ל- $\sum_{i=1}^{n_0} \langle x, \varphi_i \rangle \varphi_i$ בגלל שהם באותו מרחב) לכן עבור כל $n > n_0$ מתקיים

$$\|x - \sum_{i=1}^n \langle x, \varphi_i \rangle \varphi_i\| \leq \|x - \sum_{i=1}^{n_0} \langle x, \varphi_i \rangle \varphi_i\| < \epsilon$$

(2 \Leftarrow 3):

לפי המסקנה בהוכחה של בסל נקבל

$$\|x - \sum_{i=1}^n \langle x, \varphi_i \rangle \varphi_i\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^n \langle x, \varphi_i \rangle^2$$

מ-2 נקבל $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - \sum_{i=1}^n \langle x, \varphi_i \rangle \varphi_i\| = 0$, לכן $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x\|^2 - \sum_{i=1}^n \langle x, \varphi_i \rangle^2 = 0$ ומכאן ש- $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, \varphi_i \rangle^2$ (3 \Leftarrow 1):

נניח כי עבור כל $x \in \mathcal{V}$ מתקיים $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, \varphi_i \rangle^2$, אזי לפי המסקנה בהוכחה של בסל לכל n מתקיים

$$\|x - \sum_{i=1}^n \langle x, \varphi_i \rangle \varphi_i\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^n \langle x, \varphi_i \rangle^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

כלומר, $x \in \text{span}(\phi)$.

7 משפט על טור פורייה של פונקציה הגזירה ברציפות למקוטעין

תהי f רציפה בקטע $[0, 2\pi]$ וגזירה ברציפות למקוטעין ב- $[0, 2\pi]$ ו- $f(0) = f(2\pi)$ אזי טור פורייה של f מתכנס אליה במידה שווה ב- $[0, 2\pi]$

$$f(x) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(f) \sin(nx)$$

הוכחה הפונקציה f' רציפה למקוטעין ולכן אינטגרלית רימן ב- $[0, 2\pi]$ לכן קיימות $a_n(f')$ ו- $b_n(f')$ עבור $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx \stackrel{*}{=} \frac{1}{\pi} \left[f(x) \frac{\sin(nx)}{n} \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{\sin(nx)}{n} f'(x) dx \right] = \\ &= -\frac{1}{n} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f'(x) \sin(nx) dx = -\frac{1}{n} b_n(f') \end{aligned}$$

* - אינטגרציה בחלקים

$$\begin{aligned} b_n(f) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx \stackrel{*}{=} \frac{1}{\pi} \left[-f(x) \frac{\cos(nx)}{n} \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{\cos(nx)}{n} f'(x) dx \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{n} (f(2\pi) - f(0)) + \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} f'(x) \cos(nx) dx \right] = \frac{1}{n} a_n(f') \end{aligned}$$

* - אינטגרציה בחלקים

מצד שני, לפי אי שיויון בסל לפונקציה $f' \in H[0, 2\pi]$ מתקיים

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(f')^2 < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n(f')^2 < \infty$$

מכיוון שלכל $x, y \in \mathbb{R}$ מתקיים $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$ ולכן $xy \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ ומכאן-

$$|a_n(f)| = \frac{1}{n} |b_n(f')| \leq \frac{1}{2} (b_n(f')^2 + \frac{1}{n^2})$$

ו-

$$|b_n(f)| = \frac{1}{n} |a_n(f')| \leq \frac{1}{2} (a_n(f')^2 + \frac{1}{n^2})$$

אז

$$|a_0(f)| + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n(f)| + |b_n(f)|) \leq |a_0(f)| + \frac{1}{2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} (a_n(f')^2 + b_n(f')^2) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right] < \infty$$

אבל לכל $x \in [0, 2\pi]$

$$\begin{aligned} |a_n(f) \cos(nx)| &\leq |a_n(f)| \\ |b_n(f) \sin(nx)| &\leq |b_n(f)| \end{aligned}$$

לפי קריטריון ויירשטראס, טור פורייה:

$$\mathcal{S}_n^f(x) = a_0(f) + \sum_{k=1}^n a_k(f) \cos(kx) + \sum_{k=1}^n b_k(f) \sin(kx)$$

