Análisis del Modelo de Kuramoto: Sincronización en Sistemas de 2 y 3 Osciladores

Esteban Tobar

5 de noviembre de 2025

Resumen

Este documento presenta un análisis del modelo de Kuramoto para sistemas de osciladores acoplados. Se estudia la dinámica de sincronización para sistemas de 2 y 3 osciladores, analizando puntos fijos, estabilidad y transiciones de fase mediante métodos numéricos y visualización de espacios de fase.

1. Introducción

El modelo de Kuramoto describe la sincronización en sistemas de osciladores débilmente acoplados. La ecuación fundamental es:

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \frac{K}{N}\sum_{j=1}^{N}\sin(\theta_j - \theta_i) \tag{1}$$

donde θ_i es la fase del oscilador i-ésimo, ω_i su frecuencia natural, K la fuerza de acoplamiento y N el número de osciladores.

2. Parámetro de Orden

El grado de sincronización se mide mediante el parámetro de orden:

$$re^{i\psi} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} e^{i\theta_j} \tag{2}$$

donde $r \in [0, 1]$ representa la coherencia de fase ($r = 0$: incoherencia total, $r = 1$: sincronización completa).

3. Derivación del Parámetro de Orden

El parámetro de orden r surge naturalmente al reescribir la ecuación de Kuramoto en forma compleja. Partiendo de la ecuación original:

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \frac{K}{N}\sum_{j=1}^{N} \sin(\theta_j - \theta_i) \tag{3}$$

Usamos la identidad $\sin(\theta_j - \theta_i) = \mathrm{Im}[e^{i(\theta_j - \theta_i)}]$ y reescribimos:

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \frac{K}{N}\sum_{j=1}^{N} \mathrm{Im}[e^{i(\theta_j - \theta_i)}] \tag{4}$$

Factorizando $e^{-i\theta_i}$:

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \frac{K}{N}\mathrm{Im}\left[e^{-i\theta_i}\sum_{j=1}^{N} e^{i\theta_j}\right] \tag{5}$$

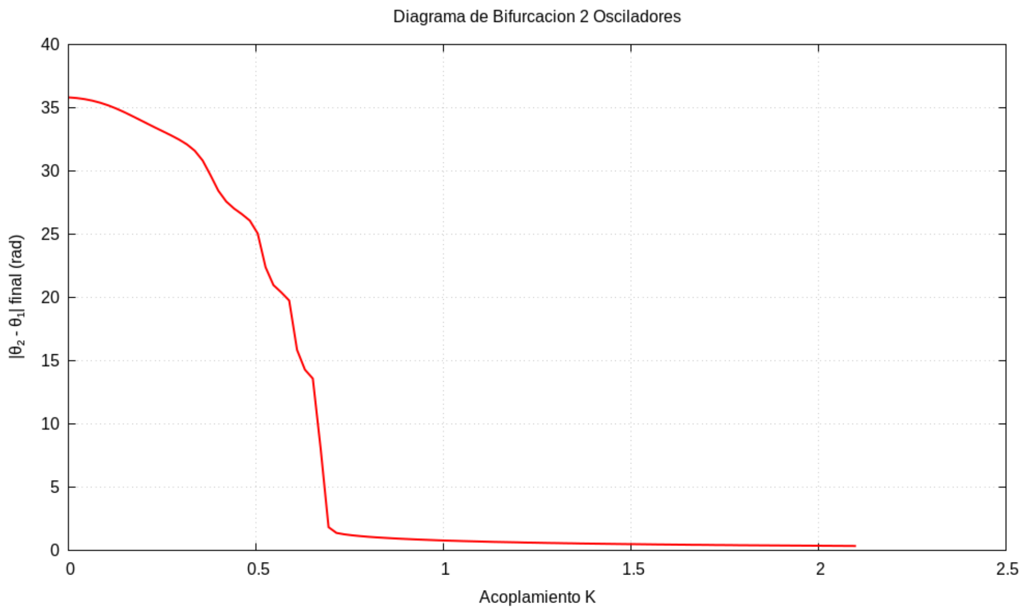
Definiendo el parámetro de orden complejo $re^{i\psi} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} e^{i\theta_j}$, obtenemos:

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \frac{K}{N}\mathrm{Im}\left[e^{-i\theta_i} \cdot Nre^{i\psi}\right] = \omega_i + Kr\mathrm{Im}[e^{i(\psi - \theta_i)}] \tag{6}$$

Finalmente, usando $\mathrm{Im}[e^{i(\psi - \theta_i)}] = \sin(\psi - \theta_i)$, llegamos a:

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + Kr\sin(\psi - \theta_i) \tag{7}$$

Esta forma muestra que cada oscilador es influenciado por un campo medio de amplitud r y fase ψ.



4. Caso de 2 Osciladores

4.1. Reducción del Sistema

Para $N = 2$, definiendo $\phi = \theta_2 - \theta_1$ y $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$, obtenemos:

$$\frac{d\phi}{dt} = \Delta\omega - K \sin \phi \tag{8}$$

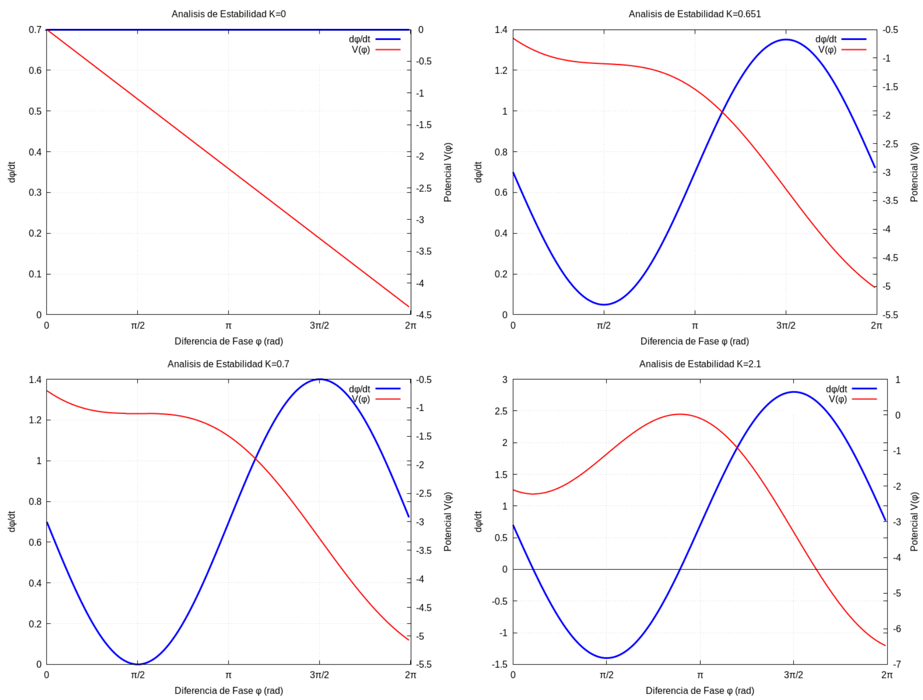
4.2. Puntos Fijos y Estabilidad

Los puntos fijos satisfacen $\frac{d\phi}{dt} = 0$, es decir:

$$\sin \phi = \frac{\Delta\omega}{K} \tag{9}$$

Existe sincronización cuando $K \geq |\Delta\omega|$. El potencial efectivo es:

$$V(\phi) = -\Delta\omega\phi - K \cos \phi \tag{10}$$



5. Caso de 3 Osciladores

5.1. Ecuaciones Completas

Las ecuaciones para los 3 osciladores son:

