

Análisis del Modelo de Kuramoto: Sincronización en Sistemas de 2 y 3 Osciladores

Esteban Tobar

Resumen

Este documento presenta un análisis del modelo de Kuramoto para sistemas de osciladores acoplados. Se estudia la dinámica de sincronización para sistemas de 2 y 3 osciladores, analizando puntos fijos, estabilidad y transiciones de fase mediante.

1. Introducción

El modelo de Kuramoto describe la sincronización en sistemas de osciladores débilmente acoplados. La ecuación fundamental es:

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i)$$

donde θ_i es la fase del oscilador i -ésimo, ω_i su frecuencia natural, K la 'fuerza' de acoplamiento y N el número de osciladores.

Para un oscilador aislado, la ecuación de Kuramoto se reduce a:

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega$$

cuya solución es:

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega t$$

2. Parámetro de Orden

El grado de sincronización se mide mediante el parámetro de orden:

$$re^{i\psi} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j}$$

donde $r \in [0, 1]$ representa la coherencia de fase ($r = 0$: incoherencia total, $r = 1$: sincronización completa).

El parámetro de orden r surge naturalmente al reescribir la ecuación de Kuramoto en forma compleja. Partiendo de la ecuación original:

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i)$$

Usamos la identidad $\sin(\theta_j - \theta_i) = \text{Im}[e^{i(\theta_j - \theta_i)}]$ y reescribimos:

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \text{Im}[e^{i(\theta_j - \theta_i)}]$$

Factorizando $e^{-i\theta_i}$:

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \frac{K}{N} \text{Im} \left[e^{-i\theta_i} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j} \right]$$

Definiendo el parámetro de orden complejo $re^{i\psi} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j}$, obtenemos:

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \frac{K}{N} \text{Im} [e^{-i\theta_i} \cdot Nre^{i\psi}] = \omega_i + Kr \text{Im}[e^{i(\psi - \theta_i)}]$$

Finalmente, usando $\text{Im}[e^{i(\psi - \theta_i)}] = \sin(\psi - \theta_i)$, llegamos a:

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + Kr \sin(\psi - \theta_i)$$

Esta forma muestra que cada oscilador es influenciado por un campo medio de amplitud r y fase ψ .

3. Caso de 2 Osciladores

3.1. Ecuaciones Individuales

Para un oscilador aislado, la ecuación es simplemente:

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega$$

que se integra a $\theta(t) = \theta(0) + \omega t$, mostrando rotación uniforme.

Para 2 osciladores acoplados, las ecuaciones completas son:

$$\begin{aligned}\frac{d\theta_1}{dt} &= \omega_1 + \frac{K}{2} \sin(\theta_2 - \theta_1) \\ \frac{d\theta_2}{dt} &= \omega_2 + \frac{K}{2} \sin(\theta_1 - \theta_2)\end{aligned}$$

3.2. Reducción del Sistema

Definiendo $\phi = \theta_2 - \theta_1$ y $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$, y restando las ecuaciones anteriores, obtenemos:

$$\frac{d\phi}{dt} = \Delta\omega - K \sin \phi$$

3.3. Puntos Fijos y Potencial

Los puntos fijos satisfacen $\frac{d\phi}{dt} = 0$, es decir:

$$\sin \phi = \frac{\Delta\omega}{K}$$

Para que existan puntos fijos reales, se requiere $|\frac{\Delta\omega}{K}| \leq 1$, lo que define el **umbral de acoplamiento**:

$$K_{\text{umbral}} = |\Delta\omega|$$

Para $K < K_{\text{umbral}}$ no hay puntos fijos y ϕ oscila periódicamente. Para $K > K_{\text{umbral}}$ existen dos puntos fijos por período: uno estable y uno inestable.

El potencial efectivo se obtiene asumiendo que $\frac{d\phi}{dt} = -\frac{dV}{d\phi}$. Integrando:

$$V(\phi) = - \int (\Delta\omega - K \sin \phi) d\phi = -\Delta\omega\phi - K \cos \phi + C$$

Los mínimos de $V(\phi)$ corresponden a puntos fijos estables, y los máximos a inestables.