מתכנס בהחלט ובמידה שווה ל- $\mathcal{S}^f(x)$ אשר היא פונקציה רציפה ב- $[0, 2\pi]$ (כי אברי הטור הם פונקציות רציפות ב- $[0, 2\pi]$ וההתכנסות היא במידה שווה). התכנסות במ"ש גוררת התכנסות בממוצע ולכן $\mathcal{S}_n^f \rightarrow \mathcal{S}^f$ בממוצע, כלומר

$$(1) \int_0^{2\pi} (\mathcal{S}_n^f(x) - \mathcal{S}^f(x))^2 dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

מצד שני $f \in H[0, 2\pi]$ ולכן

$$(2) \int_0^{2\pi} (\mathcal{S}_n^f(x) - f(x))^2 dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

(1) $\iff \|\mathcal{S}_n^f - \mathcal{S}^f\|_2 \rightarrow 0$ ו- (2) $\iff \|\mathcal{S}_n^f - f\|_2 \rightarrow 0$ כלומר $f = \mathcal{S}^f$ כמעט תמיד, אבל f ו- \mathcal{S}^f רציפות ולכן שוות.

8 תנאי דיני

יהיו $f \in H[0, 2\pi]$, $x_0 \in (0, 2\pi)$ ו- $\delta > 0$ כך ש-

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| dx < \infty$$

אזי טור פורייה של f מתכנס ב- x_0 ל- $f(x_0)$.

טענה תהי ψ מוגדרת ב- \mathbb{R} , אינטגרלית ב- $[0, T]$ עבור $T > 0$ המקיימת $\psi(x+T) = \psi(x) \forall x \in \mathbb{R}$, אזי עבור כל $a \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$\int_a^{a+T} \psi(x) dx = \int_0^T \psi(x) dx$$

הוכחת הטענה

$$\begin{aligned} \int_a^{a+T} \psi(x) dx - \int_0^T \psi(x) dx &= \int_a^T \psi(x) dx + \int_T^{a+T} \psi(x) dx - \left(\int_a^T \psi(x) dx + \int_0^a \psi(x) dx \right) = \\ &= \int_T^{a+T} \psi(x) dx - \int_0^a \psi(x) dx \stackrel{x=y+T}{=} \int_0^a \psi(y+T) dy - \int_0^a \psi(x) dx \stackrel{(*)}{=} 0 \end{aligned}$$

הוכחת המשפט מהטענה נקבל

$$\int_0^{2\pi} D_n(x_0 - t) dt = \int_{x_0}^{x_0-2\pi} D_n(\tau) d\tau = \int_{x_0-2\pi}^{x_0} D_n(\tau) d\tau = \int_0^{2\pi} D_n(\tau) d\tau \stackrel{*}{=} 2\pi$$

\star - מתכונה 2 של גרעין דריכלה ($\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_n(x) dx = 1$)
לכן

$$\begin{aligned} f(x_0) - \mathcal{S}_n^f(x_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x_0) D_n(x_0 - t) dt - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) D_n(x_0 - t) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{f(x_0) - f(t)}{x_0 - t} \right] \left[\frac{x_0 - t}{\sin(\frac{x_0-t}{2})} \right] \sin\left(\frac{2n+1}{2}(x_0 - t)\right) dt \stackrel{*}{=} \dots \end{aligned}$$

• הפונקציה $g(t) = \frac{f(x_0) - f(t)}{x_0 - t}$ אינטגרבילית ב- $[0, 2\pi]$ כי g אינטגרבילית ב- $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ לפי תנאי המשפט. עבור $t \in [0, 2\pi] \setminus (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ מתקיים $|g(t)| \leq \frac{1}{\delta} |f(t) - f(x_0)|$ אינטגרבילית ב- $[0, 2\pi]$ ולכן גם g אינטגרבילית.

