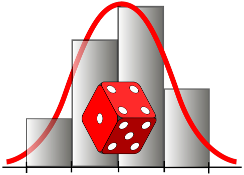
TD3 : Tests d'hypothèses paramétriques



Module : Techniques d'estimation pour l'ingénieur

Exercice N°1

Énoncé

Une entreprise utilise une matière isolante pour fabriquer des appareils de contrôle industriel. Elle achète des composants isolants à un certain fournisseur qui certifie que l'épaisseur moyenne de ses composants est de 7.3 millimètres. Pour voir si le fournisseur respecte ses engagements, l'entreprise mesure l'épaisseur de 10 composants pris au hasard dans la livraison. Les résultats, en millimètres, sont :

6,47	7.02	7.15	7.22	7.44	6.699	7.47	7.61	7.32	7.22

On suppose que l'épaisseur en millimètres d'un de ces composants peut être modélisée par une variable aléatoire normale de moyenne μ et d'écart type σ inconnus . On veut tester si le fournisseur respecte ses engagements.

Exercice N°1

1. Donner une estimation ponctuelle de la moyenne μ.
2. Donner une estimation ponctuelle de la variance σ^2.
3. Peut-on considérer, au seuil de signification de 5% que le founisseur respecte ses engagements? (Détailler les différentes étapes du test qu'il faut construire).
4. On suppose maintenant que l'écart type $\sigma = 0.1$ millimètres, au seuil de signification de 1%, la décision serait-elle différente?

Exercice N°1

Solution

1. Un estimateur ponctuel de la moyenne μ est :

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Donc, une estimation ponctuelle est donnée par :

$$\overline{x_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i \simeq 7.16$$

2. Un estimateur ponctuel de la variance est :

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X_n})^2$$

Donc une estimation ponctuelle est donnée par :

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x_n})^2 = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{10}(x_i - 7.16)^2 \simeq 0.12$$

3. Peut-on considérer, au seuil de signification de 5% que le founisseur respecte ses engagements? (Détailler les différentes étapes du test qu'il faut construire).

   On doit construire un test bilatéral sur la moyenne.

   Étape 1: Choix d'hypothèses

$$\begin{cases} \mathbf{H}_0 & : \quad \mu = 7.3 \ mm \\ \mathbf{H}_1 & : \quad \mu \neq 7.3 \ mm \end{cases}$$

   Étape 2: Variable de décision et écart réduit.

   On a $n = 10 < 30$, et σ inconnu mais estimé par $s \simeq 0.35$.

$$T = \frac{\overline{X_n} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \sim \mathcal{T}_{(n-1)} \text{ Student à (n-1) ddl.}$$

Exercice N°1

Étape 3: Régions critiques.

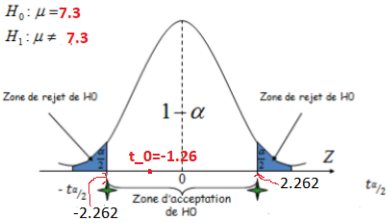
On détermine $t_{\frac{\alpha}{2},n-1}$ à partir du tableau de la loi de Student.

$$\alpha = 0.05 \longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025 \longrightarrow t_{\frac{\alpha}{2},9} = 2.262$$

On calcule la valeur t_0 prise par T:

$$t_0 = \frac{\overline{x_n} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{7.16 - 7.3}{\frac{0.35}{\sqrt{10}}} \simeq -1,26$$

Étape 4: Décision



Exercice N°1

$$-t_{\frac{\alpha}{2},n-1} = -2.262 < t_0 = -1,26 < t_{\frac{\alpha}{2},n-1} = 2.262$$

Donc, on est dans la zone d'acceptation de H_0 et de rejet de H_1, alors le fournisseur respecte ses engagements.

4. On suppose maintenant que l'écart type $\sigma = 0.1$ millimètres, au seuil de signification de 1%, la décision serait-elle différente?
   $\bullet n = 10 < 30$ et σ connu, alors :

$$\overline{X_n} \sim \mathcal{N}(\mu = 7.3; \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0.1}{\sqrt{10}})$$

   L'écart réduit est

$$Z = \frac{\overline{X_n} - 7.3}{\frac{0.1}{\sqrt{10}}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Exercice N°1

- On calcule la valeur z_0 prise par Z:

$$z_0 = \frac{7.16 - 7.3}{\frac{0.1}{\sqrt{10}}} = -4.43$$

$\bullet \alpha = 0.01 \longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.005 \longrightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.58$
alors on a:

$$z_0 = -4.43 < -z_{\frac{\alpha}{2}} = -2.58$$

Conclusion : On est dans la zone de rejet de H_0 et d'acceptation de H_1, alors la décision serait différente.