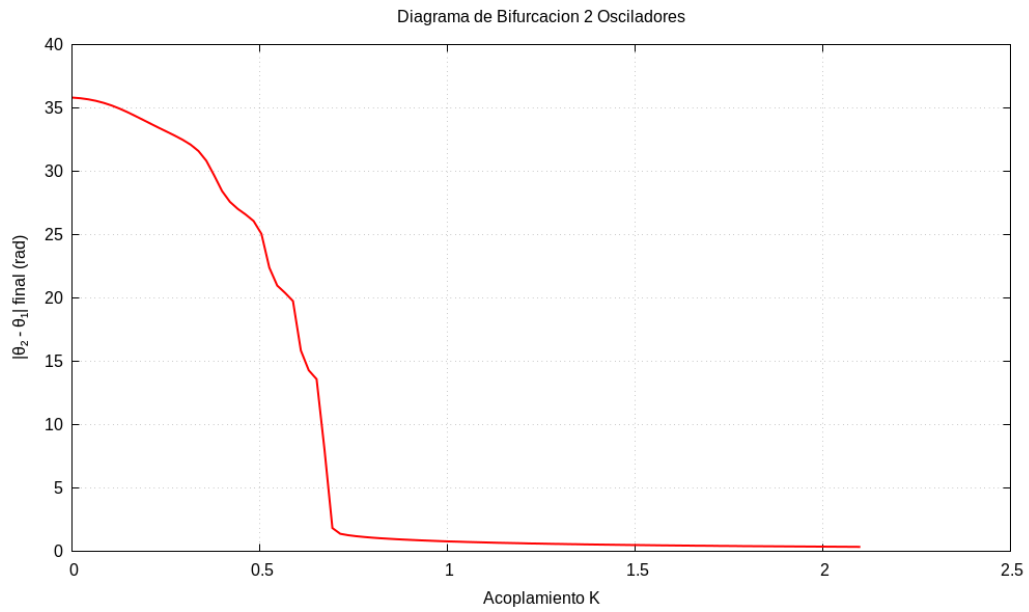


Figura 1: Bifurcación 2osc con diferencia de fases

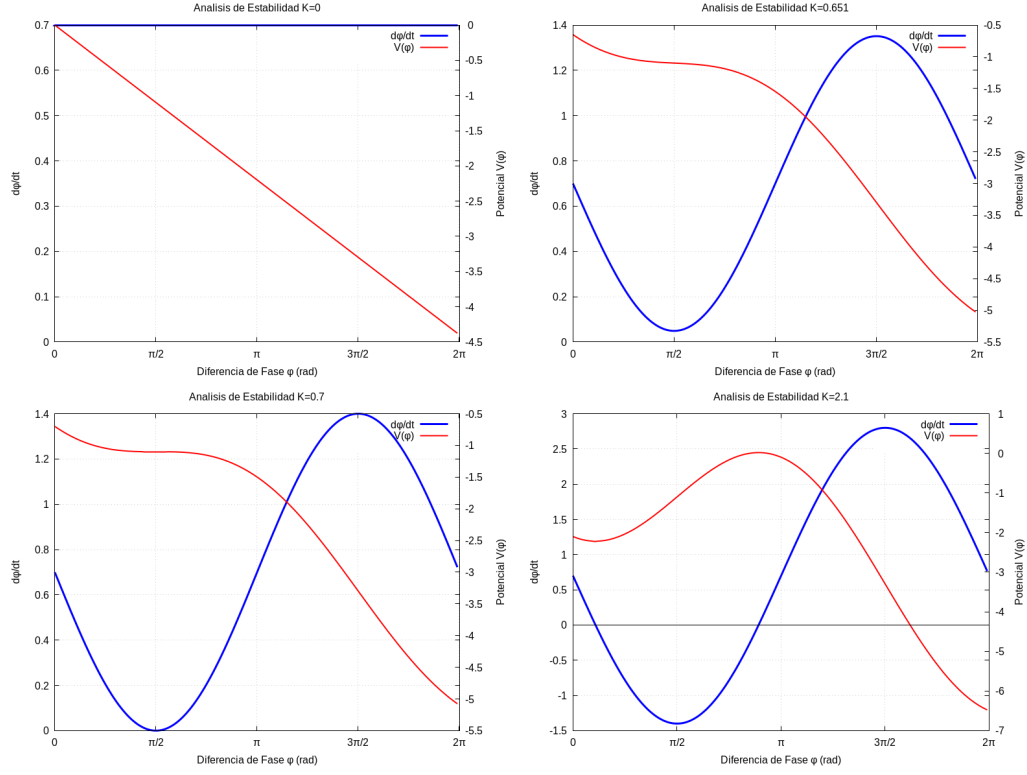


Figura 2: Puntos fijos de 2osc

4. Caso de 3 Osciladores

4.1. Ecuaciones Individuales

Las ecuaciones para los 3 osciladores son:

$$\frac{d\theta_1}{dt} = \omega_1 + \frac{K}{3} [\sin(\theta_2 - \theta_1) + \sin(\theta_3 - \theta_1)]$$

$$\frac{d\theta_2}{dt} = \omega_2 + \frac{K}{3} [\sin(\theta_1 - \theta_2) + \sin(\theta_3 - \theta_2)]$$

$$\frac{d\theta_3}{dt} = \omega_3 + \frac{K}{3} [\sin(\theta_1 - \theta_3) + \sin(\theta_2 - \theta_3)]$$

4.2. Formulación en Diferencias

Definiendo las tres diferencias de fase:

$$\Delta_{21} = \theta_2 - \theta_1$$

$$\Delta_{31} = \theta_3 - \theta_1$$

$$\Delta_{32} = \theta_3 - \theta_2 = \Delta_{31} - \Delta_{21}$$

Las ecuaciones se reducen a:

$$\frac{d\Delta_{21}}{dt} = \omega_2 - \omega_1 - \frac{K}{3} [\sin \Delta_{21} + \sin(\Delta_{31} - \Delta_{21}) + \sin \Delta_{31}]$$

$$\frac{d\Delta_{31}}{dt} = \omega_3 - \omega_1 - \frac{K}{3} [\sin \Delta_{31} + \sin(\Delta_{21} - \Delta_{31}) + \sin \Delta_{21}]$$

Nótese que Δ_{32} no es independiente, cumpliéndose $\Delta_{32} = \Delta_{31} - \Delta_{21}$.

