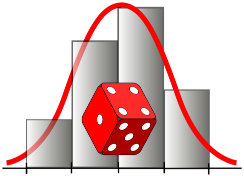
TD2 : Estimation paramétrique ponctuelle & Distribution d'échantillonnage



Module : Techniques d'estimation pour l'ingénieur

Exercice N°4

Enoncé

L'inventaire de Padoue est un questionnaire portant sur les troubles obsessionnelles du comportement. Chez les adultes dépressifs, le score obtenu à ce questionnaire a pour moyenne 84 avec un écart type de 35. Des chercheurs s'intéressent alors aux scores moyens observés dans un échantillon de taille 75.

1. Caractériser la distribution de la moyenne empirique du score à l'inventaire de Padoue sur les échantillons 75 (formes et valeurs de ces paramètres).
2. Quelle est la probabilité d'observer sur un échantillon de taille 75 un score moyen inférieur à 90.
3. En dessous de quelle valeur se trouvent 95% des scores moyens observés sur un échantillon de taille 75.

Solution

1. Soit X une variable aléatoire qui représente le score obtenu à ce questionnaire avec $\mathbb{E}(X) = m = 84$ et $\sigma(X) = 35$ et $\overline{X_n}$ la moyenne empirique.
   On a
   $$\mathbb{E}(\overline{X_n}) = m \ \text{ et } \ \mathbb{V}(\overline{X_n}) = \frac{\sigma^2}{n}$$
   Alors
   $$\overline{X_n} \sim \mathcal{N}(m, \frac{\sigma^2}{n})$$
   Or $n = 75$, et $\frac{\sigma^2}{n} = 16,33$. Donc
   $$\overline{X_n} \sim \mathcal{N}(84, 16.33)$$

Exercice N°4

2. Soit $Z = \frac{\overline{X_n} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}} \sim \mathcal{N}(0,1)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\overline{X_n} < 90) &= \mathbb{P}(Z < \frac{90-84}{\sqrt{16,33}}) \\
&= 1 - \mathbb{P}(Z > \frac{90-84}{\sqrt{16,33}}) = 1 - \mathbb{P}(Z > 1,48) \\
&= 0,9319
\end{aligned}$$

(Lecture sur la table de la loi normale).

Exercice N°4

3. On a $\mathbb{P}(\overline{X_n} < \alpha) = 0,95$.
   Z est une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0,1)$

$$\mathbb{P}(Z < \frac{\alpha - 84}{\sqrt{16,33}}) = 0,95$$
$$\Leftrightarrow \mathbb{P}(Z < \frac{\alpha - 84}{\sqrt{16,33}}) = 1 - \mathbb{P}(Z > \frac{\alpha - 84}{\sqrt{16,33}}) = 0,95$$
$$\Leftrightarrow \mathbb{P}(Z > \frac{\alpha - 84}{\sqrt{16,33}}) = 0,05.$$

Par lecture inverse, on trouve alors dans la table de la loi normale centré reduite,

$$\frac{\alpha - 84}{\sqrt{16,33}} = 1,64$$
$$\alpha = 90.6$$