大学数学

ベクトル解析・曲面・曲線

芦澤 太陽

SUNSET
AGENCY

はじめに

- 自分の自学自習を兼ねたものです.
- 内容にはそんなに期待しないでね
- ベクトル解析は主に 2 次元や 3 次元について扱うものだよ.
- 一般の次元は扱わないよ

目次

第 1 章　ベクトル空間 …… 7

1.1　基礎 …… 7

1.2　演算 …… 9

用いる記号

$\mathbb{N} = \{\, 1, 2, 3, \dots \,\}$	自然数全体の集合
$\mathbb{N}_0 \coloneqq \mathbb{N} \cup \{\, 0 \,\}$	0 と自然数全体の集合
$\mathbb{R}$	実数全体の集合
$\mathbb{R}^n \coloneqq \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n}$	n 次元数ベクトル空間 $(n \in \mathbb{N})$
$\mathbb{C}$	複素数全体の集合
$\langle -, - \rangle$	$\mathbb{R}^n$ で定義される内積
$\Vert - \Vert$	$\mathbb{R}^n$ で定義されるノルム
d	$\mathbb{R}^n$ で定義される距離
$B_\varepsilon(\boldsymbol{a}) \coloneqq \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) < \varepsilon \,\}$	$\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ を中心とする半径 $\varepsilon > 0$ の開球
δ_{ij}	Kronecker のデルタ
ε_{ijk}	Levi–Civita の記号

第 1 章　ベクトル空間

1.1　基礎

Definition 1.1: ベクトル空間の公理

集合 V，体 F，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$，$a, b \in F$ とする．

加法 $+ : V \times V \to V$，スカラー倍 $* : F \times V \to V$ について次の性質を満たすとき，組 $(V, +, *)$ は F 上の**ベクトル空間** (vector space) または**線形空間** (linear space) という．V の元を**ベクトル** (vector) といい，F の元を**スカラー** (scalar) という．

(1) $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$

(2) $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$

(3) ある元 $\mathbf{0} \in V$ が存在し，$\mathbf{0} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ となる．

(4) 任意の $\boldsymbol{x}$ に対して，ある元 $\boldsymbol{x}'$ が存在し，$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}' + \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ となる．$\boldsymbol{x}'$ のことを $\boldsymbol{x}$ の**逆元** (inverse element) という．

(5) $a(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = a\boldsymbol{x} + a\boldsymbol{y}$

(6) $(a + b)\boldsymbol{x} = a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y}$

(7) $a(b\boldsymbol{x}) = (ab)\boldsymbol{x}$

(8) F の単位元 $1 \in F$ について，$1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ となる．

今回は $V = \mathbb{R}^n, F = \mathbb{R}$，特に $n = 2, 3$ の場合を扱う．また，表記を省略して，単に $\mathbb{R}^n$ がベクトル空間であると書くことがある．

ベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ について，各成分を明示して記述する方法をベクトルの $\boldsymbol{x}$ の**成分表示** (component representation) という．$x_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, n)$ を用いて，

$$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

と書く．$n \times 1$ 行列として同一視することもある．

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ とその成分表示 $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, n)$ および $a \in \mathbb{R}$ について，次のように演算を定義すれば $\mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間となる．

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \quad , \qquad a\boldsymbol{x} := \begin{pmatrix} ax_1 \\ \vdots \\ ax_n \end{pmatrix}$$

Definition 1.2: ゼロベクトル

全ての成分が 0 であるベクトルのことを**ゼロベクトル** (zero vector) といい，$\mathbf{0} := (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ と表す．

Definition 1.3: 数ベクトルの相等

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ とする．2 つのベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n), \boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ が等しいとは，

$$a_i = b_i \quad (i = 1, \ldots, n)$$

が成り立つことをいう．

Definition 1.4: 線形結合

$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r \in \mathbb{R}^n, k_1, \ldots, k_r \in \mathbb{R}$ $(r \in \mathbb{N})$ について，

$$\boldsymbol{v} = k_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + k_r\boldsymbol{v}_r$$

となるベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ のことを，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ の**線形結合** (linear combination) または**一次結合**という．