5. Resultados Numéricos

5.1. Series Temporales

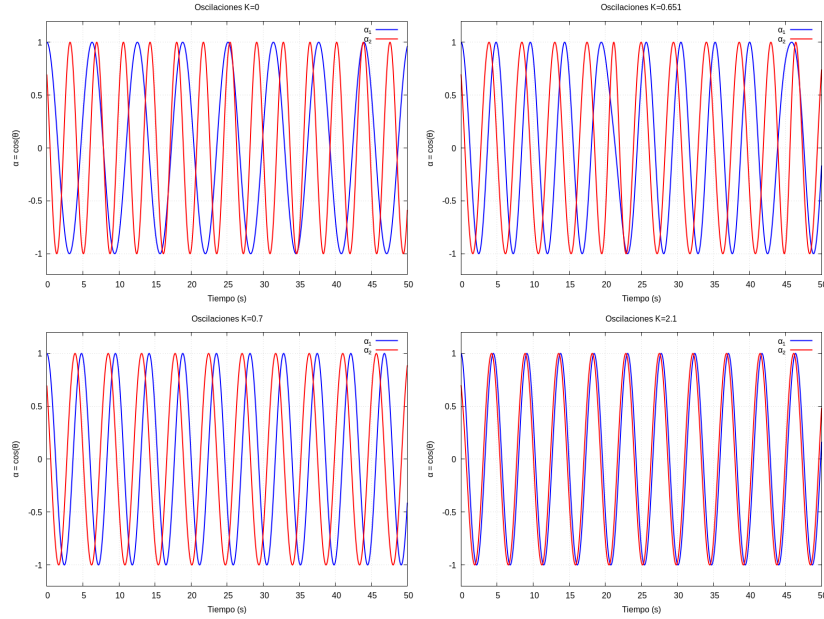


Figura 3: Series temporales para 2 osciladores

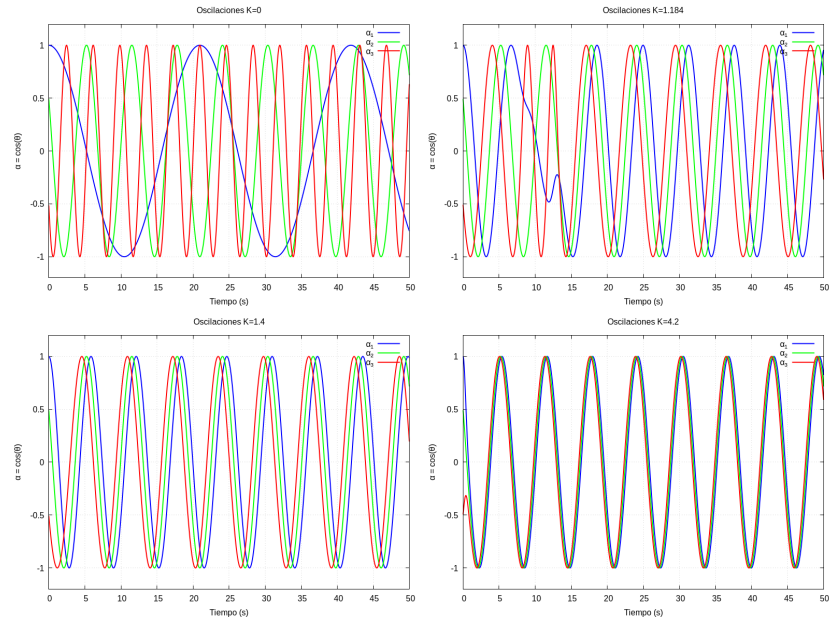


Figura 4: Series temporales para 3 osciladores

5.2. Parámetro de Orden

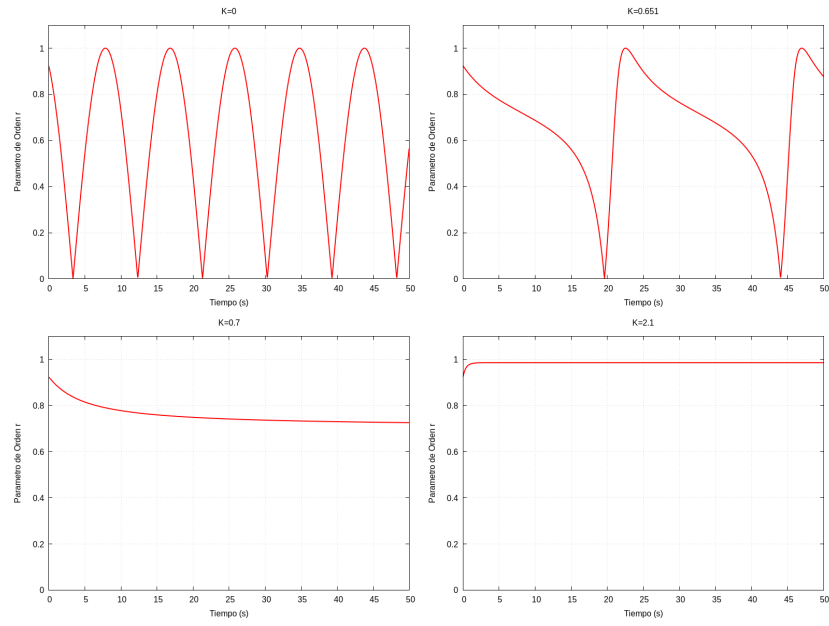


Figura 5: Parámetro de orden para 2 osciladores

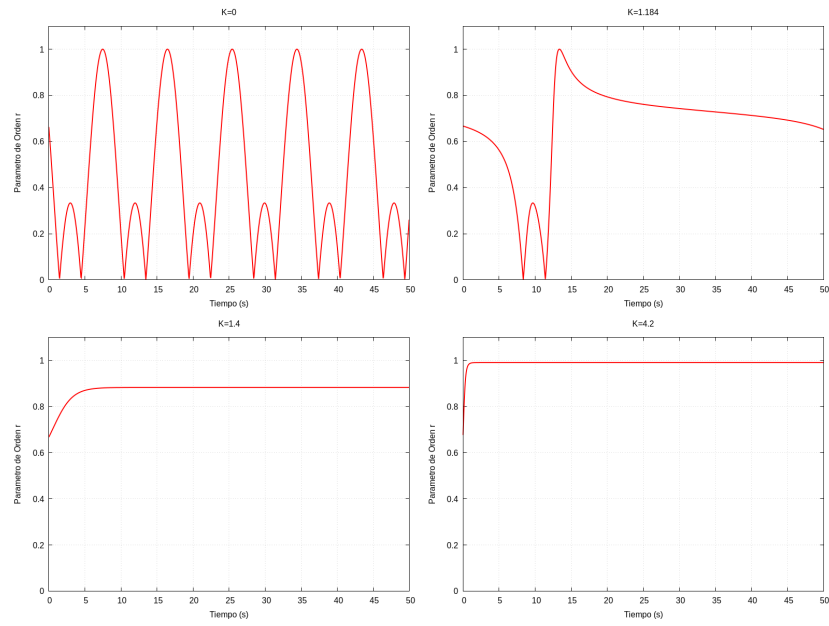