• הפונקציה $\frac{x_0 - t}{\sin(\frac{x_0 - t}{2})}$ לא מוגדרת ב- $t = x_0$ אבל מתרחבת לפונקציה רציפה

$$h(t) := \begin{cases} \frac{x_0 - t}{\sin(\frac{x_0 - t}{2})} & t \neq x_0 \\ 2 & t = x_0 \end{cases}$$

שהיא אינטגרבילית ב- $[0, 2\pi]$, ולכן המכפלה אינטגרבילית

$$H[0, 2\pi] \ni \frac{f(x_0) - f(t)}{x_0 - t} \cdot \frac{x_0 - t}{\sin(\frac{x_0 - t}{2})} = \varphi(t)$$

ולכן

$$\dots \stackrel{*}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(t) \sin\left(\frac{2n+1}{2}(x_0 - t)\right) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

לפי למת רימן לבג.

9 משפט בייר

לא ניתן להציג מרחב מטרי שלם כאיחוד בן מניה של קבוצות דלילות: אם X שלם ולכל $n \in \mathbb{N}$ הקבוצה $A_n \subset X$ דלילה, אזי $X \neq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

הוכחה נניח בשלילה $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ כאשר כל A_n קבוצה דלילה ו- X מרחב מטרי שלם. נקח כדור סגור $\overline{B_0}$ עם רדיוס 1. A_1 קבוצה דלילה לכן קיים כדור סגור $\overline{B_1}$ עם רדיוס $\frac{1}{2} > \frac{1}{2}$ כך ש- $\overline{B_1} \subset \overline{B_0}$ ו- $\overline{B_1} \cap A_1 = \emptyset$. גם A_2 קבוצה דלילה, לכן קיים כדור סגור $\overline{B_2}$ עם רדיוס $\frac{1}{3} > \frac{1}{3}$ כך ש- $\overline{B_2} \subset \overline{B_1}$ ו- $\overline{B_2} \cap A_2 = \emptyset$ ולכן גם $\overline{B_2} \cap A_1 = \emptyset$ (...). גם A_n קבוצה דלילה, לכן קיים כדור סגור $\overline{B_n}$ עם רדיוס $\frac{1}{n+1} > \frac{1}{n+1}$ כך ש- $\overline{B_n} \subset \overline{B_{n-1}}$ ו- $\overline{B_n} \cap A_n = \emptyset$ ובהכרח $\overline{B_n} \cap A_k = \emptyset$ לכל $1 \leq k \leq n$.

X מרחב מטרי שלם $(\overline{B_n})_{n=1}^\infty$ סדרה יורדת של כדורים סגורים עם רדיוס שואף ל-0. לכן, לפי משפט על סדרה יורדת של כדורים סגורים, קיימת z כך ש- $z \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{B_n}$ אזי $z \notin A_n$ לכל n , סתירה.

ניסוח שקול במילים אחרות, אם כל קבוצה E_n היא פתוחה וצפופה ב- X אזי $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n$ היא גם קבוצה צפופה.

מסקנה מרחב מטרי שלם ללא נקודות מבודדות לא ניתן למניה.

10 משפט פייר

תהי f רציפה ב- $[0, 2\pi]$ ו- $f(0) = f(2\pi)$ אזי סכומי Fejer $\{\sigma_n(x)\}_{n=1}^\infty$

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{S}_k^f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) K_n(x-t) dt$$

מתכנסים ל- f במידה שווה על $[0, 2\pi]$.

הוכחה נמשיך את f עד פונקציה רציפה 2π מחזורית ב- \mathbb{R} . נקח $x \in [0, 2\pi]$

$$\begin{aligned}\sigma_n(x) - f(x) &\stackrel{(1)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)K_n(x-t)dt - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)K_n(x-t)dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(t) - f(x))K_n(x-t)dt \\ &\stackrel{(2)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-x}^{2\pi-x} (f(x+\tau) - f(x))K_n(\tau)d\tau \\ &\stackrel{(3)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x+\tau) - f(x))K_n(\tau)d\tau\end{aligned}$$

כאשר (1) מתקיים מתכונה 2 של גרעין $Fejer$. נסמן $\tau = x - t$ ואז (2) מתקיים כי K_n זוגית ולכן $K_n(t-x) = K_n(x-t)$. $K_n(\tau)$ (3) נובע ממחזוריות f .