Definition 1.5: 線形独立・線形従属

$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r \in \mathbb{R}^n$ とする．任意の $k_1, \ldots, k_r \in \mathbb{R}$ $(r \in \mathbb{N})$ について，

$$k_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + k_r\boldsymbol{v}_r = \mathbf{0} \implies k_1 = \cdots = k_r = 0$$

がなりたつとき，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ は**線形独立** (linearly independent) または**一次独立**であるという．

$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ が一次独立でないとき，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ は**線形従属** (linearly dependent) または**一次従属**という．

1.2 演算

Definition 1.6: 標準内積

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n), \boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ とする．

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle := \boldsymbol{a}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

となる演算 $\langle -, - \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を**標準内積** (canonical inner product) または単に**内積**という．ただし，$\boldsymbol{a}^{\mathsf{T}}$ は $\boldsymbol{a}$ を $n \times 1$ 行列とみなしたときの転置行列で，$1 \times n$ 行列である．$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の標準内積は $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ と書くこともある．

Proposition 1.7: 標準内積の性質

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}$ とする．このとき，次の性質が成り立つ．

(1) $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle$ (対称性)

(2) $\langle \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle$ (線形性)

(3) $\langle c\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = c \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$ (線形性)

(4) $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \geq 0$ (正値性)

(5) $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 0 \iff \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$

Proof :

(1) $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = y_1 x_1 + \cdots + y_n x_n = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle$

(2) $\langle \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle = (x_1 + y_1) z_1 + \cdots + (x_n + y_n) z_n$
$= x_1 z_1 + \cdots + x_n z_n + y_1 z_1 + \cdots + y_n z_n = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle$

(3) $\langle c\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = (cx_1) y_1 + \cdots + (cx_n) y_n = c(x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n) = c \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle$

(4) ${x_i}^2 \geq 0 \ (i = 1, \ldots, n)$ より $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 \geq 0$

(5) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 = 0, {x_i}^2 \geq 0 \ (i = 1, \ldots, n)$ より ${x_i}^2 = 0$，よって $x_i = 0$

$\square$

Definition 1.8: 直交・平行

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ とする．

$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = 0$ であるとき，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ は**直交** (orthogonal) しているといい，$\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$ と書く．

$\boldsymbol{x} = k\boldsymbol{y} \quad (k \neq 0)$ となるスカラー $k \in \mathbb{R}$ が存在するとき，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ は**平行** (parallel) であるといい，$\boldsymbol{x} // \boldsymbol{y}$ と書く．

Definition 1.9: Euclid ノルム

$\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ とする．

$$\|\boldsymbol{a}\| := \sqrt{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle} = \sqrt{{a_1}^2 + \cdots + {a_n}^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {a_i}^2}$$

となる演算 $\|-\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を Euclid **ノルム** (Euclidean norm) または単に**ノルム**という．$\|\boldsymbol{a}\|$ を $\boldsymbol{a}$ の**大きさ**という．

Proposition 1.10: Euclid ノルムの性質

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}$ とする．このとき，次の性質が成り立つ．

(1) $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$

(2) $\|\boldsymbol{x}\| = 0 \iff \boldsymbol{x} = 0$

(3) $\|c\boldsymbol{x}\| = |c|\|\boldsymbol{x}\|$

Proof :

(1),(2) は **Proposition 1.7**(4),(5) より自明なので省略．

(3) $\|c\boldsymbol{x}\| = \sqrt{(cx_1)^2 + \cdots + (cx_n)^2} = \sqrt{c^2({x_1}^2 + \cdots + {x_n}^2)} = |c|\|\boldsymbol{x}\|$

□

Definition 1.11: 単位ベクトル

$\|\boldsymbol{e}\| = 1$ を満たすベクトル $\boldsymbol{e} \in \mathbb{R}^n$ のことを**単位ベクトル** (unit vector) という．

また，第 i 成分のみが 1 であり，その他の成分が 0 であるようなベクトル $\boldsymbol{e}_i \in \mathbb{R}^n \ (i = 1, \ldots, n)$ のことを**基本単位ベクトル** (unit basic vector) という．