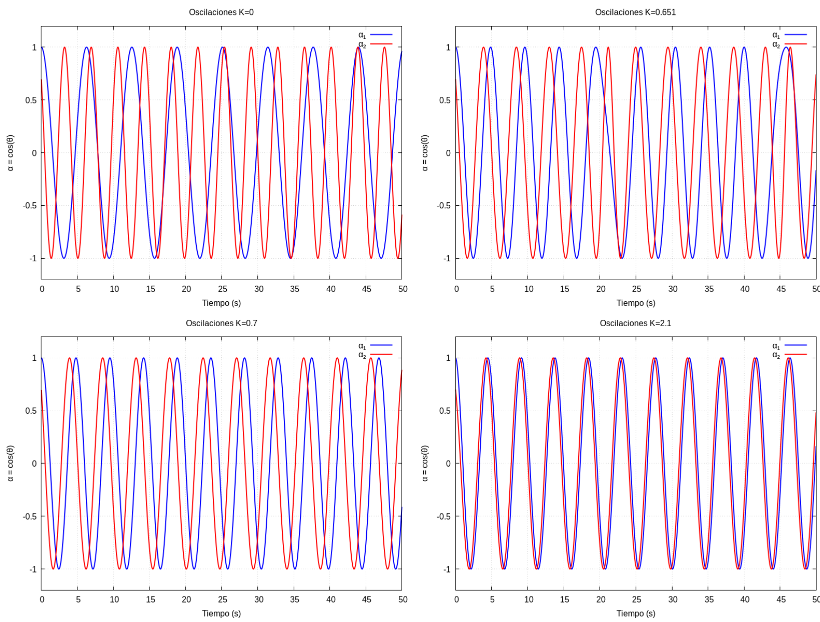
$$\frac{d\theta_1}{dt} = \omega_1 + \frac{K}{3}[\sin(\theta_2 - \theta_1) + \sin(\theta_3 - \theta_1)] \tag{11}$$

$$\frac{d\theta_2}{dt} = \omega_2 + \frac{K}{3}[\sin(\theta_1 - \theta_2) + \sin(\theta_3 - \theta_2)] \tag{12}$$

$$\frac{d\theta_3}{dt} = \omega_3 + \frac{K}{3}[\sin(\theta_1 - \theta_3) + \sin(\theta_2 - \theta_3)] \tag{13}$$

5.2. Formulación en Diferencias

Definiendo las tres diferencias de fase:

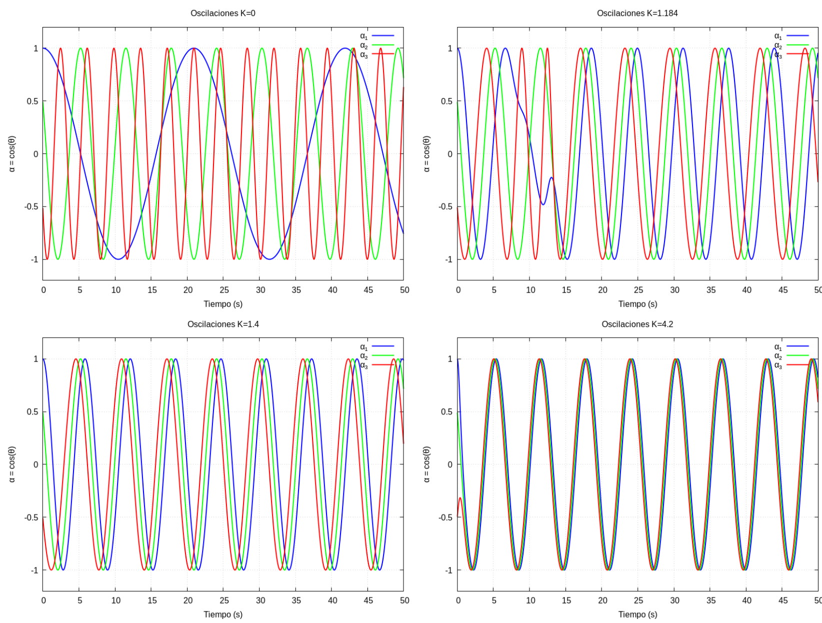


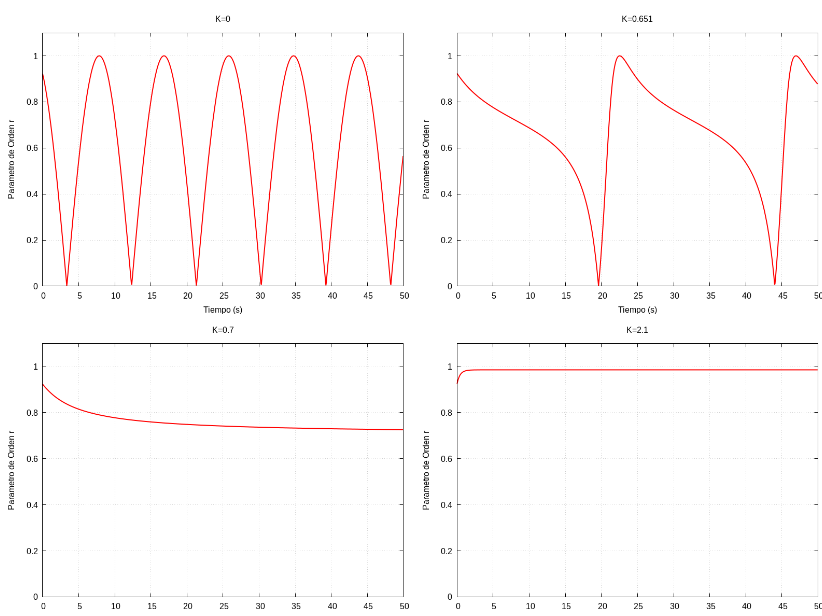
$$\Delta_{21} = \theta_2 - \theta_1 \tag{14}$$
$$\Delta_{31} = \theta_3 - \theta_1 \tag{15}$$
$$\Delta_{32} = \theta_3 - \theta_2 = \Delta_{31} - \Delta_{21} \tag{16}$$

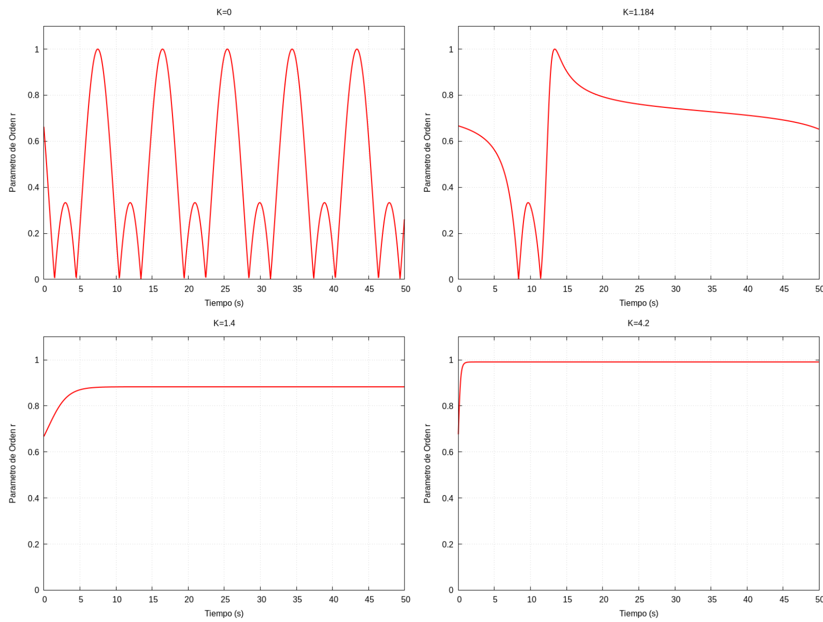
Las ecuaciones se reducen a:

$$\frac{d\Delta_{21}}{dt} = \omega_2 - \omega_1 - \frac{K}{3}[\sin\Delta_{21} + \sin(\Delta_{31} - \Delta_{21}) + \sin\Delta_{31}] \tag{17}$$
$$\frac{d\Delta_{31}}{dt} = \omega_3 - \omega_1 - \frac{K}{3}[\sin\Delta_{31} + \sin(\Delta_{21} - \Delta_{31}) + \sin\Delta_{21}] \tag{18}$$

Nótese que Δ_{32} no es independiente, cumpliéndose $\Delta_{32} = \Delta_{31} - \Delta_{21}$.


Oscilaciones K=0
Oscilaciones K=1.184
Oscilaciones K=1.4
Oscilaciones K=4.2
α_1
α_2
α_3
α = cos(θ)
Tiempo (s)


K=0
K=0.651
K=0.7
K=2.1
Parametro de Orden r
Tiempo (s)



6. Resultados Numéricos

6.1. Series Temporales

6.2. Parámetro de Orden

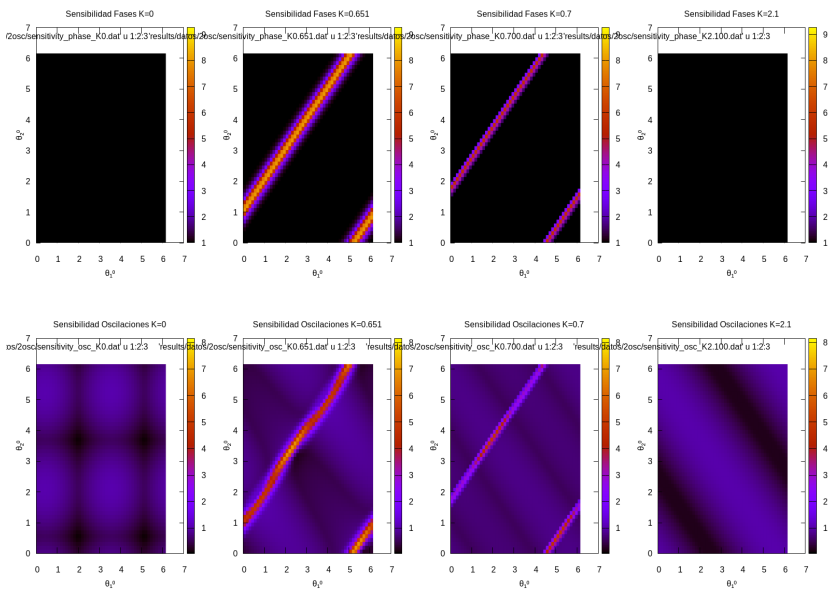
6.3. Mapas de Sensibilidad

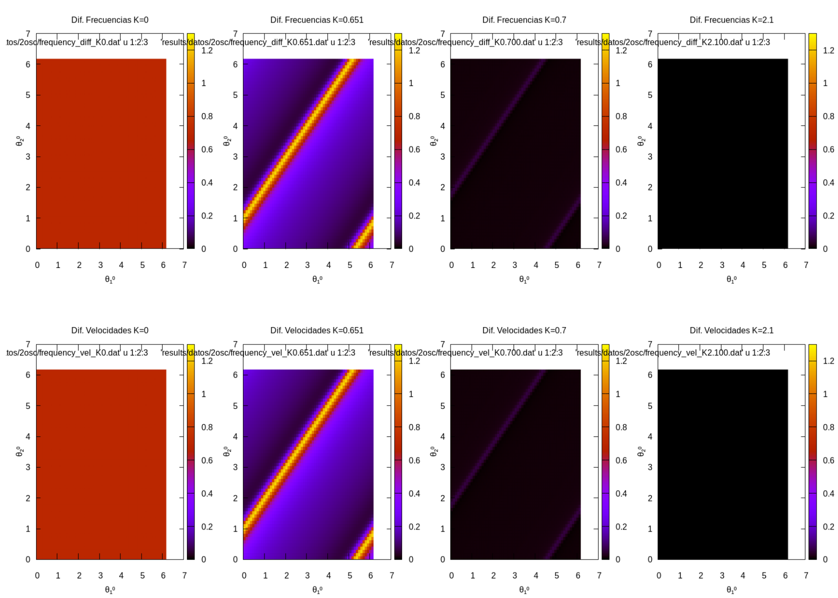
6.4. Análisis de Bifurcación

7. Discusión

Para $N = 2$, la transición a sincronización es abrupta y determinística, ocurriendo en $K_{\text{umbral}} = |\Delta\omega|$. Para $N = 3$, el comportamiento es más complejo:

- No existe K_{umbral} único
- Múltiples estados estacionarios posibles
- Dependencia fuerte de condiciones iniciales


Sensibilidad Fases K=0
Sensibilidad Fases K=0.651
Sensibilidad Fases K=0.7
Sensibilidad Fases K=2.1
