מבחן בקורס חישוביות וסיבוכיות

שאלה 1:

נתונה השפה: $L=\{w\in\{a,b\}^* : |w|_a \geq |w|_b\}$

(10)

הרעיון:

בסוף הקלט נוסיף סימן מיוחד #. נעבור לתחילת הסרט וכל תו a שנקרא נחליף ב-x ונעתיק לאחר ה-#. נעבור לתחילת הסרט וכל תו b שנקרא נחליף ב-y ונחליף כל a שלאחר ה-# ב-b, בסוף נבדוק אם כמות ה-b עלתה על כמות ה-a, שווה לה או קטנה ממנה ובהתאם נקבל / נדחה.

תיאור מילולי:

(1). אם התו הנקרא הוא B - דחה.

(2). נזיז את הראש ימינה עד שנקרא B ונחליף אותו בתו #.

(3). נזיז את הראש שמאלה לתחילת הסרט.

(4). נזוז ימינה כל עוד התו הנקרא הוא b ואינו # -

(4.1). אם התו הנקרא הוא a, נחליף אותו ב-x ונזוז ימינה עד שנקרא B.

(4.2). נחליף את B ב-a ונזוז שמאלה עד לתו x. נזוז אחד ימינה.

(4.3). נחזור ל-(3).

(5). אם התו הנקרא הוא # נזוז שמאלה עד תחילת הסרט.

(6). נזוז ימינה כל עוד התו הנקרא הוא x, a, ואינו #:

(6.1). אם התו הנקרא הוא b, נחליף אותו ב-y ונזוז ימינה עד ל-#.

(6.2). נזוז ימינה עד ש-

(6.2.1). אם התו הנקרא הוא a - נחליף אותו ב-b ונזוז שמאלה עד y. נזוז אחד ימינה

(6.2.2). אם התו הנקרא הוא B - דחה.

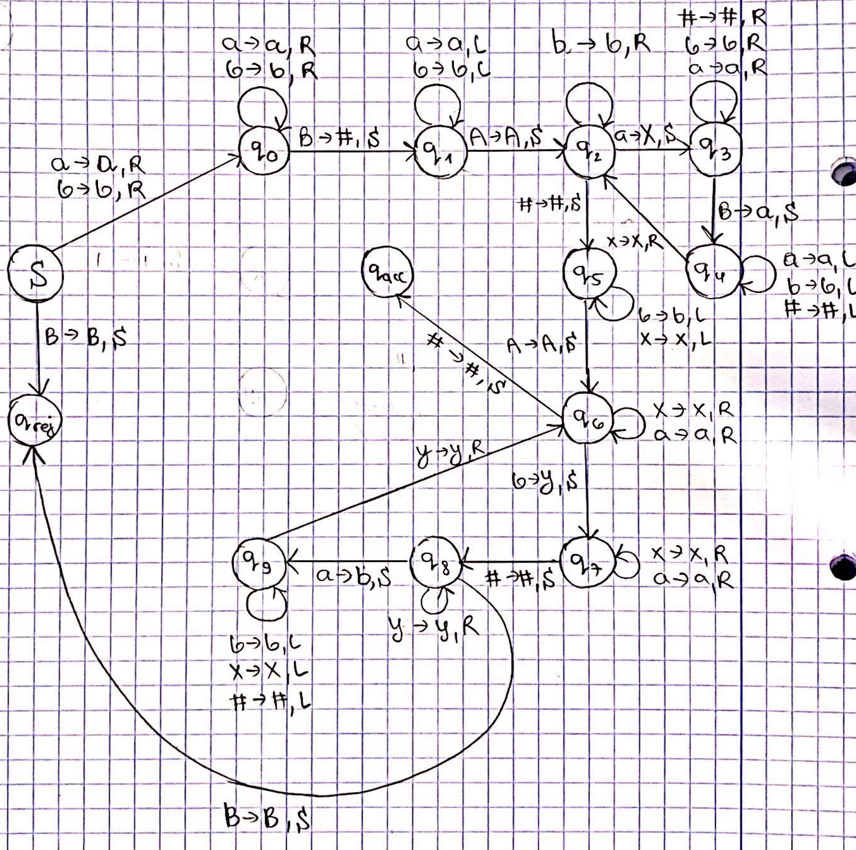
(6.3). נחזור ל-(6).

(7). אם התו הנקרא הוא # - קבל.

שאלה 1 המשך:

(ב). דיאגרמת המצבים והמעברים של המכונה שבניתי בסעיף (א):

*הערה: (סמנו את תחילת הסרט ב-A.



