数を作ろう！

eyemask57

2026 年 1 月 9 日

はじめに

皆さん，「数」（数学ではよく「すう」と読みます）って何だろうって考えたことありませんか？　というかよく周りで聞きますよね，虚数は現実世界に存在しないとかで殴り合っているとか，よくわかんないけど四元数っていうすごい数があるだとか，無限や無限小があるとかないとか，なんとか．

僕も数とはよくわかりません．特に，何をもってこの世界に数が存在していると言えるのか分かりません．

全体として少なくとも一つ言えるのは，数学や物理で用いられている数は**作ることができる**ということです．その中で成り立つ足し算も，掛け算も完備．今まで使っていた数と何ら変わらないものが作れちゃう．もしかしたら本当の意味で本物でないにしても，少なくとも構造を模倣した**数のおもちゃ**ぐらいは作れてしまいます．

皆さん知ってました？　数って作れるんですよ．なら一回作って見たくないですか？

ということで，数の構成をまとめて置いといたらきっといい気がしたので書きます．

本書の方針

本書の方針としては「基礎から」を想定しています．つまり最も前提である公理系から定め，定理を証明していくことによって定義の正当性を担保していきます．これにより，精密で緻密な数学の世界を眺めます．かと言って数学に寄り添いすぎて分かりやすさを捨てるつもりはなく，イメージや図などを多用して理解のしやすさを主軸をおきます．まとめると，

- 大前提の公理系から出発する．
- 数学的な曖昧さをなるべく残さない．
- 分かりやすさを諦めない．

ということになります．分かりやすさを諦めたらごめんなさい．

本書では哲学的な「何故？」には踏み込みません．そもそも数学とは，厳密でピースの数が膨大，何が問題か命題か自分で見つけ，場合によっては正しいピースを作り，各々の答えを正しく求めるパズルです．そして，その見つけたものの意味を明示的に論じるものではないのです．まぁ，要は便利に使えればいいのです．「数の構成」は数学の骨組みとなる厳密性を担保するいちピースとして使えます．何より，「数って作れるんだ！」という感動をくれます．それだけでもいい，と僕は思います．

目次

第 0 章　基礎知識

ここでは基礎的な集合論や公理系などの準備をします.

具体的には

もう分かってる人や，逆に何言っているのかよくわからない人は飛ばしても大丈夫です．ただし，ざっとは見てください.

0.1　心構え

0.2　論理

0.3　集合論

集合論としては ZFC 集合論を仮定します．要は大体普通の集合論ということです．
まずは ZF 集合論を作ります．わからなくていいです．

Axiom 0.1: ZF

以下の公理系を ZF **集合論** (Zermelo–Fraenkel set theory) という．ただし，ϕ, φ は自由変数に B を持たない任意の論理式である．

$$\exists x \forall y \neg (y \in x). \tag{1}$$

$$\forall x \forall y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y). \tag{2}$$

$$\forall x [\exists a (a \in x) \to \exists y (y \in x \land \neg \exists z (z \in x \land z \in y))]. \tag{3}$$

$$\forall A \forall w_1, \ldots, w_n \exists B \forall x (x \in B \leftrightarrow [y \in A \land \phi]). \tag{4}$$

$$\forall \mathcal{F} \exists A \forall Y \forall x [(x \in Y \land Y \in \mathcal{F}) \to x \in A]. \tag{5}$$

$$\forall A \forall w_1, \ldots, w_n [\forall x (x \in A \to \exists!\, y \varphi) \to \exists B \forall x (x \in A \to \exists y (y \in B \land \varphi))]. \tag{6}$$

$$\exists X [\exists e (\forall z \neg (z \in e) \land e \in X) \land \forall x (x \in X \to \exists y (y \in X \land \forall a (a \in y \to (a \in x \lor a = x))))]. \tag{7}$$

$$\forall A \exists P \forall B [B \in P \leftrightarrow \forall z (z \in B \to z \in A)]. \tag{8}$$

ここからまずは基本的な集合論の記号を整理していきます．それによって少し ZF を書き直していきます．

Definition 0.2: 集合と元

Axiom 0.1 を満たす “ものの集まり” のことを**集合** (set) という．集合 X に含まれる個々の “もの x”，つまり $x \in X$ と書かれる x のことを X の**元** (element) という．

Definition 0.3: 部分集合

集合 A, B について $x \in A \to x \in B$ が成り立つとき，A は B の**部分集合** (subset) といい，$A \subset B$ と書く．

Definition 0.4: 内包的記法

Axiom 0.1 (4) より，論理式 $\phi(x)$ を満たす要素だけを集めた集合を $\{\, x \mid \phi(x) \,\}$ と表記する．

特に重要となる公理を挙げておきます．

Definition 0.5: 空集合

Axiom 0.1　(1) より，いかなる要素も持たない集合が存在する．その集合を $\varnothing$ と書く．

Axiom 0.6: 無限公理

空集合 $\varnothing$ を含み，なおかつ n を含むときに $n \cup \{n\}$ も含むような集合が存在する．

Definition 0.7: 写像

content...

0.4 関係

Definition 0.8: 同値関係・同値類

content...

Definition 0.9: 順序

content...

Example :

content...