$\mathbb{R}^2$ のとき，x 軸，y 軸の方向を向いた基本単位ベクトルをそれぞれ次のように書く．

$$\boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^3$ のとき，x 軸，y 軸，z 軸の方向を向いた基本単位ベクトルをそれぞれ次のように書く．

$$\boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Definition 1.12: ベクトルのなす角

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ とする．

$$\theta = \arccos \frac{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle}{\|\boldsymbol{a}\| \|\boldsymbol{b}\|}$$

を満たす $\theta \in \mathbb{R}$ $(0 \leq \theta\pi)$ のことを $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の**なす角** (angle) という．また，

$$\cos\theta = \frac{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle}{\|\boldsymbol{a}\| \|\boldsymbol{b}\|}$$
$$\sin\theta = \sqrt{1 - (\cos\theta)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle}{\|\boldsymbol{a}\| \|\boldsymbol{b}\|} \right)^2}$$

である．

Proposition 1.13: Cauchy–Schwarz の不等式

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \in \mathbb{R}^n$ とする．このとき，

$$|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle| \leq \|\boldsymbol{x}\| \|\boldsymbol{y}\|$$

が成り立つ．この不等式のことを Cauchy–Schwarz **の不等式** (Cauchy–Schwarz inequality) という．

Proof :

$t \in \mathbb{R}$ とする．**Proposition 1.7**(4),(5) より

$$0 \leq \langle \boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle + 2t \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle + t^2 \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle$$

上記の二次方程式は重解または虚数解をもつ．よって，2 次方程式の判別式

$D \leq 0$ より，

$$0 \geq \frac{D}{4} = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle^2 - \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle$$

よって $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle^2 \leq \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle$.

$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle^2 = |\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle|^2$ より

$$\sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle^2} \leq \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle}\sqrt{\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle} \iff |\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle| \leq \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$$

□

Proposition 1.14: 三角不等式

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \in \mathbb{R}^n$ とする．このとき，

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$$

が成り立つ．この不等式のことを**三角不等式** (triangle inequality) という．

Proof :

両辺を 2 乗して，左辺から右辺を引く．

$$\begin{aligned}
&(\|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|)^2 - \|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 \\
&= \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{y}\|^2 - \langle \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \rangle \\
&= \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle + 2\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\| + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle - 2\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle - \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle - \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle \\
&= 2\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\| - 2\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle
\end{aligned}$$

Cauchy–Schwarz の不等式より，$2(\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\| - \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle) \geq 0$.

よって，$(\|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|)^2 \geq \|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 \iff \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\| \geq \|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|$. □

Definition 1.15: Euclid 距離

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n), \boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ とする．

$$d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) := \|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\| = \sqrt{a_1 - b_1{}^2 + \cdots + a_n - b_n{}^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)^2}$$

となる演算 $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を Euclid **距離** (Euclidian distance) または単に**距離**という．

Proposition 1.16: Euclid 距離の性質

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$ とする．このとき，次の性質が成り立つ．

(1) $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geq 0$　(正値性)

(2) $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \iff \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$

(3) $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$　(対称性)

(4) $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \leq d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$　(三角不等式)

Proof :

(1),(2) は定義より自明なので省略．

(3)

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| = |-1|\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\| = d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$$

(4)

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}\| = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} + \boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}\|$$

Proposition 1.14(三角不等式) より，

$$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} + \boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}\| \leq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}\|$$

よって，距離の定義より，

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \leq d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$$

□

Definition 1.17: クロス積

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3, \boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3), \boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ とする．

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} := \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

となる演算 $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を**クロス積** (cross product) または**ベクトル積** (vector product)，またはしばしば**外積** (outer product) という．

Proposition 1.18: クロス積の性質

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3, k \in \mathbb{R}, \boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3), \boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3), \boldsymbol{c} = (c_1, c_2, c_3)$，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角を θ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ とする．このとき，次の性質が成り立つ．

(1) $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} \rangle = \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a} \rangle = \langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \rangle = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

(2) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$

(3) $(k\boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \times (k\boldsymbol{b}) = k(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$

(4) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$

(5) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \perp \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \perp \boldsymbol{b}$