שאלה 2:

הוכיחו או הפריכו טענות :

(א). טענה: אם $L_1 \notin RE$ וגם $L_2 \notin RE$, אזי $L_1 \cap L_2 \notin RE$.

לא נכון. דוגמא נגדית:

$L_1 = L_{\Sigma^*} \notin RE$

$L_2 = \overline{L_{\Sigma^*}} \notin RE$

$L_1 \cap L_2 = L_{\Sigma^*} \cap \overline{L_{\Sigma^*}} = \emptyset \in R \Rightarrow R \subseteq RE \Rightarrow \emptyset \in RE$

סתירה לטענה שהחיתוך לא שייך ל- RE . הפרכה!

(ב). טענה: אם $L_2 \notin RE$, אז לכל שפה $L_1 \notin RE$ מתקיים $L_1 \le L_2$.

$L_1 = \overline{L_{\Sigma^*}} \notin RE$

$L_2 = \overline{L_{\Sigma^*}} \notin RE$

האם $\overline{L_{\Sigma^*}} \le L_{\Sigma^*}$? לא

לא קיימת פונק' חשיבה שתקיים את הנ"ל. ועל-מנת שתתקיים רדוקציה

צריך להתקיים 2 תנאים:

(1) פונקציה f חשיבה

(2) $x \in L_1 \Leftrightarrow f(x) \in L_2$

וכאן לא מתקיים תנאי (1) ומכאן ש- הפרכה!

שאלה 2 המשך:

(ג). טענה: אם $L_1 \setminus L_2 \notin R$, אזי $L_1 \notin R$ או $L_2 \notin R$

נכון. ✓ הוכחה:

נניח בשלילה שגם $L_1 \in R$ וגם $L_2 \in R$.

$\Leftarrow$ לפי סגירות תחת משלים גם $\overline{L_2} \in R \Rightarrow L_1 \setminus L_2 = L_1 \cap \overline{L_2}$

$\Leftarrow$ לפי סגירות תחת חיתוך גם $L_1 \cap \overline{L_2} \in R \Leftarrow$

$\Rightarrow L_1 \setminus L_2 \in R$

// סתירה לנתון.

מכאן שבהכרח $L_1 \notin R$ או $L_2 \notin R$.

מש"ל ■.

(ד). טענה: אם $L_1 \in RE$ וגם $L_2 \in CO\text{-}RE$, אזי $L_1 \cap L_2 \in R$.

לא נכון. דוגמא נגדית:

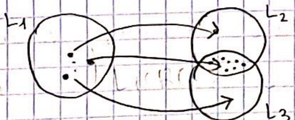
$L_1 = \Sigma^* \in R \Rightarrow R \subseteq RE \Rightarrow \Sigma^* \in RE$

$L_2 = \overline{L_{acc}} \in CO\text{-}RE$

$L_1 \cap L_2 = \Sigma^* \cap \overline{L_{acc}} = \overline{L_{acc}} \notin R$ //

סתירה לטענה ש- $L_1 \cap L_2 \in R \Leftarrow$ הפרכה!

(ה). טענה: אם $L_1 \leq L_2$ וגם $L_1 \leq L_3$, אזי $L_1 \leq (L_2 \cap L_3)$



נרצה לבנות פונק' f חשיבה כך

שיתקיים $x \in L_1 \Leftrightarrow f(x) \in (L_2 \cap L_3)$

מכלל שנתונות הרדוקציות $L_1 \leq L_2$, $L_1 \leq L_3$,

אז קיימות פונקציות חשיבות f_1 ו- f_2 בהתאמה כך שמתקיים:

$x \in L_1 \Leftrightarrow f_1(x) \in L_2$, $x \in L_1 \Leftrightarrow f_2(x) \in L_3$ בהתאמה.

פונק' f תהיה $f = f_1(x) \wedge f_2(x)$, כלומר, רק האיברים של L_1 שיתקבלו

הן ב- L_2 והן ב- L_3, יתקבלו כפלט ע"י פונק' f.

כמו כן אם $L_2 \in RE$ ו- $L_3 \in RE$ אז החיתוק $L_2 \cap L_3 \in RE$ לפי סגירות של RE תחת חיתוך.
(כנ"ל גם R). ולפי משפט הרדוקציה אם $L_2 \in RE$ אז גם $L_1 \in RE$.

מכל הנ"ל ניתן לומר כי $L_1 \leq (L_2 \cap L_3)$. מש"ל ■.