Sensibilidad Oscilaciones K=0
Sensibilidad Oscilaciones K=0.651
Sensibilidad Oscilaciones K=0.7
Sensibilidad Oscilaciones K=2.1
θ_1^0
θ_2^0


Dif. Frecuencias K=0
Dif. Frecuencias K=0.651
Dif. Frecuencias K=0.7
Dif. Frecuencias K=2.1
Dif. Velocidades K=0
Dif. Velocidades K=0.651
Dif. Velocidades K=0.7
Dif. Velocidades K=2.1
θ_1^0
θ_2^0

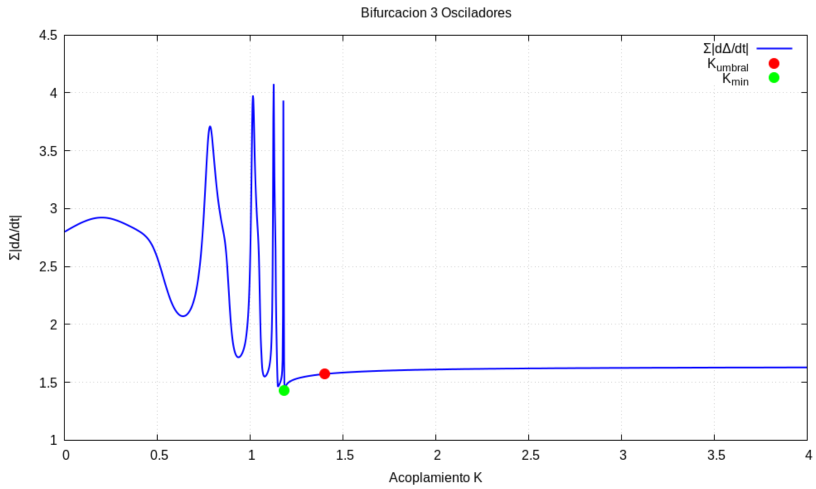


Figura 1: Enter Caption

- Estados de sincronización parcial comunes

Los mapas de sensibilidad muestran regiones donde pequeñas variaciones en condiciones iniciales producen grandes cambios en el estado final.

8. Conclusiones

El modelo de Kuramoto exhibe comportamientos cualitativamente diferentes según el número de osciladores:

- Para $N = 2$: Comportamiento periódico predecible, transición abrupta
- Para $N = 3$: Comportamiento complejo, múltiples atractores, sincronización parcial
- La sincronización completa requiere K grandes pero no está garantizada
- El análisis de espacios de fase revela la estructura de atractores

Estos resultados ilustran la riqueza dinámica de sistemas de osciladores acoplados y la importancia del análisis numérico para comprender su comportamiento.