f רציפה ו- 2π מחזורית ב- \mathbb{R} ולכן חסומה ורציפה במידה שווה ב- \mathbb{R} . יהא $0 < M \in \mathbb{R}$ כך ש- $|f(x)| \leq M$ $\forall x \in \mathbb{R}$. יהי $\epsilon > 0$. מרציפות במ"ש קיים $\delta > 0$ כך ש- $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$ $\implies |x_1 - x_2| < \delta$ (*) מתקיים-

$$|\sigma_n(x) - f(x)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\delta} (f(x+\tau) - f(x))K_n(\tau)d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} (f(x+\tau) - f(x))K_n(\tau)d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{\pi} (f(x+\tau) - f(x))K_n(\tau)d\tau \right|$$

נמצא חסמים לשלושת האינטגרלים הללו:

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} (f(x+\tau) - f(x))K_n(\tau)d\tau \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} |f(x-\tau) - f(x)|K_n(\tau)d\tau \leq$$

$$\stackrel{(1)}{\leq} \epsilon \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(\tau)d\tau \stackrel{(2)}{=} \epsilon$$

כאשר (1) מתקיים מ- (*) וכי הגדלנו את טווח האינטגרל. (2) מתקיים מתכונה 2 של גרעין $Fejer$.

$$\begin{aligned}&\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\delta} (f(x+\tau) - f(x))K_n(\tau)d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{\pi} (f(x+\tau) - f(x))K_n(\tau)d\tau \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\delta} |f(x+\tau) - f(x)|K_n(\tau)d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{\pi} |f(x+\tau) - f(x)|K_n(\tau)d\tau \leq \\ &\leq 2M \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^{-\delta} K_n(\tau)d\tau + \int_{\delta}^{\pi} K_n(\tau)d\tau \right] \stackrel{(1)}{=} \frac{2M}{2\pi} \left[\int_{\delta}^{\pi} K_n(\tau)d\tau + \int_{\pi}^{2\pi-\delta} K_n(t')dt' \right] = \\ &= \frac{2M}{2\pi} \int_{\delta}^{2\pi-\delta} K_n(\tau)d\tau \stackrel{(2)}{<} \epsilon\end{aligned}$$

(1) נסמן $\tau = t' - 2\pi$ עבור $\pi \leq t' \leq 2\pi - \delta$

(2) מתכונה 3 של גרעין $Fejer$ קיים n_0 כך שלכל $n \geq n_0$ מתקיים

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{2\pi-\delta} K_n(\tau)d\tau < \frac{\epsilon}{2M}$$

עבור ϵ נתון מצאנו n_0 כך שלכל $n \geq n_0$ ולכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$|\sigma_n(x) - f(x)| < 2\epsilon$$

11 משפט על תנאים המבטיחים $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

תהי $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ קבוצה פתוחה ו- $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ בעלת נגזרות חלקיות בכל נקודה $(x, y) \in \Omega$. נניח שבכל $(x, y) \in \Omega$ קיימות נגזרות משולבות $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ ו- $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ והן רציפות בנקודה $(x_0, y_0) \in \Omega$ אזי

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$$

הוכחה תהי $(x_0, y_0) \in \Omega$. עבור כל $h, k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ מספיק קטנים, נגדיר את הפונקציה:

$$W(h, k) = \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) + f(x_0, y_0)}{hk}$$

ונגדיר פונקציה

$$\varphi(x) = \frac{f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)}{k}$$

עבור כל $|k| \neq 0$ מספיק קטן. כעת

$$W(h, k) = \frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)}{h}$$

φ גזירה (לפי x) בכל x מספיק קרוב ל- x_0 מכיוון ש-

$$\varphi'(x) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0 + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0)}{k}$$

אזי לפי משפט הערך הממוצע, קיים $\theta_1 \in (0, 1)$ כך ש-

$$W(h, k) = \frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)}{h} = \varphi'(x_0 + \theta_1 h) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1 h, y_0)}{k}$$