(6) $\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2$

(7) $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$

(8) $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$

(9) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} \iff \boldsymbol{a} /\!/ \boldsymbol{b}$

(10) $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c} \rangle \boldsymbol{b} - \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle \boldsymbol{a}$

(11) $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} + (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \times \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = 0$

(12) $\|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\|^2 = \|\boldsymbol{a}\|^2 \|\boldsymbol{b}\|^2 - \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle^2$

(13) $\|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\| = \|\boldsymbol{a}\| \|\boldsymbol{b}\| \sin\theta$

Proof :

(1)

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1 \rangle - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} \langle \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2 \rangle + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \langle \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_3 \rangle$$

$$= \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} \rangle$$

(2)–(9) は省略．

(10)

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} &= \begin{pmatrix} (a_3b_1-a_1b_3)c_3-(a_1b_2-a_2b_1)c_2 \\ (a_1b_2-a_2b_1)c_1-(a_2b_3-a_3b_2)c_3 \\ (a_2b_3-a_3b_2)c_2-(a_3b_1-a_1b_3)c_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (a_2c_2+a_3c_3)b_1-(b_2c_2+b_3c_3)a_1 \\ (a_1c_1+a_3c_3)b_2-(b_1c_1+b_3c_3)a_2 \\ (a_1c_1+a_2c_2)b_3-(b_1c_1+b_2c_2)a_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)b_1-(b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3)a_1 \\ (a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)b_2-(b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3)a_2 \\ (a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)b_3-(b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3)a_3 \end{pmatrix} \\
&= \langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\rangle\,\boldsymbol{b}-\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle\,\boldsymbol{a}
\end{aligned}
$$

(11)

$$
\begin{aligned}
&(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b} \\
&= \langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\rangle\,\boldsymbol{b}-\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle\,\boldsymbol{a}+\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\rangle\,\boldsymbol{c}-\langle\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}\rangle\,\boldsymbol{b}+\langle\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}\rangle\,\boldsymbol{a}-\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\,\boldsymbol{c} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

□

Definition 1.19: Kronecker のデルタ

$i,j\in\mathbb{N}$ とする．

このとき，以下のように定義される記号を Kronecker **のデルタ** (Kronecker delta) という．

$$
\delta_{ij} \coloneqq \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i\neq j) \end{cases}
$$

Definition 1.20: Levi–Civita の記号

i,j,k はそれぞれ $1,2,3$ のいずれかの値を取るとする．

このとき，以下のように定義される記号を Levi–Civita **の記号** (Levi–Civita symbol) という.

$$\varepsilon_{ijk} \coloneqq \begin{cases} 1 & ((i,j,k) = (1,2,3),(2,3,1),(3,1,2)) \\ -1 & ((i,j,k) = (2,1,3),(1,3,2),(3,2,1)) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

Proposition 1.21: Levi-Civita の記号と Kronecker のデルタの公式

i, j, k, l, m, n はそれぞれ $1, 2, 3$ のいずれかの値を取るとする.
このとき，次のことが成り立つ.

(1) $\langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j \rangle = \delta_{ij}$

(2) $\langle \boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_k \rangle = \varepsilon_{ijk}$

(3) $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}$

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$

(5) $\displaystyle\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ljk} = 2\delta_{ij}$

索引

canonical inner product, 9
Cauchy–Schwarz inequality, 10
コーシーシュワルツのふとうしき, 10
cross product, 12

Euclidean distance, 11
Euclidean norm, 10

inverse element, 7

linear combination, 8
linear space, 7
linearly dependent, 8
linearly independent, 8

scalar, 7

triangle inequality, 11

vector, 7
vector product, 12
vector space, 7

zero vector, 8

一次結合, 8
一次従属, 8
一次独立, 8
外積, 12
逆元, 7
クロス積, 12
三角不等式, 11
スカラー, 7
線形空間, 7
線形結合, 8
線形従属, 8
線形独立, 8
ゼロベクトル, 8
標準内積, 9
ベクトル, 7
ベクトル空間, 7
ベクトル積, 12
Euclid 距離, 11
Euclid ノルム, 10