Figura 6: Parámetro de orden para 3 osciladores

5.3. Mapas de Sensibilidad

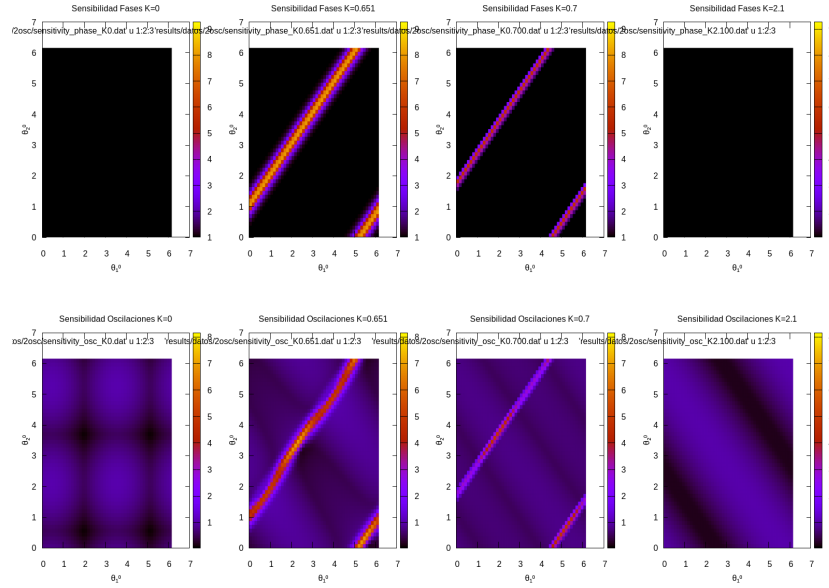


Figura 7: Mapas de fase

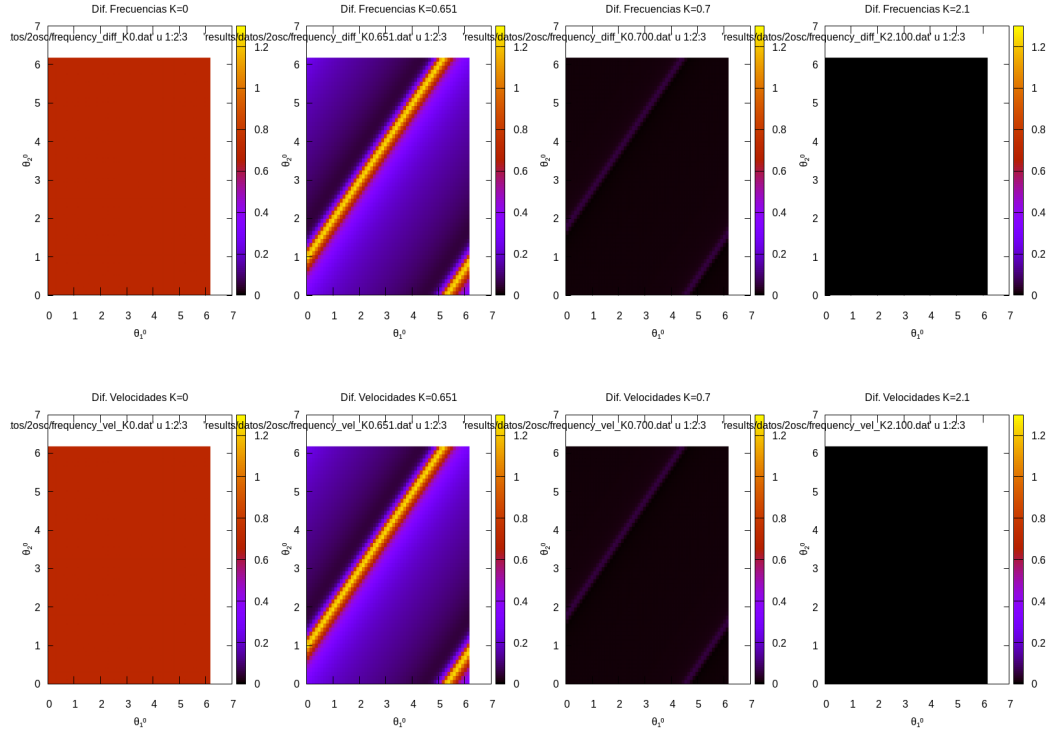


Figura 8: Mapas de frecuencia

5.4. Análisis de Bifurcación

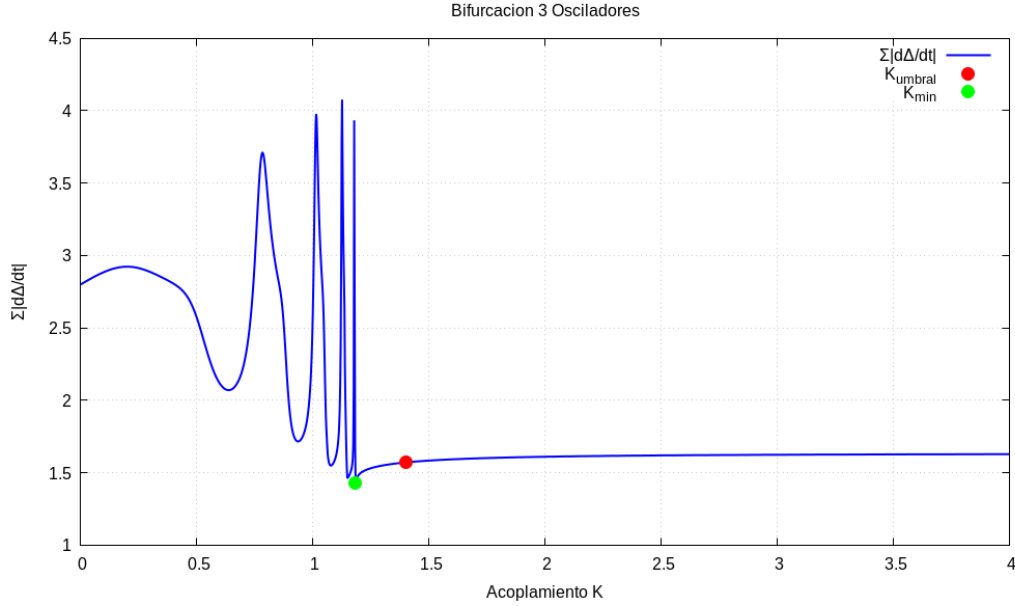


Figura 9: Bifurcación para 3 osciladores

6. Discusión

Para $N = 2$, la transición a sincronización es abrupta y determinística, ocurriendo en $K_{\text{umbral}} = |\Delta\omega|$. Para $N = 3$, el comportamiento es más complejo:

- No existe K_{umbral} único
- Múltiples estados estacionarios posibles
- Dependencia de condiciones iniciales
- Estados de sincronización parcial comunes

Los mapas de sensibilidad muestran regiones donde pequeñas variaciones en condiciones iniciales producen grandes cambios en el estado final.