נשתמש במשפט הערך הממוצע לפונקציה $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1 h, y)$ עבור $y \in [y_0, y_0 + k]$. פונקציה זו גזירה לפי y כי קיימת

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1 h, y) \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + \theta_1 h, y)$$

לכן קיימת $\theta_2 \in (0, 1)$ כך ש-

$$W(h, k) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_2 k)$$

באופן דומה אם נגדיר

$$\psi(y) = \frac{f(x_0 + h, y) - f(x_0, y)}{h}$$

אזי

$$W(h, k) = \frac{\psi(y_0 + k) - \psi(y_0)}{k}$$

ולכן קיימות $\theta_3, \theta_4 \in (0, 1)$ כך ש-

$$W(h, k) = \psi'(y_0 + \theta_3 k) = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + h, y_0 + \theta_3 k) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0 + \theta_3 k)}{h} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + \theta_4 h, y_0 + \theta_3 k)$$

הוכחנו כי לכל $h, k \neq 0$ קטנים, קיימות $\theta_i \in (0, 1)$ עבור $1 \leq i \leq 4$ כך ש-

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + \theta_4 h, y_0 + \theta_3 k) = W(h, k) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_2 k)$$

מרציפות $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ו- $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ ב- (x_0, y_0) קיימים

$$\begin{aligned} \lim_{h, k \rightarrow 0} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_2 k) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h, k \rightarrow 0} W(h, k) = \\ &= \lim_{h, k \rightarrow 0} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + \theta_4 h, y_0 + \theta_3 k) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

12 פיתוח לטור טיילור בכמה משתנים

תהי $f : B(\bar{x}_0, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ עבור $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^d$ בעלת כל הנגזרות החלקיות מסדר $1, 2, \dots, m+1$ והן רציפות. תהי $\bar{\Delta x} = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_d) \in \mathbb{R}^d$ כך ש- $\|\bar{\Delta x}\| < \epsilon$, אזי קיים $\theta \in (0, 1)$ כך ש-

$$f(\bar{x}_0 + \bar{\Delta x}) = f(\bar{x}_0) + \sum_{n=1}^m \frac{1}{n!} \sum_{\substack{k_1, \dots, k_d \geq 0 \\ k_1 + \dots + k_d = n}} \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_d!} \cdot \frac{\partial^n f}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_d^{k_d}}(\bar{x}_0) \Delta x_1^{k_1} \dots \Delta x_d^{k_d} + R$$

כאשר

$$R = \frac{1}{(m+1)!} \sum_{\substack{k_1, \dots, k_d \geq 0 \\ k_1 + \dots + k_d = m+1}} \frac{(m+1)!}{k_1! k_2! \dots k_d!} \cdot \frac{\partial^{m+1} f}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_d^{k_d}}(\bar{x}_0 + \theta \bar{\Delta x}) \Delta x_1^{k_1} \dots \Delta x_d^{k_d}$$

הוכחה נגדיר פונקציה $F(t) = f(\bar{x}_0 + t \bar{\Delta x})$ כך ש- $\|\bar{\Delta x}\| < \epsilon$ ולכן F מוגדרת ב- $(-T, T)$ עבור $T = \frac{\epsilon}{\|\bar{\Delta x}\|} > 1$, ונוכיח:

1. F גזירה ברציפות $m+1$ פעמים ב- $(-T, T)$ כאשר $\bar{x} = \bar{x}_0 + t \bar{\Delta x}$ ו- $F^{(n)}(t) = f_n(\bar{x})$, $\bar{x} = \bar{x}_0 + t \bar{\Delta x}$

$$f_{n+1}(\bar{x}) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial f_n}{\partial x_i}(\bar{x}) \Delta x_i$$

2.

$$f_n(\bar{x}) = \sum_{\substack{k_1, \dots, k_d \geq 0 \\ k_1 + \dots + k_d = n}} \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_d!} \cdot \frac{\partial^n f}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_d^{k_d}}(\bar{x}) \Delta x_1^{k_1} \dots \Delta x_d^{k_d}$$

נראה

1. עבור $n = 0$ נכון. נניח נכונות עבור n ומתקיים

$$F^{(n+1)}(t) = \frac{d}{dt} f_n(\bar{x}_0 + t \bar{\Delta x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_n}{\partial x_i}(\bar{x}) \Delta x_i = f_{n+1}(\bar{x})$$

$$f_1(\bar{x}) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}) \Delta x_i$$

$$f_2(\bar{x}) = \sum_{i_1=1}^d \Delta x_{i_1} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \left(\sum_{i_2=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_{i_2}}(\bar{x}) \Delta x_{i_2} \right) = \sum_{i_1, i_2=1}^d \Delta x_{i_1} \Delta x_{i_2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_2} \partial x_{i_1}}(\bar{x}) =$$

$$\stackrel{*}{=} \sum_{\substack{k_1, \dots, k_d \geq 0 \\ k_1 + \dots + k_d = 2}} \frac{2!}{k_1! \dots k_d!} \Delta x_1^{k_1} \dots \Delta x_d^{k_d} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_d^{k_d}}$$

כאשר \star מתקיים כי

$$(a_1 + \dots + a_d)^2 = \sum_{i_1, i_2=1}^d a_{i_1} a_{i_2} = \sum_{\substack{k_1, \dots, k_d \geq 0 \\ \sum_{i=1}^d k_i = 2}} \frac{2!}{k_1! \dots k_d!} a_1^{k_1} \dots a_d^{k_d}$$

2. לפי (1) מתקיים

$$f_n(\bar{x}) = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_n \leq d} \Delta x_{i_1} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \left(\Delta x_{i_2} \frac{\partial}{\partial x_{i_2}} \left(\dots \Delta x_{i_{n-1}} \frac{\partial}{\partial x_{i_{n-1}}} \left(\Delta x_{i_n} \frac{\partial}{\partial x_{i_n}} f \right) \dots \right) \right) =$$

$$= \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_n \leq d} \Delta x_{i_1} \dots \Delta x_{i_n} \frac{\partial^n f}{\partial x_{i_n} \dots \partial x_{i_1}}(\bar{x})$$

נשווה עם

$$(a_1 + \dots + a_d)^n = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_n \leq d} a_{i_1} \dots a_{i_n}$$

שני איברים $a_{j_1}, \dots, a_{j_n}, a_{i_1}, \dots, a_{i_n}$ שווים אם ורק אם

$$\Delta x_{i_1} \dots \Delta x_{i_n} \frac{\partial^n f}{\partial x_{i_n} \dots \partial x_{i_1}} = \Delta x_{j_1} \dots \Delta x_{j_n} \frac{\partial^n f}{\partial x_{j_n} \dots \partial x_{j_1}}$$

ולכן

$$f_n(\bar{x}) = \sum_{\substack{k_1, \dots, k_d \geq 0 \\ k_1 + \dots + k_d = n}} \frac{n!}{k_1! \dots k_d!} \Delta x_1^{k_1} \dots \Delta x_d^{k_d} \frac{\partial^n f}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_d^{k_d}}(\bar{x})$$

מכיוון ש- F גזירה ברציפות $m+1$ פעמים ב- $(-T, T)$ כאשר $T > 0$, עבור $t = 1$:

$$F(1) = F(0) + \sum_{n=1}^m \frac{F^{(n)}(0)}{n!} 1^n + \frac{1}{(m+1)!} F^{(m+1)}(\theta)$$

עבור $\theta \in (0, 1)$. בעזרת (2) מתקיים:

$$f(\bar{x}_0 + \bar{\Delta x}) = f(\bar{x}_0) + \sum_{n=1}^m \frac{1}{n!} \sum_{\substack{(k_1, \dots, k_d) \\ k_1 + \dots + k_d = n}} \Delta x_1^{k_1} \dots \Delta x_d^{k_d} \frac{\partial^n f}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_d^{k_d}}(\bar{x}_0) +$$

$$+ \frac{1}{(m+1)!} \sum_{\substack{(k_1, \dots, k_d) \\ k_1 + \dots + k_d = m+1}} \Delta x_1^{k_1} \dots \Delta x_d^{k_d} \frac{\partial^{m+1} f}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_d^{k_d}}(\bar{x}_0 + \theta \bar{\Delta x})$$

13 תנאים על נגזרות מסדר ראשון ושני עבור מינימום ומקסימום

משפט 1 תהי f בעלת כל הנגזרות החלקיות מסדר 1 ו-2 והן רציפות. עבור נקודה סטציונארית $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^d$, נסמן ב- l_f את התבנית הריבועית

$$l_f(\bar{\Delta x}) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_i}(\bar{x}_0) \Delta x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq d} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}_0) \Delta x_i \Delta x_j$$

אם l_f חיובית לחלוטין אז \bar{x}_0 נקודת מינימום, ואם l_f שלילית לחלוטין אז \bar{x}_0 נקודת מקסימום.

הוכחה ראינו כי עבור $\bar{\Delta x}$ עם $\|\bar{\Delta x}\|$ קטן מתקיים:

$$f(\bar{x}_0 + \bar{\Delta x}) - f(\bar{x}_0) = \frac{1}{2} l_f(\bar{\Delta x}) + \frac{1}{2} R(\bar{\Delta x})$$

כאשר

$$R(\bar{\Delta x}) = \sum_{i=1}^d \alpha_{ii}(\bar{\Delta x}) \Delta x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq d} \alpha_{ij}(\bar{\Delta x}) \Delta x_i \Delta x_j$$

כאשר $\forall i, j \alpha_{ij}(\bar{\Delta x}) \xrightarrow{\bar{\Delta x} \rightarrow 0} 0$

נניח ש- l_f חיובית לחלוטין, יהי $\bar{\Delta x} \neq 0$. נגדיר $\bar{t} = \frac{\bar{\Delta x}}{\|\bar{\Delta x}\|}$. $\{\bar{y} \in \mathbb{R}^d \mid \|\bar{y}\| = 1\} = S^{d-1} \ni \bar{t}$

$$l_f(\bar{\Delta x}) = l_f(\|\bar{\Delta x}\| \bar{t}) = \|\bar{\Delta x}\|^2 l_f(\bar{t}) \geq M \|\bar{\Delta x}\|^2$$

עבור $M > 0$. בנוסף, מכיוון ש- $\alpha_{ij}(\bar{\Delta x}) \xrightarrow{\bar{\Delta x} \rightarrow 0} 0$, לכל $\epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל i, j מתקיים $|\alpha_{ij}(\bar{\Delta x})| < \epsilon$ $\implies \|\bar{\Delta x}\| < \delta$ ולכן-

$$|R(\bar{\Delta x})| \leq \sum_{i=1}^d |\alpha_{ii}(\bar{\Delta x})| \Delta x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq d} |\alpha_{ij}(\bar{\Delta x})| |\Delta x_i| |\Delta x_j| <$$

$$< \epsilon \left(\sum_{i=1}^d \Delta x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq d} |\Delta x_i| |\Delta x_j| \right) = \epsilon \left(\sum_{i=1}^d |\Delta x_i| \right)^2 \leq \epsilon \sum_{i=1}^d 1^2 \sum_{i=1}^d |\Delta x_i|^2 = \epsilon d \|\bar{\Delta x}\|^2$$

* מקושי שורץ

נבחר $\epsilon = \frac{M}{2d}$ ונקבל כי קיים $\delta_0 > 0$ כך שלכל $\|\bar{\Delta x}\| < \delta_0$ יתקיים

$$f(\bar{x}_0 + \bar{\Delta x}) - f(\bar{x}_0) = \frac{1}{2} (l_f(\bar{\Delta x}) + R(\bar{\Delta x})) \geq \frac{1}{2} (M \|\bar{\Delta x}\|^2 - \frac{M}{2d} d \|\bar{\Delta x}\|^2) > 0$$

קיבלנו כי לכל $\|\bar{\Delta x}\| < \delta_0$ מתקיים $0 < f(\bar{x}_0 + \bar{\Delta x}) - f(\bar{x}_0)$.
עבור l_f שלילית לחלוטין מחליפים ב- $(-f)$.